INTEGRAL-C DAN KARAKTERISASI DESKRIPTIFNYA

Herry Pribawanto Suryawan

Jurusan Matematika Universitas Sanata Dharma Yogyakarta
E-mail: herrypribs@staff.usd.ac.id

Abstrak. Di dalam makalah ini akan dibicarakan suatu jenis integral tipe Riemann yang dikenal sebagai integral-C. Integral ini termuat di dalam integral Henstock-Kurzweil dan merupakan integral minimal yang memuat integral Lebesgue serta turunan. Pertama didefinisikan integral-C secara konstruktif dan kemudian diberikan karakterisasi deskriptif integral-C melalui suatu perumuman dari fungsi kontinu mutlak.

Kata kunci: *integral Lebesgue, integral Henstock-Kurzweil, integral-C, fungsi ACG-C*

1. Pendahuluan

Jika $F:[a,b]\to R$ suatu fungsi terdiferensial dan f adalah turunannya, maka permasalahan mencari F dari f disebut permasalahan (mencari) primitif. Pada tahun 1912, permasalahan primitif diselesaikan oleh A. Denjoy dengan suatu proses integrasi yang disebut totalisasi (*integral Denjoy*). Integral Denjoy juga memuat integral Lebesgue dan integral Riemann tak wajar. Pada tahun 1914, penyelesaian lain diberikan oleh O. Perron melalui metode yang berdasarkan pada fungsi mayor dan fungsi minor (*integral Perron*). Penyelesaian ketiga yang berdasarkan pada perumuman integral Riemann, diberikan secara independen oleh J. Kurzweil (1957) dan R. Henstock (1963) (*integral Henstock-Kurzweil*). Ketiga integral ini masing-masing memperumum aspek yang berbeda dari integral Lebesgue, tetapi satu hal yang menarik dan patut dicatat adalah bahwa ketiganya ekuivalen, dalam arti menghasilkan ruang fungsi terintegral yang sama dan memenuhi sifat-sifat yang sama. Pada tahun 1986, A.M. Bruckner, R.J. Fleissner, dan J. Foran menemukan bahwa penyelesaian yang diberikan oleh Denjoy, Perron, dan Henstock-Kurzweil memiliki perumuman yang tidak diperlukan. Perhatikan fungsi

$$F(x)=\begin{cases} x\sin\left(\frac{1}{x^2}\right) & ,\ 0<x\le 1 \\ 0 & ,\ x=0 \end{cases}$$

yang merupakan primitif untuk integral Denjoy, integral Perron, dan integral Henstock-Kurzweil (lebih tepatnya F adalah primitif untuk integral Riemann tak wajar), akan tetapi F bukan suatu primitif dari integral Lebesgue ataupun suatu fungsi terdiferensial. Hal ini menuntun pada penyelidikan mengenai integral minimal yang memuat integral Lebesgue sekaligus mengintegralkan turunan dari suatu fungsi terdiferensial. Jawaban dari permasalahan ini adalah suatu integral tipe Riemann yang dikenal sebagai integral-C. Pada bagian selanjutnya akan diberikan definisi integral-C secara konstruktif dan karakterisasi deskriptif integral-C dengan menggunakan konsep fungsi ACG-C (fungsi kontinu mutlak-C yang diperumum).

2. Integral-C dan Fungsi Kontinu Mutlak yang Diperumum-C

Diberikan fungsi positif δ pada $[a,b]$. *Partisi McShane yang subordinat terhadap δ dari $[a,b]$* adalah koleksi $\{(I_1,x_1),\ldots,(I_n,x_n)\}$ dari interval-interval yang tak saling tumpang tindih (*non-overlapping*) $I_i\subset[a,b]$ dan titik-titik $x_i\in[a,b]$ sehingga $I_i\subset\left(x_i-\delta(x_i),x_i+\delta(x_i)\right)$ dan $\sum_{i=1}^{n} l(I_i)=b-a$.

Definisi 1. *Fungsi $f:[a,b]\to R$ dikatakan terintegral-C pada $[a,b]$ jika ada bilangan real A dan untuk setiap $\varepsilon>0$ terdapat fungsi positif δ pada $[a,b]$ sehingga*

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(x_i)l(I_i)-A\right|<\varepsilon$$

untuk setiap partisi McShane $\{(I_1,x_1),\ldots,(I_n,x_n)\}$ *yang subordinat terhadap* δ *pada* $[a,b]$ *yang memenuhi*

$$\sum_{i=1}^{n} d(x_i,I_i) < \frac{1}{\varepsilon}$$

Notasi $d(x_i,I_i)$ menyatakan jarak titik x_i ke interval I_i, yaitu $d(x_i,I_i)=\inf\{|x_i-x| : x\in I_i\}$.

Bilangan real A disebut sebagai nilai integral-C dari fungsi f pada $[a,b]$ dan ditulis $A=(C)\int_a^b f$.

Pertama diperlihatkan bahwa koleksi semua fungsi yang terintegral-C pada interval $[a,b]$ merupakan ruang linear.

Teorema 2. Jika fungsi-fungsi $f,g:[a,b]\to R$ terintegral-C pada $[a,b]$ maka

(a) $f+g$ terintegral-C pada $[a,b]$ dan $(C)\int_a^b (f+g)=(C)\int_a^b f+(C)\int_a^b g$

(b) kf terintegral-C pada $[a,b]$ dan $(C)\int_a^b kf=k(C)\int_a^b f$, untuk setiap $k\in R$

Bukti: Ambil sebarang $\varepsilon>0$.

(a). Misalkan δ_1,δ_2 fungsi-fungsi positif pada $[a,b]$ sehingga apabila partisi McShane $\{(I_1,x_1),\ldots,(I_n,x_n)\}$ subordinat terhadap δ_1 pada $[a,b]$ dengan $\sum_{i=1}^{n} d(x_i,I_i)<\frac{1}{\varepsilon}$, maka $\left|\sum_{i=1}^{n} f(x_i)l(I_i)-(C)\int_a^b f\right|<\frac{\varepsilon}{2}$ dan apabila partisi McShane $\{(I_1,x_1),\ldots,(I_n,x_n)\}$ subordinat terhadap δ_2 pada $[a,b]$ dengan $\sum_{i=1}^{n} d(x_i,I_i)<\frac{1}{\varepsilon}$, maka $\left|\sum_{i=1}^{n} g(x_i)l(I_i)-(C)\int_a^b g\right|<\frac{\varepsilon}{2}$. Selanjutnya pilih $\delta(x)=\min\{\delta_1(x),\delta_2(x)\}$, $x\in[a,b]$, maka diperoleh apabila suatu partisi McShane subordinat terhadap δ, partisi tersebut juga subordinat terhadap δ_1 dan δ_2 dan berlaku

$$\begin{aligned}\left|\sum_{i=1}^{n}(f+g)(x_i)l(I_i)-\left((C)\int_a^b f+(C)\int_a^b g\right)\right| &= \left|\sum_{i=1}^{n}(f(x_i)+g(x_i))l(I_i)-\left((C)\int_a^b f+(C)\int_a^b g\right)\right|\\ &\le \left|\sum_{i=1}^{n} f(x_i)l(I_i)-(C)\int_a^b f\right|+\left|\sum_{i=1}^{n} g(x_i)l(I_i)-(C)\int_a^b g\right|\\ &< \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon .\end{aligned}$$

Jadi terbukti $f+g$ terintegral-C pada $[a,b]$ dan $(C)\int_a^b (f+g)=(C)\int_a^b f+(C)\int_a^b g$.

(b). Misalkan δ fungsi positif pada $[a,b]$ sehingga apabila partisi McShane $\{(I_1,x_1),\ldots,(I_n,x_n)\}$ subordinat terhadap δ pada $[a,b]$ dengan $\sum_{i=1}^{n} d(x_i,I_i)<\frac{1}{\varepsilon}$, maka untuk setiap bilangan real k berlaku $\left|\sum_{i=1}^{n} f(x_i)l(I_i)-(C)\int_a^b f\right|<\frac{\varepsilon}{|k|+1}$. Dengan demikian berlaku

$$\left|\sum_{i=1}^{n} kf(x_i)l(I_i) - k(C)\int_a^b f\right| = \left|k\sum_{i=1}^{n} f(x_i)l(I_i) - k(C)\int_a^b f\right|$$

$$\leq |k|\left|\sum_{i=1}^{n} f(x_i)l(I_i) - (C)\int_a^b f\right|$$

$$< |k|\frac{\varepsilon}{|k|+1}$$

$$< \varepsilon \,.$$

Jadi terbukti kf terintegral-C pada $[a,b]$ dan $(C)\int_a^b kf = k(C)\int_a^b f$, untuk setiap $k \in R$. ■

Telah diketahui bahwa integral Lebesgue ekuivalen dengan integral McShane dan sebagai akibatnya, fungsi yang terintegral Lebesgue akan terintegral-C dengan nilai integral yang sama. Akan diperlihatkan bahwa integral Lebesgue termuat secara proper di dalam integral-C. Sebelumnya terlebih dahulu ditunjukkan bahwa integral-C memuat semua turunan.

Teorema 3. *Setiap turunan akan terintegral-C.*

Bukti : Misalkan F fungsi yang terdiferensial pada $[a,b]$ dan $f(x) = F'(x)$ untuk setiap $x \in [a,b]$. Ambil $0 < \varepsilon < \frac{1}{b-a}$ dan $x \in [a,b]$, maka ada $\delta(x) > 0$ sehingga

$$\left|\frac{F(y)-F(x)}{y-x} - f(x)\right| < \frac{\varepsilon^2}{4} \qquad (1)$$

untuk setiap $y \in [a,b]$ dengan $|y-x| < \delta(x)$. Diberikan interval $I = (\alpha, \beta)$. Tulis $F(I) = F(\beta) - F(\alpha)$ dan $l(I) = l(\beta) - l(\alpha)$. Apabila I suatu subinterval dari $(x_i - \delta(x), x_i + \delta(x))$ maka menurut (1) diperoleh

$$|F(I) - f(x)l(I)| \leq |F(\beta) - F(x) - f(x)(\beta - x)| + |F(\alpha) - f(x) - f(x)(\alpha - x)|$$

$$< \frac{\varepsilon^2}{4}|\beta - x| + \frac{\varepsilon^2}{4}|\alpha - x|$$

$$\leq \frac{\varepsilon^2}{2}\big(d(x,I) + l(I)\big).$$

Oleh karena itu jika $\{(I_1, x_1), \ldots, (I_n, x_n)\}$ adalah partisi McShane yang subordinat terhadap δ dari $[a,b]$ yang memenuhi $\sum_{i=1}^{n} d(x_i, I_i) < \frac{1}{\varepsilon}$. Dari hasil di atas didapatkan

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(x_i)l(I_i) - \big(F(b) - F(a)\big)\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |f(x_i)l(I_i) - F(I_i)|$$

$$< \frac{\varepsilon^2}{2}\big(d(x,I) + l(I)\big)$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Jadi terbukti f terintegral-C pada $[a,b]$. ■

Teorema 4. *Koleksi fungsi terintegral Lebesgue merupakan subhimpunan sejati dari koleksi fungsi terintegral-C.*

Bukti : Cukup ditunjukkan ada fungsi terintegral-C yang tidak terintegral Lebesgue. Perhatikan fungsi f yang terdefinisi pada $[0,1]$ sebagai berikut:

$$f(x) = \begin{cases} 2x\cos\left(\frac{\pi}{x^2}\right) + \frac{2\pi}{x}\sin\left(\frac{\pi}{x^2}\right) & , 0 < x \leq 1 \\ 0 & , x = 0 \end{cases} .$$

Primitif fungsi f adalah fungsi F dengan definisi

$$F(x)=\begin{cases} x^2\cos\left(\frac{\pi}{x^2}\right) & ,0<x\le 1 \\ 0 & ,x=0 \end{cases}.$$

Untuk sebarang $n\in N$ dibentuk partisi $x_0=0, x_1=\frac{1}{\sqrt{n}}, x_2=\frac{1}{\sqrt{n-1}},\ldots,x_{n-1}=\frac{1}{\sqrt{2}}, x_n=1$. Karena

$F(x_0)=0, F(x_1)=\frac{(-1)^n}{n}, F(x_2)=\frac{(-1)^{n-1}}{n-1},\ldots,F(x_{n-1})=\frac{1}{2}, F(x_n)=-1$ maka diperoleh

$$\begin{aligned}&|F(x_1)-F(x_0)|+|F(x_2)-F(x_1)|+\ldots+|F(x_n)-F(x_{n-1})|\\ &=\frac{1}{n}+\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}\right)+\left(\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n-2}\right)+\ldots+\left(1+\frac{1}{2}\right)\\ &=1+2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right).\end{aligned}$$

Karena $n\in N$ sebarang maka terlihat bahwa F tidak bervariasi terbatas pada $[0,1]$, yang berarti F tidak kontinu mutlak pada $[0,1]$. Hal ini berakibat bahwa fungsi f tidak terintegral Lebesgue pada $[0,1]$. Di lain pihak F terdiferensial pada $[0,1]$ dengan $F'(x)=f(x),\ x\in[0,1]$. Dengan demikian menurut Teorema 3, fungsi f terintegral-C pada $[0,1]$. ■

Selanjutnya perhatikan bahwa fungsi yang terintegral-C akan terintegral Henstock-Kurzweil dengan nilai integral yang sama. Untuk memperlihatkan bahwa integral-C termuat secara proper di dalam integral Henstock-Kurzweil diperlukan versi integral-C dari Lema Saks-Henstock sebagai berikut :

Lema 5. *Jika fungsi* $f:[a,b]\to R$ *terintegral-C pada* $[a,b]$, *maka untuk setiap* $\varepsilon>0$ *terdapat fungsi positif* δ *pada* $[a,b]$ *sehingga*

$$\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)l(I_i)-(C)\int_{I_i}f|<\varepsilon$$

untuk setiap partisi McShane parsial $\{(I_1,x_1),\ldots,(I_n,x_n)\}$ *yang subordinat terhadap* δ *dari* $[a,b]$, *dengan* $\sum_{i=1}^{n}d(x_i,I_i)<\frac{1}{\varepsilon}$.

(Lihat Yee, 2000 atau Piazza, 2002).

Dalam hal ini partisi McShane parsial yang subordinat terhadap δ dari $[a,b]$ adalah koleksi $\{(I_1,x_1),\ldots,(I_n,x_n)\}$ dari interval-interval yang tak saling tumpang tindih $I_i\subset[a,b]$ dan titik-titik $x_i\in[a,b]$ sehingga $I_i\subset(x_i-\delta(x_i),x_i+\delta(x_i))$ dan $\sum_{i=1}^{n}l(I_i)<b-a$.

Teorema 6. *Koleksi fungsi terintegral-C merupakan subhimpunan sejati dari koleksi fungsi terintegral Henstock-Kurzweil.*

Bukti : Cukup ditunjukkan ada fungsi terintegral Henstock-Kurzweil yang tidak terintegral-C. Perhatikan fungsi F dengan definisi

$$F(x)=\begin{cases} x\sin\left(\frac{1}{x^2}\right) & ,0<x\le 1 \\ 0 & ,x=0 \end{cases}$$

dan didefinisikan $f=F'$ pada $(0,1]$ dan $f(0)=0$. Mudah diperiksa bahwa f terintegral Riemann tak wajar pada $[0,1]$ yang berarti f terintegral Henstock-Kurzweil pada $[0,1]$. Andaikan f terintegral-C pada $[0,1]$. Ambil sebarang $\varepsilon>0$, pilih fungsi positif δ seperti pada Lema 5, dan $a_n=(\pi+2n\pi)^{-1/2}$ dan $b_n=(\frac{\pi}{2}+2n\pi)^{-1/2}$. Mudah dilihat bahwa $\sum_n a_n=\sum_n b_n=\infty$, dan interval-interval (a_n,b_n), $n=1,2,\ldots$ adalah saling asing. Lebih lanjut diperoleh $F(a_n)=0$ dan $F(b_n)=b_n$, untuk setiap $n\in N$.

Pilih bilangan asli m, p sehingga $(a_{m+i}, b_{m+i}) \subset (0, \delta(0))$, $i = 1,2,\ldots,p$ dan $\varepsilon < \sum_{i=1}^{p} a_{m+i} < \frac{1}{\varepsilon}$. Jadi $\sum_{i=1}^{p} b_{m+i} > \sum_{i=1}^{p} a_{m+i} > \varepsilon$. Selanjutnya didefinisikan $I_1 = (a_{m+1}, b_{m+1}), \ldots, I_p = (a_{m+p}, b_{m+p})$, maka koleksi $\{(I_1, 0), \ldots, (I_p, 0)\}$ adalah partisi McShane parsial yang subordinat terhadap δ dari $[0,1]$, dan berlaku $\sum_{i=1}^{p} d(0, I_i) = \sum_{i=1}^{p} a_i < \frac{1}{\varepsilon}$. Lebih lanjut,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{p} \left| f(0) l(I_i) - (C)\int_{I_i} f \right| &= \sum_{i=1}^{p} |F(b_{m+i}) - F(a_{m+i})| \\ &= \sum_{i=1}^{p} b_{m+i} \\ &> \varepsilon \end{aligned}$$

Terjadi kontradiksi, jadi f tidak terintegral-C pada $[0,1]$. ■

Dari sini juga terlihat bahwa integral-C tidak memuat integral Riemann tak wajar.

Sekarang akan dibicarakan karakterisasi deskriptif integral-C. Untuk hal itu diperkenalkan pengertian fungsi kontinu mutlak-C dan fungsi kontinu mutlak-C yang diperumum.

Definisi 7. *Fungsi $F : [a,b] \to R$ dikatakan kontinu mutlak-C (atau singkatnya fungsi AC-C) pada himpunan $E \subset [a,b]$ jika untuk setiap $\varepsilon > 0$, ada $\eta > 0$ dan ada fungsi positif δ pada E sehingga berlaku*

$$\sum_{i=1}^{n} |F(I_i)| < \varepsilon \qquad (2)$$

untuk setiap partisi McShane parsial $\{(I_1, x_1), \ldots, (I_n, x_n)\}$ yang subordinat terhadap δ dari $[a,b]$, yang memenuhi kondisi berikut:

(i). $x_i \in E$, $i = 1,2,\ldots,n$

(ii). $\sum_{i=1}^{n} d(x_i, I_i) < \frac{1}{\varepsilon}$

(iii). $\sum_{i=1}^{n} l(I_i) < \eta$.

Definisi 8. *Fungsi $F : [a,b] \to R$ dikatakan kontinu mutlak-C diperumum (atau singkatnya fungsi ACG-C) pada interval $[a,b]$ apabila ada himpunan-himpunan terukur $E_1, E_2, \ldots$ di dalam $[a,b]$ sehingga $\bigcup_i E_i = [a,b]$ dan F bersifat AC-C pada setiap E_i.*

Konsep yang sejalan untuk integral Henstock-Kurzweil adalah fungsi AC-δ dan fungsi ACG-δ. Fungsi $F : [a,b] \to R$ dikatakan kontinu mutlak-δ (atau singkatnya fungsi AC-δ) pada himpunan $E \subset [a,b]$ jika untuk setiap $\varepsilon > 0$, ada $\eta > 0$ dan ada fungsi positif δ pada E sehingga (2) berlaku untuk setiap partisi McShane parsial $\{(I_1, x_1), \ldots, (I_n, x_n)\}$ yang subordinat terhadap δ dari $[a,b]$, yang memenuhi kondisi berikut:

(i). $x_i \in E$, $i = 1,2,\ldots,n$

(ii). $\sum_{i=1}^{n} d(x_i, I_i) = 0$

(iii). $\sum_{i=1}^{n} l(I_i) < \eta$.

Lebih lanjut, F dikatakan kontinu mutlak-δ diperumum (atau singkatnya fungsi ACG-δ) pada interval $[a,b]$ apabila ada himpunan-himpunan terukur $E_1, E_2, \ldots$ di dalam $[a,b]$ sehingga $\bigcup_i E_i = [a,b]$ dan F bersifat AC-δ pada setiap E_i.

Dari sini cukup jelas bahwa setiap fungsi AC-C adalah fungsi AC-δ dan setiap fungsi ACG-C adalah fungsi ACG-δ.

Lema 9. *Jika F fungsi ACG-C pada $[a,b]$ dan $E \subset [a,b]$ dengan $m(E)=0$ (m menyatakan ukuran Lebesgue), maka untuk setiap $\varepsilon > 0$ ada fungsi positif δ pada E sehingga*

$$\sum_{i=1}^{n} |F(I_i)| < \varepsilon$$

untuk setiap partisi McShane parsial $\{(I_1,x_1),\ldots,(I_n,x_n)\}$ yang subordinat terhadap δ dari $[a,b]$, yang memenuhi kondisi berikut:

(i). $x_i \in E$, $i = 1,2,\ldots,n$

(ii). $\sum_{i=1}^{n} d(x_i, I_i) < \frac{1}{\varepsilon}$.

Terakhir diberikan karakteristik deskriptif integral-C dengan menggunakan fungsi ACG-C. Teorema berikut dapat juga dipandang sebagai Teorema Dasar Kalkulus untuk integral-C.

Teorema 10. Fungsi F adalah fungsi ACG-C pada $[a,b]$ jika dan hanya jika terdapat fungsi terintegral-C pada $[a,b]$ yaitu f sehingga

$$F(x) - F(a) = (C)\int_a^x f(t)\, dt$$

untuk setiap $x \in [a,b]$.

Bukti : Pertama diasumsikan F adalah fungsi ACG-C pada $[a,b]$, maka F adalah fungsi ACG-δ pada $[a,b]$ dan karenanya F terdiferensial hampir di mana-mana pada $[a,b]$. Misalkan E adalah himpunan titik-titik $x \in [a,b]$ sehingga F tidak terdiferensialkan di x, maka $m(E)=0$. Jadi menurut Lema 9, untuk $0 < \varepsilon \le \frac{1}{b-a}$, ada fungsi positif τ pada $[a,b]$ sehingga $\sum_{i=1}^{p} |F(I_i)| < \frac{\varepsilon}{4}$, untuk setiap partisi McShane parsial $\{(J_1,x_1),\ldots,(J_p,x_p)\}$ yang subordinat terhadap τ dari $[a,b]$ dengan

$$\sum_{i=1}^{p} d(x_i, J_i) < \frac{1}{\varepsilon} \text{ dan } x_i \in E,\ i = 1,2,\ldots,p.$$

Apabila F terdiferensial di y maka dari langkah bukti pada Teorema 3 dapat dicari konstanta positif $\gamma(y)$ sehingga

$$|F(I) - F'(y)l(I)| < \frac{\varepsilon^2}{2}\left(d(y,I) + l(I)\right)$$

untuk setiap interval $I \subset (y-\gamma(y), y+\gamma(y))$. Selanjutnya definisikan fungsi positif

$$\delta(y) = \begin{cases} \tau(y) & , y \in E \\ \gamma(y) & , y \notin E \end{cases}$$

dan

$$f(y) = \begin{cases} 0 & , y \in E \\ F'(y) & , y \notin E \end{cases} .$$

Ambil sebarang $x \in [a,b]$ dan $\{(I_1,x_1),\ldots,(I_n,x_n)\}$ adalah partisi McShane yang subordinat terhadap δ dari $[a,x]$ sehingga $\sum_{i=1}^{n} d(x_i, I_i) < \frac{1}{\varepsilon}$. Maka kita peroleh

$$
\begin{aligned}
\left|\sum_{i=1}^{n} f(x_i)l(I_i) - (F(x) - F(a))\right| &\le \sum_{i=1}^{n} |f(x_i)l(I_i) - F(I_i)| \\
&< \sum_{x_i \in E} |F(I_i)| + \sum_{x_i \notin E} |F'(x_i)l(I_i) - F(I_i)| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{x_i \notin E} \frac{\varepsilon^2}{4} (d(x_i, I_i) + l(I_i)) \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} \varepsilon(b-a) \\
&\le \varepsilon .
\end{aligned}
$$

Jadi f terintegral-C pada $[a,x]$ dan berlaku

$$F(x) - F(a) = (C)\int_a^x f(t)\, dt .$$

Khususnya bila diambil $x = b$ maka diperoleh bahwa f terintegral-C pada $[a,b]$ serta berlaku

$$F(b) - F(a) = (C)\int_a^b f(t)\, dt .$$

Sebaliknya, diasumsikan bahwa f terintegral-C pada $[a,b]$ dan F adalah primitif integral-C dari f. Untuk setiap bilangan asli n didefinisikan himpunan $E_n = \{x \in [a,b] : |f(x)| \le n\}$, maka diperoleh $[a,b] = \bigcup_n E_n$. Dari sini cukup ditunjukkan bahwa F adalah fungsi AC-C pada setiap E_n. Menurut Lema 5, apabila diambil sebarang $\varepsilon > 0$, maka dapat dicari fungsi positif δ pada $[a,b]$ sehingga

$$\sum_{i=1}^{p} |f(x_i)l(I_i) - f(I_i)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

untuk setiap partisi McShane parsial $\{(I_1, x_1), \ldots, (I_p, x_p)\}$ yang subordinat terhadap δ dari $[a,b]$ dengan $\sum_{i=1}^{p} d(x_i, I_i) < \frac{1}{\varepsilon}$. Diasumsikan bahwa $x_i \in E_n, i = 1,2,\ldots,p$ dan $\sum_{i=1}^{p} l(I_i) < \frac{\varepsilon}{2n}$. Maka berlaku

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{p} |F(I_i)| &\le \sum_{i=1}^{p} |f(x_i)l(I_i) - F(I_i)| + \sum_{i=1}^{p} |f(x_i)| l(I_i) \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + n\sum_{i=1}^{p} l(I_i) \\
&< \varepsilon .
\end{aligned}
$$

Jadi diperoleh F bersifat AC-C pada E_n untuk setiap n. Dengan kata lain terbukti F bersifat ACG-C pada $[a,b]$. ■

3. Simpulan

Integral-C merupakan integral tipe Riemann minimal yang memuat integral Lebesgue dan turunan. Definisi konstruktif integral-C diperoleh dengan sedikit modifikasi pada definisi konstruktif integral McShane. Integral-C ini ternyata termuat secara proper dalam integral Henstock-Kurzweil. Sementara itu karakterisasi deskriptif integral-C diperoleh melalui suatu perumuman fungsi kontinu mutlak yang disebut fungsi AC-C dan fungsi ACG-C. Hasil ini sejalan dengan karakterisasi deskriptif integral Lebesgue melalui fungsi kontinu mutlak maupun integral Henstock-Kurzweil melalui fungsi AC-δ dan ACG-δ.

4. Daftar Pustaka

[1] Bartle, R.G., *A Modern Theory of Integration*. Grad. Stud. in Math. 32, American

Mathematical Society, 2000

[2] Bongiorno, B., *"On The Minimal Solution of the Problem of Primitives"* in *J. Math. Anal. Appl. 251*, 2000, p. 479-486.

[3] Gordon, R.A., *The Integrals of Lebesgue, Denjoy, Perron, and Henstock*, Grad. Stud. in Math. 4, American Mathematical Society, 1994

[4] Pffefer, W.F., *The Riemann Approach to Integration*, Cambridge University Press, 1993

[5] Piazza, L.D., *"A Riemann-type Minimal Integral for the Classical Problem of Primitives"* *in Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste Vol. XXXIV*, 2002, p. 143-153.

[6] Swartz, C., *Introduction to Gauge Integrals*, Singapore: World Scientific, 2001

[7] Yee, L.P, and Vyborny, R., *The Integral: An Easy Approach after Kurzweil and Henstock.* Cambridge University Press, 2000