SEGITIGA EULER – GERGONNE – SODDY

PADA SUATU SEGITIGA

Skripsi

Diajukan untuk Memenuhi Salah Satu Syarat

Memperoleh Gelar Sarjana Pendidikan

Program Studi Pendidikan Matematika

Oleh:

Theresia Ari Dwi Utami

NIM : 001414060

PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA

JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN

UNIVERSITAS SANATA DHARMA

YOGYAKARTA

2004

SKRIPSI

SEGITIGA EULER – GERGONNE – SODDY

PADA SUATU SEGITIGA

Oleh:

Theresia Ari Dwi Utami

NIM: 001414060

Telah disetujui oleh:

Pembimbing,

Prof. Dra. Moeharti Hw., M. A.

Tanggal 8 Okt 2004

SKRIPSI

SEGITIGA EULER – GERGONNE – SODDY

PADA SUATU SEGITIGA

Dipersiapkan dan ditulis oleh:
Theresia Ari Dwi Utami
NIM: 001414060

Telah dipertahankan di depan Panitia Penguji
pada tanggal 20 Oktober 2004
dan dinyatakan telah memenuhi syarat.

Susunan Panitia Penguji:

	Nama Lengkap	Tanda Tangan
Ketua	Drs. A. Atmadi, M. Si.	....
Sekretaris	Drs. Th. Sugiarto, M. T.	....
Anggota	Prof. Dra. Moeharti Hw., M. A.	....
Anggota	Dr. St. Suwarsono	....
Anggota	Drs. Al. Haryono	....

Yogyakarta, 20 Oktober 2004
Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan
Universitas Sanata Dharma
Dekan

Dr. A. M. Slamet Soewandi, M. Pd.

HALAMAN PERSEMBAHAN

Orang-orang yang berhasil di dunia ini adalah orang-orang yang bangkit dan mencari keadaan yang mereka inginkan, dan jika tak menemukannya, mereka akan membuatnya sendiri.

(George Bernard Shaw)

Karyaku ini kupersembahkan untuk :

Tuhan Yesus dan Bunda Maria

Bapak dan Ibu tercinta

Kakak dan adik-adikku tersayang

Sahabat-sahabatku

Almamaterku

PERNYATAAN KEASLIAN KARYA

Saya menyatakan dengan sesungguhnya bahwa skripsi yang saya tulis ini tidak memuat karya atau bagian karya orang lain, kecuali yang telah disebutkan dalam daftar pustaka, sebagaimana layaknya karya ilmiah.

Yogyakarta, 8 Oktober 2004

Penulis

Theresia Ari Dwi Utami

ABSTRAK

Pada setiap segitiga terdapat segitiga istimewa, yaitu segitiga Euler – Gergonne – Soddy yang merupakan segitiga siku-siku. Penulisan skripsi ini bertujuan untuk lebih memahami segitiga istimewa tersebut. Metode yang digunakan adalah studi pustaka, semua referensi yang digunakan tertulis dalam daftar pustaka.

Segitiga Euler – Gergonne – Soddy dibentuk oleh garis Euler, garis Gergonne dan garis Soddy. Titik tinggi T, titik pusat lingkaran luar O, titik berat G, dan titik pusat lingkaran titik sembilan N dari segitiga ABC terletak pada satu garis yang disebut garis Euler. Jika D, E, F adalah titik singgung-titik singgung dari lingkaran dalam dengan sisi-sisi segitiga ABC, maka garis-garis yang menghubungkan titik sudut-titik sudut A, B, C dengan ketiga titik singgung tersebut bertemu pada satu titik. Titik potong ini disebut titik Gergonne Ge. Jadi segitiga ABC dan segitiga DEF perspektif, dengan titik Ge sebagai titik pusat perspectivitasnya. Menurut Teorema Desargues' kedua segitiga tersebut juga perspektif dari suatu garis yang melalui titik potong-titik potong dari sisi-sisi yang berkorespondensi: $\overleftrightarrow{BC} \cdot \overleftrightarrow{EF} = D'$, $\overleftrightarrow{AC} \cdot \overleftrightarrow{DF} = E'$, $\overleftrightarrow{AB} \cdot \overleftrightarrow{DE} = F'$. Garis yang melalui titik-titik D', E', dan F' disebut garis Gergonne. Jika disusun tiga lingkaran $\Theta(A,r_a)$, $\Theta(B,r_b)$, dan $\Theta(C,r_c)$ sedemikian hingga setiap lingkaran menyinggung dua lingkaran yang lain, maka ada lingkaran keempat $\Theta(S,\sigma)$ yang terletak di celahnya dan menyinggung tiga lingkaran di luarnya. Lingkaran ini disebut lingkaran Soddy dalam. Ada juga lingkaran kelima $\Theta(S',\sigma')$ yang mengelilingi ketiga lingkaran itu, disebut lingkaran Soddy luar. Titik pusat kedua lingkaran ini yaitu S dan S' terletak pada garis yang melalui titik pusat lingkaran dalam I dan titik Gergonne Ge, yang disebut garis Soddy. Titik-titik I, Ge, S, dan S' merupakan himpunan titik-titik harmonis dan garis Soddy tegak lurus dengan garis Gergonne.

ABSTRACT

Attached to any triangle there is a special triangle, the right-angled Euler – Gergonne – Soddy triangle. The purpose of this script is to know and understand more about this special triangle. This is a literature study using books, journals and magazines in the list of references.

The Euler – Gergonne – Soddy triangle is formed by an Euler line, a Gergonne line, and a Soddy line. The orthocenter T, the circumcenter O, the centroid G, and the center N of the nine-point circle of a triangle ABC all lie on a line called the Euler line. If D, E, F are the points of contact of the incircle with the sides of a triangle ABC, then the lines joining the vertices A, B, C with those points are concurrent. The intersection point is called the Gergonne point Ge. So the triangles ABC and DEF are perspective with the Ge point as center of perspectivity. According to the Desargues' Theorem they are perspective from the line through the intersection points of the corresponding sides: $\overleftrightarrow{BC}.\overleftrightarrow{EF} = D'$, $\overleftrightarrow{AC}.\overleftrightarrow{DF} = E'$, $\overleftrightarrow{AB}.\overleftrightarrow{DE} = F'$. This line through D', E', and F' is called the Gergonne line. If arranged three circles $\odot(A,r_a)$, $\odot(B,r_b)$, $\odot(C,r_c)$ so that each touches the other two, then there is a small fourth circle $\odot(S,\sigma)$ that just fits into the gap and touches each of the three circles externally. This circle is called the inner Soddy circle. Similarly there is a larger fifth circle $\odot(S',\sigma')$ that surrounds and touches each of the three circles internally which is called the outer Soddy circle. The centers of the Soddy circles S and S' lie on the line through the incenter I and the Gergonne point Ge, which is called the Soddy line. The points I Ge, S and S' form a harmonic sets and the Soddy line is perpendicular to the Gergonne line.

KATA PENGANTAR

Penulis menghaturkan puji dan syukur atas kesetiaan Allah dalam mendampingi, membimbing, dan menyertai penulis dalam menyelesaikan skripsi yang berjudul "Segitiga Euler – Gergonne – Soddy pada Suatu Segitiga".

Skripsi ini disusun dengan tujuan untuk memenuhi salah satu persyaratan dalam memperoleh gelar Sarjana Pendidikan pada Program Studi Pendidikan Matematika di Universitas Sanata Dharma.

Dalam proses penyusunan skripsi ini penulis menemukan banyak hambatan dan rintangan, namun berkat bantuan dan keterlibatan berbagai pihak yang menjadi perpanjangan tangan Allah dan kehadiran Allah sendiri penulis dapat mengatasinya dengan baik.

Bersama ucapan syukur ini penulis menghaturkan terima kasih kepada semua pihak yang telah menjadi perantara Allah, yang telah membantu dan turut ambil bagian dalam proses penyusunan skripsi ini, terutama kepada:

1. Ibu Prof. Dra. Moeharti Hw., M.A., selaku dosen pembimbing skripsi yang telah banyak meluangkan waktu, memberikan perhatian, bimbingan, dan dorongan kepada penulis selama proses penyusunan skripsi.
2. Para dosen JPMIPA yang telah membimbing, mendidik, mensharingkan ilmu pengetahuan, pengalaman hidup dan kreatifitas kepada penulis selama belajar di Universitas Sanata Dharma.
3. Pak Narjo dan Pak Sugeng selaku staf sekretariat JPMIPA yang telah membantu memperlancar studi penulis di Universitas Sanata Dharma.

4. Seluruh staf perpustakaan, terima kasih atas bantuan dan kerjasamanya selama ini.
5. Bapak, Ibu, Kakek, Nenek, Kakak-kakakku, dan Adik-adikku tersayang yang selalu memberi kesempatan, kepercayaan, dan setia menantiku. Terima kasih atas kesabarannya.
6. Teman-teman mahasiswa P. Mat dari semua angkatan, terima kasih atas kebersamaan, kerja sama, kegembiraan, suka duka, penerimaan, kesediaan diri untuk belajar bersama dan saling berbagi ilmu. Teristimewa untuk mahasiswa P. Mat'00 kelas B.
7. Teman-teman yang menjadi "anak bimbing" Bu Moeharti, terima kasih atas pengertian dan kebersamaannya selama ini.
8. Teman-teman kost "Wisma Alamanda", terima kasih atas kebersamaan dan canda tawanya selama ini.
9. Sahabat-sahabat yang selalu setia menemaniku di setiap waktu.
10. Semua orang yang telah membantu penulis dalam menyelesaikan skripsi ini, yang tidak bisa penulis sebutkan satu persatu.

Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih banyak kekurangan dan kesalahan, baik dalam hal isi maupun tata bahasa. Oleh sebab itu penulis sangat mengharapkan saran dan kritik yang membangun dari para pembaca. Akhirnya, semoga skripsi ini dapat dimanfaatkan sebaik-baiknya.

Penulis

DAFTAR ISI

Halaman

DAFTAR SIMBOL

A, B, C, ...	:	titik-titik
I	:	titik pusat lingkaran dalam segitiga ABC
O	:	titik pusat lingkaran luar segitiga ABC
T	:	titik tinggi segitiga ABC
G	:	titik berat segitiga ABC
N	:	titik pusat lingkaran titik sembilan pada segitiga ABC
S	:	titik pusat lingkaran Soddy dalam
S'	:	titik pusat lingkaran Soddy luar
Ge	:	titik Gergonne
g, g', l, p, ...	:	garis-garis
$\overline{AB}$	:	segmen garis AB
AB	:	panjang segmen AB
$\overleftrightarrow{AB}$	:	garis yang melalui A dan B
$\overleftrightarrow{A_1B_2} \cdot \overleftrightarrow{A_2B_1} = C_3$	:	dua garis berpotongan di titik C_3
ΔABC	:	segitiga ABC
a, b, c	:	panjang sisi-sisi segitiga ABC
a', b', c'	:	panjang jari-jari tiga lingkaran yang saling bersinggungan dan ketiga lingkaran itu bertitik pusat di A, B, C
$2s$	:	keliling segitiga ABC
$\boldsymbol{\Delta}$	:	luas daerah segitiga ABC
$\boldsymbol{\Delta}_a$	:	luas daerah segitiga BPC

t_a, t_b, t_c	:	garis tinggi di atas *a*, *b*, *c*
$\angle ABC$	:	sudut ABC
m $\angle ABC$	:	ukuran sudut ABC
$\frown AB$	:	busur AB
α, β, γ	:	sudut-sudut
S_a, S_b, S_c	:	sudut yang dibentuk oleh titik pusat lingkaran Soddy dalam dengan titik sudut-titik sudut segitiga ABC
$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$	:	kelengkungan
r	:	jari-jari lingkaran dalam segitiga ABC
R	:	jari-jari lingkaran luar segitiga ABC
σ	:	jari-jari lingkaran Soddy dalam
σ'	:	jari-jari lingkaran Soddy luar
$\Theta(A, r_a)$, ...	:	lingkaran dengan titik pusat A dan jari-jari r_a
P(x, y, z)	:	koordinat-koordinat trilinear titik P
$=$	:	sama dengan
$\neq$	:	tidak sama dengan
$\sim$	:	sebangun
$\cong$	:	kongruen(sama dan sebangun)
$\perp$	:	tegak lurus
//	:	sejajar

DAFTAR GAMBAR

BAB I

PENDAHULUAN

A. Latar Belakang Topik

Dalam kehidupan sehari-hari uang logam dikenal sebagai salah satu alat pembayaran. Dalam geometri, uang logam tersebut digambarkan sebagai salah satu bangun berdimensi dua atau bangun datar yang disebut lingkaran. Jika disusun tiga uang logam atau digambar tiga lingkaran yang saling bersinggungan satu sama lain maka akan terdapat daerah kecil di antara ketiga lingkaran itu. Ketiga lingkaran itu misalnya $\Theta(A,r_a)$, $\Theta(B,r_b)$, dan $\Theta(C,r_c)$.

Pada daerah itu dapat digambar sebuah lingkaran yang menyinggung ketiga lingkaran sebelumnya. Lingkaran kecil ini merupakan lingkaran Soddy dalam(*inner Soddy circle*), dilambangkan dengan $\Theta(S,\sigma)$. Sedangkan di luar ketiga lingkaran itu dapat digambar sebuah lingkaran besar yang menyinggung atau mengelilingi ketiga lingkaran tersebut. Lingkaran besar ini dinamakan lingkaran Soddy luar(*outer Soddy circle*), dilambangkan $\Theta(S',\sigma')$. Kedua lingkaran ini dikenal sebagai lingkaran-lingkaran Soddy. Hubungan antara jari-jari lingkaran-lingkaran Soddy dengan jari-jari tiga lingkaran yang lain berhasil diselidiki oleh *Frederick Soddy*(1877-1956), seorang ahli kimia dari negara Inggris.

Jika titik pusat dari ketiga lingkaran semula yaitu $\Theta(A,r_a)$, $\Theta(B,r_b)$, dan $\Theta(C,r_c)$ dihubungkan maka akan membentuk suatu segitiga, yaitu segitiga ABC. Pada segitiga ABC akan ditemukan titik tinggi, titik berat, titik pusat lingkaran dalam, titik pusat lingkaran luar, titik Gergonne, garis Euler, garis Gergonne, dan garis Soddy.

Leonhard Euler(1707-1783) seorang matematikawan Swiss berhasil menyelidiki bahwa titik tinggi, titik berat, titik pusat lingkaran luar suatu segitiga terletak pada satu garis. Untuk selanjutnya garis ini dikenal dengan garis Euler.

Garis-garis yang menghubungkan titik sudut-titik sudut suatu segitiga dengan titik singgung-titik singgung lingkaran dalam suatu segitiga bertemu pada satu titik. Hal ini berhasil ditunjukkan oleh *Joseph Diaz Gergonne*(1771-1859) seorang matematikawan Perancis. Selanjutnya titik potong tersebut disebut sebagai titik Gergonne. Titik ini merupakan titik pusat perspektivitas dari segitiga ABC dan segitiga DEF. Sedangkan garis Gergonne merupakan sumbu perspektivitas dari kedua segitiga tersebut.

Garis yang melalui titik pusat lingkaran Soddy dalam S, titik pusat lingkaran Soddy luar S', titik pusat lingkaran dalam segitiga I, dan titik Gergonne Ge disebut garis Soddy.

Garis Euler, garis Gergonne dan garis Soddy secara bersama-sama membentuk suatu segitiga yang disebut segitiga Euler – Gergonne – Soddy. Garis Gergonne dan garis Soddy berpotongan tegak lurus, sehingga segitiga Euler – Gergonne – Soddy merupakan segitiga siku-siku.

B. Perumusan Masalah

Masalah-masalah yang dibahas dalam skripsi ini adalah:

1. Apakah yang dimaksud dengan segitiga Euler – Gergonne – Soddy?

2. Konsep-konsep apa saja yang terkait dengan garis Euler, garis Gergonne, dan garis Soddy?
3. Apakah segitiga Euler – Gergonne – Soddy merupakan segitiga siku-siku?

C. Tujuan Penulisan

Penulisan skripsi ini bertujuan untuk:

1. Memahami pengertian segitiga Euler – Gergonne – Soddy pada suatu segitiga.
2. Memahami konsep-konsep yang terkait dengan garis Euler, garis Gergonne, dan garis Soddy, antara lain: lingkaran titik sembilan, titik Gergonne, perspektivitas.
3. Menunjukkan bahwa segitiga Euler – Gergonne – Soddy merupakan segitiga siku-siku.

D. Pembatasan Masalah

Hal-hal yang akan dibahas dalam skripsi ini adalah segitiga dan lingkaran-lingkarannya, lingkaran titik sembilan, koordinat-koordinat trilinear, perspektivitas, garis Euler, garis Gergonne, lingkaran-lingkaran Soddy, garis Soddy, segitiga Euler – Gergonne – Soddy.

E. Manfaat Penulisan

Manfaat penulisan skripsi ini adalah memahami lebih dalam tentang: hubungan antara masalah sehari-hari yaitu tiga mata uang logam yang saling bersinggungan dengan geometri, hubungan jari-jari lingkaran-lingkaran Soddy dengan jari-jari tiga lingkaran yang lain, segitiga Euler – Gergonne – Soddy pada suatu segitiga dan konsep-konsep yang terkait.

F. Metode Pembahasan/Penulisan

Dalam menyusun skripsi ini penulis menggunakan metode studi pustaka, sehingga di dalam skripsi ini tidak ditemukan hal-hal yang baru. Buku-buku yang digunakan penulis tercantum dalam daftar pustaka.

G. Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan skripsi ini adalah sebagai berikut:

Bab I Pendahuluan. Pada bagian ini dijelaskan tentang: latar belakang topik, perumusan masalah, tujuan penulisan, pembatasan masalah, manfaat penulisan, metode pembahasan/penulisan, dan sistematika penulisan skripsi ini.

Bab II Landasan Teori. Pada bagian ini dibahas materi-materi yang merupakan materi prasyarat dari skripsi ini, antara lain: segitiga dan lingkaran-lingkarannya, lingkaran titik sembilan, koordinat-koordinat trilinear, dan perspektivitas.

Bab III merupakan bagian inti dari pembahasan/penulisan skripsi. Pada bagian ini dibahas **Segitiga Euler – Gergonne – Soddy**, yang meliputi: garis Euler, lingkaran dalam segitiga ABC, titik Gergonne, garis Gergonne, lingkaran-lingkaran Soddy, garis Soddy, dan segitiga Euler – Gergonne – Soddy.

Bab IV Penutup, berisi kesimpulan dan saran. Hal-hal penting yang diperoleh dalam pembahasan skripsi disajikan pada kesimpulan.

Daftar Pustaka berisi daftar buku-buku yang digunakan sebagai sumber referensi penulisan skripsi ini.

Lampiran, bukti bahwa garis Gergonne dan garis Soddy berpotongan tegak lurus disajikan pada bagian ini.

BAB II

LANDASAN TEORI

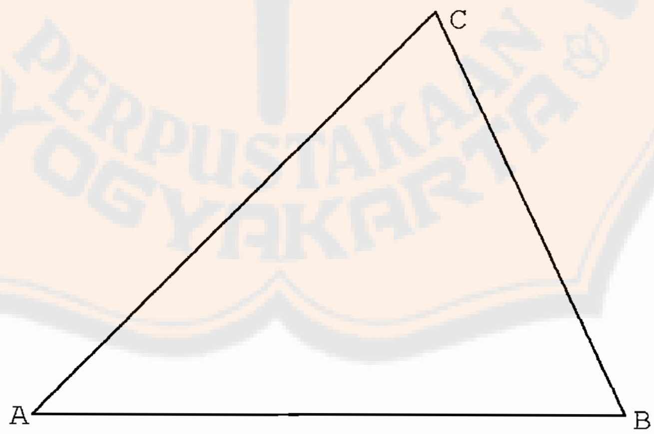
Pada bagian ini akan dibahas konsep-konsep yang menjadi materi-materi prasyarat dalam membahas segitiga Euler – Gergonne – Soddy pada suatu segitiga.

A. Segitiga dan Lingkaran-lingkarannya

Definisi 2.1 (Definisi segitiga ABC)

Suatu segitiga ABC terdiri atas tiga titik A, B, dan C yang tidak segaris dan tiga ruas garis $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, dan $\overline{CA}$.

Titik-titik itu dinamakan titik sudut dan ruas garis-ruas garis itu dinamakan sisi-sisi suatu segitiga. Untuk penulisan selanjutnya segitiga ABC dilambangkan dengan ΔABC. Gambar 2.1 menunjukkan ΔABC.



Gambar 2.1. Segitiga ABC

Dalam sebuah ΔABC ada bermacam-macam garis yang istimewa, yaitu garis bagi sudut(*angle bisector*), garis berat(*median*), dan garis tinggi(*altitude*).

Definisi 2.2 (Definisi garis bagi sudut suatu segitiga)

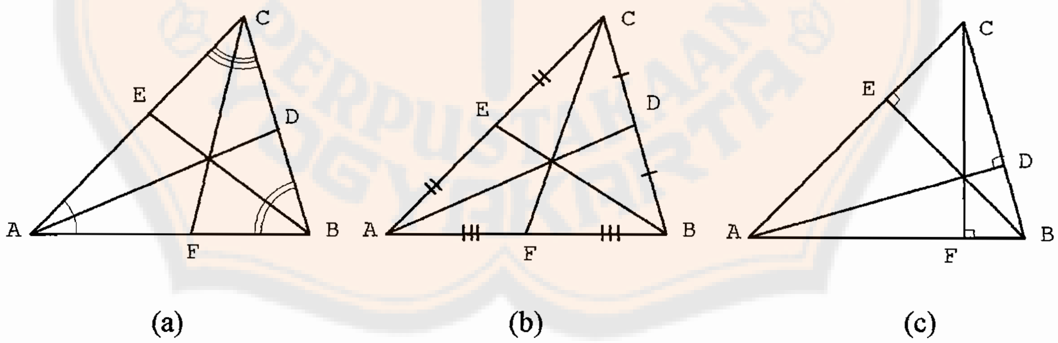
Garis bagi sudut suatu segitiga adalah segmen garis yang membagi sudut suatu segitiga menjadi dua sama besar, dengan ujung-ujung titik sudut dan titik yang terletak pada sisi di depan titik sudut itu. Gambar 2.2.(a) menunjukkan $\overline{AD}$, $\overline{BE}$, $\overline{CF}$ berturut-turut merupakan garis bagi sudut-sudut BAC, ABC, BCA.

Definisi 2.3 (Definisi garis berat suatu segitiga)

Garis berat suatu segitiga adalah segmen garis yang ujung-ujungnya suatu titik sudut dan titik tengah sisi di depannya. Gambar 2.2.(b) menunjukkan $\overline{AD}$, $\overline{BE}$, $\overline{CF}$ merupakan garis berat-garis berat ΔABC.

Definisi 2.4 (Definisi garis tinggi suatu segitiga)

Garis tinggi suatu segitiga adalah segmen garis yang dibuat dari titik sudut segitiga dan tegak lurus dengan sisi di depan titik sudut itu. Gambar 2.2.(c) menunjukkan $\overline{AD}$, $\overline{BE}$, $\overline{CF}$ merupakan garis tinggi-garis tinggi ΔABC.

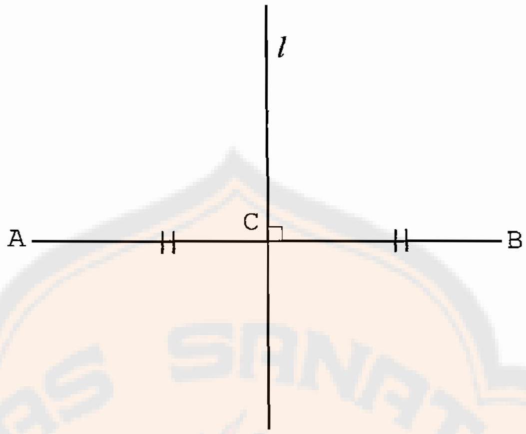


Gambar 2.2. (a) Garis bagi sudut, (b) Garis berat, (c) Garis tinggi

Definisi 2.5 (Definisi sumbu segmen garis (*perpendicular bisector*))

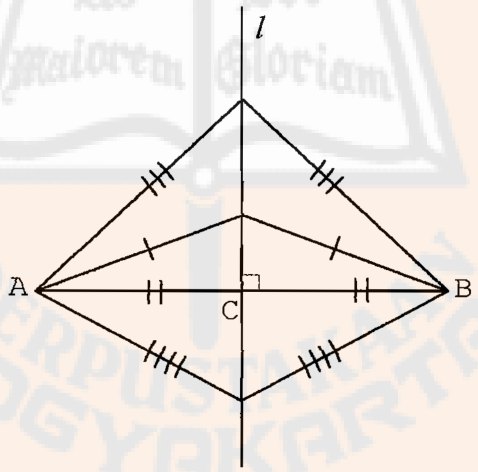
Sumbu segmen garis adalah suatu garis yang tegak lurus suatu segmen dan melalui titik tengah segmen tersebut.

Pada Gambar 2.3 ditunjukkan bahwa garis l merupakan sumbu dari $\overline{AB}$.



Gambar 2.3. Garis l merupakan sumbu $\overline{AB}$

Teorema 2.1. Sumbu suatu segmen dalam suatu bidang merupakan himpunan titik-titik pada bidang yang berjarak sama dari titik-titik ujung segmen itu.



Gambar 2.4. Ilustrasi Teorema 2.1

Bukti:

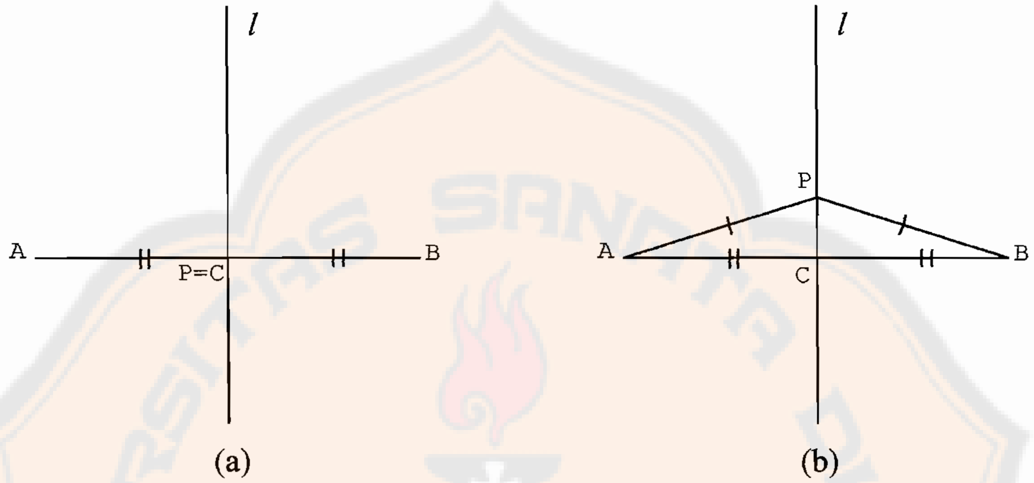
Diketahui: Garis l adalah sumbu $\overline{AB}$ pada titik C .

Akan dibuktikan :

1. Jika P adalah sebarang titik pada l, maka PA = PB.
2. Jika QA = QB maka Q adalah titik pada l.

Bukti 1.(Setiap titik pada l berjarak sama dari titik ujung-titik ujung $\overline{AB}$)

Diketahui P sebarang titik pada l. Ada dua kemungkinan, yaitu pertama P = C (Gambar 2.5.(a)) dan kedua P ≠ C (Gambar 2.5.(b)).



Gambar 2.5. (a) Titik P=C, (b) Titik P≠C

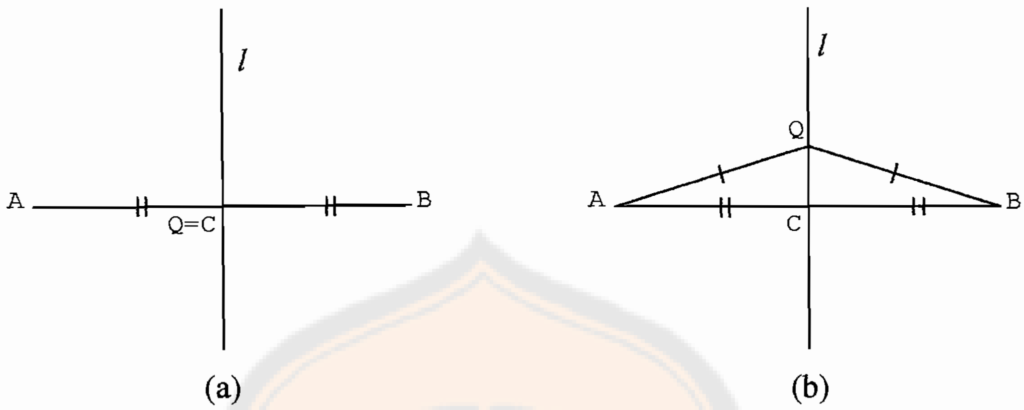
▪ Jika P merupakan titik yang sama dengan C maka P = C dan PA = PB, karena C atau P adalah titik tengah $\overline{AB}$ (Gambar 2.5.(a)).

▪ Jika P titik yang berlainan dengan C maka P≠C dan $\overline{PC} \cong \overline{PC}$ (refleksi terhadap garis l) dan $\overline{CA} \cong \overline{CB}$ (definisi titik tengah). Sudut PCA dan ∠PCB adalah sudut siku-siku yang terbentuk oleh garis l dengan $\overline{AB}$. Jadi ΔPCA ≅ ΔPCB (sisi-sudut-sisi), sehingga PA = PB (Gambar 2.5.(b)).

Bukti 2. (Sebarang titik yang berjarak sama dari titik A dan B berada pada l)

Diketahui Q adalah sebarang titik pada bidang sedemikian hingga QA = QB. Ada dua kemungkinan, yaitu pertama Q pada $\overline{AB}$ dan kedua Q tidak pada $\overline{AB}$.

▪ Jika Q terletak pada $\overline{AB}$ maka Q dan C merupakan titik yang sama dan Q = C karena sebuah segmen garis hanya mempunyai satu titik tengah. Jadi selama C terletak pada l maka Q juga pada l (Gambar 2.6.(a))



Gambar 2.6. (a) Titik Q pada $\overline{AB}$, (b) Titik Q tidak pada $\overline{AB}$

- Jika Q tidak terletak pada $\overline{AB}$, ditarik garis dari Q ke C, maka $\overline{QC} \cong \overline{QC}$, $\overline{CA} \cong \overline{CB}$, dan $\overline{QA} \cong \overline{QB}$. Berdasarkan dalil kongruensi(sisi-sisi-sisi) dalam segitiga maka $\Delta QCA \cong \Delta QCB$. Sedemikian hingga $\angle QCA \cong \angle QCB$, keduanya merupakan sudut siku-siku (Gambar 2.6.(b)). Garis $\overleftrightarrow{QC} \perp \overline{AB}$. Melalui sebuah titik pada sebuah garis dapat dibuat tepat satu garis yang tegak lurus pada garis tersebut. Jadi $\overleftrightarrow{QC}$ dan *l* harus merupakan garis yang sama. Oleh karena itu Q adalah titik pada *l*. ■

Definisi 2.6 (Definisi lingkaran)

Lingkaran adalah tempat kedudukan titik-titik pada suatu bidang datar yang berjarak sama terhadap suatu titik tertentu pada bidang yang memuat titik-titik tersebut.

Titik pusat lingkaran merupakan suatu titik tertentu yang terletak pada bidang yang memuat lingkaran dan berjarak sama terhadap semua titik pada lingkaran tersebut.

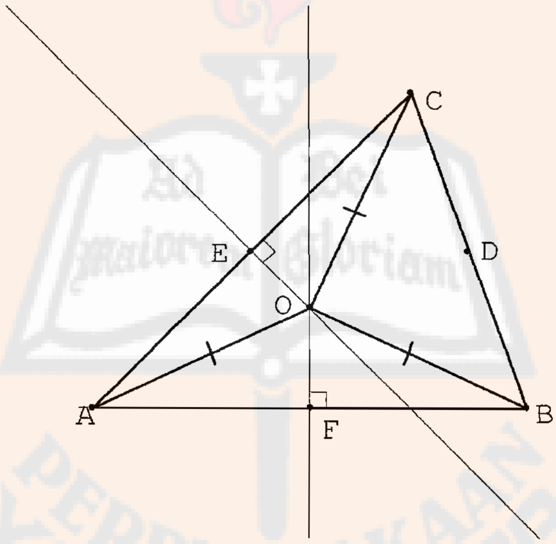
Jari-jari lingkaran merupakan suatu ruas garis yang menghubungkan titik pusat lingkaran dengan suatu titik sebarang pada lingkaran .

Teorema 2.2. Sumbu sisi-sisi suatu segitiga bertemu pada satu titik yang berjarak sama dari titik sudut-titik sudut segitiga itu.

Bukti:

Diketahui: ΔABC, sumbu-sumbu $\overline{CA}$ dan $\overline{AB}$ berpotongan di O. Garis $\overleftrightarrow{OE}$ merupakan sumbu dari $\overline{CA}$ dan $\overleftrightarrow{OF}$ sumbu dari $\overline{AB}$. Titik D merupakan titik tengah $\overline{BC}$.

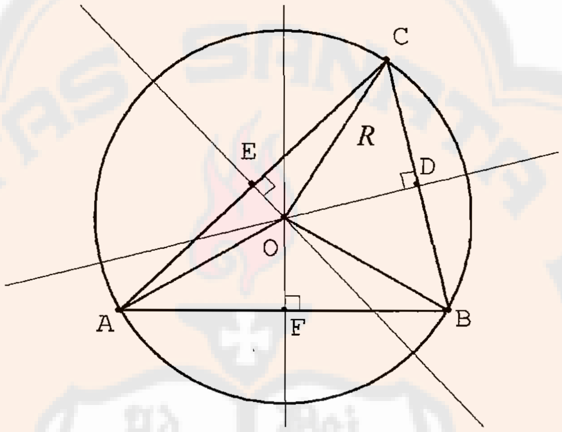
Akan dibuktikan: Sumbu dari $\overline{BC}$ melalui O dan O merupakan suatu titik yang berjarak sama dari A, B, dan C.



Gambar 2.7. Ilustrasi Teorema 2.2

Bukti: Garis $\overleftrightarrow{OF}$ merupakan sumbu dari $\overline{AB}$ sehingga $\overline{AO} \cong \overline{BO}$ atau AO = BO. Garis $\overleftrightarrow{OE}$ merupakan sumbu dari $\overline{CA}$ sehingga $\overline{AO} \cong \overline{CO}$ atau AO = CO. Dari kedua pernyataan sebelumnya dapat disimpulkan bahwa $\overline{BO} \cong \overline{CO}$ atau BO = CO (sifat transitif). Panjang AO = BO = CO berarti O berjarak sama dari A, B, dan C. Titik D merupakan titik tengah $\overline{BC}$, berarti D terletak pada sumbu $\overline{BC}$. Titik O berjarak sama dari B dan C, berarti O terletak pada sumbu $\overline{BC}$. Jika titik-titik D dan O dihubungkan maka akan membentuk sebuah garis yang merupakan sumbu dari sisi $\overline{BC}$. Sehingga terbukti bahwa sumbu $\overline{BC}$ melalui titik O. ■

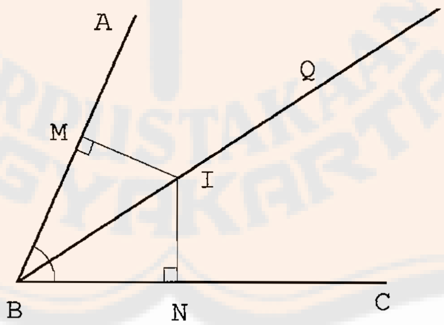
Titik potong dari ketiga sumbu sisi-sisi suatu segitiga merupakan titik pusat lingkaran luar suatu segitiga(*circumcenter*), yaitu titik O. Gambar 2.8 menunjukkan lingkaran luar ΔABC, dengan titik pusat O dan jari-jari *R*.



Gambar 2.8. Lingkaran luar ΔABC

Teorema 2.3. Sebarang titik terletak pada garis bagi sudut jika dan hanya jika titik tersebut berjarak sama terhadap sisi-sisi yang membentuk sudut itu.

Bukti:



Gambar 2.9. Ilustrasi Teorema 2.3

Diketahui: Garis $\overrightarrow{BQ}$ garis bagi $\angle ABC$, $\overline{IN} \perp \overline{BC}$ dan $\overline{IM} \perp \overrightarrow{BA}$.

Akan dibuktikan : 1. Jika I pada $\overrightarrow{BQ}$ maka $\overline{IM} \cong \overline{IN}$

2. Jika $\overline{IM} \cong \overline{IN}$ maka I pada $\overrightarrow{BQ}$

Bukti: (i) Akan ditunjukkan bahwa jika I pada $\overrightarrow{BQ}$ maka $\overline{IM} \cong \overline{IN}$. Dipandang ΔIMB dan ΔINB, tampak bahwa $\angle IMB \cong \angle INB$ keduanya merupakan sudut siku-siku, $\angle MBI \cong \angle NBI$ karena $\overline{BI}$ terletak pada garis bagi $\angle ABC$, dan $\overline{BI} \cong \overline{BI}$. Berdasarkan dalil kongruensi(sudut-sisi-sudut) maka $\Delta IMB \cong \Delta INB$, sehingga $\overline{IM} \cong \overline{IN}$.

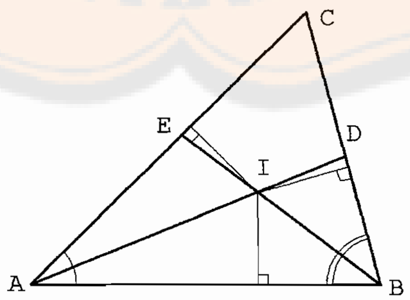
(ii) Akan ditunjukkan bahwa jika $\overline{IM} \cong \overline{IN}$ maka I pada $\overrightarrow{BQ}$. Dipandang ΔIMB dan ΔINB, diketahui bahwa $\overline{IM} \cong \overline{IN}$, $\overline{BI} \cong \overline{BI}$, dan $\angle IMB \cong \angle INB$ keduanya merupakan sudut siku-siku. Berdasarkan dalil kongruensi(sisi-sudut-sisi) maka $\Delta IMB \cong \Delta INB$, akibatnya $\angle MBI \cong \angle NBI$ artinya I terletak pada $\overrightarrow{BQ}$ yang merupakan garis bagi $\angle ABC$. Akibat yang lain $\overline{BM} \cong \overline{BN}$. ■

Teorema 2.4. Garis bagi sudut-sudut suatu segitiga bertemu pada satu titik yang berjarak sama dari ketiga sisi segitiga tersebut.

Bukti:

Diketahui: ΔABC, garis bagi-garis bagi $\angle A$ dan $\angle B$ berpotongan di I.

Akan dibuktikan: garis bagi $\angle C$ melalui I dan I berjarak sama dari sisi-sisi $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ dan $\overline{CA}$.

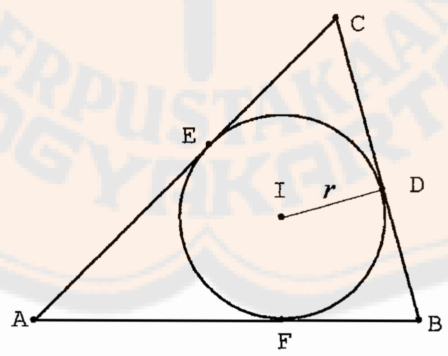


Gambar 2.10. Ilustrasi Teorema 2.4

Bukti: Garis $\overleftrightarrow{AI}$ merupakan garis bagi $\angle A$ berarti I berjarak sama dari $\overline{AB}$ dan $\overline{CA}$. Garis $\overleftrightarrow{BI}$ merupakan garis bagi $\angle B$ berarti I berjarak sama dari $\overline{AB}$ dan $\overline{BC}$. Berdasarkan dua pernyataan sebelumnya dapat disimpulkan bahwa I berjarak sama dari $\overline{CA}$ dan $\overline{BC}$. Hal ini berarti I terletak pada garis bagi $\angle C$, sehingga $\overline{CI}$ membagi $\angle C$ dan I berjarak sama dari sisi-sisi $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ dan $\overline{CA}$.■

Titik potong ketiga garis bagi sudut dalam suatu segitiga merupakan titik pusat lingkaran dalam suatu segitiga(*incenter*), yaitu titik I.

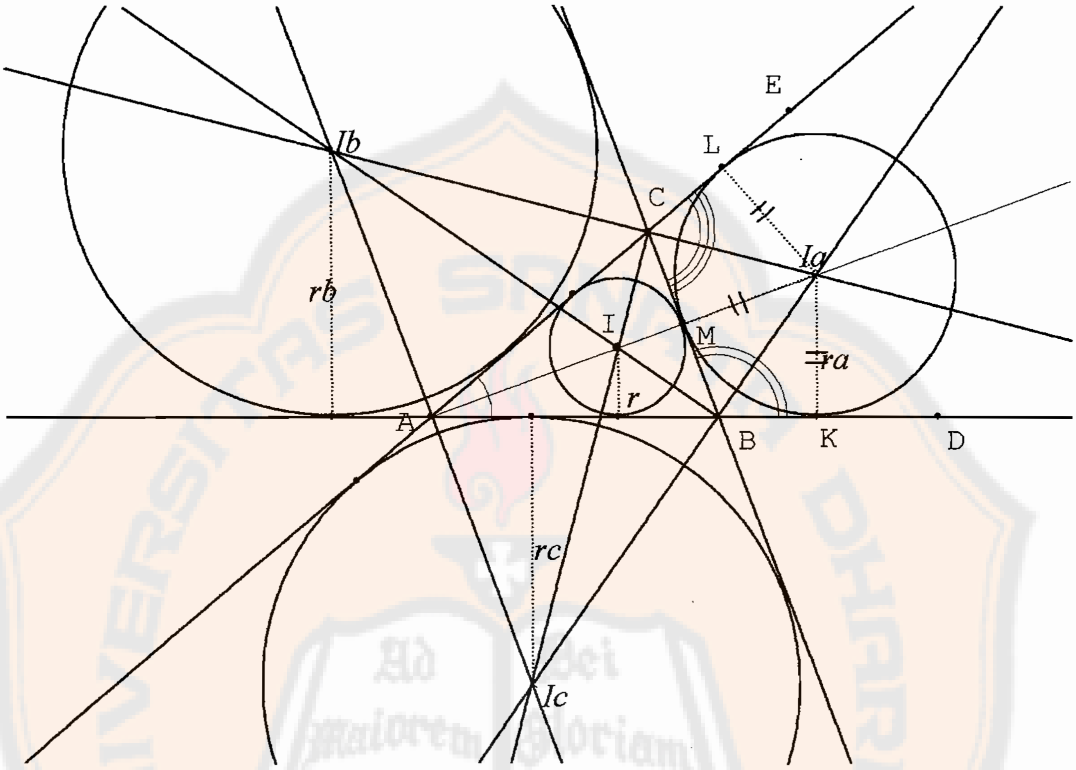
Suatu lingkaran ditentukan oleh titik pusat lingkaran dan panjang jari-jarinya. Untuk menentukan jari-jari lingkaran dalam suatu segitiga, ditarik suatu garis dari titik pusat lingkaran dalam yaitu titik I tegak lurus pada salah satu sisi segitiga misalnya $\overline{BC}$ dan memotongnya di titik D, $\overline{ID}$ merupakan jari-jari lingkaran dalam ΔABC. Gambar 2.11 menunjukkan lingkaran dalam ΔABC dengan titik pusat I dan jari-jari *r*.



Gambar 2.11. Lingkaran dalam ΔABC

Di bawah ini akan dibahas lebih lanjut tentang lingkaran dalam dan lingkaran luar ΔABC.

Pada ΔABC ditarik garis bagi sudut dalam dan garis bagi sudut luar dari sudut-sudut A, B, dan C (Gambar 2.12).



Gambar 2.12. Garis bagi sudut dalam dan garis bagi sudut luar ΔABC

Garis bagi-garis bagi sudut-sudut tersebut bertemu pada empat titik, yaitu I, I_a, I_b, dan I_c. Titik-titik itu merupakan titik pusat dari empat lingkaran yang menyinggung garis $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{BC}$, dan $\overleftrightarrow{CA}$.

Misalkan ditarik garis bagi sudut luar B atau garis bagi $\angle CBD$ dan garis bagi sudut luar C atau garis bagi $\angle BCE$. Kedua garis bagi sudut ini berpotongan di I_a. Dari I_a ditarik garis-garis yang tegak lurus $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{AC}$ dan $\overleftrightarrow{BC}$, titik potongnya berturut-turut adalah K, L dan M. Akibatnya $\overline{I_aK} \cong \overline{I_aM}$ dan $\overline{I_aM} \cong \overline{I_aL}$, sehingga $\overline{I_aK} \cong \overline{I_aL}$ (sifat transitif). Hal ini berarti $\overleftrightarrow{AI_a}$ merupakan garis bagi sudut dalam A atau garis bagi $\angle CAB$.

Segmen garis-segmen garis $\overline{I_aK} \cong \overline{I_aL} \cong \overline{I_aM}$ merupakan jari-jari lingkaran yang bertitik pusat di I_a dan menyinggung $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{BC}$, dan $\overleftrightarrow{CA}$, yaitu r_a.

Dengan langkah serupa dapat ditunjukkan bahwa lingkaran $\Theta(I_b,r_b)$ dan $\Theta(I_c,r_c)$ menyinggung $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{BC}$, dan $\overleftrightarrow{CA}$.

Keliling(*perimeter*) ΔABC adalah $2s = a + b + c$, dengan a = BC, b = AC, c = AB sehingga setengah keliling(*semi perimeter*) adalah $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$. Luas daerah ΔABC adalah $\mathbf{\Delta}$.

Luas daerah ΔIBC, ΔICA, dan ΔIAB berturut-turut adalah $\frac{1}{2}ar$, $\frac{1}{2}br$, dan $\frac{1}{2}cr$. Dengan menjumlahkan luas daerah ketiga segitiga ini diperoleh $\mathbf{\Delta} = \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}cr = \frac{1}{2}(a+b+c)r = sr$.

Dipandang ΔACI_a dan ΔABI_a pada Gambar 2.12. Luas daerah $\Delta ACI_a = \frac{1}{2}br_a$, $\Delta ABI_a = \frac{1}{2}cr_a$, dan luas daerah $\Delta BCI_a = \frac{1}{2}ar_a$. Sehingga diperoleh

$$\mathbf{\Delta} = \frac{1}{2}br_a + \frac{1}{2}cr_a - \frac{1}{2}ar_a = \frac{1}{2}(b+c-a)r_a = \left(\frac{1}{2}(a+b+c) - a\right)r_a = (s-a)r_a.$$

Dengan langkah serupa dapat ditunjukkan bahwa $\mathbf{\Delta} = (s - b)\, r_b$ dan $\mathbf{\Delta} = (s - c)\, r_c$.

Dari penjelasan di atas diperoleh

$$\mathbf{\Delta} = sr = (s-a)\,r_a = (s-b)\,r_b = (s-c)\,r_c \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.1)$$

Pada ΔABC berlaku $\cos\ \alpha = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$, sehingga

$\sin\ \alpha = \dfrac{\left[-a^4 - b^4 - c^4 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 + 2a^2b^2\right]^{\frac{1}{2}}}{2bc}$ dengan $\alpha = m\angle BAC$, dan

$\beta = m\angle ABC$, $\gamma = m\angle ACB$. Luas daerah ΔABC dapat dicari dengan persamaan $\frac{1}{2}bc\sin\alpha$, sehingga

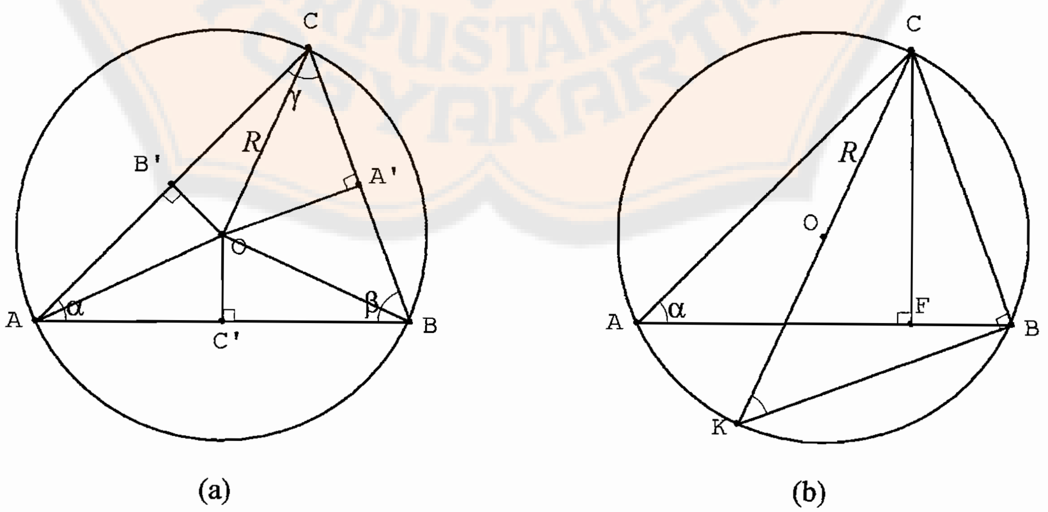
$$\begin{aligned}\Delta &= \frac{1}{2}bc\sin\alpha \\ &= \frac{1}{4}\left[-a^4-b^4-c^4+2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2\right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{4}\left[(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)\right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \left[s(s-a)(s-b)(s-c)\right]^{\frac{1}{2}} \quad \text{.......... (2.2)}\end{aligned}$$

Persamaan (2.2) disebut sebagai Rumus Heron.

Dari persamaan (2.1) dan (2.2) diperoleh $r^2 = \left(\frac{\Delta}{s}\right)^2 = \frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}$ ....(2.3a)

dan $r_a{}^2 = \left(\frac{\Delta}{s-a}\right)^2 = \frac{s(s-b)(s-c)}{s-a}$ .... (2.3b)

Selanjutnya dibahas lingkaran luar ΔABC dengan titik pusat O dan jari-jari R, ditunjukkan pada Gambar 2.13.(a).



Gambar 2.13. (a) Ilustrasi persamaan (2.4), (b) Ilustrasi persamaan (2.5)

Sudut AOB merupakan sudut pusat lingkaran, sehingga besarnya 2 kali sudut keliling, yaitu $\angle ACB$. Panjang $AC' = BC', BA' = CA', AB' = CB'$. Akibatnya $m\angle AOC' = m(\frac{1}{2}\angle AOB) = m\angle ACB$, sehingga berlaku $R \sin\gamma = AC' = \frac{1}{2}c$, $R \sin\alpha = BA' = \frac{1}{2}a$, $R\sin\beta = CB' = \frac{1}{2}b$ atau $2R = \dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma}$ .... (2.4)

Ditarik $\overline{CF} \perp \overline{AB}$ dan $\overline{CK}$ diameter yang melalui C, sehingga terbentuk dua segitiga siku-siku yang sebangun, yaitu ΔAFC dan ΔKBC (Gambar 2.13.(b)).

Segitiga $\Delta AFC \sim \Delta KBC$ sehingga $\dfrac{CF}{CA} = \dfrac{CB}{CK}, CF = \dfrac{CA \times CB}{CK} = \dfrac{ba}{2R}$.

Diperoleh $\boldsymbol{\Delta} = \dfrac{1}{2} AB \times CF = \dfrac{1}{2} c \cdot \dfrac{ba}{2R} = \dfrac{abc}{4R} \Rightarrow 4\Delta R = abc$. .... (2.5)

$$
\begin{aligned}
4\,\boldsymbol{\Delta}\,R &= abc \\
&= ((s-b)+(s-c))((s-c)+(s-a))((s-a)+(s-b)) \\
&= ((s-b)(s-c)+(s-b)(s-a)+(s-c)^2+(s-c)(s-a))((s-a)+(s-b)) \\
&= (s-b)(s-c)(s-a)+(s-b)(s-a)^2+(s-c)^2(s-a)+(s-c)(s-a)^2 \\
&\quad +(s-b)^2(s-c)+(s-b)^2(s-a)+(s-c)^2(s-b)+(s-c)(s-a)(s-b) \\
&= (s-a)(s-b)(s-a+s-b+s-c)+(s-a)(s-c)(s-c+s-a+s-b) \\
&\quad +(s-c)(s-b)(s-b+s-c+s-a)-(s-a)(s-b)(s-c) \\
&= s(s-b)(s-c)+s(s-a)(s-c)+s(s-a)(s-b)-(s-a)(s-b)(s-c) \\
&= \frac{\Delta^2}{s-a}+\frac{\Delta^2}{s-b}+\frac{\Delta^2}{s-c}-\frac{\Delta^2}{s} \\
&= \Delta\left(\frac{\Delta}{s-a}+\frac{\Delta}{s-b}+\frac{\Delta}{s-c}-\frac{\Delta}{s}\right)
\end{aligned}
$$

$= \Delta(r_a + r_b + r_c - r)$

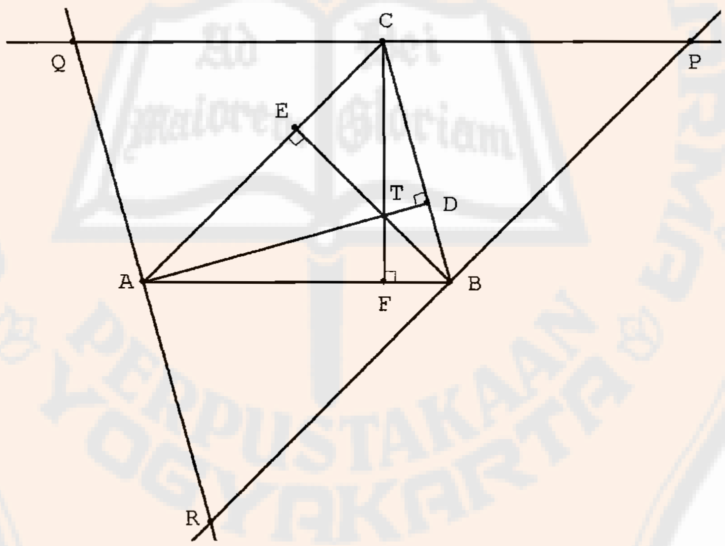
Jadi hubungan dari r, r_a, r_b, r_c dan R adalah $4R = r_a + r_b + r_c - r$…………… (2.6)

Teorema 2.5. Ketiga garis tinggi dalam setiap segitiga melalui satu titik.

Bukti:

Diketahui $\overline{AD}$ dan $\overline{BE}$ garis tinggi-garis tinggi yang melalui A dan B.

Untuk membuktikan teorema ini digunakan sifat bahwa sumbu sisi-sisi setiap segitiga melalui satu titik. Pada Gambar 2.14 ditunjukkan ΔABC, melalui titik sudut-titik sudut A, B, dan C ditarik garis-garis yang masing-masing sejajar dengan sisi di depan titik sudut itu. Apabila garis-garis itu berpotongan di P, Q, dan R maka $\overleftrightarrow{QR} // \overleftrightarrow{CB}$, $\overleftrightarrow{RP} // \overleftrightarrow{AC}$, $\overleftrightarrow{QP} // \overleftrightarrow{AB}$.



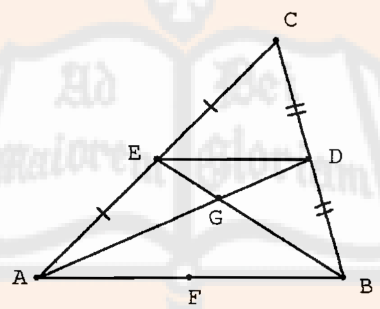
Gambar 2.14. Ilustrasi Teorema 2.5

Akibatnya segi empat ABPC dan segi empat ABCQ merupakan jajar genjang, sehingga AB = CP dan AB = QC. Jadi CP = QC, yang berarti bahwa C titik tengah $\overline{QP}$. Dengan langkah serupa dapat ditunjukkan bahwa B titik tengah $\overline{RP}$ dan A titik tengah $\overline{QR}$. Jika $\overleftrightarrow{AD}$ dan $\overleftrightarrow{BE}$ memuat garis tinggi-garis tinggi ΔABC yang melalui A dan B, maka garis tinggi-garis tinggi ini adalah sumbu-sumbu dari sisi $\overline{QR}$ dan sisi $\overline{RP}$ dalam ΔPQR. Begitu pula $\overleftrightarrow{CF}$ adalah sumbu sisi $\overline{QP}$. Karena sumbu-sumbu dalam ΔPQR melalui satu titik maka garis-garis $\overleftrightarrow{AD}$, $\overleftrightarrow{BE}$, dan $\overleftrightarrow{CF}$ yang memuat garis tinggi-garis tinggi ΔABC melalui satu titik pula.■

Titik potong ketiga garis tinggi dari suatu segitiga disebut titik tinggi dari suatu segitiga(*orthocenter*), yaitu titik T.

Teorema 2.6. Ketiga garis berat dalam setiap segitiga melalui satu titik.

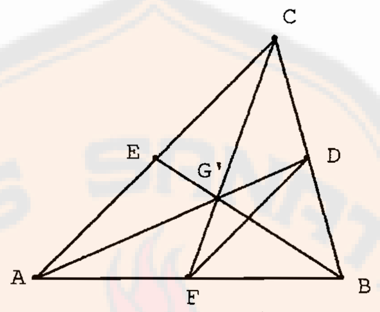
Bukti: Pada Gambar 2.15 ditunjukkan ΔABC.



Gambar 2.15. Ilustrasi Teorema 2.6(i)

Misalkan $\overline{AD}$ adalah garis berat yang melalui titik sudut A. Maka CD = BD. Misalkan $\overline{BE}$ adalah garis berat yang melalui titik sudut B. Maka AE = CE. Misalkan $\overline{AD}$ dan $\overline{BE}$ berpotongan di G. Akan dibuktikan bahwa garis berat yang melalui titik sudut C juga akan melalui G. Diketahui bahwa $\Delta CED \sim \Delta CAB$, sebab kedua segitiga itu memiliki $\angle C$ bersama, sedangkan sisi-sisi sudut itu sebanding, artinya CE : CA = CD : CB = 1 : 2. Juga $m(\angle DEG) = m(\angle ABG)$ sebagai sudut dalam berseberangan dan $m(\angle EGD) = m(\angle AGB)$ sebagai sudut-

sudut yang bertolak belakang. Jadi $\Delta EGD \sim \Delta BGA$. Akibatnya EG : BG = ED : BA = 1 : 2 = DG : AG. Titik-titik A, G, dan D terletak pada satu garis dengan DG $= \frac{1}{3} DA$.



Gambar 2. 16. Ilustrasi Teorema 2.6(ii)

Misalkan $\overline{CF}$ adalah garis berat yang melalui titik sudut C dan memotong $\overline{AD}$ di G'. Maka AF = BF. Segitiga BDF ~ ΔBCA, sebab kedua segitiga itu memiliki $\angle B$ bersama, dan sisi-sisi sudut itu sebanding, artinya BD : BC = BF : BA = 1: 2. Ukuran $\angle FDG' = m(\angle CAG')$ sebagai sudut dalam berseberangan dan $m(\angle DG'F) = m(\angle CG'A)$ sebagai sudut-sudut yang bertolak belakang. Jadi $\Delta DG'F \sim \Delta AG'C$. Akibatnya DG' : AG' = $DF : AC = 1 : 2 =$ EG' : BG'. Titik-titik A, G', dan D terletak pada satu garis dengan $DG' = \frac{1}{3} DA$.

Dari penjelasan sebelumnya diperoleh DG = $\frac{1}{3}$DA sehingga G' = G. Ini berarti bahwa garis berat-garis berat dalam setiap segitiga melalui satu titik.■

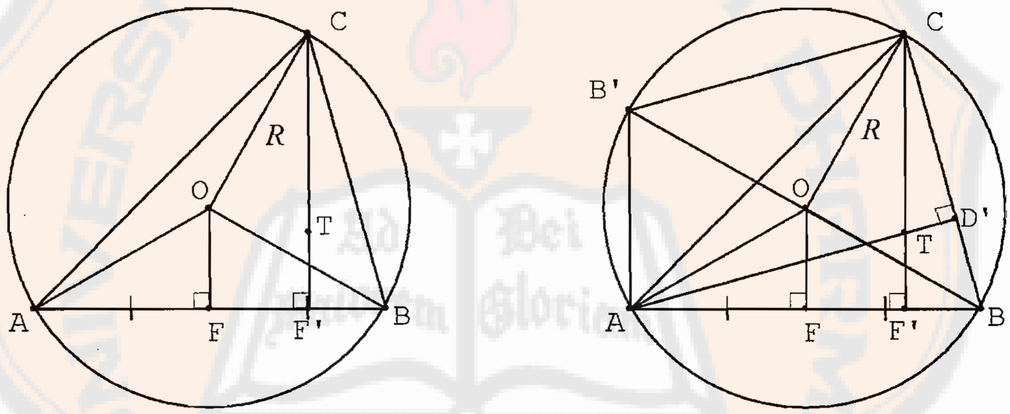
Titik potong ketiga garis berat dalam suatu segitiga disebut titik berat suatu segitiga(*centroid*), yaitu titik G.

Garis berat suatu segitiga yang dimaksud adalah garis berat lempeng segitiga homogen.

Berdasarkan pembuktian Teorema 2.6 dapat ditarik kesimpulan bahwa titik potong ketiga garis berat setiap segitiga terletak pada $\frac{2}{3}$ bagian dari titik sudut sampai dengan titik tengah sisi di depannya.

Teorema 2.7. Jarak titik sudut dengan titik tinggi suatu segitiga adalah dua kali jarak titik pusat lingkaran luar suatu segitiga dengan titik tengah sisi yang ada di depan titik sudut itu.

Bukti:



Gambar 2.17. Ilustrasi Teorema 2.7

Pada gambar 2.17.(a) ditunjukkan bahwa O adalah titik pusat lingkaran luar ΔABC. Titik T merupakan titik tinggi ΔABC.

Akan dibuktikan CT = 2OF.

Titik O merupakan titik potong sumbu sisi-sisi ΔABC. Jika F titik tengah $\overline{AB}$ maka $\overline{OF} \perp \overline{AB}$. Titik T merupakan titik tinggi ΔABC berarti $\overline{CT} \perp \overline{AB}$, akibatnya $\overleftrightarrow{CT} // \overleftrightarrow{OF}$. Selanjutnya dilukis diameter $\overline{BB'}$, dilanjutkan dengan $\overline{B'A}$ sehingga terbentuk $\Delta B'AB$ seperti tampak pada Gambar 2.17.(b). Sudut $B'AB$ merupakan sudut keliling yang menghadap $\frown BB'$ sehingga besarnya 90^0

(setengah dari sudut pusat). Jadi $m(\angle B'AB) = m(\angle OFB)$, $\angle ABB' \cong \angle FBO$ sehingga $\Delta B'AB \sim \Delta OFB$, dengan AB : FB = B'B : OB = B'A : OF = 2 : 1 atau $B'A = 2OF$.

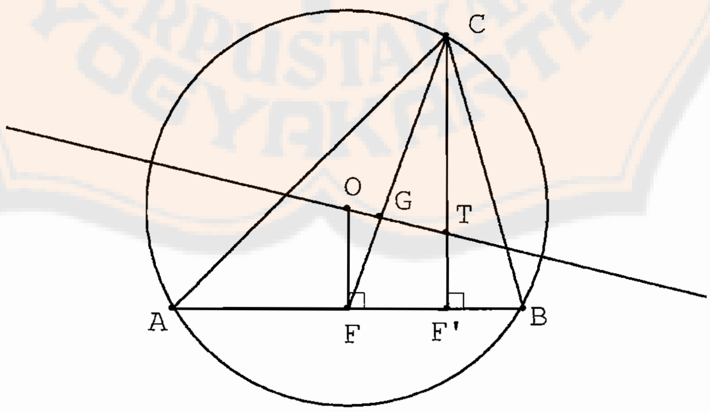
Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $\overline{B'A} \cong \overline{CT}$, sehingga $CT = 2OF$.

Titik T merupakan titik tinggi ΔABC, $\overline{CT}$ (perpanjangannya) $\perp \overline{AB}$, $\overline{B'A} \perp \overline{AB}$ berarti $\overleftrightarrow{B'A} // \overleftrightarrow{CT}$. Sudut B'CB merupakan sudut keliling yang menghadap $\frown BB'$, sehingga besarnya 90^0(setengah dari sudut pusat). Jadi $\overline{B'C} \perp \overline{CB}$ dan $\overleftrightarrow{AT}$ (perpanjangannya) $\perp \overline{CB}$, berarti $\overline{AT} // \overline{B'C}$. Diperoleh segi empat ATCB' adalah jajar genjang, sehingga $CT = B'A = 2OF$.■

Teorema 2.8. Titik tinggi T, titik pusat lingkaran luar O dan titik berat G dari suatu segitiga terletak pada satu garis(*collinear*).

Bukti:

Diketahui ΔABC dengan titik tinggi T dan titik pusat lingkaran luar O seperti tampak pada Gambar 2.18.



Gambar 2.18. Ilustrasi Teorema 2.8

Akan dibuktikan bahwa titik-titik T, O, dan G segaris.

Ditarik suatu garis yang melalui T dan O. Garis $\overleftrightarrow{OF}$ merupakan sumbu $\overline{AB}$ sehingga AF = BF. Titik C dan titik F dihubungkan sehingga terbentuk $\overline{CF}$ yang merupakan garis berat dari C ke $\overline{AB}$.

Titik G merupakan titik potong garis $\overleftrightarrow{TO}$ dan garis $\overleftrightarrow{CF}$. Garis $\overleftrightarrow{OF} // \overleftrightarrow{CF'}$ sehingga $\Delta OFG \sim \Delta TCG$ (sudut-sudut-sudut). Berdasarkan Teorema 2.7 diketahui CT = 2OF, sehingga CG = 2FG atau CG = $\frac{2}{3}$CF. Titik berat suatu segitiga terletak pada $\frac{2}{3}$ bagian dari titik sudut sampai dengan titik tengah sisi di depan titik sudut itu, maka titik G merupakan titik berat ΔABC di atas. Sedemikian hingga titik berat G, titik tinggi T, dan titik pusat lingkaran luar O terletak pada satu garis, yaitu garis $\overleftrightarrow{TO}$. ∎

Karena CG = 2FG maka TG = 2OG, artinya titik berat G terletak pada $\frac{1}{3}$ bagian dari segmen yang dibentuk oleh titik pusat lingkaran luar O dan titik tinggi T pada ΔABC. Ditulis OG = $\frac{1}{3}$ OT atau TG = $\frac{2}{3}$TO.

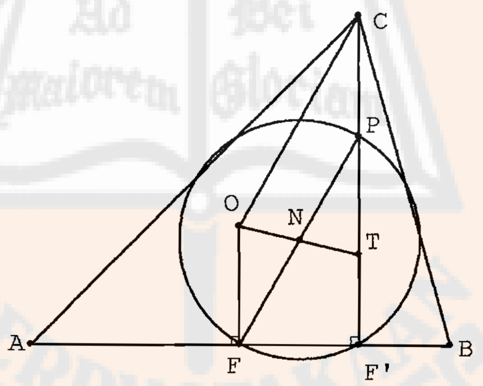
Garis yang memuat titik tinggi T, titik pusat lingkaran luar O dan titik berat G dari suatu segitiga disebut *garis Euler*.

B. Lingkaran Titik Sembilan

Dalam setiap segitiga terdapat sebuah lingkaran titik sembilan, sebuah lingkaran yang melalui sembilan titik istimewa dalam segitiga itu.

Lingkaran titik sembilan diselidiki para ahli geometri pada abad ke-19. Ahli geometri tersebut antara lain Charles J. Brianchon(1783-1864), Jean Victor Poncelet(1788-1867), dan Karl Wilhelm Feuerbach(1800-1834). Lingkaran titik sembilan disebut juga lingkaran Feuerbach atau lingkaran Euler karena menunjukkan adanya hubungan antara lingkaran dan garis Euler.

Segitiga ABC dengan titik tinggi T dan titik pusat lingkaran luar O, seperti tampak pada Gambar 2.19. Titik F merupakan titik tengah $\overline{AB}$, F' titik potong garis tinggi titik sudut C dengan $\overline{AB}$ atau titik kaki garis tinggi $\overline{CF'}$, dan P titik tengah $\overline{CT}$. Selanjutnya dilukis $\overline{OF}$, $\overline{CF'}$, $\overline{OC}$, $\overline{PF}$, dan $\overline{TO}$. Segmen garis $\overline{PF}$ dan $\overline{TO}$ berpotongan di N.



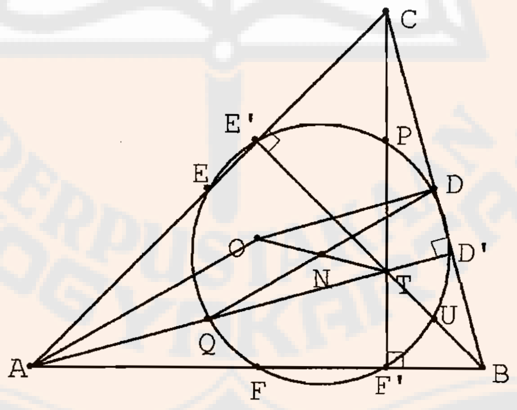
Gambar 2.19. Lingkaran titik sembilan (i)

Segmen garis $\overline{OC}$ adalah jari-jari lingkaran luar ΔABC. Karena P titik tengah $\overline{CT}$ maka TP = $\frac{1}{2}$TC dan OF = $\frac{1}{2}$TC (Teorema 2.7). Ini berarti $\overline{OF} \cong \overline{TP}$. Ukuran $\angle$NOF = m$\angle$NTP, m$\angle$OFN = m$\angle$TPN (sudut-sisi-sudut), sehingga $\Delta NTP \cong \Delta NOF$ dan $\overline{NT} \cong \overline{NO}$. Berarti N titik tengah $\overline{TO}$ dan N titik tengah $\overline{PF}$.

Diperhatikan segitiga siku-siku $PF'F$ dan lingkaran luar segitiga tersebut. Sudut $PF'F$ merupakan sudut siku-siku, titik N merupakan titik pusat lingkaran luar $\Delta PF'F$ dan $\overline{NP}$ merupakan jari-jari lingkaran itu.

Untuk melengkapi gambaran tentang lingkaran $\Theta(N, \overline{NP})$ akan ditunjukkan keterkaitan antara $\overline{NP}$ dengan ΔABC. Digunakan dua segitiga sebangun, yaitu ΔNTP dan ΔOTC. Segitiga-segitiga tersebut sebangun karena $PT : CT = 1 : 2$, $m\angle PTN = m\angle CTO$, $TN : TO = 1 : 2$ (sisi-sudut-sisi). Akibatnya $PN : CO = 1 : 2$ atau $PN = \frac{1}{2}CO$.

Diperhatikan ΔABC pada Gambar 2.20, titik D merupakan titik tengah $\overline{BC}$, $\overline{AD'}$ merupakan garis tinggi yang melalui A. Titik Q merupakan titik tengah $\overline{AT}$.



Gambar 2.20. Lingkaran titik sembilan (ii)

Dengan cara serupa dapat dilihat bahwa $\Delta NTQ \cong \Delta NOD$ sehingga $\overline{NT} \cong \overline{NO}$ dan $\overline{NQ} \cong \overline{ND}$. Segitiga $\Delta NTQ \sim \Delta OTA$ karena $NT : OT = TQ : TA$

$= 1 : 2$, akibatnya $NQ = \frac{1}{2}OA$. Lingkaran $\Theta(N, \overline{NQ})$ merupakan lingkaran luar $\Delta QD'D$.

Lingkaran $\Theta(N, \overline{NQ})$ merupakan lingkaran yang sama dengan lingkaran $\Theta(N, \overline{NP})$. Kedua lingkaran itu mempunyai titik pusat dan panjang jari-jari yang sama. Dengan cara serupa dapat ditunjukkan bahwa titik U, E', E terletak pada lingkaran itu juga.

Dari uraian di atas dapat ditarik suatu kesimpulan bahwa lingkaran titik sembilan merupakan lingkaran yang melalui sembilan titik, yaitu:

(i) titik tengah sisi-sisi suatu segitiga (titik-titik D, E, F),

(ii) titik kaki dari tiga garis tinggi suatu segitiga (titik-titik D', E', F'),

(iii) titik tengah bagian garis tinggi yang di atas (titik-titik P, Q, U).

Teorema 2.9. Titik pusat lingkaran titik sembilan yaitu titik N merupakan titik tengah segmen yang dibentuk oleh titik tinggi T dengan titik pusat lingkaran luar O dari ΔABC.

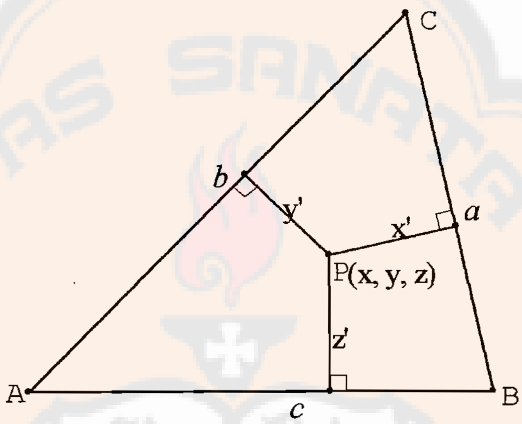
Bukti:

Pembuktian teorema ini sudah dibahas di bagian sebelumnya.

C. Koordinat – koordinat Trilinear

Segitiga ABC mempunyai titik sudut A, B, C; sudut A, B, C; dan panjang sisi *a*, *b*, *c*, dengan $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$.

Koordinat-koordinat trilinear titik P pada bidang ΔABC ditunjukkan oleh triple $\mathbf{x} : \mathbf{y} : \mathbf{z}$ atau $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$, yang masing-masing menunjukkan perbandingan jarak titik P dari sisi-sisi ΔABC. **x** menunjukkan perbandingan jarak titik P dari sisi $\overline{BC}$, **y** menunjukkan perbandingan jarak titik P dari sisi $\overline{CA}$, dan **z** menunjukkan perbandingan jarak titik P dari sisi $\overline{AB}$. Seperti tampak pada Gambar 2.21.



Gambar 2.21. Koordinat-koordinat trilinear titik P

Koordinat-koordinat trilinear diperkenalkan oleh Plücker pada tahun 1835. Koordinat-koordinat ini menunjukkan perbandingan jarak secara signifikan. Koordinat-koordinat suatu titik boleh dikalikan dengan sebarang konstanta k yang tidak nol ($k \neq 0$) tanpa mengubah letak titik tersebut, karena yang diperlukan adalah perbandingan antara koordinat-koordinatnya, jadi $P(x, y, z) = P(kx, ky, kz)$.

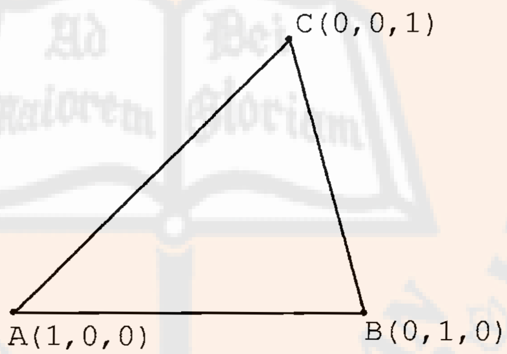
Titik P pada Gambar 2.21 di atas mempunyai koordinat-koordinat trilinear (x, y, z) dan berada pada jarak x', y', z', dari sisi-sisi $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ secara berturut-turut. Jarak $x' = kx$, $y' = ky$, $z' = kz$, sedangkan Δ_a menunjukkan luas daerah ΔBPC, Δ_b menunjukkan luas daerah ΔAPC, dan Δ_c menunjukkan luas daerah ΔAPB.

Diperoleh luas daerah ΔABC, yaitu $\mathbf{\Delta} = \mathbf{\Delta}_a + \mathbf{\Delta}_b + \mathbf{\Delta}_c = \frac{1}{2}a\,x' + \frac{1}{2}b\,y' + \frac{1}{2}c\,z' = \frac{1}{2}(akx + bky + ckz) = \frac{1}{2}k\,(ax + by + cz)$.

Jadi $2\mathbf{\Delta} = k\,(ax + by + cz) \Leftrightarrow k = \dfrac{2\Delta}{ax + by + cz}$ ....(2.7)

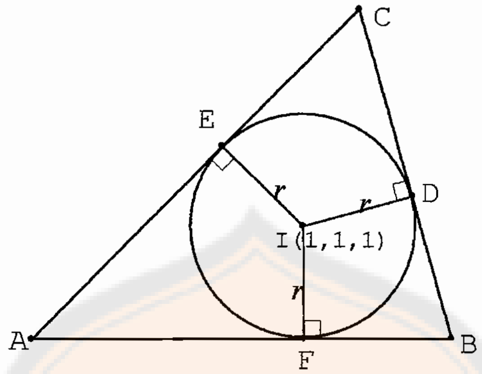
Jika diambil k =1 maka koordinat-koordinat trilinear titik P adalah (x, y, z) dan diperoleh $2\mathbf{\Delta} = (ax + by + cz)$...(2. 8)

Di bawah ini disajikan representasi koordinat-koordinat trilinear dari titik sudut-titik sudut ΔABC, yaitu titik A : A(1,0,0), titik B : B(0,1,0), dan titik C : C(0,0,1). Seperti tampak pada Gambar 2.22.



Gambar 2.22. Koordinat-koordinat trilinear titik sudut ΔABC

Lingkaran dalam ΔABC menyinggung sisi-sisi $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, dan $\overline{AB}$ berturut-turut di titik D, E, dan F . Titik I merupakan titik pusat lingkaran dalam segitiga tersebut, sehingga ID = IE = IF = r, r adalah jari-jari lingkaran dalam ΔABC. Koordinat-koordinat trilinear dari I adalah (r, r, r) dan koordinat homogen untuk I adalah (1,1,1). Seperti tampak pada Gambar 2.23.

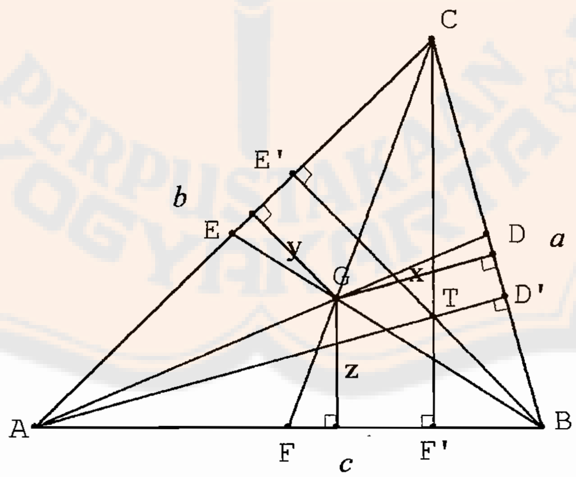


Gambar 2.23. Koordinat-koordinat trilinear titik pusat lingkaran dalam ΔABC

Jika koordinat-koordinat trilinear titik I yaitu (r, r, r) disubstitusikan ke persamaan (2.8) maka diperoleh $2\boldsymbol{\Delta} = ar + br + cr = r\,(a+b+c) \Leftrightarrow r = \dfrac{2\Delta}{a+b+c}$ .....(2. 9)

Selanjutnya ditunjukkan koordinat-koordinat trilinear dari titik berat G, titik tinggi T, titik pusat lingkaran luar O, dan titik pusat lingkaran titik sembilan N dari ΔABC.

1. Titik berat(*centroid*) G dari ΔABC



Gambar 2.24. Koordinat-koordinat trilinear titik berat G

t_a = AD' , t_b = BE' , t_c =CF' , $\boldsymbol{\Delta}$ = luas daerah Δ ABC

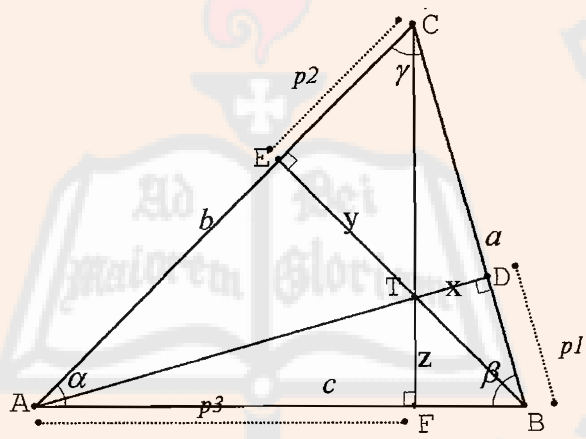
$x = \frac{1}{3}\, t_a,\ \Delta = \frac{1}{2} a\, t_a \Leftrightarrow t_a = \frac{2\Delta}{a}$, sehingga $x = \frac{1}{3}\, t_a = \frac{2\Delta}{3a}$

$y = \frac{1}{3}\, t_b,\ \Delta = \frac{1}{2} b\, t_b \Leftrightarrow t_b = \frac{2\Delta}{b}$, sehingga $y = \frac{1}{3}\, t_b = \frac{2\Delta}{3b}$

$z = \frac{1}{3}\, t_c,\ \Delta = \frac{1}{2} c\, t_c \Leftrightarrow t_c = \frac{2\Delta}{c}$, sehingga $z = \frac{1}{3}\, t_c = \frac{2\Delta}{3c}$

Jadi $G(x, y, z) = G(\frac{2\Delta}{3a}, \frac{2\Delta}{3b}, \frac{2\Delta}{3c}) = G(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c})$

2. Titik tinggi(*orthocenter*) T dari ΔABC



Gambar 2.25. Koordinat-koordinat trilinear titik tinggi T

$p_1 = BD,\ p_2 = CE,\ p_3 = AF$; ukuran sudut-sudut dinyatakan dalam derajat

$\cos\beta = \frac{p_1}{c} \Leftrightarrow p_1 = c\cos\beta;\ \cos\alpha = \frac{p_2}{a} \Leftrightarrow p_2 = a\cos\alpha;\ \cos\gamma = \frac{p_3}{b} \Leftrightarrow p_3 = b\cos\gamma$

$m\angle CBE = 90 - \gamma,\ \frac{x}{p_1} = \mathrm{tg}\,(90-\gamma) \Leftrightarrow x = p_1\,\mathrm{tg}\,(90-\gamma) = p_1\,\mathrm{ctg}\,\gamma = c\cos\beta\frac{\cos\gamma}{\sin\gamma}$

$m\angle ACF = 90 - \alpha,\ \frac{y}{p_2} = \mathrm{tg}\,(90-\alpha) \Leftrightarrow y = p_2\,\mathrm{tg}\,(90-\alpha) = p_2\,\mathrm{ctg}\,\alpha = a\cos\gamma\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

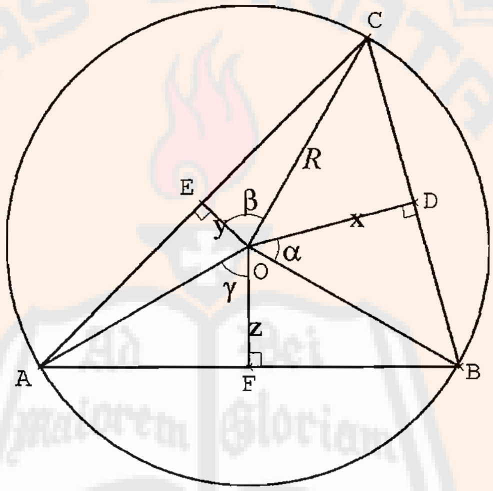
$m\angle BAD = 90 - \beta,\ \frac{z}{p_3} = \mathrm{tg}\,(90-\beta) \Leftrightarrow z = p_3\,\mathrm{tg}\,(90-\beta) = p_3\,\mathrm{ctg}\,\beta = b\cos\alpha\frac{\cos\beta}{\sin\beta}$

$$T(x, y, z) = T(c\cos\beta\,\frac{\cos\gamma}{\sin\gamma},\ a\cos\gamma\,\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},\ b\cos\alpha\,\frac{\cos\beta}{\sin\beta})$$

$$= T(\cos\beta\cos\gamma\,\frac{c}{\sin\gamma},\ \cos\gamma\cos\alpha\,\frac{a}{\sin\alpha},\ \cos\alpha\cos\beta\,\frac{b}{\sin\beta})$$

$$= T(\cos\beta\cos\gamma,\ \cos\gamma\cos\alpha,\ \cos\alpha\cos\beta)$$

3. Titik pusat lingkaran luar(*circumcenter*) O dari ΔABC



Gambar 2.26. Koordinat-koordinat trilinear titik pusat lingkaran luar O

R merupakan jari-jari lingkaran luar ΔABC.

Sudut BOC = 2($\angle$BAC), $\angle BOD = \frac{1}{2}(\angle BOC)$ sehingga $\angle BOD = \angle BAC = \alpha$

$$\cos\angle BOD = \frac{x}{R} \Leftrightarrow x = R\cos\angle BOD = R\cos\alpha$$

Dengan langkah serupa dapat diperoleh:

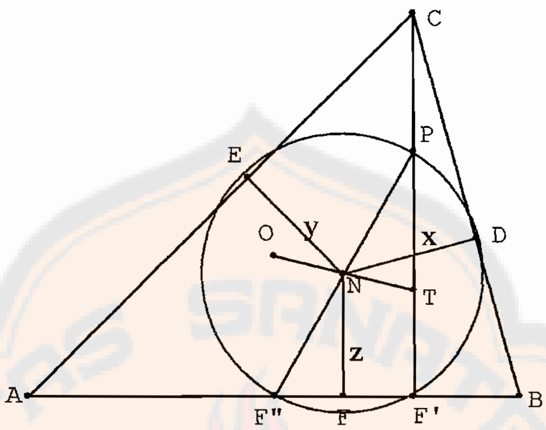
$y = R\cos\angle COE = R\cos\beta$

$z = R\cos\angle AOF = R\cos\gamma$

Jadi $O(x, y, z) = O(R\cos\alpha, R\cos\beta, R\cos\gamma)$

$= O(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$

4. Titik pusat lingkaran titik sembilan(*nine-point center*) N dari ΔABC



Gambar 2.27. Koordinat-koordinat trilinear titik pusat lingkaran titik sembilan N

Diketahui N titik tengah $\overline{OT}$ sehingga koordinatnya:

$$N(x, y, z) = N\left(\frac{\cos\alpha + \cos\beta\cos\gamma}{2}, \frac{\cos\beta + \cos\alpha\cos\gamma}{2}, \frac{\cos\gamma + \cos\alpha\cos\beta}{2}\right)$$

$$= N(\cos\alpha + \cos\beta\cos\gamma, \cos\beta + \cos\gamma\cos\alpha, \cos\gamma + \cos\alpha\cos\beta)$$

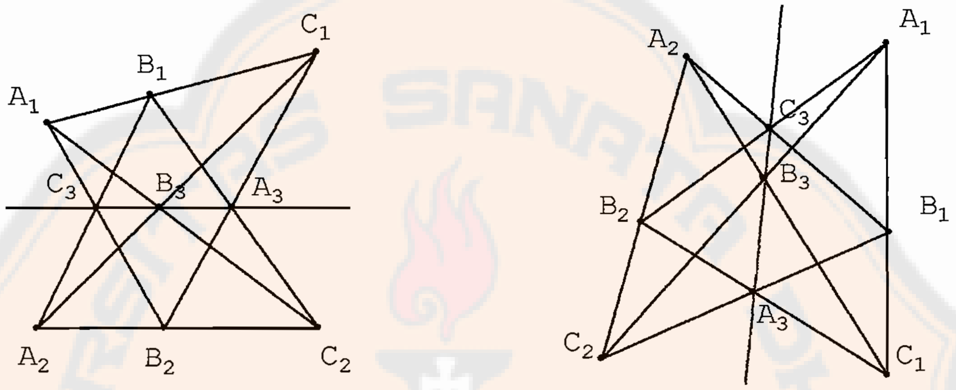
Pada koordinat-koordinat trilinear persamaan garis lurus yang melalui titik-titik $T_1(x_1, y_1, z_1)$ dan $T_2(x_2, y_2, z_2)$ adalah:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = 0 \text{ disederhanakan menjadi}$$

$$(y_1z_2 - y_2z_1)\,x + (z_1x_2 - z_2x_1)\,y + (x_1y_2 - x_2y_1)\,z = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2.10)$$

D. Perspektivitas

Aksioma V dalam Geometri Proyektif menyatakan bahwa jika keenam titik sudut dari suatu hexagon(segienam) terletak bergantian pada dua garis, maka ketiga titik-titik potong sisi-sisi yang berhadapan segaris.



(a) (b)

Gambar 2.28. Hexagon $A_1B_2C_1A_2B_1C_2$

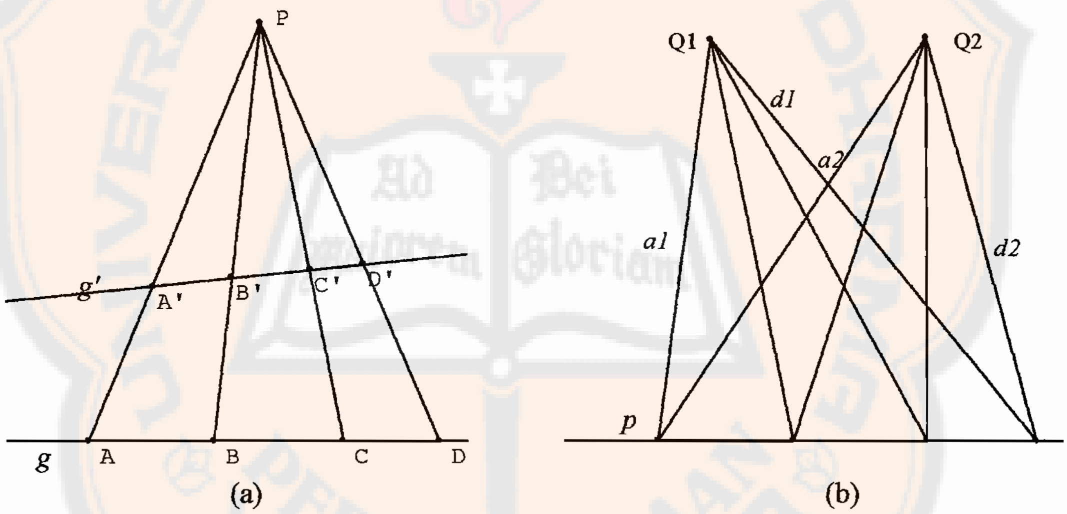
Hexagon $A_1B_2C_1A_2B_1C_2$; A_1, B_1, dan C_1 segaris, demikian pula A_2, B_2, dan C_2. Bagaimanapun letak kedua garis itu, jika $\overleftrightarrow{A_1B_2} \cdot \overleftrightarrow{A_2B_1} = C_3$, $\overleftrightarrow{B_1C_2} \cdot \overleftrightarrow{B_2C_1} = A_3$, dan $\overleftrightarrow{C_1A_2} \cdot \overleftrightarrow{C_2A_1} = B_3$ maka C_3, A_3, dan B_3 akan segaris.

Aksioma V menyangkut sembilan titik dan sembilan garis yang dapat digambar bermacam-macam seperti Gambar 2.28.(a) dan (b). Aksioma ini juga menyatakan bahwa titik-titik A_3, B_3, dan C_3 segaris. Notasi yang digunakan dipilih sedemikian, hingga ketiga A_i, B_j, C_k segaris apabila $i + j + k$ habis dibagi tiga atau $i + j + k \equiv 0$(modulo 3).

Cara lain untuk menyatakan hasil di atas ialah dengan menyusun sembilan titik tersebut dalam bentuk matriks berikut:

$$\begin{Vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{Vmatrix}$$

Prinsip dualitas menyatakan bahwa dalam bidang proyektif setiap definisi tetap berarti dan setiap dalil tetap benar, apabila kata *titik* ditukar dengan *garis*, *terletak pada* dengan *melalui*, *menghubungkan* dengan *memotong*, *segaris* dengan *berpotongan pada satu titik*. Prinsip ini merupakan salah satu sifat yang istimewa dari geometri proyektif.



Gambar 2.29. (a) Titik pusat perspektivitas P, (b) Sumbu perspektivitas *p*

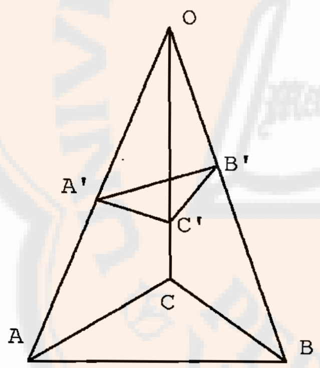
Titik-titik pada garis *g* dan *g'* dikatakan perspektif terhadap titik P karena garis-garis yang menghubungkan titik-titik yang berkorespondensi semuanya melalui P. Titik P disebut titik pusat perspektivitas (Gambar 2.29.(a)).

Mengingat prinsip dualitas, maka sebarang dua berkas garis dikatakan perspektif terhadap suatu garis *p* jika titik potong-titik potong dari garis-garis yang berkorespondensi terletak pada garis *p*. Garis *p* disebut sumbu perspektivitas (Gambar 2.29.(b)).

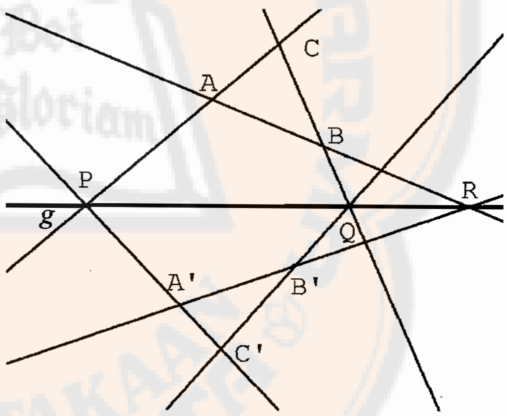
Dua bangun F dan F' dikatakan perspektif dari suatu titik O, jika ada korespondensi satu-satu antara unsur-unsur dari F dan F' dan garis-garis yang menghubungkan titik-titik yang berkorespondensi dari F dan F' melalui titik O.

Dua segitiga ABC dan A'B'C' dikatakan perspektif terhadap titik O, jika garis-garis $\overleftrightarrow{AA'}$, $\overleftrightarrow{BB'}$, dan $\overleftrightarrow{CC'}$ melalui O. Titik O merupakan titik pusat perspektivitas (Gambar 2.30.(a)).

Mengingat prinsip dualitas, dua segitiga dikatakan perspektif terhadap garis *g*, jika titik potong-titik potong sisi-sisi yang berkorespondensi terletak pada satu garis *g*. Garis *g* merupakan sumbu perspektivitas (Gambar 2.30.(b)).



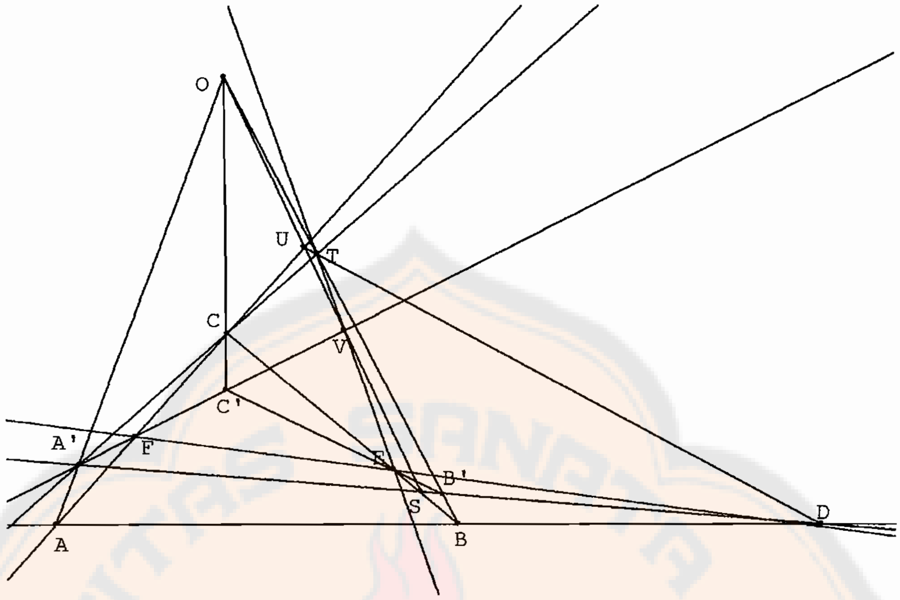
(a)



(b)

Gambar 2.30. Perspektivitas dua segitiga (a) terhadap suatu titik (b) terhadap suatu garis

Teorema 2.10. (Teorema Desargues'). Jika dua segitiga perspektif terhadap(dari) suatu titik, maka segitiga-segitiga itu perspektif terhadap(dari) suatu garis dan sebaliknya.



Gambar 2.31. Ilustrasi Teorema Desargues

Bukti:

Diketahui: ΔABC dan $\Delta A'B'C'$ perspektif dari titik O. Titik-titik $D = \overleftrightarrow{AB}.\overleftrightarrow{A'B'}$;

$E = \overleftrightarrow{BC}.\overleftrightarrow{B'C'}$; $F = \overleftrightarrow{AC}.\overleftrightarrow{A'C'}$.

Dibuktikan: D, E, dan F segaris.

Titik-titik $S = \overleftrightarrow{BC}.\overleftrightarrow{A'B'}$; $T = \overleftrightarrow{A'C}.\overleftrightarrow{OB}$; $U = \overleftrightarrow{AC}.\overleftrightarrow{OS}$; $V = \overleftrightarrow{A'C'}.\overleftrightarrow{OS}$

Berdasarkan aksioma V dalam geometri proyektif, bisa digunakan notasi matriks untuk mendapatkan beberapa titik bertiga yang segaris.

$$\left\|\begin{matrix} O & A & A' \\ C & S & B \\ D & T & U \end{matrix}\right\| \qquad \begin{matrix} D = \overleftrightarrow{AB}.\overleftrightarrow{A'S} \\ T = \overleftrightarrow{OB}.\overleftrightarrow{A'C} \\ U = \overleftrightarrow{OS}.\overleftrightarrow{AC} \end{matrix}$$

Titik-titik O, A, A' segaris, titik-titik C, S, B segaris. Berdasarkan aksioma V, $\overleftrightarrow{AB}.\overleftrightarrow{A'S}$, $\overleftrightarrow{OB}.\overleftrightarrow{A'C}$, dan $\overleftrightarrow{OS}.\overleftrightarrow{AC}$ segaris. Jika $\overleftrightarrow{AB}.\overleftrightarrow{A'S} = D$, $\overleftrightarrow{OB}.\overleftrightarrow{A'C} = T$, dan $\overleftrightarrow{OS}.\overleftrightarrow{AC} = U$ maka D, T, U segaris.

$$\left\| \begin{matrix} O & C & C' \\ A' & B' & S \\ E & V & T \end{matrix} \right\| \qquad \begin{aligned} E &= \overleftrightarrow{CS} \cdot \overleftrightarrow{B'C'} \\ V &= \overleftrightarrow{OS} \cdot \overleftrightarrow{A'C'} \\ T &= \overleftrightarrow{OB'} \cdot \overleftrightarrow{A'C} \end{aligned}$$

Titik-titik O, C, C' segaris, titik-titik A', B', S segaris. Berdasarkan aksioma V, $\overleftrightarrow{CS} \cdot \overleftrightarrow{B'C'}$, $\overleftrightarrow{OS} \cdot \overleftrightarrow{A'C'}$ dan $\overleftrightarrow{OB'} \cdot \overleftrightarrow{A'C}$ segaris. Jika $\overleftrightarrow{CS} \cdot \overleftrightarrow{B'C'} = E$, $\overleftrightarrow{OS} \cdot \overleftrightarrow{A'C'} = V$, dan $\overleftrightarrow{OB'} \cdot \overleftrightarrow{A'C} = T$ maka E, V, T segaris.

Sehingga diperoleh

$$\left\| \begin{matrix} C & A' & T \\ V & U & S \\ D & E & F \end{matrix} \right\| \qquad \begin{aligned} D &= \overleftrightarrow{A'S} \cdot \overleftrightarrow{UT} \\ E &= \overleftrightarrow{CS} \cdot \overleftrightarrow{VT} \\ F &= \overleftrightarrow{CU} \cdot \overleftrightarrow{A'V} \end{aligned}$$

Baris ketiga matriks terakhir menunjukkan bahwa D, E, dan F segaris.

BAB III

SEGITIGA EULER - GERGONNE - SODDY

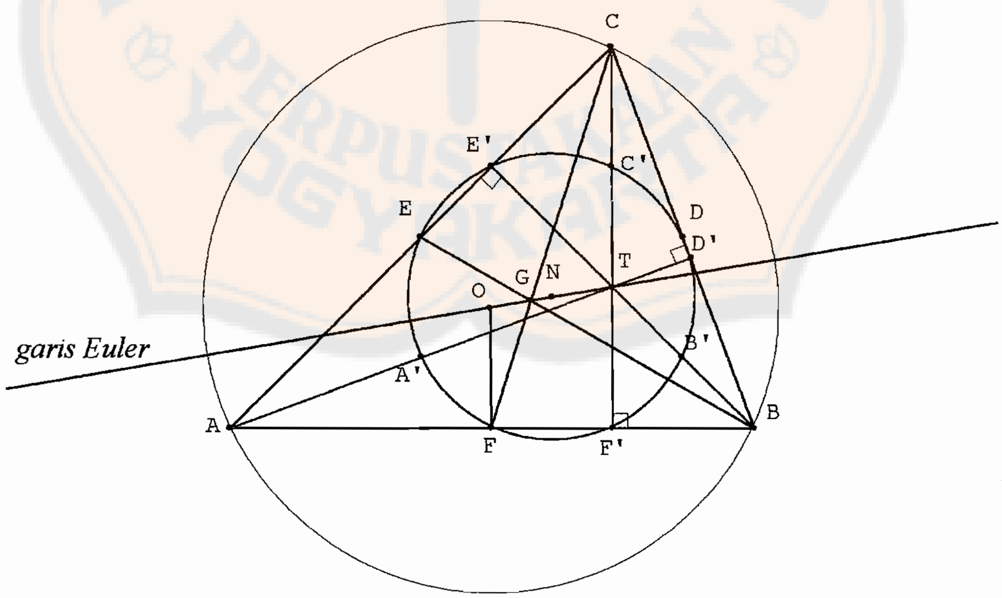
A. Garis Euler

Definisi 3.1 (Definisi Garis Euler)

Garis Euler adalah garis yang memuat titik tinggi T, titik pusat lingkaran luar O, dan titik berat G dari suatu segitiga.

Tiga titik yaitu A', B', C' merupakan titik tengah bagian garis tinggi yang di atas pada ΔABC disebut *titik-titik Euler*(Richard dan George,1981:243).

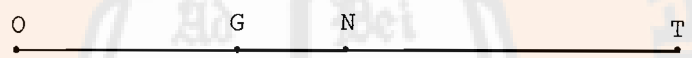
Garis Euler ditemukan pada tahun 1765 oleh Euler, ia membuktikan bahwa titik berat G terletak pada sepertiga bagian dari segmen garis yang dibentuk oleh titik pusat lingkaran luar O dan titik tinggi T pada suatu segitiga atau $OG = \frac{1}{3}OT$ (Pembuktian Teorema 2.8).



Gambar 3.1. Garis Euler dalam ΔABC

Pada Gambar 3.1 ditunjukkan bahwa $\overline{OF} // \overline{CT}$ dan CT = 2OF. Hal ini menunjukkan bahwa ΔGOF dan ΔGTC sebangun, dengan perbandingan 1 : 2. Berarti OG : OT = 1 : 3 dan FG : FC = 1 : 3.

Dalam membahas lingkaran titik sembilan sudah dijelaskan bahwa titik pusat lingkaran titik sembilan N merupaknan titik tengah $\overline{OT}$. Hal ini berarti N membagi $\overline{OT}$ menjadi dua bagian yang sama panjang. Jadi titik-titik O, G, N, T terletak pada satu garis(*collinear*) yaitu pada garis Euler, dengan perbandingan OG : GN : NT = 2 : 1 : 3. Titik N dan O dipisahkan harmonis oleh G dan T atau titik G dan T dipisahkan harmonis oleh N dan O.



Gambar 3.2. Garis Euler, OG : GN = 2 : 1 dan OT : NT = 6 : 3 = 2 : 1

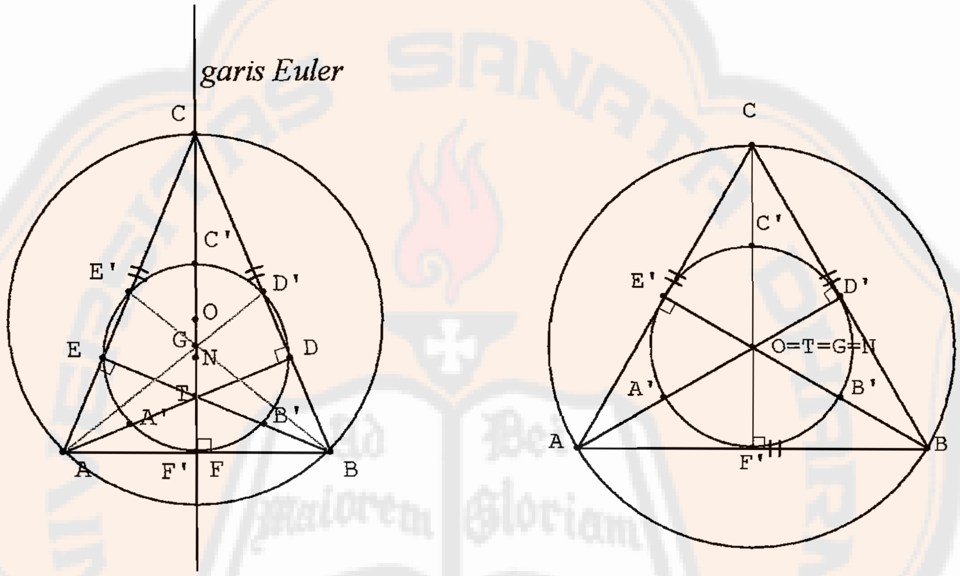
Diketahui titik pusat lingkaran luar O dan titik tinggi T dari ΔABC dalam koordinat-koordinat trilinear, yaitu O(cos α, cos β, cos γ) dan T(cos β cos γ, cos γ cos α, cos α cos β). Selanjutnya persamaan garis Euler dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \cos\beta\cos\gamma & \cos\gamma\cos\alpha & \cos\alpha\cos\beta \end{vmatrix} = 0$$

disederhanakan menjadi :

$$x\cos\alpha(\cos^2\beta - \cos^2\gamma) + y\cos\beta(\cos^2\gamma - \cos^2\alpha) + z\cos\gamma(\cos^2\alpha - \cos^2\beta) = 0 \ldots (3.1)$$

Secara umum titik pusat lingkaran dalam I suatu segitiga tidak terletak pada garis Euler. Pada segitiga sama kaki garis Euler terletak pada sumbu simetri (Gambar 3.3.(a)). Sedangkan pada segitiga sama sisi titik-titik O, G, N, dan T semua terletak pada titik pusat lingkaran dalam I, sehingga garis Euler tidak nyata(Gambar 3.3.(b)).



(a) (b)

Gambar 3.3. Garis Euler pada (a) segitiga sama kaki (b) segitiga sama sisi

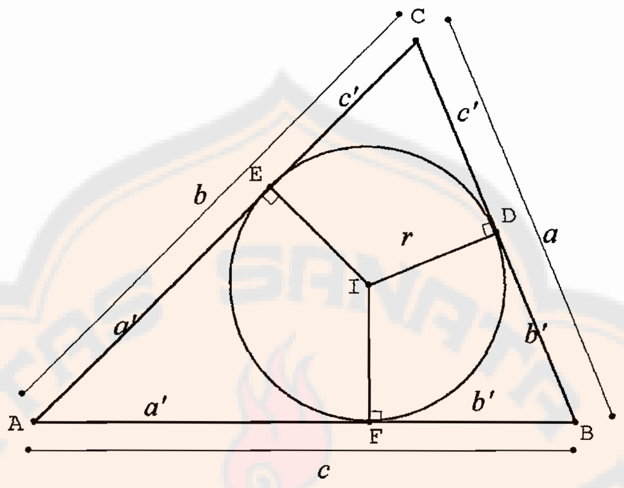
B. Lingkaran Dalam Segitiga ABC

Definisi 3.2 (Definisi lingkaran dalam ΔABC)

Lingkaran dalam ΔABC adalah sebuah lingkaran yang menyinggung ketiga sisi segitiga itu.

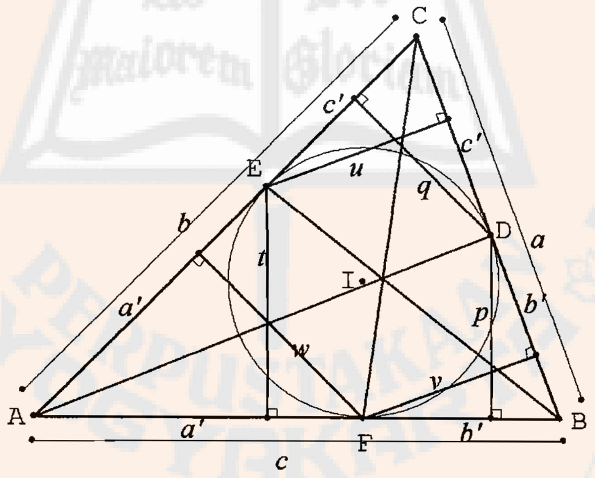
Segitiga ABC mempunyai sisi BC = a, CA = b, AB = c, keliling $(2s) = a + b + c$, titik sudut A, B, C dan luas daerah **Δ**. Lingkaran dalam ΔABC mempunyai titik pusat I, jari-jari r dan menyinggung sisi-sisi $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, dan $\overline{AB}$ berturut-turut di titik D, E, dan F.

Berdasarkan akibat Teorema 2.3 diperoleh AE = AF = a', BD = BF = b' dan CD = CE = c' (Gambar 3.4).



Gambar 3.4. Lingkaran dalam ΔABC

Selanjutnya dicari koordinat-koordinat trilinear dari titik-titik D, E, dan F.



Gambar 3.5. Koordinat-koordinat trilinear titik-titik D, E, F

Luas daerah ΔABC = **Δ**. Berdasarkan Gambar 3.5 diketahui bahwa:

Luas daerah ΔABD = $\frac{1}{2}pc = \mathbf{\Delta}\ \frac{b'}{a}$, sehingga $p = 2\ \mathbf{\Delta}\ \frac{b'}{ac}$.

Luas daerah ΔACD = $\frac{1}{2}qb = \mathbf{\Delta}\ \frac{c'}{a}$, sehingga $q = 2\ \mathbf{\Delta}\ \frac{c'}{ab}$.

Diperoleh titik D dalam koordinat-koordinat trilinear: D(0, q, p) = D(0, $2\Delta\frac{c'}{ab}$, $2\Delta\frac{b'}{ac}$) = D(0, $\frac{\Delta c'}{ab}$, $\frac{\Delta b'}{ac}$) = D(0, $\frac{\Delta}{abb'}$, $\frac{\Delta}{acc'}$) = D(0, $\frac{\Delta}{bb'}$, $\frac{\Delta}{cc'}$) = D(0, e, f)

dengan $e = \frac{\Delta}{bb'}$, $f = \frac{\Delta}{cc'}$.

Luas daerah ΔBAE = $\frac{1}{2}ct = \Delta\frac{a'}{b}$, sehingga $t = 2\Delta\frac{a'}{bc}$.

Luas daerah ΔBCE = $\frac{1}{2}au = \Delta\frac{c'}{b}$, sehingga $u = 2\Delta\frac{c'}{ab}$.

Diperoleh titik E dalam koordinat-koordinat trilinear: E(u, 0, t) = E($2\Delta\frac{c'}{ab}$, 0, $2\Delta\frac{a'}{bc}$) = E($\frac{\Delta}{ab}$, 0, $\frac{\Delta a'}{bcc'}$) = E($\frac{\Delta}{aba'}$,0, $\frac{\Delta}{bcc'}$) = E($\frac{\Delta}{aa'}$,0, $\frac{\Delta}{cc'}$) = E(d, 0, f) dengan

$d = \frac{\Delta}{aa'}$.

Luas daerah ΔCBF = $\frac{1}{2}av = \Delta\frac{b'}{c}$, sehingga $v = 2\Delta\frac{b'}{ac}$.

Luas daerah ΔCAF = $\frac{1}{2}bw = \Delta\frac{a'}{c}$, sehingga $w = 2\Delta\frac{a'}{bc}$.

Diperoleh titik F dalam koordinat-koordinat trilinear: F(v, w, 0) = F ($2\Delta\frac{b'}{ac}$, $2\Delta\frac{a'}{bc}$, 0) = F($\frac{\Delta}{ac}$, $\frac{\Delta a'}{bcb'}$, 0) = F($\frac{\Delta}{aca'}$, $\frac{\Delta}{bcb'}$, 0) = F($\frac{\Delta}{aa'}$, $\frac{\Delta}{bb'}$, 0) = F(d, e, 0).

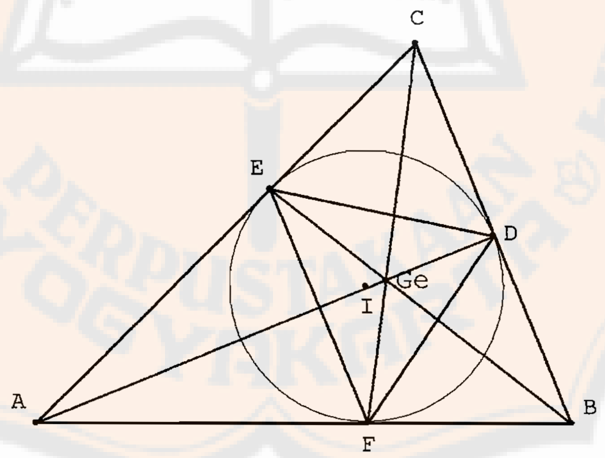
Titik-titik D, E, F merupakan titik singgung-titik singgung lingkaran dalam ΔABC. Jika ketiga titik tersebut dihubungkan maka terbentuk ΔDEF yang disebut segitiga titik singgung(*contact triangle*) dan ΔABC disebut segitiga garis singgung(*tangent triangle*).

C. Titik Gergonne

Gambar 3.6 berikut menunjukkan ΔDEF merupakan segitiga titik singgung dan ΔABC merupakan segitiga garis singgung dari lingkaran dalam ΔABC.

Jika titik sudut-titik sudut A, B, C secara berturut-turut dihubungkan dengan titik sudut-titik sudut D, E, F maka akan terbentuk segmen $\overline{AD}$, $\overline{BE}$, dan $\overline{CF}$. Ketiga segmen itu melalui satu titik yang disebut *titik Gergonne* Ge. Titik Gergonne ditemukan oleh Joseph Diaz Gergonne seorang matematikawan Perancis pada abad ke-19. Ia berhasil membuktikan teorema berikut.

Teorema 3.1. Garis-garis yang menghubungkan titik sudut-titik sudut suatu segitiga dengan titik singgung-titik singgung lingkaran dalam suatu segitiga bertemu pada satu titik.



Gambar 3.6. Titik Gergonne Ge

Bukti:

Jika D, E, F adalah titik singgung-titik singgung lingkaran dalam ΔABC maka AF = AE, BD = BF, CD = CE. Hasil perkaliannya AF.BD.CE = AE.BF.CD atau

$\frac{AF}{AE} \cdot \frac{BD}{BF} \cdot \frac{CD}{CE} = 1$ atau $\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1$. Berdasarkan Teorema Ceva maka garis-garis $\overline{AD}$, $\overline{BE}$, dan $\overline{CF}$ bertemu pada satu titik Ge, yang disebut titik Gergonne dari ΔABC.

Selanjutnya akan dicari koordinat-koordinat trilinear titik Gergonne. Telah diperoleh koordinat-koordinat trilinear dari titik-titik A, B, C, D, E, dan F, yaitu: A(1, 0, 0), B(0, 1, 0), C(0, 0, 1), D(0, *e*, *f*), E(*d*, 0, *f*) dan F(*d*, *e*, 0).

Persamaan garis $\overleftrightarrow{AD}$ adalah

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & e & f \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (0f - 0e)\,x - (f - 0)\,y + (e - 0)\,z = 0 \Leftrightarrow -fy + ez = 0$$

$$\Leftrightarrow fy = ez \Leftrightarrow y = \frac{e}{f}z \quad \text{..(3.2)}$$

Persamaan garis $\overleftrightarrow{BE}$ adalah

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 1 & 0 \\ d & 0 & f \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (f - 0)\,x - (0f - 0d)\,y + (0 - d)\,z = 0 \Leftrightarrow fx - dz = 0$$

$$\Leftrightarrow fx = dz \Leftrightarrow z = \frac{f}{d}x \quad \text{..(3.3)}$$

Persamaan (3.3) disubstitusikan ke persamaan (3.2) sehingga diperoleh

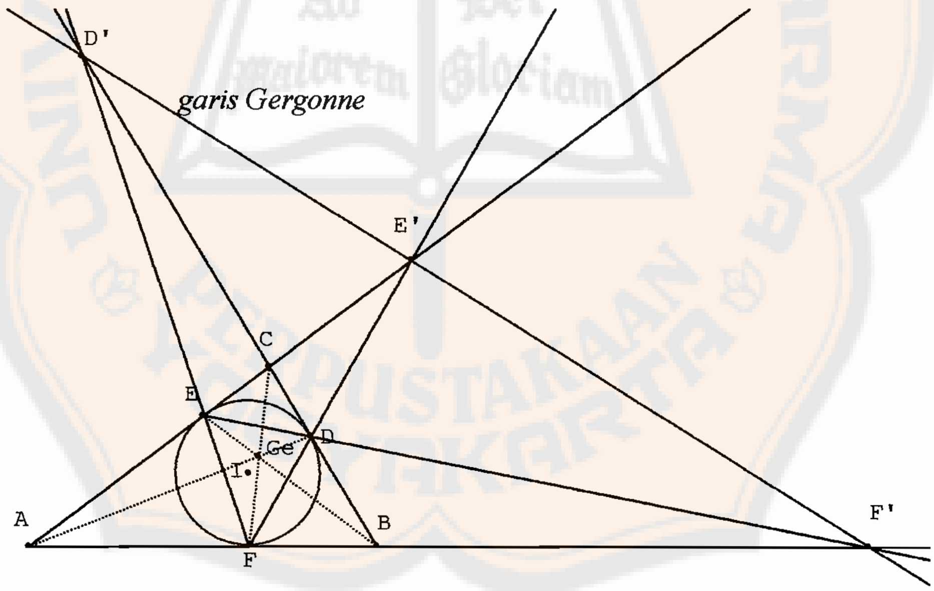
$y = \frac{e}{f} \cdot \frac{f}{d}x$. Jika y = *e* maka x = *d* dan z = *f*. Diperoleh titik Gergonne Ge dalam koordinat-koordinat trilinear, yaitu Ge(x, y, z) = Ge(*d*, *e*, *f*).

Berdasarkan pemahaman tentang perspektivitas dapat disimpulkan bahwa ΔABC dan ΔDEF perspektif dari titik Ge. Titik Ge merupakan titik pusat perspektivitas dari ΔABC dan ΔDEF.

Secara umum titik pusat perspektivitas dari segitiga titik singgung dan segitiga garis singgung suatu lingkaran tidak berimpit dengan titik pusat lingkaran dalam segitiga. Kedua titik tersebut akan berimpit jika segitiga titik singgung dan segitiga garis singgung keduanya merupakan segitiga sama sisi.

D. Garis Gergonne

Berdasarkan Teorema Desargues', sepasang segitiga yang perspektif dari sebuah titik(titik pusat perspektivitas) juga perspektif dari sebuah garis(sumbu perspektivitas). Lingkaran dalam ΔABC mempunyai segitiga titik singgung yaitu ΔDEF dan segitiga garis singgung yaitu ΔABC yang keduanya perspektif dari titik Ge.



Gambar 3.7. Garis Gergonne

Gambar 3.7. menunjukkan bahwa titik D' merupakan titik potong garis $\overleftrightarrow{BC}$ dan garis $\overleftrightarrow{EF}$. Selanjutnya akan dicari koordinat-koordinat trilinear dari titik D'.

Koordinat-koordinat trilinear dari titik-titik B, C, E, dan F adalah B(0,1,0), C(0,0,1), E(d, 0, f), F(d, e, 0) sehingga persamaan garis $\overleftrightarrow{BC}$ adalah

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad \text{.......................................(3.4)}$$

dan persamaan garis $\overleftrightarrow{EF}$ adalah

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ d & 0 & f \\ d & e & 0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -efx + dfy + dez = 0 \quad \text{.......................................(3.5)}$$

Untuk mencari koordinat-koordinat trilinear titik D', persamaan (3.4) disubstitusikan ke persamaan (3.5) sehingga diperoleh persamaan berikut:

$$dfy + dez = 0 \Leftrightarrow dfy = -dez \Leftrightarrow fy = -ez \Leftrightarrow y = -\frac{e}{f}z \quad \text{.........................(3.6)}$$

Jika y = e maka z = $-f$. Jadi diperoleh titik D' dalam koordinat-koordinat trilinear, yaitu D'(0, e, $-f$) atau D'(0, $-e$, f).

Dengan langkah-langkah serupa diperoleh koordinat-koordinat trilinear dari E' dan F', yaitu E'($-d$, 0, f) dan F'(d, $-e$, 0).

Tampak pada Gambar 3.7 bahwa D', E' dan F' terletak pada satu garis. Garis tersebut disebut *garis Gergonne*. Titik-titik D', E' dan F' disebut *titik-titik Nobbs*.

Persamaan garis Gergonne adalah:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & e & -f \\ -d & 0 & f \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow efx + dfy + dez = 0 \Leftrightarrow fx + \frac{dfy}{e} + dz = 0$$

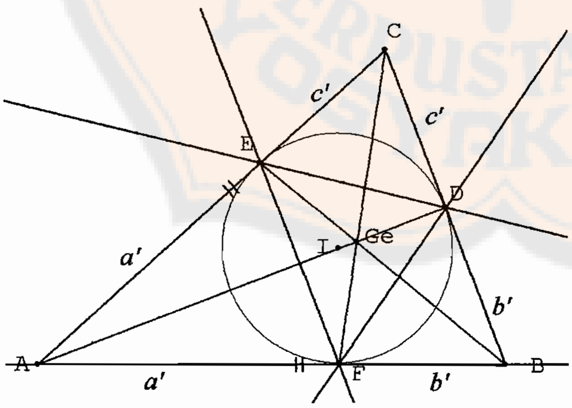
$$\Leftrightarrow x + \frac{dy}{e} + \frac{dz}{f} = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{x}{d} + \frac{y}{e} + \frac{z}{f} = 0 \quad \text{(3.7)}$$

Titik-titik D', E', F' berturut-turut merupakan titik potong garis-garis $\overleftrightarrow{BC}$ dan $\overleftrightarrow{EF}$, $\overleftrightarrow{AC}$ dan $\overleftrightarrow{DF}$, $\overleftrightarrow{AB}$ dan $\overleftrightarrow{DE}$. Titik-titik D', E', F' terletak pada satu garis, yaitu garis Gergonne. Dari dua pernyataan tersebut dapat disimpulkan bahwa garis Gergonne merupakan sumbu perspektivitas dari segitiga titik singgung ΔDEF dan segitiga garis singgung ΔABC.

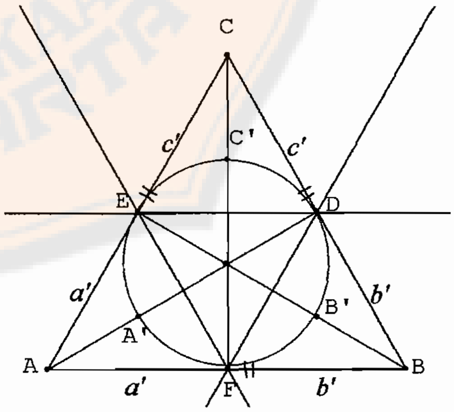
Jika $b' = c'$ maka AB = AC, jadi ΔABC merupakan segitiga sama kaki dan D merupakan titik tengah $\overline{BC}$. Garis $\overleftrightarrow{EF} \parallel \overleftrightarrow{BC}$ sehingga D' merupakan titik di jauh tak terhingga pada $\overleftrightarrow{BC}$ (Gambar 3.8.(a)).

Jika $a' = b' = c'$ maka ΔABC merupakan segitiga sama sisi dan $d = e = f$, sehingga persamaan garis Gergonne menjadi x + y + z = 0 ....(3.8)

Pada Gambar 3.8.(b) ditunjukkan segitiga sama sisi ABC. Titik-titik D', E', F' merupakan titik-titik di jauh tak terhingga, sehingga garis Gergonne juga di jauh tak terhingga.



(a)



(b)

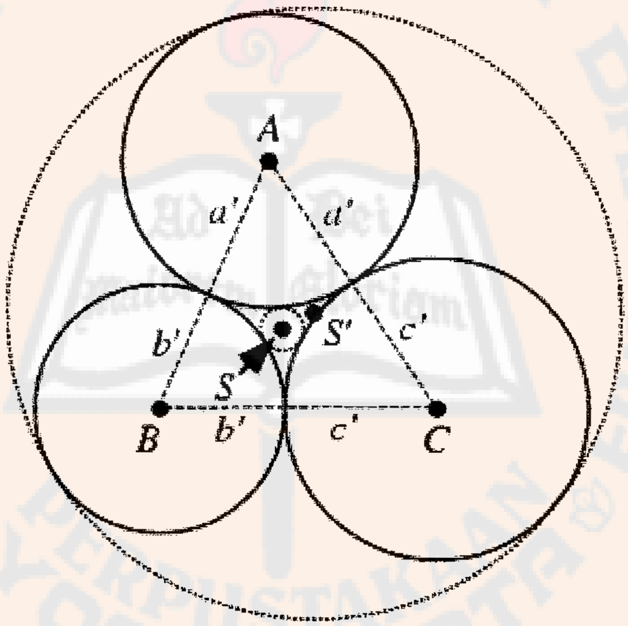
Gambar 3.8. (a) Titik D' pada segitiga sama kaki,

(b) Garis Gergonne pada segitiga sama sisi

E. Lingkaran-lingkaran Soddy

Ada tiga lingkaran yang saling bersinggungan. Titik pusat ketiga lingkaran itu adalah A, B, dan C. Jari-jari lingkaran-lingkaran tersebut adalah r_a, r_b, dan r_c.

Frederick Soddy mengemukakan bahwa dapat digambar dua lingkaran yang menyinggung ketiga lingkaran tersebut. Lingkaran yang kecil menyinggung dari dalam disebut lingkaran Soddy dalam(*inner Soddy circle*), sedangkan lingkaran yang besar menyinggung dari luar atau mengelilingi disebut lingkaran Soddy luar(*outer Soddy circle*). Tampak pada Gambar 3.9.



Gambar 3.9. Lingkaran-lingkaran Soddy

Jika ketiga titik pusat lingkaran itu dihubungkan maka akan membentuk ΔABC. Jari-jari ketiga lingkaran tersebut adalah $r_a = s - a = a'$, $r_b = s - b = b'$, $r_c = s - c = c'$.

Titik pusat lingkaran Soddy dalam(*inner Soddy center*) adalah S dan jari-jarinya σ, sedangkan titik pusat lingkaran Soddy luar(*outer Soddy center*) adalah S' dan jari-jarinya σ'.

SA = $\sigma + s - a$, SB = $\sigma + s - b$, SC = $\sigma + s - c$,

$\angle$BSC = S_a, $\angle$CSA = S_b, $\angle$ASB = S_c,

Rumus trigonometri sudut rangkap menyatakan bahwa:

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \Leftrightarrow \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 \Leftrightarrow \cos^2\alpha = \frac{(\cos 2\alpha)+1}{2}$$

sehingga $\cos^2\left(\frac{1}{2}\alpha\right) = \frac{\cos\alpha + 1}{2}$ dan $\sin^2\left(\frac{1}{2}\alpha\right) = \frac{1-\cos\alpha}{2}$.

Pada ΔABC berlaku :

$$\cos^2\left(\frac{1}{2}\alpha\right) = \frac{b^2+c^2-a^2}{4bc} + \frac{1}{2} = \frac{b^2+c^2-a^2+2bc}{4bc} = \frac{(a+b+c)(c+b-a)}{4bc} =$$

$\frac{s(s-a)}{bc}$ dan $\sin^2\left(\frac{1}{2}\alpha\right) = \frac{1}{2} - \frac{b^2+c^2-a^2}{4bc} = \frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{4bc} =$

$$\frac{(a+c-b)(a+b-c)}{bc} = \frac{(s-b)(s-c)}{bc}.$$

Sehingga pada ΔBSC juga berlaku hal yang serupa, yaitu:

$$\cos^2\left(\frac{1}{2}S_a\right) = \frac{(\sigma+a)\sigma}{(\sigma+s-b)(\sigma+s-c)} \text{ dan } \sin^2\left(\frac{1}{2}S_a\right) = \frac{(s-b)(s-c)}{(\sigma+s-b)(\sigma+s-c)}.$$

Aturan kosinus pada ΔABC menyatakan $a^2 - b^2 - c^2 + 2bc\cos\alpha = 0$,

karena $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$ maka dapat ditulis:

$$\sin^2\alpha - \sin^2\beta - \sin^2\gamma + 2\sin\beta\sin\gamma\cos\alpha = 0.$$

$\alpha + \beta + \gamma = 180$ dan $\frac{1}{2}S_a + \frac{1}{2}S_b + \frac{1}{2}S_c = 180$ sehingga

$$\sin^2\frac{1}{2}S_a - \sin^2\frac{1}{2}S_b - \sin^2\frac{1}{2}S_c + 2\sin\frac{1}{2}S_b\sin\frac{1}{2}S_c\cos\frac{1}{2}S_a = 0.$$

$$\frac{(s-b)(s-c)}{(\sigma+s-b)(\sigma+s-c)}-\frac{(s-c)(s-a)}{(\sigma+s-c)(\sigma+s-a)}-\frac{(s-a)(s-b)}{(\sigma+s-a)(\sigma+s-b)}+$$

$$2\left[\frac{(s-c)(s-a)}{(\sigma+s-c)(\sigma+s-a)}\cdot\frac{(s-a)(s-b)}{(\sigma+s-a)(\sigma+s-b)}\cdot\frac{\sigma(\sigma+a)}{(\sigma+s-b)(\sigma+s-c)}\right]^{\frac{1}{2}}=0.$$

Diperoleh

$$\frac{\sigma+s-a}{s-a}-\frac{\sigma+s-b}{s-b}-\frac{\sigma+s-c}{s-c}+2\left[\frac{\sigma(\sigma+s-b+s-c)}{(s-b)(s-c)}\right]^{\frac{1}{2}}=0$$

$$\frac{\sigma}{s-a}+1-\frac{\sigma}{s-b}-1-\frac{\sigma}{s-c}-1+2\left[\frac{\sigma^2}{(s-b)(s-c)}+\frac{\sigma(s-b)}{(s-b)(s-c)}+\frac{\sigma(s-c)}{(s-b)(s-c)}\right]^{\frac{1}{2}}=0$$

$$\frac{1}{s-a}-\frac{1}{s-b}-\frac{1}{s-c}-\frac{1}{\sigma}+2\left[\frac{1}{(s-b)(s-c)}+\frac{1}{(s-c)\sigma}+\frac{1}{(s-b)\sigma}\right]^{\frac{1}{2}}=0 \quad \ldots\ldots\ldots(3.9)$$

Didefinisikan bahwa kelengkungan(ε) = $\frac{1}{R}$, R adalah jari-jari lingkaran.

Jadi $\frac{1}{s-a}=\varepsilon_1$, $\frac{1}{s-b}=\varepsilon_2$, $\frac{1}{s-c}=\varepsilon_3$, $\frac{1}{\sigma}=\varepsilon_4$ secara berturut-turut merupakan kelengkungan dari $\Theta(A,r_a)$, $\Theta(B,r_b)$, $\Theta(C,r_c)$, dan $\Theta(S,\sigma)$.

Persamaan(3.9) di atas diubah dalam bentuk $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ sebagai berikut:

$$\varepsilon_1-\varepsilon_2-\varepsilon_3-\varepsilon_4+2[\varepsilon_2\varepsilon_3+\varepsilon_3\varepsilon_4+\varepsilon_2\varepsilon_4]^{\frac{1}{2}}=0$$

sehingga

$$\varepsilon_1-\varepsilon_2-\varepsilon_3-\varepsilon_4 = -2[\varepsilon_2\varepsilon_3+\varepsilon_3\varepsilon_4+\varepsilon_2\varepsilon_4]^{\frac{1}{2}}$$

$$(\varepsilon_1-\varepsilon_2-\varepsilon_3-\varepsilon_4)^2 = 4[\varepsilon_2\varepsilon_3+\varepsilon_3\varepsilon_4+\varepsilon_2\varepsilon_4]$$

$$\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\varepsilon_3^2+\varepsilon_4^2-2\varepsilon_1\varepsilon_2-2\varepsilon_1\varepsilon_3-2\varepsilon_1\varepsilon_4+2\varepsilon_2\varepsilon_3+2\varepsilon_2\varepsilon_4+2\varepsilon_3\varepsilon_4=4\varepsilon_2\varepsilon_3+4\varepsilon_3\varepsilon_4+4\varepsilon_2\varepsilon_4$$

$$\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\varepsilon_3^2+\varepsilon_4^2=2\varepsilon_1\varepsilon_2+2\varepsilon_1\varepsilon_3+2\varepsilon_1\varepsilon_4+2\varepsilon_2\varepsilon_3+2\varepsilon_2\varepsilon_4+2\varepsilon_3\varepsilon_4$$

$$\begin{aligned}(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_4)^2 &= \varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\varepsilon_3^2+\varepsilon_4^2+2\varepsilon_1\varepsilon_2+2\varepsilon_1\varepsilon_3+2\varepsilon_1\varepsilon_4+2\varepsilon_2\varepsilon_3+2\varepsilon_2\varepsilon_4+2\varepsilon_3\varepsilon_4\\ &= 4(\varepsilon_1\varepsilon_2+\varepsilon_1\varepsilon_3+\varepsilon_1\varepsilon_4+\varepsilon_2\varepsilon_3+\varepsilon_2\varepsilon_4+\varepsilon_3\varepsilon_4)\\ &= 2(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_4)^2-2(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\varepsilon_3^2+\varepsilon_4^2)\end{aligned}$$

$$(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_4)^2+2(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\varepsilon_3^2+\varepsilon_4^2)=2(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_4)^2$$

Jadi $2(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\varepsilon_3^2+\varepsilon_4^2)=(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_4)^2$ ………………….. (3.10)

Dari persamaan (3.10) akan dicari ε_4 atau $\frac{1}{\sigma}$

$$(2\varepsilon_1^2+2\varepsilon_2^2+2\varepsilon_3^2+2\varepsilon_4^2)=\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\varepsilon_3^2+\varepsilon_4^2+2\varepsilon_1\varepsilon_2+2\varepsilon_1\varepsilon_3+2\varepsilon_1\varepsilon_4+2\varepsilon_2\varepsilon_3+2\varepsilon_2\varepsilon_4+2\varepsilon_3\varepsilon_4$$

$$2(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\varepsilon_3^2)+2\varepsilon_4^2=(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)^2+\varepsilon_4^2+2\varepsilon_4(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)$$

$$2\varepsilon_4^2-\varepsilon_4^2+2(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\varepsilon_3^2)-2\varepsilon_4\ (\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)-(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)^2=0$$

$$\varepsilon_4^2-2\varepsilon_4(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)+2(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\varepsilon_3^2)-(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\varepsilon_3^2+2\varepsilon_1\varepsilon_2+2\varepsilon_1\varepsilon_3+2\varepsilon_2\varepsilon_3)=0$$

$$\varepsilon_4^2-2\varepsilon_4(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)+(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\varepsilon_3^2-2\varepsilon_1\varepsilon_2-2\varepsilon_1\varepsilon_3-2\varepsilon_2\varepsilon_3)=0$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_4 &= \frac{2(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)\pm\sqrt{(2(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3))^2-4(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\varepsilon_3^2-2\varepsilon_1\varepsilon_2-2\varepsilon_1\varepsilon_3-2\varepsilon_2\varepsilon_3)}}{2}\\ &= \frac{2(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)\pm\sqrt{16\varepsilon_1\varepsilon_2+16\varepsilon_1\varepsilon_3+16\varepsilon_2\varepsilon_3}}{2}\\ &= \varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3\pm2\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2+\varepsilon_1\varepsilon_3+\varepsilon_2\varepsilon_3}\end{aligned}$$

$\varepsilon_4 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + 2\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_1\varepsilon_3 + \varepsilon_2\varepsilon_3)}$ merupakan kelengkungan lingkaran Soddy dalam dan $\varepsilon_4' = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 - 2\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_1\varepsilon_3 + \varepsilon_2\varepsilon_3)}$ merupakan kelengkungan lingkaran Soddy luar.

Selanjutnya dicari jari-jari lingkaran Soddy dalam, yaitu σ.

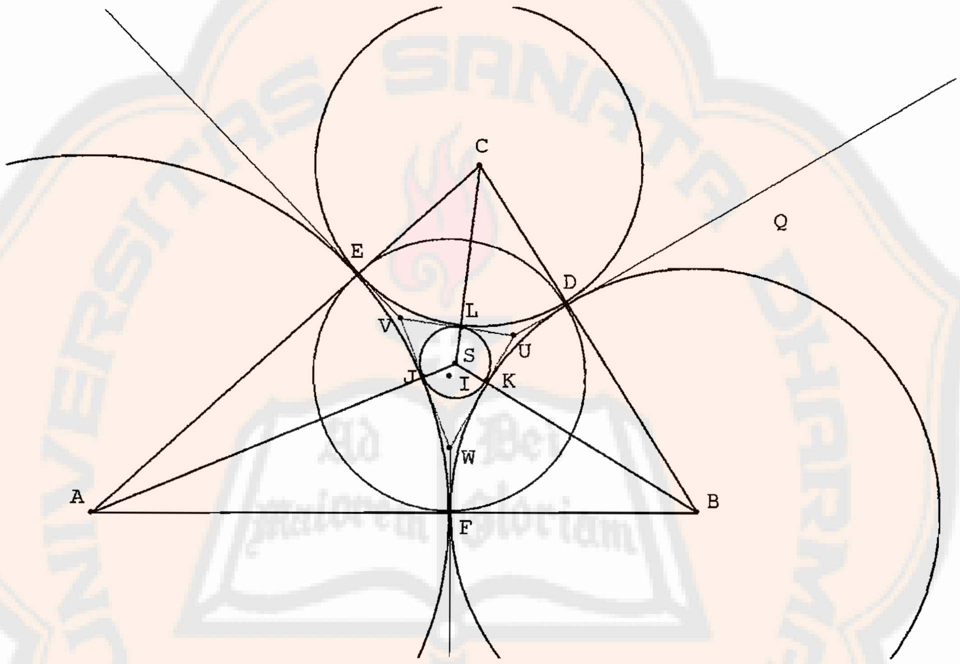
$$\frac{1}{\sigma} = \frac{1}{s-a} + \frac{1}{s-b} + \frac{1}{s-c} + 2\left[\frac{1}{(s-a)(s-b)} + \frac{1}{(s-a)(s-c)} + \frac{1}{(s-b)(s-c)}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\begin{aligned}
\sigma &= \left(\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s-b} + \frac{1}{s-c} + 2\left[\frac{1}{(s-a)(s-b)} + \frac{1}{(s-a)(s-c)} + \frac{1}{(s-b)(s-c)}\right]^{\frac{1}{2}}\right)^{-1} \\
&= \frac{\Delta}{\frac{\Delta}{s-a} + \frac{\Delta}{s-b} + \frac{\Delta}{s-c} + 2\left[\frac{\Delta^2}{(s-a)(s-b)} + \frac{\Delta^2}{(s-a)(s-c)} + \frac{\Delta^2}{(s-b)(s-c)}\right]^{\frac{1}{2}}} \\
&= \frac{\Delta}{\frac{\Delta}{s-a} + \frac{\Delta}{s-b} + \frac{\Delta}{s-c} + 2[s(s-c) + s(s-b) + s(s-a)]^{\frac{1}{2}}} \\
&= \frac{\Delta}{r_a + r_b + r_c + 2[s(s-c) + s(s-b) + s(s-a)]^{\frac{1}{2}}} \\
&= \frac{\Delta}{r_a + r_b + r_c + 2s} \\
&= \frac{\Delta}{4R + r + 2s}
\end{aligned}$$

Jadi jari-jari lingkaran Soddy dalam adalah $\sigma = \dfrac{\Delta}{4R + r + 2s}$, sedangkan jari-jari lingkaran Soddy luar adalah $\sigma' = \dfrac{\Delta}{4R + r - 2s}$.

Cara menentukan titik-titik Soddy :

Selanjutnya akan ditunjukkan bagaimana cara menentukan titik pusat dari lingkaran-lingkaran Soddy. Berikut ini dijelaskan bagaimana cara menentukan titik pusat lingkaran Soddy dalam, yaitu titik S.



Gambar 3.10. Ilustrasi cara menentukan titik pusat lingkaran Soddy dalam S

Lingkaran Soddy dalam $\Theta(S,\sigma)$ pasti menyinggung $\Theta(A,r_a)$, $\Theta(B,r_b)$, dan $\Theta(C,r_c)$. Misalkan, secara berturut-turut di titik J, K, L. Titik-titik A, B, C dihubungkan dengan S sehingga terbentuk ΔSAB, ΔSBC, dan ΔSCA.

Diperhatikan $\Theta(S,\sigma)$, $\Theta(A,r_a)$, $\Theta(B,r_b)$ yang saling bersinggungan di titik J, F, K. Ditarik garis singgung-garis singgung lingkaran di titik J, F, dan K. Ketiga garis singgung ini berpotongan di titik W, dan W merupakan titik pusat lingkaran dalam ΔSAB. Titik W terletak pada garis singgung lingkaran $\Theta(A,r_a)$ dan $\Theta(B,r_b)$.

Artinya $\overleftrightarrow{WF} \perp \overline{AB}$ di F. Dengan demikian dapat diketahui bahwa W terletak pada $\overline{IF}$, karena $\overline{IF} \perp \overline{AB}$ di F. Garis $\overrightarrow{AW}$ merupakan garis bagi $\angle$SAB.

Dengan langkah serupa dapat ditunjukkan bahwa:

- Titik U merupakan titik potong dari garis singgung-garis singgung lingkaran $\Theta(S,\sigma)$, $\Theta(B,r_b)$, $\Theta(C,r_c)$. Titik U terletak pada $\overline{ID}$. Garis $\overrightarrow{BU}$ merupakan garis bagi $\angle$SBC.
- Titik V merupakan titik potong dari garis singgung-garis singgung lingkaran $\Theta(S,\sigma)$, $\Theta(C,r_c)$, $\Theta(A,r_a)$. Titik V terletak pada $\overline{IE}$. Garis $\overrightarrow{CV}$ merupakan garis bagi $\angle$SCA.

Titik-titik U, V, W dihubungkan sehingga terbentuk ΔUVW. Segitiga UVW merupakan segitiga garis singgung dan ΔJKL merupakan segitiga titik singgung dari lingkaran Soddy dalam.

Segitiga UVW mempunyai titik sudut-titik sudut U, V, W yang terletak pada jari-jari lingkaran dalam ΔABC, yaitu $\overline{ID}$, $\overline{IE}$, dan $\overline{IF}$.

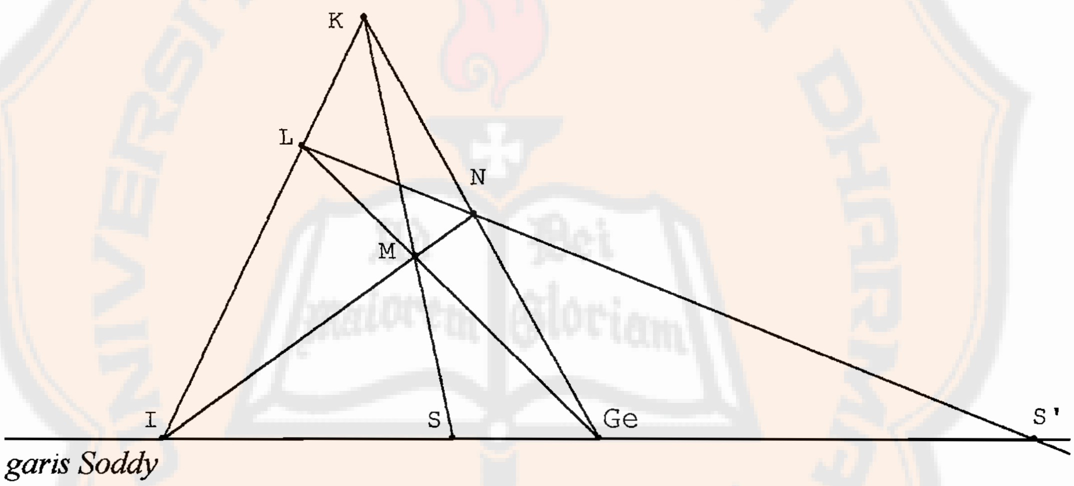
Segitiga UVW mempunyai sisi-sisi $\overline{UV}, \overline{VW}$, dan $\overline{WU}$, dengan $\angle VAW = \frac{1}{2}\angle A$, $\angle WBU = \frac{1}{2}\angle B$, dan $\angle UCV = \frac{1}{2}\angle C$.

Titik-titik U, V, W terletak pada $\overline{ID}$, $\overline{IE}$, dan $\overline{IF}$ dengan DU = d IU, EV = e IV, dan FW = f IW.

Setelah letak titik-titik U, V, W diketahui maka dapat digambar ΔUVW. Selanjutnya titik pusat lingkaran Soddy dalam, yaitu titik S dapat ditentukan dan lingkaran Soddy dalam $\Theta(S,\sigma)$ dapat digambar. Demikian pula lingkaran Soddy luar dengan titik pusat S' dan jari-jari σ', yaitu lingkaran $\Theta(S',\sigma')$.

Titik pusat dari lingkaran-lingkaran Soddy yaitu S dan S' disebut *titik-titik Soddy*. Kedua titik ini terletak pada garis penghubung I dan Ge, sehingga garis penghubung ini disebut *garis Soddy*.

Titik-titik I, S, Ge, dan S' merupakan empat titik harmonis yang terletak pada garis Soddy. Titik S' merupakan titik harmonis keempat, jadi jika S dapat ditunjukkan maka S' dapat dicari. Gambar 3.11 menunjukkan letak S' pada garis Soddy.

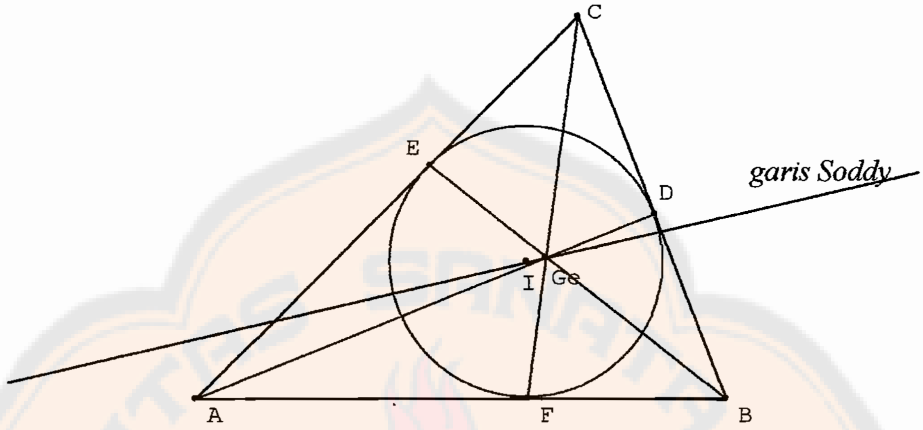


Gambar 3.11. Letak titik S' pada garis Soddy

Selanjutnya jika S' dapat ditunjukkan maka lingkaran Soddy luar dengan titik pusat S' dan jari-jari σ' dapat digambar.

F. Garis Soddy

Pada ΔABC dapat digambar titik pusat lingkaran dalam I dan titik Gergonne Ge. Melalui dua titik tersebut dapat dibuat tepat satu garis. Titik pusat lingkaran Soddy dalam S dan titik pusat lingkaran Soddy luar S' terletak pada garis penghubung I dan Ge. Garis yang memuat titik-titik I, S, Ge, dan S' disebut *garis Soddy*. Untuk selanjutnya garis Soddy dinyatakan sebagai garis yang melalui titik pusat lingkaran dalam I dan titik Gergonne Ge dari ΔABC.



Gambar 3.12. Garis Soddy pada ΔABC

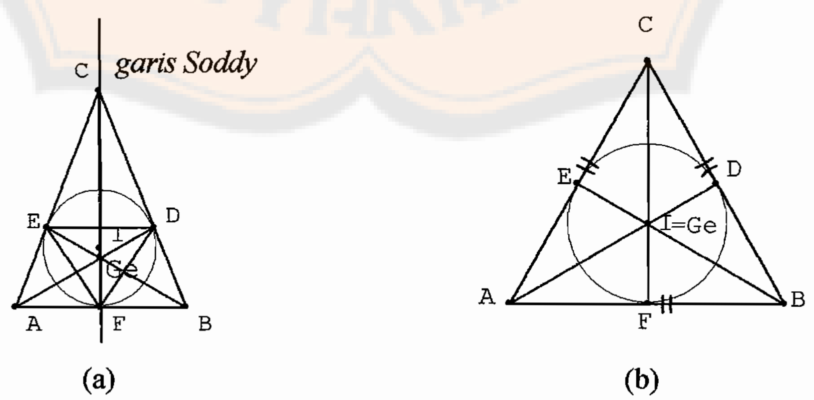
Telah diperoleh titik-titik I dan Ge dalam koordinat-koordinat trilinear, yaitu I(1, 1, 1) dan Ge(*d*, *e*, *f*) sehingga persamaan garis Soddy adalah

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ d & e & f \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow (f - e)\,x - (f - d)\,y + (e - d)\,z = 0$$

$$\Leftrightarrow fx + dy + ez - dz - ex - fy = 0$$

$$\Leftrightarrow (f\text{-}e)\,x + (d - f)y + (e\text{-}d)\,z \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(3.11)}$$

Pada Gambar 3.13 ditunjukkan garis Soddy pada segitiga sama kaki dan garis Soddy pada segitiga sama sisi.



Gambar 3.13. Garis Soddy pada (a) segitiga sama kaki (b) segitiga sama sisi

G. Segitiga Euler – Gergonne – Soddy

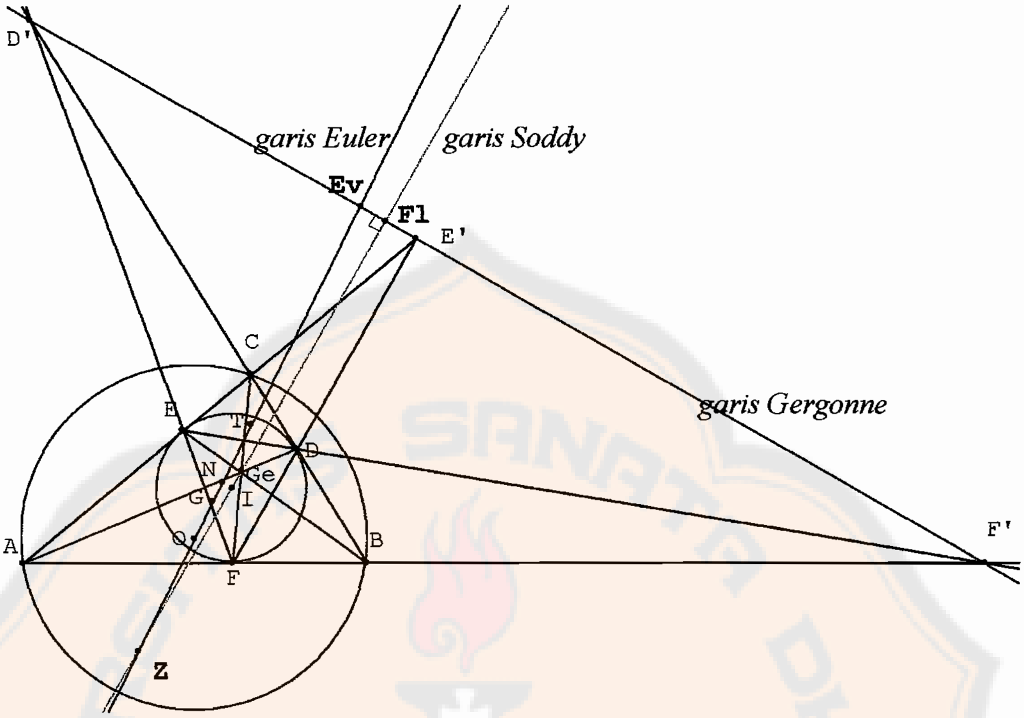
Garis yang melalui titik pusat lingkaran luar O, titik berat G, titik pusat lingkaran titik sembilan N, dan titik tinggi T dari segitiga ΔABC disebut garis Euler.

Lingkaran dalam ΔABC menyinggung sisi-sisi $\overline{BC}$, $\overline{AC}$, $\overline{AB}$ secara berturut-turut di titik-titik D, E, F. Jika titik singgung-titik singgung itu dihubungkan maka terbentuk ΔDEF. Sisi-sisi yang berkorespondensi dari kedua segitiga tersebut, yaitu $\overleftrightarrow{BC}$ dan $\overleftrightarrow{EF}$, $\overleftrightarrow{AC}$ dan $\overleftrightarrow{DF}$, $\overleftrightarrow{AB}$ dan $\overleftrightarrow{DE}$ secara berturut-turut berpotongan di titik-titik D', E', dan F'. Garis yang melalui ketiga titik tersebut disebut garis Gergonne. Garis ini menjadi sumbu perspektivitas dari ΔABC dan ΔDEF.

Titik pusat dari lingkaran-lingkaran Soddy, yaitu S dan S' terletak pada garis yang melalui titik pusat lingkaran dalam I dan titik Gergonne Ge dari ΔABC sehingga garis ini dinamakan garis Soddy.

Bersama dengan garis Euler dan garis Soddy, garis Gergonne membentuk suatu segitiga siku-siku, yang dinamakan segitiga *Euler – Gergonne – Soddy* Gambar 3.14 menunjukkan segitiga Euler – Gergonne – Soddy pada ΔABC sebarang.

Titik potong dari garis Euler dan garis Gergonne disebut *titik Evans*(Ev), titik potong dari garis Euler dan garis Soddy disebut *titik Longchamps*(Z), sedangkan *titik Fletcher*(Fl) merupakan titik potong dari garis Gergonne dan garis Soddy.



Gambar 3.14. Segitiga Euler – Gergonne – Soddy pada ΔABC

Segitiga EvZFl merupakan segitiga Euler – Gergonne – Soddy yang terbentuk. Segitiga ini siku-siku di titik Fletcher(Fl), karena garis Gergonne dan garis Soddy berpotongan tegak lurus di titik tersebut.

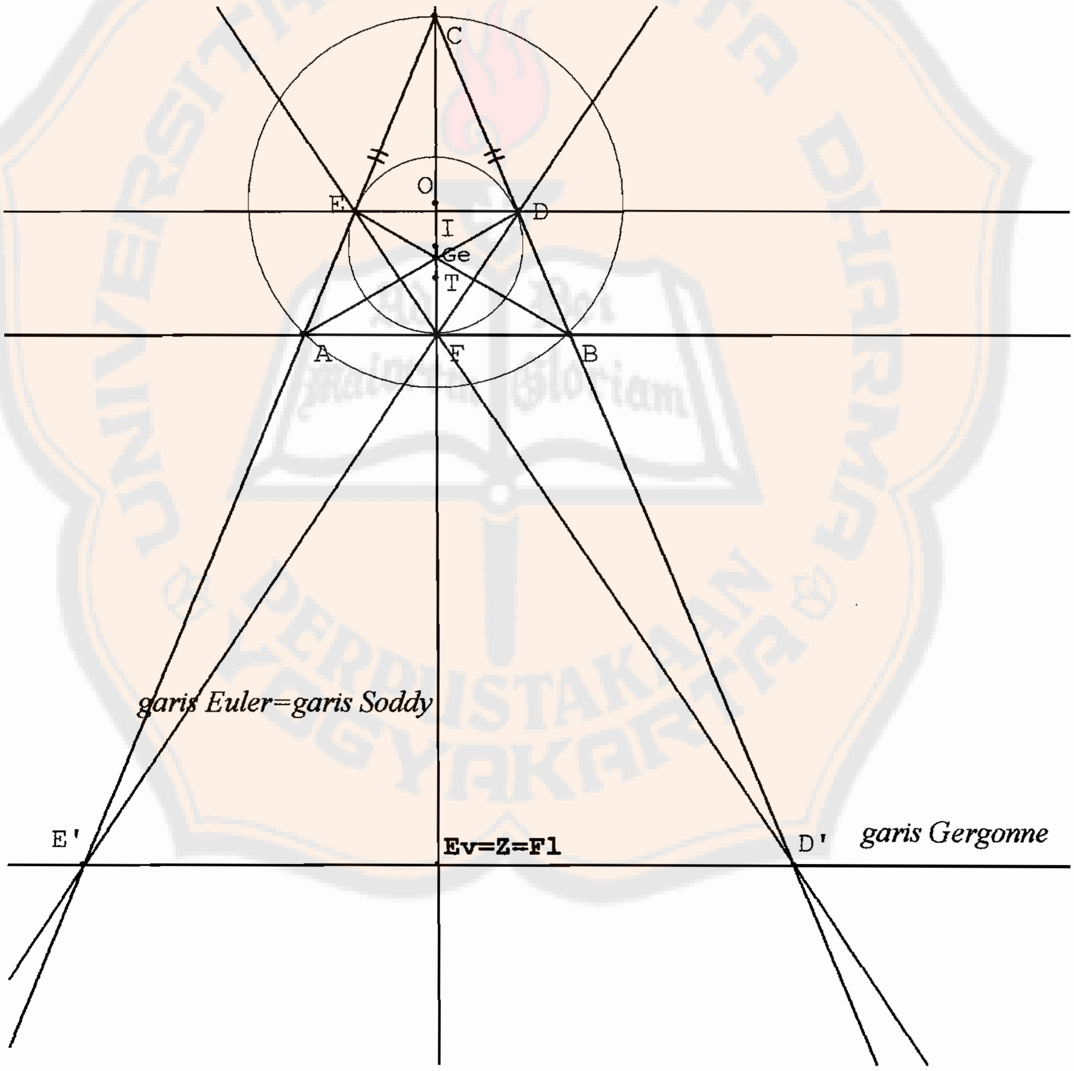
Pada koordinat-koordinat trilinear dua garis $l\text{x} + m\text{y} + n\text{z} = 0$ dan $l'\text{x} + m'\text{y} + n'\text{z} = 0$ dikatakan tegak lurus apabila $(ll' + mm' + nn') = (mn' + m'n)\cos\alpha + (nl' + n'l)\cos\beta + (lm' + l'm)\cos\gamma$ untuk semua *a, b, c.*

Dari penjelasan sebelumnya diperoleh persamaan garis Gergonne dan garis Soddy. Persamaan garis Gergonne adalah $\frac{\text{x}}{d} + \frac{\text{y}}{e} + \frac{\text{z}}{f} = 0$, sedangkan persamaan garis Soddy adalah $(f - e)\,\text{x} + (d - f)\,\text{y} + (e - d)\,\text{z} = 0$. Kedua garis ini tegak lurus karena berlaku:

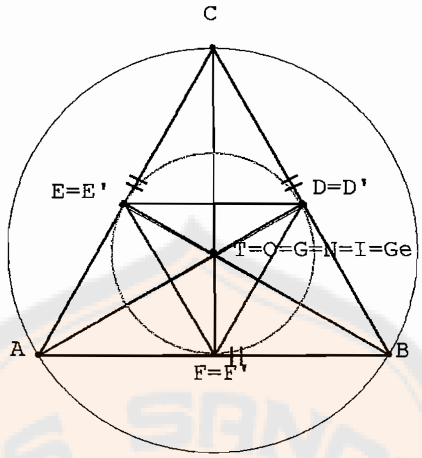
$$\frac{f-e}{d}+\frac{d-f}{e}+\frac{e-d}{f}=\left(\frac{e-d}{e}+\frac{d-f}{f}\right)\cos\alpha+\left(\frac{f-e}{f}+\frac{e-d}{d}\right)\cos\beta+\left(\frac{d-f}{d}+\frac{f-e}{e}\right)\cos\gamma$$

Pembuktian persamaan ini dijabarkan di lampiran.

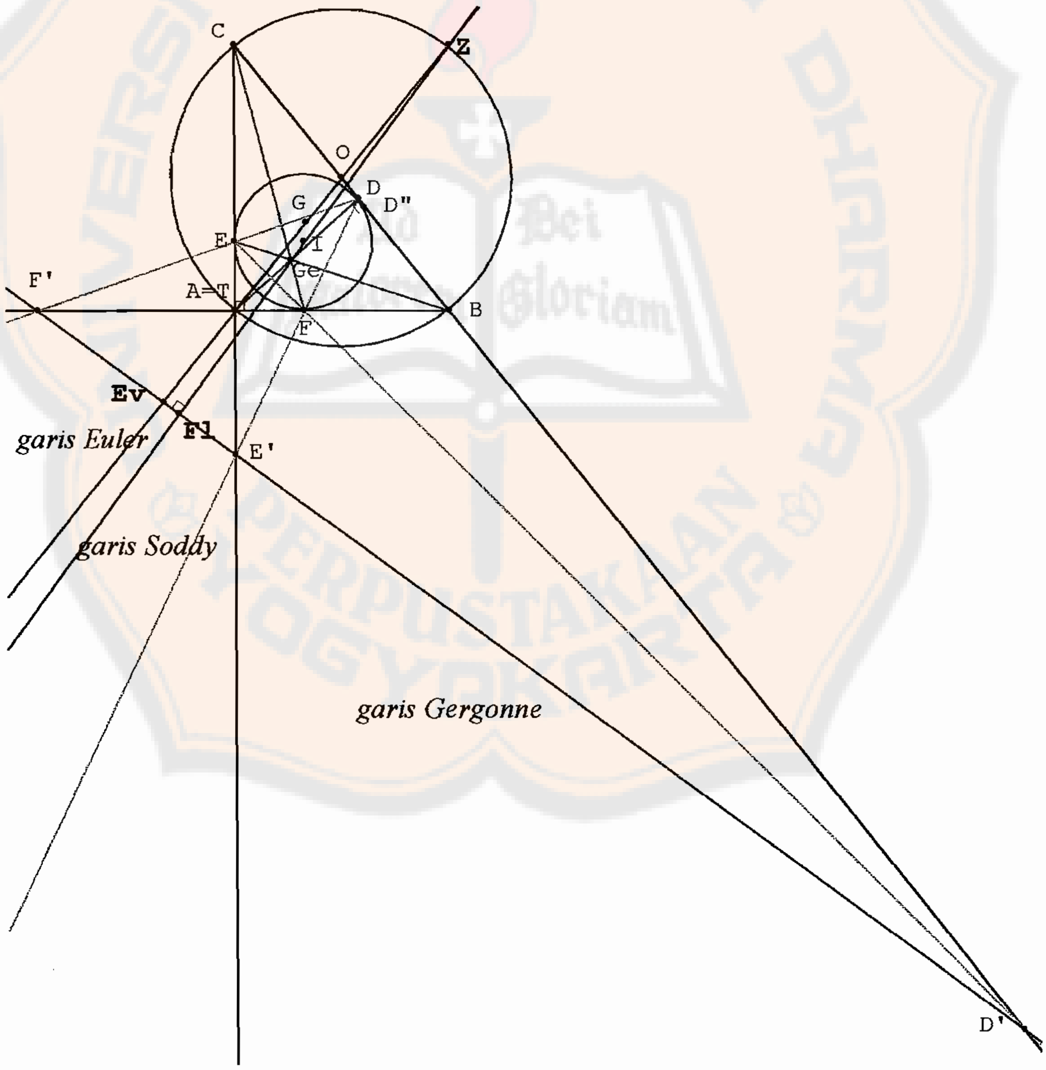
Pada Gambar 3.15, Gambar 3.16, dan Gambar 3.17 secara berturut-turut ditunjukkan segitiga Euler – Gergonne – Soddy pada segitiga sama kaki, segitiga sama sisi, dan segitiga siku-siku.



Gambar 3.15. Segitiga Euler – Gergonne – Soddy pada ΔABC sama kaki



Gambar 3.16. Segitiga Euler – Gergonne – Soddy pada ΔABC sama sisi



Gambar 3.17. Segitiga Euler – Gergonne – Soddy pada ΔABC siku-siku di A

BAB IV

PENUTUP

Dalam Bab IV ini, penulis memberikan beberapa hal yang menjadi kesimpulan dari skripsi ini dan saran bagi pembaca.

A. Kesimpulan

Pada setiap ΔABC dapat digambar segitiga Euler – Gergonne – Soddy yaitu segitiga yang dibentuk oleh garis Euler, garis Gergonne dan garis Soddy. Konsep-konsep yang terkait dengan segitiga ini adalah garis Euler, garis Gergonne, dan garis Soddy.

Garis Euler, garis Gergonne, dan garis Soddy berkaitan dengan titik tinggi T, titik berat G, titik pusat lingkaran dalam I, titik pusat lingkaran luar O, titik pusat lingkaran titik sembilan N, dan titik Gergonne Ge dari ΔABC.

Garis-garis yang menghubungkan titik sudut-titik sudut dari ΔABC dengan titik singgung-titik singgung lingkaran dalam ΔABC bertemu pada satu titik Ge, yang disebut *titik Gergonne* dari ΔABC.

Segitiga garis singgung ABC dan segitiga titik singgung DEF perspektif dari titik Gergonne Ge, sehingga titik ini merupakan titik pusat perspektivitas dari ΔABC dan ΔDEF.

Titik-titik O, G, N dan T pada ΔABC terletak pada satu garis yang disebut *garis Euler*. Keempat titik ini merupakan himpunan titik harmonis, dengan perbandingan OG : GN = OT : NT = 2 : 1. Titik-titik N dan O dipisahkan harmonis oleh G dan T atau titik-titik G dan T dipisahkan harmonis oleh N dan O. Titik G terletak pada $\frac{1}{3}$ bagian dari $\overline{OT}$, sedangkan titik N terletak pada $\frac{1}{2}$ bagian dari $\overline{OT}$.

Garis-garis yang berkorespondensi dari ΔABC dan ΔDEF berpotongan di titik-titik D', E', dan F'. Ketiga titik ini terletak pada satu garis yang disebut *garis Gergonne*. Garis ini menjadi sumbu perspektivitas dari ΔABC dan ΔDEF.

Jika ada tiga lingkaran $\Theta(A,r_a)$, $\Theta(B,r_b)$, $\Theta(C,r_c)$ yang saling bersinggungan maka dapat digambar lingkaran $\Theta(S,\sigma)$ yang menyinggung ketiganya dari dalam, disebut *lingkaran Soddy dalam*. Dapat juga digambar lingkaran $\Theta(S',\sigma')$ yang mengelilingi atau menyinggung dari luar, disebut *lingkaran Soddy luar*. Kedua lingkaran $\Theta(S,\sigma)$ dan $\Theta(S',\sigma')$ dikenal dengan lingkaran-lingkaran Soddy. Jika titik pusat ketiga lingkaran $\Theta(A,r_a)$, $\Theta(B,r_b)$, $\Theta(C,r_c)$ dihubungkan akan terbentuk ΔABC.

Pada ΔABC terdapat titik I dan titik Ge. Melalui kedua titik ini dapat dibuat suatu garis. Titik pusat dari lingkaran-lingkaran Soddy disebut sebagai titik-titik Soddy, yaitu S dan S'. Kedua titik ini terletak pada garis yang menghubungkan I dan Ge. Selanjutnya garis tersebut disebut *garis Soddy*. Titik-titik I, S, Ge, dan S' merupakan himpunan titik harmonis. Titik-titik I dan Ge dipisahkan harmonis oleh titik-titik S dan S' atau titik-titik S dan S' dipisahkan harmonis oleh titik-titik I dan Ge.

Dalam koordinat-koordinat trilinear persamaan dari:

Garis Euler: $\cos\alpha(\cos^2\beta - \cos^2\gamma)x + \cos\beta(\cos^2\gamma - \cos^2\alpha)y + \cos\gamma(\cos^2\alpha - \cos^2\beta)z = 0$

Garis Gergonne: $\frac{x}{d} + \frac{y}{e} + \frac{z}{f} = 0$, dengan $d = \frac{2\Delta}{a(b+c-a)}$, $e = \frac{2\Delta}{b(a+c-b)}$, $f = \frac{2\Delta}{c(a+b-c)}$.

Garis Soddy: $(f - e)\,x + (d - f)\,y + (e - d)\,z = 0$.

Segitiga Euler – Gergonne – Soddy merupakan segitiga siku-siku, karena garis Gergonne dan garis Soddy berpotongan tegak lurus. Hal ini dapat ditunjukkan dengan membuktikan persamaan berikut:

$$\frac{f-e}{d}+\frac{d-f}{e}+\frac{e-d}{f}=\left(\frac{e-d}{e}+\frac{d-f}{f}\right)\cos\alpha+\left(\frac{f-e}{f}+\frac{e-d}{d}\right)\cos\beta+\left(\frac{d-f}{d}+\frac{f-e}{e}\right)\cos\gamma$$

.

B. Saran

Setelah mempelajari segitiga Euler-Gergonne-Soddy penulis menjadi tahu bahwa segitiga merupakan salah satu konsep yang sangat menarik dalam geometri bidang.

Masalah-masalah yang berkaitan dengan segitiga Euler-Gergonne-Soddy dalam skripsi ini terbatas, seperti yang ditulis dalam pembatasan masalah pada BAB I. Bagi para pembaca yang tertarik dengan topik-topik tersebut dapat mempelajari atau membahas lebih lanjut.

DAFTAR PUSTAKA

Boyer, Carl B.(1968). *A History of Mathematics*. New York: John Wiley & Sons.

Coxeter, H. S. M.(1961). *Introduction to Geometry*. New York: John Wiley.

Coxeter, H. S. M.(1969). *Introduction to Geometry*(second edition). New York: John Wiley.

Davis, David R. (1949). *Modern College Geometry*. USA: Addison-Wesley Publishing Company, Inc.

Kimberling, C. (1994). Central Points and Central Lines in the Plane of a Triangle. *Mathematics Magazine*. **67**. 3. p.p 163-187.

Millman, Richard S. dan Parker, George D. (1981). *Geometry A Metric Approach with Models*. New York: Springer-Verlag.

Moeharti, Hw. (1973). *Ilmu Ukur Analitik Bidang Bagian I*. Yogyakarta: Yayasan Pembina FKIE-IKIP Yogyakarta.

Moeharti, Hw. (1998). *Sistem-sistem Geometri*. Modul Universitas Terbuka. Yogyakarta.

O' Connor J.J. and Roberston, E. F. (1998). *Leonhard Euler*. http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk./history/Mathematicians/Euler.html.

O' Connor J.J. and Roberston, E. F. (2000). *Joseph Diaz Gergonne*. http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk./history/Mathematicians/Gergonne.html.

Oldknow, Adrian. (1996). The Euler-Gergonne-Soddy Triangle of a Triangle. *American Mathematics Monthly*. **103**. 4. p. p 319-329.

Rawuh. (1992). *Geometri Transformasi*. Bandung: Departemen Pendidikan dan Kebudayaan Direktorat Jenderal Pendidikan Tinggi Proyek Pembinaan Tenaga Kependidikan Tinggi 1993.

Travers, K. J., Dalton, L. C. dan Layton, K. P. (1987). *Geometry*. California: Laidlaw Brothers.

Tuckey, C.O dan Armistead W (1953). *Coordinate Geometry*. New York: Longmans, Green and Co London.

Wallace, E. C. dan West, S. F. (1992). *Roads to Geometry*. New Jersey: Prentice Hall.

Weisstein, Eric, W. (1999). *Trilinear Coordinates*. http://mathworld.wolfram.com/TrilinearCoordinates.html.

LAMPIRAN

Persamaan garis Gergonne: $\frac{x}{d} + \frac{y}{e} + \frac{z}{f} = 0$

Persamaan Garis Soddy: $(f - e)\,x + (d - f)\,y + (e - d)\,z = 0$

Akan dibuktikan bahwa :

$$\frac{f-e}{d}+\frac{d-f}{e}+\frac{e-d}{f}=\left(\frac{e-d}{e}+\frac{d-f}{f}\right)\cos\alpha+\left(\frac{f-e}{f}+\frac{e-d}{d}\right)\cos\beta+\left(\frac{d-f}{d}+\frac{f-e}{e}\right)\cos\gamma$$

Bukti:

(i) Ruas Kiri:

$$\frac{f-e}{d}+\frac{d-f}{e}+\frac{e-d}{f}$$

$$=\frac{\frac{\Delta}{cc'}-\frac{\Delta}{bb'}}{\frac{\Delta}{aa'}}+\frac{\frac{\Delta}{aa'}-\frac{\Delta}{cc'}}{\frac{\Delta}{bb'}}+\frac{\frac{\Delta}{bb'}-\frac{\Delta}{aa'}}{\frac{\Delta}{cc'}}$$

$$=\frac{aa'}{cc'}-\frac{aa'}{bb'}+\frac{bb'}{aa'}-\frac{bb'}{cc'}+\frac{cc'}{bb'}-\frac{cc'}{aa'}$$

$$=\frac{bb'-cc'}{aa'}+\frac{cc'-aa'}{bb'}+\frac{aa'-bb'}{cc'}$$

$$=\frac{b(s-b)-c(s-c)}{a(s-a)}+\frac{c(s-c)-a(s-a)}{b(s-b)}+\frac{a(s-a)-b(s-b)}{c(s-c)}$$

$$=\frac{ba+bc-b^2-ca-cb+c^2}{a(b+c-a)}+\frac{ca+cb-c^2-ab-ac+a^2}{b(a+c-b)}+\frac{ab+ac-a^2-ba-bc+b^2}{c(a+b-c)}$$

$$=\frac{ba-ca-b^2+c^2}{a(b+c-a)}+\frac{cb-ab-c^2+a^2}{b(a+c-b)}+\frac{ac-bc-a^2+b^2}{c(a+b-c)}$$

$$=\frac{a(b-c)-(b+c)(b-c)}{a(b+c-a)}+\frac{b(c-a)-(c+a)(c-a)}{b(a+c-b)}+\frac{c(a-b)-(a+b)(a-b)}{c(a+b-c)}$$

$$=\frac{(b-c)(a-b-c)}{a(b+c-a)}+\frac{(c-a)(b-c-a)}{b(a+c-b)}+\frac{(a-b)(c-a-b)}{c(a+b-c)}$$

$$=\frac{-(b-c)}{a}+\frac{-(c-a)}{b}+\frac{-(a-b)}{c}$$

$$=\frac{c-b}{a}+\frac{a-c}{b}+\frac{b-a}{c}$$

(ii) Ruas Kanan:

$$\left(\frac{e-d}{e}+\frac{d-f}{f}\right)\cos\alpha+\left(\frac{f-e}{f}+\frac{e-d}{d}\right)\cos\beta+\left(\frac{d-f}{d}+\frac{f-e}{e}\right)\cos\gamma$$

$$=\left(\frac{e}{e}-\frac{d}{e}+\frac{d}{f}-\frac{f}{f}\right)\cos\alpha+\left(\frac{f}{f}-\frac{e}{f}+\frac{e}{d}-\frac{d}{d}\right)\cos\beta+\left(\frac{d}{d}-\frac{f}{d}+\frac{f}{e}-\frac{e}{e}\right)\cos\gamma$$

$$=\left(1-\frac{d}{e}+\frac{d}{f}-1\right)\cos\alpha+\left(1-\frac{e}{f}+\frac{e}{d}-1\right)\cos\beta+\left(1-\frac{f}{d}+\frac{f}{e}-1\right)\cos\gamma$$

$$=\left(\frac{d}{f}-\frac{d}{e}\right)\cos\alpha+\left(\frac{e}{d}-\frac{e}{f}\right)\cos\beta+\left(\frac{f}{e}-\frac{f}{d}\right)\cos\gamma$$

$$=\left(\frac{\frac{\Delta}{aa'}}{\frac{\Delta}{cc'}}-\frac{\frac{\Delta}{aa'}}{\frac{\Delta}{bb'}}\right)\cos\alpha+\left(\frac{\frac{\Delta}{bb'}}{\frac{\Delta}{aa'}}-\frac{\frac{\Delta}{bb'}}{\frac{\Delta}{cc'}}\right)\cos\beta+\left(\frac{\frac{\Delta}{cc'}}{\frac{\Delta}{bb'}}-\frac{\frac{\Delta}{cc'}}{\frac{\Delta}{aa'}}\right)\cos\gamma$$

$$=\left(\frac{cc'-bb'}{aa'}\right)\cos\alpha+\left(\frac{aa'-cc'}{bb'}\right)\cos\beta+\left(\frac{bb'-aa'}{cc'}\right)\cos\gamma$$

$$=\left(\frac{c(s-c)-b(s-b)}{a(s-a)}\right)\cos\alpha+\left(\frac{a(s-a)-c(s-c)}{b(s-b)}\right)\cos\beta+\left(\frac{b(s-b)-a(s-a)}{c(s-c)}\right)\cos\gamma$$

$$=\left(\frac{ca+cb-c^2-ba-bc+b^2}{a(b+c-a)}\right)\cos\alpha+\left(\frac{ab+ac-a^2-ca-cb+c^2}{b(a+c-b)}\right)\cos\beta+\left(\frac{ba+bc-b^2-ab-ac+a^2}{c(a+b-c)}\right)\cos\gamma$$

$$=\left(\frac{ca-ba-c^2+b^2}{a(b+c-a)}\right)\cos\alpha+\left(\frac{ab-cb-a^2+c^2}{b(a+c-b)}\right)\cos\beta+\left(\frac{bc-ac-b^2+a^2}{c(a+b-c)}\right)\cos\gamma$$

$$=\left(\frac{a(c-b)-(c+b)(c-b)}{a(b+c-a)}\right)\cos\,\alpha+\left(\frac{b(a-c)-(a+c)(a-c)}{b(a+c-b)}\right)\cos\,\beta+\left(\frac{c(b-a)-(b+a)(b-a)}{c(a+b-c)}\right)\cos\gamma$$

$$=\left(\frac{(c-b)(a-c-b)}{a(b+c-a)}\right)\cos\,\alpha+\left(\frac{(a-c)(b-a-c)}{b(a+c-b)}\right)\cos\,\beta+\left(\frac{(b-a)(c-b-a)}{c(a+b-c)}\right)\cos\gamma$$

$$=\frac{-(c-b)}{a}\cos\,\alpha+\frac{-(a-c)}{b}\cos\,\beta+\frac{-(b-a)}{c}\cos\gamma$$

$$=\frac{(b-c)}{a}\cdot\frac{(b^2+c^2-a^2)}{2bc}+\frac{(c-a)}{b}\cdot\frac{(a^2+c^2-b^2)}{2ac}+\frac{(a-b)}{c}\cdot\frac{(a^2+b^2-c^2)}{2ab}$$

$$=\frac{(b-c)(b^2+c^2-a^2)+(c-a)(a^2+c^2-b^2)+(a-b)(a^2+b^2-c^2)}{2abc}$$

$$=\frac{b^3+bc^2-ba^2-cb^2-c^3+ca^2+ca^2+c^3-cb^2-a^3-ac^2+ab^2+a^3+ab^2-ac^2-ba^2-b^3+bc^2}{2abc}$$

$$=\frac{2bc^2-2cb^2+2ca^2-2ac^2+2ab^2-2ba^2}{2abc}$$

$$=\frac{bc^2-cb^2+ca^2-ac^2+ab^2-ba^2}{abc}$$

$$=\frac{bc(c-b)+ac(a-c)+ab(b-a)}{abc}$$

$$=\frac{c-b}{a}+\frac{a-c}{b}+\frac{b-a}{c}$$

Jadi terbukti bahwa:

$$\frac{f-e}{d}+\frac{d-f}{e}+\frac{e-d}{f}=\left(\frac{e-d}{e}+\frac{d-f}{f}\right)\cos\alpha+\left(\frac{f-e}{f}+\frac{e-d}{d}\right)\cos\beta+\left(\frac{d-f}{d}+\frac{f-e}{e}\right)\cos\gamma$$