KETERBATASAN OPERATOR INTEGRAL FRAKSIONAL DI RUANG MORREY TAK HOMOGEN YANG DIPERUMUM

Herry P. Suryawan [1] dan Hendra Gunawan [2]

1 Jurusan Matematika FST Universitas Sanata Dharma Yogyakarta
E-mail : herrypribs@staff.usd.ac.id

2 KK Analisis dan Geometri FMIPA Institut Teknologi Bandung
E-mail : hgunawan@math.itb.ac.id

Abstrak

Salah satu objek bahasan dalam analisis Fourier adalah operator integral. Pembahasan utama di dalam makalah ini adalah pembuktian keterbatasan operator integral fraksional atau yang dikenal juga sebagai operator Riesz, di ruang Morrey tak homogen yang diperumum, suatu perumuman dari ruang Lebesgue tak homogen. Ukuran di ruang tak homogen berupa ukuran Borel yang memenuhi kondisi *growth*, yaitu ukuran suatu kubus didominasi oleh pangkat dari panjang sisinya.

Untuk membicarakan hal tersebut di atas, terlebih dahulu akan dibahas mengenai keterbatasan operator integral fraksional di ruang Lebesgue tak homogen, yang dalam pembuktiannya memerlukan ketaksamaan Hedberg dan keterbatasan operator maksimal Hardy-Littlewood di ruang Lebesgue tak homogen.

Kata kunci: *operator integral fraksional, ruang Morrey tak homogen yang diperumum*

1. Pendahuluan

Diberikan $Q(x,r)$ kubus yang berpusat di $x \in R^d$ dengan jari-jari (setengah panjang sisi) $r > 0$, dan $Q(x,kr)$, dengan $k > 0$, menyatakan kubus yang konsentris dengan jari-jari kr. Misalkan juga C adalah konstanta positif, yang dalam makalah ini tidak perlu sama dari baris ke baris. Ruang metrik, di sini hanya akan dibicarakan R^d, yang dilengkapi dengan ukuran Borel μ disebut ruang homogen apabila μ memenuhi *kondisi doubling*

$$\mu(Q(x,2r)) \le C\mu(Q(x,r)).$$

Sementara itu, (R^d, μ) dengan μ yang tidak memenuhi *kondisi doubling* tetapi memenuhi *kondisi growth*

$$\mu(Q(x,r)) \le Cr^n,$$

untuk $0 < n \le d$, disebut sebagai *ruang tak homogen*. Beberapa hasil yang terkait dengan ruang tak homogen dapat dilihat misalnya pada [1], [3], dan [5].

Di ruang tak homogen, operator integral fraksional I_α didefinisikan dengan

$$I_\alpha f(x) := \int_{R^d} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} d\mu(y).$$

Operator I_α, yang dikenal juga sebagai potensial Riesz, pertama kali dipelajari oleh Hardy dan Littlewood serta Sobolev, sedangkan hasil selanjutnya – di ruang homogen – dapat dilihat misalnya pada [2] dan [6].

Dalam [1] dan juga [4], operator I_α dibuktikan terbatas dari ruang Lebesque tak homogen $L^p(\mu)$ ke $L^q(\mu)$. Dalam paper ini, akan dibicarakan keterbatasan operator I_α di ruang Morrey tak homogen yang diperumum, yakni salah satu perumuman dari ruang Lebesgue tak homogen.

2. Keterbatasan I_α di ruang Lebesgue tak homogen

Pada bagian ini akan dibicarakan secara singkat mengenai keterbatasan operator I_α di ruang Lebesgue tak homogen, yang di dalam pembahasan utama akan dipergunakan dalam pembuktian keterbatasan operator I_α di ruang Morrey tak homogen yang diperumum.

Untuk ukuran μ yang memenuhi *kondisi growth*, misalkan f adalah sebarang fungsi terukur-μ pada R^d. Ruang Lebesque tak homogen $L^p(\mu) = L^p(R^d, \mu)$, $1 \le p \le \infty$, adalah ruang kelas-kelas ekuivalen f sedemikian sehingga $\| f : L^p(\mu) \| < \infty$, dengan

$$\| f : L^p(\mu) \| = \left(\int_{R^d} | f(y) |^p \, d\mu(y) \right)^{\frac{1}{p}}, \; 1 \le p < \infty$$

dan

$$\| f : L^\infty(\mu) \| = ess \sup \left\{ | f(x) | : x \in R^d \right\},$$

dengan $ess \sup \left\{ | f(x) | : x \in R^d \right\}$ menyatakan batas atas terkecil esensial dari $| f |$.

Bukti keterbatasan I_α di ruang Lebesque tak homogen dapat diperoleh dengan menggunakan ketaksamaan Hedberg yang melibatkan operator maksimal radial Hardy-Littlewood M dengan

$$Mf(x) := \sup_{r>0} \frac{1}{r^n} \int_{Q(x,r)} | f(y) | \, d\mu(y).$$

Operator M ini bertipe lemah-$(1,1)$ dan bertipe kuat-(∞, ∞).

Teorema 2.1 [4] *Operator maksimal M memenuhi*

$$\mu \left\{ x \in R^d : Mf(x) > \lambda \right\} \le \frac{C}{\lambda} \int_{R^d} | f(x) | \, d\mu(x)$$

dan

$$\| Mf : L^\infty(\mu) \| \le C \| f : L^\infty(\mu) \|.$$

Bukti. Ambil $f \in L^1(\mu)$ dan definisikan

$$E_\lambda = \left\{ x \in R^d : Mf(x) > \lambda \right\}.$$

Jika $x \in E_\lambda$, maka terdapat $r_x > 0$ sehingga

$$\frac{1}{r_x^n} \int_{Q(x,r_x)} | f(y) | \, d\mu(y) > \lambda.$$

Selanjutnya, *Lema Cover Vitali* memberikan koleksi kubus $\{Q(x_j, r_j)\}_j$ (dengan $x_j \in E_\lambda$ dan $r_j = r_{x_j}$) yang saling lepas sepasang-sepasang sehingga

$$E_\lambda \subset \bigcup_{x \in E\lambda} Q(x, r_x) \subset \bigcup_j Q(x_j, 3r_j).$$

Akibatnya,

$$\begin{aligned}
\mu(E_\lambda) &\le \sum_j \mu(Q(x_j,3r_j)) \\
&\le C\sum_j (3r_j)^n \\
&\le C\sum_j \frac{1}{\lambda}\int_{Q(x_j,3r_j)} |f(y)|\,d\mu(y) \\
&\le \frac{C}{\lambda}\sum_j \int_{R^d} |f(y)|\,d\mu(y).
\end{aligned}$$

Hal ini membuktikan bahwa

$$\mu\left\{x\in R^d : Mf(x)>\lambda\right\} \le \frac{C}{\lambda}\int_{R^d} |f(x)|\,d\mu(x).$$

Untuk membuktikan bagian selanjutnya, ambil sebarang $x\in R^d$ dan kubus $Q(x,r)\subset R^d$. Dengan demikian,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{r^n}\int_{Q(x,r)} |f(y)|\,d\mu(y) &\le \frac{1}{r^n}\int_{Q(x,r)} ess\sup |f(y)|\,d\mu(y) \\
&\le \frac{1}{r^n}\int_{Q(x,r)} \| f : L^\infty(\mu)\|\,d\mu(y) \\
&= \| f : L^\infty(\mu)\| \frac{1}{r^n}\int_{Q(x,r)} d\mu(y) \\
&= \| f : L^\infty(\mu)\| \frac{1}{r^n}\mu(Q(x,r)) \\
&\le C\| f : L^\infty(\mu)\|.
\end{aligned}$$

Akibatnya,

$$\sup_{r>0}\frac{1}{r^n}\int_{Q(x,r)} |f(y)|\,d\mu(y) \le C\| f : L^\infty(\mu)\|.$$

yang memberikan ketaksamaan yang diinginkan. ■

Perhatikan bahwa setiap operator yang bertipe kuat (∞,∞) juga merupakan operator yang bertipe lemah (∞,∞). Jadi M merupakan operator sublinear yang bertipe lemah $(1,1)$ dan bertipe lemah (∞,∞).

Teorema 2.2. [6] **(Teorema Interpolasi Marcinkiewicz)**. *Diketahui* (X,μ) *dan* (Y,ν) *dua ruang ukuran,* $1\le p_1 < p_2 \le \infty$, *dan* T *operator sublinear dari* $L^{p_1}(X,\mu)+L^{p_2}(Y,\nu)$ *ke ruang fungsi terukur dari* Y, *yang merupakan tipe lemah* (p_1,p_1) *dan juga merupakan tipe lemah* (p_2,p_2). *Maka operator* T *merupakan tipe kuat* (p,p) *untuk sebarang* p *dengan* $p_1<p<p_2$.

Oleh karena itu dengan menggunakan Teorema Interpolasi Marcinkiewicz diperoleh hasil berikut.

Akibat 2.3 [4] *Operator maksimal M terbatas di* $L^p(\mu)$ *untuk* $1<p<\infty$.

Dengan menggunakan keterbatasan operator M di $L^p(\mu)$ akan dibuktikan ketaksamaan Hedberg.

Teorema 2.4 [4] **(Ketaksamaan Hedberg).** *Diberikan* $0<\alpha<n$ *dan* f *fungsi terbatas dengan tumpuan kompak. Maka untuk* $1\le p<\frac{n}{\alpha}$ *berlaku*

$$|I_\alpha f(x)|\le C\,\|f:L^p(\mu)\|^{\frac{p\alpha}{n}}\,Mf(x)^{1-\frac{p\alpha}{n}}.$$

Bukti.

Ambil sebarang $t>0$. Tulis

$$|I_\alpha f(x)|\le \underbrace{\int_{|x-y|<t}\frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-\alpha}}\,d\mu(y)}_{I}+\underbrace{\int_{|x-y|\ge t}\frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-\alpha}}\,d\mu(y)}_{II}.$$

Untuk suku pertama, I, berlaku

$$\begin{aligned}I&=\int_{|x-y|<t}\frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-\alpha}}\,d\mu(y)\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\int_{2^{-k-1}t\le|x-y|<2^{-k}t}\frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-\alpha}}\,d\mu(y)\\&=2^{2n-\alpha}t^\alpha\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2^{-k+1}t)^n}\int_{Q(x,2^{-k+1}t)}|f(y)|\,d\mu(y)\\&=Ct^\alpha Mf(x).\end{aligned}$$

Selanjutnya untuk suku kedua, yaitu II, terlebih dahulu diperhatikan kasus $p=1$ sebagai berikut.

$$\begin{aligned}II&=\int_{|x-y|\ge t}\frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-\alpha}}\,d\mu(y)\\&\le\frac{1}{t^{n-\alpha}}\int_{|x-y|\ge t}|f(y)|\,d\mu(y)\\&\le t^{-(n-\alpha)}\,\|f:L^1(\mu)\|.\end{aligned}$$

Kemudian untuk kasus $1<p<\frac{n}{\alpha}$, pilih $\beta=p'(n-\alpha)-n$. Dalam hal ini, p' adalah pangkat sekawan dari p, yaitu p' memenuhi $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$. Oleh karena $\beta>0$, maka dengan menggunakan ketaksamaan Hölder diperoleh

$$
\begin{aligned}
II &= \int_{|x-y|\geq t} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-\alpha}}\, d\mu(y) \\
&\leq \left(\int_{|x-y|\geq t} |f(y)|^p\, d\mu(y) \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{|x-y|\geq t} \frac{d\mu(y)}{|x-y|^{p'(n-\alpha)}} \right)^{\frac{1}{p'}} \\
&= \left\| f : L^p(\mu) \right\| \left(\int_{|x-y|\geq t} \frac{d\mu(y)}{|x-y|^{p'(n-\alpha)}} \right)^{\frac{1}{p'}} \\
&= \left\| f : L^p(\mu) \right\| \left(\sum_{k=0}^{\infty} \int_{2^k t\leq|x-y|<2^{k+1}t} \frac{d\mu(y)}{|x-y|^{n+\beta}} \right)^{\frac{1}{p'}} \\
&\leq \left\| f : L^p(\mu) \right\| \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu(Q(x,2^{k+1}t))}{(2^k t)^{n+\beta}} \right)^{\frac{1}{p'}} \\
&\leq C \left\| f : L^p(\mu) \right\| 2^{\frac{n}{p'}} t^{-\frac{\beta}{p'}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k\beta} \right)^{\frac{1}{p'}} \\
&= C \left\| f : L^p(\mu) \right\| t^{-\frac{\beta}{p'}} \\
&= C t^{-\left(\frac{n}{p}-\alpha\right)} \left\| f : L^p(\mu) \right\|.
\end{aligned}
$$

Catat bahwa apabila dipilih $p = 1$ dan $C = 1$, maka diperoleh ketaksamaan yang sama dengan kasus $p = 1$ di atas. Dengan demikian, untuk $1 \leq p < \frac{n}{\alpha}$ berlaku

$$
|I_\alpha f(x)| \leq I + II \leq C\left(t^\alpha Mf(x) + t^{-\left(\frac{n}{p}-\alpha\right)} \| f : L^p(\mu) \| \right),
$$

untuk setiap $t > 0$. Selanjutnya, dengan memilih

$$
t = \left(\frac{Mf(x)}{\| f : L^p(\mu) \|} \right)^{-\frac{p}{n}}
$$

dan mensubstitusikannya ke dalam ketaksamaan terakhir, diperoleh

$$
\begin{aligned}
|I_\alpha f(x)| &\leq C\left(\left(\frac{Mf(x)}{\| f : L^p(\mu) \|} \right)^{-\frac{p}{n}} \right)^{\alpha} Mf(x) \\
&\quad + C\left(\left(\frac{Mf(x)}{\| f : L^p(\mu) \|} \right)^{-\frac{p}{n}} \right)^{-\left(\frac{n}{p}-\alpha\right)} \| f : L^p(\mu) \| \\
&= C\left(\frac{Mf(x)^{-\frac{p\alpha}{n}} Mf(x)}{\| f : L^p(\mu) \|^{-\frac{p\alpha}{n}}} + \frac{Mf(x)^{-\frac{p\alpha}{n}+1}}{\| f : L^p(\mu) \|^{-\frac{p\alpha}{n}+1}} \| f : L^p(\mu) \| \right) \\
&= C\left(\frac{Mf(x)^{1-\frac{p\alpha}{n}}}{\| f : L^p(\mu) \|^{-\frac{p\alpha}{n}}} \right) \\
&= C \| f : L^p(\mu) \|^{\frac{p}{n}}\, Mf(x)^{1-\frac{p\alpha}{n}}.
\end{aligned}
$$

Dengan menggunakan fakta bahwa fungsi maksimal Mf terbatas di $L^p(\mu)$, bukti selesai.

■

Sekarang akan dibuktikan bahwa operator integral fraksional I_α bersifat terbatas di ruang Lebesgue tak homogen.

Teorema 2.5 [2], [3] *Diberikan* $0<\alpha<n$. *Jika* $1<p<\frac{n}{\alpha}$ *dan* $\frac{1}{q}=\frac{1}{p}-\frac{\alpha}{n}$, *maka* I_α *terbatas dari* $L^p(\mu)$ *ke* $L^q(\mu)$.

Bukti.

Dari Ketaksamaan Hedberg diperoleh

$$|I_\alpha f(x)| \le C\| f : L^p(\mu)\|^{\frac{p\alpha}{n}}\, Mf(x)^{1-\frac{p\alpha}{n}}.$$

Hal ini berakibat

$$\begin{aligned}
|I_\alpha f(x)| &\le C\| f : L^p(\mu)\|^{\frac{p\alpha}{n}}\left(\int_{R^d} |Mf(x)|^{q\left(1-\frac{p\alpha}{n}\right)}\, d\mu(x)\right)^{\frac{1}{q}}\\
&= C\| f : L^p(\mu)\|^{\frac{p\alpha}{n}}\left(\int_{R^d} |Mf(x)|^{p}\, d\mu(x)\right)^{\frac{1}{q}}\\
&= C\| f : L^p(\mu)\|^{\frac{p\alpha}{n}}\| Mf : L^p(\mu)\|^{\frac{p}{q}}\\
&\le C\| f : L^p(\mu)\|^{\frac{p\alpha}{n}}\| f : L^p(\mu)\|^{\frac{p}{q}}\\
&= C\| f : L^p(\mu)\|.
\end{aligned}$$

Jadi berlaku

$$\| I_\alpha f(x)\| \le C\| f : L^p(\mu)\|,$$

yaitu I_α terbatas dari $L^p(\mu)$ ke $L^q(\mu)$. ■

3. Keterbatasan I_α di ruang Morrey tak homogen yang diperumum

Pertama didefinisikan terlebih dahulu pengertian ruang Morrey tak homogen yang diperumum. Diberikan f sebarang fungsi terukur-μ, dengan μ ukuran Borel pada R^d yang memenuhi *kondisi growth*, dan $1\le p<\infty$. Ruang Lebesgue tak homogen lokal, $L^p_{loc}(\mu)$, adalah ruang kelas-kelas ekuivalen fungsi terukur-μ f sehingga untuk setiap subhimpunan kompak $K\subset R^d$ berlaku

$$\int_K |f(y)|^p d\mu(y)<\infty.$$

Khususnya jika $f\in L^1_{loc}(\mu)$ maka fungsi f dikatakan terintegral-μ secara lokal.

Pada [2] diperkenalkan pengertian ruang Morrey yang diperumum. Terilhami oleh hal tersebut, selanjutnya akan didefinisikan pengertian ruang Morrey tak homogen yang diperumum. Misalkan fungsi $\phi:(0,\infty)\to(0,\infty)$ memenuhi *kondisi doubling*, yaitu terdapat $C>0$ sehingga

$$\frac{1}{C}\le\frac{\phi(s)}{\phi(t)}\le C,$$

apabila $\frac{1}{2}\le\frac{s}{t}\le 2$. Catat bahwa untuk setiap fungsi ϕ yang memenuhi *kondisi doubling* berlaku

$$\int_{2^k r}^{2^{k+1} r} \frac{\phi(t)}{t}\, dt \,\square\, \phi(2^k r)$$

untuk setiap bilangan bulat k dan bilangan real $r > 0$.

Untuk $1 \leq p < \infty$ dan fungsi ϕ seperti tersebut di atas, ruang Morrey tak homogen yang diperumum $M^{p,\phi}(\mu)$ didefinisikan sebagai ruang dari semua fungsi $f \in L^p_{loc}(\mu)$ sehingga

$$\left\| f : M^{p,\phi}(\mu) \right\| = \sup_{r>0} \frac{1}{\phi(r)} \left(\frac{1}{r^n} \int_{Q(x,r)} | f(y) |^p \, d\mu(y) \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

dan untuk $p = \infty$

$$\left\| f : M^{\infty,\phi}(\mu) \right\| = \sup_{Q(x,r)} \frac{1}{\phi(Q)} \left\| f : L^\infty(Q) \right\| < \infty.$$

Untuk $\phi(t) = t^{-\frac{n}{p}}$ maka didapat $M^{p,\phi}(\mu) = L^p(\mu)$, sementara untuk $\phi(t) = c > 0$ suatu fungsi konstan, maka didapat $M^{\infty,\phi}(\mu) = L^\infty(\mu)$. Jadi ruang Morrey tak homogen yang diperumum merupakan suatu perumuman dari ruang Lebesgue tak homogen, dan terkait dengan suatu fungsi tak naik $\phi(t)$ sehingga $\phi(t) \to \infty$ untuk $t \to 0$.

Sekarang akan dibuktikan hasil utama dari makalah ini, yakni keterbatasan operator I_α di ruang Morrey tak homogen yang diperumum.

Teorema 3.1. *Misalkan fungsi ϕ memenuhi kondisi doubling dan untuk setiap $r > 0$ berlaku*

$$\int_r^\infty t^{\alpha-1} \phi(t)\, dt \leq C r^\alpha \phi(r),$$

serta fungsi ψ memenuhi $r^\alpha \phi(r) \leq C_1 \psi(r)$ untuk setiap r, dengan C_1 tidak bergantung pada r. Maka, untuk $1 \leq p < \frac{n}{\alpha}$ dan $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$, terdapat $C > 0$ sehingga berlaku

$$\left\| I_\alpha f : M^{q,\psi}(\mu) \right\| \leq C \left\| f : M^{p,\phi}(\mu) \right\|.$$

Bukti.

Untuk $a \in \square^d$ dan $r > 0$, tulis $Q = Q(a,r)$, $\tilde{Q} = Q(a,2r)$, dan

$$f = f_1 + f_2 = f\chi_{\tilde{Q}} + f\chi_{\tilde{Q}^c}.$$

Karena

$$\begin{aligned} \left\| f_1 : L^p(\mu) \right\| &= \left(\int_{R^d} | f_1(x) |^p \, d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\int_{\tilde{Q}} | f(x) |^p \, d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= (2r)^{\frac{n}{p}} \phi(r) \frac{1}{\phi(r)} \left(\frac{1}{(2r)^n} \int_{\tilde{Q}} | f(x) |^p d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= C (2r)^{\frac{n}{p}} \phi(r) \left\| f : M^{p,\phi}(\mu) \right\| \\ &< \infty, \end{aligned}$$

maka $f_1 \in L^p(\mu)$. Selanjutnya, untuk $x \in Q$

$$\left(\int_Q |I_\alpha f_1(x)|^q \, d\mu(x)\right)^{\frac{1}{q}} \le \left\|I_\alpha f_1 : L^q(\mu)\right\|$$

$$\le C\left\|f_1 : L^p(\mu)\right\|$$

$$\le C(2r)^{\frac{n}{p}}\phi(r)\left\|f : M^{p,\phi}(\mu)\right\|,$$

sehingga diperoleh

$$\left(\frac{1}{r^n}\int_Q |I_\alpha f_1(x)|^q \, d\mu(x)\right)^{\frac{1}{q}} \le Cr^{\frac{n}{p}-\frac{n}{q}}\phi(r)\left\|f : M^{p,\phi}(\mu)\right\|$$

$$\le C\,r^{\alpha}\phi(r)\left\|f : M^{p,\phi}(\mu)\right\|$$

$$\le CC_1\psi(r)\left\|f : M^{p,\phi}(\mu)\right\|$$

atau

$$\frac{1}{\psi(r)}\left(\frac{1}{r^n}\int_Q |I_\alpha f_1(x)|^q \, d\mu(x)\right)^{\frac{1}{q}} \le C\left\|f : M^{p,\phi}(\mu)\right\|.$$

Akibatnya

$$\left\|I_\alpha f_1 : M^{q,\psi}(\mu)\right\| \le C\left\|f : M^{p,\phi}(\mu)\right\| \qquad .....(1)$$

Selanjutnya estimasi untuk $I_\alpha f_2$ diperoleh dengan cara sebagai berikut

$$\left|I_\alpha f_2(x)\right| \le \int_{\bar{Q}^c} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}}\, d\mu(y)$$

$$\le \int_{|x-y|\ge r} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}}\, d\mu(y)$$

$$\le \sum_{k=0}^{\infty} \int_{2^k r \le |x-y| \le 2^{k+1} r} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}}\, d\mu(y)$$

$$\le \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2^k r)^{n-\alpha}} \int_{Q(a,2^{k+1}r)} |f(y)|\, d\mu(y)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (2^k r)^{\alpha}\left(\frac{1}{(2^k r)^n}\int_{Q(a,2^{k+1}r)} |f(y)|\, d\mu(y)\right).$$

Dengan menggunakan ketaksamaan Holder, diperoleh

$$\left(\frac{1}{(2^k r)^n}\int_{Q(a,2^{k+1}r)} |f(y)|\, d\mu(y)\right) \le \left(\frac{1}{(2^k r)^n}\int_{Q(a,2^{k+1}r)} |f(y)|\, d\mu(y)\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\left(\frac{1}{(2^k r)^n}\int_{Q(a,2^{k+1}r)} d\mu(y)\right)^{1-\frac{1}{p}}.$$

Jadi berlaku

$$
\begin{aligned}
|I_\alpha f_2(x)| &\le C\sum_{k=0}^{\infty}(2^k r)^\alpha\left(\frac{1}{(2^{k+1}r)^n}\int_{Q(a,2^{k+1}r)}|f(y)|\,d\mu(y)\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\quad\left(\frac{1}{(2^{k+1}r)^n}\int_{Q(a,2^{k+1}r)}d\mu(y)\right)^{1-\frac{1}{p}} \\
&= C\sum_{k=0}^{\infty}(2^k r)^\alpha\left(\frac{1}{(2^{k+1}r)^n}\int_{Q(a,2^{k+1}r)}|f(y)|\,d\mu(y)\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\quad\left(\frac{\mu(Q(a,2^{k+1}r))}{(2^{k+1}r)^n}\right)^{1-\frac{1}{p}} \\
&\le C\sum_{k=0}^{\infty}(2^k r)^\alpha\left(\frac{1}{(2^{k+1}r)^n}\int_{Q(a,2^{k+1}r)}|f(y)|\,d\mu(y)\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\le C\sum_{k=0}^{\infty}(2^k r)^\alpha\phi(2^{k+1}r)\left\|f:M^{p,\phi}(\mu)\right\| \\
&\le C\left\|f:M^{p,\phi}(\mu)\right\|\sum_{k=0}^{\infty}(2^k r)^\alpha\phi(2^k r).
\end{aligned}
$$

Karena ϕ dan t^α memenuhi *kondisi doubling*, maka

$$
(2^k r)^\alpha\phi(2^k r) \square \int_{2^k r}^{2^{k+1}r}\frac{t^\alpha\phi(t)}{t}\,dt = \int_{2^k r}^{2^{k+1}r}t^{\alpha-1}\phi(t)\,dt
$$

sehingga

$$
\sum_{k=0}^{\infty}\int_{2^k r}^{2^{k+1}r}t^{\alpha-1}\phi(t)\,dt = \int_r^{\infty}t^{\alpha-1}\phi(t)\,dt.
$$

Jadi berlaku

$$
|I_\alpha f_2(x)| \le C\left\|f:M^{p,\phi}(\mu)\right\|\int_r^{\infty}t^{\alpha-1}\phi(t)\,dt \le C\,r^\alpha\phi(r)\left\|f:M^{p,\phi}(\mu)\right\|.
$$

Maka diperoleh

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{1}{r^n}\int_Q|I_\alpha f_2(x)|^q\,d\mu(x)\right)^{\frac{1}{q}} &\le C\,r^{\alpha-\frac{n}{q}}\phi(r)\left\|f:M^{p,\phi}(\mu)\right\|\left(\int_Q d\mu(x)\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= C\,r^{\alpha-\frac{n}{q}}\phi(r)\left\|f:M^{p,\phi}(\mu)\right\|\left(\mu(Q)\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\le C\,r^\alpha\phi(r)\left\|f:M^{p,\phi}(\mu)\right\| \\
&\le C\psi(r)\left\|f:M^{p,\phi}(\mu)\right\|
\end{aligned}
$$

atau

$$
\frac{1}{\psi(r)}\left(\frac{1}{r^n}\int_Q|I_\alpha f_2(x)|^q\,d\mu(x)\right)^{\frac{1}{q}} \le C\left\|f:M^{p,\phi}(\mu)\right\|.
$$

Akibatnya

$$\left\| I_\alpha f_2 : M^{q,\psi}(\mu) \right\| \leq C \left\| f : M^{p,\phi}(\mu) \right\| \qquad .....(2)$$

Dengan demikian dari (1), (2), dan ketaksamaan Minkowski diperoleh

$$\left\| I_\alpha f : M^{q,\psi}(\mu) \right\| \leq C \left\| f : M^{p,\phi}(\mu) \right\|.$$

Ini berarti bahwa operator I_α terbatas dari $M^{p,\phi}(\mu)$ ke $M^{q,\psi}(\mu)$. ■

4. Penutup

Dengan menggunakan hasil keterbatasan operator I_α di ruang Lebesgue tak homogen dapat dibuktikan keterbatasan operator I_α di ruang Morrey tak homogen yang diperumum. Konsep kunci dalam penurunan hasil-hasil tersebut adalah *kondisi growth* yang mendefinisikan ruang tak homogen $L^p(\mu)$ dan $M^{p,\phi}(\mu)$. Hal ini mengukuhkan fakta bahwa *kondisi doubling* di dalam analisis Fourier khususnya operator integral bukanlah hal yang esensial, melainkan dapat diganti dengan *kondisi growth.*

Referensi

[1] J. Garcia-Cuerva and J.M. Martell (2001), "*Two weight norm inequalities for maximal operators and fractional integrals on non-homogeneous spaces*", Indiana University Mathematics Journal **50**, no. 3, 1241-1280.

[2] H. Gunawan and Eridani, "*Fractional integral and generalized Olsen inequalities*", to appear in Kyungpook Math. J.

[3] F. Nazarov, S. Treil, and A. Volberg (1998), "*Weak type estimates and Cotlar inequalities for Calderon-Zygmund operators on non-homogeneous spaces*", Internat. Math. Res. Notices, no. **9**, 463-487.

[4] I. Sihwaningrum dan H.P. Suryawan (2008), "*Operator Integral Fraksional dan ketaksamaan Olsen di ruang Lebesgue tak homogen*", makalah dipresentasikan pada Simposium Analisis dan Aplikasinya, UGM Yogyakarta.

[5] I. Sihwaningrum, H.P. Suryawan, and H. Gunawan, "*Fractional integral operators and Olsen inequalities on non-homogeneous spaces*", in submission to AJMAA.

[6] E.M. Stein (1970), *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey.