TEOREMA KEKONVERGENAN MONOTON UNTUK INTEGRAL MCSHANE FUNGSI BERNILAI DI RUANG BANACH

Herry Pribawanto Suryawan

Jurusan Matematika Universitas Sanata Dharma Yogyakarta
E-mail: herrypribs@staff.usd.ac.id

Abstrak. Integral McShane merupakan integral tipe Riemann yang ekuivalen dengan integral Lebesgue dan termuat di dalam integral Henstock-Kurzweil. Di dalam makalah ini dibicarakan suatu perumuman integral McShane yakni untuk fungsi yang bernilai di ruang Banach. Selanjutnya dengan menggunakan sifat-sifat dasar dari integral ini akan dibuktikan suatu versi teorema kekonvergenan monoton yang terkait.

Kata kunci: integral McShane, teorema kekonvergenan monoton, ruang Banach

1. Pendahuluan

Salah satu konsep dasar dalam analisis adalah teori integral, dan salah satu jenis integral yang cukup populer adalah integral Riemann. Telah diketahui bahwa integral Riemann mempunyai beberapa kelemahan dari sisi teoritis maupun aplikasinya. Integral Lebesgue lahir sebagai jawaban atas permasalahan ini dan menjadi integral standar yang dipakai matematikawan maupun pengguna matematika. Sayangnya, integral Lebesgue dikembangkan melalui konsep ukuran yang tidaklah mudah. Selain itu integral Lebesgue juga masih memiliki kekurangan, sebagai contoh integral Lebesgue tidak memuat integral Riemann tak wajar.

Pada sekitar tahun 1960, J. Kurzweil dan R. Henstock, secara independen, menemukan suatu integral tipe Riemann yang dikenal sebagai integral Henstock-Kurzweil, dan ternyata integral ini memuat integral Newton, integral Lebesgue, dan integral Riemann tak wajar. Selanjutnya, E. J. McShane melakukan sedikit modifikasi pada definisi integral Henstock-Kurzweil, dan integral yang diperoleh dikenal sebagai integral McShane. Integral ini merupakan integral tipe Riemann yang termuat di dalam integral Henstock-Kurzweil, serta ekuivalen dengan integral Lebesgue di ruang Euklid. Lihat Gordon [1] atau Swartz [7].

Salah satu aspek penelitian terhadap berbagai jenis integral yang ada adalah memperumum domain serta kodomain dari fungsi yang terkait. Di dalam makalah ini akan dibicarakan perumuman integral McShane untuk fungsi yang terdefinisi pada garis real dan mempunyai nilai pada ruang Banach, seperti pada Swartz [6]. Selanjutnya akan dibahas sifat-sifat dasar dari integral ini, dan pada akhirnya sifat-sifat tersebut akan digunakan untuk membuktikan suatu versi teorema kekonvergenan monoton untuk integral ini. Di dalam makalah ini tidak ditemukan hal baru karena penulis hanya mengkolaborasikan beberapa hasil sebelumnya antara lain Gordon [2], Swartz [6], dan Ye [8].

2. Integral McShane Fungsi Bernilai di Ruang Banach

Misalkan R^* adalah sistem bilangan real yang diperluas, X adalah ruang Banach atas bilangan real, dan X' adalah ruang dual dari X . Setiap fungsi $f : R \to X$ diasumsikan diperluas ke R^* dengan menetapkan $f(\pm\infty) = 0$. *Gauge* pada R^* adalah fungsi γ yang mengaitkan setiap $t \in R^*$

dengan sebuah lingkungan $\gamma(t)$ dari t. Partisi pada R adalah koleksi berhingga interval tertutup-kiri I_i, $i=1,\dots,n$, sehingga berlaku $R=\bigcup_{i=1}^{n} I_i$. Partisi McShane pada R adalah koleksi berhingga $\{(I_i,t_i):1\le i\le n\}$ sehingga $\{I_i\}$ adalah partisi pada R dan $t_i\in R^*$. Dalam hal ini t_i disebut sebagai titik terkait dari I_i. Perlu dicatat bahwa titik terkait t_i tidak harus berada di dalam I_i, tetapi di dalam R^*. Hal inilah yang membedakan integral McShane dengan integral Henstock-Kurzweil. Ini dapat dilihat pada Gordon [1] atau Swartz [7]. Apabila γ suatu *gauge* pada R^*, partisi McShane $\{(I_i,t_i):1\le i\le n\}$ dikatakan γ-*fine* jika $\overline{I_i}\subset\gamma(t_i)$ untuk setiap $i=1,\dots,n$. Jika I interval di dalam R^*, maka panjangnya ditulis dengan $m(I)$. Apabila $D=\{(I_i,t_i):1\le i\le n\}$ adalah partisi McShane dan $f:R\to X$, maka jumlah Riemann fungsi f terhadap D adalah

$$S(f,D)=\sum_{i=1}^{n} f(t_i)m(I_i).$$

Eksistensi partisi McShane yang γ-*fine* diberikan oleh Lema Cousin, lihat Gordon [1], Swartz [7] atau Ye [9].

Definisi 1. *Fungsi $f:R\to X$ terintegral McShane pada R jika terdapat $v\in X$ sehingga untuk setiap $\varepsilon>0$ terdapat gauge γ pada R^* sehingga $\|S(f,D)-v\|<\varepsilon$ untuk setiap partisi McShane γ-fine D pada R.*

Vektor v disebut integral McShane fungsi f atas R dan ditulis dengan $\int_R f$.

Teorema berikutnya menyatakan bahwa koleksi semua fungsi yang terintegral McShane membentuk ruang linear. Pembuktian teorema ini cukup mudah sehingga tidak diberikan di sini dan dapat dilihat pada Suryawan [5] atau Ye [9].

Teorema 2. *Jika fungsi-fungsi $f,g:R\to X$ terintegral McShane pada R, maka*

(a) $f+g$ terintegral McShane pada R dan $\int_R(f+g)=\int_R f+\int_R g$

(b) kf terintegral McShane pada R dan $\int_R kf=k\int_R f$.

Selanjutnya diberikan kriteria Cauchy untuk keterintegralan McShane fungsi bernilai di ruang Banach.

Teorema 3. *Fungsi $f:R\to X$ terintegral McShane pada R jika dan hanya jika untuk setiap $\varepsilon>0$ terdapat gauge γ pada R^* sehingga berlaku*

$$\left\|\sum_{j=1}^{p} f(t_j)m(I_j)-\sum_{i=1}^{r} f(s_i)m(J_i)\right\|<\varepsilon \qquad \dots(1)$$

untuk setiap partisi McShane $\{(I_j,t_j):1\le j\le p\}$ dan $\{(J_i,s_i):1\le i\le r\}$ yang γ-fine.

Bukti: Jika f terintegral McShane pada R, maka untuk setiap $\varepsilon>0$ terdapat *gauge* γ sehingga berlaku $\left\|\sum_{j=1}^{p} f(t_j)m(I_j)-\int_R f\right\|<\frac{\varepsilon}{2}$ untuk setiap partisi McShane $\{(I_j,t_j):1\le j\le p\}$ yang γ-*fine*. Oleh karena itu berlaku

$$\left\| \sum_{j=1}^{p} f(t_j)m(I_j) - \sum_{i=1}^{r} f(s_i)m(J_i) \right\| = \left\| \sum_{j=1}^{p} f(t_j)m(I_j) - \int_R f \right\| + \left\| \sum_{i=1}^{r} f(s_i)m(J_i) - \int_R f \right\|$$
$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$
$$= \varepsilon,$$

untuk setiap partisi McShane $\{(I_j,t_j):1 \le j \le p\}$ dan $\{(J_i,s_i):1 \le i \le r\}$ yang γ*-fine*.

Sebaliknya, diberikan sebarang $\varepsilon > 0$, tulis

$$S(\varepsilon) = \left\{ S(f,D) = \sum_{i=1}^{k} f(t_i)m(I_i) : D = \{(J_i,t_i):1 \le i \le k\} \right\} \subset X,$$

dengan D sebarang partisi McShane yang γ*-fine*. Himpunan $S(\varepsilon)$ tidak kosong menurut Lema Cousin. Perhatikan karena hubungan (1) berlaku untuk setiap partisi McShane $\{(I_j,t_j):1 \le j \le p\}$ dan $\{(J_i,s_i):1 \le i \le r\}$ yang γ*-fine*, maka diperoleh $diam S(\varepsilon) < \varepsilon$ (di sini $diam S(\varepsilon)$ menyatakan diameter himpunan $S(\varepsilon)$ di dalam ruang Banach X). Lebih lanjut apabila $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$ maka $S(\varepsilon_1) \subset S(\varepsilon_2)$, karena dapat dipilih *gauge* γ_1 dan γ_2 yang berturut-turut berkorespondensi dengan ε_1 dan ε_2 sehingga $\gamma_1(t) \le \gamma_2(t)$ untuk $t \in R$. Jadi himpunan $\bigcap_{\varepsilon>0} \overline{S(\varepsilon)} = S_f \in X$ terdiri dari satu titik tunggal, karena X merupakan ruang Banach. Untuk suatu jumlah Riemann $S(f,D)$ diperoleh $\left\| \sum_{i=1}^{k} f(t_i)m(J_i) - S_f \right\| < \varepsilon$ apabila $D = \{(J_i,t_i):1 \le i \le k\}$ sebarang partisi McShane yang γ*-fine*. □

Untuk keperluan pembahasan selanjutnya akan diberikan satu sifat yang cukup penting yang dikenal sebagai Lema Saks-Henstock. Jika $\{(I_i,t_i):1 \le i \le n\}$ adalah sebarang koleksi interval setengah tertutup pada R yang sepasang-sepasang saling asing dan $t_i \in R^*$, maka koleksi $\{(I_i,t_i):1 \le i \le n\}$ disebut partisi McShane parsial pada R (catat bahwa tidak harus berlaku $\bigcup_{i=1}^{n} I_i = R$), dan koleksi demikian dikatakan γ*-fine* jika $\overline{I_i} \subset \gamma(t_i)$ untuk setiap $i = 1,\ldots,n$.

Lema 4. (Lema Saks-Henstock) *Diberikan fungsi* $f: R \to X$ *terintegral McShane dan* $\varepsilon > 0$ *sebarang. Misalkan gauge* γ *pada* R^* *memenuhi* $\left\| \sum_{i=1}^{n} f(t_i)m(I_i) - \int_R f \right\| < \varepsilon$ *untuk setiap partisi McShane* $\{(I_i,t_i):1 \le i \le n\}$ *pada* R *yang* γ*-fine. Jika* $\{(I_i,t_i):1 \le i \le n\}$ *sebarang partisi McShane parsial pada* R *yang* γ*-fine, maka*

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} \left\{ f(t_i)m(I_i) - \int_{I_i} f \right\} \right\| < \varepsilon.$$

Bukti: Misalkan $\{(K_j,r_j):1 \le j \le q\}$ sebarang partisi McShane parsial pada R yang γ*-fine*, maka $R - \bigcup_{j=1}^{q} \operatorname{int} K_j$ terdiri dari koleksi berhingga interval di dalam R yang tak saling tumpang tindih M_l, $l = 1,\ldots,r$. Fungsi f terintegral McShane pada R, dan oleh karenanya $\int_{M_l} f$ ada, dan menurut definisi untuk sebarang $\eta > 0$ terdapat *gauge* γ_l pada M_l dengan $\gamma_l(t) < \gamma(t)$

untuk $t \in M_l$, sehingga untuk setiap $l = 1, \ldots, r$ berlaku $\left\| \sum_{i=1}^{k_l} f(s_i^l) m(N_i^l) - \int_{M_l} f \right\| < \frac{\eta}{r+1}$, dengan $\{(N_i^l, s_i^l) : 1 \le i \le k_l\}$ adalah partisi McShane pada M_l yang γ_l-*fine*. Jumlahan $\sum_{j=1}^{q} f(r_j) m(K_j) + \sum_{l=1}^{r} \sum_{i=1}^{k_l} f(s_i^l) m(N_i^l)$ menyatakan suatu jumlahan yang berkorespondensi dengan suatu partisi McShane pada R yang γ-*fine*, dan akibatnya $\left\| \sum_{j=1}^{q} f(r_j) m(K_j) + \sum_{l=1}^{r} \sum_{i=1}^{k_l} f(s_i^l) m(N_i^l) - \int_R f \right\| < \varepsilon$. Dengan demikian berlaku

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{j=1}^{q} \left\{ f(r_j) m(K_j) - \int_{K_j} f \right\} \right\| &< \left\| \sum_{j=1}^{q} f(r_j) m(K_j) + \sum_{l=1}^{r} \sum_{i=1}^{k_l} f(s_i^l) m(N_i^l) - \int_R f \right\| + \sum_{l=1}^{r} \left\| \sum_{i=1}^{k_l} f(s_i^l) m(N_i^l) - \int_{M_l} f \right\| \\ &< \varepsilon + r . \frac{\eta}{r+1} \\ &< \varepsilon + \eta . \end{aligned}$$

Karena pengambilan $\eta > 0$ sebarang maka terbuktilah pernyataan pada teorema. □

Misalkan $M(R,X)$ menyatakan ruang fungsi bernilai di ruang Banach X yang terintegral McShane. Jika $X = R$ maka ditulis $M(R,R) = M(R)$. Ruang $M(R)$ lengkap terhadap semi-norma $\|f\|_1 = \int_R |f|$, lihat McShane [4]. Misalkan $f \in M(R,X)$, maka untuk setiap $x' \in X'$, $x'f \in M(R)$ dan $\langle x', \int_R f \rangle = \int_R x'f$, seperti pada Gordon [2]. Jadi kita dapat mendefinisikan operator linear $F : X' \to M(R)$ dengan $Fx' = x'f$. Di dalam McShane [4] diperlihatkan bahwa F mempunyai graph tertutup, dan oleh karenanya menurut Teorema Graph Tertutup, F kontinu. Dari sini, dapat didefinisikan semi-norma pada $M(R,X)$ sebagai $\|f\|_1 = \sup\{ \int_R |x'f| : \|x'\| \le 1 \}$ dimana supremum ini berhingga karena kekontinuan F.

Dalam beberapa hal kita akan lebih mudah bekerja apabila menggunakan semi-norma yang ekuivalen dengan $\| \ \|_1$. Misalkan Λ adalah aljabar dari subhimpunan R yang dibangun oleh interval setengah tertutup $[a,b)$ di dalam R. Kita memperluas fungsi panjang m ke Λ untuk memperoleh suatu fungsi aditif, yang tetap dinotasikan dengan m, pada Λ. Jika $f \in M(R,X)$, maka f terintegral pada setiap $A \in \Lambda$ dan didefinisikan $\|f\|_1' = \sup\{ \| \int_A f \| : A \in \Lambda \}$. Akan ditunjukkan bahwa $\| \ \|_1$ dan $\| \ \|_1'$ ekuivalen. Untuk hal tersebut kita memerlukan lema berikut.

Lema 5. (Swartz [6]). *Misalkan* $\varphi \in M(R)$ *dan* $\Phi : \Lambda \to R$ *adalah integral tak tentu dari* φ *yang didefinisikan oleh* $\Phi(A) = \int_A \varphi$. *Maka* $v(\Phi)(R) = \int_R |\varphi|$.

(Dalam hal ini $v(\Phi)$ menyatakan variasi dari Φ yang dihitung terhadap aljabar Λ).

Bukti: Jika $\{A_i : 1 \le i \le n\}$ sebarang partisi pada R dengan $A_i \in \Lambda$, maka berlaku $\sum_{i=1}^{n} |\Phi(A_i)| \le \sum_{i=1}^{n} \int_{A_i} |\varphi| = \int_R |\varphi|$, sehingga $v(\Phi)(R) \le \int_R |\varphi|$. Sebaliknya, pertama diasumsikan bahwa φ adalah fungsi tangga. Jadi $\varphi = \sum_{k=1}^{n} l_k \chi_{A_k}$, dengan $A_k \in \Lambda$, $\{A_k : 1 \le k \le n\}$ adalah partisi pada R dan χ_A menyatakan fungsi karakteristik pada A. Dari sini didapatkan

$\sum_{k=1}^{n}|\Phi(A_k)| = \sum_{k=1}^{n}|l_k|m(A_k) = \int_R|\varphi| \le v(\Phi)(R)$. Akibatnya $v(\Phi)(R) = \int_R|\varphi|$ untuk fungsi tangga φ. Sekarang diasumsikan $\varphi \in M(R)$. Ambil barisan fungsi tangga $\{\varphi_k\}$ sehingga $\int_R|\varphi_k - \varphi| \to 0$ (McShane [4]). Perhatikan bahwa $\int_R|\varphi_k| \to \int_R|\varphi|$. Tulis $\Phi_k(A) = \int_A \varphi_k$ untuk $A \in \Lambda$. Menurut ketaksamaan pada bagian pertama dari bukti , berlaku $|v(\Phi_k)(R) - v(\Phi)(R)| \le v(\Phi_k - \Phi)(R) \le \int_R|\varphi_k - \varphi|$. Dengan demikian kita memperoleh $\lim v(\Phi_k)(I) = \lim \int_R|\varphi_k| = v(\Phi)(R) = \int_R|\varphi|$. □

Catatan. Kesamaan pada Lema 5 merupakan hal yang sudah kita ketahui untuk kasus integral Lebesgue, setidaknya apabila variasi dihitung terhadap aljabar-σ dari himpunan terukur Lebesgue.

Sekarang akan ditunjukkan ekuivalensi $\| \ \|_1$ dan $\| \ \|_1'$.

Lema 6. (Swartz [6]). $\| \ \|_1' \le \| \ \|_1 \le 2\| \ \|_1'$

Bukti: Ambil sebarang $f \in M(R,X)$, maka

$$\|f\|_1' = \sup\left\{ \left|\int_A x'f\right| : A \in \Lambda, \|x'\| \le 1\right\} \le \sup\left\{ \int_R|x'f| : \|x'\| \le 1\right\} = \|f\|_1 .$$

Untuk $x' \in X'$, $\|x'\| \le 1$, menggunakan Lema 5 diperoleh

$$\begin{aligned}\|f\|_1 &= \sup\left\{ \int_R|x'f| : \|x'\| \le 1\right\} = \sup\left\{ v\left(\int x'f\right)(R) : \|x'\| \le 1\right\} \\ &\le 2\sup\left\{ \left|\int_A x'f\right| : A \in \Lambda, \|x'\| \le 1\right\} \\ &= 2\|f\|_1' .\end{aligned}$$

Terbuktilah bahwa kedua semi-norma tersebut ekuivalen. □

3. Teorema Kekonvergenan Monoton

Sekarang pada bagian ini akan dibuktikan suatu versi teorema kekonvergenan monoton untuk integral McShane yang telah dideskripsikan di atas. Pada kasus $X = R$ teorema ini tidak lain adalah teorema kekonvergenan monoton klasik yang sudah kita kenal, misalnya pada integral Lebesgue. Pembicaraan dimulai dengan lema berikut.

Lema 7. *Terdapat fungsi positif* $\varphi : R \to (0,\infty)$ *terintegral McShane, dan gauge* $\gamma(=\gamma_\varphi)$ *sehingga* $0 \le S(\varphi, D) \le 1$ *untuk setiap partisi McShane* D *yang* γ*-fine.*

Bukti: Ambil sebarang fungsi positif φ yang terintegral McShane sehingga $\int_R \varphi = \frac{1}{2}$. Terdapat *gauge* γ sehingga $\left|S(\varphi, D) - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2}$ apabila D partisi McShane yang γ*-fine*. Misalkan $D = \{(I_i, t_i) : 1 \le i \le n\}$ adalah suatu partisi McShane parsial pada R yang γ*-fine*, dan tulis $I = \bigcup_{i=1}^{n} I_i$. Menurut Lema Saks-Henstock berlaku $\left|S(\varphi, D) - \int_I \varphi\right| < \frac{1}{2}$ sehingga $S(\varphi, D) < 1$ sebagaimana akan ditunjukkan, karena $\int_I \varphi \le \frac{1}{2}$. □

Teorema 8. *Jika* $g_k \in M(R,X)$ *untuk setiap* k, *dan* $g = \sum_{k=1}^{\infty} g_k$ *titik demi titik pada* R *dengan* $\sum_{k=1}^{\infty} \|g_k\|_1 < \infty$, *maka* $g \in M(R,X)$, $\int_R g = \sum_{k=1}^{\infty} \int_R g_k$, *dan* $\left\|\sum_{k=1}^{n} g_k - g\right\|_1 \to 0$ *untuk* $n \to \infty$.

Bukti: Ambil sebarang $\varepsilon > 0$ dan bentuk $G_n = \sum_{k=1}^{n} g_k$. Karena $\sum_{k=1}^{\infty} \left\|\int_A g_k\right\| \le \sum_{k=1}^{\infty} \|g_k\|_1' < \infty$ (Lema 6), maka deret $\sum_{k=1}^{\infty} \int_A g_k$ konvergen mutlak mengingat bahwa X adalah ruang Banach. Untuk penyederhanaan, notasikan $v = \sum_{k=1}^{\infty} \int_R g_k$. Untuk setiap k, γ_k adalah *gauge* untuk G_k sehingga $\left\|S(G_k, D) - \int_R G_k\right\| < \frac{\varepsilon}{2^k}$ apabila D bersifat γ_k*-fine*. Ambil n_0 sehingga $\sum_{k=n_0}^{\infty} \|g_k\|_1 < \varepsilon$. Untuk setiap $t \in R$ terdapat $n(t) \ge n_0$ sehingga $k \ge n(t)$ berakibat $|G_k(t) - g(t)| < \varepsilon\, \varphi(t)$, dimana φ adalah fungsi pada Lema 7. Definisikan *gauge* γ sebagai $\gamma(t) = \gamma_{n(t)}(t) \cap \gamma_\varphi(t)$ untuk $t \in R$ dan $\gamma(\pm\infty) = 0$. Misalkan $D = \{(I_i, t_i) : 1 \le i \le n\}$ adalah partisi γ*-fine* pada R^*, maka

$$\|S(g,D) - v\| = \left\| \sum_{i=1}^{n} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} g_k(t_i) m(I_i) - \sum_{k=1}^{\infty} \int_{I_i} g_k \right\} \right\| \qquad ...(2)$$

$$\le \left\| \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=n(t_i)+1}^{\infty} g_k(t_i) m(I_i) \right\| + \left\| \sum_{i=1}^{n} \left\{ \sum_{k=1}^{n(t_i)} g_k(t_i) m(I_i) - \sum_{k=1}^{n(t_i)} \int_{I_i} g_k \right\} \right\| + \left\| \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=n(t_i)+1}^{\infty} \int_{I_i} g_k \right\| \le T_1 + T_2 + T_3.$$

Pertama, akan dicari estimasi untuk T_1 dengan memanfaatkan Lema 7, sebagai berikut

$$\begin{aligned}
T_1 &\le \sum_{i=1}^{n} \left\| \sum_{k=n(t_i)+1}^{\infty} g_k(t_i) \right\| m(I_i) \\
&\le \sum_{i=1}^{n} \varepsilon\, \varphi(t_i) m(I_i) \\
&\le \varepsilon\, S(\varphi, D) \\
&\le \varepsilon.
\end{aligned}$$

Selanjutnya estimasi untuk T_2, pilih $s = maks\{n(t_1), \ldots, n(t_n)\}$. Maka menurut Lema Saks-Henstock,

$$\begin{aligned}
T_2 &= \left\| \sum_{i=1}^{n} \left\{ G_{n(t_i)}(t_i) m(I_i) - \int_{I_i} G_{n(t_i)} \right\} \right\| \\
&= \left\| \sum_{k=1}^{s} \sum_{\substack{i \\ n(t_i)=k}} \left\{ G_{n(t_i)}(t_i) m(I_i) - \int_{I_i} G_{n(t_i)} \right\} \right\| \\
&\le \sum_{k=1}^{s} \left\| \sum_{\substack{i \\ n(t_i)=k}} \left\{ G_{n(t_i)}(t_i) m(I_i) - \int_{I_i} G_{n(t_i)} \right\} \right\| \\
&\le \sum_{k=1}^{s} \frac{\varepsilon}{2^k} \\
&< \varepsilon.
\end{aligned}$$

Untuk T_3, perhatikan bahwa deret dalam T_3 konvergen mutlak, maka

$$
\begin{aligned}
T_3 &= \sup_{\|x'\|\le 1}\left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=n(I_i)+1}^{\infty}\int_{I_i} x'g_k\right| \\
&\le \sup_{\|x'\|\le 1}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=n_\varepsilon+1}^{\infty}\int_{I_i}|x'g_k| \\
&\le \sup_{\|x'\|\le 1}\sum_{k=n_\varepsilon+1}^{\infty}\int_{R}|x'g_k| \\
&\le \sum_{k=n_\varepsilon+1}^{\infty}\|g_k\|_1 \\
&< \varepsilon.
\end{aligned}
$$

Dengan demikian menurut (2), $\|S(g,D)-v\|<3\varepsilon$ dan g terintegral McShane pada R dengan nilai integral v. Untuk yang terakhir, menurut bagian pertama dari teorema, apabila $A\in\Lambda$, maka

$$\left\|\int_A(g-G_n)\right\|=\left\|\int_A\sum_{k=n+1}^{\infty}g_k\right\|\le\left\|\sum_{k=n+1}^{\infty}\int_A g_k\right\|\le\sum_{k=n+1}^{\infty}\|g_k\|_1',$$

yang berakibat $\|g-G_n\|_1'\to 0$ untuk $n\to\infty$. □

Teorema 8 dapat dipandang sebagai analogi Teorema Kekonvergenan Monoton untuk fungsi bernilai di ruang Banach yang terintegral McShane. Jelasnya, misalkan $f_k\in M(R)$ yang memenuhi $0\le f_1\le f_2\le\ldots$, $f=\lim f_k$, dan $\sup\int_R f_k<\infty$. Apabila $g_k=f_k-f_{k-1}$, dengan $f_0=0$, maka kondisi pada Teorema 8 dipenuhi sehingga $\sum_{k=1}^{\infty}g_k=f$ terintegral, dan $\sum_{k=1}^{n}\int_R g_k=\int_R f_n\to\int_R f$. Ini merupakan Teorema Kekonvergenan Monoton (klasik) untuk integral McShane.

Teorema 8 juga mempunyai akibat yang cukup penting kaitannya dengan pembuktian kelengkapan ruang $M(R)$.

Akibat 9. *Misalkan* $f_k\in M(R,X)$ *dan misalkan* $\lim f_k=f$ *titik demi titik pada* R. *Jika* $\{f_k\}$ *bersifat* $\|\ \|_1$ *– Cauchy, maka* f *terintegral dan* $\|f_k-f\|_1\to 0$.

Bukti: Ambil subbarisan $\{n_k\}$ yang memenuhi $\|f_{n_{k+1}}-f_{n_k}\|<\frac{1}{2^k}$, dan tulis $g_k=f_{n_{k+1}}-f_{n_k}$. Maka $\sum_{j=1}^{k}g_k=f_{n_{k+1}}-f_{n_1}\to f-f_{n_1}$ titik demi titik dan $\sum_{k=1}^{\infty}\|g_k\|_1<\infty$, sehingga Teorema 8 berakibat $f-f_{n_1}$ terintegral, dan $\left\|\sum_{j=1}^{k}g_k-\left(f-f_{n_1}\right)\right\|_1=\|f_{n_{k+1}}-f\|_1\to 0$. Karena argumentasi yang sama dapat diterapkan pada setiap subbarisan dari $\{f_k\}$ maka diperoleh $\|f_k-f\|_1\to 0$. □

4. Kesimpulan

Telah dikonstruksi integral McShane fungsi bernilai di ruang Banach sebagai perumuman integral McShane. Beberapa sifat dasar yaitu sifat kelinearan, kriteria Cauchy, dan Lema Saks-Henstock juga dibuktikan. Suatu analogi teorema kekonvergenan monoton untuk integral ini juga telah dibuktikan hanya dengan menggunakan sifat-sifat dasar yang dibicarakan sebelumnya.

Daftar Pustaka

[1] Gordon, R. A., *The Integrals of Lebesgue, Denjoy, Perron, and Henstock*, Grad. Stud. In Math. 4, American Mathematical Society, 1994.

[2] Gordon, R. A., "*The McShane Integral of Banach-valued Functions" in Illinois J. Math.*, *34*, 1990, p. 557-567.

[3] Kurzweil, J. and Schwabik, S., "*McShane Integrability and Vitali's Convergence Theorem" in Mathematica Bohemica 129*, 2004, p. 141-157.

[4] McShane, E. J., *Unified Integration*, New York : Academic Press, 1983.

[5] Suryawan, H. P., "*Integral McShane Fungsi Bernilai-Banach*", *Prosiding Konferensi Nasional Matematika Universitas Negeri Yogyakarta 25 Agustus 2007*, hal. 41-50.

[6] Swartz, C., "*Beppo Levi's Theorem for The Vector-Valued McShane Integral and Applications" in Bull. Belg. Math. Soc. 4*, 1997, p. 589-599.

[7] Swartz, C., *Introduction to Gauge Integrals*, Singapore: World Scientific, 2001.

[8] Ye, G. and Schwabik, S., "*The McShane and The Weak McShane Integrals of Banach Space-valued Functions defined on* R^m *" in Mathematical Notes (Miskolc) 2*, 2001, p. 127-136.

[9] Ye, G. and Schwabik, S., *Topics in Banach Space Integration*, Singapore: World Scientific, 2005