TRANSFORM LAPLACE DAN PENGGUNAANNYA UNTUK PENYELESAIAN MASALAH NILAI AWAL PERSAMAAN DIFERENSIAL LINEAR ORDE DUA

SKRIPSI

Diajukan untuk Memenuhi Salah Satu Syarat
Memperoleh Gelar Sarjana Pendidikan
Program Studi Pendidikan Matematika

Oleh:

Yuli

NIM : 001414047

PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA
JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
UNIVERSITAS SANATA DHARMA
YOGYAKARTA

2005

SKRIPSI

TRANSFORM LAPLACE DAN PENGGUNAANNYA UNTUK PENYELESAIAN MASALAH NILAI AWAL PERSAMAAN DIFERENSIAL LINEAR ORDE DUA

Oleh:

Yuli

NIM : 001414047

Telah disetujui oleh :

Pembimbing I

Prof. Drs. R. Soemantri

Tanggal : 9 Desember 2004

SKRIPSI

TRANSFORM LAPLACE DAN PENGGUNAANNYA UNTUK PENYELESAIAN MASALAH NILAI AWAL PERSAMAAN DIFERENSIAL LINEAR ORDE DUA

Dipersiapkan dan ditulis oleh

Yuli

NIM : 001414047

Telah dipertahankan di depan Panitia Penguji

pada tanggal 19 Januari 2005

dan dinyatakan memenuhi syarat

Susunan Panitia Penguji

		Nama lengkap	Tanda Tangan
Ketua	:	Drs. A. Atmadi, M.Si.	
Sekretaris	:	Drs. Th. Sugiarto, M.T.	
Anggota	:	Prof. Drs. R. Soemantri	
Anggota	:	Drs. A. Mardjono	
Anggota	:	M. Andy Rudhito, S.Pd., M.Si.	

Yogyakarta, 19 Januari 2005

Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan

Universitas Sanata Dharma

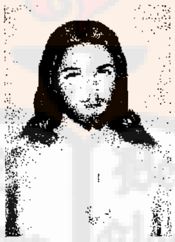
Dekan

Dr. A. M. Slamet Soewandi, M.Pd.

Halaman Motto dan Persembahan

ORA ET LABORA

"Keberhasilan Dan Adanya Diriku Adalah Doa Dan Cinta Tanpa Ujung Yang Diberikan Oleh Bundaku"



"Biarlah Roh Kudus-Mu menyempurnakan karyaku, ya Yesus"

"SEGALA SUATU PEKERJAAN JIKA DIHAYATI DENGAN PENGABDIAN DAN PENUH RASA SYUKUR AKAN MENJADI INDAH PADA WAKTUNYA"

Skripsi ini kupersembahkan untuk:

Tuhan Yesus, Bunda Maria

Papa, Mama

Aca, Acit dan Dedek Fanny

Thaiji Besak, Jie Cit

Segenap keluarga di Bangka

"Pelajarilah ilmu seni dan seni ilmu".
Leonardo Da Vinci

Pernyataan Keaslian Karya

Saya menyatakan dengan sesungguhnya bahwa skripsi yang saya tulis ini tidak memuat karya atau bagian karya orang lain, kecuali yang telah disebutkan dalam kutipan dan daftar pustaka, sebagaimana layaknya karya ilmiah.

Yogyakarta, 19 Januari 2005

Penulis

Yuli

ABSTRAK

TRANSFORM LAPLACE DAN PENGGUNAANNYA UNTUK PENYELESAIAN MASALAH NILAI AWAL PERSAMAAN DIFERENSIAL LINEAR ORDE DUA

Penulisan skripsi ini bertujuan untuk memahami kegunaan Transform Laplace untuk penyelesaian Masalah Nilai Awal persamaan diferensial linear dengan koefisien konstan dan penyelesaian Masalah Nilai Awal persamaan diferensial linear dengan koefisien variabel. Metode yang dipakai dalam penulisan skripsi adalah metode studi pustaka.

Ada banyak metode yang dapat digunakan untuk menentukan penyelesaian suatu persamaan diferensial. Salah satunya adalah metode Transform Laplace. Transform Laplace suatu fungsi $f(t)$ yang didefinisikan untuk semua $t \geq 0$ adalah fungsi $F(s)$ yang didefinisikan oleh rumus: $F(s) = \int_a^{\infty} e^{-st} f(t)dt$. Jika $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ maka $f(t)$ disebut invers Transform Laplace dari $F(s)$ yang dinyatakan oleh $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$.

Prosedur untuk penyelesaian Masalah Nilai Awal persamaan diferensial linear dengan koefisien konstan dengan mengambil Transform Laplace dari kedua ruas persamaan diferensial. Kemudian dengan menggunakan sifat, teorema-teorema Transform Laplace, dan kondisi awal diperoleh persamaan aljabar dalam $Y(s)$ dan s, dengan $Y(s)$ Transform Laplace dari penyelesaian persamaan diferensial yang diberikan. Selanjutnya dinyatakan $Y(s)$ eksplisit ke dalam s. Langkah terakhir untuk menemukan penyelesaian Masalah Nilai Awal adalah dengan menggunakan invers Transform Laplace.

Untuk menyelesaikan Masalah Nilai Awal persamaan diferensial linear dengan koefisien variabel dengan Transform Laplace, ambil Transform Laplace dari kedua ruas persamaan diferensial yang diberikan dan kemudian diperoleh persamaan diferensial baru dalam s, $Y(s)$ dan turunan-turunannya. Kemudian persamaan diferensial ini diselesaikan dengan metode standar yang sesuai. Selanjutnya langkah terakhir penyelesaian menggunakan invers Transform Laplace.

Keuntungan menggunakan metode Transform Laplace adalah menyelesaikan masalah secara langsung, tanpa perlu mencari penyelesaian umum persamaan diferensial sehingga tidak perlu menemukan kostanta-konstanta yang muncul.

ABSTRACT

LAPLACE TRANSFORM AND ITS APPLICATIONS FOR SOLVING INITIAL VALUE PROBLEMS GIVEN BY LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS OF THE SECOND ORDER

The purpose of this paper is to comprehend the usefulness of Laplace Transform to solve Initial Value Problems given by linear differential equations with constant coefficients and to solve Initial Value Problems given by linear differential equations with variable coefficients. The writing of this paper is prepared by literature study method.

There are many methods can be used to determine for solving of an differential equation. One of them is the Laplace Transform method. Laplace transform of a function $f(t)$ which is defined for all $t \geq 0$, is the function $F(s)$ defined by formula : $F(s) = \int_a^\infty e^{-st} f(t)dt$. If $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ so $f(t)$ is called invers Laplace Transform $F(s)$ and stated by $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$.

The procedure to solve Initial Value Problems given by a linear differential equations with constant coefficients by taking the Laplace Transform of both sides of the differential equation. Then by using the properties, the theorems of the Laplace Transform and given the initial conditions we get an algebraic equation in $Y(s)$ and s with $Y(s)$ is the Laplace Transform of the solution of the given differential equation. Hereinafter we express $Y(s)$ explicitly in s. The final step for finding an Initial Value Problem solution is by using the invers Laplace Transforms.

To solve Initial Value Problems given by a linear differential equations with variable coefficients by Laplace Transform, we take the Laplace Transform of both sides of the given differential equation and then we have a new differential equation in s, $Y(s)$, and its derivatives. Solve the new differential equation by a suitable standard method. The rest of the work is done by using the invers of the Laplace Transforms.

An advantage by using this method is that it solves the problems directly, without necessarily look for the general solution of the given differential equation so it is not necessary to find the constants which appear.

KATA PENGANTAR

Puji dan syukur kepada Tuhan Yang Maha Esa atas berkat dan rahmat-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan penulisan dan penyusunan skripsi ini.

Skripsi ini ditulis untuk memenuhi salah satu syarat dalam memperoleh gelar Sarjana Pendidikan, Program Studi Pendidikan Matematika, Jurusan Pendidikan Matematika dan IPA, Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Universitas Sanata Dharma, Yogyakarta.

Dalam proses penulisan dan penyusunan skripsi ini, penulis menyadari bahwa tanpa bantuan dari berbagai pihak yang telah memberikan sumbangan pikiran, waktu, semangat dan tenaga, skripsi ini tidak akan tersusun dengan baik. Oleh karena itu pada kesempatan ini penulis menyampaikan ucapan terima kasih yang tak terhingga kepada :

1. Tuhan Yesus, Bunda Maria, Santo Yosef, Para Santa/Santo, Roh Kudus, dan Malaikat Tuhan yang selalu menjagaku dan melindungiku. Terima kasih dan syukur atas semua anugerah dan berkat yang telah kuterima.
2. Bapak Prof. Drs. R. Soemantri, selaku Dosen Pembimbing yang telah membimbing dan mengarahkan dengan sabar, menyediakan waktu dan memberi masukan yang berharga dalam proses penyusunan skripsi ini.
3. Papa Yohanes Tjhin Piang Khiam dan Mama Yacinta Ngadi, Cece-ceceku (Aca dan Acit) dan Dedek Fanny, terima kasih atas segala doa dan usaha yang telah kita lalui dan terus kita perjuangkan sekeluarga.
4. Thaiji Besak, Jie Cit, terima kasih dan puji syukur atas segala bantuan materiil dan moril yang telah diberikan sehingga terselesaikannya kuliahku. Thaiji Kecit, Jie Nak dan keluarga-keluarga di Bangka, terima kasih atas dukungan, perhatian dan doa yang telah diberikan.

5. Bapak Th. Sugiarto, M.T., selaku Kaprodi Pendidikan Matematika yang telah banyak memberikan bantuan selama masa kuliah.
6. Bapak Nardjo dan Bapak Sugeng di Sekretariat JPMIPA.
7. Bapak dan Ibu Dosen yang telah mendidik dan membagi pengetahuan dan pengalaman kepada penulis selama kuliah.
8. Para sahabatku, teman-teman angkatan '00 di JPMIPA (Nining, Lala, Budi, Ponco, Bunga, Reni, Silvi, Joya, WR, dan teman-teman lainnya), teman-teman FMIPA (Aca, Vivi, Eros, Yudi, Yogi, Indah, Purbadi), komunitas KMPKS (Betty, Tuti, Para Frater dan Romo SCJ di Papringan), Sr. Yuni, Romo Renso, Anton, teman-teman kost 'Pondok Carithas' (Pening, Ika, Dwi, Angel, Deta, Siska, Deasy, Viche, Diah, Susan, dan Ina).
9. Untuk sahabat terbaikku, Kong yang selalu memberi masukan, semangat, perhatian, dan doa kepadaku. "Teman yang baik tidak selalu memberi ciuman dan pelukan tapi terkadang juga tamparan agar aku sadar dan bangkit dari kesalahan". Terima kasih untuk persahabatan kita.
10. Bapak dan Ibu Karyawan UPT Perpustakaan Paingan.
11. Universitas Sanata Dharma atas segala fasilitas dan bantuan yang diberikan selama masa kuliah kepada penulis.
12. Semua pihak yang tidak dapat disebutkan di atas yang telah rela membantu dengan doa dan usaha untuk penulis hingga selesainya proses penyusunan skripsi ini.

Penulis menyadari masih banyak kekurangan dan kesalahan dalam skripsi ini. Karena itu Penulis sangat mengharapkan masukan dan saran dari pembaca demi perbaikan skripsi ini. Akhir kata, penulis berharap semoga skripsi yang tidak sempurna ini bermanfaat bagi setiap pembaca.

Yogyakarta, 19 Januari 2005

Penulis

DAFTAR ISI

BAB I

PENDAHULUAN

A. Latar Belakang Masalah

Seperti telah diketahui bahwa situasi dan fenomena tertentu dalam dunia nyata dapat disusun dalam bentuk matematika dengan menggunakan pemodelan matematika. Salah satu topik dalam matematika yang biasa digunakan dalam penyusunan model untuk masalah dalam dunia nyata, yaitu masalah-masalah yang mengandung laju perubahan adalah persamaan diferensial. Pemodelan tersebut dapat berbentuk persamaan diferensial yang koefisiennya konstan atau koefisiennya variabel.

Dalam menentukan penyelesaian khusus persamaan diferensial kita dihadapkan pada kondisi-kondisi (syarat-syarat) awal yang harus dipenuhi. Persamaan diferensial beserta syarat-syarat awal tersebut dinamakan Masalah Nilai Awal.

Dalam perkuliahan dipelajari beberapa cara atau metode yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial linear dengan koefisien konstan misalnya, metode faktor pengintegralan, metode variasi parameter, metode koefisien tak tentu, dan lain-lain. Akan tetapi persamaan diferensial yang koefisiennya berupa variabel lebih sulit ditentukan penyelesaiannya.

Tetapi ada suatu metode yang memberikan kemudahan bagi kita dalam menentukan penyelesaian Masalah Nilai Awal persamaan diferensial linear. Metode tersebut adalah metode Transform Laplace. Metode Transform

Laplace secara khusus digunakan untuk penyelesaian persamaan diferensial linear dengan koefisien konstan.

Tetapi metode ini juga dapat digunakan untuk menentukan penyelesaian Masalah Nilai Awal persamaan diferensial linear dengan koefisien variabel. Kelebihannya adalah memberikan langkah-langkah penyelesaian yang cukup mudah bila dibandingkan dengan metode yang lain, misalnya metode deret. Prosedur yang dipakai adalah:

1. Ambil Transform Laplace dari kedua ruas persamaan diferensial yang diberikan.
2. Gunakan sifat-sifat, teorema-teorema Transform Laplace dan kondisi awal yang diketahui sehingga diperoleh persamaan diferensial baru dalam s, $Y(s)$ dan turunan-turunannya.
3. Kemudian persamaaan diferensial ini diselesaikan dengan metode standar yang sesuai, misalnya persamaan diferensial linear orde 1 diselesaikan dengan metode faktor pengintegralan atau metode variasi parameter.
4. Gunakan invers Transform Laplace sehingga diperoleh penyelesaian Masalah Nilai Awal yang diberikan.

Dengan metode Transform Laplace ini akan diperoleh penyelesaian khusus suatu persamaan diferensial secara langsung tanpa harus mencari penyelesaian umum dan memasukkan syarat awal yang diketahui.

Karena alasan itulah penulis tertarik untuk mengkaji lebih jauh tentang bagaimana Transform Laplace dapat membantu kita dalam mencari penyelesaian Masalah Nilai Awal persamaan diferensial orde-2 dengan koefisien konstan dan penyelesaian Masalah Nilai Awal persamaan diferensial orde-2 dengan koefisien variabel.

B. Rumusan Masalah

Pokok permasalahan yang akan dibahas dalam penulisan ini adalah :

1. Bagaimana Transform Laplace digunakan dalam menyelesaikan Masalah Nilai Awal yang berkaitan dengan persamaan diferensial orde-2 dengan koefisien konstan.
2. Bagaimana Transform Laplace digunakan dalam menyelesaikan Masalah Nilai Awal yang berkaitan dengan persamaan diferensial orde-2 dengan koefisien variabel.

C. Tujuan Penulisan

Tujuan penulisan ini adalah :

1. Untuk lebih memahami kegunaan Transform Laplace dalam menyelesaikan Masalah Nilai Awal yang berkaitan dengan persamaan diferensial orde-2 dengan koefisien konstan.
2. Untuk lebih memahami kegunaan Transform Laplace dalam menyelesaikan Masalah Nilai Awal yang berkaitan dengan persamaan diferensial orde-2 dengan koefisien variabel.

D. Manfaat Penulisan

Manfaat dari penulisan ini adalah :

1. Mengetahui salah satu metode yang dapat digunakan untuk mencari penyelesaian dari persamaan diferensial linear orde-2 dengan koefisien konstan dan persamaan diferensial linear orde-2 dengan koefisien variabel, yaitu metode Transform Laplace.
2. Memahami Transform Laplace secara teoritik dan memahami bagaimana kegunaan Transform Laplace dalam menyelesaikan Masalah Nilai Awal yang berkaitan dengan persamaan diferensial orde-2 dengan koefisien konstan dan MNA yang berkaitan dengan persamaan diferensial orde-2 dengan koefisien variabel.
3. Memberi motivasi kepada pembaca dan dapat menjadi acuan untuk melakukan pembahasan lebih lanjut mengenai kegunaan Transform Laplace dalam menyelesaikan masalah-masalah yang lain.

E. Batasan Masalah

Dalam skripsi ini, permasalahan yang akan dibahas dibatasi pada penggunaan metode Transform Laplace dalam penyelesaian Masalah Nilai Awal persamaan diferensial linier orde-2 dengan koefisien konstan dan penyelesaian Masalah Nilai Awal persamaan diferensial linier orde-2 dengan koefisien variabel. Masalah Nilai Awal persamaan diferensial linier orde-2 dengan koefisien variabel juga dibatasi pada koefisien-koefisien yang polinomnya linear dalam t. Penulis juga menganggap bahwa pembaca menguasai penyelesaian persamaan diferensial linear orde satu dengan menggunakan metode faktor pengintegralan dan metode variasi parameter.

F. Metode Penulisan

Metode yang akan digunakan dalam penulisan ini adalah metode studi pustaka. Karena Transform Laplace adalah suatu bentuk integral Riemann tak wajar maka pada landasan teori dibahas cukup cermat mengenai integral Riemann dan integral tak wajar.

BAB II

LANDASAN TEORI

A. Persamaan Diferensial

Persamaan diferensial adalah suatu persamaan yang memuat turunan atau diferensial satu atau lebih fungsi. Persamaan diferensial dapat diklasifikasikan dengan banyak cara. Jika fungsi yang belum diketahui dalam persamaan diferensial bergantung pada hanya satu variabel bebas, maka persamaan itu disebut persamaan diferensial biasa. Jika fungsi yang belum diketahui dalam persamaan diferensial bergantung pada 2 atau lebih variabel bebas, maka persamaan itu disebut persamaan diferensial parsial.

Persamaan diferensial biasa tingkat-n disebut linear dalam y jika persamaan diferensial dapat ditulis dalam bentuk:

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x) \qquad (2.1)$$

dengan $a_0, a_1, \ldots, a_n$ dan f adalah fungsi-fungsi kontinu pada suatu interval x dan $a_n(x) \neq 0$ pada interval itu.

Dari persamaan (2.1), jika diketahui $f(x) = 0$ maka persamaannya disebut persamaan diferensial linear homogen. Tetapi jika $f(x) \neq 0$ maka persamaannya disebut persamaan diferensial linear nonhomogen. Jika fungsi yang belum diketahui dalam persamaan (variabel tak bebas) mempunyai koefisien suatu konstanta maka persamaannya disebut persamaan diferensial linear dengan koefisien konstan. Tetapi jika koefisiennya suatu variabel maka persamaannya disebut persamaan diferensial linear dengan koefisien variabel.

Penyelesaian persamaan diferensial adalah suatu fungsi yang memenuhi persamaan diferensial yang diberikan. Ada beberapa cara atau metode yang digunakan untuk menentukan penyelesaian suatu persamaan diferensial, misalnya metode faktor pengintegralan, metode variasi parameter, metode reduksi, metode deret, dan lain-lain.

Untuk menentukan penyelesaian khusus persamaan diferensial diberikan kondisi-kondisi (syarat-syarat) awal yang harus dipenuhi, yaitu:

$$y(x_0) = c_0,\ y'(x_0) = c_1, \cdots, y^{(n-1)}(x_0) = c_{n-1} \qquad (2.2)$$

Persamaan diferensial (2.1) beserta syarat-syarat awal (2.2) disebut Masalah Nilai Awal (MNA).

B. Definisi Integral Riemann

Definisi-definisi dan teorema-teorema beserta bukti-buktinya yang dipakai dalam mendefinisikan integral Riemann untuk lebih jelasnya dapat dilihat di diktat Analisis Real karangan R. Soemantri, 1983.

Diberikan fungsi real terbatas f(x) yang didefinisikan pada selang [a,b]. Terdapat $m \in \mathbb{R}$ dan $M \in \mathbb{R}$ sehingga $m \leq f(x) \leq M$ untuk semua $x \in [a,b]$. Dengan suatu partisi selang [a,b], dimaksudkan suatu subhimpunan berhingga $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ dari [a,b] sehingga $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$.

Oleh partisi P terjadilah n buah subselang $[x_{i-1}, x_i]$ yang masing-masing panjangnya $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ dengan i = 1, 2, ... , n. Untuk setiap i didefinisikan bilangan real m_i dan M_i dengan

$$m_i = \inf \{ f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i] \}$$

$M_i = \sup\{ f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i] \}$

Untuk partisi P ini berturut-turut dibentuk jumlah bawah dan jumlah atas

$$L(P,f) = \sum_{i=1}^{n} m_i \, \Delta x_i$$

$$U(P,f) = \sum_{i=1}^{n} M_i \, \Delta x_i$$

Kita nyatakan $\mathcal{P}[a,b]$ untuk himpunan semua partisi P dari [a,b]. Kemudian didefinisikan

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \sup \{ L(P, f) : P \in \mathcal{P}[a,b] \} \qquad (2.3)$$

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \inf \{ U(P, f) : P \in \mathcal{P}[a,b] \} \qquad (2.4)$$

Ruas kiri (2.3) dinamakan integral Riemann bawah, sedangkan ruas kiri (2.4) dinamakan integral Riemann atas fungsi f pada [a,b]. Jika integral bawah dan integral atas itu sama, dikatakan bahwa f terintegral Riemann pada [a,b] dan dinyatakan $f \in \Re[a,b]$ dengan $\Re[a,b]$ himpunan semua fungsi terintegral Riemann pada [a,b].

Nilai integral bawah dan integral atas yang sama ini dinyatakan dengan $\int_a^b f(x)\,dx$ atau $\int_a^b f\,dx$ dan dinamakan integral Riemann fungsi f pada [a,b].

Diketahui bahwa $m \le f(x) \le M$ untuk semua $x \in [a,b]$ maka berlaku

$$m \le m_i \le M_i \le M \qquad i = 1, 2, \ldots , n.$$

Jadi, untuk sembarang partisi $P \in \mathcal{P}[a,b]$ berlaku

$$m(b-a) \le L(P,f) \le U(P,f) \le M(b-a)$$

Dengan demikian, himpunan bilangan real $\{ L(P, f) : P \in \mathcal{P}[a,b] \}$ dan $\{ U(P, f) : P \in \mathcal{P}[a,b] \}$ keduanya terbatas dalam $\mathbb{R}$, jadi $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx$ dan $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx$ pasti ada di dalam $\mathbb{R}$.

C. Syarat Keterintegralan

Hubungan antara partisi-partisi didefinisikan sebagai berikut :

Definisi 1. Dikatakan bahwa partisi P^* adalah suatu penghalusan dari [a,b] jika $P^* \supset P$ (jadi, setiap titik anggota P adalah anggota P^*). Jika diberikan partisi P_1 dan P_2 maka $P = P_1 \cup P_2$ dinamakan penghalusan gabungan untuk P_1 dan P_2 .

Teorema 1 dan 2 menyatakan hubungan antara jumlah atas dan jumlah bawah sembarang partisi P dan Q, dan hubungan antara integral atas dan integral bawah yaitu sebagai berikut:

Teorema 1. Jika f suatu fungsi terbatas pada [a,b] maka berlaku pernyataan-pernyataan berikut :

a. Jika $P \supset Q$ maka $L(P, f) \geq L(Q, f)$ dan $U(P, f) \leq U(Q, f)$.

b. Untuk sembarang partisi P dan Q berlaku $L(P, f) \leq U(Q, f)$.

Teorema 2. $\underline{\int_a^b} f(x)dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx$.

Teorema berikut yang akan diberikan yaitu teorema 3 merupakan syarat perlu dan cukup untuk fungsi terbatas f terintegral Riemann pada [a,b].

Teorema 3. Fungsi f $\in \Re[a,b]$ jika dan hanya jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ yang diberikan terdapat partisi P dari [a,b] sedemikian hingga

$$U(P, f) - L(P, f) < \varepsilon.$$

Contoh 1: Diberikan $f(x) = x^2$ pada $x \in [0,1]$. Buktikan $f \in \Re[0,1]$ dan hitunglah nilai $\int_0^1 x^2 dx$

Diberikan $\varepsilon > 0$. Dipilih partisi $P = \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \cdots, \frac{n}{n}\right\}$. Jadi $x_i = \frac{i}{n}$ dan $\Delta x_i = \frac{1}{n}$ untuk $i = 1, 2, \cdots, n$. Untuk setiap i maka $m_i = f(x_{i-1}) = \left(\frac{i-1}{n}\right)^2$ dan $M_i = f(x_i) = \left(\frac{i}{n}\right)^2$.

Jadi, $L(P,f) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i-1}{n}\right)^2 \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n}(i-1)^2$

$$U(P,f) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^2 \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2$$

sehingga

$$U(P,f) - L(P,f) = \frac{1}{n^3}\left\{\sum_{i=1}^{n} i^2 - \sum_{i=1}^{n}(i-1)^2\right\}$$

$$= \frac{1}{n^3}\left[\left(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2\right) - \left(0^2 + 1^2 + \cdots + (n-1)^2\right)\right] = \frac{1}{n^3}\cdot n^2 = \frac{1}{n}$$

Jika n dipilih cukup besar sehingga $\frac{1}{n} < \varepsilon$ maka $U(P,f) - L(P,f) < \varepsilon$. Dan menurut teorema 3, f terintegral Riemann pada [0,1].

Untuk menentukan nilai $\int_0^1 x^2 dx$ berarti kita mencari suprimum L(P,f) dan infimum U(P,f) di mana suprimum dan infimum tersebut bernilai sama.

$$U(P,f) = \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{n^3}\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$= \frac{1}{6}\cdot\frac{2n^2+3n+1}{n^2} = \frac{1}{6}\left(2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{3}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}$$

Jadi, untuk sembarang bilangan bulat positif n berlaku $U(P,f) \geq \frac{1}{3}$. Ini berarti $\frac{1}{3}$ suatu batas bawah U(P,f), dengan demikian $\frac{1}{3}$ tidak lebih dari batas bawah terbesar U(P,f). Jadi, $\frac{1}{3}$ adalah infimum U(P,f).

$$L(P,f) = \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n}(i-1)^2 = \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n}(i^2-2i+1)$$

$$= \frac{1}{3}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}-\frac{2n(n+1)}{2n^3}+\frac{n}{n^3}$$

$$= \frac{1}{3}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}-\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2} = \frac{1}{3}-\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}$$

Jadi, untuk sembarang bilangan bulat positif n berlaku $L(P,f) \leq \frac{1}{3}$. Ini berarti $\frac{1}{3}$ suatu batas atas L(P,f), dengan demikian $\frac{1}{3}$ tidak kurang dari batas atas terkecil L(P,f). Jadi, $\frac{1}{3}$ adalah supremum L(P,f).

Karena supremum L(P,f) sama dengan infimum U(P,f) yaitu $\frac{1}{3}$ maka nilai $\int_0^1 x^2 dx$ adalah $\frac{1}{3}$.

Contoh 2: Diberikan fungsi yang didefinisikan pada [a,b], dengan f(x) = 1 jika x rasional dan f(x) = 0 jika x irasional. Buktikan bahwa f tidak terintegral Riemann pada [a,b], jadi f $\notin \Re$[a,b].

Untuk sembarang partisi $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \in \mathcal{P}$ [a,b] maka $m_i = 0$ dan $M_i = 1$ untuk $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Jadi, L(P,f) = 0 dan U(P,f) = b-a. Dengan demikian $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx =$ sup {0}=0 dan $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx =$ inf{b-a} = b-a. Karena kedua nilai ini tidak sama maka f $\notin \Re$[a,b] yakni f tidak terintegral Riemann pada [a,b].

Teorema 3 akan banyak kita gunakan untuk membuktikan teorema-teorema berikutnya, salah satunya adalah teorema mengenai keterintegralan fungsi kontinu dan monoton pada selang [a,b] sebagaimana yang dinyatakan dalam teorema 4 dan 5.

Teorema 4. Jika f kontinu pada [a,b] maka f $\in \Re$[a,b].

Teorema 5. Jika f monoton pada [a,b] maka f $\in \Re$ [a,b].

Lema berikut ini berguna untuk membuktikan teorema 6.b

Lema 1. Diberikan f fungsi real terbatas yang didefinisikan pada himpunan $E \subset \mathbb{R}$ dengan m dan M berturut-turut infimum dan supremum f(x) untuk $x \in E$. Maka $M - m = \sup\{ |f(x) - f(y)| : x, y \in E\}$.

Dengan menggunakan teorema 1.a dapat dibuktikan teorema 6.a sedangkan teorema 6.c kita buktikan dengan menggunakan defnisi integral Riemann.

Teorema 6. Jika f fungsi terbatas pada [a,b] dan untuk suatu $\varepsilon > 0$ yang diberikan terdapat $P \in \mathcal{P}[a,b]$ sehingga $U(P, f) - L(P, f) < \varepsilon$ dengan $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ maka

a. untuk $Q \in \mathcal{P}[a,b]$ dan $Q \supset P$ berlaku $U(Q, f) - L(Q, f) < \varepsilon$.

b. jika p_1 dan q_1 sembarang titik dari $[x_{i-1}, x_i]$ maka

$$\sum_{i=1}^{n} |f(p_i) - f(q_i)| \, \Delta x_i < \varepsilon.$$

c. jika $f \in \mathfrak{R}[a,b]$ dan t_i sembarang titik dalam $[x_{i-1}, x_i]$ maka

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i - \int_a^b f(x)dx \right| < \varepsilon .$$

Teorema 7. Jika fungsi $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ terbatas dan hanya memiliki berhingga banyak titik-titik diskontinu pada [a,b] maka $f \in \mathfrak{R}[a,b]$.

D. Sifat-sifat Integral Riemann

Lema berikut berguna untuk membuktikan teorema 8.

Lema 2. Jika f dan g fungsi real terbatas pada himpunan $E \subset \mathbb{R}$, maka

a. $\inf\{ f(x) : x \in E \} + \inf\{ g(x) : x \in E \} \leq \inf\{ f(x) + g(x) : x \in E \}$.

b. $\sup\{ f(x) : x \in E \} + \sup\{ f(x) : x \in E \} \geq \sup\{ f(x) + g(x) : x \in E \}$.

Teorema 8. Jika $f \in \Re[a,b]$ dan $g \in \Re[a,b]$ dan $k \in \mathbb{R}$ maka :

a. $kf \in \Re[a,b]$ dan $\int_a^b k\, f(x)\, dx = k \int_a^b f(x)\, dx.$

b. $f+g \in \Re[a,b]$ dan $\int_a^b [\, f(x) + g(x)\,]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$

Akibat dari teorema 8 dengan mengambil k = -1 adalah sebagai berikut :

Akibat. Jika $f \in \Re[a,b]$ dan $g \in \Re[a,b]$ maka $f - g \in \Re[a,b]$.

Integral Riemann fungsi f pada [a,b] bernilai positif seperti yang dinyatakan dalam teorema 9 di bawah ini dapat kita buktikan dengan menggunakan definisi integral Riemann.

Teorema 9. Jika $f \in \Re[a,b]$ dan $f(x) \geq 0$ untuk semua $x \in [a,b]$ maka

$$\int_a^b f(x)\, dx \geq 0.$$

Dari teorema 9 dengan mengambil $h(x) = f(x) - g(x)$ diperoleh hasil sebagai berikut .

Akibat. Jika $f \in \Re[a,b]$ dan $g \in \Re[a,b]$ dan $f(x) \geq g(x)$ untuk semua $x \in [a,b]$

maka $\int_a^b f(x)\, dx \geq \int_a^b g(x)\, dx.$

Dengan menggunakan teorema 3 dan definisi integral Riemann dapat kita buktikan teorema 10 yang dinyatakan sebagai berikut:

Teorema 10. $f \in \Re[a,b]$ dengan $a<c<b$ jika dan hanya jika $f \in \Re[a,c]$,

$f \in \Re[c,b]$ dan $\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx.$

Keterintegralan fungsi komposisi pada selang [a,b] seperti yang dinyatakan dalam teorema 11 kita buktikan dengan menggunakan teorema 3 dan teorema 11 ini kemudian kita gunakan untuk membuktikan teorema 12.

Teorema 11. Jika $f \in \Re[a,b]$ dan $f([a,b]) = [m,M]$ dan g kontinu pada $[m,M]$ dan $h(x) = g(f(x))$ untuk $x \in [a,b]$ maka $h \in \Re[a,b]$.

Teorema 12. Jika $f \in \Re[a,b]$ dan $g \in \Re[a,b]$ maka

a. $f^2 \in \Re[a,b]$.

b. $fg \in \Re[a,b]$.

c. $|f| \in \Re[a,b]$ dan $\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$.

Selanjutnya kita akan membicarakan mengenai teorema **Fundamental Kalkulus**. Dalam teorema fundamental ini akan dibicarakan mengenai hubungan antara pengertian derivatif dan integral.

Teorema 13. (Teorema Fundamental bentuk Pertama)

Diberikan $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ dengan $f \in \Re[a,b]$ dan $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ yang memenuhi syarat :

i. F kontinu pada [a,b]

ii. F' ada dan $F'(x) = f(x)$ untuk semua $x \in [a,b]$

maka $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$

Teorema 14. (Teorema Fundamental Bentuk Kedua)

Diketahui $f \in \Re[a,b]$ dan dibentuk fungsi

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \quad \text{untuk } x \in [a,b];$$

maka F kontinu pada [a,b].

Jika f kontinu di suatu titik $c \in [a,b]$ maka F terdiferensial di c dan $F'(c) = f(c)$.

Dari teorema 14. ini diperoleh akibat sebagai berikut :

Teorema 15. Jika f fungsi kontinu dari [a,b] dalam $\mathbb{R}$ dan dibentuk fungsi

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \qquad \text{untuk } x \in [a,b],$$

maka F terdiferensial pada [a,b] dan $F'(x) = f(x)$ untuk semua $x \in [a,b]$.

Definisi 2. a. Jika $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ maka **antiderivatif** fungsi f pada [a,b] adalah $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ sehingga $F'(x) = f(x)$ untuk semua $x \in [a,b]$.

b. Jika $f \in \mathfrak{R}[a,b]$ maka fungsi $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ yang didefinisikan dengan $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ untuk $x \in [a,b]$ dinamakan **integral tak tentu** fungsi f pada [a,b].

Dari uraian di atas, kita telah mendefinisikan integral Riemann dengan menggunakan infimum dan supremum fungsi f meliputi semua partisi P pada selang [a,b] di mana fungsi real terbatas f dikatakan terintegral Riemann pada [a,b] apabila $\sup \{ L(P, f) : P \in \mathcal{P}[a,b] \} = \inf \{ U(P, f) : P \in \mathcal{P}[a,b] \}$. Selanjutnya, sebagaimana yang dipelajari dalam kalkulus, integral Riemann didefinisikan sebagai limit suatu jumlah. Kemudian akan ditunjukkan ekuivalensi dari kedua definisi tersebut.

E. Definisi Integral Sebagai Limit

Jumlah Riemann untuk fungsi f yang tergantung pada partisi P dan titik-titik ξ_i didefinisikan sebagai berikut :

Definisi 3. Diberikan fungsi terbatas $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Dimisalkan $P \in \mathcal{P}[a,b]$ dengan $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$. Jika untuk setiap $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, ξ_i adalah sembarang bilangan pada $[x_{i-1}, x_i]$, maka jumlah

$$S(P, f) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i$$

dengan $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ dinamakan jumlah Riemann untuk f.

Jika m_i dan M_i nilai-nilai seperti yang dimaksudkan dalam definisi B maka akan berlaku hubungan

$$m_i \le f(\xi_i) \le M_i \qquad \text{untuk } i = 1, 2, \dots, n.$$

sehingga

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\,\Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} M_i\,\Delta x_i\,,$$

atau $\quad L(P, f) \le S(P, f) \le U(P, f)$.

Norma dari partisi P didefinisikan sebagai berikut :

Definisi 4. Jika $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ suatu partisi [a,b], maka nilai

$$\|P\| = \text{maks}\,\{\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n\}$$

dinamakan *norma* untuk partisi P.

Untuk setiap P $\in \mathcal{P}[a,b]$ nilai $\|P\| > 0$ dan jika partisi $P \supset Q$ maka $\|P\| \leq \|Q\|$.

Definisi berikut berguna untuk membuktikan teorema 16.

Definisi 5. Diberikan fungsi terbatas f yang didefinisikan pada [a,b]. Bilangan A dikatakan limit S (P, f) untuk $\|P\| \to 0$ dan ditulis

$$\lim_{\|P\|\to 0} S(P,f) = A$$

jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ yang diberikan terdapat $\delta > 0$ sehingga untuk semua P $\in \mathcal{P}[a,b]$ dengan $\|P\| < \delta$ berlaku $|S(P, f) - A| < \varepsilon$.

Teorema 16. Jika $\lim_{\|P\|\to 0} S(P,f)$ ada maka limit ini tunggal.

Teorema 17. Jika $\lim_{\|P\|\to 0} S(P,f)$ ada maka f $\in \Re[a,b]$ dan $\lim_{\|P\|\to 0} S(P,f) = \int_a^b f(x)dx$.

Lema di bawah ini berguna untuk membuktikan kebalikan teorema 21.

Lema 3. Jika f fungsi real yang terbatas pada [a,b] maka untuk setiap $\varepsilon > 0$ yang diberikan terdapat $\delta > 0$ sehingga untuk semua P $\in \mathcal{P}[a,b]$ dengan $\|P\| < \delta$ berlaku $U(P,f) < \overline{\int_a^b} f(x)dx + \varepsilon$ dan $L(P,f) > \underline{\int_a^b} f(x)dx - \varepsilon$.

Teorema berikut ini akan menunjukkan ekuivalensi definisi integral Riemann yang dibicarakan dalam definisi B dan sebagai limit jumlah S (P, f).

Teorema 18. Fungsi terbatas f terintegral Riemann pada [a,b] jika dan hanya

jika $\lim_{\|P\|\to 0} S(P,f)$ ada dan $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\|P\|\to 0} S(P,f)$.

F. Integral Tak Wajar

Dalam uraian tentang integral di atas, diberikan fungsi terbatas dan didefinisikan pada selang terbatas. Tetapi bagaimana menentukan nilai suatu integral jika syarat-syarat tersebut tidak dipenuhi. Perhatikan contoh di bawah ini.

Contoh 3: Tentukan $\int_1^b \frac{dx}{x^2}$ dengan b>1.

$$\int_1^b \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\bigg]_1^b = 1 - \frac{1}{b}$$

Jelas bahwa untuk b>1, integral tertentu $\int_a^b f(x)dx$ ada dan kita dapat membuat nilai integral tersebut sedekat mungkin ke 1 dengan mengambil b cukup besar sehingga

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = 1 - 0 = 1$$

Integral tertentu dengan batas atas pengintegralan tak hingga adalah salah satu bentuk integral tak wajar khususnya integral tak wajar jenis pertama.

Definisi mengenai integral tak wajar jenis pertama dan integral tak wajar jenis kedua dapat dilihat di diktat Analisis Real karangan R. Soemantri, 1983. Sedangkan teorema-teorema yang berlaku dalam integral tak wajar dapat dilihat di buku Advanced Calculus karangan Angus E. Taylor, 1955 halaman 634-654.

1. **Integral Tak Wajar Jenis Pertama**

Integral tak wajar jenis pertama menyangkut fungsi terbatas yang didefinisikan pada selang tak terbatas.

Definisi 6. Untuk $a \in \mathbb{R}$ diberikan fungsi $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ sedemikian hingga untuk setiap b > a fungsi f terintegral pada [a,b]. Diandaikan bahwa terdapat suatu $A \in \mathbb{R}$ sehingga untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $M \in \mathbb{R}$ sehingga untuk semua b > M berlaku $\left| A - \int_a^b f(x)\,dx \right| < \varepsilon$. Dalam hal ini dikatakan bahwa A adalah integral tak wajar f pada [a,∞) dan nilai A ini dinyatakan dengan $\int_a^\infty f(x)dx$. Dengan kata lain integral tak wajar f pada [a,∞) adalah $\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx$. Integral tak wajar f konvergen atau divergen bergantung pada apakah limit di ruas kanan ada atau tidak ada.

Integral tak wajar pada selang (-∞,b] didefinisikan dengan cara yang serupa. Untuk fungsi yang didefinisikan pada (-∞,∞) ditentukan dengan menghitung integral tak wajar pada (-∞,c) dan (c, ∞) untuk sembarang $c \in \mathbb{R}$. Jika kedua integral tak wajar ini ada, maka integral tak wajar f pada (-∞,∞) ada dan didefinisikan sebagai

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{\infty} f(x)dx.$$

Contoh 4 : Tentukan apakah integral tak wajar $\int_0^\infty xe^{-x^2}\,dx$ konvergen atau divergen.

Dengan menggunakan pengintegralan parsial diperoleh :

$$u = x \qquad dv = e^{-x^2}\,dx$$

$$du = dx \qquad v = \int e^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{2x}e^{-x^2}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^b xe^{-x^2}\,dx &= \left[x\left(-\frac{1}{2x}e^{-x^2}\right)\right]_0^b - \int_0^b -\frac{1}{2x}e^{-x^2}\,dx \\
&= \left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]_0^b - \left[\frac{1}{4x^2}e^{-x^2}\right]_0^b \\
&= \left[-\frac{1}{2}e^{-b^2}+\frac{1}{2}\right] - \left[\frac{1}{4b^2}e^{-b^2}-0\right] \\
&= -\frac{1}{2}e^{-b^2} - \frac{1}{4b^2}e^{-b^2} + \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

maka

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty xe^{-x^2}\,dx &= \lim_{b\to\infty}\int_0^b xe^{-x^2}\,dx \\
&= \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{2}e^{-b^2} - \frac{1}{4b^2}e^{-b^2} + \frac{1}{2}\right) \\
&= \lim_{b\leftarrow\infty} -\frac{1}{2}e^{-b^2} - \lim_{b\to\infty}\frac{1}{4b^2}e^{-b^2} + \lim_{b\to\infty}\frac{1}{2} \\
&= 0 - 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Berdasarkan definisi 6 maka $\int_0^\infty xe^{-x^2}\,dx$ konvergen.

Contoh 5 : Tentukan apakah integral tak wajar $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^2}$ konvergen atau divergen.

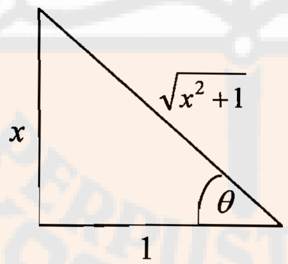
Pertama-tama kita cari terlebih dahulu nilai integral tak tentunya yaitu nilai dari integral $\int \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^2}$. Andaikan $x = \tan\theta$ maka $dx = \sec^2\theta\, d\theta$.

$$\int \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^2} = \int \frac{\sec^2\theta\, d\theta}{\left(\tan^2\theta+1\right)^2} = \int \frac{\sec^2\theta\, d\theta}{\left(\sec^2\theta\right)^2}$$

$$= \int \frac{1}{\sec^2\theta}\, d\theta = \int \cos^2\theta\, d\theta = \int \left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right) d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta + C$$

Perhatikan gambar di bawah ini !



$\tan\theta = x$ maka $\theta = \tan^{-1} x$

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = 2\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{2x}{\left(x^2+1\right)},$$

sehingga

$$\int \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{1}{2}\tan^{-1} x + \frac{1}{4}\cdot\frac{2x}{(x^2+1)} + C$$

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{2}\tan^{-1} x + \frac{x}{2(x^2+1)} + C$$

Jika dipilih $c = 0$ dalam definisi integral tak wajar jenis pertama dengan kedua batas pengintegralan tak berhingga, maka

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{(x^2+1)^2} + \int_{0}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2}$$

$$= \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{0} \frac{dx}{(x^2+1)^2} + \lim_{b\to\infty} \int_{0}^{b} \frac{dx}{(x^2+1)^2}$$

$$= \lim_{a\to-\infty}\left[\frac{1}{2}\tan^{-1} x + \frac{x}{2(x^2+1)}\right]_a^0 + \lim_{b\to\infty}\left[\frac{1}{2}\tan^{-1} x + \frac{x}{2(x^2+1)}\right]_0^b$$

$$= \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

Menurut definisi 6 maka $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2}$ konvergen.

Ada beberapa teorema untuk menguji konvergensi dari integral tak wajar jenis pertama. Untuk lebih jelasnya akan kita bahas satu persatu teorema-teorema tersebut.

Teorema 19. $\int_a^{\infty} f(t)\,dt$ adalah integral tak wajar jenis pertama dengan $f(t) \geq 0$ untuk semua t konvergen jika dan hanya jika ada konstanta M sedemikian hingga

$$\int_a^x f(t)\,dt \leq M \quad , \text{ untuk semua } x > a$$

Teorema 20. Diandaikan $\int_a^\infty f(x)dx$ dan $\int_b^\infty g(x)dx$ adalah integral-integral tak wajar jenis pertama dengan integran-integran positif dan diandaikan $f(x) \le g(x)$ untuk $\forall x > c$, dengan c bilangan tertentu. Jika $\int_b^\infty g(x)dx$ konvergen maka $\int_a^\infty f(x)dx$ konvergen dan jika $\int_a^\infty f(x)dx$ divergen maka $\int_b^\infty g(x)dx$ divergen.

Contoh 6 : Tentukan apakah $\int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{1+t^3}}$ konvergen atau divergen.

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^3}}$$

Pilih $g(t)$ sedemikian hingga untuk semua $t > 0$ berlaku $f(t) \le g(t)$. Andaikan $g(t) = \frac{1}{\sqrt{t^3}}$

$$\int_1^x \frac{dt}{\sqrt{t^3}} = \int_1^x t^{-3/2} dt = \left[-2t^{-1/2}\right]_1^x = -2\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 1\right)$$

Untuk semua x > 1, $\int_1^x \frac{dt}{\sqrt{t^3}} < 2$ sehingga berdasarkan teorema 19, $\int_1^\infty \frac{dt}{\sqrt{t^3}}$ konvergen.

Karena $\frac{1}{\sqrt{1+t^3}} < \frac{1}{\sqrt{t^3}}$ dan $\int_1^\infty \frac{dt}{\sqrt{t^3}}$ konvergen maka berdasarkan teorema 20, $\int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{1+t^3}}$ konvergen.

Teorema 21. Diandaikan $\int_a^\infty f(x)\,dx$ dan $\int_b^\infty g(x)\,dx$ adalah integral tak wajar jenis pertama dengan integran-integran positif dan andaikan bahwa

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = L > 0.$$

Maka $\int_a^\infty f(x)\,dx$ dan $\int_b^\infty g(x)\,dx$ kedua-duanya konvergen atau kedua-duanya divergen.

Contoh 7 : Tentukan apakah $\int_1^\infty \frac{x^2 dx}{2x^4 - x + 1}$ konvergen atau divergen.

$$f(x) = \frac{x^2}{2x^4 - x + 1}$$

Untuk x yang besar, maka integran tersebut kira-kira sama dengan $g(x) = \frac{1}{x^2}$ sehingga

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{2x^4 - x + 1}\cdot x^2 = \lim_{x\to\infty}\frac{x^4}{2x^4 - x + 1} = \frac{1}{2}$$

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_1^b = \lim_{b\to\infty}\left(1 - \frac{1}{b}\right) = 1$$

Karena $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{2}$ dan $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$ konvergen maka berdasarkan teorema 21, $\int_1^\infty \frac{x^2 dx}{2x^4 - x + 1}$ juga konvergen.

Teorema 22. Jika f, g dan L seperti dimaksudkan dalam teorema 21 maka diperoleh

1. Jika $L = 0$ dan $\int_b^\infty g(x)\,dx$ konvergen maka $\int_a^\infty f(x)\,dx$ konvergen.

2. Jika $L = \infty$ dan $\int_b^\infty g(x)\,dx$ divergen maka $\int_a^\infty f(x)\,dx$ divergen.

Dalam prakteknya, lebih mudah ditentukan konvergensi atau divergensi $\int_a^\infty f(x)\,dx$ dengan mengambil $g(x) = \frac{1}{x^p}$ sebagai fungsi pembanding. Sehingga $\int_b^\infty \frac{1}{x^p}dx$, dengan p adalah sebuah konstanta dan $b > 0$, konvergen jika $p > 1$ dan divergen jika $p \le 1$.

Contoh 8 : Andaikan $f(x) = \frac{3x-7}{(x+1)^{5/2}}$. Untuk x yang besar, maka integran tersebut kira-kira sama dengan $\frac{3x}{x^{5/2}} = \frac{3}{x^{3/2}}$. Jadi, menurut teorema 21 dengan mengambil $g(x) = \frac{1}{x^{3/2}}$ dapat ditunjukkan bahwa $\int_0^\infty \frac{3x-7}{(x+1)^{5/2}}dx$ konvergen.

2. Integral Tak Wajar Jenis Kedua

Integral tak wajar jenis kedua menyangkut fungsi yang tak terbatas yang didefinisikan pada selang terbatas. Berikut ini merupakan definisi integral tak wajar yang ketakwajarannya terletak di ujung kiri selang.

Definisi 7. Diberikan $f \in \Re[c,b]$ untuk setiap $c \in (a,b]$. Jika terdapat $A \in \mathbb{R}$ sehingga untuk setiap $\varepsilon > 0$ yang diberikan terdapat $\delta > 0$ dan untuk setiap c dengan $a<c<a+\delta$ berlaku $\left|A - \int_c^b f(x)dx\right| < \varepsilon$ maka dikatakan bahwa A integral tak wajar dari f pada [a,b] dan nilai A dinyatakan dengan $\int_a^b f(x)dx$.

Jelas bahwa bilangan A adalah limit kanan $A = \lim_{c \to a^+} \int_c^b f(x)dx$.

Integral tak wajar f konvergen atau divergen bergantung pada apakah limit di ruas kanan ada atau tidak ada.

Dengan cara yang serupa didefinisikan integral tak wajar yang ketakwajarannya terletak di ujung kanan selang. Jika fungsi f tak terbatas di setiap titik interior p pada [a,b] maka integral tak wajar f pada [a,b] dikatakan ada jika integral tak wajar f pada kedua selang [a,p) dan (p,b] ada dan dalam hal ini integral tak wajar f pada [a,b] adalah

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^p f(x)dx + \int_p^b f(x)dx.$$

Contoh 9 : Tentukan apakah $\int_0^1 \frac{dx}{x}$ konvergen atau divergen.

$f(x) = \frac{1}{x}$ menjadi tak terbatas pada ujung kiri selang yaitu pada $x = 0$.

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{a \to 0^+} \int_a^1 \frac{dx}{x} = \lim_{a \to 0^+} [\ln x]_a^1 = \lim_{a \to 0^+} [0 - \ln a] = \infty$$

Jadi, menurut definisi 7 maka $\int_0^1 \frac{dx}{x}$ divergen.

Contoh 10 : Diberikan $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ untuk $x \in [-1,0) \cup (0,1]$ dan $f(0) = 0$.

Pada setiap kitar dari 0 fungsi f tak terbatas. Untuk -1<a<0 diperoleh

$$\int_{-1}^{a} f(x)dx = \lim_{a \to 0^-} \left[\frac{3}{2} x^{2/3} \right]_{-1}^{a} = \lim_{a \to 0^-} \frac{3}{2} \left(a^{2/3} - 1 \right) = -\frac{3}{2}$$

Integral tak wajar f pada (0,1] adalah

$$\int_0^1 f(x)dx = \lim_{b \to 0^+} \left[\frac{3}{2} x^{2/3} \right]_b^1 = \lim_{b \to 0^+} \frac{3}{2} \left(1 - b^{2/3} \right) = \frac{3}{2}$$

Jadi, integral tak wajar f pada [-1,1] adalah

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = -\frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 0$$

Teorema-teorema yang berlaku untuk pengujian konvergensi pada integral tak wajar jenis kedua analog dengan teorema 19–22 pada integral tak wajar jenis pertama tetapi ada sedikit perbedaan pernyataan. Teorema-

teorema untuk pengujian konvergensi integral tak wajar jenis kedua diberikan untuk kasus $f(x)$ menjadi tak terbatas di $x = a$ dalam selang $[a,b]$ atau $f(x)$ menjadi tak terbatas di $x = b$ atau di $x = x_0$ di mana $a < x_0 < b$.

Sebelumnya kita perlu mengetahui integral p untuk integral tak wajar jenis kedua karena integral p ini akan membantu kita dalam menentukan konvergensi atau divergensi dari $\int_a^b f(x)dx$, yaitu :

1. $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^p}$ konvergen jika $p < 1$ dan divergen jika $p \geq 1$

2. $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^p}$ konvergen jika $p < 1$ dan divergen jika $p \geq 1$

Contoh 11 : Tentukan $\int_0^1 \frac{dx}{(1-x^3)^{1/3}}$ konvergen atau divergen.

$$f(x) = \frac{1}{(1-x^3)^{1/3}} = \frac{1}{(1-x)^{1/3}(1+x+x^2)^{1/3}}$$

$$g(x) = \frac{1}{(1-x)^{1/3}} \quad \text{maka}$$

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 1^-} \frac{1}{(1+x+x^2)^{1/3}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{1/3}$$

Karena $\lim_{x \to 1^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \left(\frac{1}{3}\right)^{1/3}$ dan $\int_0^1 g(x)dx$ konvergen maka menurut teorema 21 integral tak wajar jenis kedua yaitu $\int_0^1 \frac{dx}{(1-x)^{1/3}}$ konvergen.

Contoh 12 : Untuk nilai p berapakah $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x^p} dx$ konvergen

$$f(x) = \frac{\sin x}{x^p} = \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{x^{p-1}} \quad , \qquad g(x) = \frac{1}{x^{p-1}}$$

sehingga $\lim_{x \to 0^+} = \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Karena $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{x^{p-1}}$ dan $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x^p} dx$ konvergen jika $p - 1 < 1$ atau $p < 2$.

Integral tak wajar jenis kedua dapat ditransformasikan ke integral tak wajar jenis pertama dengan cara substitusi.

Contoh 13 : Tunjukkan bahwa $\int_0^1 \left(\log \frac{1}{u}\right)^3 du = \int_0^\infty t^3 e^{-t} dt$ dan tentukan apakah integral tersebut konvergen atau divergen.

Misalkan $t = \log \frac{1}{u}$ atau $u = e^{-t}$, $du = -e^{-t} dt$

Untuk $u = 0$ maka $t = 0$ dan $u = 1$ maka $t = \infty$, sehingga

$$\int_0^1 \left(\log \frac{1}{u}\right)^3 du = \int_0^\infty t^3 e^{-t} dt.$$

Dengan menggunakan 3 kali pengintegralan parsial , diperoleh

$$\int_0^\infty t^3 e^{-t} dt \quad = \quad \lim_{b \to \infty} \int_0^b 6e^{-t} dt = 6 \lim_{b \to \infty} \left[-e^{-t}\right]_0^b = 6 \lim_{b \to \infty} (1 - e^{-b}) = 6$$

Menurut definisi 6 maka $\int_0^\infty t^3 e^{-t} dt$ konvergen.

3. Integral Tak Wajar Jenis Ketiga/Campuran

Integral tak wajar jenis ketiga dapat dinyatakan dalam integral tak wajar jenis pertama dan jenis kedua.

Contoh 14 : Diberikan $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$ yang merupakan integral tak wajar jenis ketiga dengan batas atas pengintegralan tak berhingga dan integran menjadi tak terbatas pada batas bawah pengintegralan. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$ dapat ditulis sebagai berikut :

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} = \int_0^{1} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} + \int_1^{\infty} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$$

$\int_0^{1} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$ konvergen sebagaimana dapat ditunjukkan dengan menggunakan test limit dengan mengambil $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

Integral yang kedua yaitu $\int_1^{\infty} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$ juga konvergen, yaitu dengan mengambil $g(x) = \frac{1}{x^{3/2}}$. Jadi, $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$ konvergen.

4. Konvergensi Mutlak

Integral tak wajar jenis pertama $\int_a^{\infty} f(x)dx$ disebut konvergen mutlak jika $\int_a^{\infty} |f(x)|dx$ konvergen. Definisi yang sama juga berlaku integral jenis kedua dan integral campuran. Jika $\int_a^\infty f(x)dx$ konvergen tetapi $\int_a^\infty |f(x)|\,dx$ divergen maka $\int_a^\infty f(x)dx$ dinamakan konvergen bersyarat.

Teorema 23. Jika $\int_a^\infty |f(x)|\,dx$ konvergen maka $\int_a^\infty f(x)dx$ konvergen.

Dengan kata lain, sebuah integral yang konvergen mutlak pasti konvergen.

Teorema 20 juga berlaku untuk integral jenis kedua, hanya batas pengintegralannya harus diubah. Test apakah suatu integral adalah konvergen mutlak menggunakan teoema-teorema yang sudah dibicarakan sebelumnya karena integran $|f(x)|$ tidak pernah negatif.

Teorema 24. Andaikan integral tak wajar jenis pertama berbentuk $\int_a^\infty \phi(t)f(t)dt$ fungsi ϕ dan f memenuhi kondisi

a. $\phi'(t)$ kontinu, $\phi'(t) \le 0$ dan $\lim\limits_{t\to\infty}\phi(t) = 0$

b. $f(t)$ kontinu dan $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ berhingga untuk semua $x \ge a$

maka $\int_a^\infty \phi(t)f(t)dt$ konvergen.

BAB III

TRANSFORM LAPLACE

A. Transform Integral

Transform integral adalah suatu transform terhadap fungsi yang diberikan menjadi fungsi baru yang diperoleh dengan menggunakan pengintegralan. Transform integral didefinisikan sebagai berikut:

$$T\{f(t)\} = F(s) = \int_a^b K(s,t) f(t)\,dt \tag{3.1}$$

Jika $a = 0$, $b = \infty$, dan $K(s,t) = e^{-st}$ maka (3.1) disebut Transform Laplace. Transform Laplace dapat digunakan untuk menentukan penyelesaian persamaan diferensial linear yang berkaitan dengan Masalah Nilai Awal.

B. Transform Laplace dan Sifat-sifat Dasar Transform Laplace

1. Transform Laplace.

Definisi. (Definisi Transform Laplace)

Misalkan $f(t)$ adalah fungsi dalam variabel t untuk $t \geq 0$ dalam interval $[0,\infty)$, maka Transform Laplace dari $f(t)$ adalah fungsi $F(s)$ yang didefinisikan dengan integral :

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt$$

untuk semua nilai s di mana integral ini ada.

(R. Kent Nagle & Edward B. Saff , 1986: 314)

Seperti yang sudah dibahas pada bab II, integral pada definisi Transform Laplace adalah bentuk integral tak wajar jenis pertama dengan batas atas pengintegralan tak terbatas, maka :

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt = \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-st} f(t)dt$$

Jadi, Transform Laplace dari fungsi t yang diberikan bergantung pada ada tidaknya nilai limit.

Dengan menggunakan definisi Transform Laplace dapat dihitung Transform Laplace dari beberapa fungsi elementer.

Contoh 1: Tentukan Transform Laplace dari $f(t)=1, \quad t>0$

Dengan menggunakan definisi Transform Laplace, maka

$$\mathcal{L}\{1\} = \int_0^\infty e^{-st}\cdot 1\, dt = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-st}dt = \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{e^{-st}}{s}\right]_0^b$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left[\frac{1}{s}-\frac{e^{-sb}}{s}\right] = \lim_{b\to\infty}\frac{1}{s} - \lim_{b\to\infty}\frac{e^{-sb}}{s} = \frac{1}{s} - 0 = \frac{1}{s}$$

Jadi, $\mathcal{L}\{1\} = F(s) = \frac{1}{s}$ di mana s >0.

Contoh 2: Tentukan Transform Laplace dari $f(t)=e^{at}, \quad t>0$ dan a sembarang konstanta

Dengan menggunakan definisi Transform Laplace, maka

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \int_0^\infty e^{-st}\cdot e^{at}dt = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-st}e^{at}dt = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-(s-a)t}dt$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{e^{-(s-a)t}}{s-a}\right]_0^b = \lim_{b\to\infty}\left[\frac{1}{s-a}-\frac{e^{-(s-a)b}}{s-a}\right]$$

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \lim_{b\to\infty}\frac{1}{s-a} - \lim_{b\to\infty}\frac{e^{-(s-a)b}}{s-a} = \frac{1}{s-a} - 0 = \frac{1}{s-a}$$

Jadi, $\mathcal{L}\{e^{at}\} = F(s) = \dfrac{1}{s-a} \quad s > a$.

Contoh 3: Tentukan Transform Laplace dari $f(t) = \sin at,\quad t > 0$ dan a sembarang konstanta

Dengan menggunakan definisi Transform Laplace, maka

$$\mathcal{L}\{\sin at\} = \int_0^\infty e^{-st}\cdot \sin at\, dt = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-st}\sin at\, dt$$

Dengan menggunakan 2 kali pengintegralan parsial diperoleh :

$$\int_0^b e^{-st}\sin at\, dt$$

$$= \left[-\frac{1}{a}e^{-st}\cos at\right]_0^b - \frac{s}{a}\left\{\left[\frac{1}{a}e^{-st}\sin at\right]_0^b - \int_0^b\left(\frac{1}{a}\sin at\right)\left(-s\,e^{-st}\right)dt\right\}$$

$$= \left[-\frac{1}{a}e^{-st}\cos at\right]_0^b - \frac{s}{a}\left[\frac{1}{a}e^{-st}\sin at\right]_0^b - \frac{s^2}{a^2}\int_0^b e^{-st}\sin at\, dt$$

Kedua ruas ditambah dengan $\dfrac{s^2}{a^2}\displaystyle\int_0^b e^{-st}\sin at\, dt$, sehingga diperoleh

$$\left(1+\frac{s^2}{a^2}\right)\int_0^b e^{-st}\sin at\, dt = \left[-\frac{1}{a}e^{-st}\cos at\right]_0^b - \frac{s}{a}\left[\frac{1}{a}e^{-st}\sin at\right]_0^b$$

$$\int_0^b e^{-st}\sin at\, dt = \frac{a^2}{s^2+a^2}\left\{\left[-\frac{1}{a}e^{-st}\cos at\right]_0^b - \frac{s}{a}\left[\frac{1}{a}e^{-st}\sin at\right]_0^b\right\}$$

maka

$\mathcal{L}\{\sin at\}$

$$= \lim_{b\to\infty} \frac{a^2}{s^2+a^2}\left\{\left[-\frac{1}{a}e^{-st}\cos at\right]_0^b - \frac{s}{a}\left[\frac{1}{a}e^{-st}\sin at\right]_0^b\right\}$$

$$= \lim_{b\to\infty} \frac{a^2}{s^2+a^2}\left[-\frac{1}{a}e^{-st}\cos at\right]_0^b - \lim_{b\to\infty}\frac{as}{s^2+a^2}\left[\frac{1}{a}e^{-st}\sin at\right]_0^b$$

$$= \frac{a^2}{s^2+a^2}\lim_{b\to\infty}\left[\frac{1}{a}-\frac{1}{a}e^{-sb}\cos ab\right] - \frac{as}{s^2+a^2}\lim_{b\to\infty}\left[\frac{1}{a}e^{-sb}\sin ab - 0\right]$$

$$= \frac{a^2}{s^2+a^2}\left(\lim_{b\to\infty}\frac{1}{a} - \lim_{b\to\infty}\frac{1}{a}e^{-sb}\cos ab\right) - \frac{as}{s^2+a^2}\lim_{b\to\infty}\frac{1}{a}e^{-sb}\sin ab$$

$$= \frac{a^2}{s^2+a^2}\cdot\frac{1}{a} \quad = \frac{a}{s^2+a^2}$$

Jadi, $\mathcal{L}\{\sin at\} = F(s) = \dfrac{a}{s^2+a^2}$, $s > 0$

Contoh 4: Tentukan Transform Laplace dari $f(t) = \cos at$, $t > 0$ dan a sembarang konstanta

Dengan menggunakan definisi Transform Laplace, maka

$$\mathcal{L}\{\cos at\} = \int_0^\infty e^{-st}\cdot\cos at\,dt = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-st}\cos at\,dt$$

Gunakan pengintegralan parsial diperoleh :

$$\mathcal{L}\{\cos at\} = \lim_{b\to\infty}\left\{\left[\frac{1}{a}e^{-st}\sin at\right]_0^b - \int_0^b -\frac{s}{a}e^{-st}\sin at\,dt\right\}$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left[\frac{1}{a}e^{-st}\sin at\right]_0^b + \frac{s}{a}\lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-st}\sin at\,dt$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left[\frac{1}{a}e^{-sb}\sin ab - 0\right] + \frac{s}{a}\mathcal{L}\{\sin at\}$$

$$\mathcal{L}\{\cos at\} = 0 + \frac{s}{a} \cdot \frac{a}{s^2 + a^2} = \frac{s}{s^2 + a^2}$$

Jadi, $\mathcal{L}\{\cos at\} = F(s) = \dfrac{s}{s^2 + a^2}$, $s > 0$

Contoh 5: Tentukan Transform Laplace dari $f(t) = \sinh at$, $t > 0$ dan a sembarang konstanta

$$\sinh at = \frac{e^{at} - e^{-at}}{2} \text{ untuk } a > 0$$

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s - a} \qquad s > a$$

Dengan menggunakan definisi Transform Laplace diperoleh

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{\sinh at\} &= \int_0^\infty e^{-st}\left(\frac{e^{at} - e^{-at}}{2}\right)dt \\
&= \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-st}\left(\frac{e^{at} - e^{-at}}{2}\right)dt \\
&= \frac{1}{2}\lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-st}e^{at}\,dt - \frac{1}{2}\lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-st}e^{-at}\,dt \\
&= \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{at}\} - \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{-at}\} = \frac{1}{2(s-a)} - \frac{1}{2(s+a)} \\
&= \frac{2a}{2(s^2 - a^2)} = \frac{a}{s^2 - a^2}
\end{aligned}$$

Jadi, $\mathcal{L}\{\sinh at\} = F(s) = \dfrac{a}{s^2 - a^2}$, $s > |a|$

Contoh 6: Tentukan Transform Laplace dari $f(t) = \cosh at$, $t > 0$ dan a sembarang konstanta

$$\cosh at = \frac{e^{at} + e^{-at}}{2} \text{ untuk } a > 0$$

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a} \qquad s > a$$

Dengan menggunakan definisi Transform Laplace diperoleh

$$\mathcal{L}\{\cosh at\} = \int_0^\infty e^{-st}\left(\frac{e^{at} + e^{-at}}{2}\right) dt$$

$$= \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-st}\left(\frac{e^{at} + e^{-at}}{2}\right) dt$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-st} e^{at}\, dt + \frac{1}{2}\lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-st} e^{-at}\, dt$$

$$= \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{at}\} + \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{-at}\}$$

$$= \frac{1}{2(s-a)} + \frac{1}{2(s+a)}$$

$$= \frac{2s}{2(s^2 - a^2)} = \frac{s}{s^2 - a^2}$$

Jadi, $\mathcal{L}\{\cosh at\} = F(s) = \dfrac{s}{s^2 - a^2}$, $s > |a|$

Transform Laplace dari beberapa fungsi elementer yang sudah dikerjakan pada contoh-contoh di atas dan juga Transform Laplace dari beberapa fungsi elementer lainnya dapat dilihat dalam ringkasan tabel yang ada pada lembar lampiran.

Sebelum membahas mengenai teorema eksistensi Transform Laplace, terlebih dahulu akan dibicarakan mengenai pengertian fungsi kontinu sepotong-sepotong dan fungsi berorde eksponensial.

Definisi. (Fungsi kontinu sepotong-sepotong)

Suatu fungsi f dikatakan kontinu sepotong-sepotong dalam selang tertutup [a,b] jika $f(t)$ kontinu pada semua titik dalam interval [a,b] kecuali pada sejumlah berhingga titik di mana $f(t)$ diskontinu di titik t_0, $t_0 \in (a,b)$ dan limit satu sisi

$\lim_{t \to t_0^-} f(t)$ dan $\lim_{t \to t_0^+} f(t)$

ada sebagai bilangan berhingga.

(R. Kent Nagle & Edward B. Saff, 1986: 316)

Contoh 7 : Tunjukkan bahwa,

$$f(t) = \begin{cases} t, & 0 < t < 1 \\ 2 & 1 < t < 2 \\ (t-2)^2 & 2 < t \leq 3 \end{cases}$$

kontinu sepotong-sepotong dalam selang tertutup (0,3]

Fungsi $f(t)$ kontinu dalam selang terbuka (0,1), karena pada selang itu $f(t) = t$, $f(t)$ juga kontinu dalam selang terbuka (1,2) dan demikian juga pada selang (2,3]. Pada t = 1, terdapat dua limit, yaitu $f(1) = \lim_{t \to 1^-} f(t) = 1$ dan $f(1) = \lim_{t \to 1^+} f(t) = 2$. Demikian juga pada t = 2, terdapat dua limit $f(2) = \lim_{t \to 2^-} f(t) = 2$ dan $f(2) = \lim_{t \to 2^+} f(t) = 0$. Maka

$f(t)$ diskontinu di titik t = 1 dan t = 2. Jadi, fungsi $f(t)$ kontinu sepotong-sepotong dalam selang $0 < t \leq 3$

Definisi. (Fungsi berorde eksponensial)

Sebuah fungsi $f(t)$ adalah fungsi berorde eksponensial α, jika ada konstanta positif M dan T sedemikian hingga

$$|f(t)| \leq M e^{\alpha t}, \text{ untuk semua } t \geq T \qquad (3.2)$$

(R. Kent Nagle & Edward B. Saff, 1986: 319)

Jadi, jika f adalah fungsi berorde eksponensial dan nilai f ada apabila $t \to \infty$ maka kenaikan f tidak akan lebih cepat dari $M e^{\alpha t}$.

Contoh 8: $f(t) = e^{at} \sin at$ adalah fungsi berorde eksponensial, dengan $\alpha = a$ karena menurut definisi fungsi berorde eksponensial

$$e^{-\alpha t}|f(t)| = e^{-at}e^{at}|\sin at| = |\sin at| \quad , \quad \forall t.$$

Contoh 9: Perlihatkan bahwa $f(t) = t^n$, n > 0 adalah fungsi berorde eksponensial apabila $t \to \infty$

Untuk sembarang $\alpha > 0$,

$$\lim_{t\to\infty}\left(e^{-\alpha t}t^n\right) = 0$$

Jadi, ada M > 0 dan T > 0 sedemikian hingga

$$e^{-\alpha t}|f(t)| = e^{-\alpha t}t^n \leq M \text{ untuk } t \geq T$$

Jadi, $f(t) = t^n$ adalah fungsi berorde eksponensial dengan α sembarang bilangan positif.

Contoh 10: Fungsi-fungsi terbatas, seperti $\sin at$ dan $\cos at$ adalah fungsi berorde eksponensial dengan $\alpha = 0$.

Contoh 11: Fungsi $f(t) = e^{t^2}$ bukan fungsi berorde eksponensial karena $e^{-\alpha t}|f(t)| = e^{-\alpha t}e^{t^2} = e^{t^2-\alpha t}$ menjadi tak berhingga jika $t \to \infty$ untuk berapa pun nilai α.

Teorema. (Teorema Eksistensi Transform Laplace)

Jika $f(t)$ kontinu sepotong-sepotong dalam $[0,\infty)$ dan berorde eksponensial α maka Transform Laplace ada untuk semua $s > \alpha$.

(R. Kent Nagle & Edward B. Saff, 1986: 320)

Bukti : Transform Laplace $\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$ dapat ditulis sebagai berikut :

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt = \int_0^T e^{-st} f(t)dt + \int_T^\infty e^{-st} f(t)dt$$

di mana T dipilih sedemikian hingga ketaksamaan (3.2) terpenuhi. Integral pertama di ruas kanan ada karena $f(t)$ kontinu sepotong-sepotong dalam $[0,T]$ dan karena itu $e^{-st} f(t)$ juga kontinu sepotong-sepotong dalam $[0,T]$ untuk setiap s tertentu.

Untuk melihat bahwa integral yang kedua juga konvergen, kita gunakan teorema uji banding untuk integral tak wajar.

Karena $f(t)$ adalah fungsi berorde eksponensial α maka untuk $t \geq T$ berlaku $f(t) \leq Me^{\alpha t}$,

sehingga

$e^{-st}|f(t)| \leq e^{-st}Me^{\alpha t} = Me^{-(s-\alpha)t}$, untuk semua $t \geq T$

dan untuk $s > \alpha$

$$\int_0^T Me^{-(s-\alpha)t}dt = M\int_b^\infty e^{-(s-\alpha)t}dt = M\lim_{T\to\infty}\int_b^T e^{-(s-\alpha)t}dt$$

$$= M\lim_{T\to\infty}\left[-\frac{e^{-(s-\alpha)t}}{(s-\alpha)}\right]_b^T = M\lim_{T\to\infty}\left[-\frac{e^{-(s-\alpha)T}}{(s-\alpha)} + \frac{e^{-(s-\alpha)b}}{(s-\alpha)}\right]$$

$$= \frac{Me^{-(s-\alpha)b}}{s-\alpha}$$

Karena $e^{-st}|f(t)| \leq Me^{-(s-\alpha)t}$ untuk semua $t \geq T$ dan $\int_T^\infty M\,e^{-(s-\alpha)t}\,dt$ konvergen untuk $s > \alpha$, maka berdasarkan teorema uji banding $\int_T^\infty e^{-st}f(t)\,dt$ konvergen untuk $s > \alpha$.

Akhirnya, karena kedua integral di ruas kanan ada maka Transform Laplace $F(s)$ ada untuk $s > \alpha$.

2. Sifat-Sifat Dasar Transform Laplace

Selain menggunakan definisi Transform Laplace untuk mencari Transform Laplace dari suatu fungsi t, kita juga perlu mengetahui sifat-sifat dasar Transform Laplace untuk mempermudah dalam mencari Transform Laplace dari fungsi yang diberikan. Sifat dasar Transform

Laplace ini juga diperoleh dengan menggunakan definisi Transform Laplace.

Teorema. (Sifat linear Transform Laplace)

Misalkan $f_1(t)$ dan $f_2(t)$ adalah fungsi-fungsi yang memiliki Transform Laplace dan andaikan c_1 dan c_2 adalah sembarang konstanta, maka

$$\mathcal{L}\{c_1 f_1(t) \pm c_1 f_2(t)\} = c_1 \mathcal{L}\{f_1(t)\} \pm c_2 \mathcal{L}\{f_2(t)\}$$

(Sheply L. Ross, 1984: 418)

Contoh 12: Dengan menggunakan sifat linearitas carilah $\mathcal{L}\{\sin^2 at\}$

$$\sin^2 at = \frac{1-\cos 2at}{2}$$

$$\mathcal{L}\{\sin^2 at\} = \mathcal{L}\left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2at\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\mathcal{L}\{1\} - \frac{1}{2}\mathcal{L}\{\cos 2at\}$$

$$= \frac{1}{2s} - \frac{s}{2(s^2+4a^2)} = \frac{2a^2}{s(s^2+4a^2)}$$

Contoh 13: Dengan menggunakan sifat linearitas carilah $\mathcal{L}\{11 + 5e^{4t} - 6\sin 2t\}$

Dengan menggunakan sifat linear Transform Laplace

$$\mathcal{L}\{11+5e^{4t} - 6\sin 2t\} = 11\mathcal{L}\{1\} + 5\,\mathcal{L}\{e^{4t}\} - 6\,\mathcal{L}\{\sin 2t\}$$

$$\mathcal{L}\{11+5e^{4t} - 6\sin 2t\} = 11\left(\frac{1}{s}\right) + 5\left(\frac{1}{s-4}\right) - 6\left(\frac{2}{s^2+4}\right)$$

$$= \frac{11}{s} + \frac{5}{s-4} - \frac{12}{s^2+4}$$

Teorema. (Sifat translasi Transform Laplace)

Misalkan $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ ada untuk $s > \alpha$ maka

$$\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\} = F(s-a)$$

ada untuk $s > \alpha + a$, dengan a adalah sembarang konstanta.

(R. Kent Nagle & Edward B. Saff, 1986: 323)

Contoh 14: Dengan menggunakan sifat translasi carilah $\mathcal{L}\{e^{at} \sin bt\}$

$$\mathcal{L}\{\sin bt\} = \frac{b}{s^2 + b^2} \quad s > 0$$

Maka dengan sifat translasi, diperoleh

$$\mathcal{L}\{e^{at} \sin bt\} = F(s-a) = \frac{b}{(s-a)^2 + b^2}$$

Contoh 15: Carilah $\mathcal{L}\{e^{-2t}(3\cos 6t - 5\sin 6t)\}$ dengan menggunakan sifat translasi Transform Laplace

$$\mathcal{L}\{(3\cos 6t - 5\sin 6t)\} = 3\,\mathcal{L}\{\cos 6t\} - 5\,\mathcal{L}\{\sin 6t\}$$

$$= 3\left(\frac{s}{s^2+36}\right) - 5\left(\frac{6}{s^2+36}\right) = \frac{3s-30}{s^2+36}$$

maka

$$\mathcal{L}\{e^{-2t}(3\cos 6t - 5\sin 6t)\} = F(s+2)$$

$$= \frac{3(s+2)-30}{(s+2)^2+36} = \frac{3s-24}{s^2+4s+40}$$

C. Invers Transform Laplace

Definisi. (Definisi Invers Transform Laplace)

Jika ada suatu fungsi $f(t)$ sedemikian hingga $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, maka $f(t)$ disebut invers Transform Laplace dari $F(s)$ dan secara simbolis ditulis $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$.

(Bernard J. Rice & Jerry D. Strange, 1986: 233)

Untuk mencari $\mathcal{L}^{-1}F(s)$ berarti kita harus mencari suatu fungsi t yang Transform Laplacenya adalah $F(s)$ dan fungsi t ini dapat dicari dengan menggunakan tabel Transform Laplace, sehingga kita harus mengetahui Transform Laplace dari beberapa fungsi sederhana untuk mencari invers Transform Laplacenya.

Invers Transform Laplace dijamin ketunggalannya. Teorema di bawah ini menjelaskan hal tersebut.

Teorema. (Ketunggalan invers Transform Laplace)

Andaikan f dan g adalah fungsi-fungsi yang kontinu untuk $t \geq 0$ dan $\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{g(t)\}$ maka $f(t) = g(t)$ untuk semua $t \geq 0$.

(Sheply L. Ross, 1984: 432)

Bukti :Diketahui $\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{g(t)\}$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} - \mathcal{L}\{g(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt - \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt$$

$$0 = \int_0^\infty e^{-st}[f(t) - g(t)]\,dt \qquad (3.3)$$

Nilai integral di atas sama dengan nol apabila $|f(t)-g(t)|=0$

Untuk membuktikan bahwa $|f(t)-g(t)|=0$, pernyataan tersebut kita ingkari.

$$\left|\int_0^\infty e^{-st}[f(t)-g(t)]dt\right| \le \int_0^\infty e^{-st}|[f(t)-g(t)]|dt$$

Andaikan $\exists t_0>0, t_0 \in [0,\infty)$ sehingga $|f(t_0)-g(t_0)|>0$.

Karena f dan g adalah fungsi-fungsi yang kontinu pada $[0,\infty)$ maka $|f(t)-g(t)|$ juga kontinu pada $[0,\infty)$ sehingga $\exists \delta>0$ $|f(t)-g(t)|>0$, $t_0-\delta \le t \le t_0+\delta$.

$$\int_0^\infty e^{-st}|[f(t)-g(t)]|dt = \int_0^{t_0-\delta} e^{-st}|[f(t)-g(t)]|dt + \int_{t_0-\delta}^{t_0+\delta} e^{-st}|[f(t)-g(t)]|dt + \int_{t_0+\delta}^{\infty} e^{-st}|[f(t)-g(t)]|dt$$

Karena $\int_0^{t_0-\delta} e^{-st}|[f(t)-g(t)]|dt \ge 0$, $\int_{t_0-\delta}^{t_0+\delta} e^{-st}|[f(t)-g(t)]|dt > 0$, dan $\int_{t_0+\delta}^{\infty} e^{-st}|[f(t)-g(t)]|dt \ge 0$ maka $\int_0^\infty e^{-st}|[f(t)-g(t)]|dt > 0$.

Terjadi kontradiksi, jadi pengandaian yang kita buat salah, berarti tidak ada titik $t_0>0, t_0 \in [0,\infty)$. Jadi, $|f(t)-g(t)|=0$ atau $f(t)=g(t)$ untuk semua $t \ge 0$.

Contoh 16: Diketahui $\mathcal{L}\{1\}=\frac{1}{s}$ sehingga invers Transform Laplace dari $F(s)=\frac{1}{s}$ adalah fungsi kontinu $F(t)$ yang terdefinisi untuk

$t > 0$ oleh $f(t) = 1$. Berdasarkan teorema ketunggalan invers Transform Laplace tidak ada invers Transform Laplace yang lain sedemikian hingga $F(s) = \frac{1}{s}$.

Akan tetapi perhatikan fungsi diskontinu $g(t)$ yang didefinisikan sebagai berikut :

$$g(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < 3 \\ 2 & t = 3 \\ 1 & t > 3 \end{cases}$$

Dengan menggunakan definisi Transform Laplace, diperoleh:

$$\mathfrak{L}\{g(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} g(t)\,dt$$

$$= \int_0^3 e^{-st}\,dt + \int_3^3 2e^{-st}\,dt + \int_3^\infty e^{-st}\,dt$$

$$= \left[-\frac{e^{-st}}{s}\right]_0^3 + 2\left[-\frac{e^{-st}}{s}\right]_3^3 + \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{e^{-st}}{s}\right]_3^b$$

$$= \left[\frac{1}{s} - \frac{e^{-3s}}{s}\right] + 2\left[\frac{e^{-3s}}{s} - \frac{e^{-3s}}{s}\right] + \lim_{b\to\infty}\left[\frac{e^{-3s}}{s} - \frac{e^{-sb}}{s}\right]$$

$$= \frac{1}{s} - \frac{e^{-3s}}{s} + \frac{e^{-3s}}{s} = \frac{1}{s} \text{ jika } s > 0$$

Ternyata fungsi diskontinu $g(t)$ juga merupakan invers Transform Laplace dari $F(s) = \frac{1}{s}$. Akan tetapi karena invers Transform Laplace haruslah fungsi yang kontinu maka satu-

satunya invers Transform Laplace dari $F(s)=\frac{1}{s}$ adalah

$f(t)=1, \quad t>0$

Seperti Transform Laplace yang memiliki sifat linear dan translasi, invers Transform Laplace juga memiliki sifat yang sama . Sifat linear dan translasi ini akan membantu kita dalam mencari fungsi $f(t)$ dari $F(s)$ yang diketahui.

Teorema. (Sifat linear invers Transform Laplace)

Jika c_1 dan c_2 adalah sembarang konstanta sedangkan $F_1(s)$ dan $F_2(s)$ berturut-turut adalah Transform Laplace dari $f_1(t)$ dan $f_2(t)$, maka

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\{c_1F_1(s)\pm c_2F_2(s)\} &= c_1\mathcal{L}^{-1}\{F_1(s)\}\pm c_2\mathcal{L}^{-1}\{F_2(s)\}\\ &= c_1f_1(t)\pm c_2f_2(t)\end{aligned}$$

(Murray R. Spiegel, 1985: 43)

Teorema. (Sifat translasi invers Transform Laplace)

Jika $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}=f(t)$ maka $\mathcal{L}^{-1}\{F(s-a)\}=e^{at}f(t)$

(Murray R. Spiegel, 1985: 43)

Contoh 17:Carilah $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5}{s-6}-\frac{6s}{s^2+9}+\frac{3}{2s^2+8s+10}\right\}$

Dengan menggunakan sifat linear, diperoleh :

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5}{s-6}-\frac{6s}{s^2+9}+\frac{3}{2s^2+8s+10}\right\}$$

$$= 5\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-6}\right\} - 6\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+9}\right\} + \frac{3}{2}\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4s+5}\right\}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5}{s-6}-\frac{6s}{s^2+9}+\frac{3}{2s^2+8s+10}\right\}$$

$$= 5\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-6}\right\} - 6\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+9}\right\} + \frac{3}{2}\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^2+1^2}\right\}$$

$$= 5e^{6t} - 6\cos 3t + \frac{3e^{-2t}}{2}\sin t$$

Contoh 18: Carilah $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5}{(s+2)^4}\right\}$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}\right\} = e^{at}t^n$$

Pada penyebut $(s+2)^4$, $a=-2$, $n=3$ maka $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{6}{(s+2)^4}\right\} = e^{-2t}t^3$

sehingga $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5}{(s+2)^4}\right\} = \frac{5}{6}\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3!}{(s+2)^4}\right\} = \frac{5}{6}e^{-2t}t^3$

Ada beberapa metode yang dapat digunakan, selain dengan menggunakan tabel transform untuk mencari invers Transform Laplace dari $F(s)$ yang diketahui. Namun dalam pembahasan, hanya akan digunakan metode pecahan parsial, Transform Laplace dari integral, dan teorema konvolusi dua fungsi. Ketiga cara yang akan digunakan ini akhirnya akan mengacu pada penggunaan tabel transform.

Contoh 19: Carilah $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{7s-1}{s^3-7s-6}\right\}$

$$\frac{7s-1}{s^3-7s-6} = \frac{7s-1}{(s+1)(s+2)(s-3)} = \frac{A}{(s+1)} + \frac{B}{(s+2)} + \frac{C}{(s-3)}$$

Kedua ruas persamaan dikalikan dengan $(s+1)(s+2)(s-3)$ dan diperoleh

$$7s-1 = A(s+2)(s-3)+B(s+1)(s-3)+C(s+1)(s+2)$$

untuk $s=-2 \rightarrow -15 = B(-1)(-5) \Leftrightarrow -15 = 5B \Leftrightarrow B=-3$

$s=-1 \rightarrow -8 = A(1)(-4) \Leftrightarrow -8 = -4A \Leftrightarrow A = 2$

$s=3 \rightarrow 20 = C(4)(5) \Leftrightarrow 20 = 20C \Leftrightarrow C=1$

sehingga

$$\frac{7s-1}{s^3-7s-6} = \frac{7s-1}{(s+1)(s+2)(s-3)} = \frac{2}{(s+1)} - \frac{3}{(s+2)} + \frac{1}{(s-3)}$$

Dengan menggunakan sifat linear invers Transform Laplace, diperoleh :

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{7s-1}{s^3-7s-6}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s+1)} - \frac{3}{(s+2)} + \frac{1}{(s-3)}\right\}$$

$$= 2\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} - 3\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\}$$

$$= 2e^{-t} - 3e^{-2t} + e^{3t}$$

Contoh 20: Carilah $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s^2+9s+2}{(s-1)^2(s+3)}\right\}$

Karena $(s-1)$ adalah faktor linear berulang dan $(s+3)$ adalah faktor linear yang tidak berulang, maka pecahan parsialnya berbentuk :

$$\frac{s^2+9s+2}{(s-1)^2(s+3)} = \frac{A}{(s-1)} + \frac{B}{(s-1)^2} + \frac{C}{s+3}$$

Kedua ruas persamaan dikalikan dengan $(s-1)^2(s+3)$ sehingga diperoleh

$s^2+9s+2 = A(s-1)(s+3)+B(s+3)+C(s-1)^2$

untuk $\quad s=-3 \rightarrow -16 = 16C \Leftrightarrow C = -1$

$s = 1 \rightarrow 12 = 4B \Leftrightarrow B = 3$

$$\begin{aligned} s = 0 \rightarrow 2 &= A(-1)(3)+B(3)+C(1) \\ 2 &= -3A+3B+C \\ 2 &= -3A+9-1 \\ A &= 2 \end{aligned}$$

Jadi, $\dfrac{s^2+9s+2}{(s-1)^2(s+3)} = \dfrac{2}{(s-1)} + \dfrac{3}{(s-1)^2} - \dfrac{1}{s+3}$

Dengan menggunakan sifat invers Transform laplace, diperoleh :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2+9s+2}{(s-1)^2(s+3)}\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s-1}+\frac{3}{(s-1)^2}-\frac{1}{s+3}\right\} \\ &= 2\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\}+3\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^2}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\} \\ &= 2e^t+3te^t-e^{-3t} \end{aligned}$$

Contoh 21: Carilah $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{2s^2+10s}{(s^2-2s+5)(s+1)}\right\}$

Karena (s^2-2s+5) adalah faktor kuadrat yang tidak dapat direduksi maka kita nyatakan dalam bentuk $(s-\alpha)^2+\beta^2,\ \alpha,\beta \in \mathbb{R}$ sehingga

$s^2-2s+5 = (s-1)^2+2^2$

maka $\dfrac{2s^2+10s}{(s^2-2s+5)(s+1)}=\dfrac{As+B}{(s-1)^2+2^2}+\dfrac{C}{(s+1)}$

Kalikan kedua ruas persamaan dengan $(s^2-2s+5)(s+1)$ dan didapat

$2s^2+10s=(As+B)(s+1)+C(s^2-2s+5)$

untuk $s=-1 \rightarrow -8=8C \rightarrow C=-1$

$s=0 \rightarrow 0=B+5C \rightarrow B=5$

$s=-1 \rightarrow 12=2A+2B+4C \rightarrow A=3$

sehingga $\dfrac{2s^2+10s}{(s^2-2s+5)(s+1)}=\dfrac{3s+5}{(s-1)^2+2^2}-\dfrac{1}{(s+1)}$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s^2+10s}{(s^2-2s+5)(s+1)}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s+5}{(s-1)^2+2^2}-\frac{1}{(s+1)}\right\}$$

$$=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3(s-1)+8}{(s-1)^2+2^2}-\frac{1}{(s+1)}\right\}$$

$$=3\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{(s-1)}{(s-1)^2+2^2}\right\}+4\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s-1)^2+2^2}\right\}$$

$$-\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}$$

$$=3e^t\cos 2t+4e^t\sin 2t-e^{-t}$$

D. Sifat-sifat Transform Laplace

Teorema. (Transform Laplace dari Turunan)

Andaikan $f(t)$ kontinu di dalam $[0,\infty)$ dan $f'(t)$ kontinu sepotong-sepotong di dalam $[0,\infty)$ dan kedua-duanya fungsi berorde eksponensial α.

Maka untuk $s > \alpha$,

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\,\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)$$

(R. Kent Nagle & Edward B. Saff, 1986: 323)

Bukti : Dengan menggunakan definisi Transform Laplace

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f'(t)\,dt = \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-st} f'(t)\,dt$$

Gunakan pengintegralan parsial dengan memisalkan :

$u = e^{-st}$ $\qquad$ $dv = f'(t)\,dt$

$du = -se^{-st}\,dt$ $\qquad$ $v = f(t)$

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = \lim_{b\to\infty}\left(\left[e^{-st} f(t)\right]_0^b - \int_0^b (f(t))(-se^{-st}\,dt) \right)$$

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = \lim_{b\to\infty}\left(e^{-sb} f(b) - f(0) + s\int_0^b e^{-st} f(t)\,dt \right)$$

$$= \lim_{b\to\infty} e^{-sb} f(b) - f(0) + s\lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-st} f(t)\,dt$$

Karena $f(t)$ adalah fungsi berorde eksponensial maka ada konstanta M sedemikian hingga untuk b yang besar

$$e^{-sb}\left|f(b)\right| \le e^{-sb} Me^{\alpha b} = Me^{-(s-\alpha)b}$$

Karena itu, untuk $s > \alpha$

$$\lim_{b\to\infty} e^{-sb}\left|f(b)\right| \le \lim_{b\to\infty} Me^{-(s-\alpha)b} = 0$$

sehingga

$$\lim_{b\to\infty} e^{-sb}\left|f(b)\right| = 0 \quad \text{, untuk } s > \alpha$$

maka diperoleh

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = 0 - f(0) + s\lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-st} f(t)\,dt$$

$$= s\,\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)$$

Dengan menggeneralisasikan teorema Transform Laplace dari turunan dapat dicari Transform Laplace dari turunan berorde tinggi. Untuk lebih jelasnya perhatikan teorema di bawah ini.

Teorema. (Transform Laplace dari Turunan Berorde Tinggi)

Andaikan $f(t), f'(t), \cdots, f^{(n-1)}(t)$ fungsi yang kontinu dalam $[0,\infty)$ dan $f^{n}(t)$ kontinu sepotong-sepotong dalam $[0,\infty)$ di mana semua fungsi-fungsi ini adalah fungsi berorde eksponensial α. Maka untuk $s>\alpha$,

$$\mathcal{L}\{f^{n}(t)\} = s^{n}\,\mathcal{L}\{f(t)\} - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$$

(R. Kent Nagle & Edward B. Saff, 1986: 325)

Bukti : Dengan menggunakan induksi matematik

Langkah 1.

Akan dibuktikan bahwa rumus benar untuk $n = 1$

Dalam teorema Transform Laplace dari turunan sudah dibuktikan bahwa $\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\,\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)$

Langkah 2.

Rumus dianggap benar untuk $n = k$

$$\mathcal{L}\{f^{k}(t)\} = s^{k}\,\mathcal{L}\{f^{k}(t)\} - s^{k-1}f(0) - s^{k-2}f'(0) - \cdots - f^{(k-1)}(0)$$

Langkah 3.

Akan dibuktikan rumus benar untuk $n = k+1$

$$\mathcal{L}\left\{f^{k+1}(t)\right\} = s\,\mathcal{L}\{f^{k}(t)\} - f^{k}(0)$$

$$= s[s^{k}\mathcal{L}\{f^{k}(t)\} - s^{k-1}f(0) - s^{k-2}f'(0) - \cdots - f^{(k-1)}(0)] - f^{k}(0)$$

$$= s^{k+1}\mathcal{L}\{f(t)\} - s^{k}f(0) - s^{k-1}f'(0) - \cdots - sf^{(k-1)}(0) - f^{k}(0)$$

$$= s^{k+1}\mathcal{L}\{f(t)\} - s^{k}f(0) - s^{k-1}f'(0) - \cdots - f^{k}(0)$$

Contoh 22: Dengan menggunakan teorema Transform Laplace dari turunan, carilah $\mathcal{L}\{t\}$

$$f(t) = t \text{ maka } f'(t) = 1,\ f(0) = 0$$

$$\mathcal{L}\{1\} = s\,\mathcal{L}\ \{t\} - f(0) \Leftrightarrow \mathcal{L}\{t\} = \mathcal{L}\{1\}/s$$

$$\mathcal{L}\{t\} = \frac{1}{s}\cdot\frac{1}{s} = \frac{1}{s^2}$$

Contoh 23: Dengan menggunakan teorema Transform Laplace dari turunan, tentukan $\mathcal{L}\{\cos\ at\}$

$$f(t) = \cos\ at \text{ maka } f'(t) = -a\ \sin\ at,\ f(0) = 1$$

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\,\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)$$

$$\mathcal{L}\{-a\sin at\} = s\,\mathcal{L}\{\cos at\} - 1$$

$$(-a)\left(\frac{a}{s^2+a^2}\right) = s\,\mathcal{L}\{\cos\ at\} - 1$$

$$\mathcal{L}\{\cos at\} = \frac{1}{s}\left[1 - \frac{a^2}{s^2+a^2}\right] = \frac{1}{s}\left[\frac{s^2+a^2-a^2}{s^2+a^2}\right] = \frac{s}{s^2+a^2}$$

Teorema. (Turunan dari Transform Laplace)

Andaikan $F(s) = \mathfrak{L}\{f(t)\}$ dan $f(t)$ kontinu sepotong-sepotong dalam $[0,\infty)$ dan merupakan fungsi berorde eksponensial α. Maka untuk $s > \alpha$, $\mathfrak{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}[F(s)]$

(R. Kent Nagle & Edward B.Saff, 1986: 326

Bukti : Dengan menggunakan induksi matematik

Langkah 1

Akan dibuktikan rumus benar untuk $n = 1$

$$\frac{d}{ds}F(s) = \frac{d}{ds}\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial s} e^{-st} f(t)\,dt = \int_0^\infty -te^{-st} f(t)\,dt$$

$$\frac{d}{ds}F(s) = -\int_0^\infty e^{-st} t f(t)\,dt = -\mathfrak{L}\{tf(t)\}$$

Jadi, $\mathfrak{L}\{tf(t)\} = (-1)\frac{d}{ds}F(s)$

Langkah 2

Rumus dianggap benar untuk $n = k$

$$\mathfrak{L}\{t^k f(t)\} = (-1)^k \frac{d^k}{ds^k}F(s)$$

Langkah 3

Akan dibuktikan rumus benar untuk $n = k+1$

$$\frac{d^{k+1}}{ds^{k+1}}F(s) = \frac{d}{ds}\left(\frac{d^k}{ds^k}F(s)\right)$$

$$= \frac{d}{ds}\left\{\frac{d}{ds^k}\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt\right\} = \frac{d}{ds}\left\{\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial s^k} e^{-st} f(t)\,dt\right\}$$

$$\frac{d^{k+1}}{ds^{k+1}}F(s)=\frac{d}{ds}\left\{\int_0^\infty t^k e^{-st} f(t)\,dt\right\}$$, untuk k bilangan genap atau

$$\frac{d}{ds}\left\{-\int_0^\infty t^k e^{-st} f(t)\,dt\right\}$$, untuk k bilangan ganjil

$$=\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial s} t^k e^{-st} f(t)\,dt$$, untuk k bilangan genap atau

$$-\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial s} t^k e^{-st} f(t)\,dt$$, untuk k bilangan ganjil

$$=-\int_0^\infty t\,t^k e^{-st} f(t)\,dt$$, untuk k bilangan genap atau

$$\int_0^\infty t\,t^k e^{-st} f(t)\,dt$$, untuk k bilangan ganjil

$$=-\int_0^\infty e^{-st}\, t^{k+1} f(t)\,dt$$, untuk k bilangan genap atau

$$\int_0^\infty e^{-st}\, t^{k+1} f(t)\,dt$$, untuk k bilangan ganjil

Jadi, $\mathcal{L}\left\{t^{k+1} f(t)\right\}=(-1)^{k+1}\dfrac{d^{k+1}}{ds^{k+1}}F(s)$

Contoh 24: Carilah $\mathcal{L}\{t \sin at\}$

Dari tabel Transform Laplace, diperoleh :

$$\mathcal{L}\{\sin at\}=\frac{a}{s^2+a^2}$$

sehingga $\dfrac{d}{ds}F(s)=-\dfrac{2as}{(s^2+a^2)^2}$

Dengan menggunakan teorema turunan dari Transform Laplace ,

$$\mathcal{L}\{t \sin at\} = -\frac{d}{ds}F(s) = \frac{2as}{(s^2+a^2)^2}$$

Contoh 25 : Carilah $\mathcal{L}\{t^2 \cos at\}$

Dari tabel Transform Laplace, diperoleh:

$$\mathcal{L}\{\cos at\} = \frac{s}{s^2+a^2}$$

sehingga $\frac{d}{ds}F(s) = \frac{a^2-s^2}{(s^2+a^2)^2}$

$$\frac{d^2}{ds^2}F(s) = \frac{d}{ds}\left\{\frac{a^2-s^2}{(s^2+a^2)^2}\right\}$$

$$= \frac{(s^2+a^2)^2(-2s)-(a^2-s^2)2(s^2+a^2)2s}{(s^2+a^2)^4}$$

$$= \frac{(s^2+a^2)(-2s)-(a^2-s^2)4s}{(s^2+a^2)^3}$$

$$= \frac{-2s^3-2sa^2-4sa^2+4s^3}{(s^2+a^2)^3} = \frac{2s^3-6sa^2}{(s^2+a^2)^3}$$

Dengan menggunakan teorema turunan dari Transform Laplace,

$$\mathcal{L}\{t^2 \cos at\} = (-1)^2\frac{d^2}{ds^2}F(s) = \frac{2s^3-6sa^2}{(s^2+a^2)^2}$$

Teorema. (Transform Laplace dari integral)

Andaikan $f(t)$ kontinu sepotong-sepotong dan merupakan fungsi berorde eksponensial untuk $t \geq 0$, maka

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(x)\,dx\right\} = \frac{1}{s}\,\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{F(s)}{s}$$

(Bernard J. Rice & Jerry D. Strange, 1986: 242)

Bukti : Misalkan $g(t)=\int_0^t f(x)\,dx$ maka $g'(t)=f(t)$ dan $g(0)=0$

Dengan menggunakan teorema Transform Laplace dari turunan diperoleh

$$\mathcal{L}\{f(t)\}=\mathcal{L}\{g'(t)\}=s\,\mathcal{L}\{g(t)\}-g(0)$$

$$\mathcal{L}\{g(t)\}=\frac{1}{s}\mathcal{L}\{f(t)\}$$

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(x)\,dx\right\}=\frac{1}{s}F(s)=\frac{F(s)}{s}$$

Secara ekuivalen dapat juga dinyatakan bahwa

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{F(s)}{s}\right\}=\int_0^t f(x)\,dx$$

Contoh 26 : Carilah $\mathcal{L}\left\{\int_0^t \sin x\,dx\right\}$

Misalkan $g(t)=\int_0^t \sin x\,dx$ maka $g'(t)=f(t)=\sin t$

Dengan menggunakan teorema Transform Laplace dari integral diperoleh :

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t \sin x\,dx\right\}=\frac{1}{s}\mathcal{L}\{f(t)\}\quad=\frac{1}{s}\mathcal{L}\{\sin t\}\quad=\frac{1}{s}\cdot\frac{1}{s^2+1}\quad=\frac{1}{s(s^2+1)}$$

Contoh 27 : Carilah $\mathcal{L}\left\{\int_0^t \cosh x\,dx\right\}$

Misalkan $g(t)=\int_0^t \cosh x\,dx$ maka $g'(t)=f(t)=\cosh t$

Dengan menggunakan teorema Transform Laplace dari integral diperoleh :

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t \cosh x\,dx\right\} = \frac{1}{s}\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{s}\mathcal{L}\{\cosh t\} = \frac{1}{s}\cdot\frac{s}{s^2-1} = \frac{1}{s^2-1}$$

Contoh 28 : Carilah $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s(s+3)}\right\}$

Misal $F(s) = \frac{3}{s+3}$ maka $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s+3}\right\} = 3e^{-3t}$

Maka dengan menggunakan teorema Transform Laplace dari integral, diperoleh :

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s(s+3)}\right\} = \int_0^t 3e^{-3x}dx = 3\int_0^t e^{-3x}dx = 3\left[-\frac{1}{3}e^{-3x}\right]_0^t$$

$$= 3\left[-\frac{1}{3}e^{-3t} + \frac{1}{3}\right] = 1 - e^{-3t}$$

Contoh 29 : Carilah $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s^2-1)}\right\}$

Misalkan $F(s) = \frac{1}{s^2-1}$ maka $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-1}\right\} = \sinh t$

Maka dengan menggunakan teorema Transform Laplace dari integral, diperoleh

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2-1)}\right\} = \int_0^t \sinh x\,dx = [\cosh x]_0^t = \cosh t - \cosh 0$$

Dengan menggunakan fungsi hiperbolik untuk cosh, diperoleh :

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2-1)}\right\} = \cosh t - 1$$

Sekali lagi ulangi langkah di atas

Misal $F(s) = \dfrac{1}{s(s^2 - 1)}$ maka

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s^2-1)}\right\} = \int_0^t (\cosh x - 1)\,dx = \int_0^t \cosh x\,dx - \int_0^t dx$$

$$= [\sinh x]_0^t - [x]_0^t = \sinh t - \sinh 0 - t$$

Dengan menggunakan fungsi hiperbolik untuk sinh, diperoleh :

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s^2-1)}\right\} = \sinh t - t$$

E. Konvolusi

Prosedur penting lainnya yang berhubungan dengan penggunaan tabel transform yang diberikan adalah teorema konvolusi yang akan dibahas berikut ini. Pertama-tama akan didefinisikan konvolusi dari 2 fungsi f dan g.

Definisi. (Definisi konvolusi 2 fungsi)

Andaikan fungsi f dan g kontinu sepotong-sepotong dalam interval $0 \le t \le b$ dan merupakan fungsi berorde eksponensial maka fungsi yang dinotasikan $f * g$ dan didefinisikan sebagai:

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau$$

dinamakan konvolusi dari $f(t)$ dan $g(t)$.

(Sheply L. Ross, 1984: 437)

Dengan melakukan pengubahan variabel integrasi,

misal $u = t - \tau$ maka $du = -d\tau$

untuk $\tau = 0$ maka $u = t$

$\tau = t$ maka $u = 0$ sehingga

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(\tau) g(t-\tau)\, d\tau = -\int_t^0 f(t-u)\, g(u)\, du$$

$$= \int_0^t g(u) f(t-u) du = g(t) * f(t)$$

Jadi, konvolusi 2 fungsi bersifat komutatif, yaitu $\{f * g\}(t) = \{g * f\}(t)$.

Teorema. (Konvolusi 2 fungsi)

Andaikan fungsi f dan g kontinu sepotong-sepotong dalam interval $0 \le t \le b$ dan merupakan fungsi berorde eksponensial maka $\mathcal{L}\{f * g\} = \mathcal{L}\{f\}\mathcal{L}\{g\}$ untuk $s > \alpha$.

(Sheply L. Ross, 1984: 438)

Bukti : Dengan menggunakan definisi Transform Laplace dan definisi konvolusi diperoleh :

$$\mathcal{L}\{f * g\}(t) = \int_0^\infty e^{-st} \left\{ \int_0^t f(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau \right\} dt$$

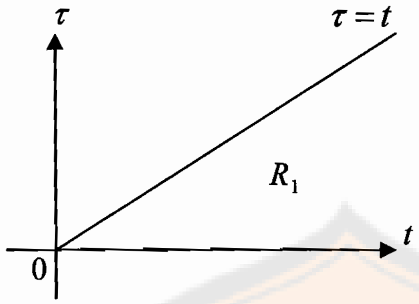
Integral di atas dapat dinyatakan sebagai integral berulang

$$\mathcal{L}\{f * g\}(t) = \int_0^\infty \int_0^t e^{-st} f(\tau) g(t-\tau)\, d\tau\, dt$$

Integral berulang di atas sama dengan integral ganda

$$\mathcal{L}\{f * g\}(t) = \iint_{R_1} e^{-st} f(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau\, dt$$

R_1 adalah daerah kuadran I dengan besar sudut 45° dan dibatasi oleh garis $\tau = 0$ dan $\tau = t$



Kemudian dengan melakukan penggantian variabel integrasi, misal :

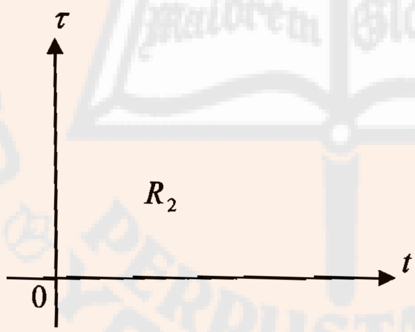
$u = t - \tau$

$v = \tau$

maka integral ganda di atas menjadi

$$\mathcal{L}\{f * g\}(t) = \iint_{R_2} e^{-s(u+v)} f(v)\, g(u)\, du\, dv$$

R_2 adalah daerah kuadran I yang dibatasi oleh $u > 0, v > 0$.



Integral ganda di atas sama dengan integral berulang

$$\mathcal{L}\{f * g\}(t) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-s(u+v)} f(v)\, g(u)\, du\, dv$$

Dan integral berulang di atas juga dapat ditulis dalam bentuk

$$\mathcal{L}\{f * g\}(t) = \int_0^\infty e^{-sv} f(v)\, dv \int_0^\infty e^{-su}\, g(u)\, du$$

Karena $\int_0^\infty e^{-sv} f(v)\,dv = \mathcal{L}\{f(v)\}$ dan $\int_0^\infty e^{-su} g(u)\,du = \mathcal{L}\{g(u)\}$.

Jadi,

$$\mathcal{L}\{f * g\}(t) = \int_0^\infty e^{-sv} f(v)\,dv \int_0^\infty e^{-su} g(u)\,du$$

$$= \mathcal{L}\{f(v)\}\,\mathcal{L}\{g(u)\} = F(s)G(s) \qquad \text{, untuk } s > \alpha$$

Karena itu, kita juga dapat mengatakan bahwa

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)G(s)\} = f(t) * g(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau$$

Contoh 30 : Dengan menggunakan teorema konvolusi, tentukan Transform Laplace dari fungsi-fungsi berikut ini :

a. e^{2t} dan t

b. $\sinh t$ dan e^{-t}

Jawab :

a. Misalkan $f(t) = e^{2t}$ dan $g(t) = t$, maka berdasarkan teorema konvolusi diperoleh

$$\mathcal{L}\{f * g\}(t) = \mathcal{L}\{f(t)\}\,\mathcal{L}\{g(t)\} = \mathcal{L}\{e^{2t}\}\,\mathcal{L}\{t\}$$

$$= \frac{1}{s-2}\cdot\frac{1}{s^2} = \frac{1}{s^2(s-2)}$$

b. Misalkan $f(t) = \sinh t$ dan $g(t) = e^{-t}$, maka berdasarkan teorema konvolusi diperoleh

$$\mathcal{L}\{f * g\}(t) = \mathcal{L}\{f(t)\}\,\mathcal{L}\{g(t)\} = \mathcal{L}\{\sinh t\}\,\mathcal{L}\{e^{-t}\}$$

$$\mathcal{L}\{f * g\}(t) = \frac{1}{s^2-1} \cdot \frac{1}{s+1} = \frac{1}{(s^2-1)(s+1)}$$

Contoh 31 : Dengan menggunakan teorema konvolusi, carilah $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+1)}\right\}$

$$\frac{1}{s(s^2+1)} = \left(\frac{1}{s}\right)\left(\frac{1}{(s^2+1)}\right)$$

Karena $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) = 1$ dan $g(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+1}\right) = \sin t$

Dengan menggunakan teorema konvolusi, diperoleh

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+1)}\right\} = f(t) * g(t) = \int_0^t 1 \cdot \sin(t-\tau)\, d\tau$$

Dengan menggunakan sifat komutatif konvolusi 2 fungsi, diperoleh

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+1)}\right\} = g(t) * f(t) = \int_0^t \sin\tau \cdot 1\, d\tau = [-\cos\tau]_0^t = 1 - \cos t$$

Contoh 32: Dengan menggunakan teorema konvolusi, carilah $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+1)^2}\right\}$

$$\frac{1}{(s^2+1)^2} = \left(\frac{1}{s^2+1}\right)\left(\frac{1}{s^2+1}\right)$$

Karena $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+1}\right) = \sin t$, maka dengan menggunakan teorema konvolusi, diperoleh

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+1)^2}\right\} = \sin t * \sin t = \int_0^t \sin(\tau)\sin(t-\tau)\, d\tau$$

Dengan menggunakan rumus hasil kali sinus dan sinus, diperoleh :

$$\int_0^t \sin(\tau)\sin(t-\tau)\,d\tau$$

$$= \int_0^t -\frac{1}{2}\left[\cos t - \cos(2\tau - t)\right]d\tau \;=\; -\frac{1}{2}\int_0^t \left[\cos t - \cos(2\tau - t)\right]d\tau$$

$$= -\frac{1}{2}\cos t\int_0^t d\tau + \frac{1}{2}\int_0^t \cos(2\tau - t)\,d\tau \;=\; -\frac{1}{2}\left[\tau\cos t\right]_0^t + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\sin(2\tau - t)\right]_0^t$$

$$= -\frac{1}{2}t\,\cos\,t + \frac{1}{4}\sin t - \frac{1}{4}\sin(-t) \;=\; -\frac{1}{2}t\,\cos\,t + \frac{1}{4}\sin t + \frac{1}{4}\sin t$$

$$= -\frac{1}{2}t\,\cos\,t + \frac{1}{2}\sin t \;=\; \frac{\sin t - t\cos t}{2}$$

BAB IV

PENGGUNAAN TRANSFORM LAPLACE DALAM PENYELESAIAN MASALAH NILAI AWAL PERSAMAAN DIFERENSIAL LINEAR ORDE DUA DENGAN KOEFISIEN KONSTAN DAN KOEFISIEN VARIABEL

A. Penggunaan Transform Laplace dalam Penyelesaian Masalah Nilai Awal Persamaan Diferensial Linear Orde Dua dengan Koefisien Konstan.

Transform Laplace dapat digunakan untuk menyelesaikan Masalah Nilai Awal (MNA) persamaan diferensial linear orde-n dengan koefisien konstan. Untuk lebih jelasnya pertama-tama kita lihat definisi persamaan diferensial linear orde 2 dengan koefisien konstan :

$$a_0 \frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_2 y = f(t) \quad , \quad a_0 \neq 0 \tag{4.1}$$

dengan kondisi awal $y(0) = c_0$, $y'(0) = c_1$.

Kemudian kita ambil Transform Laplace dari kedua ruas persamaan di atas dan dengan menggunakan sifat linear dari Transform Laplace diperoleh

$$a_0 \mathfrak{L}\left\{\frac{d^2 y}{dt^2}\right\} + a_1 \mathfrak{L}\left\{\frac{dy}{dt}\right\} + a_2 \mathfrak{L}\{y(t)\} = \mathfrak{L}\{f(t)\} \tag{4.2}$$

Dengan menggunakan teorema Transform Laplace dari turunan dan kondisi awal yang diketahui, diperoleh

$$\mathfrak{L}\left\{\frac{d^2 y}{dt^2}\right\} = s^2 \mathfrak{L}\{y(t)\} - sy(0) - y'(0) = s^2 \mathfrak{L}\{y(t)\} - c_0 s - c_1$$

$$\mathfrak{L}\left\{\frac{dy}{dt}\right\} = s \mathfrak{L}\{y(t)\} - y(0) = s \mathfrak{L}\{y(t)\} - c_0$$

Andaikan $\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s)$ dan $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ maka persamaan (4.2) di atas menjadi

$$a_0[s^2Y(s) - c_0 s - c_1] + a_1[sY(s) - c_0] + a_2 Y(s) = F(s) \qquad (4.3)$$

Jadi, persamaan (4.3) adalah persamaan aljabar dalam variabel s yang belum diketahui. Kemudian kita selesaikan persamaan aljabar tersebut untuk memperoleh $Y(s)$. Penyelesaian Masalah Nilai Awal (MNA) diperoleh dengan mencari invers dari Transform Laplace yaitu $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}$ dengan menggunakan tabel Transform atau metode yang sesuai, misalnya metode pecahan parsial, teorema Transform Laplace dari integral dan teorema konvolusi yang dikombinasikan dengan penggunaan tabel.

Contoh 1 : Selesaikan MNA

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} - 8y = 0\ , \quad y(0) = 3\ , \quad y'(0) = 6$$

Langkah 1.

Ambil Transform Laplace pada kedua ruas persamaan diferensial dan diperoleh

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2y}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} - 8y\right\} = \mathcal{L}\{0\}$$

Langkah 2.

Gunakan sifat linear Transform Laplace

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2y}{dt^2}\right\} - 2\mathcal{L}\left\{\frac{dy}{dt}\right\} - 8\mathcal{L}\{y(t)\} = \mathcal{L}\{0\}$$

Dengan menggunakan teorema Transform Laplace dari turunan berorde tinggi serta kondisi awal yang diketahui diperoleh

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2y}{dt^2}\right\} = s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) = s^2Y(s) - 3s - 6$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dy}{dt}\right\} = sY(s) - y(0) = sY(s) - 3$$

maka

$$\left\{s^2Y(s) - 3s - 6\right\} - 2\left\{sY(s) - 3\right\} - 8Y(s) = 0$$

$$s^2Y(s) - 3s - 6 - 2sY(s) + 6 - 8Y(s) = 0$$

Langkah 3.

$$(s^2 - 2s - 8)Y(s) - 3s = 0$$

$$Y(s) = \frac{3s}{s^2 - 2s - 8} = \frac{3s}{(s-4)(s+2)}$$

Langkah 4.

Menentukan $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s}{(s-4)(s+2)}\right\}$

Dengan menggunakan metode pecahan parsial

$$\frac{3s}{(s-4)(s+2)} = \frac{A}{s-4} + \frac{B}{s+2}$$

kita peroleh $A = 2$, $B = 1$ sehingga

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{Y(s)\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s}{(s-4)(s+2)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s-4} + \frac{1}{s+2}\right\}$$

$$= 2\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-4}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\}$$

Dengan menggunakan tabel Transform kita peroleh penyelesaian MNA yaitu $y(t) = 2e^{4t} + e^{-2t}$.

Contoh 2 : Selesaikan MNA

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 4y = 8 \ , \qquad y(0) = 0 \ , \qquad y'(0) = 6$$

Langkah 1.

Ambil Transform Laplace pada kedua ruas persamaan diferensial dan diperoleh

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2y}{dt^2} + 4y\right\} = \mathcal{L}\{8\}$$

Langkah 2.

Gunakan sifat linear Transform Laplace

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2y}{dt^2}\right\} + 4\,\mathcal{L}\left\{\frac{dy}{dt}\right\} = 8\,\mathcal{L}\{1\}$$

Dengan menggunakan teorema Transform Laplace dari turunan berorde tinggi serta kondisi awal yang diketahui diperoleh

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2y}{dt^2}\right\} = s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) = s^2Y(s) - 6$$

maka

$$\{s^2Y(s) - 6\} + 4Y(s) = \frac{8}{s}$$

$$s^2Y(s) - 6 + 4Y(s) = \frac{8}{s}$$

Langkah 3.

$$(s^2+4)Y(s)=\frac{8}{s}+6$$

$$Y(s)=\frac{8+6s}{s(s^2+4)}$$

Langkah 4.

Menentukan $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{8+6s}{s(s^2+4)}\right\}$

1. Menggunakan metode pecahan parsial

$$\frac{8+6s}{s(s^2+4)}=\frac{A}{s}+\frac{Bs+C}{s^2+4}$$

kita peroleh $A=2$, $B=-2, C=6$ sehingga

$$\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s}-\frac{2s}{s^2+4}+\frac{6}{s^2+4}\right\}$$

$$=2\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}-2\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4}\right\}+3\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+4}\right\}$$

Jadi, $y(t)=2-2\cos 2t+3\sin 2t$ adalah penyelesaian MNA yang diberikan.

2. Metode Transform Laplace dari integral

$$\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{8+6s}{s(s^2+4)}\right\}$$

$$=4\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s(s^2+4)}\right\}+3\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s^2+4)}\right\}$$

a. untuk $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s(s^2+4)}\right\}$

Misalkan $F(s)=\dfrac{2}{s^2+4}$ maka $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{2}{s^2+4}\right\}=\sin 2t$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s(s^2+4)}\right\}=\int_0^t \sin 2u\, du=\left[-\frac{1}{2}\cos 2u\right]_0^t=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2t$$

b. untuk $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{2}{(s^2+4)}\right\}$

Dengan menggunakan tabel Transform,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s^2+4)}\right\}=\sin 2t$$

maka $\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}=y(t)=4\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\cos 2t\right)+3\sin 2t$

$=2-2\cos 2t+3\sin 2t$ adalah penyelesaian MNA yang diberikan.

3. Konvolusi

$$\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = 4\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s(s^2+4)}\right\}+3\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s^2+4)}\right\}$$

untuk $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{2}{s(s^2+4)}\right\}$

misalkan, $F(s)=\dfrac{1}{s}$ maka $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s}\right\}=f(t)=1$

$G(s)=\dfrac{2}{s^2+4}$ maka $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{2}{s^2+4}\right\}=g(t)=\sin 2t$

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)*G(s)\}=f(t)*g(t)=g(t)*f(t)$$

$$=\sin 2t*1=\int_0^t \sin 2\tau\, d\tau$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)*G(s)\} = \left[-\frac{1}{2}\cos 2\tau\right]_0^t = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2t$$

maka $\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = y(t) = 4\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2t\right)+3\sin 2t$

$= 2-2\cos 2t + 3\sin 2t$ adalah penyelesaian MNA yang diberikan.

Contoh 3 : Selesaikan MNA

$$y''(t)+y(t)=t^2+2 \qquad y(0)=1, \quad y'(0)=-1$$

Langkah 1.

Ambil Transform Laplace pada kedua ruas persamaan diferensial dan diperoleh

$$\mathcal{L}\{y''(t)+y(t)\} = \mathcal{L}\{t^2+2\}$$

Langkah 2.

Gunakan sifat linear Transform Laplace

$$\mathcal{L}\{y''(t)\}+\mathcal{L}\{y(t)\}=\mathcal{L}\{t^2\}+2\mathcal{L}\{1\}$$

Dengan menggunakan teorema Transform Laplace dari turunan berorde tinggi serta kondisi awal yang diketahui, diperoleh

$$\mathcal{L}\{y''(t)\} = s^2Y(s)-sy(0)-y'(0) = s^2Y(s)-s+1$$

maka

$$\{s^2Y(s)-s+1\}+Y(s)=\frac{2}{s^3}+\frac{2}{s}$$

$$s^2Y(s)-s+1+Y(s)=\frac{2}{s^3}+\frac{2}{s}$$

Langkah 3.

$$(s^2+1)Y(s) = \frac{2}{s^3} + \frac{2}{s} + s - 1$$

$$Y(s) = \frac{2}{s^3(s^2+1)} + \frac{2}{s(s^2+1)} + \frac{s}{(s^2+1)} - \frac{1}{(s^2+1)}$$

Langkah 4.

Menentukan $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^3(s^2+1)} + \frac{2}{s(s^2+1)} + \frac{s}{(s^2+1)} - \frac{1}{(s^2+1)}\right\}$

$$\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^3(s^2+1)} + \frac{2}{s(s^2+1)} + \frac{s}{(s^2+1)} - \frac{1}{(s^2+1)}\right\}$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^3(s^2+1)}\right\} + 2\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+1)}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+1)}\right\}$$

$$- \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+1)}\right\}$$

Untuk menentukan $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^3(s^2+1)}\right\}$ dan $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+1)}\right\}$ kita gunakan teorema konvolusi.

a. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^3(s^2+1)}\right\}$

misalkan $F(s) = \frac{2}{s^3}$ maka $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^3}\right\} = f(t) = t^2$

$G(s) = \frac{1}{s^2+1}$ maka $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} = g(t) = \sin\, t$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^3(s^2+1)}\right\} = f(t) * g(t) = g(t) * f(t)$$

$$= \sin t * t^2 = \int_0^t \sin\,\tau\,(t-\tau)^2\,d\tau$$

Untuk menyelesaikan integral di atas, kita gunakan 2 kali perngintegralan parsial dengan memisalkan :

$u = (t-\tau)^2 \qquad\qquad dv = \sin \tau \, d\tau$

$du = -2(t-\tau)\,d\tau \qquad\qquad v = -\cos \tau$

$$\int_0^t \sin \tau \,(t-\tau)^2 \, d\tau = \left[-(t-\tau)\cos\tau\right]_0^t - \int_0^t 2\cos\tau \,(t-\tau)\,d\tau$$

$$= t^2 - 2t\int_0^t \cos \tau \, d\tau + 2\int_0^t \tau\cos \tau \, d\tau$$

misalkan $u = \tau \qquad\qquad dv = \cos \tau \, d\tau$

$du = d\tau \qquad\qquad v = \sin \tau$

$$\int_0^t \sin \tau \,(t-\tau)^2 \, d\tau$$

$$= t^2 - \left[2\tau \sin \tau\right]_0^t + \left[2\tau \sin \tau\right]_0^t - 2\int_0^t \sin\tau \; d\tau$$

$$= t^2 - 2t \sin t + 2t \sin t + \left[2 \cos t\right]_0^t = t^2 - 2 \cos t - 2$$

b. Pada bab III contoh 31 telah dikerjakan bahwa

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+1)}\right\} = 1 - \cos t$$

Jadi, penyelesaian dari MNA yang diberikan adalah

$$\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = y(t) = t^2 + 2\cos t - 2 + 2(1-\cos t) + \cos \; t - \sin t$$

$$= t^2 + 2\cos t - 2 + 2 - 2 \cos t + \cos \; t - \sin t$$

$$= t^2 + \cos \; t - \sin t$$

Pada contoh 1 – 3, kondisi awal yang diberikan adalah untuk $t = 0$. Menjadi pertanyaan bagi kita, bagaimana menentukan penyelesaian MNA persamaan diferensial linear jika kondisi awal yang diberikan $t \neq 0$.

Pertama-tama kita lihat kembali definisi persamaan diferensial linear orde 2 dengan kondisi awal $t = u$, $u \neq 0$.

$$a_0 y''(t) + a_1 y'(t) + a_2 y(t) = f(t) , \qquad y(u) = c_0 , y'(u) = c_1 \tag{4.4}$$

Kita dapat menyatakan kembali masalah tersebut berkaitan dengan ketika $\tau = t - u$. Substitusi $t = \tau + u$ mengubah (4.4) menjadi

$$a_0 y''(\tau + u) + a_1 y'(\tau + u) + a_2 y(\tau + u) = f(\tau + u) \tag{4.5}$$

dengan kondisi awal $y(u) = c_0 , y'(u) = c_1$

Misal, kita nyatakan $w(\tau) := y(\tau + u)$ maka $w'(\tau) = y'(\tau + u)$ dan $w''(\tau) = y''(\tau + u)$ sehingga (4.5) menjadi,

$$a_0 w''(\tau) + a_1 w'(\tau) + a_2 w(\tau) = f(\tau + u), \qquad w(0) = c_0 , w'(0) = c_1 \tag{4.6}$$

Jika $w = w(\tau)$ adalah penyelesaian dari (4.6) dengan kondisi awal $\tau = 0$ maka $y = w(t - u)$ adalah penyelesaian dari (4.4) dengan kondisi awal yang diberikan untuk $t = u$, $u \neq 0$.

Contoh 4 : Selesaikan MNA

$$y''(t) - 2y'(t) + y(t) = 6t - 2 \qquad y(-1) = 3 , \quad y'(-1) = 7 \tag{4.7}$$

Dengan melakukan penggantian variabel t oleh $\tau - 1$ maka (4.7) menjadi

$$y''(\tau - 1) - 2y'(\tau - 1) + y(\tau - 1) = 6(\tau - 1) - 2$$

$$y(-1) = 3 , \quad y'(-1) = 7 \tag{4.8}$$

Misal, $w(\tau) := y(\tau - 1)$ maka $w'(\tau) = y'(\tau - 1)$ dan $w''(\tau) = y''(\tau - 1)$ sehingga (4.8) menjadi,

$w''(\tau) - 2w'(\tau) + w(\tau) = 6\tau - 8 \qquad w(0) = 3, \quad w'(0) = 7$

Langkah 1.

Ambil Transform Laplace pada kedua ruas persamaan diferensial dan diperoleh

$\mathcal{L}\{w''(\tau) - 2w'(\tau) + w(\tau)\} = \mathcal{L}\{6\tau - 8\}$

Langkah 2.

Gunakan sifat linear Transform Laplace

$\mathcal{L}\{w''(\tau)\} - 2\mathcal{L}\{w'(\tau)\} + \mathcal{L}\{w(\tau)\} = \mathcal{L}\{6\tau\} - 8\mathcal{L}\{1\}$

Dengan menggunakan teorema Transform Laplace dari turunan berorde tinggi dan kondisi awal yang diketahui, diperoleh

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2w}{dt^2}\right\} = s^2W(s) - sw(0) - w'(0) = s^2W(s) - 3s - 7$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dw}{dt}\right\} = sW(s) - w(0) = sW(s) - 3$$

maka

$$\{s^2W(s) - 3s - 7\} - 2\{sW(s) - 3\} + W(s) = \frac{6}{s^2} - \frac{8}{s}$$

$$s^2W(s) - 3s - 7 - 2sW(s) + 6 + W(s) = \frac{6}{s^2} - \frac{8}{s}$$

Langkah 3.

$$(s^2 - 2s + 1)W(s) = \frac{6}{s^2} - \frac{8}{s} + 3s + 1$$

$$W(s) = \frac{6}{s^2(s-1)^2} - \frac{8}{s(s-1)^2} + \frac{3s}{(s-1)^2} + \frac{1}{(s-1)^2}$$

Langkah 4.

Menentukan $\mathcal{L}^{-1}\{W(s)\}$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{6}{s^2(s-1)^2} - \frac{8}{s(s-1)^2} + \frac{3s}{(s-1)^2} + \frac{1}{(s-1)^2}\right\}$$

$$= 6\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s-1)^2}\right\} - 8\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s-1)^2}\right\} + 3\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s-1)^2}\right\}$$

$$+ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^2}\right\}$$

$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s-1)^2}\right\}$ dan $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s-1)^2}\right\}$ diselesaikan dengan menggunakan teorema Transform Laplace dari integral dan $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s-1)^2}\right\}$ dikerjakan dengan metode pecahan parsial.

a. Teorema Transform Laplace dari integral

Pertama-tama kita tentukan $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s-1)^2}\right\}$.

Kemudian dengan langkah yang sama dapat kita tentukan $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s-1)^2}\right\}$.

Misal $W(s) = \frac{1}{(s-1)^2}$ maka $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^2}\right\} = w(\tau) = \tau e^{\tau}$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+1)}\right\} = \int_0^{\tau} u e^{u}\, du$$

Dengan menggunakan pengintegralan parsial kita dapat menyelesaikan integral di atas sehingga diperoleh

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+1)}\right\} = \int_0^\tau ue^u \; du = \tau e^\tau - e^\tau + 1$$

Sekali lagi ulangi langkah di atas,

misal $W(s) = \dfrac{1}{s(s-1)^2}$ maka

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s-1)^2}\right\} = \int_0^\tau (ue^u - e^u + 1)\; du$$

$$= \int_0^\tau u\, e^u \, du - \int_0^\tau e^u \, du + \int_0^\tau du = \tau e^\tau - e^\tau + 1 - \left[e^u\right]_0^\tau + \left[u\right]_0^\tau$$

$$= \tau e^\tau - e^\tau + 1 - e^\tau + 1 + \tau = \tau e^\tau - 2\, e^\tau + \tau + 2$$

b. Metode pecahan parsial

$$\frac{s}{(s-1)^2} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{(s-1)^2}$$

kita peroleh $A = 1$, $B = 1$ sehingga

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s-1)^2}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^2}\right\}$$

$$w(\tau) = e^\tau + \tau e^\tau$$

Jadi,

$$\mathcal{L}^{-1}\{W(s)\} = w(\tau) = 6(\tau e^\tau - 2e^\tau + \tau + 2) - 8(\tau e^\tau - e^\tau + 1)$$

$$+ 3(e^\tau + \tau e^\tau) + \tau e^\tau$$

$$= 2\tau e^\tau - e^\tau + 6\tau + 4$$

Karena $y(\tau - 1) = w(\tau)$ maka $y(t) = w(t+1)$ adalah penyelesaian dari MNA yang diberikan, yaitu :

$$y(t) = w(t+1) = 2(t+1)e^{(t+1)} - e^{(t+1)} + 6(t+1) + 4$$

$$= 2te^{t+1} + 2e^{t+1} - e^{t+1} + 6t + 6 + 4 = 2te^{t+1} + e^{t+1} + 6t + 10$$

Contoh 5 : Selesaikan MNA

$$y''(t) + y(t) = t \qquad y(\pi) = 0, \quad y'(\pi) = 0 \qquad (4.9)$$

Dengan melakukan penggantian variabel t oleh $\tau + \pi$ maka (4.9) menjadi

$$y''(\tau + \pi) + y(\tau + \pi) = \tau + \pi \qquad y(\pi) = 0, \quad y'(\pi) = 0 \qquad (4.10)$$

Misal, $w(\tau) := y(\tau + \pi)$ maka $w'(\tau) = y'(\tau + \pi)$ dan $w''(\tau) = y''(\tau + \pi)$ sehingga (4.10) menjadi,

$$w''(\tau) + w(\tau) = \tau + \pi \qquad w(0) = 0, \quad w'(0) = 0$$

Langkah 1.

Ambil Transform Laplace pada kedua ruas persamaan diferensial dan diperoleh

$$\mathcal{L}\{w''(\tau) + w(\tau)\} = \mathcal{L}\{\tau + \pi\}$$

Langkah 2.

Gunakan sifat linear Transform Laplace

$$\mathcal{L}\{w''(\tau)\} + \mathcal{L}\{w(\tau)\} = \mathcal{L}\{\tau\} + \pi\mathcal{L}\{1\}$$

Dengan menggunakan teorema Transform Laplace dari turunan berorde tinggi dan kondisi awal yang diketahui, diperoleh

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2w}{dt^2}\right\} = s^2W(s) - sw(0) - w'(0) = s^2W(s)$$

maka

$$s^2W(s) + W(s) = \frac{1}{s^2} + \frac{\pi}{s}$$

Langkah 3.

$$(s^2+1)W(s) = \frac{1}{s^2} + \frac{\pi}{s}$$

$$W(s) = \frac{1}{s^2(s^2+1)} + \frac{\pi}{s(s^2+1)}$$

Langkah 4.

Menentukan $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s^2+1)} + \frac{\pi}{s(s^2+1)}\right\}$

$$\mathcal{L}^{-1}\{W(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s^2+1)} + \frac{\pi}{s(s^2+1)}\right\}$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s^2+1)}\right\} + \pi\ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+1)}\right\}$$

Untuk menentukan $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s^2+1)}\right\}$ digunakan teorema konvolusi. Pada bab III contoh 31 telah dikerjakan bahwa $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+1)}\right\} = 1 - \cos\tau$ maka

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s^2+1)}\right\} = \int_0^\tau (1-\cos u)\,du = \int_0^\tau du - \int_0^\tau \cos u\,du$$

$$= [u]_0^\tau - [\sin u]_0^\tau = \tau - \sin\tau$$

Jadi,

$$\mathcal{L}^{-1}\{W(s)\} = w(\tau) = \tau - \sin\tau + \pi(1-\cos\tau) = \tau - \sin\tau + \pi - \pi\cos\tau$$

Karena $y(\tau+\pi) = w(\tau)$ maka $y(t) = w(t-\pi)$ adalah penyelesaian dari MNA yang diberikan, yaitu :

$$y(t) = w(t-\pi) = (t-\pi) - \sin(t-\pi) + \pi - \pi\cos(t-\pi)$$

$$= t - \sin t\cos\pi - \cos t\sin\pi - \pi(\cos t\cos\pi + \sin t\sin\pi)$$

$$= t - \sin t + \pi\cos t$$

B. Penggunaan Transform Laplace dalam Penyelesaian Masalah Nilai Awal Persamaan Diferensial Linear Orde Dua dengan Koefisien Variabel.

Selain menyelesaikan Masalah Nilai Awal (MNA) persamaan diferensial linear dengan koefisien konstan, Transform Laplace juga dapat menyelesaikan persamaan diferensial linear yang koefisiennya variabel. Persamaan diferensial linear dengan koefisien variabel dikerjakan menggunakan teorema turunan dari Transform Laplace yaitu $\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \dfrac{d^n s}{ds^n} F(s)$.

Persamaan diferensial linear dalam $y(t)$ yang koefisiennya adalah polinom-polinom dalam t dengan metode Transform Laplace akan mengubah persamaan yang diberikan ke dalam persamaan diferensial linear dalam $Y(s)$ yang koefisiennya adalah polinom-polinom dalam s. Jika koefisien dari persamaan yang diberikan adalah polinom yang linear dalam t maka persamaan diferensial dalam $Y(s)$ adalah persamaan linear orde 1.

Kita tahu bahwa ada beberapa metode yang dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial linear orde pertama misalnya metode faktor pengintegralan, metode variasi parameter. Dengan menggunakan metode-metode tersebut akan diperoleh Transform Laplacenya. Untuk mencari invers Transform Laplace kita gunakan fakta berikut yaitu :

Jika $f(t)$ kontinu sepotong-sepotong dalam interval $[0,\infty)$ dan berorde eksponensial maka $\lim_{s\to\infty} F(s) = 0$.

(Bernard J. Rice & Jerry D. Strange, 1986: 231)

Bukti : $|\mathfrak{L}\{f(t)\}| = \left|\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt\right| \le \int_0^\infty \left|e^{-st} f(t)\right| dt$

Karena $f(t)$ adalah fungsi berorde eksponensial maka ada $M > 0$ sedemikian hingga

$|f(t)| < Me^{\alpha t}$ ...(4.11)

Kalikan (4.11) dengan e^{-st} maka diperoleh

$|e^{-st} f(t)| < M e^{-st} e^{\alpha t} = Me^{-(s-\alpha)t}$

Oleh karena itu

$$\int_0^\infty \left|e^{-st} f(t)\right| dt < \int_0^\infty M e^{-st} e^{\alpha t}\, dt = \left[-\frac{Me^{-(s-\alpha)t}}{s-\alpha}\right]_0^\infty = \frac{M}{s-\alpha} \quad , s > \alpha$$

Jadi, $0 \le |F(s)| \le \frac{M}{s-\alpha}$ sehingga untuk $s \to \infty$ maka $\lim_{s\to\infty} F(s) = 0$.

Contoh 6 : Selesaikan MNA

$$y''(t) + 3ty'(t) - 6y(t) = 1 \qquad y(0) = 0\,, \quad y'(0) = 0$$

Langkah 1

Ambil Transform Laplace pada kedua ruas persamaan diferensial dan diperoleh

$$\mathcal{L}\{y''(t) + 3ty'(t) - 6y(t)\} = \mathcal{L}\{1\}$$

Langkah 2

Gunakan sifat linear Transform Laplace

$$\mathcal{L}\{y''(t)\} + 3\,\mathcal{L}\{ty'(t)\} - 6\,\mathcal{L}\{y(t)\} = \mathcal{L}\{1\}$$

Dengan menggunakan teorema Transform Laplace dari turunan berorde tinggi, teorema turunan dari Transform Laplace, dan kondisi awal yang diketahui, diperoleh

$$\mathcal{L}\{y''(t)\} = s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) = s^2Y(s)$$

$$\mathcal{L}\{ty'(t)\} = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}\{sY(s) - y(0)\} = -\frac{d}{ds}\{sY(s)\}$$

$$= -\{sY'(s) + Y(s)\} = -sY'(s) - Y(s)$$

maka

$$s^2Y(s) + 3\{-sY'(s) - Y(s)\} - 6Y(s) = \frac{1}{s}$$

$$s^2Y(s) - 3sY'(s) - 3Y(s) - 6Y(s) = \frac{1}{s}$$

$$-3sY'(s) + (s^2 - 9)Y(s) = \frac{1}{s}$$

$$Y'(s) - \left(\frac{s}{3} - \frac{3}{s}\right)Y(s) = -\frac{1}{3s^2} \qquad (4.12)$$

Langkah 3

Untuk menyelesaikan persamaan diferensial di atas, digunakan metode faktor pengintegralan.

Pertama-tama kita tentukan faktor pengintegralannya,

$$\mu(s) = e^{-\int (s/3 - 3/s)\,ds} = e^{-\int s/3\,ds + \int 3/s\,ds} = e^{-1/6s^2 + 3\ln s}$$

$$= e^{-1/6s^2} \cdot e^{\ln s^3} = s^3 e^{-1/6s^2}$$

Kalikan (4.12) dengan faktor pengintegralan dan diperoleh

$$\frac{d}{ds}\{\mu(s)Y(s)\} = \mu(s)\left(-\frac{1}{3s^2}\right)$$

$$\frac{d}{ds}\left\{s^3 e^{-1/6s^2} Y(s)\right\} = s^3 e^{-1/6s^2}\left(-\frac{1}{3s^2}\right)$$

$$\frac{d}{ds}\left\{s^3 e^{-1/6s^2} Y(s)\right\} = -\frac{1}{3} s e^{-1/6s^2}$$

$$s^3 e^{-1/6s^2} Y(s) = -\frac{1}{3}\int s e^{-1/6s^2}\,ds$$

$$s^3 e^{-1/6s^2} Y(s) = e^{-1/6s^2} + C$$

$$Y(s) = \frac{e^{-1/6s^2} + C}{s^3 e^{-1/6s^2}} = \frac{1}{s^3} + C\,\frac{e^{1/6s^2}}{s^3}$$

Langkah 4

Karena $\lim_{s\to\infty} Y(s) = 0$ maka C haruslah sama dengan 0 sehingga $Y(s) = \frac{1}{s^3}$ dan dengan menggunakan tabel transform kita tahu bahwa $\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = y(t) = \frac{t^2}{2}$. Jadi, $y(t) = \frac{t^2}{2}$ adalah penyelesaian dari MNA yang diberikan di atas.

Contoh 7 : Selesaikan MNA

$$t\,y''(t) - t\,y'(t) + y(t) = 2 \qquad y(0) = 2\,, \quad y'(0) = -1$$

Langkah 1

Ambil Transform Laplace pada kedua ruas persamaan diferensial dan diperoleh

$$\mathcal{L}\{t\,y''(t) - t\,y'(t) + y(t)\} = \mathcal{L}\{2\}$$

Langkah 2

Gunakan sifat linear Transform Laplace

$$\mathcal{L}\{t\,y''(t)\} - \mathcal{L}\{t\,y'(t)\} + \mathcal{L}\{y(t)\} = 2\ \mathcal{L}\{1\}$$

Dengan menggunakan teorema Transform Laplace dari turunan berorde tinggi,teorema turunan dari Transform Laplace dan kondisi awal yang diketahui, diperoleh

$$\mathcal{L}\{t\,y''(t)\} = -\frac{d}{ds}\{s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)\} = -\frac{d}{ds}\{s^2Y(s) - 2s + 1\}$$

$$= -\{s^2Y'(s) + 2sY(s) - 2\} = 2 - s^2Y'(s) - 2sY(s)$$

$$\mathcal{L}\{t\,y'(t)\} = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}\{sY(s) - y(0)\} = -\frac{d}{ds}\{sY(s) - 2\}$$

$$= -\{sY'(s) + Y(s)\} = -sY'(s) - Y(s)$$

maka

$$\{2 - s^2Y'(s) - 2sY(s)\} - \{-sY'(s) - Y(s)\} + Y(s) = \frac{2}{s}$$

$$-s^2Y'(s) - 2sY(s) + sY'(s) + Y(s) + Y(s) = \frac{2}{s} - 2$$

$$(s - s^2)Y'(s) + (2 - 2s)Y(s) = \frac{2 - 2s}{s}$$

$$Y'(s) + \left(\frac{2(1-s)}{s(1-s)}\right)Y(s) = \frac{2(1-s)}{s^2(1-s)}$$

$$Y'(s) + \left(\frac{2}{s}\right)Y(s) = \frac{2}{s^2} \qquad (4.13)$$

Langkah 3

Untuk menyelesaikan persamaan diferensial di atas, digunakan metode variasi parameter.

Persamaan bentuk baku di atas kita bawa ke bentuk persamaan diferensial linear tereduksi yaitu,

$$\frac{dY}{ds} + \frac{2}{s}Y = 0$$

$$\frac{dY}{Y} + \frac{2}{s}ds = 0$$

$$\int \frac{dY}{Y} + \int \frac{2}{s}ds = \int 0$$

$$\ln Y + 2\ln s = \ln C$$

$$\ln Ys^2 = \ln C$$

$$Y = Cs^{-2}$$

Pandang C sebagai fungsi dari s sehingga

$$Y' = C's^{-2} - 2s^{-3}C$$

Masukkan nilai Y' ini ke (4.13) dan didapat

$$\frac{C'}{s^2} - \frac{2C}{s^3} + \frac{2}{s}\cdot\frac{C}{s^2} = \frac{2}{s^2}$$

$$C' = 2 \Leftrightarrow C = \int 2\,ds \Leftrightarrow C = 2s + K$$

maka $Y(s) = (2s+K)s^{-2} = \dfrac{2}{s} + K\dfrac{1}{s^2}$

Langkah 4

Karena $\lim_{s\to\infty} Y(s) = 0$ dan dengan menggunakan tabel transform, $\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = y(t) = 2 + Kt$. Dengan memperhatikan kondisi awal yang diberikan, maka $K = -1$ sehingga. $y(t) = 2 - t$ adalah penyelesaian dari MNA yang diberikan.

Contoh 8 : Selesaikan MNA

$$t\,y''(t) - 2y'(t) + t\,y(t) = 0 \qquad y(0) = 1,\quad y'(0) = 0$$

Langkah 1

Ambil Transform Laplace pada kedua ruas persamaan diferensial dan diperoleh

$$\mathcal{L}\{t\,y''(t) - 2y'(t) + t\,y(t)\} = \mathcal{L}\{0\}$$

Langkah 2

Gunakan sifat linear Transform Laplace

$$\mathcal{L}\{t\,y''(t)\} - 2\,\mathcal{L}\{y'(t)\} + \mathcal{L}\{t\,y(t)\} = \mathcal{L}\{0\}$$

Dengan menggunakan teorema Transform Laplace dari turunan berorde tinggi, teorema turunan dari Transform Laplace dan kondisi awal yang diketahui, diperoleh

$$\mathcal{L}\{t\,y''(t)\} = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}\{y''(t)\} = -\frac{d}{ds}\{s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)\}$$

$$= -\frac{d}{ds}\{s^2Y(s) - s - 1\} = -\{s^2Y'(s) + 2sY(s) - 1\}$$

$$= 1 - s^2Y'(s) - 2sY(s)$$

$$\mathcal{L}\{y'(t)\} = sY(s) - 1$$

$$\mathcal{L}\{t\,y(t)\} = -\frac{d}{ds}\{Y(s)\} = Y'(s)$$

maka

$$\{1 - s^2Y'(s) - 2sY(s)\} - 2\{sY(s) - 1\} - Y'(s) = 0$$

$$1 - s^2Y'(s) - 2sY(s) - 2sY(s) + 2 - Y'(s) = 0$$

$$-(s^2+1)Y'(s) - 4sY(s) = -3$$

$$Y'(s) + \left(\frac{4s}{s^2+1}\right)Y(s) = \frac{3}{s^2+1} \tag{4.14}$$

Langkah 3

Untuk menyelesaikan persamaan diferensial di atas, digunakan metode faktor pengintegralan.

Pertama-tama kita tentukan faktor pengintegralannya.

$$\mu(s) = e^{\int \frac{4s}{s^2+1}ds} = e^{2\ln(s^2+1)} = (s^2+1)^2$$

Kalikan (4.14) dengan faktor pengintegralan dan diperoleh

$$\frac{d}{ds}\{\mu(s)Y(s)\} = \mu(s)\left(\frac{3}{s^2+1}\right)$$

$$\frac{d}{ds}\{(s^2+1)^2Y(s)\} = (s^2+1)^2\left(\frac{3}{s^2+1}\right)$$

$$\frac{d}{ds}\{(s^2+1)^2Y(s)\} = 3(s^2+1)$$

$$(s^2+1)^2Y(s) = 3\int(s^2+1)\,ds$$

$$(s^2+1)^2Y(s) = 3\int s^2 ds + 3\int ds$$

$$(s^2+1)^2Y(s) = s^3 + 3s + C$$

$$Y(s) = \frac{s^3 + 3s + C}{(s^2+1)^2} = \frac{s^3 + 3s}{(s^2+1)^2} + C\,\frac{1}{(s^2+1)^2}$$

Langkah 4

Karena $\lim_{s\to\infty} Y(s) = 0$ maka $\mathcal{L}^{-1}\, Y(s) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^3+3s}{(s^2+1)^2} + \frac{C}{(s^2+1)^2}\right\}$.

$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^3+3s}{(s^2+1)^2}\right\}$ diselesaikan dengan menggunakan metode pecahan parsial.

$$\frac{s^3+3s}{(s^2+1)^2} = \frac{As+B}{(s^2+1)} + \frac{Cs+D}{(s^2+1)^2}$$

kita peroleh $A = 1$, $C = 2$, $B = D = 0$, sehingga

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^3+3s}{(s^2+1)^2}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+1)} + \frac{2s}{(s^2+1)^2}\right\}$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+1)}\right\} + 2\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+1)^2}\right\}$$

Untuk menentukan $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+1)^2}\right\}$ digunakan teorema konvolusi, dengan memisalkan :

$F(s) = \frac{s}{s^2+1}$ maka $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\} = \cos t$

$G(s) = \frac{1}{s^2+1}$ maka $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} = \sin t$, maka

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+1)^2}\right\} = \cos t * \sin t = \int_0^t \cos\tau\, \sin(t-\tau)\, d\tau$$

Berdasarkan rumus hasil kali cosinus dan sinus, diperoleh

$$\cos A \sin B = \frac{1}{2}\left[\sin(A+B) - \sin(A-B)\right]$$

$$\cos\tau\sin(t-\tau)=\frac{1}{2}\left[\sin t-\sin(2\tau-t)\right]$$

$$\int_0^t \cos\tau\ \sin\ (t-\tau)\ d\tau=\int_0^t \frac{1}{2}\left[\sin\ t-\sin\ (2\tau-t)\right]d\tau$$

$$=\frac{1}{2}\sin t\int_0^t d\tau-\frac{1}{2}\int_0^t \sin\ (2\tau-t)\ d\tau\ \ =\frac{1}{2}\left[\tau\sin t\right]_0^t+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\left[\cos(2\tau-t)\right]_0^t$$

$$=\frac{1}{2}t\ \sin t+\frac{1}{4}\cos\ t-\frac{1}{4}\cos\ (-t)$$

$$=\frac{1}{2}t\ \sin t+\frac{1}{4}\cos\ t+\frac{1}{4}\cos\ (-t)=\frac{1}{2}t\ \sin t$$

Pada bab III contoh 32 telah dikerjakan bahwa

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+1)^2}\right\}=\frac{\sin t-t\cos t}{2}.$$

Jadi, $\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}=y(t)=\cos\ t+2\left(\frac{1}{2}\ t\sin\ t\right)+C\left(\frac{\sin t-t\cos t}{2}\right)$

$$=\cos t+\ \ t\sin t+C\left(\frac{\sin t-t\cos t}{2}\right).$$

Dengan memperhatikan kondisi awal yang diberikan maka C adalah sembarang bilangan real, sehingga $y(t)=\cos t+\ \ t\sin t+C\left(\frac{\sin t-t\cos t}{2}\right)$ adalah penyelesaian MNA yang diberikan.

Contoh 9 : Selesaikan MNA

$$y''(t)+t\,y'(t)-y(t)=0 \qquad\qquad y(0)=0\ ,\quad y'(0)=1$$

Langkah 1

Ambil Transform Laplace pada kedua ruas persamaan diferensial dan diperoleh

$$\mathcal{L}\{y''(t)+ty'(t)-y(t)\}=\mathcal{L}\{0\}$$

Langkah 2

Gunakan sifat linear Transform Laplace

$$\mathcal{L}\{y''(t)\}+\mathcal{L}\{ty'(t)\}-\mathcal{L}\{y(t)\}=\mathcal{L}\{0\}$$

Dengan menggunakan teorema Transform Laplace dari turunan berorde tinggi, teorema turunan dari Transform Laplace dan kondisi awal yang diketahui, diperoleh

$$\mathcal{L}\{y''(t)\}=\{s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)\}=s^2Y(s)-1$$

$$\mathcal{L}\{ty'(t)\}=-\frac{d}{ds}\mathcal{L}\{sY(s)-y(0)\}=-\frac{d}{ds}\{sY(s))\}$$

$$=-\{sY'(s)+Y(s)\}=-sY'(s)-Y(s)$$

maka

$$\{s^2Y(s)-1\}+\{-sY'(s)-Y(s)\}-Y(s)=0$$

$$s^2Y(s)-1-sY'(s)-Y(s)-Y(s)=0$$

$$-sY'(s)+(s^2-2)Y(s)=1$$

$$Y'(s)-\left(s-\frac{2}{s}\right)Y(s)=-\frac{1}{s} \qquad (4.15)$$

Langkah 3

Untuk menyelesaikan persamaan diferensial di atas, digunakan metode variasi parameter.

Persamaan bentuk baku di atas kita bawa ke bentuk persamaan diferensial linear tereduksi yaitu,

$$\frac{dY}{ds}-\left(s-\frac{2}{s}\right)Y=0$$

$$\frac{dY}{Y} - \left(s - \frac{2}{s}\right) ds = 0$$

$$\int \frac{dY}{Y} - \int \left(s - \frac{2}{s}\right) ds = \int 0$$

$$\int \frac{dY}{Y} - \int s\, ds + 2\int \frac{ds}{s} = \int 0$$

$$\ln Y - \frac{1}{2}s^2 + 2\ln s = \ln C$$

$$\ln Y s^2 = \ln C + \frac{1}{2}s^2$$

$$Ys^2 = C e^{1/2s^2}$$

$$Y = \frac{C e^{1/2s^2}}{s^2}$$

Pandang C sebagai fungsi dari s sehingga

$$Y' = \frac{C' e^{1/2s^2}}{s^2} + C\left(\frac{e^{1/2s^2}}{s} - \frac{2e^{1/2s^2}}{s^3}\right)$$

$$= \frac{C' e^{1/2s^2}}{s^2} + \frac{Cs^2 e^{1/2s^2}}{s^3} - \frac{2C e^{1/2s^2}}{s^3}$$

Masukkan nilai Y'ke (4.15) dan diperoleh

$$\frac{C' e^{1/2s^2}}{s^2} + \frac{Cs^2 e^{1/2s^2} - 2C e^{1/2s^2}}{s^3} - \left(s - \frac{2}{s}\right)\frac{C e^{1/2s^2}}{s^2} = -\frac{1}{s}$$

$$\frac{C' e^{1/2s^2}}{s^2} + \frac{Cs^2 e^{1/2s^2} - 2C e^{1/2s^2}}{s^3} - \frac{s}{s}\left(s - \frac{2}{s}\right)\frac{C e^{1/2s^2}}{s^2} = -\frac{1}{s}$$

$$\frac{C' e^{1/2s^2}}{s^2} + \frac{Cs^2 e^{1/2s^2} - 2C e^{1/2s^2}}{s^3} - \frac{Cs e^{1/2s^2} + 2C e^{1/2s^2}}{s^3} = -\frac{1}{s}$$

$$C' = -\frac{1}{s} \cdot \frac{s^2}{e^{1/2s^2}}$$

$$C' = -\frac{s}{e^{1/2s^2}}$$

$$C = -\int se^{-1/2s^2}\,ds = e^{-1/2s^2} + K$$

maka $Y(s) = \dfrac{(e^{-1/2s^2} + K)e^{1/2s^2}}{s^2} = \dfrac{1}{s^2} + K\dfrac{e^{1/2s^2}}{s^2}$

Langkah 4

Karena $\lim\limits_{s\to\infty} Y(s) = 0$ maka K haruslah sama dengan 0 sehingga $Y(s) = \frac{1}{s^2}$ dan dengan menggunakan tabel transform diperoleh bahwa $\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = y(t) = t$. Jadi, $y(t) = t$ adalah penyelesaian dari MNA yang diberikan di atas.

Contoh 10: Selesaikan MNA

$t\,y'' + (t-1)y' - y = 0 \qquad y(0) = 5,\ \ y'(0) = -5$

Langkah 1

Ambil Transform Laplace pada kedua ruas persamaan diferensial dan diperoleh

$\mathcal{L}\{t\,y'' + (t-1)y' - y\} = \mathcal{L}\{0\}$

Langkah 2

Gunakan sifat linear Transform Laplace

$\mathcal{L}\{t\,y''\} + \mathcal{L}\{t\,y'\} - \mathcal{L}\{y'\} - \mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{0\}$

Dengan menggunakan teorema Transform Laplace dari turunan berorde tinggi, teorema turunan dari Transform Laplace, dan kondisi awal yang diketahui, diperoleh

$$\mathcal{L}\{t\,y''(t)\} = -\frac{d}{ds}\,\mathcal{L}\{y''(t)\} = -\frac{d}{ds}\{s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)\}$$

$$= -\frac{d}{ds}\{s^2Y(s) - 5s + 5\} = -\{s^2Y'(s) + 2sY(s) - 5\}$$

$$\mathcal{L}\{t\,y''(t)\} = 5 - s^2Y'(s) - 2sY(s)$$

$$\mathcal{L}\{t\,y'(t)\} = -\frac{d}{ds}\{sY(s) - y(0)\} = -\frac{d}{ds}\{sY(s) - 5\}$$

$$= -\{sY'(s) + Y(s)\}$$

$$\mathcal{L}\{y'(t)\} = sY(s) - 5$$

maka

$$\{5 - s^2Y'(s) - 2sY(s)\} - \{sY'(s) + Y(s)\} - \{sY(s) - 5\} - Y(s) = 0$$

$$5 - s^2Y'(s) - 2sY(s) - sY'(s) - Y(s) - sY(s) + 5 - Y(s) = 0$$

$$-(s^2 + s)Y'(s) - (3s + 2)Y(s) = -10$$

$$Y'(s) + \frac{3s+2}{s^2+s}Y(s) = \frac{10}{s^2+s} \qquad (4.16)$$

Langkah 3

Untuk menyelesaikan persamaan diferensial di atas, kita gunakan metode faktor pengintegralan.

Pertama-tama kita tentukan faktor pengintegralannya.

$$\mu(s) = e^{\int (3s+2/s^2+s)\,ds}$$

Pertama-tama kita kerjakan terlebih dahulu $\int \frac{3s+2}{s^2+s}ds$, dengan menggunakan metode pecahan parsial:

$$\frac{3s+2}{s^2+s} = \frac{3s+2}{s(s+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1}$$

diperoleh $A = 2$, $B = 1$ sehingga

$$\int \frac{3s+2}{s^2+s} ds = \int \frac{3s+2}{s(s+1)} ds = \int \left(\frac{2}{s} + \frac{1}{s+1} \right) ds$$

$$\int \frac{3s+2}{s^2+s} ds = \int \frac{2}{s} ds + \int \frac{1}{s+1} ds = 2 \ln s + \ln(s+1)$$

maka faktor pengintegralannya adalah

$$\mu(s) = e^{\int (3s+2/s^2+s)\,ds} = e^{2\ln s + \ln(s+1)} = e^{\ln s^2} \cdot e^{\ln(s+1)}$$

$$= s^2 (s+1)$$

Kalikan (4.16) dengan faktor pengintegralan dan diperoleh

$$\frac{d}{ds}\{\mu(s) Y(s)\} = \mu(s) \frac{10}{s(s+1)}$$

$$\frac{d}{ds}\{s^2(s+1) Y(s)\} = s^2(s+1) \cdot \frac{10}{s(s+1)}$$

$$\frac{d}{ds}\{s^2(s+1)\, Y(s)\} = 10s$$

$$s^2(s+1)\, Y(s) = 10 \int s\, ds$$

$$s^2(s+1) Y(s) = 5s^2 + C$$

$$Y(s) = \frac{5s^2 + C}{s^2(s+1)} = \frac{5}{s+1} + C\, \frac{1}{s^2(s+1)}$$

Langkah 4

Karena $\lim_{s\to\infty} Y(s) = 0$ maka $\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{5}{s+1} + \frac{C}{s^2(s+1)} \right\}$

$\mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{1}{s^2(s+1)} \right\}$ diselesaikan menggunakan teorema konvolusi,

dengan memisalkan :

$$F(s)=\frac{1}{s^2} \text{ maka } \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\}=f(t)=t$$

$$G(s)=\frac{1}{s+1} \text{ maka } \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}=g(t)=e^{-t}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s+1)}\right\}=f(t)*g(t)=t*e^{-t} = \int_0^t \tau e^{-(t-\tau)}\,d\tau=\int_0^t \tau\, e^{-t}e^{\tau}\,d\tau$$

$$=e^{-t}\int_0^t \tau\, e^{\tau}\,d\tau$$

Gunakan pengintegralan parsial untuk menyelesaikan integral di atas, dengan memisalkan :

$u=\tau$ $\qquad\qquad$ $dv=e^{\tau}d\tau$

$du=d\tau$ $\qquad\qquad$ $v=e^{\tau}$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s+1)}\right\}=e^{-t}\left(\left[\tau e^{\tau}\right]_0^t-\int_0^t e^{\tau}\,d\tau\right)=e^{-t}(t\,e^{t}-e^{t}+1)$$

$$=t-1+e^{-t}$$

Jadi, $\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}=y(t)=5e^{-t}+C\left(t-1+e^{-t}\right)$. Dengan memperhatikan kondisi awal yang diberikan maka C adalah sembarang bilangan real, sehingga $y(t)=5e^{-t}+C(t-1+e^{-t})$ adalah penyelesaian MNA yang diberikan.

BAB V

PENUTUP

Transform Laplace adalah suatu bentuk integral Riemann tak wajar jenis pertama dengan batas atas pengintegralan tak berhingga. Dengan menggunakan definisi Transform Laplace dapat dicari Transform Laplace dari beberapa fungsi elementer seperti yang dinyatakan pada lembar lampiran.

Metode Transform Laplace secara khusus digunakan untuk penyelesaian Masalah Nilai Awal (MNA) persamaan diferensial linear orde 2 dengan koefisien konstan. Berikut ini merupakan prosedur Transform Laplace dalam penyelesaian Masalah Nilai Awal (MNA) persamaan diferensial linear orde 2 dengan koefisien konstan:

1. Ambil Transform Laplace pada kedua ruas persamaan diferensial.
2. Gunakan sifat linear, teorema Transform Laplace dari turunan berorde tinggi, dan kondisi awal sehingga diperoleh persamaan aljabar dalam $Y(s)$ dan s, dengan $Y(s)$ Transform Laplace dari penyelesaian persamaan diferensial yang diberikan.
3. Selanjutnya nyatakan $Y(s)$ eksplisit ke dalam s.
4. Tentukan invers Transform Laplace dengan menggunakan tabel Transform atau metode yang sesuai, misalnya: metode pecahan parsial, teorema Transform Laplace dari integral, teorema konvolusi yang akhirnya dikombinasikan dengan penggunaan tabel.

Penyelesaian Masalah Nilai Awal (MNA) persamaan diferensial linear orde 2 dengan koefisien variabel juga dapat dikerjakan dengan menggunakan metode Transfom Laplace. Berikut ini merupakan prosedur Transform Laplace dalam penyelesaian Masalah Nilai Awal (MNA) persamaan diferensial linear orde 2 dengan koefisien variabel:

1. Ambil Transform Laplace pada kedua ruas persamaan diferensial.
2. Gunakan sifat linear, teorema Transform Laplace dari turunan berorde tinggi, teorema turunan dari Trasnsform Laplace, dan kondisi awal yang diketahui sehingga diperoleh persamaan diferensial linear orde 1.
3. Gunakan metode yang sesuai untuk menyelesaikan persamaan diferensial linear tersebut, misalnya metode faktor pengintegralan, metode variasi parameter sehingga diperoleh Transform Laplacenya.
4. Tentukan invers Transform Laplace dengan menggunakan tabel Transform atau metode yang sesuai, misalnya: metode pecahan parsial, teorema Transform Laplace dari integral, teorema konvolusi yang akhirnya dikombinasikan dengan penggunaan tabel.

Untuk penyelesian Masalah Nilai Awal (MNA) persamaan diferesial linear orde 2 dengan koefisien variabel tidak dijamin ketunggalannya jika hipotesis dari teorema eksistensi dan ketunggalan untuk Masalah Nilai Awal (MNA) linear tidak dipenuhi, yaitu koefisien dari y'' adalah nol bila $t = 0$. Penyelesaian dari Masalah Nilai Awal (MNA) dapat tunggal atau mempunyai tak hingga banyak penyelesaian tergantung pada kondisi awal yang diberikan.

Berbeda dengan metode yang lain, misalnya metode reduksi, metode koefisien tak tentu, metode Transform Laplace memberikan penyelesaian khusus Masalah Nilai Awal (MNA) secara langsung tanpa perlu mencari penyelesaian umum persamaan diferensial yang diberikan. Dengan menggunakan metode Transform Lapalce, persamaan diferensial linear dengan koefisien variabel dapat diselesaikan dengan langkah-langkah yang cukup mudah.

TABEL TRANSFORM LAPLACE

$f(t)$	$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$
1	$\frac{1}{s}$, $s > 0$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$, $s > 0$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$, $s > a$
$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$, $s > a$
$\sin at$	$\frac{a}{s^2 + a^2}$, $s > 0$
$\cos at$	$\frac{s}{s^2 + a^2}$, $s > 0$
$\sinh at$	$\frac{a}{s^2 - a^2}$, $s > \lvert a \rvert$
$\cosh at$	$\frac{s}{s^2 - a^2}$, $s > \lvert a \rvert$
$e^{at} \sin bt$	$\frac{b}{(s-a)^2 + b^2}$, $s > a$
$e^{at} \cos bt$	$\frac{(s-a)}{(s-a)^2 + b^2}$, $s > a$
$t \sin at$	$\frac{2as}{(s^2 + a^2)^2}$, $s > 0$

$f(t)$	$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$
$c_1 f_1(t) \pm c_1 f_1(t)$	$c_1 F_1(s) \pm c_2 F_2(s)$
$e^{at} f(t)$	$F(s-a)$
$f(t)$	$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$
$f^n(t)$	$\mathcal{L}\{f(t)\} - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$
$t^n f(t)$	$(-1)^n \dfrac{d^n}{ds^n}[F(s)]$
$\int_0^t f(u)\,du$	$\dfrac{F(s)}{s}$
$f(t) * g(t)$	$\int_0^t f(\tau) g(t-\tau)\,d\tau$

DAFTAR PUSTAKA

Guterman & Nitecki. (1992). *Differential Equations: A First Course* (3rd edition). Orlondo: Saunders College Publishing.

Nagle, Kent, R & Saff B. Edward (1986). *Fundamentals of Differential Equations*. California: The Benjamin/Cummings Publishing Company, Inc.

Rice & Strange. (1986). *Ordinary Differential Equations with Applications*. Monterey California: Brooks/Cole Publishing Co.

Ross, L, Shepley. (1984). *Differential Equations*. New York: John Wiley & Sons.

Soemantri, R. (1983). *Analisis Real*. Jakarta: Karunika Universitas Terbuka.

Spiegel, R, Murray. (1985). *Seri Buku Schaum Teori dan Soal-soal : Transformasi Laplace*. Jakarta: Erlangga.

Taylor, E, Angus. (1955). *Advanced Calculus*. Los Angeles: Ginn Company.