Teorema Pemetaan Kontraksi dan Penerapannya Pada Persamaan Integral Fredholm

Herry Pribawanto Suryawan

Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Sanata Dharma Yogyakarta
E-mail: herrypribs@staff.usd.ac.id

Abstrak

Di dalam makalah ini akan dibicarakan Teorema Pemetaan Kontraksi yang menjamin eksistensi dan ketunggalan penyelesaian suatu persamaan operator di ruang Banach. Selanjutnya teorema ini akan digunakan untuk mempelajari persamaan integral Fredholm jenis kedua baik yang linear maupun tak linear. Khususnya akan diturunkan suatu metode iteratif untuk menentukan penyelesaian dari persamaan integral tersebut.

Kata kunci: *titik tetap, teorema pemetaan kontraksi, persamaan integral Fredholm*

Pendahuluan

Persamaan di dalam matematika seringkali dapat dituliskan dalam suatu persamaan operator berbentuk

$$Tx = x \qquad .....(1)$$

dengan T suatu operator di ruang Banach dan x adalah suatu anggota ruang Banach yang tak diketahui. Penyelesaian dari (1) disebut titik tetap operator T. Jadi dapat dikatakan bahwa titik tetap merupakan anggota dari ruang tersebut yang tidak berubah terhadap aksi dari T. Banyak permasalahan di dalam matematika terkait dengan eksistensi dan penentuan titik tetap. Sebagai contoh diberikan $C[0,1]$ yaitu ruang fungsi kontinu bernilai kompleks yang terdefinisi pada interval $[0,1]$ dan didefinisikan operator $T : C[0,1] \to C[0,1]$ dengan

$$(Tf)(x) = f(0) + \int_0^x f(t)\, dt.$$

Maka untuk setiap bilangan kompleks c, fungsi $f(x) = ce^x$ merupakan titik tetap dari T.

Pada makalah ini akan dibicarakan salah satu teorema yang menjamin eksistensi titik tetap dari operator di ruang Banach, yang dikenal sebagai Teorema Pemetaan Kontraksi atau Teorema Titik Tetap Banach. Teorema ini mempunyai banyak sekali penerapan, khususnya dalam hal menjamin eksistensi penyelesaian suatu persamaan dalam matematika. Dalam makalah ini dibahas penerapan pemetaan kontraksi untuk mempelajari penyelesaian persamaan integral Fredholm, yaitu persamaan berbentuk

$$\phi(x) = \int_a^b K(x,t) f(t)\, dt$$

dan

$$f(x) = \int_a^b K(x,t) f(t)\, dt + \phi(x)$$

dengan fungsi ϕ dan fungsi kernel K diberikan, sementara f adalah fungsi yang tidak diketahui. Persamaan integral Fredholm seringkali muncul dalam masalah fisis dan analisis Fourier.

Teorema Pemetaan Kontraksi dan Persamaan Integral Fredholm

Pada bagian ini pertama dibicarakan pengertian pemetaan kontraksi. Pemetaan $f: E \to E$ dimana E suatu subhimpunan dari ruang bernorma disebut pemetaan kontraksi jika terdapat bilangan positif $\alpha < 1$ sehingga berlaku $\|f(x) - f(y)\| \le \alpha \|x - y\|$ untuk setiap $x, y \in E$. Cukup jelas bahwa setiap pemetaan kontraksi bersifat kontinu. Contoh pemetaan kontraksi adalah pemetaan $f: X \to X$ dengan $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{x}$ dan $X = \{x \in R : x \ge 1\}$.

Sekarang diberikan teorema pemetaan kontraksi dan buktinya.

Teorema 1. *Jika F subhimpunan tertutup dari ruang Banach E dan $f: F \to F$ pemetaan kontraksi, maka f mempunyai titik tetap yang tunggal, yaitu terdapat tepat satu $p \in F$ sehingga $f(p) = p$.*

Bukti: Misalkan $0 < \alpha < 1$ sehingga $\|f(x) - f(y)\| \le \alpha \|x - y\|$ untuk setiap $x, y \in F$. Ambil sebarang $x_0 \in F$ dan definisikan $x_n = f(x_{n-1})$ untuk $n = 1, 2, \ldots$. Pertama, perhatikan bahwa untuk setiap bilangan asli n berlaku

$$\|x_{n+1} - x_n\| \le \alpha \|x_n - x_{n-1}\| \le \alpha^2 \|x_{n-1} - x_{n-2}\| \le \ldots \le \alpha^n \|x_1 - x_0\|.$$

Jadi untuk setiap $m, n \in N$ sehingga $m < n$ berlaku

$$\begin{aligned} \|x_n - x_m\| &\le \|x_n - x_{n-1}\| + \|x_{n-1} - x_{n-2}\| + \ldots + \|x_{m+1} - x_m\| \\ &\le \left(\alpha^{n-1} + \alpha^{n-2} + \ldots + \alpha^m\right) \|x_1 - x_0\| \\ &\le \frac{\|x_1 - x_0\|}{1-\alpha} \alpha^m \to 0 \end{aligned}$$

untuk $m \to \infty$.

Hal ini menunjukkan bahwa (x_n) merupakan barisan Cauchy. Karena F subhimpunan tertutup dari ruang yang lengkap, maka ada $p \in F$ sehingga $x_n \to p$ untuk $n \to \infty$. Selanjutnya karena

$$\begin{aligned}\|f(p)-p\| &\le \|f(p)-x_n\| + \|x_n - p\| \\ &= \|f(p)-f(x_{n-1})\| + \|x_n - p\| \\ &\le \alpha\|p - x_{n-1}\| + \|x_n - p\| \to 0\end{aligned}$$

untuk $n \to \infty$, maka diperoleh bahwa $f(p) = p$. Terakhir diandaikan bahwa $f(q) = q$ untuk suatu $q \in F$, maka

$$\|p-q\| = \|f(p)-f(q)\| \le \alpha\|p-q\|.$$

Jadi haruslah $p = q$. ■

Teorema pemetaan kontraksi tidak hanya memberikan jaminan eksistensi dan ketunggalan, tetapi juga memberikan algoritma untuk mencari penyelesaian dari suatu persamaan dengan prosedur iteratif.

Sifat selanjutnya merupakan perumuman dari Teorema 1, dan menjadi bagian esensial dalam bukti eksistensi dan ketunggalan penyelesaian persamaan integral Fredholm.

Teorema 2. *Diberikan E ruang Banach. Jika $T : E \to E$ operator kontinu sehingga T^m merupakan pemetaan kontraksi untuk suatu $m \in N$, maka T mempunyai titik tetap tunggal.*

Bukti : Menurut Teorema 1, T^m mempunyai titik tetap tunggal $x_0 \in E$, yaitu persamaan $T^m x = x$ mempunyai penyelesaian tunggal. Jika x sebarang titik di E maka $\lim_{n\to\infty}(T^m)^n x = x_0$ atau $\lim_{n\to\infty}(T^m)^n Tx = x_0$. Jadi

$$x_0 = \lim_{n\to\infty} T(T^m)^n x = T\left(\lim_{n\to\infty}(T^m)^n x\right) = Tx_0.$$

Misalkan $Tx_0 = x_0$ dan $Ty_0 = y_0$, maka $T^m x_0 = x_0$ dan $T^m y_0 = y_0$. Karena T^m pemetaan kontraksi maka $x_0 = y_0$. Jadi T mempunyai titik tetap yang tunggal. ■

Teorema 3. *Jika A operator linear terbatas pada ruang Banach E dan g sebarang anggota E, maka operator dengan definisi $Tf = \alpha Af + g$ mempunyai titik tetap tunggal untuk $|\alpha|$ yang cukup kecil. Lebih jauh, jika k adalah konstanta positif sehingga $\|Af\| \leq k\|f\|$ untuk setiap $f \in E$ dan $|\alpha|k < 1$, maka persamaan $Tf = f$ mempunyai penyelesaian tunggal.*

Bukti : Karena A terbatas maka ada konstanta k sehingga $\|Af_1 - Af_2\| \leq k\|f_1 - f_2\|$ untuk setiap $f_1, f_2 \in E$. Jadi

$$\|Tf_1 - Tf_2\| = |\alpha|\|Af_1 - Af_2\| \leq |\alpha|k\|f_1 - f_2\|$$

yang berarti T merupakan pemetaan kontraksi apabila $|\alpha| < \frac{1}{k}$. Dalam hal demikian maka menurut Teorema 1, T mempunyai titik tetap tunggal. ■

Apabila proses iteratif diterapkan pada teorema di atas, diperoleh barisan hampiran untuk penyelesaian persamaan operator tersebut yaitu

f_0 sebarang anggota E

$$f_1 = Tf_0 = \alpha Af_0 = g,$$

$$f_2 = T(\alpha Af_0 + g) = \alpha^2 A^2 f_0 + \alpha Ag + g,$$

$$\vdots$$

$$f_n = \alpha^n A^n f_0 + \alpha^{n-1}A^{n-1}g + \ldots + \alpha^2 A^2 g + \alpha Ag + g,$$

$$\vdots$$

Oleh karena itu, penyelesaian f dapat dituliskan sebagai

$$f = g + \alpha Ag + \alpha^2 A^2 g + \ldots + \alpha^n A^n g + \ldots \qquad .....(2)$$

Secara formal, ekspansi (2) dapat diperoleh langsung dari persamaan $f - \alpha Af = g$ dengan menjabarkan $(I - \alpha A)^{-1}$ menjadi deret geometri

$$(I - \alpha A)^{-1} = I + \alpha A + \alpha^2 A^2 + \ldots \qquad .....(3)$$

Deret (3) dikenal sebagai deret Neumann.

Teorema 4. *Jika* A *operator linear terbatas pada suatu ruang Banach* E *dan* $\|A\| < |\lambda|$, *maka* $A_\lambda = (A - \lambda I)^{-1}$ *merupakan operator terbatas,* $A_\lambda = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{\lambda^{n+1}}$ *dan* $\|A_\lambda\| \le \frac{1}{|\lambda| - \|A\|}$.

Bukti : Karena $\left\|\frac{A}{\lambda}\right\| < 1$, maka $\sum_{n=0}^{\infty} \left\|\frac{A^n}{\lambda^n}\right\| \le \sum_{n=0}^{\infty} \left\|\frac{A}{\lambda}\right\|^n < \infty$. Oleh karena itu, dengan mengingat bahwa ruang semua operator linear terbatas dari E ke E merupakan ruang Banach, maka ada operator linear terbatas B pada E sehingga $B = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{\lambda^n}$.

Lebih jauh,

$$(A - \lambda I) B = (A - \lambda I)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{\lambda^n}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^{n+1} - \lambda A^n}{\lambda^n} = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{A^{n+1}}{\lambda^{n+1}} - \frac{A^n}{\lambda^n}\right) = -\lambda I .$$

Dengan cara yang sama diperoleh $B(A - \lambda I) = -\lambda I$. Dengan demikian diperoleh

$$A_\lambda = (A - \lambda I)^{-1} = -\frac{B}{\lambda} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{\lambda^{n+1}} .$$

Selanjutnya,

$$\|A_\lambda\| \le \frac{1}{|\lambda|} \sum_{n=0}^{\infty} \left\|\frac{A}{\lambda}\right\|^n = \frac{1}{|\lambda|} \frac{1}{1 - \left\|\frac{A}{\lambda}\right\|^n} = \frac{1}{|\lambda| - \|A\|} . \quad \blacksquare$$

Akibat 5. *Jika* A *operator linear terbatas pada suatu ruang Banach dan* $|\alpha|\|A\| < 1$, *maka persamaan* $x = x_0 + \alpha A x$ *mempunyai penyelesaian tunggal yang diberikan oleh* $x = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n A^n x_0$.

Teorema selanjutnya dikenal sebagai Alternatif Fredholm untuk operator kompak self-adjoint. Teorema ini memberikan kriteria untuk eksistensi penyelesaian persamaan operator linear.

Teorema 6. *Diketahui A operator kompak self-adjoint pada ruang Hilbert H. Maka persamaan operator tak homogen*

$$f = Af + g \qquad .....(4)$$

mempunyai penyelesaian tunggal untuk setiap $g \in H$ jika dan hanya jika persamaan homogen

$$h = Ah \qquad .....(5)$$

hanya mempunyai penyelesaian trivial $h = 0$.

Lebih jauh, jika persamaan (4) mempunyai penyelesaian maka $\langle g,h \rangle = 0$ untuk setiap penyelesaian h dari (5).

Bukti : Menurut teorema spektral untuk operator kompak self-adjoint (misalnya pada Debnath [2] Th. 4.10.2), H memiliki basis ortonormal (v_n) yang terdiri dari vektor-vektor karakteristik dari A yang berkorespondensi dengan nilai-nilai karakteristik (λ_n). Tuliskan

$$g = \sum_{n=1}^{\infty} c_n v_n \qquad .....(6)$$

Akan dicari penyelesaian dari (4) dalam bentuk $f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n v_n$. Dari sini diperoleh

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n v_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \lambda_n v_n + \sum_{n=1}^{\infty} c_n v_n$, yang berarti

$$a_n = \frac{c_n}{1-\lambda_n} \qquad .....(7)$$

untuk setiap $n \in N$, asalkan $\lambda_n \neq 1$. Apabila (5) tidak mempunyai penyelesaian tak nol, maka 1 bukanlah nilai karakteristik dari A sehingga (7) benar. Oleh karena itu jika (4) mempunyai penyelesaian, maka penyelesaian tersebut haruslah berbentuk

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{1-\lambda_n} v_n.$$

Ini menunjukkan bahwa jika (4) mempunyai penyelesaian, maka penyelesaian tersebut tunggal. Untuk memperlihatkan eksistensi penyelesaian (4), cukup ditunjukkan bahwa deret di atas selalu konvergen. Menurut sifat nilai karakteristik operator kompak self-adjoint, berlaku $\lambda_n \to 0$ dan karenanya $\dfrac{1}{1-\lambda_n} \le M$ untuk suatu konstanta M dan untuk setiap $n \in N$. Akibatnya,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{c_n}{1-\lambda_n}\right|^2 \le M^2\sum_{n=1}^{\infty}|c_n|^2 < \infty .$$

Jadi deret di atas konvergen dan jumlahannya adalah penyelesaian dari (4). Sekarang jika (5) mempunyai penyelesaian tak nol h, dan f adalah penyelesaian dari (4), maka $f + ch$ merupakan penyelesaian dari (4) untuk setiap $c \in C$. Hal ini berakibat (4) mempunyai tak hingga banyak penyelesaian. Misalkan f penyelesaian dari (4) dan h penyelesaian dari (5), maka

$$\langle f,h\rangle = \langle Af,h\rangle + \langle g,h\rangle = \langle f,Ah\rangle + \langle g,h\rangle = \langle f,h\rangle + \langle g,h\rangle .$$

Hal ini berarti $\langle g,h\rangle = 0$. Jadi jika (4) mempunyai penyelesaian,maka g ortogonal terhadap setiap penyelesaian dari (5). ■

Selanjutnya hasil-hasil di atas akan digunakan untuk mempelajari penyelesaian persamaan integral Fredholm yang berbentuk

$$f(x) = \alpha\int_a^b K(x,y,f(y))dy + \phi(x)$$

dengan fungsi $\phi \in L^2[a,b]$ dan fungsi kernel K.

Pertama dipelajari persamaan integral Fredholm jenis kedua tak homogen.

Teorema 7. *Persamaan integral*

$$f(x) = \alpha\int_a^b K(x,y)f(y)\,dy + \phi(x)$$

mempunyai penyelesaian tunggal $f \in L^2[a,b]$, *apabila fungsi kernel* K *kontinu pada* $[a,b]\times[a,b]$, $\phi \in L^2[a,b]$, *dan* $|\alpha| k < 1$, *dengan* $k = \sqrt{\int_a^b\int_a^b |K(x,y)|^2\,dxdy}$.

Bukti : Diperhatikan operator

$$(Tf)(x) = \alpha \int_a^b K(x,y) f(y)\, dy + \phi(x).$$

Karena $\phi \in L^2[a,b]$, $Tf \in L^2[a,b]$ jika

$$\int_a^b K(x,y) f(y)\, dy \in L^2[a,b] \qquad .....(8)$$

Menggunakan ketaksamaan Cauchy-Schwarz, diperoleh

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b K(x,y) f(y)\, dy\right| &\le \int_a^b \left|K(x,y) f(y)\right| dy \\ &\le \left(\int_a^b \left|K(x,y)\right|^2 dy\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b \left|f(y)\right|^2 dy\right)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Oleh karena itu,

$$\left|\int_a^b K(x,y) f(y)\, dy\right|^2 \le \left(\int_a^b \left|K(x,y)\right|^2 dy\right)\left(\int_a^b \left|f(y)\right|^2 dy\right)$$

dan

$$\begin{aligned}\int_a^b \left|\int_a^b K(x,y) f(y)\, dy\right|^2 dx &\le \int_a^b \left(\int_a^b \left|K(x,y)\right|^2 dy \int_a^b \left|f(y)\right|^2 dy\right) dx \\ &\le \int_a^b \int_a^b \left|K(x,y)\right|^2 dy\, dx \int_a^b \left|f(y)\right|^2 dy.\end{aligned}$$

Karena

$$\int_a^b \int_a^b \left|K(x,y)\right|^2 dydx < \infty \text{ dan } \int_a^b \left|f(y)\right|^2 dy < \infty$$

maka (8) dipenuhi dan ini berarti T memetakan $L^2[a,b]$ ke $L^2[a,b]$. Selain itu diperoleh hasil lain yaitu operator A dengan definisi $(Af)(x) = \int_a^b K(x,y) f(y)\, dy$ terbatas. Dengan demikian menurut Teorema 3, persamaan operator $Tf = f$ mempunyai penyelesaian tunggal apabila $|\alpha| k < 1$. ■

Sebagai contoh perhatikan persamaan integral

$$f(x) = \alpha \int_a^b e^{\frac{x-y}{2}} f(y)\,dy + \phi(x) \qquad .....(9)$$

dengan ϕ suatu fungsi yang diberikan. Karena $\int_a^b \int_a^b \left(e^{\frac{x-y}{2}}\right)^2 dxdy = \frac{\left(e^b - e^a\right)^2}{e^{a+b}}$, maka persamaan (9) mempunyai penyelesaian tunggal jika $|\alpha| < \frac{e^{\frac{a+b}{2}}}{e^b - e^a}$.

Teorema selanjutnya menjamin eksistensi dan ketunggalan penyelesaian persamaan integral Fredholm tak linear.

Teorema 8. *Diketahui*

(a) $\left\| \int_a^b K(x, y, f(y))\,dy \right\| \le M \|f\|$ *untuk setiap* $f \in L^2[a,b]$

(b) $|K(x, y, z_1) - K(x, y, z_2)| \le N(x, y)|z_1 - z_2|$ *untuk setiap* $x, y, z_1, z_2 \in [a,b]$

(c) $\int_a^b \int_a^b |N(x, y)|^2\, dxdy = k^2 < \infty$.

Maka persamaan integral Fredholm tak linear

$$f(x) = \alpha \int_a^b K(x, y, f(y))\,dy + \phi(x)$$

mempunyai penyelesaian tunggal $f \in L^2[a,b]$ *untuk setiap* $\phi \in L^2[a,b]$ *dan untuk setiap* α *sehingga* $|\alpha| k < 1$.

Bukti : Perhatikan persamaan operator $Tf = \alpha Af + \phi$ dengan $(Af)(x) = \int_a^b K(x, y, f(y))\,dy$. Maka berlaku

$$\begin{aligned}
\|Tf_1 - Tf_2\| &= |\alpha| \left\| \int_a^b |K(x,y,f_2(y)) - K(x,y,f_2(y))|\, dy \right\| \\
&\le |\alpha| \left(\int_a^b \left(\int_a^b |K(x,y,f_1(y)) - K(x,y,f_2(y))|\, dy \right)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\le |\alpha| \left(\int_a^b \left(\int_a^b N(x,y) |f_1(y) - f_2(y)|\, dy \right)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\le |\alpha| k \|f_1 - f_2\|.
\end{aligned}$$

Cukup jelas apabila $|\alpha| k < 1$, maka T suatu pemetaan kontraksi dan T mempunyai titik tetap tunggal yang merupakan penyelesaian dari persamaan integral tersebut. ■

Terakhir akan diturunkan suatu prosedur iteratif untuk menentukan penyelesaian persamaan integral Fredholm berdasarkan hasil-hasil di atas.

Perhatikan persamaan operator

$$f = \phi + \alpha T f \qquad .....(10)$$

Jika T merupakan operator integral dengan kernel K,

$$(Tf)(x) = \int_a^b K(x,t) f(t)\, dt,$$

maka (10) merupakan persamaan persamaan integral Fredholm jenis kedua

$$f(x) = \phi(x) + \alpha \int_a^b K(x,t) f(t)\, dt \qquad .....(11)$$

Dalam hal tersebut berlaku

$$\begin{aligned}
(T^2 f)(x) &= T\left(\int_a^b K(x,t) f(t)\, dt \right) \\
&= \int_a^b K(x,z) \left(\int_a^b K(z,t) f(t)\, dt \right) dz. \\
&= \int_a^b \left(\int_a^b K(x,z) K(z,t)\, dz \right) f(t)\, dt.
\end{aligned}$$

Oleh karena itu T^2 merupakan suatu operator integral dengan kernel $\int_a^b K(x,z)K(z,t)\, dz$. Secara induktif diperoleh secara umum

$$T^n f(x) = \int_a^b K_n(x,t) f(t)\, dt \quad \text{untuk} \quad n \geq 2$$

dengan kernel K_n dari T^n diberikan dengan

$$K_n(x,t) = \int_a^b K(x,\xi) K_{n-1}(\xi,t)\, d\xi \ \text{ untuk } n > 2.$$

Kernel ini juga dapat dituliskan

$$K_n(x,t) = \int_a^b \ldots \int_a^b K(x,\xi_{n-1}) K(\xi_{n-1},\xi_{n-2}) \ldots K(\xi_1,t)\, d\xi_{n-1} d\xi_{n-2} \ldots d\xi_1.$$

Selanjutnya dengan menerapkan Akibat 5, akan diperoleh hasil di bawah terkait keterselesaian (10) dan juga persamaan integral (11). Apabila $|\alpha|\|T\| < 1$, maka persamaan (10) mempunyai penyelesaian tunggal yang diberikan oleh deret Neumann

$$f = \phi + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n T^n \phi \qquad \text{.....(12)}$$

Jadi persamaan integral (11) mempunyai penyelesaian tunggal f yang diberikan oleh

$$f(x) = \phi(x) + \alpha \int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha^{n-1} K_n(x,t) \right) \phi(t)\, dt \qquad \text{.....(13)}$$

Tuliskan $\Gamma(x,t,\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^{n-1} K_n(x,t)$, maka penyelesaian di atas dapat ditulis dalam bentuk

$$f(x) = \phi(x) + \alpha \int_a^b \Gamma(x,t,\alpha) \phi(t)\, dt \qquad \text{.....(14)}$$

Fungsi Γ sering disebut kernel resolven.

Terakhir diberikan contoh sederhana terkait pembicaraan di atas. Akan dicari penyelesaian deret Neumann untuk persamaan integral Fredholm $f(x) = x + \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} (t - x) f(t)\, dt$. Pertama pilih $f_0(x) = x$, maka

$f_1(x) = x + \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(t-x)t\,dt = x + \frac{1}{3}$, dan dengan menyubstitusikan f_1 ke persamaan semula diperoleh $f_2(x) = x + \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(t-x)\left(t+\frac{1}{3}\right)dt = x + \frac{1}{3} - \frac{x}{3}$. Dengan melanjutkan proses ini diperoleh

$$f_3(x) = x + \frac{1}{3} - \frac{x}{3} - \frac{1}{3^2},$$

$$f_4(x) = x + \frac{1}{3} - \frac{x}{3} - \frac{1}{3^2} + \frac{x}{3^2},$$

$$\vdots$$

$$f_{2n}(x) = x + \sum_{m=1}^{n}(-1)^{m-1}3^{-m} - x\sum_{m=1}^{n}(-1)^{m-1}3^{-m}.$$

Dengan mengambil $n \to \infty$, diperoleh $f(x) = \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}$. Dapat diperiksa bahwa fungsi ini benar merupakan penyelesaian persamaan integral di atas.

Penutup

Teorema pemetaan kontraksi menjamin eksistensi dan ketunggalan penyelesaian dari persamaan operator di ruang Banach. Penyelesaian yang diperoleh merupakan titik tetap dari operator yang terkait. Teorema ini juga memberikan suatu prosedur iteratif untuk mencari penyelesaian persamaan operator tersebut. Selanjutnya, teorema pemetaan kontraksi juga telah digunakan untuk mempelajari keterselesaian persamaan integral Fredholm jenis kedua khususnya dalam penjaminan eksistensi dan ketunggalan penyelesaian persamaan integral Fredholm jenis kedua baik yang linear maupun tak linear.

Daftar Pustaka

[1] Davis, B. (2002). *Integral Transforms and Their Applications, 3rd ed.* New York : Springer-Verlag.

[2] Debnath, L. & Mikusinski, P. (1999). *Introduction to Hilbert Spaces with Applications, 2nd ed.* San Diego : Academic Press.

[3] Jerry, A. J. (1999). *Introduction to Integral Equations with Applications, 2nd ed.* New York : John Wiley and Sons.

[4] Kress, R. (1989). *Linear Integral Equations*. New York : Springer-Verlag.

[5] Reddy, B. D. (1998). *Introductory Functional Analysis with Applications to Boundary Value Problem and Finite Elements.* New York : Springer-Verlag.

[6] Zeidler, E. (1995). *Applied Functional Analysis: Applications to Mathematical Physics*. New York : Springer-Verlag.