PEMBELAJARAN MATEMATIKA PADA POKOK BAHASAN KALKULUS KELAS XI ILMU ALAM SEKOLAH MENENGAH ATAS DENGAN MENGGUNAKAN *MAPLE*

SKRIPSI

Diajukan untuk Memenuhi Salah Satu Syarat
Memperoleh Gelar Sarjana Pendidikan
Program Studi Pendidikan Matematika

Disusun oleh:

NURVINA UMAR

NIM: 001414051

PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA
JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
UNIVERSITAS SANATA DHARMA
YOGYAKARTA

2004

PEMBELAJARAN MATEMATIKA
PADA POKOK BAHASAN KALKULUS
KELAS XI ILMU ALAM SEKOLAH MENENGAH ATAS
DENGAN MENGGUNAKAN *MAPLE*

Oleh:

NURVINA UMAR

NIM: 001414051

Telah disetujui oleh

Pembimbing

M. Andy Rudhito, S.Pd.,M.Si.

tanggal 24/9 '04

PEMBELAJARAN MATEMATIKA PADA POKOK BAHASAN KALKULUS KELAS XI ILMU ALAM SEKOLAH MENENGAH ATAS DENGAN MENGGUNAKAN *MAPLE*

Dipersiapkan dan ditulis oleh:
Nurvina Umar
NIM: 001414051

Telah dipertahankan di depan Panitia Penguji
pada tanggal 12 Oktober 2004
dan dinyatakan telah memenuhi syarat

Susunan Panitia Penguji

	Nama Lengkap	Tanda Tangan
Ketua	Drs. A. Atmadi, M.Si.	....
Sekretaris	Drs. Th. Sugiarto, M.T.	....
Anggota	M. Andy Rudhito, S.Pd., M.Si.	....
Anggota	Drs. A. Mardjono	....
Anggota	Drs. Al. Haryono	....

Yogyakarta, 12 Oktober 2004
Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan
Universitas Sanata Dharma
Dekan,

(Dr. A.M. Slamet Soewandi, M.Pd.)

Berbuatlah sepenuh kemampuanmu,
sesungguhnya Aku berbuat pula.
Kelak kamu akan mengetahui,
siapakah diantara kita
yang akan memperoleh hasil yang baik
dari dunia ini.
Sesungguhnya orang-orang yang zalim
itu tidak akan mandapatkan
keberuntungan (sukses).

(QS. Al An'aam:135)

Kupersembahkan untuk:

- *Allah SWT yang selalu memberiku Kasih Sayang*
- *Bapak, Ibu, dan Adik kembarku Wati-Rani yang selalu menyayangiku*
- *Almamaterku " Universitas Sanata Dharma"*

PERNYATAAN KEASLIAN KARYA

Saya menyatakan dengan sesungguhnya bahwa skripsi yang saya tulis ini tidak memuat karya atau bagian karya orang lain, kecuali yang telah disebutkan dalam kutipan dan daftar pustaka, sebagaimana layaknya karya ilmiah.

Yogyakarta, 12 Oktober 2004

Penulis

Nurvina Umar

ABSTRAK

Pembelajaran dengan menggunakan komputer belum banyak digunakan di Indonesia. Siiring dengan perkembangan ilmu pengetahuan dan teknologi, sebenarnya sudah banyak muncul program komputer yang berhubungan dengan matematika dan dapat digunakan atau dimanfaatkan untuk mendukung pembelajaran matematika. Salah satu program komputer yang berhubungan dengan matematika adalah *Maple*. Untuk intu skripsi ini berjudul ***" Pembelajaran Matematika pada Pokok Bahasan Kalkulus kelas XI Ilmu Alam Sekolah Menengah Atas dengan menggunakan Maple"***. Tujuan penulisan skripsi ini yaitu mencoba menjawab pertanyaan mengenai: Bagaimana menggunakan fasilitas *maple* dalam pembelajaran matematika pada pokok bahasan kalkulus kelas XI Ilmu Alam di SMA, dan bagaimana menyusun suatu modul pembelajaran dengan bantuan program *maple* dalam pembelajaran metematika pada pokok bahasan kalkulus kelas XI Ilmu Alam di SMA.

Metode yang digunakan dalam penulisan skripsi ini adalah metode penelitian diskriptif eksploratif. Penelitian dimulai dengan mengeksplorasi fasilitas *maple*, khususnya yang terkait dengan pembelajaran kalkulus kelas XI Ilmu Alam, selanjutnya penulis mengeksplorasi dan memaparkan secara deskriptif pemanfaatan *maple* untuk mendukung pembelajaran kalkulus kelas XI Ilmu Alam di SMA. Analisis dilakukan dengan cara memanfaatkan *maple* yang terkait langsung dengan materi kalkulus kelas XI Ilmu Alam di SMA dan memilih fasilitas *maple* untuk mendukung pembelajaran kalkulus kelas XI Ilmu Alam di SMA.

Berdasarkan rangkaian langkah penelitian yang dilakukan tersebut, diperoleh kesimpulan bahwa *maple* dapat dimanfaatkan untuk membantu pembelajaran kalkulus kelas XI Ilmu Alam di SMA. Kemampuan-kemampuan yang dimiliki *maple* tersebut direalisasikan dalam bentuk modul. Penulisan skripsi ini ditutup dengan menyertakan empat contoh modul dengan topik kalkulus kelas XI Ilmu Alam di SMA berbantuan *maple*.

ABSTRACT

Teaching with computer uncommonly used in Indonesia. In addition to the development of science and technology there was many computer programs that was created in regard to the mathematics and it can be used to supporting the mathematics learning. One of the mathematics computers program was *Maple*. This thesis, entitled: ***" Pembelajaran Matematika pada Pokok Bahasan Kalkulus kelas XI Ilmu Alam Sekolah Menengah Atas dengan menggunakan Maple"***. Tries to answer two problems: How to use Maple program in calculus for XI (eleventh) grade student of natural science in high school, and how to design its teaching module.

The method of writing this thesis is explorative descriptive method. The process of writing began by explore the Maple's facilities, especially those that are linked with the calculus teaching for XI (eleventh) grade student of natural science in high school. After that, writer explores and describes how the Maple program, which is closely connected with the teaching material for the XI (eleventh) grade student of natural science in high school, benefits and supports calculus teaching in high school.

As the conclusion; Maple program can support the calculus teaching for XI (eleventh) grade student of natural science in high school, and it can be designed in a form of the teaching module. This thesis also encloses four examples of teaching modules showing how Maple program works for teaching calculus in XI (eleventh) grade student of natural science in high school.

KATA PENGANTAR

Puji syukur penulis panjatkan kepada Allah SWT atas Rahmat, Karunia dan Kasih-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul "Pembelajaran Matematika pada Pokok Bahasan Kalkulus kelas XI Ilmu Alam Sekolah Menengah Atas dengan Menggunakan *Maple*" sebagai salah satu syarat untuk mencapai gelar sarjana di Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Program Studi Pendidikan Matematika Universitas Sanata Dharma.

Skripsi ini dikerjakan untuk melihat fasilitas *Maple* yang dapat digunakan dalam Pembelajaran Matematika pada Pokok Bahasan Kalkulus kelas XI Ilmu Alam di Sekolah Menengah Atas, dan menyusun suatu Modul pembelajaran dengan bantuan Program *Maple* dalam Pembelajaran Matematika pada Pokok Bahasan Kalkulus kelas XI Ilmu Alam di Sekolah Menengah Atas.

Penulis menyadari bahwa keberhasilan penyusunan skripsi ini tidak terlepas dari bantuan, dorongan dan dukungan segenap pihak yang terlibat langsung maupun tidak langsung dalam penelitian ini. Penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Bapak Dr. A.M. Slamet Soewandi, M.Pd., selaku Dekan Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Sanata Dharma.
2. Bapak Drs. A. Atmadi, M.Si., selaku Ketua Jurusan Pendidikan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Sanata Dharma.
3. Bapak Drs. Thomas Sugiarto, MT, selaku Ketua Program Studi Pendidikan Matematika Universitas Sanata Dharma.

4. Bapak M. Andy Rudhito, S. Pd., M.Si, selaku dosen Pembimbing yang telah dengan sabar dan penuh pengertian membimbing, mengarahkan, memberi masukan, serta memberikan dorongan selama penyusunan dan pelaksanaan ujian skripsi.
5. Bapak. Drs. A. Mardjono, selaku dosen Penguji yang telah memberikan saran kepada penulis.
6. Bapak Drs. Al. Haryono, selaku dosen Penguji yang telah memberikan saran kepada penulis.
7. Bapak dan Ibu tersayang yang telah memberikan doa, dukungan, dorongan, semangat dan semuanya untuk menyelesaikan studi.
8. Adikku Wati dan Rani, kalian adalah motivasi terbesarku.
9. Pak Narjo dan Pak Sugeng yang telah membantu administrasi penulis.
10. Teman-temanku P.Mat 2000, Budi-Naoki, Dian-Kriting, Betty-Ndull, Yuli (kamu luar biasa…) dan teman-teman lain yang tidak bisa disebutkan satu persatu, yang telah menemani dan mendukungku selama kuliah.
11. Ciciiiiiiii, teman seperjuanganku yang telah membangun kembali semangatku.
12. Mas Catur, atas doa, taruhan, dan motivasinya. Aku menang…….!!!
13. Teman-teman KSR USD, Kriting, Jingjing, Abud, Batok, Oyeng, Comeng, Mas Gendut, dan teman-teman lain yang tidak bisa disebutkan satu persatu, yang telah memberikan banyak pelajaran untuk hidup.

14. Teman-teman KKN-ku, Hanna pelupa, Dias cerewet, Siska Plencing, Mami Nuri, Dewi Mezzum, Anton Batik, dan Anton Gembul, yang telah memberikan arti persahabatan.
15. Teman-teman Kos "Sari Ayu", Pooh, Me-me, Pi'i, Riscae, Epriss, Dian"Puuusss", Jane, Ratna, Elen, Lia-lemot, Mama Inung, Meli, Verty"Jempol", Wiwin-Balbal, Marley atas persahabatan dan canda tawa penghilang stress.
16. Semua pihak yang telah membantuku baik secara langsung maupun tidak langsung.

Penulis menyadari masih banyak kekurangan dalam skripsi ini. Oleh karena itu, kritik dan saran yang membangun, penulis terima dengan senang hati. Penulis berharap agar skripsi ini dapat berguna bagi ilmu pengetahuan.

Yogyakarta, Oktober 2004

Penulis

DAFTAR ISI

BAB II Landasan Teori.

BAB IV Eksplorasi *Maple* Dalam Pembelajaran Matematika pada Pokok Bahasan Kalkulus kelas XI Ilmu Alam

DAFTAR GAMBAR

Halaman

DAFTAR TABEL

BAB I

PENDAHULUAN

A. Latar Belakang Masalah.

Perkembangan teknologi yang semakin pesat, menimbulkan dampak yang positif bagi majunya ilmu pengetahuan. Teknologi yang semakin maju akan semakin memudahkan kita dalam mendapatkan informasi dan kebutuhan, misalnya dalam penggunaan internet. Komputer yang selama ini menjadi pusat perhatian para ilmuwan, ternyata juga memiliki peran penting dalam mendapatkan informasi.

Dalam dunia pendidikan, khususnya pendidikan matematika, penggunaan komputer menjadi begitu penting peranannya. Komputer dapat digunakan sebagai media dalam pembelajaran. Penggunaan suatu perangkat lunak dalam komputer memungkinkan kita menciptakan suatu pembelajaran matematika.

Program *Maple* adalah salah satu perangkat lunak yang dipakai dalam pembelajaran matematika. Program ini memang jarang dikenal oleh berbagai kalangan, tetapi di kalangan matematikawan program ini sering dipakai untuk berbagai eksplorasi. Program ini merupakan suatu program aplikasi yang mampu melakukan komputasi matematis dan program ini mudah dioperasikan.

Maple adalah suatu Sistem Komputasi Simbolik (*Symbolic Computation System*). *Maple* mampu menyelesaikan masalah-masalah matematika secara numerik maupun simbolik, menampilkan grafik, perhitungan bilangan rasional secara tepat dan sebagainya (Rudhito, 2003).

Dikatakan tidak sepenuhnya sama dengan matematika sebagai ilmu memiliki perbedaan antara lain dalam penyajiannya, pola pikirnya, keterbatasannya dan tingkat keabstrakannya (Soejadi, 2000). Untuk sebagian besar siswa, pemahaman materi pada pelajaran matematika masih dirasakan begitu sulit. Dikarenakan obyek matematika bersifat abstrak.

Adapun manfaat *Maple* dalam pembelajaran matematika adalah membantu menyampaikan materi pelajaran, dan dapat juga membantu mencari atau memeriksa jawaban soal dengan tepat (Kartono, 2002).

Melihat manfaat *Maple* yang cukup membantu pembelajaran matematika maka penulis menyusun modul pembelajaran matematika pada pokok bahasan dengan menggunakan *Maple*. Penulis memilih pokok bahasan kalkulus kelas XI Ilmu Alam. Pada pokok bahasan ini banyak hal-hal abstrak yang dapat diilustrasikan dengan *Maple*.

B. Perumusan Masalah.

Adapun perumusan masalah yang akan dibahas dalam penulisan skripsi ini adalah:

1. Bagaimana fasilitas *Maple* dapat digunakan dalam Pembelajaran Matematika pada Pokok Bahasan Kalkulus kelas XI Ilmu Alam di Sekolah Menengah Atas.
2. Bagaimana menyusun suatu Modul pembelajaran dengan bantuan Program *Maple* dalam Pembelajaran Matematika pada Pokok Bahasan Kalkulus kelas XI Ilmu Alam di Sekolah Menengah Atas.

C. Tujuan Penulisan.

Penyusunan skripsi ini bertujuan untuk :

1. Mengetahui kegunaan fasilitas *Maple* dalam Pembelajaran Matematika pada Pokok Bahasan Kalkulus kelas XI Ilmu Alam di Sekolah Menengah Atas.
2. Menyusun suatu Modul pembelajaran dengan bantuan Program *Maple* dalam Pembelajaran Matematika pada Pokok Bahasan Kalkulus kelas XI Ilmu Alam di Sekolah Menengah Atas.

D. Manfaat Penulisan.

Manfaat penulisan skripsi ini:

1. Bagi Universitas Sanata Dharma.

   Menambah kepustakaan dan diharapkan dapat berguna bagi pihak-pihak yang memerlukan.
2. Bagi Penulis sebagai calon guru.

   Mendapat pengetahuan, menambah pengalaman, dan mendapatkan wawasan yang lebih luas tentang program *Maple*, dan dapat menggunakannya dalam memecahkan masalah pada bidang matematika. Penulis juga dapat mengembangkan *Maple* untuk pembelajaran matematika.
3. Bagi Guru

   Dapat mengetahui pembelajaran matematika dengan menggunakan bantuan program *Maple*, dan dapat mengembangkannya untuk pemecahan masalah pada bidang matematika.

E. Metode Penulisan.

Penulisan skripsi ini bersifat penelitian diskriptif eksploratif. Penulis mengkaji bagaimana pembelajaran matematika dengan bantuan program *Maple* dapat digunakan untuk meningkatkan pemahaman dan kemampuan siswa dalam mempelajari suatu pokok bahasan, dalam hal ini khususnya pada pokok bahasan Kalkulus kelas XI Ilmu Alam.

F. Sistematika Penulisan.

BAB I Pendahuluan, berisi tentang Latar Belakang Masalah, Perumusan Masalah, Tujuan Penulisan, Manfaat Penulisan, Metode Penulisan, dan Sistematika Penulisan

BAB II Landasan Teori, berisi tentang Hakekat Ilmu Matematika, Proses Belajar Mengajar Matematika, Kurikulum Kalkulus kelas XI Ilmu Alam, Komputer dalam pembelajaran matematika, Pembelajaran kalkulus kelas XI Ilmu Alam dengan bantuan *maple,* dan Pengenalan Program *Maple*

BAB III Kalkulus kelas XI Ilmu Alam, berisi tentang Limit Fungsi dan Diferensial

BAB IV Eksplorasi *Maple* Dalam Pembelajaran Matematika pada Pokok Bahasan Kalkulus kelas XI Ilmu Alam, berisi tentang Fasilitas pada Program *Maple* yang mendukung Pokok Bahasan Kalkulus kelas XI Ilmu Alam, yang dilanjutkan dengan Penggunaan Program *Maple* untuk Menyelesaikan soal-soal pada Pokok Bahasan Kalkulus kelas XI Ilmu Alam.

BAB V Modul Pembelajaran Matematika pada Pokok Bahasan Kalkulus kelas XI Ilmu Alam, berisi tentang Garis-garis besar penyusunan Modul dan dilanjutkan dengan Modul Pembelajaran Matematika pada Pokok Bahasan Kalkulus kelas XI Ilmu Alam, yang berisi empat buah modul pembelajaran.

BAB VI Penutup, berisi tentang Kesimpulan, dan Saran

BAB II

LANDASAN TEORI

A. Hakekat Ilmu Matematika

Menurut Ruseffendi (1980) matematika timbul karena pikiran-pikiran manusia, yang berhubungan dengan idea, proses, dan penalaran. Matematika sering kali dilukiskan sebagai kumpulan sistem matematika, yang setiap dari system-sistem itu mempunyai struktur tersendiri yang sifatnya bersistem dedukatif (Hujojo, 1979). Ciri utama matematika adalah penalaran deduktif, yaitu kebenaran suatu konsep atau pernyataan diperoleh sebagai akibat logis dari kebenaran sebelumnya sehingga kaitan antar konsep atau pernyataan dalam matematika bersifat konsisten (Balitbang Puskur, 2003).

Matematika berfungsi mengembangkan kemampuan menghitung, mengukur, menurunkan dan menggunakan rumus matematika yang diperlukan dalam kehidupan sehari-hari melalui materi pengukuran dan geometri, aljabar, peluang dan statistika, kalkulus dan trigonometri. Matematika juga berfungsi mengembangkan kemampuan mengkomunikasikan gagasan melalui model matematika yang dapat berupa kalimat dan persamaan matematika, diagram, grafik atau tabel.

Menurut Soedjadi (2000), ada beberapa karakteristik matematika yaitu:

a. Memiliki objek kajian abstrak.

Dalam matematika objek dasar yang dipelajari adalah abstrak, sering juga disebut objek mental. Objek-objek itu merupakan objek pikiran.

Objek dasar itu meliputi:

a) Fakta (abstrak) berupa konvensi-konvensi yang diungkap dengan simbol tertentu.

b) Konsep adalah idea abstrak yang dapat digunakan untuk menggolongkan atau mengklasifikasikan sekumpulan objek. Konsep berhubungan erat dengan definisi. Definisi adalah ungkapan yang membatasi suatu konsep.

c) Operasi ataupun relasi adalah pengerjaan hitung, pengerjaan matematika yang lain

d) Prinsip (abstrak) adalah objek matematika yang komplek. Prinsip dapat terdiri atas beberapa fakta, beberapa konsep yang dikaitkan oleh suatu relasi ataupun operasi. Secara sederhana dapatlah dikatakan bahwa prinsip adalah hubungan antara berbagai objek dasar matematika.

b. Bertumpu pada kesepakatan.

Dalam matematika kesepakatan merupakan tumpuan yang amat sangat penting. Kesepakatan yang amat mendasar adalah aksioma dan konsep primitif. Aksioma diperlukan untuk menghindarkan berputar-putar dalam pembuktian. Sedangkan konsep primitif diperlukan untuk meghindarkan berputar-putar dalam pendefinisian. Aksioma juga disebut postulat (sekarang) ataupun pernyataan-pernyataan pangkal (yang sering dinyatakan tidak perlu dibuktikan). Sedangkan konsep primitif yang juga disebut sebagai *undefined term* ataupun pengertian-pangkal tidak perlu didefinisikan. Beberapa aksioma dapat membentuk suatu sistem aksioma, yang selanjutnya dapat menurunkan berbagai teorema. Dalam aksioma tentu terdapat konsep primitif tertentu. Dari satu atau lebih konsep primitif dapat dibentuk konsep baru melalui pendefinisian.

c. Berpola pikir deduktif.

Dalam matematika sebagai "ilmu" hanya diterima pola pikir deduktif. Pola pikir deduktif seara sederhana dapat dikatakan pemikiran "yang berpangkal dari hal yang bersifat umum diterapkan atau diarahkan kepada hal yang bersifat khusus".

d. Memiliki simbol yang kosong dari arti.

Dalam matematika jelas terlihat banyak sekali simbol yang digunakan, baik berupa huruf ataupun bukan huruf. Rangkaian simbol-simbol dalam matematika dapat membentuk suatu model matematika. Model matematika dapat berupa bentuk persamaan, pertidaksamaan, bangun geometrik tertentu, dan sebagainya. Huruf-huruf yang digunakan dalam model persamaan misalnya $x + y = z$ belum tentu bermakna atau berarti bilangan, demikian juga tanda + belum tentu operasi tambah untuk dua bilangan. Makna huruf dan tanda itu tergantung dari permasalahan yang mengakibatkan terbentuknya model $x + y = z$ masih kosong dari arti, terserah kepada yang akan memanfaatkan model itu, kosongnya arti simbol maupun tanda dalam model-model matematika itu justru memungkinkan "intervensi" matematika kedalam berbagai pengetahuan. Kosongnya arti itu dapat memungkinkan matematika memasuki medan garapan dari ilmu bahasa (linguistik).

e. Memperhatikan semesta pembicaraan.

Sehubungan dengan pembicaraan tentang kosongnya arti simbol-simbol dan tanda-tanda dalam matematika di atas, menunjukkan dengan jelas bahwa dalam menggunakan matematika diperlukan kejelasan dalam lingkup apa model itu dipakai. Bila lingkup pembicaraannya bilangan, maka simbol-simbol diartikan bilangan. Bila lingkup pembicaraannya transformasi, maka simbol-simbol itu diartikan suatu transformasi. Lingkup pembicaraan itulah yang disebut dengan semesta pembicaraan. Benar atau salahnya ataupun ada tidaknya penyelesaian suatu model matematika sangat ditentukan oleh semesta pembicaraannya.

f. Konsisten dalam sistemnya.

Dalam matematika terdapat banyak sistem. Ada sistem yang mempunyai kaitan satu sama lain, tetapi juga ada sistem yang dapat dipandang terlepas satu sama lain. Misal dikenal sistem-sistem aljabar, sistem-sistem geometri. Sistem aljabar dan sistem geometri tersebut dipandang terlepas satu sama lain, tetapi di dalam system aljabar sendiri terdapat beberapa sistem yang lebih “kecil” yang tekait satu sama lain. Demikian juga dalam sistem geometri, terdapat beberapa sistem yang “kecil” yang berkaitan satu sama lain. Dalam aljabar terdapat sistem aksioma dari group, sistem aksioma dari ring, sistem aksioma dari field dan sebagainya. Masing-masing sistem aksioma itu memiliki keterkaitan tertentu. Demikian juga dalam sistem-sistem geometri terdapat ada sistem geometri netral, sistem geometri *Eulides*, sistem geometri *non-Euclides*, dan sebagainya.

Sistem-sistem geometri itu memiliki kaitan tertentu juga. Di dalam masing-masing sistem dan strukturnya itu memiliki ketaat azasan atau konsistensi. Ini juga dikatakan bahwa dalam setiap sistem dan strukturnya tersebut tidak boleh terdapat kontradiksi. Suatu teorema ataupun suatu definisi harus menggunakan istilah atau konsep yang telah ditetapkan terlebih dahulu. Konsistensi itu baik dalam makna maupun dalam nilai kebenarannya. Tetapi antara sistem atau struktur yang satu dengan sistem atau struktur yang lain tidak mustahil terdapat pertanyaan yang saling kontradiksi.

B. Proses Belajar Mengajar Matematika

Menurut Winkel (1989: 365), proses belajar mengajar adalah suatu aktivitas psikis/mental yang berlangsung dalam interaksi aktif subyek dengan lingkungannya yang menghasilkan perubahan-perubahan dalam bentuk pengetahuan, ketrampilan, nilai dan sikap.

Syarat terpenting agar dalam mengajar matematika efektif adalah pengetahuan teori tentang bagaimana seseorang belajar dan kemampuan mengaplikasikan teori tersebut ke dalam pengajaran matematika. Di bawah ini akan dijelaskan teori belajar mengajar dari beberapa ahli, menurut Robert M. Gagne. Belajar oleh Gagne dikelompokkan ke dalam delapan tipe belajar, yaitu:

a. Isyarat

Belajar isyarat ialah belajar sesuatu yang tidak disengaja sebagai akibat dari sesuatu rangsangan yang dapat menimbulkan realisasi emosional kita disebabkan karena perasaan kita terkena. Misalnya perasaan anak yang terjadi akibat sikap atau ucapan gurunya yang tidak menyenangkan. Atau akibat positif siswa terhadap matematika karena sikap gurunya yang menyenangkan.

b. Stimulus Respon

Berbeda dengan belajar isyarat, belajar stimulus respons ialah belajar yang disengaja dan responsnya jasmaniah (fisik). Misalnya siswa mengumpulkan benda-benda berbentuk segitiga setelah diminta oleh gurunya. Pada tipe belajar ini harus ada rangsangan dari luar yang alan menyebabkan timbulnya respon tertentu yang diharapkan dari siswa, sehingga terjadi ikatan langsung yang manunggal di antara stimulus dan respons.

c. Rangkaian Gerak

Rangkaian gerak adalah perbuatan jasmaniah terurut dari dua kegiatan atau lebih stimulus respons. Misalnya menggambar ruas garis melalui titik yang diketahui. Langkah-langkahnya ialah siswa memegang mistar; meletakkan mistar tepat di samping ke dua titik itu; mengambil pensil; dan akhirnya menarik ruasgaris. Agar supaya rangkaian itu terjadi, siswa harus memahami setiap stimulus respons yang ada dalam rangkaian itu. Siswa perlu dibantu untuk membentuk urutan yang benar dari semua stimulus respons yang terdapat dalam rangkaian tersebut.

d. Rangkaian Verbal

Rangkaian verbal adalah perbuatan lisan terurut dari dua kegiatan atau lebih stimulus respons. Misalnya menyebutkan definisi. Untuk menyatakan idea dan argumen yang rasional di dalam matematika, perlu kiranya para siswa memiliki banyak rangkaian verbal tentang matematika. Guru dapat membantu mengembangkan rangkaian verbal para siswa tentang matematika dengan cara memberi kesempatan untuk mengemukakan fakta-fakta, definisi-definisi, konsep-konsep, dan prinsip-prinsip secara benar dan teliti (Hudoyo, 1980)

e. Belajar Membedakan

Belajar membedakan adalah belajar membedakan rangkaian stimulus respons agar dapat memahami bermacam-macam objek fisik dan konsep. Ada dua macam belajar membedakan, yaitu membedakan tunggal dan membedakan jamak (banyak). Belajar membedakan tunggal, misalnya menyebutkan segitiga sebagai kurva tertutup sederhana (yang berupa gabungan tiga buah ruasgaris). Sedangkan belajar membedakan jamak, misalnya menyebutkan perbedaan sudut dan sisi dari tiga jenis segitiga yang diberikan (lancip, tumpul, siku-siku).

f. Belajar Konsep

Belajar konsep adalah belajar memahami kebersamaan sifat-sifat dari benda-benda konkrit atau peristiwa-peristiwa untuk dikelompokkan menjadi satu kelas. Pada pembentukkan konsep, siswa dituntuk untuk mengklasifikasikan objek-objek ke dalam bentuk kelompok-kelompok karakteristik yang sama. Misalnya untuk memahami konsep garis lurus, siswa mengamati sisi meja (yang lurus), seutas tali yang direntangkan dengan kuat, horizon, dan lain-lain. Ia membedakan dengan lengkungan lain (tidak lurus), ruasgaris, sinar.

g. Belajar Aturan

Pada tipe belajar bentukan aturan, siswa diharapkan mampu memberikan respons terhadap semua stimulus dengan segala macam perbuatan. Kemampuan yang dimaksud adalah kemampuan memahami aturan dan menggunakan aturan. Siswa mungkin mampu menyebutkan aturan (rumus) *Pythagoras* dalam segitiga siku-siku ($c^2 = a^2 + b^2$), tetapi tidak mampu menggunakannya.

Tujuan pembelajaran matematika (Balitbang Puskur, 2003) adalah:

1. Melatih cara berpikir dan bernalar dalam menarik kesimpulan, misalnya melalui kegiatan penyelidikian, eksplorasi, eksperimen, menunjukkan kesamaan, perbedaan, konsisten dan inkonsistensi.
2. Mengembangkan aktivitas kreatif yang melibatkan imajinasi, intuisi, dan penemuan dengan mengembangkan pemikiran divergen, orisinil, rasa ingin tahu, membuat prediksi dan dugaan, serta mencoba-coba.
3. Mengembangkan kemampuan memecahkan masalah.
4. Mengembangkan kemampuan menyampaikan informasi atau mengkomunikasikan gagasan antara lain melalui pembicaraan lisan, grafik, peta, diagram, dalam menjelaskan gagasan.

C. Kurikulum Kalkulus Kelas XI Ilmu Alam

Dalam pembahasan kalkukus kelas XI Ilmu Alam ini menggunakan kurikulum berbasis kompetensi. Kompetensi merupakan perpaduan dari pengetahuan, ketrampilan, nilai dan sikap yang merefleksikan dalam kebiasaan berpikir dan bertindak. Kompetensi yang harus dikuasai perlu dikuasai peserta didik perlu dinyatakan sedemikian rupa agar dapat dinilai, sebagai wujud hasil belajar peserta didik yang mengacu pada pengalaman langsung. Peserta didik perlu mengetahui tujuan belajar, dan tingkat-tingkat penguasaan yang akan digunakan sebagai kriteria pencapaian secara eksplisit, dikembangkan berdasarkan tujuan-tujuan yang telah dikembangkan berdasarkan tujuan-tujuan yang telah ditetapkan, dan memiliki konstribusi terhadap kompetensi-kompetensi yang sedang dipelajari. Penilaian terhadap pencapaian kompetensi perlu dilakukan seara objektif, berdasarkan kinerja peserta didik, dengan bukti penguasaan mereka terhadap pengetahuan, ketrampilan, nilai dan sikap sebagai hasil belajar. Dengan demikian dalam pembelajaran yang dirancang berdasarkan kompetensi, penilaian tidak dilakukan berdasarkan pertimbangan yang bersifat subjektif.

Kurikulum Berbasis Kompetensi (KBK) dapat diartikan sebagai konsep kurikulum yang menekankan pada pengembangan kemampuan melakukan (kompetensi) tugas-tugas dengan standar performansi tertentu, sehingga hasilnya dapat dirasakan oleh peserta didik, berupa penguasaan terhadap seperangkat kompetensi tertentu. KBK diarahkan untuk mengembangkan pengetahuan, pemahaman, kemampuan, nilai, sikap, dan minat peserta didik, agar dapat melakukan sesuatu dalam bentuk kemahiran, ketepatan, dan keberhasilan dengan penuh tanggung jawab.

Standar kompetensi matematika merupakan seperangkat kompetensi matematika yang dibakukan dan harus ditunjukkan oleh siswa pada hasil belajarnya dalam mata pelajaran matematika. Standar ini dirinci dalam komponen kompetensi dasar, indikator, dan materi pokok, untuk setiap aspeknya. Pengorganisasian dan pengelompokan materi pada aspek tersebut didasarkan menurut disiplin ilmunya atau didasarkan menurut kemahiran atau kecakapan yang hendak ingin dicapai.

Berikut ini merupakan Kurikulum Berbasis Kompetensi (KBK) pada mata pelajaran Matematika untuk pokok bahasan Kalkulus kelas XI Ilmu Alam (Balitbang Puskur, 2003):

Standar kompetensi : Menggunakan konsep limit dan turunan dalam pemecahan masalah.

Aspek : Kalkulus

Kompetensi Dasar	**Indikator**	**Materi Pokok**
1. Menjelaskan limit fungsi di satu titik dan di takhingga beserta teknis perhitungannya	• Menjelaskan arti limit fungsi di satu titik dan di tak hingga • Menghitung limit fungsi aljabar di satu titik dan di tak hingga • Menghitung limit fungsi trigonometri di satu titik • Menjelaskan sifat-sifat yang diguna-kan dalam perhitungan limit	Limit Fungsi
2. Menggunakan sifat limit fungsi untuk menghitung bentuk tak tentu fungsi aljabar dan trigonometri	• Menjelaskan arti bentuk tak tentu dari limit fungsi • Menghitung bentuk tak tentu dari limit fungsi aljabar dan trigonometri • Menghitung limit fungsi yang mengarah ke konsep turunan • Menjelaskan sifat-sifat yang digunakan dalam perhitungan bentuk tak tentu limit fungsi	

Kompetensi Dasar	Indikator	Materi Pokok
3. Menggunakan konsep, sifat, dan aturan dalam perhitungan turunan fungsi	• Menghitung turunan fungsi yang sederhana dengan menggunakan definisi turunan • Menjelaskan arti fisis dan arti geometri turunan di satu titik • Menentukan laju perubahan nilai fungsi terhadap variabel bebasnya • Menggunakan aturan turunan untuk menghitung turunan fungsi aljabar dan trigonometri • Menentukan turunan fungsi komposisi dengan aturan rantai • Menentukan persamaan garis singgung pada suatu kurva	Diferensial
4. Menggunakan turunan untuk menentukan karakteristik suatu fungsi dan memecahkan masalah	• Menentukan selang di mana suatu fungsi naik atau turun • Menentukan titik stasioner suatu fungsi beserta jenis ekstrimnya • Menentukan titik belok suatu fungsi • Menggambarkan grafik fungsi • Menggunakan turunan dalam perhitungan kecepatan dan percepatan • Menggunakan turunan dalam perhitungan bentuk tak tentu limit fungsi	
5. Merancang model matematika yang berkaitan dengan ekstrim fungsi, menyelesaikan modelnya, dan menafsirkan hasil yang diperoleh	• Menjelaskan karakteristik masalah yang model matematikanya menentukan ekstrim fungsi • Menentukan besaran masalah yang dirancang sebagai variabel dalam ekspresi matematikanya • Merumuskan fungsi satu variabel yang merupakan model matematika dari masalah • Menentukan penyelesaian dari model matematika • Memberikan tafsiran terhadap solusi dari Masalah	

Tabel 1. Kurikulum Kalkulus kelas XI Ilmu Alam

D. Komputer dalam Pembelajaran Matematika.

Perkembangan komputer yang sangat pesat berpengaruh dan memberi manfaat dalam kehidupan kita termasuk dalam pendidikan matematika. Pada bidang matematika, perkembangan teknologi ini memungkinkan kita untuk melakukan inovasi dalam pembelajaran matematika.

Dalam sejarah perkembangan pembelajaran berbantuan komputer ada tiga tahapan penting yang perlu diketahui, yaitu pembelajaran dari komputer, pembelajaran tentang komputer, dan pembelajaran dengan menggunakan komputer (Jonassen, h:4, 2000). Tahapan yang terakhir yaitu pembelajaran dengan komputer memunculkan pembaharuan dalam pembelajaran matematika dimana komputer digunakan sebagai alat bantu berpikir atau mindtools. Siswa melibatkan diri dengan komputer dan mengembangkan kerangka berpikirnya dengan bantuan komputer (Jonassen, h:3, 2000). Peranan siswa dalam pemakaian komputer sebagai alat bantu berpikir, yaitu siswa mengeksplorasi kemampuan yang ada pada komputer dan komputer membantu meningkatkan pemikiran dan pemahaman siswa. Pembelajaran yang disajikan secara interaktif oleh komputer menuntut siswa merespon materi-materi yang disediakan, sedangkan komputer akan menanggapi setiap respon yang diberikan oleh siswa. Sebagai mindtools komputer bukan hanya jadi guru yang memaparkan suatu materi tetapi juga sebagai "partner" intelektual, membantu siswa mengkonstruksi pengetahuannya, mendukung eksplorasi siswa pada topik tertentu dan membantu siswa memahami keterkaitan antar konsep (Jonassen, h:9 ,2000). Dalam proses pembelajaran, komputer digunakan untuk memberikan bahan referansi bagi siswa tentang suatu materi, membantu memvisualisasikan suatu konsep tertentu sehingga siswa akan lebih mudah mengerti dan merangsang siswa untuk megeksplorasi suatu konsep. Bantuan tampilan visual grafis komputer diharapkan dapat membantu menjelaskan konsep-konsep yang abstrak dalam pembelajaran matematika.

E. Pembelajaran Kalkulus kelas XI Ilmu Alam dengan Menggunakan Komputer.

Penggunaan komputer dalam pembelajaran matematika khususnya pembelajaran kalkulus kelas XI Ilmu Alam sesuai dengan rambu-rambu standar kompetensi yang ke-7 yaitu: "Sekolah dapat menggunakan teknologi seperti kalkulator, komputer, alat peraga, atau media lainnya untuk semakin meningkatkan efektifitas pembelajaran. Selain itu, perlu ada pembahasan bagaimana matematika banyak diterapkan dalam teknologi informasi baik sebagai perluasan pengetahuan siswa atau penerapan konsep matematika secara langsung pada pembelajaran" (Balitbang Puskur, 2003).

Dengan perkembangnya teknologi komputer dan perangkat lunaknya, telah tesedia program-program pembelajaean matematika. Salah satunya yaitu program *maple* yang dapat digunakan untuk membantu pembelajaran kalkulus khususnya kalkulus kelas XI Ilmu Alam. Program *maple* ini dapat digunakan sebagai alat bantu berpikir siswa pada pembelajaran kalkulus kelas XI Ilmu Alam, karena dengan *maple* siswa dapat mengeksplorasi, mengamati, dan menggambar kurva suatu fungsi. Pembelajaran kalkulus kelas XI Ilmu Alam yang disajikan secara interaktif oleh *maple* menuntut siswa merespon materi-materi yang disediakan, sedangkan *maple* akan menanggapi respon yang diberikan siswa. Misalnya hasil suatu turunan suatu fungsi dapat disajikan oleh *maple* jika siswa menuliskan perintah.

F. Pengenalan Program *Maple.*

Maple menjadi salah satu pemimpin perangkat analisis matematika terutama karena kemampuannya pada komputasi simbolik, ketelitian numerik tak hingga, konektivitas *web* yang inovatif, dan berbagai modeling dan simulasi (Khoe Yao Tung, 2003).

Program yang dikembangkan mencakup tentang penyelesaian matematika untuk mendukung berbagai topik operasi matematika yang meliputi analisis numerik, aljabar simbolik, kalkulus, persamaan diferensial, aljabar linear dan grafik. Komputasi yang ditawarkan berada dalam ***Maple Worksheet Environment*** yang menyediakan berbagai solusi mengenai aritmatika dasar, teori grup, dan analisis tensor. *Maple* juga mennyediakan sarana visualisasi matematika dan *wordprocessing* khusus untuk notasi matematika, bahasa pemrograman modern, dan alat perdidikan yang fleksibel untuk riset dan industri.

Gambar 1. Tampilan menu utama *maple*

1. Langkah awal untuk memulai *Maple*:

   Tuliskan pada *Maple Worksheet Environment*

   > **4+3;**

Pendefinisian suatu perhitungan, suatu bentuk fungsi harus dinyatakan dengan ":=", misalnya

```
> s:=4+3;
```

$$s := 7$$

Setiap perintah *Maple* harus diakhiri dengan tanda semi colon (;), tanda colon (:) hanya dapat menghentikan sementara.

```
> s:=4+3:
> s;
```

$$7$$

Tanda garis miring (/) menunjukkan pembagian, tanda bintang (*) menunjukkan perkalian, dan tanda caret (^) menunjukkan pemangkatan.

```
> (x^2+3*x+2)/(x+2);
```

$$\frac{x^2 + 3\,x + 2}{x + 2}$$

2. Fungsi dasar

Dalam menggunakan berbagai fungsi standar dalam *maple* pada dasarnya kita dapat selalu mengacu pada fungsi dasar ***help*** dari menu bila ada fungsi yang hendak ditanyakan. Selain itu, juga terdapat tutorial di *maple* dengan menggunakan **Help** yang tersedia pada menu.

Fungsi-fungsi dasar yang sering dijumpai sebagai berikut:

1. Perintah *expand* untuk mengalikan bentuk ekspresi aljabar.

```
> expand((x-1)^2);
```

$$x^2 - 2\,x + 1$$

2. Perintah *factor* untuk memfaktorkan ekspresi aljabar.

```
> factor(x^2-2*x+1);
```

$$(x - 1)^2$$

3. Perintah *solve* untuk mencari penyelesaian dari ekspresi terhadap satu variable tertentu.

a. Untuk persamaan satu variabel:

```
> solve(2*x+1=0,x);
```

$$\frac{-1}{2}$$

b. Untuk persamaan linear dengan lebih dari satu variabel:

```
> solve({2*x-y=1,3*x+2*y=12},{x,y});
```

$$\{x=2, y=3\}$$

4. Perintah *simplify* untuk menyederhanakan ekspresi persamaan aljabar.

```
> simplify(2*x+26-3*x+4);
```

$$-x+30$$

5. Perintah *Diff* dan *diff* adalah perintah simbolik untuk melakukan diferensial atau untuk mencari turunan dari suatu fungsi. *diff* pada menunjukkan hasil dari turunan yang dimaksud, tetapi *Diff* pada akan menunjukkan perintah turunan.

a. Untuk mencari turunan pertama:

```
> Diff(3*x^2+4*x-2,x)= diff(3*x^2+4*x-2,x);
```

$$\frac{d}{dx}(3x^2+4x-2)=6x+4$$

b. Untuk mencari turunan kedua:

```
> Diff(3*x^2+4*x-2,x$2)= diff(3*x^2+4*x-2,x$2);
```

$$\frac{d^2}{dx^2}(3x^2+4x-2)=6$$

6. Perintah *eval* untuk mengevaluasi dari ekspresi atau fungsi yang telah didefinisikan terlebih dahulu terhadap suatu variabel.

```
> f:=x^2+6*x+4;
```

$$f:=x^2+6x+4$$

```
> eval(f,x=2);
```

$$20$$

7. Perintah *exp(x)* adalah perintah untuk fungsi *e* berpangkat *x*, dalam hal ini nilai 2.71828… berpangkat *x*.

```
> exp(x);
```

$$e^x$$

8. Perintah *ln(x)* adalah perintah untuk logaritma *x* berbasis bilangan natural *e*.

```
> ln(x);
```

$$\ln(x)$$

9. Perintah *x^3* adalah perintah untuk *x* berpangkat 3

```
> x^3;
```

$$x^3$$

10. Perintah *abs(x)* adalah perintah untuk nilai absolut dari *x*.

```
> abs(x);
```

$$|x|$$

11. Perintah *sqrt(x)* adalah perintah untuk akar aljabar dari *x*.

```
> sqrt(x)  ;
```

$$\sqrt{x}$$

12. Perintah *sin(x)* adalah perintah untuk fungsi trigonometri dari *x*, sama dengan fungsi-fungsi trigonometri yang lain seperti *cos(x), tan(x),* dan lain-lain.

```
> sin(x)  ;
```

$$\sin(x)$$

```
> tan(x)  ;
```

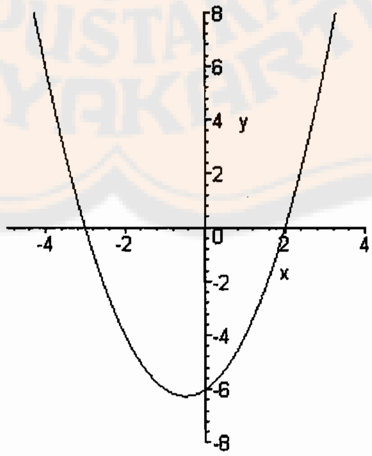
$$\tan(x)$$

```
> cos(x)  ;
```

$$\cos(x)$$

13. Perintah *plot* untuk menggambar grafik suatu fungsi.

```
> plot(x^2+x-6,x=-5..4,y=-8..8);
```



Gambar 2. Grafik fungsi $f(x) = x^2 + x - 6$

BAB III

KALKULUS KELAS XI ILMU ALAM

A. Limit Fungsi

1. Pengertian Limit Fungsi

Limit fungsi merupakan bagian dari pengantar kalkulus (hitung diferensial dan hitung integral). Dalam kalkulus kita sering menyelidiki nilai-nilai $f(x)$. Jika x mendekati suatu bilangan misalnya a, tetapi $x \neq a$, maka ditulis $\lim_{x \to a}$ (dibaca : limit x mendekati a). "Limit" dalam bahasa matematika pengertiannya sama dengan "mendekati", "hampir saja", "sedikit lagi" dalam kehidupan sehari-hari. Sebagai contoh perhatikan kalimat-kalimat yang sering dijumpai dalam percakapan sehari-hari berikut ini:

a. Nilai ulangan matematika yang diperoleh Louis mendekati sempurna.

b. Pelari S hampir saja melewati pelari T.

c. Pencemaran udara di kota B sedikit lagi mencapai batas normal.

Konsep limit sering kali dipergunakan dalam berpikir secara non matematis, misalnya dikatakan "Produksi maksimum dari suatu mesin". Secara teoritis ungkapan itu sebetulnya merupakan limit untuk pencapaian hasil, yang prateknya tidak pernah tercapai tetapi dapat didekati sedekat-dekatnya. Konsep matematis dari suatu limit merupakan dasar dalam mengartikan deferensial kalkulus untuk bab-bab berikutnya.

Contoh 1

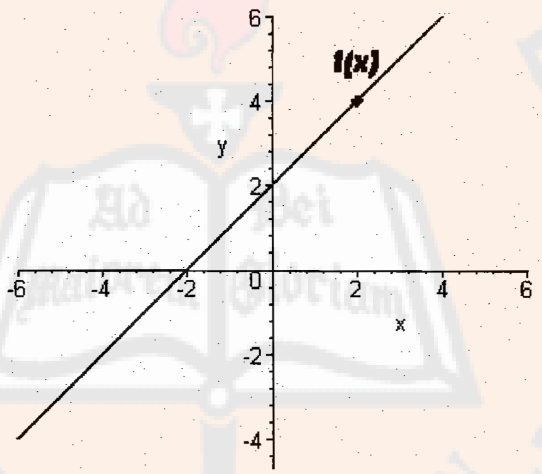
Diketahui fungsi $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$

Untuk $x = 2$, $f(x)$ tidak terdefinisi.

Untuk nilai-nilai x mendekati 2, nilai $f(x)$ dicari sebagai berikut:

x	1,7	1,8	1,99	1,999	2,00	2,001	2,01	2,1	2,2
$f(x)$	3,7	3,8	3,99	3,999	?	4,001	4,01	4,1	4,2

Tabel 2. Nilai x dan $f(x)$ untuk $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$



Gambar 3. Grafik $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$

Dapat dilihat bahwa jika x mendekati 2 maka nilai $f(x)$ akan mendekati 4.

Hal itu bisa kita tulis dengan notasi limit sebagai berikut:

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$$

Dari uraian di atas, secara intuitif limit didefinisikan sebagai berikut:

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$. Artinya jika x mendekati a (tetapi $x \neq a$) maka $f(x)$ mendekati nilai L

a. Limit kiri dan limit kanan

Misalkan x adalah variabel dan a adalah konstanta real. Jika x mendekati a, maka proses pendekatan nilai ke a adalah sebagai berikut:

Pada contoh 1, untuk nilai x mendekati 2 dari kiri, yaitu x = 1,99; x = 1,999; dan seterusnya, nilai $f(x)$ akan mendekati 4. hal ini dapat dituliskan dengan notasi limit, sebagai berikut:

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$$

Untuk nilai x mendekati 2 dari kanan, yaitu x = 2,01; x = 2,001; dan seterusnya, nilai $f(x)$ akan mendekati 4. hal ini dapat dituliskan dengan notasi limit, sebagai berikut: $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$

Sehingga dapat diperoleh $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$

Dari contoh tersebut, dapat disimpulkan sebagai berikut:

a. $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ ada, berarti fungsi mempunyai limit kiri.

b. $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ ada, berarti fungsi mempunyai limit kanan.

c. Jika $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x)$, maka $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ ada.

2. Limit fungsi aljabar

a. Bentuk $\lim_{x \to a} f(x)$

Limit fungsi aljabar $f(x)$ untuk $x \to$ a dapat dihitung dengan cara substitusi langsung. Jika dengan substitusi langsung menghasilkan $\frac{0}{0}$, maka nilai limit dapat dicari dengan pemfaktoran.

b. Bentuk $\lim_{x \to \infty} f(x)$

Limit fungsi aljabar dengan peubah x mendekati tak hingga sering kita jumpai. Biasanya berbentuk: $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ atau $\lim_{x \to \infty} \{f(x) - g(x)\}$

Dengan substitusi langsung, diperoleh bentuk-bentuk $\frac{\infty}{\infty}$ atau $(\infty - \infty)$. Bentuk-bentuk itu adalah bentuk-bentuk tak tentu, sehingga perhitungan limit fungsi aljabar dengan peubah mendekati tak terhingga dapat ditentukan dengan membagi dengan pangkat tertinggi.

$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ dapat dihitung dengan cara membagi $f(x)$ dan $g(x)$ dengan x^n.n merupakan pangkat tertinggi dari $f(x)$ dan $g(x)$.

Keterangan: $\lim_{x \to \infty} \frac{a}{x^n}$ = 0, dimana a adalah konstanta.

$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ dapat ditentukan dengan cara sebagai berikut:

1. Jika pangkat tertinggi $f(x)$ = pangkat tertinggi $g(x)$, maka

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{koefisien \quad pangkat \quad tertinggi \quad f(x)}{koefisien \quad pangkat \quad tertinggi \quad g(x)}$$

2. Jika pangkat tertinggi $f(x)$ > pangkat tertinggi $g(x)$, maka $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$

3. Jika pangkat tertinggi $f(x)$ < pangkat tertinggi $g(x)$, maka $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

3. Limit fungsi Trigonometri

$\lim_{x \to a} f(x)$ dengan *f(x)* fungsi trigonometri (x dalam radian) disebut limit fungsi trigonometri.

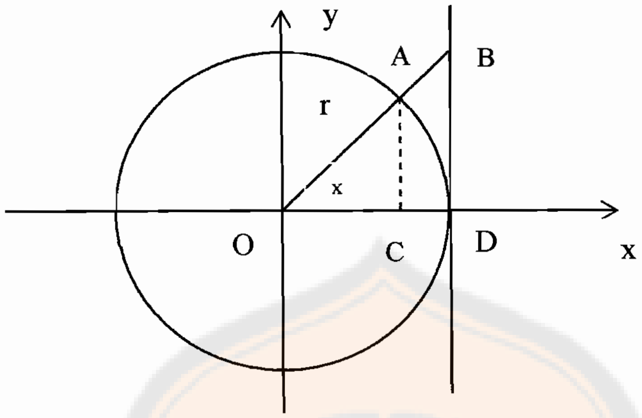
Rumus-rumus limit fungsi trigonometri:

Limit fungsi trigonometri dapat diselesaikan dengan cara substitusi langsung maupun mengubah bentuk fungsi trigonometri dengan identitas-identitas trigonometri yang sudah ada. Limit fungsi trigonometri dapat pula ditentukan dengan rumus-rumus limit fungsi trigonomtri sebagai berikut:

a. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$

b. $\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{\tan x} = 1$

Bukti: Perhatikan gambar berikut ini



Gambar 4. Limit fungsi trigonometri

a. Lingkaran dengan pusat O dan jari-jari r. BD menyinggung lingkaran di D, C adalah proyeksi A pada OD.

$\angle$ BOD = x (dalam radian)

Luas Δ OAC < Luas Juring OAD < Luas Δ OBD

$$\frac{1}{2}.\, OC.\, AC < \frac{x}{2\pi}\cdot\pi\cdot r^2 < \frac{1}{2}.\, OD.\, BD$$

$$\frac{1}{2}.\, r^2 .\cos x .\sin x < \frac{1}{2}\, x\, r^2 < \frac{1}{2}\, r^2 .\, \tan x \quad : \frac{1}{2}\, r^2$$

$$\sin x \cos x < x < \tan x$$

$$\cos x < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

Untuk $x \to 0$ maka :

$$\lim_{x\to 0} \cos x < \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} < \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x}$$

$$1 < \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} < 1$$

Jadi $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sin x} = 1$ dan $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

b. Lingkaran dengan pusat O dan jari-jari r. BD menyinggung lingkaran di D, C adalah proyeksi A pada OD.

$\angle$ BOD = x (dalam radian)

Luas Δ OAC < Luas Juring OAD < Luas Δ OBD

$$\frac{1}{2} . OC. AC < \frac{x}{2\pi} \cdot \pi \cdot r^2 < \frac{1}{2} . OD. BD$$

$$\frac{1}{2} . r^2 .\cos x .\sin x < \frac{1}{2} x\, r^2 < \frac{1}{2} r^2 . \tan x \qquad : \frac{1}{2} r^2$$

$$\sin x \cos x < x < \tan x \qquad :\tan x$$

$$\cos^2 x < \frac{x}{\tan x} < \frac{\tan x}{\tan x}$$

$$\lim_{x\to 0} \cos^2 x < \lim_{x\to 0} \frac{x}{\tan x} < \lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{\tan x}$$

$$\lim_{x\to 0} \cos^2 x < \lim_{x\to 0} \frac{x}{\tan x} < 1$$

$$1 < \lim_{x\to 0} \frac{x}{\tan x} < 1$$

Jadi $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\tan x} = 1$ dan $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$

4. Teorema Limit.

Andaikan n adalah bilangan bulat positif, k merupakan konstanta, f dan g merupakan fungsi-fungsi yang mempunyai limit untuk $x \to a$, $a \in$ R, maka:

1. Jika $f(x) = k$, maka $\lim\limits_{x \to a} k = k$

2. Jika $f(x) = x$, maka $\lim\limits_{x \to a} x = a$

3. $\lim\limits_{x \to a} k \,.\, f(x) = k \lim\limits_{x \to a} f(x)$

4. $\lim\limits_{x \to a} [\,f(x) + g(x)\,] = \lim\limits_{x \to a} f(x) + \lim\limits_{x \to a} g(x)$

5. $\lim\limits_{x \to a} [\,f(x) - g(x)\,] = \lim\limits_{x \to a} f(x) - \lim\limits_{x \to a} g(x)$

6. $\lim\limits_{x \to a} [\,f(x) \,.\, g(x)\,] = \lim\limits_{x \to a} f(x) \,.\, \lim\limits_{x \to a} g(x)$

7. $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}$ dengan $\lim\limits_{x \to a} g(x) \neq 0$

8. $\lim\limits_{x \to a} [\,f(x)\,]^n = \left[\lim\limits_{x \to a} f(x)\right]^n$

9. $\lim\limits_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x \to a} f(x)}$ dengan $\lim\limits_{x \to a} f(x) \geq 0$ untuk n bilangan genap

   atau $\lim\limits_{x \to a} f(x) \leq 0$ untuk n bilangan ganjil.

5. Kontinuitas dan diskontinuitas fungsi.

Tiga syarat yang harus dipenuhi agar fungsi $f(x)$ kontinu di $x = a$, adalah sebagai berikut:

1. $f(a)$ harus ada (terdefinisi)
2. $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ harus ada
3. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

Jika satu di antara ketiga syarat tersebut tidak dipenuhi maka fungsi $f(x)$ diskontinu di $x = a$.

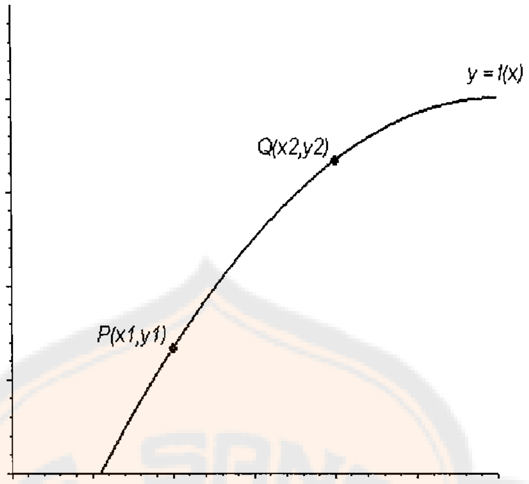
B. Diferensial

Seorang petani akan membuat pagar berbentuk lingkaran pada sebuah petak sawah yang berbentuk persegi. Petani tersebut menginginkan pagar berbentuk lingkaran sehingga dapat memuat hewan piaraan sebanyak-banyaknya. Permasalahan yang dihadapi petani tersebut adalah berapa luas lingkaran yang bias dibuat sehingga mencapai luas yang maksimum. Masalah tersebut dalam penerapannya dapat diselesaikan dengan menggunakan konsep pemakaian turunan. Permasalahan ini juga dapat ditemukan dalam berbagai pekerjaan seperti pembangunan sarana transportasi, perhitungan laba perusahaan, dan lain-lain.

Konsep yang berkaitan dengan turunan sejak lama telah dikembangkan oleh beberapa ahli matematika, seperti Blaise Pascal, Gottfreid Wilhelm Leibniz, Leonhard Euler, dan lain-lain. Dalam pokok bahasan ini akan diuraikan secara mendalam hal-hal yang berkaitan dengan konsep turunan serta penerapannya dalam kehidupan sehari-hari.

1. Pengertian turunan fungsi.

Bila diberikan sebuah kurva dengan persamaan $y = f(x)$ dan pada kurva tersebut diletakkan pada dua buah titik yang berbeda, misalnya titik P(x_1, y_1) dan Q(x_2, y_2), maka dapat ditunjukkan kemiringan garis yang melalui kedua titik tersebut.



Gambar 5. Kurva persamaan $y = f(x)$

Jika variabel x berubah dari x_1 ke x_2 maka (x_1 - x_2) disebut perubahan atau pertambahan nilai variabel, dilambangkan dengan Δx (dibaca: delta x). Pada sebuah fungsi $y = f(x)$, jika harga x berubah dari x_1 menjadi x_2 maka nilai fungsi $y = f(x)$ akan berubah dari $y_1 = f(x_1)$ menjadi $y_2 = f(x_2)$. Hal ini dapat dikatakan bahwa perubahan nilai fungsi x yaitu $\Delta x = x_2 - x_1$ akan mengakibatkan perubahan nilai fungsi $y = f(x)$ yaitu $\Delta f = \Delta y = y_2 - y_1 = f(x_2) - f(x_1)$. Ini berarti bahwa rata-rata perubahan nilai fungsi $y = f(x)$ terhadap nilai x (atau laju perubahan nilai fungsi $y = f(x)$ terhadap x dapat dituliskan:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Bentuk di atas merupakan rumus untuk menentukan kemiringan (gradien) suatu garis yang dinotasikan menjadi:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Karena $\Delta x = x_2 - x_1$ sehingga $x_2 = x_1 + \Delta x$, rumus diatas dapat dituliskan menjadi

$$m = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

Apabila suatu saat titik Q bergerak mendekati titik P dan pada saat titik P berimpit dengan titik Q (P = Q) maka perubahan atau pertambahan $\Delta x = x_2 - x_1$ akan mendekati nol. Dalam keadaan demikian dikatakan bahwa terjadi perubahan sesaat nilai fungsi $y = f(x)$ terhadap x pada $x = x_1$, dimana akan mendekati nol, sehingga kemiringan garis yang terjadi pada titik P = Q dapat dituliskan menjadi :

$$m' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

Kalau limit ini ada (mempunyai limit), fungsi $y = f(x)$ dikatakan diferensiabel pada $x = x_1$. Kemiringan m' adalah sebuah fungsi dari x yang sering disebut juga dinotasikan dengan $f'(x_1)$. Jika $\Delta x = h$ dan $\Delta x \to 0$ maka $h = 0$, sehingga turunan fungsi $y = f(x)$ didefinisikan dengan rumus:

$$f'(x_1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}$$

Catatan:

1. $f'(x_1)$ (dibaca: f aksen x_1 disebut turunan atau derevatif fungsi $y = f(x)$ pada $x = x_1$
2. Proses menentukan turunan dari fungsi disebut diferensiasi

Pengertian turunan fungsi $y = f(x)$ dapat ditentukan dengan rumus umum turunan berikut:

Apabila turunan fungsi $y = f(x)$ diferensiabel untuk tiap nilai x dalam daerah asal $D_f \in R$ maka $f'(x_1) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}$

Telah dijelaskan bahwa definisi turunan fungsi dinyatakan dengan $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x}$. Bentuk-bentuk $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ dan $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x}$ biasa dinotasikan dengan $\dfrac{dy}{dx}$ dan $\dfrac{df}{dx}$. Jadi $\dfrac{dy}{dx}$ dan $\dfrac{df}{dx}$ adalah notasi lain untuk turunan fungsi $y = f(x)$ dan disebut notasi turunan Leibniz.

2. Rumus-rumus turunan fungsi

a. Turunan fungsi konstan berbentuk $y = f(x) = \mathrm{k}$

Misalkan $f(x) = \mathrm{k}$ dengan k suatu konstanta bilangan real maka dapat ditunjukkan bahwa turunan fungsi konstan tersebut adalah $f(x) = 0$ atau $\dfrac{dy}{dx} = 0$

Bukti:

Diberikan fungsi konstan $f(x) = \mathrm{k}$ dan $f(x + h) = k$

Dengan menggunakan rumus turunan ditunjukkan:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{k - k}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{0}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} 0$$

$$= 0 \text{ (terbukti)}$$

b. Turunan fungsi identitas berbentuk $y = f(x) = x$

Misalkan diberikan fungsi identitas $f(x) = x$ maka dapat ditunjukkan bahwa turunan fungsi identitas tersebut adalah $f'(x) = 1$ atau $\frac{dy}{dx} = 1$

Bukti:

Diberikan fungsi identitas:

$f(x) = x$ dan $f\ (x+h) = x + h$

dengan menggunakan rumus umum turunan ditunjukkan:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x+h-x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = \lim_{h \to 0} 1 = 1 \text{ (terbukti)}$$

c. Turunan fungsi berbentuk $y = f(x) = ax^n$

Misalkan diberikan fungsi dengan persamaan $f(x) = ax^n$ dimana n adalah bilangan rasional dan a adalah konstanta bilangan real, maka ditunjukkkan bahwa turunan dari fungsi tersebut adalah $f'(x) = anx^{n-1}$ atau $\frac{dy}{dx} = anx^{n-1}$

Bukti:

Diberikan fungsi dengan persamaan $f(x) = ax^n$ *dan* $f(x + h) = a(x + h)^n$ dengan menggunakan penjabaran Binom Newton dapat diuraikan bahwa:

$$f(x + h) = a(x + h)^n$$

$$= a(x^n + nx^{x-1}h + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + ... + nxh^{n-1} + h^n)$$

Dengan menggunakan rumus umum turunan ditunjukkan:

$$f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{a(x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + ... + nxh^{n-1} + h^n) - ax^n}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{ah(nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h + ... + nxh^{n-2} + h^{n-1})^n}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} a(nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h + ... + nxh^{n-2} + h^{n-1})$$

$$= anx^{n-1}$$

d. Turunan fungsi berbentuk $y = f(x) = cu(x)$

Misalkan $y = f(x) = cu(x)$ dengan adalah konstanta bilangan real dan $u(x)$ adalah fungsi dari x yang mempunyai turunan $u'(x)$ maka dapat ditunjukkan bahwa fungsi turunan dari fungsi $f(x) = cu(x)$ adalah $f'(x) = c.u'(x)$ atau

$$\frac{dy}{dx} = c.\frac{du}{dx}$$

Bukti

Diberikan fungsi dengan persamaan: $f(x) = cu(x)$ dan $f(x+h) = u(x+h)$

dengan menggunakan rumus umum turunan ditunjukkan

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{cu(x+h) - cu(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} c\left\{\frac{u(x+h) - u(x)}{h}\right\}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h}$$

$$= cu'(x) \text{ (terbukti)}$$

e. Turunan fungsi berbentuk y = $f(x) = u(x) \pm v(x)$

Misalkan $u(x)$ dan $v(x)$ adalah fungsi dari x yang masing-masing memiliki turunan $u'(x)$ dan $v'(x)$. Bila $f(x) = u(x) \pm v(x)$ maka dapat ditunjukkan $f'(x)$ menggunakan rumus umum turunan sebagai berikut:

(i) $f(x) = u(x) + v(x)$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\{u(x+h) + v(x+h)\} - \{u(x) + v(x)\}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{u(x+h) + v(x+h) - u(x) - v(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\{u(x+h) - u(x)\} + \{v(x+h) - v(x)\}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{u(x+h)-u(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{v(x+h)-v(h)}{h}$$

$$= u'(x) + v'(x) \text{ ....}(1)$$

(ii) $f(x) = u(x) - v(x)$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\{u(x+h)-v(x+h)\}-\{u(x)-v(x)\}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{u(x+h)-v(x+h)-u(x)+v(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\{u(x+h)-u(x)\}-\{v(x+h)-v(x)\}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{u(x+h)-u(x)}{h} - \lim_{h\to 0} \frac{v(x+h)-v(h)}{h}$$

$$= u'(x) - v'(x) \text{ ....}(2)$$

Dari (1) dan (2), disimpulkan bahwa jika $f(x) = u(x) \pm v(x)$ dimana suatu fungsi $u(x)$ dan $v(x)$ yang memiliki turunan $u'(x)$ dan $v'(x)$ maka $f(x) = u'(x) \pm v'(x)$ atau $\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx}$

f. Turunan fungsi berbentuk $y = f(x) = u(x).v(x)$

Misalkan $u(x)$ dan $v(x)$ adalah fungsi dari x yang memiliki turunan $u'(x)$ dan $v'(x)$. Maka dapat ditunjukkan bahwa turunan dari fungsi $y = f(x) = u(x).v(x)$ adalah $f'(x) = u'(x).v(x) + u(x).v'(x)$ atau $\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} v(x) + u(x) \frac{dv}{dx}$

Bukti:

Diberikan fungsi dengan persamaan: $f(x) = u(x).v(x)$ dan $f(x+h) = u(x+h).v(x+h)$

Dengan menggunakan rumus umum turunan dapat ditunjukkan bahwa:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{u(x+h).v(x+h) - u(x).v(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{u(x+h).v(x+h) - u(x+h).v(x) + u(x+h).v(x) - u(x).v(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{[u(x+h).v(x+h) - u(x+h).v(x)] + [u(x+h).v(x) - u(x).v(x)]}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{[u(x+h).v(x+h) - u(x+h).v(x)]}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{[u(x+h).v(x) - u(x).v(x)]}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} u(x+h) . \lim_{h \to 0} \frac{v(x+h) - v(x)}{h} + \lim_{h \to 0} v(x). \lim_{h \to 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h}$$

$$= u(x).v'(x) + v(x).u'(x)$$

$$= u'(x).v(x) + u(x).v'(x) \text{ (terbukti)}$$

g. Turunan fungsi berbentuk $y = f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$

Misalkan $u(x)$ dan $v(x)$ adalah fungsi dari x yang memiliki turunan $u'(x)$ dan $v'(x)$. Bila hasil bagi fungsi $u(x)$ dan $v(x)$ dinyatakan dengan $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$, maka dapat ditunjukkan bahwa hasil turunannya adalah

$$f'(x) = \frac{u'(x).v(x) - u(x).v'(x)}{\{v(x)\}^2} \text{ atau } \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{du}{dx}.v(x) - u(x).\frac{dv}{dx}}{\{v(x)\}^2}$$

Bukti:

Hasil bagi fungsi $u(x)$ dan $v(x)$ dapat dinyatakan dengan $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ sehingga

$u(x) = f(x).v(x)$

Dengan menggunakan turunan hasil kali fungsi, maka hasil turunan $u(x) = f(x).v(x)$ adalah :

$$u'(x) = f'(x).v(x) + f(x).v'(x)$$

$$\Leftrightarrow \quad f'(x).v(x) = u'(x) - f(x).v'(x)$$

$$\Leftrightarrow \quad f'(x).v(x) = u'(x) - \frac{u(x)}{v(x)}.v'(x)$$

$$\Leftrightarrow \quad f'(x).v(x) = \frac{u'(x).v(x) - u(x).v'(x)}{v(x)}$$

$$\Leftrightarrow \quad f'(x) = \frac{u'(x).v(x) - u(x).v'(x)}{\{v(x)\}^2} \text{ (terbukti)}$$

h. Turunan fungsi berbentuk y = $f(x) = a\{u(x)\}^n$

Bila $u(x)$ merupakan fungsi dari x yang memiliki turunan $u'(x)$ dan n adalah bilangan rasional, maka dapat ditunjukkan bahwa turunan dari $f(x) = a\{u(x)\}^n$ adalah $f'(x) = an\{u(x)\}^{n-1}.u'(x)$ atau $\frac{dy}{dx} = an\{u(x)\}^{n-1}.\frac{du}{dx}$

Bukti:

Bila $y = a\{u(x)\}^n$ merupakan hasil komposisi dari fungsi $y = f(u) = au^n$ dan $u = u(x)$.

Dapat ditunjukkan $y = (f \circ g)(x) = f[g(x)] = f[u(x)] = a\{u(x)\}^n$. Dengan mengunakan bukti aturan rantai dalam menentukan turunan fungsi komposisi sebagai berikut. Andaikan $y = f(u)$ dan $u = g(x)$ maka $\Delta u = g(x + \Delta x) - g(x)$ dan $\Delta y = f(u + \Delta u) - f(u)$

Menggunakan pengertian notasi Leibniz ditunjukkan

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} . \frac{\Delta u}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} . \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

karena u deferensial di x maka u kontinu di x sehingga jika $\Delta x \to 0$ maka $\Delta u \to 0$.

Jadi $\dfrac{dy}{dx} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta u} . \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta u}{\Delta x} = \dfrac{dy}{du} \dfrac{du}{dx}$

Dari hasil komposisi $f(u) = au^n$ dan $u = u(x)$ diperoleh bahwa $y = au^n$ turunan terhadap u dinyatakan $\dfrac{dy}{du} = anu^{n-1}$

$u = u(x)$ turunan terhadap x dinyatakan $\dfrac{du}{dx} = u'(x)$

dipihak lain $y = f(u)$ diferensiabel di x sehingga $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \dfrac{du}{dx} = anu^{n-1} . u'(x)$ (terbukti).

Jadi jika $y = a\{u(x)\}^n$ diturunkan, hasilnya adalah $y' = an\{u(x)\}^{n-1} . u'(x)$ atau $\dfrac{dy}{dx} = an\{u(x)\}^{n-1} . \dfrac{du}{dx}$.

i. Turunan fungsi sinus

Misalkan $y = f(x) = \sin x$, maka ditentukan

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2\cos\frac{1}{2}(x+h+x).\sin\frac{1}{2}(x+h-x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2\cos\frac{1}{2}(2x+h).\sin\frac{1}{2}h}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} 2\cos(x+\frac{1}{2}h).\lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{1}{2}h}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \cos(x+\frac{1}{2}h).\lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{1}{2}h}{\frac{1}{2}h}$$

$$= \cos(x+\frac{1}{2}(0)).1 = \cos x$$

Jadi, jika $y = f(x) = \sin x$, maka $y' = f'(x) = \cos x$

j. Turunan fungsi kosinus

Misalkan $y = f(x) = \cos x$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-2\sin\frac{1}{2}(x+h+x).\sin\frac{1}{2}(x+h-x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-2\sin\frac{1}{2}(2x+h).\sin\frac{1}{2}h}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} -2\sin(x+\frac{1}{2}h)\,.\lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{1}{2}h}{h}$$

$$= - \lim_{h\to 0} \sin(x+\frac{1}{2}h)\,.\lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{1}{2}h}{\frac{1}{2}h}$$

$$= -\sin(x+\frac{1}{2}(0)).1 = -\sin x$$

Jadi, jika $y = f(x) = \cos x$, maka $y' = f'(x) = -\sin x$

k. Turunan fungsi tangen

Misalkan $y = f(x) = \tan x$. Diketahui bahwa $\tan x$ memiliki relasi dengan $\sin x$ dan $\cos x$ yang dinyatakan dengan bentuk $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$. Maka untuk menunjukkan hasil turunan fungsi tangen dapat digunakan sifat turunan hasil bagi dua fungsi $u(x)$ dan $v(x)$. Dengan pemisalan sebagai berikut:

$u(x) = \sin x$ maka $u'(x) = \cos x$

$v(x) = \cos x$ maka $v'(x) = -\sin x$

ditunjukkan bahwa:

$$f'(x) = \frac{u'(x).v(x) - u(x).v'(x)}{\{v(x)\}^2}$$

$$= \frac{\cos x.\cos x - \sin x.(-\sin x)}{\{\cos x\}^2}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\{\cos x\}^2}$$

$$= \frac{1}{\{\cos x\}^2}$$

$$= \left(\frac{1}{\cos x}\right)^2$$

$$= (\sec x)^2$$

$$= \sec^2 x$$

Dengan cara yang sama seperti pada no i-k, dapat ditunjukkan bahwa turunan dari fungsi trigonometri yang lain sebagai berikut:

1. Jika $y = f(x)$ = cosec x maka $y' = f'(x)$ = - cosec x . cot x
2. Jika $y = f(x)$ = sec x maka $y' = f'(x)$ = sec x . tan x
3. Jika $y = f(x)$ = cot x maka $y' = f'(x)$ = - cosec^2 x

3. Persamaan garis singgung kurva $y = f(x)$ di titik $P(x_1, y_1)$

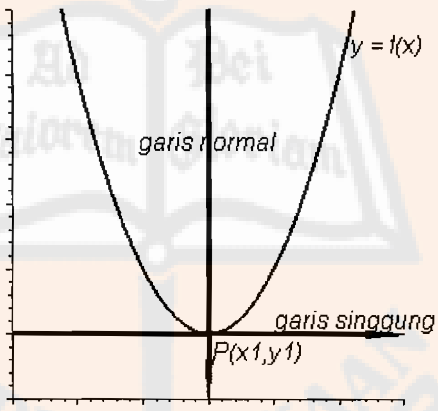
Ingat kembali persamaan garis yang melalui titik $P(x_1, y_1)$ dengan gradien m yang dirumuskan dengan $y - y_1 = m(x - x_1)$. Dengan persamaan tersebut juga ditentukan persamaan garis singgung pada kurva $y = f(x)$ yang melalui titik singgung $P(x_1, y_1)$ dengan gradien garis singgung m_{gs} dapat pula dirumuskan persamaannya yaitu $y - y_1 = m_{gs}(x - x_1)$.

Beberapa sifat yang perlu diperhatikan dalam pembahasan persamaan garis singgung seperti syarat dua buah garis saling sejajar, dua buah garis saling tegak lurus, dan garis normal.

a. Garis $g_1 = y = m_1 x + n_1$ dan garis $g_2 = y = m_2 x + n_2$ dikatakan saling sejajar atau $g_1 // g_2$ apabila $m_1 = m_2$.

b. Garis $g_1 = y = m_1 x + n_1$ dan garis $g_2 = y = m_2 x + n_2$ dikatakan saling tegak lurus atau $g_1 \perp g_2$ apabila $m_1 . m_2 = -1$.

c. Garis yang melalui titik $P(x_1, y_1)$ dan tegak lurus dengan garis singgung kurva $y = f(x)$ di titik tersebut dinamakan garis normal.



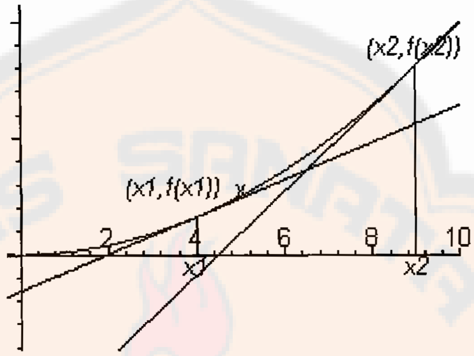
Gambar 6. Persamaan garis singgung kurva $y = f(x)$ di titik $P(x_1, y_1)$

Karena garis singgung kurva $y = f(x)$ memiliki persamaan $y - y_1 = m_{gs}(x - x_1)$, kedudukan garis singgung dan garis normal saling tegak lurus maka persamaan garis normalnya dapat ditentukan dengan rumus : $y - y_1 = \frac{1}{m_{gs}}(x - x_1)$

4. Fungsi Naik dan Fungsi Turun

a. Pengertian dan syarat fungsi naik.

Perhatikan grafik fungsi $y = f(x)$ yang digambarkan pada bidang Cartesius berikut



Gambar 7. Grafik fungsi naik

Pada gambar 7, tampak bahwa $x_1 < x_2$ sehingga $y_1 < y_2$ atau $f(x_1) < f(x_2)$. Fungsi f dikatakan fungsi naik dalam interval I, jika setiap x_1 dan x_2 dalam I dan $x_1 < x_2$ maka berlaku hubungan $f(x_1) < f(x_2)$.

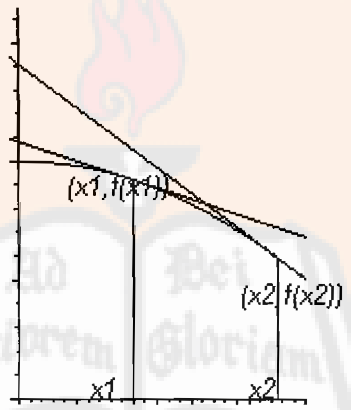
Turunan dari $y = f(x)$ yaitu $y' = f'(x)$ dapat ditafsirkan sebagai gradien garis singgung kurva $y = f(x)$ untuk sembarang titik $(x, f(x))$ pada kurva. Dari gambar 6, jika pada sembarang titik antara P dan Q dibuat garis singgung-garis singgung, maka setiap garis singgung yang dibuat selalu memiliki kemiringan (gradien) positif. Jadi, fungsi $y = f(x)$ merupakan fungsi naik dalam interval I tersebut jika gradien garis singgungnya selalu bernilai positif atau $f'(x) > 0$. Dari hubungan ini diperoleh teorema berikut:

Teorema:

Misalkan fungsi f kontinu dalam interval dan diferensiabel di setiap titik dalam interval tersebut. Jika $f'(x) > 0$ untuk setiap x dalam interval I, maka fungsi f naik dalam interval I.

b. Pengertian dan syarat fungsi turun

Perhatikan grafik fungsi $y = f(x)$ yang dugambarkan pada bidang Cartesius sebagai berikut



Gambar 8. Grafik fungsi turun

Pada gambar 8, tampak bahwa $x_1 < x_2$ sehingga $y_1 > y_2$ atau $f(x_1) > f(x_2)$. Fungsi f dikatakan fungsi turun dalam interval I jika setiap x_1 dan x_2 dalam I dan $x_1 < x_2$ maka berlaku hubungan $f(x_1) > f(x_2)$.

Turunan dari fungsi $y = f(x)$ yaitu $y' = f'(x)$ dapat ditafsirkan sebagai gradien garis singgung kurva $y = f(x)$ untuk sembarang titik $(x, f(x))$ pada kurva. Dari gambar 6, jika pada sembarang titik antara P dan Q dibuat garis singgung-garis singgung, maka setiap garis singgung yang dibuat selalu memiliki kemiringan (gradien) negatif. Jadi, fungsi $y = f(x)$ merupakan fungsi turun dalam interval I tersebut jika gradien garis singgungnya selalu bernilai negatif atau $f'(x) < 0$. Dari hubungan ini diperoleh teorema berikut:

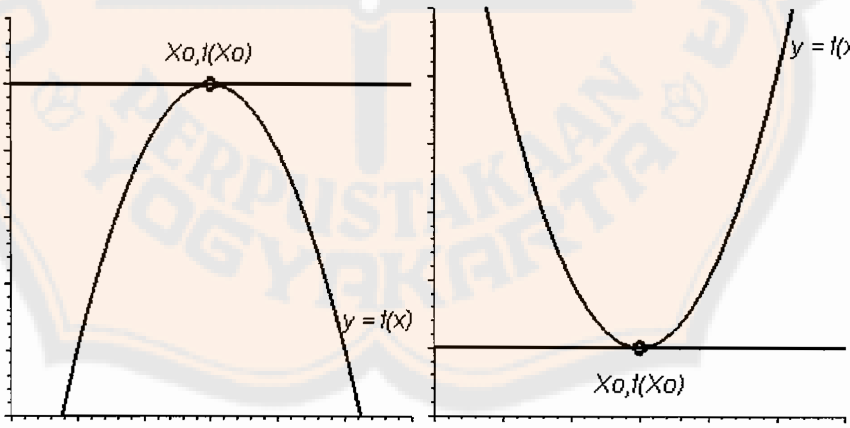
Teorema:

Misalkan fungsi f kontinu dalam interval dan diferensiabel di setiap titik dalam interval tersebut. Jika $f'(x) < 0$ untuk setiap x dalam interval I, maka fungsi f turun dalam interval I.

5. Nilai Stasioner atau Nilai Ekstrem Relatif.

a. Pengertian nilai stasioner atau nilai eksterm relatif.

Jika fungsi f dikatakan mempunyai nilai stasioner atau nilai ekstrem relatif di x_0 jika mempunyai nilai maksimum relatif atau nilai minimum relatif di x_0. Hal ini ditunjukkan dalam gambar berikut:



Gambar 9. Nilai stasioner atau nilai eksterm relatif

Nilai stasioner atau nilai ekstrem relatif dapat dilihat sebagai titik-titik transisi akibat perubahan grafik fungsi naik menjadi grafik fungsi turun atau sebaliknya. Pada gambar 9 tampak bahwa nilai stasioner ini akan terjadi pada titik-titik tempat grafik fungsi f mempunyai garis singgung horizontal di mana pada titik tersebut fungsi f tidak dideferensiabel atau $f'(x_0) = 0$.

Teorema :

Jika f mempunyai nilai stasioner atau nilai ekstrem relatif di $x = x_0$ maka $f'(x_0) = 0$ atau f tidak diferensiabel.

Dari teorema tersebut dapat ditentukan aturan sebagai berikut:

a. Nilai $x = x_0$ yang menyebabkan fungsi f mencapai nilai stasioner atau nilai ekstrem relatif dapat ditentukan dengan syarat $f'(x_0) = 0$.

b. Titik $(x_0, f(x_0))$ disebut titik stasioner atau titik ekstrem relatif. $f(x_0)$ adalah nilai stasioner atau nilai ekstrem relatif.

b. Jenis-jenis nilai stasioner atau nilai ekstrem relatif.

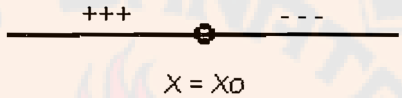
Dari penjelasan diketahui bahwa nilai stasioner atau nilai ekstrem relatif akan terjadi pada titik-titik kritisnya. Untuk menentukan jenis-jenis nilai stasioner tersebut dapat diselidiki dengan mengamati perubahan tanda $f'(x)$ di sekitar titik kritisnya, yaitu mengamati naik dan turunnya kurva di dekat $x = x_0$. Hasil pengamatan ini dinyatakan secara jelas teorema berikut:

Teorema:

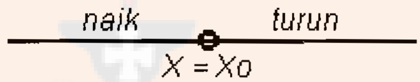
Andaikan fungsi f kontinu di titik kritis $x = x_0$.

a. Jika $f'(x) > 0$ pada interval terbuka $x < x_0$ dan $f'(x) < 0$ pada interval terbuka $x > x_0$ maka f mempunyai nilai balik maksimum (nilai maksimum relatif) di $x = x_0$ yaitu $f(x_0)$. Hal ini dapat digambarkan sebagai berikut:

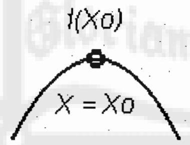
Garis tanda f':



Arti bagi f :



grafik f :

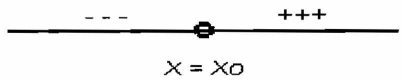


Gambar 10. Gambar nilai balik maksimum

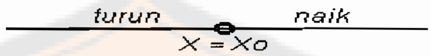
Jadi dapat dikatakan bahwa nilai balik maksimum (nilai maksimum relatif) dicapai apabila terjadi perubahan tanda f' dari positif menjadi negatif melewati x nol.

b. Jika $f'(x) < 0$ pada interval terbuka $x > x_0$ dan $f'(x) > 0$ pada interval terbuka $x < x_0$ maka f mempunyai nilai balik minimum (nilai minimum relatif) di $x = x_0$ yaitu $f(x_0)$. Hal ini dapat digambarkan sebagai berikut:

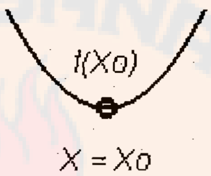
Garis tanda f':



arti bagi f:



grafik f :

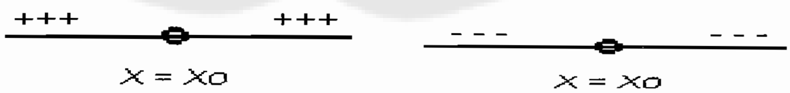


Gambar 11. Gambar nilai balik minimum

Jadi dapat dikatakan bahwa nilai balik minimum (nilai minimum relatif) dicapai apabila terjadi perubahan tanda f' dari negatif menjadi positif melewati x nol.

c. Jika $f'(x)$ bertanda sama, baik $f'(x) > 0$ maupun $f'(x) < 0$ pada interval terbuka $x < x_0$ dan $x > x_0$ maka f tidak mempunyai nilai stasioner (nilai ekstrem relatif) di $x = x_0$. Jika pada titik tersebut f' tidak mengalami perubahan tanda ketika melewati x nol, maka f mempunyai nilai belok horizontal di $x = x_0$ yaitu $f(x_0)$. Hal ini dapat digambarkan sebagai berikut:

Garis tanda f':



arti bagi f :

grafik f :

Gambar 12. Gambar nilai belok horizontal

Jadi dapat dikatakan bahwa nilai belok horizontal dicapai apabila tidak terjadi perubahan tanda f' ketika melewati x nol.

6. Menggambar Sketsa Grafik Fungsi

Apabila diberikan sebuah grafik fungsi dengan persamaan $y = f(x)$ maka sketsa grafiknya dapat digambarkan dengan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Menentukan koordinat titik-titik potong grafik fungsi dengan sumbu koordinat.
2. Menentukan interval fungsi naik dan fungsi turun.
3. Menentukan titik-titik stasioner dan jenisnya.
4. Menentukan nilai y untuk nilai x besar positif dan nilai x besar negatif
5. Menentukan beberapa titik yang diperlukan untuk memperhalus sketsa grafik fungsi.
6. Membuat sketsa grafik fungsi dalam bidang Cartesius dengan mempertimbangkan langkah-langkah di atas.

7. Pengertian turunan kedua

Telah dijelaskan cara menentukan suatu turunan suatu fungsi, yaitu jika diberikan fungsi dengan rumus $y = f(x)$ maka dapat didefinisikan:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Bentuk penulisan turunan dari fungsi $y = f(x)$ yang sudah biasa digunakan yaitu y', $f'(x)$, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{df}{dx}$ disebut turunan pertama dari fungsi $y = f(x)$. Karena hasil turunan fungsi $y = f(x)$ masih merupakan fungsi dari x, maka selanjutnya dapat ditentukan turunan dari fungsi turunan pertamanya yang dinotasikan dengan y'', $f''(x)$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^2f}{dx^2}$ dan disebut turunan kedua dari fungsi $y = f(x)$.

9. Kecepatan dan percepatan

a. Kecepatan.

Sebuah benda bergerak dari suatu tempat ke tempat lain dan menempuh jarak *s* dalam waktu *t*, maka: kecepatan rata-ratanya = $\frac{Perubahan\ jarak}{Perubahan\ waktu} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$

Kecepatan (v) pada saat t didefinsikan sebagai;

$$v = \frac{ds}{dt} = \lim_{t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

v merupakan turunan pertama dari fungsi jarak s.

b. Percepatan

Jika kecepatan sebuah benda mengalami perubahan, maka benda tersebut mempunyai suatu percepatan yang dinyatakan dengan:

$$\text{Percepatan} = \frac{\textit{Perubahan kecepatan}}{\textit{Perubahan waktu}} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Percepatan (a) pada saat t didefinsikan sebagai;

$$a = \frac{dv}{dt} = \lim_{t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad \text{atau}$$

$$a = \frac{d^2 s}{dt^2}$$

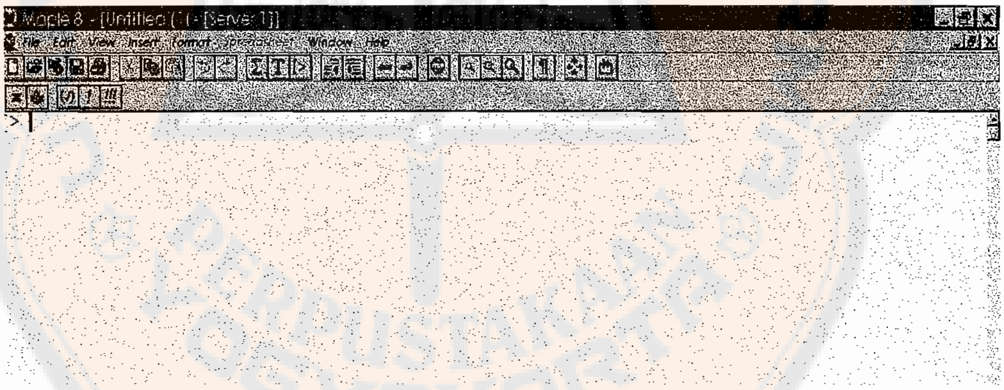
a merupakan turunan pertama dari fungsi kecepatan v, atau a merupakan turunan kedua dari fungsi jarak s.

BAB IV

EKSPLORASI *Maple* DALAM PEMBELAJARAN MATEMATIKA PADA POKOK BAHASAN KALKULUS KELAS XI ILMU ALAM

A. Fasilitas pada Program *Maple* yang mendukung Pokok Bahasan Kalkulus kelas XI Ilmu Alam

Kemampuan yang dimiliki oleh program ini berwujud fasilitas-fasilitas berupa jendela-jendela kerja. Jendela-jendela kerja yang dimaksud adalah jendela yang digunakan oleh *user* (pemakai) untuk memberi perintah pada program. Program ini dikembangkan mencakup tentang penyelesaian matematika untuk mendukung berbagai topik operasi matematika meliputi analisis numerik, aljabar simbolik, kalkulus, persamaan differensial, aljabar linear dan grafik.



Gambar 13. Tampilan *worksheet* pada *maple*

Tanda [> adalah *prompt maple*. Pada saat *worksheet* aktif, kursor seharusnya tampak di sebelah kanan *prompt*. Prompt dan kursor menunjukkan bahwa *maple* menunggu untuk perintah yang akan dijalankan.

Worksheet menyediakan jajaran perintah (menu) untuk *maple*. Ada 8 menu dalam *worksheet*, yaitu *File, Edit, View, Insert, Format, Spreadsheet, Window, dan Help.*

1. *File.*

Menu *file* memuat item-item tentang *file* pada *worksheet*, seperti membuka *file*, membuka suatu *worksheet* yang sudah tersimpan, menyimpan *worksheet*, mencetak *worksheet* yang aktif, dan lain-lain. Keterangan lebih lengkap tentang menu *file* dapat dilihat dalam tabel berikut:

Submenu	Keterangan
New	Membuat *worksheet* baru
Open	Membuka *worksheet* yang udah tersimpan
Open URL	Membuka suatu halaman *web* dari suatu *server web* di dalam suatu *browser*, atau membuka suatu *worksheet* dari suatu *server web* di dalam *maple*.
Save	Menyimpan *worksheet* yang aktif
Save as	Menyimpan suatu *worksheet* ada dalam suatu penempatan berbeda, dengan suatu nama berbeda, atau sebagai suatu jenis *file* berbeda, atau menyimpan] suatu *worksheet* baru.
Export as	Memindahkan suatu *worksheet* ke dalam format lain untuk dapat dilihat di dalam suatu *Web browser* atau di dalam aplikasi lain.
Send	Mengirimkan suatu *worksheet* yang sekarang sebagai suatu pemasangan email
Close	Menutup suatu *worksheet*
Print	Cetak *worksheet* yang aktif
Print preview	Memperlihatkan *worksheet* ketika akan dicetak.
Print setup	Format Halaman yang disediakan untuk mencetak *worksheet* yang aktif.
Preferences...	Mengatur format tampilan, yaitu *General, I/O Display, Plotting, Numerics, dan Spell.*
Exit	Keluar dari program *maple*

Tabel 3. Tabel Submenu *File* pada *worksheet*

2. *Edit.*

Menu *Edit* memuat submenu yang digunakan untuk megedit teks yang ada di dalam *worksheet*. Menu *edit* berisi:

Submenu	**Keterangan**
Undo	Membatalkan pekerjaan yang baru saja dilakukan
Redo	Mengulangi kembali pekerjaan yang baru saja dilakukan.
Cut	Memindahkan teks yang ada dalam *worksheet* dan menyimpannya ke dalam *Clipboard*.
Copy	Mengkopi teks yang ada di dalam worksheet atau dan meletakkan dalam *clipboard*.
Copy as maple text	Mengkopi masukan, keluaran, dan teks di dalam *worksheet maple* untuk mempertahankan struktur penempatan yang diletakkan.
Paste	Menulis kembali teks yang ada di dalam *clipboard* ke dalam *worksheet*.
Paste maple text	Untuk mempertahankan struktur masukan dan teks yang telah dikopi *as maple text*, menulis kembali teks ke dalam *worksheet*.
Delete paragraph	Menghapus variabel pada *worksheet*.
Select all	Milih semua *worksheet* yang aktif.
Find	Mencari, memilih, dan menggantikan teks ke dalam *worksheet* yang aktip.
Spell Check	Memeriksa semua *worksheet* daerah teks.
Hyperlinks	Mengedit target untuk *hyperlinks* di dalam suatu *worksheet*.
Object	Menggerakkan obyek yang dipilih dengan menerapkan salah satu dari pilihan yang didaftarkan.
Unit Converter	Melaksanakan Konversi Unit
Complete command	Mencoba untuk melengkapi perintah
Entry Mode	Memasukkan perintah antara *nonexecutable Notasi Standard Math* dan dalam teks.
Split or join	Memisahkan atau menggabungkan bagian *worksheet*
Execute	Melaksanakan suatu pemilihan, suatu kelompok *Execute*, atau suatu keseluruhan *worksheet* pada suatu waktu.
Remove Output	Memindahkan keluaran *maple* dari kelompok *execution* yang dipilih atau dari keseluruhan *worksheet*.

Tabel 4. Submenu *Edit* pada *worksheet*

3. *View.*

Menu *View* memuat submenu yang digunakan untuk mengatur tampilan pada *worksheet*. Keterangan lebih lengkap tentang menu *view* dapat dilihat dalam tabel berikut:

Submenu	Keterangan
Toolbar	Tombol untuk melakukan perintah umum. Dapat ditampilkan atau tidak ditampilkan (disembunyikan).
Context Bar	Tombol untuk melakukan perintah umum. Tombol yang tersedia berubah ketika kursor penempatan di dalam *worksheet* berubah. Dapat ditampilkan atau tidak ditampilkan (disembunyikan).
Status Bar	Berada pada dasar *maple*. Menampilkan pesan diagnostik, dan informasi sistem. dapat ditampilkan atau tidak ditampilkan (disembunyikan).
Palettes	Kumpulan tombol yang mewakili lambang sudah dikenal, *expression, operator, Matric*, atau *Vector*. Dengan meng-klik pada tombol, dapat membuat atau mengedit ungkapan matematika tanpa harus mengingat sintaksis perintah *maple*.
Zoom Factor	Membuat tampilan *worksheet* yang lebih besar atau lebih kecil
Bookmarks	Menandai suatu penempatan di dalam suatu *worksheet* aktip.
Back	Kembali ke *hyperlink* yang telah dibuka sebelumnya
Forward	Bergerak maju ke *hyperlink* yang telah dibuka.
Hide Content	Menyembunyikan semua unsur-unsur *worksheet* sedemikian sehingga mereka tidak pada *worksheet.* Tidak menghapus, tetapi tidak menampilkan unsur-unsur pada *worksheet* tersebut.
Show Invisible Character	penanda paragraf atau spasi
Show Section Ranges	Menampilkan keluaran dan yang dawai-dawai teks nampak pada setiap bagian
Show Group Ranges	Menampilkan atau menyembunyikan tanda-kurung yang besar yang nampak *worksheet* di sebelah kiri
Show Object Type	Menunjukkan suatu obyek yang dimasukkan /disisipkan ke *worksheet*
Expand All Sections	Memperluas bagian di dalam suatu *worksheet* atau suatu halaman help untuk memampilkan indeks.
Collapse All Sections	Memperkecil bagian di dalam suatu *worksheet* atau suatu halaman help untuk menyembunyikan indeks, dan membuat tampilan halaman itu lebih pendek.

Tabel 5. Submenu *View* pada *worksheet*

4. *Insert.*

Menu *Insert* memuat submenu yang digunakan untuk menyisipkan perintah pada *worksheet*. Keterangan lebih lengkap tentang menu *Insert* dapat dilihat dalam tabel berikut:

Submenu	Keterangan
Text	Menyisipkan text
Standard math	Menyisipkan rumus matematika
Maple input	Membuat *input maple*
Standard math input	Membuat *input* rumus matematika
Execution group	Menyisipkan *prompt* di atas atau di bawah kursor.
Plot	Membuat gambar, dapat berupa dimensi 2 maupun dimensi 3
Spreadsheet	Membuat tabel
Paragraph	Membuat paragraph di suatu *prompt*
Section	Membuat *section*
Subsection	Membuat *subsection*
Hyperlink	Membuat *hyperlink*
Object	Menyisipkan objek ke *worksheet*
Page break	Memisahkan halaman

Tabel 6. Submenu *Insert* pada *worksheet*

5. *Format.*

Menu *Format* memuat submenu yang digunakan untuk mengatur tampilan teks, perintah atau rumus matematika pada *worksheet*. Keterangan lebih lengkap tentang menu *format* dapat dilihat dalam tabel berikut:

Sub menu	Keterangan
Styles	Memilih gaya tampilan *worksheet*
Page numbers	Membuat nomor halaman
Italic	Membuat huruf berbentuk *italic* atau huruf miring
Bold	Membuat huruf menjadi tebal
Underline	Membuat huruf bergaris bawah
Left justify	Paragraf rata kanan
Center	Paragraf berada di tengah
Right justify	Paragraf rata kiri
Paragraph	Mengatur gaya paragraf
Character	Mengatur karakter
Indent	Membuat tekukan
Outdent	Mengembalikan tekukan

Tabel 7. Submenu *Format* pada *worksheet*

6. *Spreadsheet.*

Menu *Spreadsheet* memuat submenu yang digunakan untuk mengatur tampilan tabel pada *worksheet*. Keterangan lebih lengkap tentang menu *Spreadsheet* dapat dilihat dalam tabel berikut:

Submenu	Keterangan
Evaluate selection	Mengevaluasi pemilihan
Evaluate spreadsheet	Mengevaluasi tabel
Row	Mengatur baris
Column	Mengatur kolom
Fill	Mengatur isi tabel
Import data	Mengimport data
Export data	Mengekpor data
Properties	Melihat yang dimiliki oleh table
Show border	Memperlihatkan batasan
Resize to grid	Ukuran table

Tabel 8. Submenu *Spreadsheet* pada *worksheet*

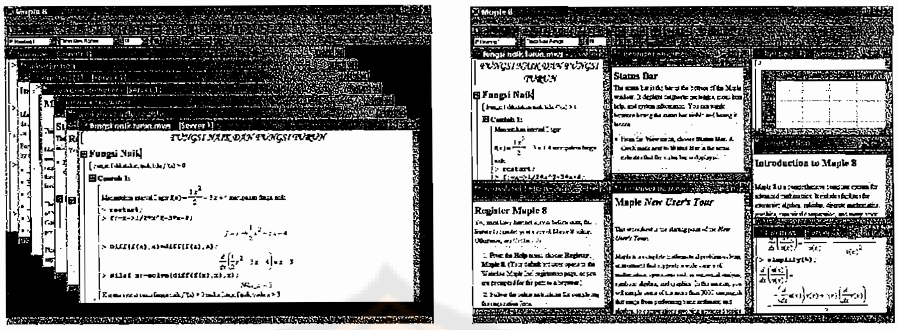
7. *Window.*

Menu *Window* memuat submenu yang digunakan untuk mengatur tampilan pada *worksheet*. Keterangan lebih lengkap tentang menu *Window* dapat dilihat dalam tabel berikut:

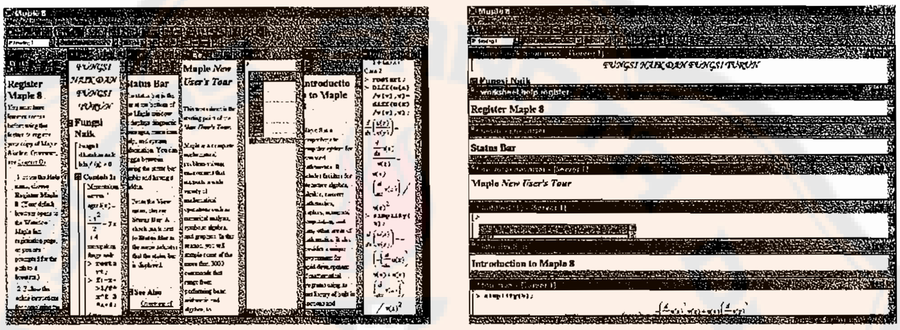
Submenu	Keterangan
Cascade	Menampilkan *worksheet* seperti air terjun
Tile	Menampilkan *worksheet* seperti ubin
Horizontal	Menampilkan *worksheet* secara horizontal
Vertical	Menampilkan *worksheet* secara vertikal
Arrange icon	Menyusun icon
Close all	Menutup semua *worksheet*
Close all help	Menutup semua *worksheet help*

Tabel 9. Submenu *Window* pada *worksheet*

Berikut ini merupakan tampilan-tampilan pada *window:*



Gambar 14. Tampilan *cascade* dan *tile*



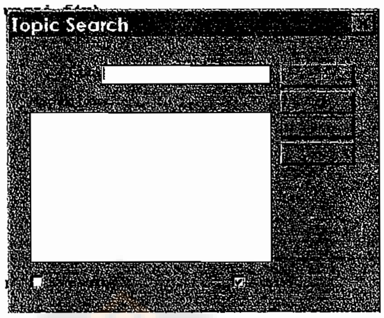
Gambar 15.Tampilan *horizontal* dan vertikal

8. *Help*.

Menu *Help* memuat submenu yang digunakan untuk membantu kita dalam menggunakan *maple*. Keterangan lebih lengkap tentang menu *Help* dapat dilihat dalam tabel berikut:

Submenu	Keterangan
Introduction	Pendahuluan *maple*
Help on context	memeriksa secara menyeluruh sistem *help* untuk topik yang mengacu pada suatu kata
New user's tour	Petunjuk untuk pemakai *maple* baru.
What's new	menguraikan petunjuk untuk pengguna baru dan memodifikasi corak.
Using help	Cara menggunakan *help*
Glossary	Kamus untuk perintah *maple*
Topic search	Teks bantuan untuk mencari topik maple berdasar pada suatu kata kunci yang kita tetapkan.
Full text searh	Teks penuh untuk mencari topik sistem *help maple* yang berisi kata-kata ditetapkan.
History	Dapat kembali halaman *help* manapun dengan penggunaan *history*.

Tabel 10. Submenu *Help* pada *worksheet*

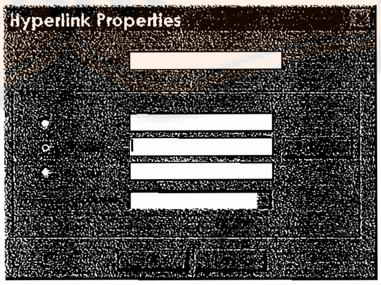


Gambar 16. Tampilan jendela *topic search* pada menu *help*

B. Penggunaan Program *Maple* untuk Menyelesaikan soal-soal pada Pokok Bahasan Kalkulus kelas XI Ilmu Alam.

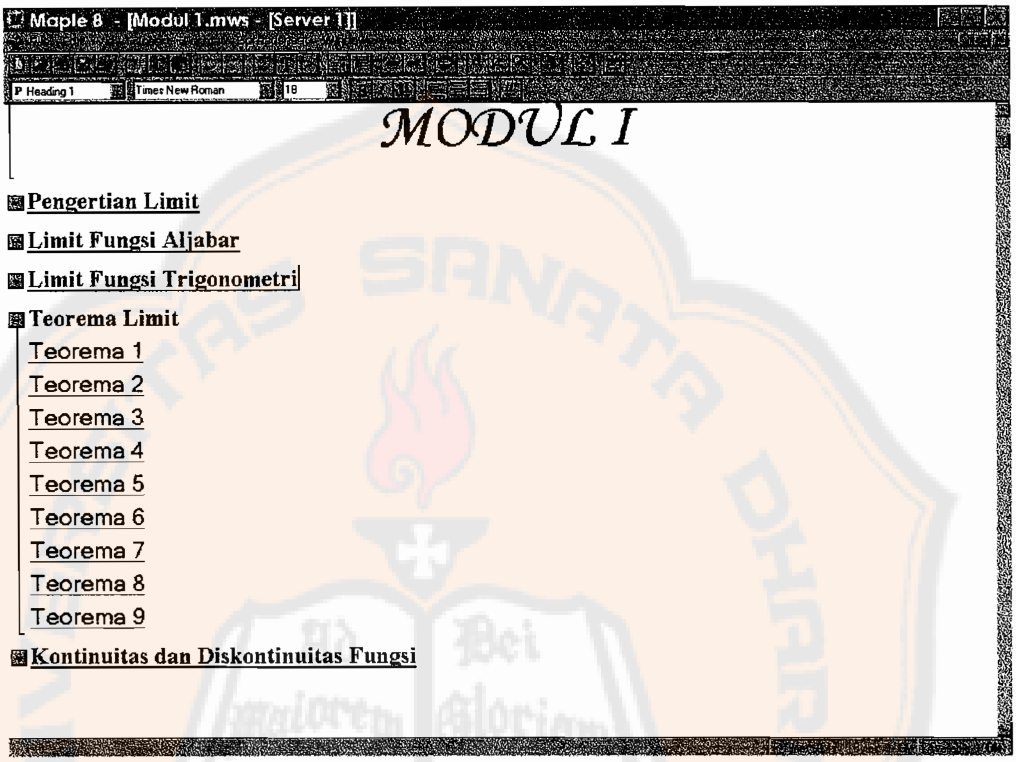
Dalam menggunakan *maple* ini penulis selalu menuliskan *restart* sebelum memulai atau menuliskan suatu perintah. Jika tidak menggunakan perintah restart, maka perintah yang dijalankan tidak akan menghasilkan hasil yang tepat sesuai perintahnya. Dalam mengakhiri suatu perintah kita menggunakan tanda (;). Tanda (;) dapat diganti (:) tetapi output pada perintah yang ada di depannya tidak tampak. Perintah simplify (%) digunakan untuk mempersingkat jawaban yang panjang.

Penulis menggunakan fasilitas *hyperlink* dalam pembuatan modul ini. Adapun cara mengerjakannya klik *insert/hyperlink* dan akan muncul jendela perintah, kemudian kita isi sesuai dengan keinginan kita.



Gambar 17.Tampilan jendela perintah *hyperlink*

Fasilitas *hyperlink* tersebut kemudian oleh penulis dijadikan sebagai menu utama. Kita tinggal klik sesuai dengan perintah yang ada di modul, atau sesuai dengan keinginan kita.



Gambar 18. Tampilan utama modul 1

Setelah menggunakan modul tesebut sebaiknya siswa tidak menyimpan datanya pada nama file yang sama, agar teman yang lain dapat menggunakan modul tersebut dengan baik.

1. Pada pokok bahasan limit.

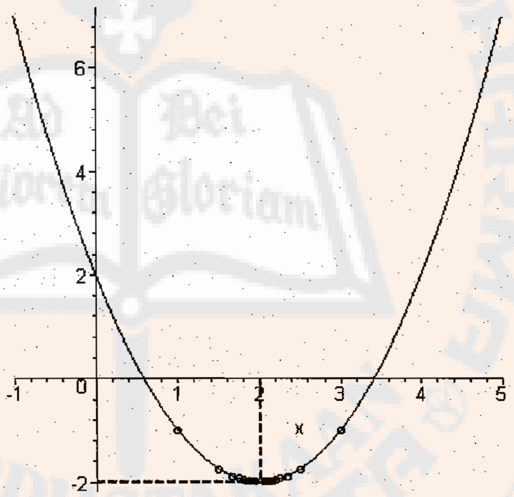
a. Pengertian limit.

Untuk menjelaskan pengertian limit, program *maple* mempunyai fasilitas untuk memperlihatkan bagaimana suatu limit itu bisa ditentukan.

Dapat diperlihatkan dengan menggunakan kurva dengan menggunakan perintah sebagai berikut:

```
> restart; with(plots):
f := x -> x^2-4*x+2; a := 2: left := -1: right
:=5:
display( plot( f(x), x = left..right, color =
green),
plot( {[[a,0],[a,f(a)]],[[0,f(a)],[a,f(a)]] }, x =
left..right,
linestyle=3,color = gold, thickness = 2),
plot([[ a - 1/n, f(a - 1/n)] $n=1..20], x =
left..right,
style=point, symbol=circle, color = red),
plot( [[ a+1/n, f(a + 1/n)] $n=1..20], x =
left..right,
style=point, symbol=circle, color = blue));
Warning, the name changecoords has been redefined
```

$$f := x \rightarrow x^2 - 4\,x + 2$$



Gambar 19. Tampilan *output* pengertian limit

Dengan menggunakan perintah ini kita dapat melihat grafik $f(x)$, menentukan limit fungsi mendekati a, dan bagaimana limit tersebut didekati dari kiri maupun dari kanan, tetapi $f(x)$ harus didefinisikan terlebih dahulu. Kita juga dapat mengganti $f(x)$, dan nilai a dengan fungsi dan a yang lain. Dan dalam menentukan *left* dan *right*, harus memenuhi ketentuan a dalam interval *left* dan *right* (*left* < a < *right*).

Agar lebih jelas untuk memahami limit kiri dan limit kanan, dalam *maple* kita cukup menuliskan perintah sebagai berikut:

```
> restart;
> f:=x->(x^2+4);
```

$$f := x \to x^2 + 4$$

```
> a:=3;
```

$$a := 3$$

```
> Limit(f(x),x=a,left)=limit(f(x),x=a,left);# Limit
kiri f(x)
> Limit(f(x),x=a,right)=limit(f(x),x=a,right);#
Limit kanan f(x)
```

$$\lim_{x \to 3-} x^2 + 4 = 13$$

$$\lim_{x \to 3+} x^2 + 4 = 13$$

```
> Limit(f(x),x = a)=limit(f(x),x = a);
```

$$\lim_{x \to 3} x^2 + 4 = 13$$

Untuk menentukan limit, kita perlu mendefinisikan $f(x)$ dan mendefinisikan a. dengan menggunakan perintah seperti di atas kita langsung dapat melihat hasil dari limit kiri, limit kanan, dan limit x mendekati a.

b. Menentukan limit fungsi aljabar di satu titik dan di tak hingga.

Sebelumnya siswa diharapkan sudah memahami fungsi aljabar dan dapat menerapkannya dalam mengerjakan soal.

1. Menentukan limit fungsi aljabar di satu titik.

   Dengan menggunakan fasilitas *maple*, kita bisa membandingkan antara hasil substitusi $x = a$ ke dalam fungsi $f(x)$, dengan hasil limit x mendekati a. Sehingga dengan hal tersebut siswa dapat menyimpulkan sendiri bagaimana cara menentukan limit fungsi aljabar di satu titik. Adapun perintah yang dituliskan sebagai berikut:

```
> restart;
> f:=x-> x^2+5*x+2;# fungsi f(x)
> a:=1;# nilai a
> subs(x=a,f(x));
> Limit(f(x),x=a)=limit(f(x),x=a);
```

$$\lim_{x \to 1} x^2 + 5x + 2 = 8$$

Dalam perintah tersebut, siswa juga dapat melihat grafik fungsi $f(x)$. Karena yang dicari limit $f(x)$ untuk x mendekati a, maka siswa hanya memasukkan nilai $f(x)$ dan nilai a, dan langsung dapat memperoleh hasilnya.

2. Menentukan limit fungsi aljabar di tak hingga titik.

Dalam menentukan limit fungsi aljabar dengan menggunakan *maple*, kita dapat membagi dengan pangkat tertinggi. Dalam hal ini siswa mencari $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$. Dan siswa harus mendefinsikan $f(x)$ dan $g(x)$ terlebih dahulu sebelum mencari limitnya. Ada beberapa contoh dan dengan contoh tersebut diharapkan siswa dapat menarik kesimpulan sendiri.

a. Jika pangkat tertinggi $f(x)$ = pangkat tertinggi $g(x)$

Dengan menggunakan fasilitas *maple*, kita menuliskan perintah sebagai berikut:

```
> restart;
> f:=x->27*x^3-54*x^2+36*x-8;
> g:=x->64*x^3-144*x^2+108*x-27;
> a:=infinity;
> Limit(f(x)/g(x),x=a)=limit(f(x)/g(x),x=a);
```

$$\lim_{x \to \infty} \frac{27x^3 - 54x^2 + 36x - 8}{64x^3 - 144x^2 + 108x - 27} = \frac{27}{64}$$

Jika kita perhatikan, ada perbedaan dengan limit fungsi aljabar di satu titik, yaitu pada pendefinisian a = *infinity* yang berarti tak hingga. Agar lebih memahami contoh tersebut, siswa dapat mengganti fungsi $f(x)$ dan $g(x)$ dengan syarat pangkat tertinggi dari masing-masing fungsi harus sama.

b. Jika pangkat tertinggi $f(x)$ > pangkat tertinggi $g(x)$

Dengan menggunakan fasilitas *maple*, kita menuliskan perintah sebagai berikut:

```
> restart;
> f:=x->x^2+3*x+2;
> g:=x->2*x^3-3*x^2+x+8;
> a:=infinity;
> Limit(f(x)/g(x),x=a)=limit(f(x)/g(x),x=a);
```

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 + 3x + 2}{2x^3 - 3x^2 + x + 8} = 0$$

Agar lebih memahami contoh tersebut, siswa dapat mengganti fungsi $f(x)$ dan $g(x)$ dengan syarat pangkat tertinggi $f(x)$ > pangkat tertinggi $g(x)$.

c. Jika pangkat tertinggi $f(x)$ < pangkat tertinggi $g(x)$

Dengan menggunakan fasilitas *maple*, kita menuliskan perintah sebagai berikut:

```
> restart;
> f:=x->3*x^4+2*x^3-1;
> g:=x->x^2-5;
> a:=infinity;
> Limit(f(x)/g(x),x=a)=limit(f(x)/g(x),x=a);
```

$$\lim_{x \to \infty} \frac{3\,x^4 + 2\,x^3 - 1}{x^2 - 5} = \infty$$

Agar lebih memahami contoh tersebut, siswa dapat mengganti fungsi $f(x)$ dan $g(x)$ dengan syarat pangkat tertinggi $f(x)$ < pangkat tertinggi $g(x)$.

c. Menentukan limit fungsi trigonometri di satu titik.

Dengan menggunakan fasilitas *maple*, kita bisa membandingkan antara hasil substitusi $x = a$ ke dalam fungsi $f(x)$, dengan hasil limit x mendekati a. Dalam menentukan limit fungsi di satu titik ini, kita mendefinisikan a tidak seperti dalam menentukan limit fungsi aljabar di satu titik. a dalam radian. Sehingga dengan hal tersebut siswa dapat menyimpulkan sendiri bagaimana cara menentukan limit fungsi trigonometri di satu titik. Lebih baik lagi jika siswa sudah memahami tentang fungsi trigonometri dan penghitungan dengan menggunakan radian. Adapun perintah yang dituliskan sebagai berikut:

```
> restart;
> f:=x->cos(2*x);# fungsi f(x)
> a:= Pi;
> Limit(f(x),x=a)=limit(f(x),x=a);
```

$$\lim_{x \to \pi} \cos(2\,x) = 1$$

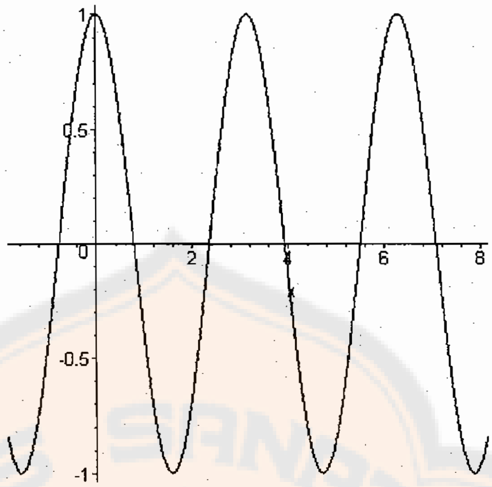
```
> subs(x=a,f(x));#substitusi nilai x ke fungsi f(x)
```

$$\cos(2\,\pi)$$

```
> simplify(%);
```

$$1$$

```
>plot( (f(x), x=a-5..a+5));
```



Gambar 20. Tampilan fungsi *f(x) = cos 2x*

Dalam perintah tersebut, siswa juga dapat melihat grafik fungsi $f(x)$. Karena yang dicari limit $f(x)$ untuk x mendekati a, maka siswa hanya memasukkan nilai $f(x)$ dan nilai a, dan langsung dapat memperoleh hasilnya.

Maple juga menyediakan fasilitas untuk memperoleh rumus-rumus limit fungsi trigonometri. Untuk sinus, kita peroleh dengan menuliskan perintah sebagai berikut:

```
>Limit(sin(x)/x,x=0)=limit(sin(x)/x,x=0);
```

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

```
>Limit(x/sin(x),x=0)=limit(x/sin(x),x=0);
```

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin(x)} = 1$$

Dan untuk tangen, kita peroleh dengan menuliskan perintah sebagai berikut:

```
>Limit(tan(x)/x,x=0)=limit(tan(x)/x,x=0);
```

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan(x)}{x} = 1$$

```
> Limit(x/tan(x),x=0)=limit(x/tan(x),x=0);
```

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\tan(x)} = 1$$

d. Teorema limit.

1.) Teorema 1

Dengan *maple* kita dapat menunjukkan limit fungsi $f(x)$ untuk x mendekati a, dimana $f(x)$ merupakan suatu konstanta. Adapun perintah dalam *maple* dapat ditulis sebagai berikut:

```
> restart;
> f:=x->2;
> a:=2;
> Limit(f(x),x=a)=limit(f(x),x=a);
```

$$\lim_{x \to 2} 2 = 2$$

Agar lebih memahami, siswa dapat mengganti fungsi $f(x)$ dan nilai a, dimana $f(x)$ merupakan suatu konstanta.

2.) Teorema 2

Dengan *maple* kita dapat menunjukkan limit fungsi $f(x) = x$ untuk x mendekati a. Adapun perintah dalam *maple* dapat ditulis sebagai berikut:

```
> restart;
> f:=x->x;
> a:=2;
> Limit(f(x),x=a)=limit(f(x),x=a);
```

$$\lim_{x \to 2} x = 2$$

Agar lebih memahami teorema 2 ini, siswa dapat mengganti a dengan sembarang konstanta.

3.) Teorema 3

Dengan *maple* kita dapat menunjukkan limit fungsi $k.\ f(x)$, untuk x mendekati a. Dimana k merupakan konstanta, dan $a \in$ R. Adapun perintah dalam *maple* dapat ditulis sebagai berikut:

```
> restart;
> f:=x->x^2+2*x-1;#fungsi f(x)
> a:=2;
> k:=3;
> Limit(f(x),x=a)=limit(f(x),x=a);
> Limit(k*f(x),x=a)=limit(k*f(x),x=a);
```

$$\lim_{x \to 2} 3x^2 + 6x - 3 = 21$$

```
> k*Limit(f(x),x=a)=k*limit(f(x),x=a);
```

$$3\left(\lim_{x \to 2} x^2 + 2x - 1\right) = 21$$

Dengan menggunakan fasilitas *maple*, kita bisa membandingkan antara hasil limit $k.f(x)$ untuk x mendekati a, dengan hasil k.limit $f(x)$ untuk x mendekati a. Siswa yang menyimpulkan dari eksplorasi tersebut. Agar lebih memahami, siswa dapat mengganti fungsi $f(x)$, nilai k dan nilai a.

4.) Teorema 4

Dengan *maple* kita dapat menunjukkan limit fungsi $f(x) + g(x)$, untuk x mendekati a. Dimana $a \in$ R. Adapun perintah dalam *maple* dapat ditulis sebagai berikut:

```
> restart;
> f:=x->x^3+3*x+2;# fungsi f(x)
> g:=x->x^2+2*x-1;# fungsi g(x)
> a:=2;
> Limit(f(x),x=a)=limit(f(x),x=a);# nilai limit
f(x)
```

```
> Limit(g(x),x=a)=limit(g(x),x=a);# nilai limit g(x)
> Limit((f(x)+g(x)),x=a)=limit((f(x)+g(x)),x=a);
```

$$\lim_{x \to 2} x^3 + 5x + 1 + x^2 = 23$$

```
> Limit(f(x),x=a)+Limit(g(x),x=a)=
limit(f(x),x=a)+limit(g(x),x=a);
```

$$(\lim_{x \to 2} x^3 + 3x + 2) + (\lim_{x \to 2} x^2 + 2x - 1) = 23$$

Dengan menggunakan fasilitas *maple*, kita bisa membandingkan antara hasil limit $f(x)$ + $g(x)$ untuk x mendekati a, dengan hasil limit $f(x)$ + limit $g(x)$ untuk x mendekati a. Siswa yang menyimpulkan dari eksplorasi tersebut. Agar lebih memahami, siswa dapat mengganti fungsi $f(x)$, fungsi $g(x)$, dan nilai a.

5.) Teorema 5

Dengan *maple* kita dapat menunjukkan limit fungsi $f(x)$ - $g(x)$, untuk x mendekati a. Dimana $a \in$ R. Adapun perintah dalam *maple* dapat ditulis sebagai berikut:

```
> restart;
> f:=x->x^3+3*x+2; #fungsi f(x)
> g:=x->x^2+2*x-1; #fungsi g(x)
> a:=2;
> Limit(f(x),x=a)=limit(f(x),x=a);
> Limit(g(x),x=a)=limit(g(x),x=a);
> Limit((f(x)-g(x)),x=a)=limit((f(x)-g(x)),x=a);
```

$$\lim_{x \to 2} x^3 + x + 3 - x^2 = 9$$

```
> Limit(f(x),x=a)-Limit(g(x),x=a)
=limit(f(x),x=a)-limit(g(x),x=a);
```

$$(\lim_{x \to 2} x^3 + 3x + 2) - (\lim_{x \to 2} x^2 + 2x - 1) = 9$$

Dengan menggunakan fasilitas *maple*, kita bisa membandingkan antara hasil limit $f(x)$ - $g(x)$ untuk x mendekati a, dengan hasil limit

$f(x)$ - limit $g(x)$ untuk x mendekati a. Siswa yang menyimpulkan dari eksplorasi tersebut. Agar lebih memahami, siswa dapat mengganti fungsi $f(x)$, fungsi $g(x)$, dan nilai a.

6.) Teorema 6

Dengan *maple* kita dapat menunjukkan limit fungsi $f(x)$ * $g(x)$, untuk x mendekati a. Dimana $a \in$ R. Adapun perintah dalam *maple* dapat ditulis sebagai berikut

```
> restart;
> f:=x->x^3+3*x+2;#fungsi f(x)
> g:=x->x^2+2*x-1;#fungsi g(x)
> a:=2;
> Limit(f(x),x=a)=limit(f(x),x=a);
> Limit(g(x),x=a)=limit(g(x),x=a);
> Limit((f(x)*g(x)),x=a)=limit((f(x)*g(x)),x=a);
```

$$\lim_{x \to 2} (x^3+3x+2)(x^2+2x-1) = 112$$

```
> Limit(f(x),x=a)*Limit(g(x),x=a)
=limit(f(x),x=a)*limit(g(x),x=a);
```

$$(\lim_{x \to 2} x^3+3x+2)(\lim_{x \to 2} x^2+2x-1) = 112$$

Dengan menggunakan fasilitas *maple*, kita bisa membandingkan antara hasil limit $f(x)$ * $g(x)$ untuk x mendekati a, dengan hasil limit $f(x)$ * limit $g(x)$ untuk x mendekati a. Siswa yang menyimpulkan dari eksplorasi tersebut. Agar lebih memahami, siswa dapat mengganti fungsi $f(x)$, fungsi $g(x)$, dan nilai a.

7.) Teorema 7

Dengan *maple* kita dapat menunjukkan limit fungsi $\frac{f(x)}{g(x)}$, untuk x mendekati a. Dimana $a \in$ R. Adapun perintah dalam *maple* dapat ditulis sebagai berikut:

```
> restart;
> f:=x->x^3+3*x+2;#fungsi f(x)
> g:=x->x^2+2*x-1;#fungsi g(x)
> a:=2;
> Limit(f(x),x=a)=limit(f(x),x=a);
> Limit(g(x),x=a)=limit(g(x),x=a);
> Limit((f(x)/g(x)),x=a)=limit((f(x)/g(x)),x=a);
```

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3+3x+2}{x^2+2x-1} = \frac{16}{7}$$

```
> Limit(f(x),x=a)/Limit(g(x),x=a)
=limit(f(x),x=a)/limit(g(x),x=a);
```

$$\frac{\lim_{x \to 2} x^3+3x+2}{\lim_{x \to 2} x^2+2x-1} = \frac{16}{7}$$

Dengan menggunakan fasilitas *maple*, kita bisa membandingkan antara hasil limit $\frac{f(x)}{g(x)}$ untuk x mendekati a, dengan hasil limit $f(x)$ dibagi limit $g(x)$ untuk x mendekati a. Siswa yang menyimpulkan dari eksplorasi tersebut. Agar lebih memahami, siswa dapat mengganti fungsi $f(x)$, fungsi $g(x)$, dan nilai a.

8.) Teorema 8

Dengan *maple* kita dapat menunjukkan limit fungsi $[f(x)]^n$, untuk x mendekati a. Dimana a, $n \in$ R. Adapun perintah dalam *maple* dapat ditulis sebagai berikut:

```
> restart;
> f:=x->x^2+2*x-1;#fungsi f(x)
> a:=2;
> n:=3;
> Limit(((f(x)^n)),x=a)=limit(((f(x)^n)),x=a);
```

$$\lim_{x \to 2} (x^2 + 2x - 1)^3 = 343$$

```
> (Limit(f(x),x=a))^n=(limit(f(x),x=a))^n;
```

$$(\lim_{x \to 2} x^2 + 2x - 1)^3 = 343$$

Dengan menggunakan fasilitas *maple*, kita bisa membandingkan antara hasil limit $[f(x)]^n$ untuk x mendekati a, dengan hasil $[\lim_{x \to a} f(x)]^n$. Siswa yang menyimpulkan dari eksplorasi tersebut. Agar lebih memahami, siswa dapat mengganti fungsi $f(x)$, nilai n dan nilai a.

9.) Teorema 9

Dengan *maple* kita dapat menunjukkan limit fungsi $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)}$. Dimana $a \in$ R. Adapun perintah dalam *maple* dapat ditulis sebagai berikut:

```
> restart;
> f:=x->3*x^2+x+1;#fungsi f(x)
> a:=3;
> n:=4;
> Limit(f(x),x=a)=limit(f(x),x=a);

> Limit(surd(f(x),n),x=a)
=limit(surd(f(x),n),x=a);
```

$$\lim_{x \to 3} \text{surd}(3x^2 + x + 1, 4) = 31^{(1/4)}$$

```
> surd(Limit(f(x),x=a),n)
=surd(limit(f(x),x=a),n);
```

$$(\lim_{x \to 3} 3x^2 + x + 1)^{(1/4)} = 31^{(1/4)}$$

Dengan menggunakan fasilitas *maple*, kita bisa membandingkan antara hasil $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)}$, dengan hasil $\sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)}$. Siswa yang menyimpulkan dari eksplorasi tersebut. Yang perlu diperhatikan pada saat n genap atau n ganjil. Agar lebih memahami, siswa dapat mengganti fungsi $f(x)$, fungsi $g(x)$, dan nilai a.

e. Kontinuitas dan diskontinuitas.

Syarat yang harus dipenuhi agar fungsi $f(x)$ kontinu di $x = a$ adalah

1.) $f(a)$ harus ada (terdefinisi)

2.) $\lim_{x \to a} f(x)$ harus ada

3.) $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Jika satu diantara ketiga syarat tersebut tidak dipenuhi maka fungsi $f(x)$ diskontinu di $x = a$.

Dengan menggunakan maple, syarat-syarat tersebut dapat ditunjukkan dengan perintah sebagai berikut:

1.) Untuk fungsi kontinu

```
> restart;
> f:=x-> (2*x+4);
> a:=2;

> subs(x=a,f(x));
```

$$8$$

```
> Limit(f(x),x=a)=limit(f(x),x=a);
```

$$\lim_{x \to 2} 2x + 4 = 8$$

Jika ketiga syarat terpenuhi maka fungsi tersebut kontinu. Agar siswa dapat lebih memahami fungsi kontinu, siswa dapat mengganti $f(x)$

dan nilai a. Kemudian siswa dapat menentukan fungsi tersebut kontinu atau tidak di a.

2.) Untuk fungsi diskontinu

```
> restart;
> f:=x-> (x^2-4)/(x-2);
> a:=2;
> subs(x=a,f(x));
Error, numeric exception: division by zero
> Limit(f(x),x=a)=limit(f(x),x=a);
```

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$$

Jika salah satu dari ketiga syarat tidak terpenuhi maka fungsi tersebut diskontinu. Agar siswa dapat lebih memahami fungsi diskontinu, siswa dapat mengganti $f(x)$ dan nilai a. Kemudian siswa dapat menentukan fungsi tersebut diskontinu di a.

f. Pengertian bentuk tak tentu dari suatu limit fungsi.

Program *maple* mempunyai fasilitas untuk menunjukkan pengertian bentuk tak tentu suatu limit yaitu menuliskan perintah sebagai berikut:

```
> restart;
> f:=x-> (x^2-4)/(x-2);
> a:=2;
> subs(x=a,f(x));
Error, numeric exception: division by zero
> Limit(f(x),x=a)=limit(f(x),x=a);
```

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$$

Jika hasil substitusi $x = a$ ke $f(x)$ memperoleh hasil *Error, numeric exception: division by zero* maka limit fungsi tersebut dinamakan bentuk tak tentu dari suatu limit fungsi.

g. Menghitung bentuk tak tentu dari limit fungsi aljabar dan trigonometri.

1.) Bentuk tak tentu dari limit fungsi aljabar

Program *maple* mempunyai fasilitas untuk menunjukkan pengertian bentuk tak tentu suatu fungsi aljabar yaitu menuliskan perintah sebagai berikut:

a.) Cara 1

```
> restart;
> a:=4;
> f:=x->(x-a)/(x^2-(a^2));
> factor(numer(f(x)))/factor(denom((f(x))));
```

$$\frac{1}{x+4}$$

```
> subs(x=a,factor(numer(f(x)))/
factor(denom((f(x)))));
```

$$\frac{1}{8}$$

```
> Limit(factor(numer(f(x)))/
factor(denom((f(x)))),x=a)
=limit(factor(numer(f(x)))/
factor(denom((f(x)))),x=a);
```

$$\lim_{x \to 4} \frac{1}{x+4} = \frac{1}{8}$$

Memerlukan cara yang panjang dan rumit yaitu dengan memfaktorkan pembilang atau penyebut fungsi $f(x)$.

b.) Cara 2

```
> restart;
> a:=4;
> f:=x->(x-a)/(x^2-(a^2));# fungsi f(x)
```

```
> subs(x=a,f(x));
Error, numeric exception: division by zero
> Limit(f(x),x=a)=limit(f(x),x=a);
```

$$\lim_{x \to 4} \frac{x-4}{x^2-16} = \frac{1}{8}$$

Dengan menggunakan cara ini kita membandingkan antara hasil substitusi $x = a$ ke dalam fungsi $f(x)$, dengan hasil limit x mendekati a.

Siswa dapat membandingkan cara 1 dan cara 2, kemudian siswa yang menyimpulkan bagaimana cara untuk menghitung bentuk tak tentu dari limit fungsi aljabar.

2.) Bentuk tak tentu dari limit fungsi trigonometri

Program *maple* mempunyai fasilitas untuk menunjukkan pengertian bentuk tak tentu dari limit fungsi trigonometri yaitu menuliskan perintah sebagai berikut:

```
> restart;
> f:=x->sin (2*x)/sin(x);# fungsi f(x)
> a:= Pi;
> Limit(f(x),x=a)=limit(f(x),x=a);
```

$$\lim_{x \to \pi} \frac{\sin(2\,x)}{\sin(x)} = -2$$

```
> subs(x=a,f(x)); #substitusi nilai x ke fungsi
f(x)
```

$$\frac{\sin(2\,\pi)}{\sin(\pi)}$$

```
> simplify(%);
Error, numeric exception: division by zero
```

Dalam hal ini kita dapat membandingkan antara hasil substitusi $x = a$ ke dalam fungsi $f(x)$, dengan hasil limit x mendekati a.

h. Menghitung limit fungsi yang mengarah ke konsep turunan.

Program *maple* mempunyai fasilitas untuk menghitung limit fungsi yang mengarah ke konsep turunan yaitu menuliskan perintah sebagai berikut:

```
> restart;
> f:=x->(x^2-7*x)/x;
> Limit(f(x),x=0)=limit(f(x),x=0);
> subs(x=0,f(x));
Error, numeric exception: division by zero
```

Dalam menghitung limit fungsi yang mengarah ke konsep turunan, kita akan mencari limit fungsi $f(x)$ untuk x mendekati 0. kita dapat membandingkan antara hasil substitusi $x = 0$ ke dalam fungsi $f(x)$, dengan hasil limit x mendekati 0.

i. Sifat limit yang digunakan dalam perhitungan bentuk tak tentu limit fungsi.

Program *maple* mempunyai fasilitas untuk menunjukkan sifat limit yang digunakan dalam perhitungan bentuk tak tentu limit fungsi yaitu menuliskan perintah sebagai berikut:

```
> restart;
> f:=x->(x^2-1)/(x-1);
> a:=1;
> factor(numer(f(x)));
```

$$(x-1)(x+1)$$

```
> factor(denom(f(x)));
```

$$x-1$$

```
> t:=factor(numer(f(x)))/denom(f(x));
```

$$t := x+1$$

```
> hasil_limit:=subs(x=a,t);
```

$$hasil\_limit := 2$$

Perintah tersebut merupakan perintah untuk mencari pemfaktoran baik untuk pembilang atau penyebut. Fungsi tersebut menjadi lebih sederhana yang kemudian dapat dicari limitnya.

Untuk sifat limit yang lain dengan mengalikan dengan faktor sekawan, *maple* tidak mempunyai fasilitas untuk menunjukkan hal tersebut. Itu dikarenakan faktor sekawan selalu menghasilkan bilangan 1 sehingga akan kembali ke persamaan awal.

2. Pada pokok bahasan Turunan.

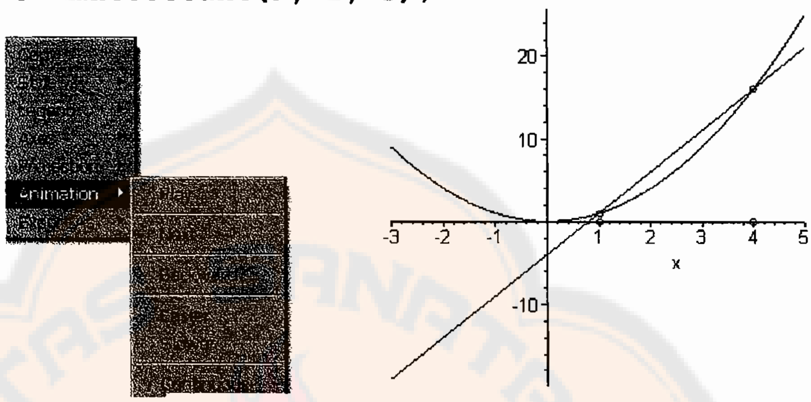
a. Pengertian turunan.

Program *maple* mempunyai fasilitas untuk menunjukkan pengertian turunan yaitu menuliskan perintah sebagai berikut:

1.) Menunjukkan dengan animasi untuk melihat Δy dan Δx.

```
> restart;
> f := x-> x^2:
f1 := D(f):
t := x-> f(1) + f1(1)*(x - 1);
> m := (f(3) - f(1))/(3 - 1);
s := x-> f(1) + m*(x - 1) ;
> animateSecant := proc( f, a, h )
local n, Background, Mover, Secants;
n := 30;
Background:=plots[display](plots[pointplot]({[a
,f(a)],[a,0]},symbol=circle),plot(f(x),x=(a-
(h+signum(h)*1))..(a+(h+signum(h)*1)))):
Mover:=plots[display](seq(
plots[pointplot]({[a+(n-i)/(n/h), f(a+(n-
i)/(n/h))], [ a+(n-
i)/(n/h),0]},symbol=circle,color=blue),i=0..n-
1),
insequence=true):
Secants:=plots[display](seq( plot((f(a+(n-
i)/(n/h))-f(a))/(n-i)*(n/h)*(x-a)+f(a), x=(a-
```

```
(h+signum(h)*1))..(a+(h+signum(h)*1)),color=blu
e),i=0..n-1),
insequence=true):
plots[display](Secants,Background,Mover);
end proc:
> animateSecant(f, 1, 3);
```



Gambar 21. Tampilan *output* pengertian turunan

Gambar tersebut dapat digerakkan dengan menggunakan *animation/play*. Animasi tersebut menjelaskan tentang penerapan turunan untuk garis singggung. Garis biru akan bergerak turun melalui kurva merah sehingga Δy dan Δx akan berubah pada setiap titik di kurva merah tersebut.

2.) Pengertian turunan.

```
> restart;
> Limit((f(x+h)-f(x))/h,h=0)=limit((f(x+h)-
f(x))/h,h=0);
```

$$\lim_{h \to 0} \frac{\mathrm{f}(x+h)-\mathrm{f}(x)}{h} = \mathrm{D}(f)(x)$$

Dengan menggunakan perintah tersebut sangatlah jelas bahwa

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = D(f)(x).$$

b. Rumus-rumus turunan fungsi aljabar dan trigonometri.

Program *maple* menyediakan fasilitas untuk menyajikan rumus-rumus turunan fungsi aljabar. Huruf d kecil pada *diff* menunjukkan hasil dari turunan yang dimaksud, tetapi d besar pada *Diff* akan menunjukkan arti tentang apa yang akan diperintahkan. Sebelum menggunakan rumus-rumus turunan ini kita harus mendefinisikan fungsi yang akan kita turunkan terlebih dahulu.

1.) Turunan Fungsi Konstan

Dengan *maple* kita dapat menunjukkan turunan fungsi $f(x)$, dimana $f(x)$ merupakan suatu konstanta. Adapun perintah dalam *maple* dapat ditulis sebagai berikut:

```
> restart;
> f:=x->2;
> Diff(f(x),x)=diff(f(x),x);
```

$$\frac{d}{dx}2=0$$

Agar lebih memahami, siswa dapat mengeksplorasi perintah tersebut dengan mengganti fungsi $f(x)$, dimana $f(x)$ merupakan suatu konstanta.

2.) Turunan Fungsi Identitas

Dengan *maple* kita dapat menunjukkan turunan fungsi $f(x)$, dimana $f(x) = x$. Adapun perintah dalam *maple* dapat ditulis sebagai berikut:

```
> restart;
> f:=x->x;
> Diff(f(x),x)=diff(f(x),x);
```

$$\frac{d}{dx} x = 1$$

3.) Turunan Fungsi berbentuk $y = ax^n$

Dengan *maple* kita dapat menunjukkan turunan fungsi $f(x)$, dimana $f(x) = ax^n$. Adapun perintah dalam *maple* dapat ditulis untuk menentukan rumusnya adalah sebagai berikut:

```
> restart;
> f:=x->a*x^n;
> Diff(f(x),x)=diff(f(x),x);
```

$$\frac{\partial}{\partial x}(a\,x^n) = \frac{a\,x^n\,n}{x}$$

```
> simplify(%);
```

$$\frac{\partial}{\partial x}(a\,x^n) = a\,x^{(n-1)}\,n$$

Untuk pemahaman siswa, kita terapkan rumus tersebut dalam mengerjakan soal, adapun perintah yang dituliskan adalah sebagai berikut:

```
> restart;
> f:=x->2*x^3;
> Diff(f(x),x)=diff(f(x),x);
```

$$\frac{d}{dx}(2\,x^3) = 6\,x^2$$

Agar lebih memahami, siswa dapat mengeksplorasi perintah tesebut dengan mengganti fungsi $f(x)$, dimana $f(x) = ax^n$.

4.) Turunan Fungsi berbentuk $y = \mathrm{c}u(x)$

Dengan *maple* kita dapat menunjukkan turunan fungsi $f(x)$, dimana $f(x) = cu(x)$. Adapun perintah dalam *maple* dapat ditulis untuk menentukan rumusnya adalah sebagai berikut:

```
> restart;
> f:=x->c*u(x);
> Diff(f(x),x)=diff(f(x),x);
```

$$\frac{\partial}{\partial x}(c\,\mathrm{u}(x)) = c\left(\frac{d}{dx}\mathrm{u}(x)\right)$$

```
> simplify(%);
```

$$\frac{\partial}{\partial x}(c\,\mathrm{u}(x)) = c\left(\frac{d}{dx}\mathrm{u}(x)\right)$$

Untuk pemahaman siswa, kita terapkan rumus tersebut dalam mengerjakan soal, adapun perintah yang dituliskan adalah sebagai berikut:

```
> restart;
> u:=x->3*x^2-4*x+2;
> c:=5:
> f:=x->c*u(x);
> Diff(f(x),x)=diff(f(x),x);
```

$$\frac{d}{dx}(15\,x^2 - 20\,x + 10) = 30\,x - 20$$

Agar lebih memahami, siswa dapat mengeksplorasi perintah tesebut dengan mengganti fungsi $f(x)$ dan nilai c, dimana $f(x) = cu(x)$ dan c adalah konstanta.

5.) Turunan Fungsi berbentuk $y = u(x) + v(x)$

Dengan *maple* kita dapat menunjukkan turunan fungsi $f(x)$, dimana $f(x) = u(x) + v(x)$. Adapun perintah dalam *maple* dapat ditulis untuk menentukan rumusnya adalah sebagai berikut:

```
> restart;
> f:=x->u(x)+v(x);
> Diff(f(x),x)=diff(f(x),x);
```

$$\frac{d}{dx}(\mathrm{u}(x)+\mathrm{v}(x))=\left(\frac{d}{dx}\mathrm{u}(x)\right)+\left(\frac{d}{dx}\mathrm{v}(x)\right)$$

```
> simplify(%);
```

$$\frac{d}{dx}(\mathrm{u}(x)+\mathrm{v}(x))=\left(\frac{d}{dx}\mathrm{u}(x)\right)+\left(\frac{d}{dx}\mathrm{v}(x)\right)$$

Untuk pemahaman siswa, kita terapkan rumus tersebut dalam mengerjakan soal, adapun perintah yang dituliskan adalah sebagai berikut:

```
> restart;
> u:=x->x^2+3*x-9;
> v:=x->10*x+12;
> f:=x->u(x)+v(x);
> Diff(u(x),x)=diff(u(x),x);
> Diff(v(x),x)=diff(v(x),x);
> Diff(u(x),x)+Diff(v(x),x)
=diff(u(x),x)+diff(v(x),x);
```

$$\left(\frac{d}{dx}(x^2+3x-9)\right)+\left(\frac{d}{dx}(10x+12)\right)=2x+13$$

```
> Diff(f(x),x)=diff(f(x),x);
```

$$\frac{d}{dx}(x^2+13x+3)=2x+13$$

Dengan menggunakan fasilitas *maple*, kita bisa membandingkan antara hasil Diff(u(x),x) + Diff(v(x),x) = diff(u(x),x) + diff(v(x),x), dengan hasil Diff(f(x),x)=diff(f(x),x). Siswa yang menyimpulkan dari eksplorasi tersebut. Agar lebih memahami, siswa dapat mengeksplorasi perintah tesebut dengan mengganti fungsi $f(x)$, dimana $f(x) = u(x) + v(x)$

6.) Turunan Fungsi berbentuk $y = u(x) - v(x)$

Dengan *maple* kita dapat menunjukkan turunan fungsi $f(x)$, dimana $f(x) = u(x) - v(x)$. Adapun perintah dalam *maple* dapat ditulis untuk menentukan rumusnya adalah sebagai berikut:

```
> restart;
> f:=x->u(x)-v(x);
> Diff(f(x),x)=diff(f(x),x);
```

$$\frac{d}{dx}(\mathrm{u}(x)-\mathrm{v}(x))=\left(\frac{d}{dx}\mathrm{u}(x)\right)-\left(\frac{d}{dx}\mathrm{v}(x)\right)$$

```
> simplify(%);
```

$$\frac{d}{dx}(\mathrm{u}(x)-\mathrm{v}(x))=\left(\frac{d}{dx}\mathrm{u}(x)\right)-\left(\frac{d}{dx}\mathrm{v}(x)\right)$$

Untuk pemahaman siswa, kita terapkan rumus tersebut dalam mengerjakan soal, adapun perintah yang dituliskan adalah sebagai berikut:

```
> restart;
> u:=x->x^2+3*x-9;
> v:=x->10*x+12;
> f:=x->u(x)-v(x);
> Diff(u(x),x)=diff(u(x),x);
> Diff(v(x),x)=diff(v(x),x);
> Diff(u(x),x)-Diff(v(x),x)=diff(u(x),x)-
diff(v(x),x);
```

$$\left(\frac{d}{dx}(x^2+3x-9)\right)-\left(\frac{d}{dx}(10x+12)\right)=2x-7$$

```
> Diff(f(x),x)=diff(f(x),x);
```

$$\frac{d}{dx}(x^2-7x-21)=2x-7$$

Dengan menggunakan fasilitas *maple*, kita bisa membandingkan antara hasil Diff(u(x),x) - Diff(v(x),x) = diff(u(x),x) - diff(v(x),x), dengan hasil Diff(f(x),x)=diff(f(x),x). Siswa yang menyimpulkan dari eksplorasi tersebut. Agar lebih memahami, siswa dapat mengeksplorasi perintah tesebut dengan mengganti fungsi $f(x)$, dimana $f(x)$ = $u(x)$ - $v(x)$

7.) Turunan Fungsi berbentuk $y = u(x) \ . \ v(x)$

Dengan *maple* kita dapat menunjukkan turunan fungsi $f(x)$, dimana $f(x) = u(x) \ . \ v(x)$. Adapun perintah dalam *maple* dapat ditulis untuk menentukan rumusnya adalah sebagai berikut:

```
> restart;
> f:=x->u(x)*v(x);
> Diff(f(x),x)=diff(f(x),x);
```

$$\frac{d}{dx}(\mathrm{u}(x)\,\mathrm{v}(x)) = \left(\frac{d}{dx}\mathrm{u}(x)\right)\mathrm{v}(x) + \mathrm{u}(x)\left(\frac{d}{dx}\mathrm{v}(x)\right)$$

```
> simplify(%);
```

$$\frac{d}{dx}(\mathrm{u}(x)\,\mathrm{v}(x)) = \left(\frac{d}{dx}\mathrm{u}(x)\right)\mathrm{v}(x) + \mathrm{u}(x)\left(\frac{d}{dx}\mathrm{v}(x)\right)$$

Untuk pemahaman siswa, kita terapkan rumus tersebut dalam mengerjakan soal, adapun perintah yang dituliskan adalah sebagai berikut:

```
> restart;
> u:=x->x^2+3*x-9;
> v:=x->10*x+12;
> f:=x->u(x)*v(x);
> Diff(u(x),x)=diff(u(x),x);
> Diff(v(x),x)=diff(v(x),x);
> Diff(u(x),x)*Diff(v(x),x)
=diff(u(x),x)*diff(v(x),x);
```

$$\left(\frac{d}{dx}(x^2+3x-9)\right)\left(\frac{d}{dx}(10x+12)\right) = 20x+30$$

```
> Diff(f(x),x)=diff(f(x),x);
```

$$\frac{d}{dx}((x^2+3x-9)(10x+12)) = (2x+3)(10x+12) + 10x^2+30x-90$$

```
> simplify(%);
```

$$\frac{d}{dx}(2(x^2+3x-9)(5x+6)) = 30x^2+84x-54$$

Dengan menggunakan fasilitas *maple*, kita bisa membandingkan antara hasil Diff(u(x),x) * Diff(v(x),x) = diff(u(x),x) * diff(v(x),x), dengan hasil Diff(f(x),x) = diff(f(x),x). Siswa yang menyimpulkan dari eksplorasi tersebut. Agar lebih memahami, siswa dapat mengeksplorasi perintah tesebut dengan mengganti fungsi $f(x)$, dimana $f(x) = u(x)\ .\ v(x)$

8.) Turunan Fungsi berbentuk $y = \dfrac{u(x)}{v(x)}$

Dengan *maple* kita dapat menunjukkan turunan fungsi $f(x)$, dimana $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$. Adapun perintah dalam *maple* dapat ditulis untuk menentukan rumusnya adalah sebagai berikut:

```
> restart;
> Diff(u(x)/v(x),x)=diff(u(x)/v(x),x);
```

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right) = \frac{\frac{d}{dx}u(x)}{v(x)} - \frac{u(x)\left(\frac{d}{dx}v(x)\right)}{v(x)^2}$$

```
> simplify(%);
```

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right) = -\frac{-\left(\frac{d}{dx}u(x)\right)v(x) + u(x)\left(\frac{d}{dx}v(x)\right)}{v(x)^2}$$

Untuk pemahaman siswa, kita terapkan rumus tersebut dalam mengerjakan soal, adapun perintah yang dituliskan adalah sebagai berikut:

```
> restart;
> u:=x->x^2+3*x-9;
> v:=x->10*x+12;
> f:=x->u(x)/v(x);
> Diff(u(x),x)=diff(u(x),x);
> Diff(v(x),x)=diff(v(x),x);
> Diff(u(x),x)/Diff(v(x),x)
=diff(u(x),x)/diff(v(x),x);
```

$$\frac{\frac{d}{dx}(x^2+3x-9)}{\frac{d}{dx}(10x+12)} = \frac{x}{5}+\frac{3}{10}$$

```
> Diff(f(x),x)=diff(f(x),x);
```

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2+3x-9}{10x+12}\right) = \frac{2x+3}{10x+12} - \frac{10(x^2+3x-9)}{(10x+12)^2}$$

```
> simplify(%);
```

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2+3x-9}{2(5x+6)}\right) = \frac{5x^2+12x+63}{2(5x+6)^2}$$

Dengan menggunakan fasilitas *maple*, kita bisa membandingkan antara hasil Diff(u(x),x) / Diff(v(x),x) = diff(u(x),x) / diff(v(x),x), dengan hasil Diff(f(x),x) = diff(f(x),x). Siswa yang menyimpulkan dari eksplorasi tersebut. Agar lebih memahami, siswa dapat mengeksplorasi perintah tesebut dengan mengganti fungsi $f(x)$, dimana $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$

9.) Turunan Fungsi berbentuk $y = a\{u(x)\}^n$

Dengan *maple* kita dapat menunjukkan turunan fungsi $f(x)$, dimana $f(x) = a\{u(x)\}^n$. Adapun perintah dalam *maple* dapat ditulis untuk menentukan rumusnya adalah sebagai berikut:

```
> restart;
> f:=x->a*(u(x))^n;
> Diff(f(x),x)=diff(f(x),x);
```

$$\frac{\partial}{\partial x}(a\,\mathrm{u}(x)^n) = \frac{a\,\mathrm{u}(x)^n\,n\left(\frac{d}{dx}\mathrm{u}(x)\right)}{\mathrm{u}(x)}$$

```
> simplify(%);
```

$$\frac{\partial}{\partial x}(a\,\mathrm{u}(x)^n) = a\,\mathrm{u}(x)^{(n-1)}\,n\left(\frac{d}{dx}\mathrm{u}(x)\right)$$

Untuk pemahaman siswa, kita terapkan rumus tersebut dalam mengerjakan soal, adapun perintah yang dituliskan adalah sebagai berikut:

```
> restart;
> u:=x->x^3+2*x^2-5*x-7;
> a:= 3;
> n:= 4;
> Diff(a*(u(x))^n,x)=diff(a*(u(x))^n,x);
```

$$\frac{d}{dx}(3(x^3+2x^2-5x-7)^4) = 12(x^3+2x^2-5x-7)^3(3x^2+4x-5)$$

Agar lebih memahami, siswa dapat mengeksplorasi perintah tesebut dengan mengganti fungsi $f'(x)$, dimana $f(x) = a\{u(x)\}^n$

10.) Turunan Fungsi Sinus

Dengan *maple* kita dapat menunjukkan turunan fungsi $f(x)$, dimana $f(x)$ merupakan fungsi sinus. Adapun perintah dalam *maple* dapat ditulis untuk menentukan rumusnya adalah sebagai berikut:

```
> restart;
> Diff(sin (x),x)=diff(sin (x),x);
```

$$\frac{d}{dx}\sin(x) = \cos(x)$$

11.) Turunan Fungsi Cosinus

Dengan *maple* kita dapat menunjukkan turunan fungsi $f(x)$, dimana $f(x)$ merupakan fungsi cosinus. Adapun perintah dalam *maple* dapat ditulis untuk menentukan rumusnya adalah sebagai berikut:

```
> restart;
> Diff(cos (x),x)=diff(cos (x),x);
```

$$\frac{d}{dx}\cos(x) = -\sin(x)$$

12.) Turunan Fungsi Tangen

Dengan *maple* kita dapat menunjukkan turunan fungsi $f(x)$, dimana $f(x)$ merupakan fungsi tangen. Adapun perintah dalam *maple* dapat ditulis untuk menentukan rumusnya adalah sebagai berikut:

Cara 1

```
> restart;
> Diff(tan (x),x)=diff(tan (x),x);
```

$$\frac{d}{dx}\tan(x) = 1 + \tan(x)^2$$

Cara 2

```
> restart;
> Diff(u(x)/v(x),x)=diff(u(x)/v(x),x);
> simplify(%);
> u:=x->sin(x);v:=x->cos(x);
> f:=x->u(x)/v(x);
> Diff(u(x),x)=diff(u(x),x);
Diff(v(x),x)=diff(v(x),x);
> Diff(u(x),x)/Diff(v(x),x)=
diff(u(x),x)/diff(v(x),x);
> Diff(u(x)/v(x),x)=diff(u(x)/v(x),x);
> simplify(%);
```

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right) = \frac{1}{\cos(x)^2}$$

Dengan menggunakan fasilitas *maple*, kita bisa membandingkan antara hasil cara 1 dengan hasil cara 2. Siswa yang menyimpulkan dari eksplorasi tersebut.

c. Aturan rantai.

Dengan menggunakan fasilitas *maple* kita dapat memeperoleh aturan rantai. Perintahnya dapat dituliskan sebagai berikut:

```
> diff(u(x),x);
```

$$\frac{d}{dx}\,\mathrm{u}(x)$$

```
> diff(u(v(x)),x);
```

$$\mathrm{D}(u)(\mathrm{v}(x))\left(\frac{d}{dx}\,\mathrm{v}(x)\right)$$

Dalam menggunakan aturan rantai, paling sedikit harus ada dua fungsi misalnya $u(x)$ dan $v(x)$. Untuk lebih memahami siswa memperhatikan contoh berikut:

```
> restart;
> u:=x->3*x^2-4*x+6;
> v:=x->4*x^3+5*x-7;
> diff(u(x),x);
```

$$6\,x-4$$

```
> diff(u(v(x)),x);
```

$$6\,(4\,x^3+5\,x-7)\,(12\,x^2+5)-48\,x^2-20$$

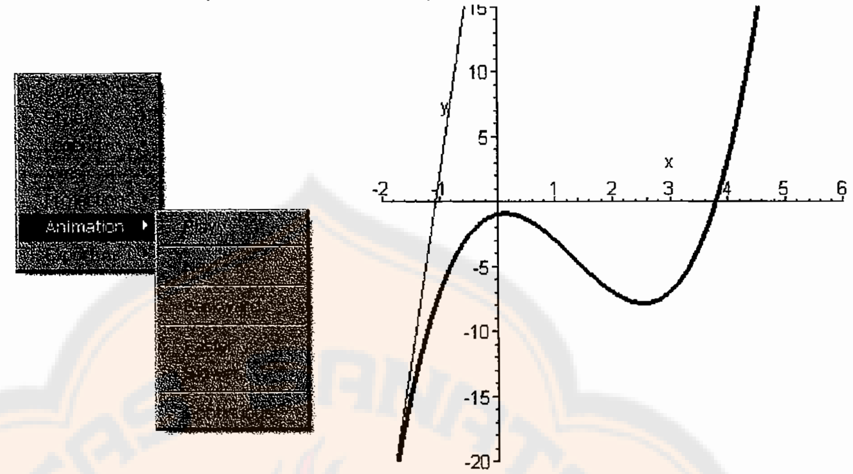
$u(x)$ dan $v(x)$ didefinisikan terlebih dahulu, baru kemudian dideferensialkan dengan menggunakan aturan rantai.

d. Persamaan garis singgung.

Program *maple* menyediakan fasilitas untuk menyajikan persamaan garis singgung. Sebelum masuk ke persamaan garis singgung agar siswa lebih memahami garis singgung, siswa perlu mengetahui bagaimana garis singgung bila disajikan dalam bentuk animasi? Program *maple* menyediakan fasilitas untuk menyajikan animasi, dengan menuliskan perintah sebagai berikut:

```
> restart: with(plots):
> f:=x->x^3-4*x^2+x-1;
> T:=(x,a)->f(a)+(x-a)*D(f)(a):
```

```
> display(plot(f(x,t),x=-2..6,y=-20..15,thickness
= 3, color=red), animate(T(x,t),x=-2..6,t=-2..5,
view=-20..15, color=blue, frames=60));
```



Gambar 22. Tampilan *output* animasi garis singgung

Hasil dari perintah tersebut berupa kurva yang dapat digerakkan. Cara menggerakkan kurva tersebut klik kanan pada kurva kemudian sehingga akan muncul *icon* kemudian klik *animation/play*. Garis biru merupakan garis singgung dan kurva yang berwarna merah merupakan kurva yang disinggung oleh garis singgung.

Agar lebih mudah dalam mempelajari persamaan garis singgung ini, kita bagi menjadi 2 bagian.

1. Gradien

Dengan menggunakan fasilitas *maple*, gradien kurva $f(x)$ di suatu titik dapat dicari dengan menuliskan perintah sebagai berikut:

```
> restart;
> f:=x-> x^2+3*x-7;
> diff(f(x),x);
> a:=4;
> gradien:=subs(x=a,(diff(f(x),x)));
```

$$gradien := 11$$

Gradien didefinisikan sebagai substitusi suatu nilai x = a ke dalam turunan $f(x)$. Dengan menggunakan perintah ini kita dapat mencari gradien dengan mudah yaitu dengan mengganti fungsi $f(x)$ dan nilai a, dimana a adalah semua absis dari kurva $f(x)$.

2. Persamaan garis singgung

a.) Persamaan garis singgung jika titik singgungnya diketahui.

Dengan menggunakan *maple* kita dapat menuliskan beberapa perintah untuk mencari persamaan garis singgung jika titik singgungnya diketahui, sebagai berikut:

```
> restart;
> f:=x->4/x;
> nilai_x:=1;nilai_y:=4;
                nilai_x := 1
                nilai_y := 4
> gradien:=subs(x=nilai_x,(diff(f(x),x)));
                gradien := -4
> persGS:=y=nilai_y+(gradien*(x-nilai_x));
              persGS := y = 8 - 4 x
```

Dalam mendefinisikan PersGS (Persamaan garis singgung), kita menggunakan persamaan $y - y_1 = m(x - x_1)$. Nilai_y didefinisikan sebagai y_1, dan Nilai_x didefinisikan sebagai x_1. Dengan menggunakan perintah ini kita dapat mencari persamaan garis singgung dengan mudah yaitu dengan mengganti fungsi $f(x)$ dan Nilai_x adalah absis titik singgung, dan Nilai_y adalah ordinat titik singgung.

b.) Persamaan garis singgung untuk dua garis yang sejajar.

Dengan menggunakan *maple* kita dapat menuliskan beberapa perintah untuk mencari persamaan garis singgung untuk dua garis yang sejajar, sebagai berikut:

```
> restart;
> f:=x->x^2+5*x+5;
> g:=x->2*x-7;
> gradien:=(diff(g(x),x));
```

$$gradien := 2$$

```
> gradien=diff(f(x),x);
> soln:=solve(gradien=diff(f(x),x),x);
> x[a]:=soln;
> y[a]:=subs(x=soln,f(x));
```

$$x_a := \frac{-3}{2}$$

$$y_a := \frac{-1}{4}$$

```
> persGS:=y=y[a]+(gradien*(x-x[a]));
```

$$persGS := y = \frac{11}{4} + 2\,x$$

Hampir sama dengan mencari garis singgung jika diketahui titik singgungnya, tetapi untuk mencari persamaan garis singgung untuk dua garis sejajar harus persyaratan yaitu $m_1 = m_2$. Dimana m_1 merupakan gradien dari garis yang sejajar dengan garis singgung, dan m_2 merupakan gradien dari garis singgung kurva.

$f(x)$ merupakan fungsi dari kurva, dan $g(x)$ merupakan fungsi garis yang sejajar dengan garis singgung. Gradien $g(x)$ didefinisikan dengan mendiferensialkan fungsi $g(x)$. Karena $m_1 = m_2$ atau gradien $g(x)$ = gradien $f(x)$, maka kita gunakan definisi gradien untuk mencari nilai x dalam *maple* diperintahkan dengan x[a]. Maka akan muncul pertanyaan bagaimana jika terdapat lebih dari satu nilai x? *Soln* merupakan penyelesaian persamaan gradien. Kita definisikan terlebih dahulu x[1] sampai x[n] sesuai dengan banyaknya penyelesaian pada soln. Setelah didapat nilai x, kita substitusikan ke $f(x)$ untuk mendapatkan nilai y. Untuk x yang lebih dari satu maka untuk mencari nilai y kita juga perlu mendefinisikan y[1] sampai y[n].

c.) Persamaan garis singgung untuk dua garis yang saling tegak lurus.

Dengan menggunakan *maple* kita dapat menuliskan beberapa perintah untuk mencari persamaan garis singgung untuk dua garis yang saling tegak lurus.

```
> restart;
> f:=x->3*x^2-x^3;
> g:=x->-1/3*x+8;
> gradien_g(x):=diff((g(x)),x);
```

$$\text{gradien\_g}(x) := \frac{-1}{3}$$

```
> gradien_f(x):=-1/gradien_g(x);
```

$$\text{gradien\_f}(x) := 3$$

```
> gradien_f(x)=diff(f(x),x);
> soln:=solve(gradien_f(x)=diff(f(x),x),x);
> x[1]:=soln[1];x[2]:=soln[2];
```

$$x_1 := 1$$

$$x_2 := 1$$

```
> y[1]:=subs(x=soln[1],f(x));
y[2]:=subs(x=soln[2],f(x));
```

$$y_1 := 2$$

$$y_2 := 2$$

```
>pers[GS1]:=y=gradien_f(x)*(x-x[1])+y[1];pers[GS2]:= y=gradien_f(x)*(x-x[2])+y[2];
```

$$pers_{GS1} := y = 3\,x - 1$$
$$pers_{GS2} := y = 3\,x - 1$$

Hampir sama dengan mencari garis singgung untuk dua garis yang sejajar, tetapi untuk mencari persamaan garis singgung untuk dua yang saling tegak lurus harus persyaratan yaitu $m_1 . m_2$ = -1. Dimana m_1 merupakan gradien dari garis yang tegak lurus dengan garis singgung, dan m_2 merupakan gradien dari garis singgung kurva.

$f(x)$ merupakan fungsi dari kurva, dan $g(x)$ merupakan fungsi garis yang tegak lurus dengan garis singgung. Gradien $g(x)$ didefinisikan dengan mendiferensialkan fungsi $g(x)$. Karena $m_1 . m_2 = -1$ atau gradient $g(x) = -\dfrac{1}{gradien\_f(x)}$, maka kita gunakan definisi gradien untuk mencari nilai x dalam *maple* diperintahkan dengan x[a]. Maka akan muncul pertanyaan bagaimana jika terdapat lebih dari satu nilai x? *Soln* merupakan penyelesaian persamaan gradient. Kita definisikan terlebih dahulu x[1] sampai x[n] sesuai dengan banyaknya penyelesaian pada *soln*. Setelah didapat nilai x, kita substitusikan ke $f(x)$ untuk mendapatkan nilai y. Untuk x yang lebih dari satu maka untuk mencari nilai y kita juga perlu mendefinisikan y[1] sampai y[n].

e. Fungsi naik dan fungsi turun.

1. Fungsi naik.

Syarat fungsi dikatakan naik, jika $f'(x) > 0$. *Maple* menyediakan fasilitas untuk mencari nilai $f'(x)$, dengan menuliskan perintah sebagai berikut:

```
> restart;
> f:=x->1/2*x^2-3*x+4;
> Diff(f(x),x)=diff(f(x),x);
> Nilai_x:=solve(diff(f(x),x),x);
```

$f'(x)$ dicari dengan menurunkan $f(x)$ ke x, dan Nilai_x merupakan hasil penyelesaian dari $f'(x) = 0$. Maka x yang memenuhi syarat naik dapat dipenuhi.

```
> restart;
> f:=x->1/3*x^3+4*x^2-20*x+2;
> Diff(f(x),x)=diff(f(x),x);
> Soln:=solve(diff(f(x),x),x);
> Nilai_x[1]:=Soln[1];Nilai_x[2]:=Soln[2];
```

$$Nilai\_x_1 := 2$$
$$Nilai\_x_2 := -10$$

```
> a:=3;b:=-5;c:=-11;
```

$$a := 3$$
$$b := -5$$
$$c := -11$$

```
> analisa[1]:=subs(x=a,diff(f(x),x));
analisa[2]:=subs(x=b,diff(f(x),x));
analisa[3]:=subs(x=c,diff(f(x),x));
```

$$analisa_1 := 13$$
$$analisa_2 := -35$$
$$analisa_3 := 13$$

$f'(x)$ dicari dengan menurunkan $f(x)$ ke x, dan Nilai_x merupakan hasil penyelesaian dari $f'(x) = 0$. Untuk kasus ini, terdapat nilai_x lebih dari satu, sehingga perlu mendefinisikan Nilai_x yang lain. Soln merupakan penyelesaian $f'(x)$. Kita definisikan terlebih dahulu x[1] dan x[2] atau sesuai dengan banyaknya penyelesaian pada soln. Kita perlu mendefinisikan a, b, dan c, untuk menganalisa bagaimana interval untuk nilai_x. Ketentuan untuk menentukan a, b, dan c, adalah $a < nilai\_x_1 < b < nilai\_x_2 < c$.

2. Fungsi turun.

Syarat fungsi dikatakan turun, jika $f'(x) < 0$. *Maple* menyediakan fasilitas untuk mencari nilai $f'(x)$, dengan menuliskan perintah sebagai berikut:

```
> restart;
> f:=x->(x-2)^2;
> Diff(f(x),x)=diff(f(x),x);
> solve({diff(f(x),x)},{x});
```

$f'(x)$ dicari dengan menurunkan $f(x)$ ke x, dan Nilai_x merupakan hasil penyelesaian dari $f'(x) = 0$. Maka x yang memenuhi syarat turun dapat dipenuhi.

```
> restart;
> f:=x->x^3+9*x^2+15*x+14;
> Diff(f(x),x)=diff(f(x),x);
> Soln:=solve(diff(f(x),x),x);
> Nilai_x[1]:=Soln[1];Nilai_x[2]:=Soln[2];
```

$$Nilai\_x_1 := -1$$

$$Nilai\_x_2 := -5$$

```
> a:=0;b:=-3;c:=-6;
```

$$a := 0$$
$$b := -3$$
$$c := -6$$

```
> analisa[1]:=subs(x=a,diff(f(x),x));
analisa[2]:=subs(x=b,diff(f(x),x));
analisa[3]:=subs(x=c,diff(f(x),x));
```

$$analisa_1 := 15$$
$$analisa_2 := -12$$
$$analisa_3 := 15$$

$f'(x)$ dicari dengan menurunkan $f(x)$ ke x, dan Nilai_x merupakan hasil penyelesaian dari $f'(x) = 0$. Untuk kasus ini, terdapat nilai_x lebih dari satu, sehingga perlu mendefinisikan Nilai_x yang lain. Soln merupakan penyelesaian $f'(x)$. Kita definisikan terlebih dahulu x[1] dan x[2] atau sesuai dengan banyaknya penyelesaian pada soln. Kita perlu mendefinisikan a, b, dan c, untuk menganalisa bagaimana interval untuk nilai_x. Ketentuan untuk menentukan a, b, dan c, adalah $a < nilai\_x_1 < b < nilai\_x_2 < c$.

f. Nilai stasioner dan jenisnya.

Program *maple* menyediakan fasilitas untuk menyajikan nilai stasioner dan jenisnya. Dalam *maple* kita bisa menuliskan perintah sebagai berikut:

```
> restart;
> f:=x->x^2-2*x+3;
> fp:=diff(f(x),x);Nilai_x:=solve(fp=0,x);
```

$$fp := 2x - 2$$
$$Nilai\_x := 1$$

```
> Nilai_y:=subs(x=Nilai_x,f(x));
```

$$Nilai\_y := 2$$

Dengan menggunakan perintah tersebut akan menghasilkan Nilai_x sebagai absis dari titik stasioner. Jika hasil dari Nilai_x lebih dari satu, maka kita harus mendefinisikannya. Misalnya dengan x[1]:=Nilai_x[1]; x[2]:=Nilai_x[2]; Dan Nilai_y sebagai ordinat dari titik stasioner. Sehingga dapat disimpulkan bahwa titik stationer berada pada koordinat (Nilai_x, Nilai_y). Karena ada beberapa jenis nilai stasioner maka kita perlu menganalisa. Kita definisikan a dan b sebagai berikut:

```
> a:=Nilai_x-2;b:=Nilai_x+2;
```

$$a := -1$$

$$b := 3$$

```
> analisa[1]:=subs(x=a,diff(f(x),x));
analisa[2]:=subs(x=b,diff(f(x),x));
```

$$analisa_1 := -4$$

$$analisa_2 := 4$$

Ada 3 jenis nilai stasioner yaitu:

1. Titik balik maksimum.

   Titik stasioner dikatakan merupakan titik balik maksimum jika pada analisa[1] bernilai negatif dan pada analisa[2] bernilai positif.

2. Titik balik minimum.

   Titik stasioner dikatakan merupakan titik balik minimum jika pada analisa[1] bernilai positif dan pada analisa[2] bernilai negatif.

3. Titik belok horizontal.

   Titik stasioner dikatakan merupakan titik belok horizontal jika pada analisa[1] dan analisa[2] bernilai sama (negatif-negatif atau positif-positif).

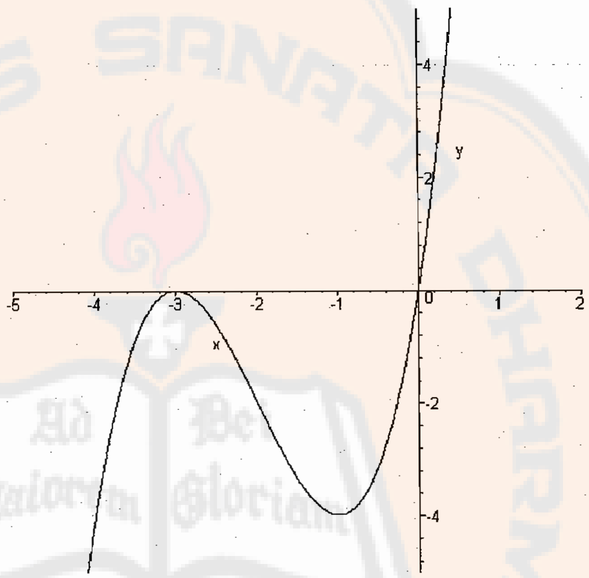
g. Grafik fungsi.

Program *maple* menyediakan fasilitas untuk menyajikan grafik fungsi. Dengan hanya menuliskan plot(f(x),x=-5..2); dan $f(x)$ telah didefinisikan sebelumnya, maka *worksheet* akan langsung menampilkan grafik fungsi $f(x)$ tersebut. Untuk menyajikan grafik dengan menggunakan fasilitas *maple*, kita hanya menuliskan perintah sebagai berikut:

```
> restart;
> f:=x->x*(x+3)^2;
```

$$f := x \rightarrow x\,(x+3)^2$$

```
> plot(f(x),x=-5..2,y=-5..5);
```



Gambar 23. grafik fungsi $f(x) = x(x+3)^2$ dengan menggunakan perintah *plot*

Akan tetapi agar siswa dapat menggambar di kertas kita perlu menganalisa grafik tersebut. Adapun langkah-langkah sebelum mendapatkan hasil berupa grafik tersebut antara lain:

1. Mendefinisikan $f(x)$.

   Menuliskan fungsi $f(x)$ dengan menuliskan perintah sebagai berikut:

```
> restart;
> f:=x->x*(x+3)^2;
```

$$f := x \rightarrow x\,(x+3)^2$$

2. Menentukan titik potong dengan sumbu x.

   Dalam program *maple* menyediakan fasilitas untuk menentukan titik potong dengan sumbu x. Dengan menuliskan

   ```
   > solve({f(x)},{x,y});
   ```
   $$\{x = 0, y = y\}, \{x = -3, y = y\}$$

   maka *worksheet* akan menampilkan hasil dari penyelesaian $f(x)$ yang merupakan titik potong dengan sumbu x. Pada *maple output y = y*, berarti $y = 0$.

3. Menentukan titik potong dengan sumbu y.

   Dalam program *maple* menyediakan fasilitas untuk menentukan titik potong dengan sumbu y. Dengan menuliskan

   ```
   > subs(x=0,f(x));
   ```
   $$0$$

   maka *worksheet* akan menampilkan hasil dari penyelesaian $f(x)$ yang merupakan titik potong dengan sumbu y.

4. Menentukan titik stasioner dan jenis titik stasioner.

   Seperti yang telah dibahas sebelumnya, dalam menggambar grafik ini menggunakan titik stasioner. Syarat dan perintahnya dapat dilihat kembali pada pembahasan nilai stasioner dan jenisnya.

   ```
   > fp:=diff(f(x),x);soln:=solve(fp=0,x);
   ```
   $$fp := (x+3)^2 + 2\,x\,(x+3)$$
   $$soln := -1, -3$$

   ```
   > x[1]:=soln[1];x[2]:=soln[2];
   ```
   $$x_1 := -1$$
   $$x_2 := -3$$

```
> y[1]:=subs(x=x[1],f(x));
y[2]:=subs(x=x[2],f(x));
```

$$y_1 := -4$$

$$y_2 := 0$$

```
> a:=x[1]-1;b:=x[1]+1;c:=x[2]-1;d:=x[2]+1;
```

$$a := -2$$

$$b := 0$$

$$c := -4$$

$$d := -2$$

```
> analisa[1]:=subs(x=a,fp);
analisa[2]:=subs(x=b,fp);
analisa[3]:=subs(x=c,fp);
analisa[4]:=subs(x=d,fp);
```

$$analisa_1 := -3$$

$$analisa_2 := 9$$

$$analisa_3 := 9$$

$$analisa_4 := -3$$

Fungsi tersebut stasioner pada titik A(x_1,y_1) dan B(x_2,y_2). Dalam hal ini stasioner di titik A(-1,-4) dan B(-3,0). Dari hasil analisa maka dapat kita simpulkan bahwa A merupakan titik balik maksimum dan B merupakan titik balik minimum.

5. Menentukan titik lain.

Dalam *maple* menyediakan fasilitas untuk menentukan titik lain dalam pembuatan grafik. Dengan menuliskan perintah sebagai berikut:

```
> for i from -5 to 3 do y [i]:=f(i) end do;
```

$$y_{-5} := -20$$

$$y_{-4} := -4$$

$$y_{-3} := 0$$

$$y_{-2} := -2$$

$$y_{-1} := -4$$

$$y_0 := 0$$

$$y_1 := 16$$

$$y_2 := 50$$

$$y_3 := 108$$

Siswa dapat memasukkan nilai x yaitu dengan mengganti -5 dan 5 dengan bilangan yang dikehendaki. Banyaknya *output* akan sama dengan banyaknya *input*. Penjelasan untuk *output*, misal untuk $y_{-5} := -20$, berarti nilai y pada x = -5 adalah -20 atau (-5,-20). Penjelasan ini analog untuk *output* yang lain.

6. Membuat grafik

   Setelah 5 langkah di atas selesai, maka siswa dapat menggambarkan grafik fungsi tersebut di kertas.

h. Turunan kedua suatu fungsi.

Siswa harus sudah benar-benar paham tentang turunan pertama suatu fungsi sebelum mempelajari turunan kedua suatu fungsi. Dalam maple mempunyai fasilitas untuk mengerjakan turunan kedua suatu fungsi, yaitu dengan menuliskan perintah sebagai berikut:

```
> restart;
> f:=x->3/4*x^4-5/3*x^3+1/2*x^2-4*x+1;
```

$$f := x \to \frac{3}{4}x^4 - \frac{5}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 4x + 1$$

```
> Diff(f(x),x$2)=diff(f(x),x$2);
```

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{3}{4}x^4 - \frac{5}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 4x + 1\right) = 9x^2 - 10x + 1$$

$f(x)$ didefinisikan terlebih dahulu. Perbedaan dengan turunan pertama adalah pada penulisan *x$2* yang merupakan perintah untuk turunan kedua.

i. Turunan dalam perhitungan kecepatan dan percepatan.

1. Kecepatan.

Sebuah benda bergerak dari suatu tempat ke tempat lain dan menempuh jarak w dalam waktu t, maka:

$$\text{kecepatan rata-ratanya} = \frac{\textit{Perubahan jarak}}{\textit{Perubahan waktu}} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Kecepatan (v) pada saat t didefinsikan sebagai;

$$v = \frac{ds}{dt} = \lim_{t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

v merupakan turunan pertama dari fungsi jarak s.

Karena kita telah mempelajari turunan pertama dengan menggunakan fasilitas *maple* dapat dituliskan dengan perintah:

```
> restart;
> s:=t->2/3*t^3-9/2*t^2+10*t;
> n:=1;
> v:= diff(s(t),t);
```

$$v := 2\,t^2 - 9\,t + 10$$

```
> Kecepatan:=subs(t=n,v);
```

$$Kecepatan := 3$$

Dengan *maple*, kecepatan merupakan substitusi t = n ke dalam turunan pertama fungsi $s(t)$.

2. Percepatan

Jika kecepatan sebuah benda mengalami perubahan, maka benda tersebut mempunyai suatu percepatan yang dinyatakan dengan:

$$\text{Percepatan} = \frac{\textit{Perubahan kecepatan}}{\textit{Perubahan waktu}} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Percepatan (a) pada saat t didefinsikan sebagai;

$$a = \frac{dv}{dt} = \lim_{t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad \text{atau}$$

$$a = \frac{d^2 s}{dt^2}$$

a merupakan turunan pertama dari fungsi kecepatan v, atau a merupakan turunan kedua dari fungsi jarak s.

Karena kita telah mempelajari turunan kedua dengan menggunakan fasilitas *maple*, dapat dituliskan dengan perintah:

```
> restart;
> s:=t->2/3*t^3-9/2*t^2+10*t;
> m:=4;
> a:= diff(s(t),t$2);
```

$$a := 4\,t - 9$$

```
> Percepatan:=subs(t=m,a);
```

$$Percepatan := 7$$

Dengan *maple*, percepatan merupakan substitusi $t = n$ ke dalam turunan kedua fungsi $s(t)$.

BAB V

MODUL PEMBELAJARAN MATEMATIKA

PADA POKOK BAHASAN KALKULUS KELAS XI ILMU ALAM

A. Garis-garis besar penyusunan Modul.

Menurut Soemirat (1980), modul adalah bingkisan bahan pengajaran tertulis yang dapat dipelajari oleh anak dengan aktifitas mandiri, layanan, dan bimbingan guru atau pamong diatur sesedikit mungkin. Modul berwujud berkas behan tertulis yang berisi kegiatan belajar dengan petunjuk-petunjuknya, dan ada pula yang dilengkapi dengan media pembelajaran seperti slide, kaset, file dan lain-lain.

Modul dapat dirumuskan sebagai suatu unit yang lengkap yang berdiri sendiri dan terdiri atas suatu rangkaian kegiatan belajar yang disusun untuk membantu siswa mencapai sejumlah tujuan yang dirumuskan secara khusus dan jelas (Nasution:1982).

1. Bentuk umum modul.

Dalam penyusunan modul dapat diikuti berbagai kemungkinan. Di bawah ini diberikan beberapa alternatif tentang tuga sapek utama yakni isi atau bahan, waktu belajar, dan urutan modul. (Nasution: 1982).

a. Bahan.

- Siswa harus menyelesaian semua modul atau ia boleh memilih hanya beberapa modul menurut keperluannya.

- Tujuan-tujuan dirumuskan dengan jelas dan siswa boleh merencanakan atau memiliki kegiatan-kegiatan belajar yang dapat membantunya untuk mencapai tujuan-tujuan itu.
- Dalam tiap modul beban itu sebagaian atau seluruhnya diwajibkan untuk dipelajari.
- Seluruh bahan atau sebagian saja yang dimodulkan.

b. Waktu belajar.

- Fasilitas belajar sert sumber-sumber belajar terbuka sebanjang hari dan pada malam harinya atau hanya untuk waktu-waktu tertentu saja.
- Seluruh bahan dipelajari secara individual atau sebagian saja dan selanjutnya dilangkapi dengan kuliah, penjelasan guru, diskusi dan sebagainya.

c. Urutan modul.

- Modul-modul dipelajari menurut urutan tertentu, atau siswa mempelajarinya menurut urutan yang diinginkan.

2. Unsur-unsur Administrasi Modul.

Menurut Nasution (1982), unsur-unsur administrasi modul terdiri dari:

a. Pengembangan Modul.

- Memilih bahan pelajaran dan alat-alat pelajaran
- Menyusun bahan-dalam satuan-satuan untuk setiap modul.
- Merumuskan tujuan pada setiap modul.
- Menyesuaikan tujuan dengan proses belajar.

- Merencanakan dan memonotor dan mencatat kemajuan dan hasil belajar murid.
- Merencanakan evaluasi akhir hasil belajar murid.

b. Pelaksanaan.

- Penyebaran, penyampaian modul kepada siswa.
- Memonitor kemajuan belajar siswa.
- Mencatat hasil belajar siswa.
- Menilai hasil belajar akhir.

3. Cara menyusun modul.

Menurut Nasution (1982), dalam garis besarnya penyusunan modul atau pengembangan modul dapat megikuti langkah-langkah yang berikut, yaitu:

a. Merumuskan sejumlah tujuan secara jelas, spesifik, dalam bentuk kegiatan untuk siswa yang dapat diamati dan diukur.

b. Urutan tujuan-tujuan itu yangmenentukan langkah-langkah yang diikuti dalam modul itu.

c. Melihat dan mengukur pengetahuan dan kemampuan yang telah dimiliki siswa sebagai prasyarat mempelajari modul tertentu.

d. Menyusun alasan pentingnya mempelajari modul tertentu, bagi siswa.

e. Merencanakan kegiatan-kegiatan belajar untuk membantu dan membimbing saiwa agar mencapai kompetensi-kompetensi seperti yang dirumuskan dalam tujuan. Kegiatan ini berupa mendengarkan rekaman, meilihat film, mengadakan percobaan, dalam laboratorium, membaca, menyelesaikan soal, dan lain sebagainya.

f. Menyusun lembar evaluasi untuk mengukur hasil belajar siswa.

g. Menyiapkan sumber-sumber pengajaran yang diperlukan untuk memahami materi.

4. Tahap-tahap penyusunan modul.

Menurut Vembrianto (1981), pelaksanaan modul pada suatu jan pelajaran melalui beberapa tahap, yaitu:

a. Guru mempersiapkan segala perlengkapan yang diperlukan.

b. Guru memberikan pengarahan singkat tentang tugas siswa dalam mengerjakan modul.

c. Siswa mempelajari lembaran kegiatan dan melakukan tugas-tugas dalam lembaran kerja.

d. Siswa memeriksa hasil pekerjaannya dan memperbaiki kesalahan-kesalahannya.

e. Guru memberikan tes kepada siswa untuk mengevaluasi penugasan siswa atas modul yang telah dipelajarinya.

5. Isi modul

Secara garis besar, modul berisi petunjuk unktuk guru, lembar kegiatan siswa, lembar kerja, kunci jawaban lembar kerja, lembar evaluasi, dan kunci lembar evaluasi (Vembrianto, 1981) dan formatnya dapat dilihat di bawah ini:

a. Petunjuk untuk guru berisi:

- Petunjuk umum, memuat prasyarat tentang topik yang telah dipelajari dan sudah dikuasai siswa, petunjuk lain yang diperlukan untuk menjelaskan modul tersebut misalnya adanya istilah baru, aturan khusus, penjelasan tes, dan lain-lain.
- Petunjuk khusus, memuat pokok bahasan dan sub pokok bahasan, kelas dan semester, alokasi waktu, tujuan pembelajaran, pokok-pokok materi, prosedur pengajaran yang di dalamnya berisi tugas guru, tugas siswa, alat dan bahan, dan evaluasi.

b. Lembar kegiatan siswa berisi:

- Petunjuk umum, memuat prasyarat apa yang harus dimengerti oleh siswa untuk dapat mempelajari modul tersebut, petunjuk lain, seperti istilah-istilah, langkah-langkah khusus dan aturan-aturan, dan lain-lain.
- Petunjuk khusus, memuat pokok bahasan dan sub pokok bahasan, kelas dan semester, alokasi waktu, tujuan pembelajaran, alat dan sumber.
- Kegiatan belajar yang harus dilakukan oleh siswa.

c. Lembar kerja berisi soal latihan.

d. Kunci jawaban lembar kerja berisi jawaban beserta jawaban beserta cara penyelesaiannya.

e. Lembar evaluasi berisi soal tes.

f. Lembar jawaban lembar evaluasi berisi jawaban berserta cara penyelesaiannya, dan pedoman penilaian.

Petunjuk untuk guru khusus diperuntukkan bagi guru dan hanya diketahui oleh guru. Kunci jawaban lembar kerja dan kunci jawaban lembar evaluasi disimpan oleh guru dan hanya diberikan kepada siswa yang telah berhasil menyelesaikan tugas-tugas pada lembar kerja dan lembar evaluasi.

Pengajaran dengan modul mengharus siswa aktif dan akan membawa hasil belajar yang lebih baik, maka penulis memilih menggunakan pembelajaran dengan modul untuk pembelajaran matematika pada pokok bahasan kalkulus kelas XI Ilmu Alam Sekolah Menengah Atas dengan menggunakan *maple*. Oleh karena itu penulis menyusun 4 buah modul dengan topik kalkukus kelas XI Ilmu Alam. Untuk topik kalkulus yang lain dapat dikembangkan sesuai kebutuhan.

B. Modul Pembelajaran Matematika pada Pokok Bahasan Kalkulus kelas XI Ilmu Alam

Penulis menyusun 4 buah modul dengan topik kalkulus kelas XI Ilmu Alam. Adapun sub-sub topik yang penulis susun adalah sebagai berikut:

1. Limit fungsi di satu titik dan di tak hingga.
2. Sifat limit fungsi untuk menghitung bentuk tak tentu fungsi aljabar dan trigonometri.
3. Konsep, sifat, dan aturan dalam perhitungan turunan fungsi.
4. Turunan untuk menentukan karakteristik suatu fungsi dan memecahkan masalah.

1. MODUL TENTANG LIMIT FUNGSI DI SATU TITIK DAN DI TAK HINGGA.

Petunjuk untuk guru

Modul	:	Kalkulus
Topik	:	Limit fungsi di satu titik dan di tak hingga
Kelas	:	XI Ilmu Alam SMA, Semester II
Waktu	:	4 x 45 Menit

Umum

Dalam modul ini mempelajari bagaimana cara menentukan nilai Limit fungsi di satu titik dan di tak hingga. Program *Maple* dan contoh file-filenya tersebut disimpan dalam disket yang disertakan dalam modul ini.

Sebelum menggunakan modul ini siswa harus sudah dapat memahami fungsi aljabar, dan fungsi trigonometri, karena hal tersebut sangat penting untuk mempelajari limit fungsi di satu titik dan di tak hingga.

Guru dan siswa harus sudah bisa menggunakan komputer dan akan lebih baik lagi jika guru dan siswa sudah bisa mengoperasikan program *maple*. Jika guru dan siswa belum bisa mengoperasikan program *maple*, maka sebelum menggunakan modul ini harus ada pengenalan program *maple* terlebih dahulu.

Khusus

1. Topik : Limit fungsi di satu titik dan di tak hingga.
2. Kelas : XI Ilmu Alam SMA, semester II
3. Waktu : 4 x 45 menit.

4. Tujuan : Setelah menyelesaikan modul ini, siswa dapat menentukan nilai limit fungsi di satu titik dan di tak hingga.

5. Pokok-pokok pelajaran:

   a. Pengertian limit.

   b. Menentukan limit fungsi aljabar di satu titik dan di tak hingga.

   c. Menentukan limit fungsi trigonometri di satu titik.

   d. Teorema limit.

   e. Kontinuitas dan diskontinuitas fungsi

6. Prosedur pengajaran:

   a. Tugas guru:

      – Sebelum menggunakan modul ini, siswa diajak mengingat kembali tentang fungsi aljabar dan fungsi trigonometri.

      – Sebelum memulai kegiatan ini guru menyiapkan segala seuatu yang diperlukan misalnya mengeek komputer yang akan dipakai siswa, dan hendaknya guru menyimpan program yang ada dalam disket ke dalam harddisk.

      – Membimbing menjelaskan dan menolong siswa yang memerlukan bantuan. Menilai apakah tujuan belajar tercapai. Hal ini dapat terlihat dari jawaban siswa pada lembar kerja dan lembar evaluasi.

   b. Tugas siswa :

      – Memehami tujuan pelajaran.

      – Melakukan kegiatan sesuai dengan urutan petunjuknya.

      – Mempelajari uraian dan menyimpulkan hasil kegiatan.

- Mengerjakan soal latihan pada lembar kerja.
- Mengerjakan tes pada lembar evaluasi.

c. Alat dan sumber yang diperlukan.

- Alat : Komputer yang di dalamnya sudah terdapat program maple.
- Sumber : Buku matematika, file-file berbantuan *Maple*.

7. Evaluasi.

a. Prosedur.

- Pengisian lembar kerja dan lembar evaluasi setelah kegiatan dilaksanakan seluruhnya.
- Pertanyaan-pertanyaan lisan selama kegiatan.

b. Alat evaluasi :

- Lembar kerja.
- Lembar evaluasi.

LEMBAR KEGIATAN SISWA

1. Petunjuk	:	Untuk dapat memahami limit fungsi di satu titik dan di tak hingga, kita harus mengerti pengertian fungsi aljabar dan fungsi trigonometri.
	:	Sebelum menggunakan modul ini siswa harus sudah paham tentang pengertian limit yang sudah dibaca terlebih dahulu dalam buku, serta sudah dapat menyelesaikan soal fungsi aljabar dan fungsi trigonometri dengan metode substitusi .
2. Pokok bahasan	:	Kalkulus.
3. Sub Pokok Bahasan	:	Limit fungsi di satu titik dan di tak hingga.
4. Tujuan	:	Siswa dapat mengerti dan memahami nilai limit fungsi di satu titik dan di tak hingga
	:	Siswa dapat menentukan nilai limit fungsi aljabar di satu titik dan di tak hingga..
	:	Siswa dapat menentukan nilai limit fungsi trigonometri di satu titik.
	:	Siswa dapat memahami, mengerti, dan menerapkan teorema limit pada penyelesaian soal.
	:	Siswa dapat mengerti syarat-syarat kontinuitas dan diskontinuitas fungsi.

5. Alat : komputer yang di dalamnya sudah terdapat program *maple*.

6. Sumber : Buku matematika dan contoh file-file *maple*.

<u>Kegiatan 1. Pengertian Limit.</u>

1. Pahami pengertian limit dalam buku acuan. Apa definisi dari limit?
2. Buka program *maple* file MODUL 1. Kemudian pilih link <u>pengertian limit.</u>
3. Pada *section* 1 terlihat gambar dari limit fungsi $f(x)$. Gantilah nilai $f(x)$, nilai a, nilai left, dan nilai right, dimana a, left, right $\in$ R. Dengan syarat nilai a berada pada interfal nilai left dan nilai right. Kemudian tekan *enter* dari *restart*. Apa yang terjadi?
4. Pada *section* 2. Amati apakah ada perbedaan antara limit kiri dengan limit kanan? Gantilah nilai $f(x)$ dan nilai a. Kemudian tekan *enter* dari *restart*. Apa yang terjadi? Apa kesimpulanmu tentang limit kiri dan limit kanan? Dan bagaimana hubungan antara limit kiri dan limit kanan dengan pengertian limit?
5. Kemudian klik <u>kembali ke modul 1</u>

<u>Kegiatan 2. Menentukan limit fungsi aljabar di satu titik dan di tak hingga.</u>

a. Limit fungsi aljabar di satu titik

   1. Klik <u>Limit Fungsi Aljabar.</u> Kemudian perhatikan contoh limit di satu titik!
   2. Amati nilai limit dan hasil penyelesaian soal dengan metode substitusi. Gantilah fungsi $f(x)$ dengan fungsi aljabar lainnya. Kemudian tekan

enter dari *restart*. Apa yang terjadi? Apakah hasil dari limit dan substitusi berubah?

3. Gantilah nilai a dimana a $\in$ R. Kemudian tekan enter dari restart. Apa yang tejadi? Apakah nilai limit dan substitusi berubah? Bagaimanakah hubungan antara nilai limit dan hasil penyelesaian fungsi dengan menggunakan metode substitusi?
4. Apa yang terjadi jika fungsi $f(x)$ dan a keduanya diganti?
5. Klik Limit di tak hingga.

b. Limit fungsi aljabar di tak hingga

1. Perhatikan contoh 1 dan 2! Perhatikan fungsi $f(x)$ dan $g(x)$. Perhatikan pangkat tertinggi dan koefisien pangkat tertinggi pada masing-masing fungsi. Apakah pangkat tertinggi $f(x)$ < pangkat tertinggi $g(x)$, pangkat tertinggi $f(x)$ = pangkat tertinggi $g(x)$, ataukah pangkat tertinggi $f(x)$ > pangkat tertinggi $g(x)$? Perhatikan pula nilai $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}$!
2. Untuk lebih memahami, gantilah fungsi $f(x)$ dan $g(x)$ sesuai dengan jawabanmu pada point 2. Kemudian tekan *enter* dari *restart*. Amati apa yang terjadi!
3. Pada contoh 1 dan 2 ini, menurut kamu bagaimana cara menentukan nilai limitnya? Bagaimana hubungan antara nilai limit dengan koefisien pangkat tertinggi?
4. Kemudian perhatikan contoh 3 dan 4! Perhatikan fungsi $f(x)$ dan $g(x)$. Perhatikan pangkat tertinggi dan koefisien pangkat tertinggi pada masing-

masing fungsi. Apakah pangkat tertinggi $f(x)$ < pangkat tertinggi $g(x)$, pangkat tertinggi $f(x)$ = pangkat tertinggi $g(x)$, ataukah pangkat tertinggi $f(x)$ > pangkat tertinggi $g(x)$? Perhatikan pula nilai $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$!

5. Untuk lebih memahami, gantilah fungsi $f(x)$ dan $g(x)$ sesuai dengan jawabanmu pada point 4. Kemudian tekan *enter* dari *restart*. Amati apa yang terjadi!
6. Pada contoh 3 dan 4 ini, menurut kamu bagaimana cara menentukan nilai limitnya? Bagaimana hubungan antara nilai limit dengan koefisien pangkat tertinggi?
7. Kemudian perhatikan contoh 5 dan 6! Perhatikan fungsi $f(x)$ dan $g(x)$. Perhatikan pangkat tertinggi dan koefisien pangkat tertinggi pada masing-masing fungsi. Apakah pangkat tertinggi $f(x)$ < pangkat tertinggi $g(x)$, pangkat tertinggi $f(x)$ = pangkat tertinggi $g(x)$, ataukah pangkat tertinggi $f(x)$ > pangkat tertinggi $g(x)$? Perhatikan pula nilai $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$!
8. Untuk lebih memahami, gantilah fungsi $f(x)$ dan $g(x)$ sesuai dengan jawabanmu pada point 7. Kemudian tekan *enter* dari *restart*. Amati apa yang terjadi!
9. Pada contoh 5 dan 6 ini, menurut kamu bagaimana cara menentukan nilai limitnya? Bagaimana hubungan antara nilai $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$ dengan koefisien pangkat tertinggi?

10. Apa kesimpulan yang kamu dapatkan untuk menentukan $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$?

11. Klik Kembali ke MODUL I

Kegiatan 3. Menentukan Limit Fungsi Trigonometri.

1. Klik Limit Fungsi Trigonometri. Kemudian perhatikan contoh !
2. Amati nilai limit dan hasil penyelesaian soal dengan metode substitusi. Gantilah fungsi $f(x)$ dengan fungsi aljabar lainnya. Kemudian tekan *enter* dari *restart*. Apa yang terjadi? Apakah hasil dari limit dan substitusi berubah?
3. Gantilah nilai a dimana a $\in$ R. Kemudian tekan *enter* dari *restart*. Apa yang tejadi? Apakah nilai limit dan substitusi berubah? Bagaimanakah hubungan antara nilai limit dan hasil penyelesaian fungsi dengan menggunakan metode substitusi?
4. Apa yang terjadi jika fungsi $f(x)$ dan a keduanya diganti?
5. Kemudian klik Kembali ke MODUL I

Kegiatan 4. Teorema Limit.

1. Bacalah teorema limit dalam buku acuan.
2. Pada modul I klik teorema 1. Perhatikan contoh !
   a. Gantilah nilai a. Kemudian tekan *enter* dari *restart*. Amati apa yang terjadi!
   b. Gantilah $f(x)$. Kemudian tekan *enter* dari *restart*. Amati apa yang terjadi!

c. Apa yang dapat kamu simpulkan dari eksplorasi tersebut?

d. Setelah selesai klik kembali ke MODUL I

3. Pada modul I klik teorema 2. Perhatikan contoh!

   a. Gantilah nilai a. Kemudian tekan *enter* dari *restart*. Amati apa yang terjadi!

   b. Apa yang dapat kamu simpulkan dari eksplorasi tersebut?

   c. Setelah selesai klik kembali ke MODUL I

4. Pada modul I klik teorema 3. Perhatikan contoh!

   a. Gantilah nilai a. Kemudian tekan *enter* dari *restart*. Amati apa yang terjadi!

   b. Gantilah nilai k. Kemudian tekan *enter* dari *restart*. Amati apa yang terjadi!

   c. Gantilah $f(x)$. Kemudian tekan *enter* dari *restart*. Amati apa yang terjadi!

   d. Apa yang dapat kamu simpulkan dari eksplorasi tersebut?

   e. Setelah selesai klik kembali ke MODUL I

5. Pada modul I klik teorema 4. Perhatikan contoh!

   a. Gantilah nilai a. Kemudian tekan *enter* dari *restart*. Amati apa yang terjadi!

   b. Gantilah $f(x)$ atau $g(x)$. Kemudian tekan *enter* dari *restart*. Amati apa yang terjadi!

   c. Apa yang dapat kamu simpulkan dari eksplorasi tersebut?

   d. Setelah selesai klik kembali ke MODUL I

6. Pada modul I klik teorema 5. Perhatikan contoh!
   a. Gantilah nilai a. Kemudian tekan *enter* dari *restart*. Amati apa yang terjadi!
   b. Gantilah $f(x)$ atau $g(x)$. Kemudian tekan *enter* dari *restart*. Amati apa yang terjadi!
   c. Apa yang dapat kamu simpulkan dari eksplorasi tersebut?
   d. Setelah selesai klik kembali ke MODUL I
7. Pada modul I klik teorema 6. Perhatikan contoh!
   a. Gantilah nilai a. Kemudian tekan *enter* dari *restart*. Amati apa yang terjadi!
   b. Gantilah $f(x)$ atau $g(x)$. Kemudian tekan *enter* dari *restart*. Amati apa yang terjadi!
   c. Apa yang dapat kamu simpulkan dari eksplorasi tersebut?
   d. Setelah selesai klik kembali ke MODUL I
8. Pada modul I klik teorema 7. Perhatikan contoh!
   a. Gantilah nilai a. Kemudian tekan *enter* dari *restart*. Amati apa yang terjadi!
   b. Gantilah $f(x)$ atau $g(x)$. Kemudian tekan *enter* dari *restart*. Amati apa yang terjadi!
   c. Apa yang dapat kamu simpulkan dari eksplorasi tersebut?
   d. Setelah selesai klik kembali ke MODUL I

9. Pada modul I klik teorema 8. Perhatikan contoh!
   a. Gantilah nilai a. Kemudian tekan *enter* dari *restart*. Amati apa yang terjadi!
   b. Gantilah nilai n. Kemudian tekan *enter* dari *restart*. Amati apa yng terjadi!
   c. Gantilah $f(x)$. Kemudian tekan *enter* dari *restart*. Amati apa yang terjadi!
   d. Apa yang dapat kamu simpulkan dari eksplorasi tersebut?
   e. Setelah selesai klik kembali ke MODUL I
10. Pada modul I klik teorema 9. Perhatikan contoh!
    a. Gantilah nilai a. Kemudian tekan *enter* dari *restart*. Amati apa yang terjadi!
    b. Gantilah nilai n. Kemudian tekan *enter* dari *restart*. Amati apa yang terjadi!
    c. Gantilah $f(x)$. Kemudian tekan *enter* dari *restart*. Amati apa yang terjadi!
    d. Apa yang dapat kamu simpulkan dari eksplorasi tersebut?
    e. Setelah selesai klik kembali ke MODUL I

Kegiatan 5. Kontinuitas dan diskontinuitas

1. Pada modul I klik Kontinuitas dan Diskontinuitas Fungsi. Akan muncul contoh. Perhatikan contoh tersebut! Pada contoh 1, gantilah nilai a. Kemudian tekan *enter* dari *restart*. Amati apa yang terjadi! Gantilah $f(x)$. Kemudian tekan *enter* dari *restart*. Amati apa yang terjadi!

2. Pada contoh 2 merupakan kasus khusus. Gantilah nilai a. Kemudian tekan *enter* dari *restart*. Amati apa yang terjadi. Gantilah $f(x)$ dengan fungsi yang jika a disubstitusikan ke dalam $f(x)$ akan tidak akan menghasilkan suatu nilai (tak terdefinisi). Kemudian tekan *enter* dari *restart*.Amati apa yang terjadi. Apa yang dapat kamu simpulkan dari eksplorasi tersebut? Setelah selesai klik <u>kembali ke MODUL I</u>

LEMBAR KERJA SISWA

Kerjakan soal-soal berikut ini dalam buku latihanmu, kemudian cocokkanlah jawabanmu tersebut dengan menggunakan maple.

Untuk nomor 1-9, Tentukanlah hasil limitnya!

1. $\lim\limits_{x \to 3}(x^2 - 5)$

2. $\lim\limits_{x \to 3}(x^3 + 6x^2 - 5x + 3)$

3. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 2x}{x^2 - 4x + 4}$

4. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x^2 - x + 3}{x^3 - 5x + 8}$

5. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{(2x+3)^3 (3x-2)^2}{x^5 + 5}$

6. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x - \sqrt{2x - 1}}}{x + 1}$

7. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 2x}{x}$

8. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 5x}{\tan 2x}$

9. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x \sin 2x}{1 - \cos x}$

10. Apakah fungsi $f(x) = \dfrac{x-5}{x-3}$ kontinu atau diskontinu di $x = 0$?

LEMBAR EVALUASI SISWA

1. Tentukanlah hasil limit dari:

   a. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 - 2x}{x^2 + 4}$

   b. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 - 2x}{x^2 + 4}$

2. Tentukan hasil dari $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x}{\tan 3x}$

3. Diketahui fungsi $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$; $x \neq 2$.

   Tunjukkan bahwa y = $f(x)$ kontinu di $x = 1$.

KUNCI JAWABAN

LEMBAR KERJA SISWA

1. 14
2. 69
3. -1
4. 0
5. 75
6. 0
7. 2
8. $\frac{5}{2}$
9. 2
10. $f(0) = \frac{3}{5}$ dan $\lim_{x \to 0} f(x) = \frac{3}{5}$

    Jadi $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$, berarti $f(x)$ kontinu di $x = 0$

LEMBAR EVALUASI SISWA

1. a. 0

   b. 5

2. $\frac{2}{3}$

3. $f(0) = 3$ dan $\lim_{x \to 0} f(x) = 3$

   Jadi $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$, berarti $f(x)$ kontinu di $x = 1$

PEDOMAN PENILAIAN

- Nomor 1 jika betul semua nilainya 20
- Nomor 2 jika betul semua nilainya 20
- Nomor 3 jika betul semua nilainya 30
- Nilai Akhir X = *(jumlah nilai total)/7*

2. MODUL TENTANG SIFAT LIMIT FUNGSI UNTUK MENGHITUNG BENTUK TAK TENTU FUNGSI ALJABAR DAN TRIGONOMETRI.

Petunjuk untuk guru

Modul	:	Kalkulus
Topik	:	Sifat limit fungsi untuk menghitung bentuk tak tentu fungsi aljabar dan trigonometri.
Kelas	:	XI Ilmu Alam SMA, Semester II
Waktu	:	2 x 45 Menit

Umum

Dalam modul ini mempelajari bagaimana cara menentukan sifat limit fungsi untuk menghitung bentuk tak tentu fungsi aljabar dan trigonometri.. Program *Maple* dan contoh file-filenya tersebut disimpan dalam disket yang disertakan dalam modul ini.

Sebelum menggunakan modul ini siswa harus sudah dapat memahami fungsi aljabar, dan fungsi trigonometri, karena hal tersebut sangat penting untuk mempelajari sifat limit fungsi untuk menghitung bentuk tak tentu fungsi aljabar dan trigonometri..

Guru dan siswa harus sudah bisa menggunakan komputer dan akan lebih baik lagi jika guru dan siswa sudah bisa mengoperasikan program *maple*. Jika guru dan siswa belum bisa mengoperasikan program *maple*, maka sebelum menggunakan modul ini harus ada pengenalan program *maple* terlebih dahulu.

Khusus

1. Topik : Sifat limit fungsi untuk menghitung bentuk tak tentu fungsi aljabar dan trigonometri.
2. Kelas : XI Ilmu Alam SMA, semester II
3. Waktu : 2 x 45 menit.
4. Tujuan : Setelah menyelesaikan modul ini, siswa dapat menggunakan sifat limit fungsi untuk menghitung bentuk tak tentu fungsi aljabar dan trigonometri.
5. Pokok-pokok pelajaran:
   a. Pengertian bentuk tak tentu dari suatu limit fungsi.
   b. Menghitung bentuk tak tentu dari limit fungsi aljabar dan trigonometri.
   c. Menghitung limit fungsi yang mengarah ke konsep turunan.
   d. Sifat limit yang digunakan dalam perhitungan bentuk tak tentu limit fungsi.
6. Prosedur pengajaran:
   a. Tugas guru:
      – Sebelum menggunakan modul ini, siswa diajak mengingat kembali tentang fungsi aljabar dan fungsi trigonometri.
      – Sebelum memulai kegiatan ini guru menyiapkan segala seuatu yang diperlukan misalnya mengeek komputer yang akan dipakai siswa, dan hendaknya guru menyimpan program yang ada dalam disket ke dalam harddisk.

- Membimbing menjelaskan dan menolong siswa yang memerlukan bantuan. Menilai apakah tujuan belajar tercapai. Hal ini dapat terlihat dari jawaban siswa pada lembar kerja dan lembar evaluasi.

b. Tugas siswa :

- Memehami tujuan pelajaran.
- Melakukan kegiatan sesuai dengan urutan petunjuknya.
- Mempelajari uraian dan menyimpulkan hasil kegiatan.
- Mengerjakan soal latihan pada lembar kerja.
- Mengerjakan tes pada lembar evaluasi.

c. Alat dan sumber yang diperlukan.

- Alat : Komputer yang di dalamnya sudah terdapat program maple.
- Sumber : Buku matematika, file-file berbantuan *Maple*.

7. Evaluasi.

a. Prosedur.

- Pengisian lembar kerja dan lembar evaluasi setelah kegiatan dilaksanakan seluruhnya.
- Pertanyaan-pertanyaan lisan selama kegiatan.

b. Alat evaluasi :

- Lembar kerja.
- Lembar evaluasi.

LEMBAR KEGIATAN SISWA

1. Petunjuk	:	Untuk dapat memahami sifat limit fungsi untuk menghitung bentuk tak tentu fungsi aljabar dan trigonometri., kita harus mengerti pengertian fungsi aljabar dan fungsi trigonometri.
	:	Sebelum menggunakan modul ini siswa harus sudah paham tentang pengertian limit yang sudah dibahas dalam pembahasan sebelumnya, serta sudah dapat menyelesaikan soal fungsi aljabar dan fungsi trigonometri dengan metode substitusi .
2. Pokok bahasan	:	Kalkulus.
3. Sub Pokok Bahasan	:	Sifat limit fungsi untuk menghitung bentuk tak tentu fungsi aljabar dan trigonometri..
4. Tujuan	:	Siswa dapat menjelaskan arti tak tentu dari limit fungsi.
	:	Siswa dapat menghitung bentuk tak tentu dari limit fungsi aljabar dan trigonometri,
	:	Siswa dapat menghitung limit fungsi yang mengarah ke konsep turunan.
5. Alat	:	komputer yang di dalamnya sudah terdapat program *maple*.
6. Sumber	:	Buku matematika dan contoh file-file *maple*.

Kegiatan 1. Arti bentuk tak tentu dari limit fungsi

1. Pada modul II klik arti bentuk tak tentu dari limit fungsi.
2. Perhatikan contoh! Bandingkan hasil substitusi dan hasil limit.
3. Apa yang dapat kamu simpulkan dari eksplorasi tersebut?
4. Carilah beberapa contoh untuk fungsi aljabar dan fungsi trigonometri yang merupakan bentuk tak tentu dari limit fungsi!
5. Setelah selesai klik Kembali ke MODUL II.

Kegiatan 2. Bentuk tak tentu dari limit fungsi aljabar

1. Pada modul II klik Bentuk tak tentu dari limit fungsi aljabar
2. Perhatikan contoh 1! Bandingkan cara 1 dan cara 2. Apa yang dapat kamu simpulkan.
3. Perhatikan contoh 2! Bandingkan cara 1 dan cara 2. Apa yang dapat kamu simpulkan.
4. Gunakanlah contoh yang kamu cari dalam kegiatan satu dalam kegiatan ini. Gantilah nilai $f(x)$ dengan contoh yang kamu miliki. Kemudian tekan *enter* dari *restart*. Amati apa yang terjadi!
5. Apa yang dapat kamu simpulkan dari eksplorasi tersebut?
6. Setelah selesai klik Kembali ke MODUL II

Kegiatan 3. Bentuk tak tentu dari limit fungsi trigonometri

1. Pada modul II klik Bentuk tak tentu dari limit fungsi trigonometri
2. Perhatikan contoh! Apa yang dapat kamu simpulkan.

3. Gunakanlah contoh yang kamu cari dalam kegiatan satu dalam kegiatan ini. Gantilah nilai $f(x)$ dengan contoh yang kamu miliki. Kemudian tekan *enter* dari *restart*. Amati apa yang terjadi!
4. Apa yang dapat kamu simpulkan dari eksplorasi tersebut?
5. Setelah selesai klik Kembali ke MODUL II

Kegiatan 4. Limit fungsi yang mengarah ke konsep turunan

1. Pada modul II klik bentuk limit untuk x mendekati 0.
2. Perhatikan contoh! Bandingkan hasil substitusi dan hasil limit. Apa yang dapat kamu simpulkan?
3. Gantilah nilai $f(x)$ dengan contoh yang kamu miliki dalam kegiatan 1. Kemudian tekan *enter* dari *restart*. Apa yang dapat kamu simpulkan dari eksplorasi tersebut?
4. Setelah selesai klik Kembali ke MODUL II.

Kegiatan 4. Limit fungsi yang mengarah ke konsep turunan

1. Pada modul II klik Bentuk limit untuk x mendekati 0.
2. Perhatikan contoh! Bandingkan hasil substitusi dan hasil limit. Apa yang dapat kamu simpulkan?
3. Gantilah nilai $f(x)$ dengan contoh yang kamu miliki dalam kegiatan 1. Kemudian tekan *enter* dari *restart*. Apa yang dapat kamu simpulkan dari eksplorasi tersebut?
4. Setelah selesai klik Kembali ke MODUL II.

Kegiatan 5. Sifat-sifat yang digunakan dalam perhitungan bentuk tak tentu limit fungsi.

1. Pada modul II klik Sifat-sifat yang digunakan dalam perhitungan bentuk tak tentu limit fungsi.
2. Perhatikan contoh! Apa yang dapat kamu simpulkan?
3. Gantilah nilai $f(x)$ dan a dengan contoh yang kamu miliki dalam kegiatan 1. Kemudian tekan *enter* dari *restart*. Apa yang dapat kamu simpulkan dari eksplorasi tersebut?
4. Setelah selesai klik Kembali ke MODUL II.

LEMBAR KERJA SISWA

Kerjakan soal-soal berikut ini dalam buku latihanmu, kemudian cocokkanlah jawabanmu tersebut dengan menggunakan maple.

Tentukanlah hasil limitnya!

1. $\lim_{x\to 3} \frac{x^3-27}{x^2-9}$

2. $\lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x}-1}{x-1}$

3. $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{2x-3}$

4. $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$

5. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{\tan 2x}$

LEMBAR EVALUASI SISWA

Tentukanlah hasil limitnya!

1. $\lim_{x\to 2} \frac{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{4}}{x-2}$

2. $\lim_{x\to 4} \frac{4-x}{2-\sqrt{x}}$

3. $\lim_{x\to a} \frac{\tan x-\tan a}{x-a}$

KUNCI JAWABAN

LEMBAR KERJA SISWA

1. $\frac{9}{2}$
2. -1
3. 0
4. $\frac{1}{2}$
5. $\frac{1}{3}$

LEMBAR EVALUASI SISWA

1. $-\frac{1}{4}$
2. 4
3. $1+\tan(a)^2$

PEDOMAN PENILAIAN

- Nomor 1 jika betul semua nilainya 10
- Nomor 2 jika betul semua nilainya 10
- Nomor 3 jika betul semua nilainya 10
- Nilai Akhir X = *(jumlah nilai total)*/3

3. MODUL TENTANG KONSEP, SIFAT, DAN ATURAN DALAM PERHITUNGAN TURUNAN FUNGSI.

Petunjuk untuk guru

Modul	:	Kalkulus
Topik	:	konsep, sifat, dan aturan dalam perhitungan turunan fungsi.
Kelas	:	XI Ilmu Alam SMA, Semester II
Waktu	:	4 x 45 Menit

Umum

Dalam modul ini mempelajari bagaimana cara menggunakan konsep, sifat, dan aturan dalam perhitungan turunan fungsi. Program *Maple* dan contoh file-filenya tersebut disimpan dalam disket yang disertakan dalam modul ini.

Sebelum menggunakan modul ini siswa harus sudah dapat memahami gradien dan persamaan suatu garis lurus, fungsi aljabar, dan fungsi trigonometri, karena hal tersebut sangat penting untuk mempelajari konsep, sifat, dan aturan dalam perhitungan turunan fungsi.

Guru dan siswa harus sudah bisa menggunakan komputer dan akan lebih baik lagi jika guru dan siswa sudah bisa mengoperasikan program *maple*. Jika guru dan siswa belum bisa mengoperasikan program *maple*, maka sebelum menggunakan modul ini harus ada pengenalan program *maple* terlebih dahulu.

Khusus

1. Topik : Konsep, sifat, dan aturan dalam perhitungan turunan fungsi
2. Kelas : XI Ilmu Alam SMA, semester II
3. Waktu : 4 x 45 menit.
4. Tujuan : Setelah menyelesaikan modul ini, siswa dapat menggunakan konsep, sifat, dan aturan dalam perhitungan turunan fungsi.
5. Pokok-pokok pelajaran:
   a. Pengertian turunan.
   b. Rumus-rumus turunan fungsi aljabar dan trigonometri
   c. Aturan rantai
   d. Persamaan garis singgung.
6. Prosedur pengajaran:
   a. Tugas guru:
      - Sebelum menggunakan modul ini, siswa diajak mengingat kembali tentang gradien dan persamaan suatu garis lurus, fungsi aljabar dan fungsi trigonometri, .
      - Sebelum memulai kegiatan ini guru menyiapkan segala sesuatu yang diperlukan misalnya mengecek komputer yang akan dipakai siswa, dan hendaknya guru menyimpan program yang ada dalam disket ke dalam harddisk.
      - Membimbing menjelaskan dan menolong siswa yang memerlukan bantuan. Menilai apakah tujuan belajar tercapai. Hal ini dapat terlihat dari jawaban siswa pada lembar kerja dan lembar evaluasi.

b. Tugas siswa :

- Memahami tujuan pelajaran.
- Melakukan kegiatan sesuai dengan urutan petunjuknya.
- Mempelajari uraian dan menyimpulkan hasil kegiatan.
- Mengerjakan soal latihan pada lembar kerja.
- Mengerjakan tes pada lembar evaluasi.

c. Alat dan sumber yang diperlukan.

- Alat : Komputer yang di dalamnya sudah terdapat program maple.
- Sumber : Buku matematika, file-file berbantuan *Maple*.

7. Evaluasi.

a. Prosedur.

- Pengisian lembar kerja dan lembar evaluasi setelah kegiatan dilaksanakan seluruhnya.
- Pertanyaan-pertanyaan lisan selama kegiatan.

b. Alat evaluasi :

- Lembar kerja.
- Lembar evaluasi.

LEMBAR KEGIATAN SISWA

1. Petunjuk	:	Untuk dapat memahami konsep, sifat, dan aturan dalam perhitungan turunan fungsi, kita harus mengerti tentang grafik fungsi, pengertian fungsi aljabar dan fungsi trigonometri.
	:	Sebelum menggunakan modul ini siswa harus sudah paham tentang pengertian limit yang sudah dibahas sebelum pembahasan ini, siswa juga sudah dapat menyelesaikan soal fungsi aljabar dan fungsi trigonometri dengan metode substitusi, serta siswa sudah memahami gradien dan persamaan suatu garis lurus.
2. Pokok bahasan	:	Kalkulus.
3. Sub Pokok Bahasan	:	Konsep, sifat, dan aturan dalam perhitungan turunan fungsi.
4. Tujuan	:	Siswa dapat mengerti dan memahami pengertian turunan.
	:	Siswa dapat menggunakan aturan turunan untuk menghitung turunan fungsi aljabar dan trigonometri.
	:	Siswa dapat menentukan turunan fungsi komposisi dengan aturan rantai.

11. Pada modul III klik Turunan Fungsi Sinus. Perhatikan rumus!
    a. Apa yang dapat kamu simpulkan dari eksplorasi tersebut?
    b. Setelah selesai klik kembali ke MODUL III
12. Pada modul III klik Turunan Fungsi Cosinus. Perhatikan rumus!
    a. Apa yang dapat kamu simpulkan dari eksplorasi tersebut?
    b. Setelah selesai klik kembali ke MODUL III
13. Pada modul III klik Turunan Fungsi Tangen. Perhatikan rumus!
    a. Perhatikan cara 1 dan cara 2 untuk mencari turunan tangen. Perhatikan juga hasilnya.
    b. Apa yang dapat kamu simpulkan dari eksplorasi tersebut?
    c. Setelah selesai klik kembali ke MODUL III

Kegiatan 3. Aturan Rantai.

1. Pada modul III klik Aturan Rantai.
2. Perhatikan rumus pada aturan rantai.
3. Perhatikan contoh! Gantilah $f(x)$. Kemudian tekan *enter* dari *restart*. Amati apa yang terjadi!
4. Gantilah $v(x)$. Kemudian tekan *enter* dari *restart*. Amati apa yang terjadi!
5. Apa yang dapat kamu simpulkan dari eksplorasi tersebut?
6. Setelah selesai klik kembali ke MODUL III

Kegiatan 4. Persamaan Garis Singgung

7. Pada modul III klik Animasi garis singgung.
   a. Klik gambar kemudian klik *animation/play*. Menurut kamu manakah yang disebut dengan garis singgung?
   b. Klik Kembali ke Modul III
8. Pada modul III klik Gradien.
   a. Perhatikan contoh! Gantilah $f(x)$. Kemudian tekan *enter* dari *restart*. Amati apa yang terjadi!
   b. Gantilah a dimana a adalah suatu absis suatu titik pada kurva $f(x)$. Kemudian tekan *enter* dari *restart*. Amati apa yang terjadi!
   c. Apa yang dapat kamu simpulkan dari eksplorasi tersebut? Bagaimanakah cara untuk mencari suatu gradien ?
   d. Klik Kembali ke Modul III
9. Pada modul III klik Persamaan Garis Singgung.
   a. Perhatikan contoh 1 (untuk 2 garis sejajar). Gantilah nilai_x dan nilai_y. Kemudian tekan *enter* dari *restart*. Amati apa yang terjadi! Bagaimana cara menentukan persamaan garis singgung bila telah diketahui gradiennya? Perhatikan contoh 2 (juga untuk 2 garis sejajar) Gantilah $f(x)$ dan $g(x)$. Kemudian tekan *enter* dari *restart*. Perhatikan pada gradien $f(x)$ dan gradien $g(x)$. Amati apa yang terjadi! Apa yang dapat kamu simpulkan dari eksplorasi tersebut? Bagaimana cara menentukan persamaan suatu garis singgung kurva, bila telah diketahui persamaan kurva dan garis yang sejajar dengan garis singgung kurva?

b. Perhatikan contoh 3 (untuk 2 garis tegak lurus). Gantilah $f(x)$ dan $g(x)$. Kemudian tekan *enter* dari *restart*. Perhatikan pada gradien $f(x)$ dan gradien $g(x)$. Amati apa yang terjadi! Apa yang dapat kamu simpulkan dari eksplorasi tersebut? Bagaimana cara menentukan persamaan suatu garis singgung kurva, bila telah diketahui persamaan kurva dan garis yang tegak lurus dengan garis singgung kurva?

c. Bagaimana untuk mencari persamaan garis normal?

d. Apa yang dapat kamu simpulkan dari eksplorasi tersebut?

e. Klik Kembali ke Modul III

LEMBAR KERJA SISWA

Kerjakan soal-soal berikut ini dalam buku latihanmu, kemudian cocokkanlah jawabanmu tersebut dengan menggunakan maple!

Pada nomor 1-6, tentukan turunan pertama pada fungsi-fungsi berikut ini.

1. $f(x) = (4x^2 + 5x)(2x^2 - 6x + 1)$
2. $f(x) = (x^{-3} + 7x^3 - 8)(2x^{-3} + 4x^2)$
3. $f(x) = \dfrac{x+1}{3x+7}$
4. $f(x) = \sqrt[3]{(4-x)^2}$
5. $f(x) = \dfrac{x^2}{\cos x}$
6. $f(x) = \dfrac{2x}{\sin x}$

Pada no 7 dan 8, tentukan nilai fungsi turunan, untuk nilai x yang diberikan.

7. $f(x) = (4x+3)^3(x+1)^5$, untuk $x = 0$
8. $f(x) = (2x-5)\sqrt{x-3}$, untuk $x = 4$
9. Tentukan persamaan garis singgung pada kurva $y = x^2 - 3x + 2$ di (1,0)
10. Tentukan persamaan garis singgung kurva $y = \dfrac{4}{x}$ yang sejajar dengan garis $y = -x + 5$

LEMBAR EVALUASI

1. Tentukan nilai fungsi turunan berikut, untuk nilai x yang diberikan.

   a. $f(x) = \dfrac{(3x+1)^2}{(x-3)^3}$, untuk x = -1

   b. $f(x) = \dfrac{4x+3}{\sqrt{x+1}}$, untuk $x = 3$

2. Tentukan turunan pertama dari $f(x) = \dfrac{\sin x}{3+\cos x}$

3. Tentukan persamaan garis singgung kurva $y = x^2 - 3x$ yang sejajar dengan garis $y = 2x + 7$.

4. Tentukan persamaan garis singgung $y = 4x - x^2$ yang tegak lurus dengan garis $y = -\frac{1}{2}x + 4$.

KUNCI JAWABAN

LEMBAR KERJA SISWA

1. $32x^3 - 42x^2 - 52x + 5$

2. $-\dfrac{4(3 - x^5 + 35x^{11} - 12x^3 - 16x^8)}{x^7}$

3. $\dfrac{4}{(3x+7)^2}$

4. $\dfrac{2.\sqrt[3]{(-4+x)^2}}{3(-4+x)}$

5. $\dfrac{x(2\cos x + x\sin x)}{\cos x^2}$

6. $-\dfrac{2(\sin x - x\cos x)}{-1+\cos x^2}$

7. 243

8. $\dfrac{7}{2}$

9. $y = -x + 1$

10. Persamaan GS_1 : $y = -4 - x$,

    Persamaan GS_2 : $y = 4 - x$

LEMBAR EVALUASI SISWA

1. a. $-\frac{9}{64}$

   b. $\frac{17}{16}$

2. $\dfrac{3\cos x+1}{9+6\cos x+\cos x^{2}}$

3. $y=-\frac{25}{4}+2x$

4. $y=1+2x$

PEDOMAN PENILAIAN

- Nomor 1 jika betul semua nilainya 20
- Nomor 2 jika betul semua nilainya 10
- Nomor 3 jika betul semua nilainya 30
- Nomor 4 jika betul semua nilainya 30
- Nilai Akhir X = *(jumlah nilai total)*/9

4. MODUL TENTANG TURUNAN UNTUK MENENTUKAN KARAKTERISTIK SUATU FUNGSI DAN MEMECAHKAN MASALAH.

Petunjuk untuk guru

Modul	:	Kalkulus
Topik	:	Turunan untuk menentukan karakteristik suatu fungsi dan memecahkan masalah.
Kelas	:	XI Ilmu Alam SMA, Semester II
Waktu	:	4 x 45 Menit

Umum

Dalam modul ini mempelajari bagaimana cara menggunakan turunan untuk menentukan karakteristik suatu fungsi dan memecahkan masalah.. Program *Maple* dan contoh file-filenya tersebut disimpan dalam disket yang disertakan dalam modul ini.

Sebelum menggunakan modul ini siswa harus sudah dapat memahami gradien dan persamaan suatu garis lurus, grafik fungsi, fungsi aljabar, dan fungsi trigonometri, karena hal tersebut sangat penting untuk mempelajari turunan untuk menentukan karakteristik suatu fungsi dan memecahkan masalah.

Guru dan siswa harus sudah bisa menggunakan komputer dan akan lebih baik lagi jika guru dan siswa sudah bisa mengoperasikan program *maple*. Jika guru dan siswa belum bisa mengoperasikan program *maple*, maka sebelum menggunakan modul ini harus ada pengenalan program *maple* terlebih dahulu.

Khusus

1. Topik : Turunan untuk menentukan karakteristik suatu fungsi dan memecahkan masalah.
2. Kelas : XI Ilmu Alam SMA, semester II
3. Waktu : 4 x 45 menit.
4. Tujuan : Setelah menyelesaikan modul ini, siswa dapat menggunakan turunan untuk menentukan karakteristik suatu fungsi dan memecahkan masalah..
5. Pokok-pokok pelajaran:
   a. Fungsi Naik dan Fungsi Turun.
   b. Nilai Stasioner dan Jenis nilai stasioner.
   c. Grafik fungsi.
   d. Turunan kedua suatu fungsi.
   e. Turunan dalam perhitungan kecepatan dan percepatan.
6. Prosedur pengajaran:
   a. Tugas guru:
      - Sebelum menggunakan modul ini, siswa diajak mengingat kembali tentang fungsi aljabar dan fungsi trigonometri.
      - Sebelum memulai kegiatan ini guru menyiapkan segala seuatu yang diperlukan misalnya mengecek komputer yang akan dipakai siswa, dan hendaknya guru menyimpan program yang ada dalam disket ke dalam *harddisk*.

- Membimbing menjelaskan dan menolong siswa yang memerlukan bantuan. Menilai apakah tujuan belajar tercapai. Hal ini dapat terlihat dari jawaban siswa pada lembar kerja dan lembar evaluasi.

b. Tugas siswa :

- Memahami tujuan pelajaran.
- Melakukan kegiatan sesuai dengan urutan petunjuknya.
- Mempelajari uraian dan menyimpulkan hasil kegiatan.
- Mengerjakan soal latihan pada lembar kerja.
- Mengerjakan tes pada lembar evaluasi.

c. Alat dan sumber yang diperlukan.

- Alat : Komputer yang di dalamnya sudah terdapat program maple.
- Sumber : Buku matematika, file-file berbantuan *Maple*.

7. Evaluasi.

a. Prosedur.

- Pengisian lembar kerja dan lembar evaluasi setelah kegiatan dilaksanakan seluruhnya.
- Pertanyaan-pertanyaan lisan selama kegiatan.

b. Alat evaluasi :

- Lembar kerja.
- Lembar evaluasi.

LEMBAR KEGIATAN SISWA

1. Petunjuk	:	Untuk dapat memahami turunan untuk menentukan karakteristik suatu fungsi dan memecahkan masalah, kita harus mengerti tentang grafik fungsi, pengertian fungsi aljabar dan fungsi trigonometri.
	:	Sebelum menggunakan modul ini siswa harus sudah paham tentang pengertian turunan yang sudah dibahas pada sub pokok bahasan sebelumnya, memahami gradien dan persamaan suatu garis lurus, dan mengerti fungsi aljabar, dan fungsi trigonometri.
2. Pokok bahasan	:	Kalkulus.
3. Sub Pokok Bahasan	:	Turunan untuk menentukan karakteristik suatu fungsi dan memecahkan masalah.
4. Tujuan	:	Siswa dapat menentukan selang dimana suatu fungsi naik atau turun.
	:	Siswa dapat menentukan titik stasioner suatu fungsi bersama jenisnya.
	:	Siswa dapat menggambarkan grafik fungsi
	:	Siswa dapat menentukan turunan kedua suatu fungsi
	:	Siswa dapat menggunakan turunan dalam perhitungan kecepatan dan percepatan

5. Alat : komputer yang di dalamnya sudah terdapat program *maple*.

6. Sumber : Buku matematika dan contoh file-file *maple*.

Kegiatan 1. Fungsi naik dan fungsi turun

Pada modul IV klik Fungsi naik dan fungsi turun.

a. Fungsi Naik

1. Perhatikan contoh 1 dan contoh 2. Bandingkan nilai_x antara contoh 1 dan contoh 2? Bagaimanakah cara menentukan nilai_x tersebut?
2. Perhatikan contoh 1! Gantilah $f(x)$ dengan fungsi kuadrat. Kemudian tekan *enter* dari *restart*. Amati apa yang terjadi!
3. Perhatikan contoh 2! Gantilah $f(x)$ dengan fungsi pangkat 3. Gantilah nilai a, b, c yang menyesuaikan dengan hasil nilai_x, dimana $a < nilai\_x_1 < b < nilai\_x_2 < c$ atau sebaliknya. Kemudian tekan *enter* dari *restart*. Amati apa yang terjadi!
4. Apa yang dapat kamu simpulkan dari eksplorasi tersebut?

b. Fungsi Turun

1. Perhatikan contoh 1 dan contoh 2. Bandingkan nilai_x antara contoh 1 dan contoh 2? Bagaimanakah cara menentukan nilai_x tersebut?
2. Perhatikan contoh 1! Gantilah $f(x)$ dengan fungsi kuadrat. Kemudian tekan *enter* dari *restart*. Amati apa yang terjadi!
3. Perhatikan contoh 2! Gantilah $f(x)$ dengan fungsi pangkat 3. Gantilah nilai a, b, c yang menyesuaikan dengan hasil nilai_x, dimana

$a < nilai\_x_1 < b < nilai\_x_2 < c$ atau sebaliknya. Kemudian tekan *enter* dari *restart*. Amati apa yang terjadi!

4. Apa yang dapat kamu simpulkan dari eksplorasi tersebut?
5. Setelah selesai klik kembali ke MODUL IV

Kegiatan 2. Titik stasioner.

Pada Modul IV klik Titik Stasioner

1. Titik Balik minimum.

   Perhatikan contoh 1! Bagaimanakah cara menentukan titik stasioner? Bilamana titik stasioner dikatakan titik balik minimum? (Untuk menjawab ini perhatikan hasil analisa$_1$ dan analisa$_2$)
2. Titik balik maksimum

   Perhatikan contoh 2! Bagaimanakah cara menentukan titik stasioner? Bilamana titik stasioner dikatakan titik balik maksimum? (Untuk menjawab ini perhatikan hasil analisa$_1$ dan analisa$_2$)
3. Titik belok horizontal

   Perhatikan contoh 3! Bagaimanakah cara menentukan titik stasioner? Bilamana titik stasioner dikatakan titik belok horizontal? (Untuk menjawab ini perhatikan hasil analisa$_1$ dan analisa$_2$)
4. Apa yang dapat kamu simpulkan dari eksplorasi tersebut?
5. Setelah selesai klik kembali ke MODUL IV

Kegiatan 3. Menggambar Grafik fungsi

1. Pada Modul IV klik Grafik fungsi
2. Perhatikan contoh 2! Bagaimana cara menggambar grafik fungsi? (Perhatikan setiap langkahnya)
3. Gantilah $f(x)$. Kemudian tekan *enter* dari *restart*. Amati apa yang terjadi! (Gantilah -5 dan 5 pada langkah ke 5, jika diperlukan)
4. Apa yang dapat kamu simpulkan dari eksplorasi tersebut?
5. Setelah selesai klik kembali ke MODUL IV

Kegiatan 4. Turunan kedua suatu fungsi

1. Pada Modul IV klik Turunan kedua suatu fungsi
2. Perhatikan contoh! Gantilah $f(x)$ dengan sembarang fungsi. Kemudian tekan *enter* dari *restart*. Amati apa yang terjadi!
3. Apa yang dapat kamu simpulkan dari eksplorasi tersebut?
4. Setelah selesai klik kembali ke MODUL IV

Kegiatan 5. Turunan dalam perhitungan kecepatan dan percepatan.

Pada Modul IV klik Kecepatan dan Percepatan

1. Kecepatan

   Perhatikan contoh! Bagaimana cara menentukan kecepatan dari suatu lintasan tertentu pada saat t sekon? Cari contoh lain kemudian masukkan ke dalam program *maple*! Amati perubahan yang terjadi!

2. Percepatan

   Perhatikan contoh! Bagaimana cara menentukan percepatan dari suatu lintasan tertentu pada saat t sekon? Cari contoh lain kemudian masukkan ke dalam program *maple*! Amati perubahan yang terjadi!

3. Apa yang dapat kamu simpulkan dari eksplorasi tersebut?

4. Setelah selesai klik kembali ke MODUL IV

LEMBAR KERJA SISWA

Kerjakan soal-soal berikut ini dalam buku latihanmu, kemudian cocokkanlah jawabanmu tersebut dengan menggunakan maple!

1. Tentukan pada interval manakah fungsi $f(x) = 2x^2 - 6x + 7$ naik!
2. Tentukan nilai stasioner dan jenisnya untuk fungsi $f(x) = x^4 + 4x^3 - 6$.
3. Gambarlah grafik untuk $f(x) = 2x^2 - 8x + 3$
4. Sebuah benda bergerak dalam t detik menempuh jarak yang dinyatakan dengan rumus $s = 20t - 2t^2$ (s dalam meter). Hitunglah kecepatannya jika t=3.

LEMBAR EVALUASI SISWA

1. Tentukan nilai stasioner dan jenisnya dari fungsi $f(x) = 8 - 4x - x^2$
2. Sketsalah grafik dari fungsi $f(x) = (x+2)^2(x-1)$
3. Sebuah benda bergerak melintasi garis lurus setelah t sekon menempuh jarak yang dirumuskan dengan $s = 2t^3 - 6t^2$ (s dalam meter). Tentukan kecepatan dan percepatan pada saat t = 3 sekon.

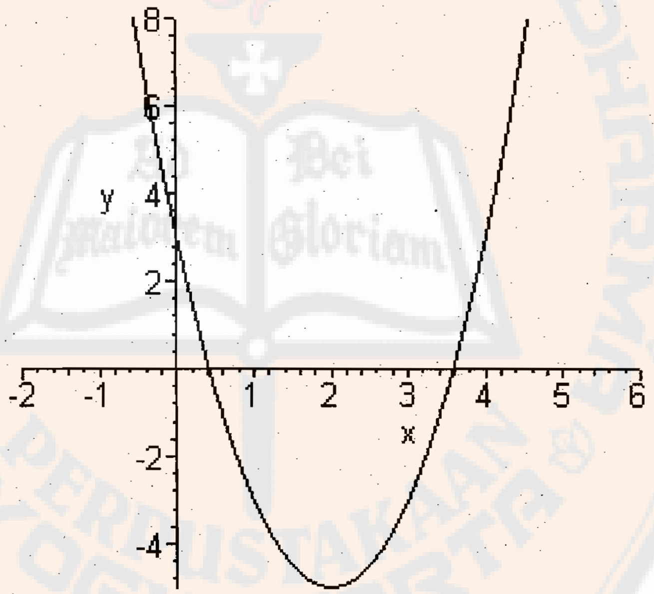
KUNCI JAWABAN

LEMBAR KERJA SISWA

1. Naik pada interval $x > \frac{3}{2}$

2. Titik stasioner (-3,-33) merupakan titik balik minimum, dan (0,-6) merupakan titik belok horizontal.

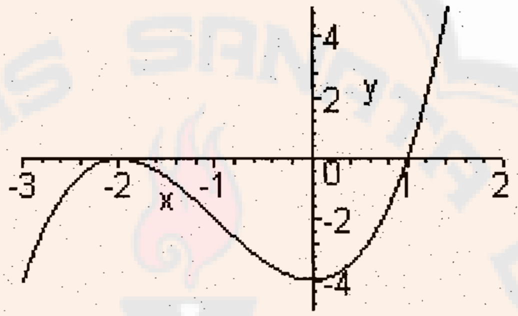
3. Titik potong dengan sumbu x $\left(2+\frac{\sqrt{10}}{2},0\right)$ dan $\left(2-\frac{\sqrt{10}}{2},0\right)$. Titik potong dengan sumbu y (0,3). Titik stasioner (2,-5) dan merupakan titik balik minimum. Titik potong yang lain (1,-3), (4,3). Gambar grafiknya:



4. Kecepatannya 8 m/s

LEMBAR EVALUASI SISWA

1. Titik stasioner (-2,-2) dan merupakan titik balik maksimum.
2. Titik potong dengan sumbu x = (1,0) dan (-2,0). Titik potong dengan sumbu y = (0,-4). Titik stasioner = (0,-4) merupakan titik balik minimum dan (-2,0) merupakan titik balik maksimum. Titik potong yang lain (-3,-4), (-1,-2). Gambar grafiknya:



3. Kecepatan = 18 m/s, dan percepatan = 24 m/s^2

BAB VI

PENUTUP

A. Kesimpulan

Program *Maple* merupakan suatu program aplikasi yang mampu melakukan komputasi matematis, dan program ini mudah dioperasikan

Maple dapat digunakan sebagai media pembelajaran dalam proses belajar mengajar pada pokok bahasan kalkulus kelas XI Ilmu Alam di Sekolah Menengah Atas (SMA). Beberapa kemampuan *Maple* untuk mendukung pembelajaran Kalkulus kelas XI Ilmu Alam, antara lain:

1. *Maple* dapat menyelesaikan perhitungan limit fungsi dan turunan secara ringkas.
2. *Maple* dapat menampilkan rumus-rumus ataupun aturan-aturan pada limit fungsi dan turunan.
3. *Maple* dapat menggambar grafik fungsi, dengan memanfaatkan perintah *plot*, serta dapat menganalisa fungsi agar dapat digambar di kertas.
4. *Maple* dapat dimanfaatkan untuk menganimasikan garis singgung suatu kurva.

Dalam penulisan skripsi ini penulis juga menemukan beberapa keterbatasan program *Maple* untuk pembelajaran kalkulus kelas XI Ilmu Alam, antara lain:

1. *Maple* tidak bisa menunjukkan langkah-langkah penyelesaian. *Maple* akan menampilkan hasil akhir.

2. Jika perintah yang dituliskan dalam *worksheet* kurang lengkap, maka *output* tidak muncul.

Hasil dari penulisan skripsi ini adalah sejumlah contoh *file maple* yang terkait langsung dengan materi kalkulus kelas XI Ilmu Alam SMA. Contoh-contoh *file* ini dapat digunakan sebagai media pembelajaran pada pokok bahasan Kalkulus kelas XI Ilmu Alam.

Pada bagian akhir skripsi ini disertai beberapa modul pembelajaran sebagai wujud realisasi pemanfaatan *maple* dalam pembelajaran kalkulus kelas XI Ilmu Alam SMA. Modul-modul tersebut disusun menurut urutan pembelajaran kalkulus kelas XI Ilmu Alam SMA. Modul pertama adalah modul tentang limit fungsi di satu titik dan di tak hingga titik, modul kedua adalah modul tentang sifat limit fungsi untuk menghitung bentuk tak tentu fungsi aljabar dan trigonometri, modul ketiga adalah modul tentang konsep, sifat, dan aturan dalam perhitungan turunan fungsi, dan modul keempat adalah modul tentang turunan untuk menentukan karakteristik suatu fungsi dan memecahkan masalah. Pembelajaran dengan modul dengan menggunakan *maple* ini disertai disket yang berisi contoh *file* yang dikelompokkan sesuai materi pada masing-masing modulnya.

B. Saran

Pada bagian akhir skripsi ini, penulis ingin menyampaikan beberapa saran.

1. Fasilitas *maple* tidak terbatas hanya untuk pembelajaran kalkulus, sehingga penelitian ini masih dapat ditindaklanjuti, misalnya untuk membuat modul

pembelajaran pada pokok bahasan aljabar vektor, menyelidiki penggunaan *maple* pada proses belajar mengajar matematika di SMA, dan lain-lain.

2. Sebelum menggunakan program *maple*, sebaiknya guru dan siswa dapat menggunakan *maple* atau paling tidak mengenal program *maple*, sehingga akan memudahkan pembelajaran.
3. Jika guru ingin menggunakan modul, sebaiknya memberikan materi sambil mengikuti panduan pada modul, dan setelah menyelesaikan modul guru sebaiknya memberikan kesimpulan agar siswa lebih mantap dalam memahami materi.
4. Bila sekolah tidak mempunyai laboratorium komputer, guru dapat menggunakan sebuah komputer dan sebuah proyektor atau *viewer* pada saat proses pembelajaran berlangsung. Bila sekolah mempunyai laboratorium komputer maka siswa dapat menggunakan komputer sendiri-sendiri ataupun secara berkelompok (tergantung jumlah komputer yang tersedia).

DAFTAR PUSTAKA

Garvan, Frank (2002). *The Maple Book*. New York: A CRC Press Company.

http://www. *Mapleforstudent.com*

http://www. *Puskur.or.id*

Jonassen, D.H.(1996). *Computer As Mind tools for School Engaging Critical Thinking 2nd Edition*, New Jersey: Prentice-Hall, Inc.

Kartono (2002). *Aljabar Linier, Vektor, dan Eksplorasinya dengan Maple*. Yogyakarta: Penerbit Graha Ilmu.

Noormandiri,B.K (2003). *Matematika SMU Untuk Kelas 2*. Jakarta: Penerbit Erlangga.

Purcell, Edwin. J (1984). *Kalkulus dan Geometri Analitis jilid 1*. Jakarta: Penerbit Erlangga.

Rudhito, Andy (2003). *Modul Maple dalam Matematika dan Pembelajaran Matematika*. Pendidikan Matematika JPMIPA FKIP USD.

Sembiring, Suah (1984) *Penuntun Pelajaran Matematika untuk SMA kelas IIA1 dan IIA2 Semester 3 dan 4*. Bandung: Penerbit Ganeca Exact.

Soejdadi, R (2000*) Kiat Pendidikan matematika di Indonesia Konstatasi keadaan masa kini menuju harapan masa depan*. Jakarta: Dirjen Dikti.

Soemartojo, Noeniek. Prof. Dra. (1989). *Matematika SMA Jilid 2 Semester 3 dan 4*. Jakarta: Penerbit Erlangga.

Susilo, Drs (1986) *Penuntun pelajaran Matematika Berdasarkan Kurikulum 1984 Untuk SMA Kelas III A3 Semester 5 dan 6*. Bandung: Ganeca Exact.

Vembrianto, ST.(1981) *Pengajaran dengan Modul*. Jakarta: Yayasan Pendidikan Paramita

Winarno (2002) *Bimbingan Pemantapan Matematika IPA*. Yrama Widya.