PENYELESAIAN PERSAMAAN DIFERENSIAL DENGAN METODE DERET PANGKAT

SKRIPSI

Diajukan untuk Memenuhi Salah Satu Syarat
Memperoleh Gelar Sarjana Pendidikan
Program Studi Pendidikan Matematika

Disusun Oleh :

BUDI PRACAYANINGDYAH
NIM : 001414063

PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA
JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
UNIVERSITAS SANATA DHARMA
YOGYAKARTA

2005

PENYELESAIAN PERSAMAAN DIFERENSIAL

DENGAN METODE DERET PANGKAT

Oleh :

BUDI PRACAYANINGDYAH

NIM : 001414063

Telah disetujui oleh :

Dosen Pembimbing

Prof. Drs. R. Soemantri

tanggal 11 Januari 2005

PENYELESAIAN PERSAMAAN DIFERENSIAL
DENGAN METODE DERET PANGKAT

Dipersiapkan dan ditulis oleh :
Budi Pracayaningdyah
NIM : 001414063

Telah dipertahankan di depan Panitia Penguji
pada tanggal 26 Januari 2005
dan dinyatakan telah memenuhi syarat

Susunan Panitia Penguji

	Nama Lengkap	Tanda Tangan
Ketua	Drs. Aufridus Atmadi, M.Si.	....
Sekretaris	Drs. Thomas Sugiarto Pudjohartono, M.T.	....
Anggota	Prof. Drs. R. Soemantri	....
Anggota	Drs. A. Mardjono	....
Anggota	Marcellinus Andy Rudhito, S.Pd., M.Si.	....

Yogyakarta, 26 Januari 2005
Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan
Universitas Sanata Dharma
Dekan,

(Dr. A.M. Slamet Soewandi, M.Pd.)

When I'm down & my soul so weary

When troubles come & my heart burdened be

Then I'm still & wait here in the silence

Until You come & sit a while with me

You raise me up, so I can stand on mountains

You raise me up to walk on stormy seas

I am strong when I am on Your shoulder

You raise me up to more than I can be

(Groban)

PERSEMBAHAN

ミ ナ メ モ ナ ヘ ツ チ ネ チ ホ

Only God can grant Faith,
but you can bear witness.
Only God can give hope,
but you can inspire trust in your brothers.
Only God can give Love,
but you can teach others to love.
Only God is Light,
but you can make it shine in everyone's eyes.
Only God can do the impossible,
but you can do the possible.
Only God is sufficient unto Himself,
but He prefers to count on you.
Be God's instrument of Faith, Hope, Love,
and Light to others

Skripsi ini kupersembahkan untuk
Bapak & Ibu terkasih,
Mbak Ari tersayang,
Dik Cita & Dik Dimas termanis,
Almamaterku, Universitas Sanata Dharma

PERNYATAAN KEASLIAN KARYA

Saya menyatakan dengan sesungguhnya bahwa skripsi yang saya tulis ini tidak memuat karya atau bagian karya orang lain, kecuali yang telah disebutkan dalam kutipan dan daftar pustaka, sebagaimana layaknya karya ilmiah.

Yogyakarta, 26 Januari 2005

Penulis

Budi Pracayaningdyah

ABSTRAK

Tujuan penulisan skripsi ini adalah untuk memahami salah satu metode untuk menyelesaikan persamaan diferensial linear dan dapat membandingkannya dengan metode yang lain. Metode ini akan menghasilkan fungsi penyelesaian dalam bentuk deret pangkat, karena itu metode ini dinamakan metode deret pangkat. Banyak persamaan diferensial yang tidak dapat dicari penyelesaiannya dalam bentuk fungsi yang tertutup, oleh karena itu inilah alternatif penyelesaian persamaan diferensial semacam ini. Metode ini adalah prosedur standar yang sangat efisien dalam menyelesaikan persamaan diferensial dengan koefisien variabel.

Metodologi penelitian yang digunakan adalah metode studi pustaka. Secara khusus, skripsi ini membahas penyelesaian persamaan diferensial dengan metode deret pangkat untuk persamaan diferensial linear orde dua baik di sekitar titik analitik maupun titik singular regular. Mengingat dalam menyelesaikan persamaan diferensial dengan metode deret pangkat kita mesti berhadapan dengan pendiferensialan dan pengintegralan suku demi suku dari suatu deret fungsi, maka skripsi ini dimulai dengan pembahasan mengenai barisan dan deret fungsi serta kekonvergenan seragam yang merupakan syarat agar hal tersebut boleh dikerjakan.

Penyelesaian persamaan diferensial di sekitar titik analitik berbentuk $y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ yang konvergen dalam $|x - x_0| < R$, $R > 0$. Salah satu penyelesaian di sekitar titik singular regular berbentuk $y=(x-x_0)^r\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ yang analitik dalam $0 < |x - x_0| < R$. Bentuk penyelesaian kedua ditentukan oleh akar – akar persamaan indisial r_1 dan r_2. Sebagai aplikasi dari metode deret pangkat, dibahas persamaan diferensial yang menghasilkan fungsi – fungsi khas seperti persamaan diferensial Airy, Hermite, Bessel, dan persamaan diferensial Hipergeometri.

ABSTRACT

This paper was aimed to understand one method for solving linear differential equations and can compare it with others method. This result will be in the form of a power series, so this method called power series method. Many differential equations are not able to solve in a closed function form, this method is an alternative way for solving such equations. The power series method ia a very efficient standard procedure to solve a differential equation with variable coefficients.

This paper written by using literature study method. Particularly, the equations to discuss are the linear differential equations of the second order either near analytic or regular singular points. A little theory of series of functions and uniform convergence are prepared before discussing the main topic, because they stand as prerequisite conditions for operations with power series.

Solution near an analytic point represented as $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$. The series converges in an interval $|\, x - x_0 \,| < R$, $R > 0$. One solution near regular singular points given by $y = (x - x_0)^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ which analytic in $0 < |\, x - x_0 \,| < R$. The form of second solution determined by the roots of the indicial equation r_1 and r_2. As an application of the method, we solve differential equations of some special functions, likes Airy's, Hermite's, Bessel's, and Hypergeometric's equation.

KATA PENGANTAR

Saat segala sesuatu belum indah pada waktunya, Engkau tetap menyertaiku hingga perjuangan ini membuahkan hasil yang indah. Puji syukur kepada Tuhan karena kasih dan penyertaanNya, skripsi dengan judul "Penyelesaian Persamaan Diferensial Dengan Metode Deret Pangkat" dapat diselesaikan. Skripsi ini sebagai salah satu syarat untuk mencapai gelar sarjana pendidikan.

Skripsi ini ditulis untuk meneliti salah satu metode yang efisien untuk mencari penyelesaian umum persamaan diferensial. Metode ini disebut metode deret pangkat. Metode deret pangkat fleksibel karena dapat dipakai untuk persamaan diferensial dengan koefisien konstanta maupun variabel.

Penulis menyadari bahwa dalam penyusunan skripsi ini, penulis banyak sekali dibantu dan didukung oleh berbagai pihak, yang tanpa mereka penulis bukanlah siapa – siapa. Karena itu sepantasnyalah penulis mengucapkan terima kasih kepada mereka yang mempercayai perjuangan ini.

Kepada Dekan Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, **Bpk. Dr. A.M. Slamet Soewandi, M.Pd.**, Ketua Jurusan PMIPA, **Bpk. Drs. A. Atmadi, M.Si.**, **Bpk. Drs. Thomas Sugiarto Pudjohartono, M.T.**, selaku Ketua Program Studi Pendidikan Matematika.

Kepada **Bpk. Prof. Drs. R. Soemantri** selaku dosen pembimbing. Terima kasih atas diskusi, koreksi, serta arahan – arahan yang tidak jemu – jemunya bapak berikan, dan juga kesabaran dan dorongan selama penyusunan skripsi ini.

Bapak & Ibu terkasih yang telah memberiku cinta yang sesungguhnya, mbak Ari, dik Cita & dik Dimas atas kebersamaan, pengertian, kegilaan, serta kekompakan kita ! Sungguh, tak ada yang seperti kalian !!! Sepupu kembarku Yoga – Yogi & keluarga Gading Legok tempatku melepas sedih dan senang. Mbak Tutik & Mas Ronnie kakakku.

Segenap dosen JP MIPA – MIPA : Pak Andy & Pak Mardjono (atas saran dan kritiknya), Pak Warsono, Pak Marpaung, Bu Wanty (kapan pulang ke Indonesia?), Bu Novi, Pak Haryono, Pak Hongki, Pak Tutoyo, Bu Moeharti, & Pak Santa … terima kasih seribu …

Pak Narjo – Pak Sugeng yang selalu kompak melayani para mahasiswa. Sekretariat menjadi lebih ceria dengan kehadiran Bapak berdua.

Teman – temanku KSR USD, Comeng, m'Nduts, Tere, m'Anas, Yoko, Bob, Jito, m'Fajar dkk : mendaki gunung, menyusur sungai, lembah & gua, camping, SAR, momen – momen seru sewaktu penjagaan… bersama kalian aku memperoleh 'hal yang tak terlupakan'. Jangan lupakan ini : **Siammo Tutti Fratelli.**

Teman – teman PMAT 2000 : Vivin – Kotoko, Betty, Lala, Ponco, Yuli, Nining, Bunga, Dwi Banjar, Jeki, Robert, Deni, & semuanya… ingat kata orang bijak 'Nobody is perfect. Kamu tidak bisa sepenuhnya mengendalikan apa yang terjadi di duniamu, tapi bisa bertanggung jawab atas sikapmu dalam menghadapi segala rasa & kejadian yang ada'. Kadangkala kita merasa jenuh, sedih, kecewa, dan gembira. Ingat bahwa teman/sahabat ada untuk saling berbagi. Terima kasih atas semangat dan penguatan yang boleh kalian bagikan, meski lewat hal – hal kecil & sederhana karena kadangkala semua itu terlihat begitu istimewa. Keep in touch ya …..

Tim KKN dan PPL yang kompak selalu (kapan kita ke Goa Cermai?). Percaya atau tidak, pertemuan kita bukanlah suatu kebetulan tetapi karena ada suatu alasan.

Adik – adikku … Novi (jiwa bisnismu sungguh luar biasa, bakat jadi orang kaya), Puji (bank-nya anak kos), Kristin (untuk mengalahkan 'detektif', berpikirlah seperti detektif), Maya (ratu gambler), Beti, Arsini, Antun, serta teman – teman kos Bromo 8 dan Buntu II/3 atas canda tawa penghilang stress!!!

Frans & Kris LC, kiper no.3 (kapan kamu jadi no.1?), Edi, Agung, Nesta, Totti, Batistuta, Costa, & Kaka cs … semangat dan dedikasi kalian sungguh hebat, keep on fighting 'till the end.

Kepada 'temanku yang selalu ada walau tak tampak nyata', Gun' n Roses, Fire House, Air Supply, MLTR, Ebiet, Queen, Mr. Big, Katon … hidup tanpa musik ibarat matematika yang tak lengkap tanpa kalkulus …serta kepada semua pihak yang telah membantu secara langsung maupun tidak langsung.

Dan yang tak terlupakan … kota Yogyakarta, khususnya Universitas Sanata Dharma-ku yang memberiku kesempatan untuk berdinamika & menikmati hangatnya kota budaya. Gejayan – Malioboro & tempat – tempat refreshing lainnya yang memberiku banyak kenangan & pelajaran berharga. Hidup itu penuh tantangan!!!Semangat!!!

Penulis menyadari masih banyak kekurangan dalam skripsi ini. Oleh karena itu penulis terbuka terhadap saran dan kritik yang membangun. Semoga skripsi ini bermanfaat bagi khasanah ilmu pengetahuan.

Yogyakarta, Februari 2005

Penulis

DAFTAR ISI

BAB I

PENDAHULUAN

A. Latar Belakang Masalah

Persamaan diferensial sering muncul dalam model matematika yang mencoba menggambarkan keadaan atau fenomena tertentu dalam kehidupan nyata. Banyak hukum – hukum alam dan hipotesa – hipotesa dapat diterjemahkan kedalam persamaan yang mengandung turunan melalui bahasa matematika.

Persamaan diferensial adalah persamaan yang memuat derivatif atau turunan dari satu atau lebih fungsi. Sekali model matematika tersusun dalam bentuk persamaan diferensial, langkah selanjutnya adalah menyelesaikan persamaan diferensial tersebut dan menggunakan penyelesaiannya untuk membuat perkiraan mengenai kelakuan masalah sebenarnya.

Suatu persamaan diferensial linear dengan koefisien konstan dapat diselesaikan dengan metode aljabar (metode operator diferensial dan metode koefisien tak tentu) dan penyelesaian - penyelesaiannya merupakan fungsi – fungsi elementer (sin x, cos x, e^x). Akan tetapi, bila koefisien – koefisien itu tidak konstan tetapi bergantung pada x, maka masalahnya lebih rumit dan penyelesaiannya merupakan fungsi – fungsi yang tidak elementer.

Beberapa persamaan terkenal seperti persamaan Airy, Hermite, Bessel, dan persamaan Hipergeometri adalah tergolong dalam jenis ini. Karena persamaan – persamaan ini memegang peranan penting dalam matematika maupun teknik, maka akan dibahas suatu metode untuk menyelesaikan persamaan seperti persamaan tersebut. Penyelesaian – penyelesaiannya akan muncul dalam bentuk deret pangkat, oleh karena itu metode ini disebut **metode deret pangkat.**

Ternyata masalah tentang penyelesaian persamaan diferensial dengan metode deret ini pernah ditulis dalam suatu skripsi oleh seorang mahasiswa FMIPA Sanata Dharma. Akan tetapi, skripsi ini berbeda dengan skripsi tersebut, bahkan pembahasannya lebih mendasar dan materi yang dibahaspun lebih luas.

Dalam penulisan ini dibahas persamaan diferensial secara lebih menyeluruh, yaitu persamaan diferensial dengan koefisien konstan maupun variabel, homogen maupun tak homogen. Selain itu lebih ditonjolkan mengenai konsep yang merupakan syarat cukup agar suatu deret pangkat dapat didiferensialkan dan diintegralkan suku demi suku. Konsep ini sangat penting karena dalam mengerjakan penyelesaian persamaan diferensial dengan metode deret pangkat kita selalu berhadapan dengan pendiferensialan dan pengintegralan suku demi suku. Konsep ini adalah *konvergen seragam,* yang menyangkut barisan dan deret fungsi. Karena itu skripsi ini amat berbeda dengan skripsi tersebut di atas yang hanya membahas persamaan diferensial linear homogen orde dua dengan koefisien variabel.

Metode deret pangkat menangani persamaan diferensial yang bila ditulis dalam bentuk baku

$$y''+P_1(x)y'+P_2(x)y=0 \qquad (1.1)$$

dengan $P_1(x) = \dfrac{a_1(x)}{a_2(x)}$ dan $P_2(x) = \dfrac{a_0(x)}{a_2(x)}$

analitik untuk semua x yang memenuhi persamaan tersebut. Akan tetapi, beberapa persamaan penting mempunyai suatu titik singular, yaitu suatu titik x sehingga P_1 atau P_2 tidak lagi analitik, sebagai lawan dari titik – titik lain yang disebut titik biasa.

Dipandang persamaan diferensial linear orde dua dengan koefisien variabel yang dinyatakan dalam bentuk

$$a_2(x)y''+a_1(x)y'+a_0(x)y = 0 \tag{1.2}$$

Bentuk penyelesaian persamaan diferensial (1.2) akan tergantung pada jenis titik x_0 persamaan diferensial tersebut. Sebuah titik x_0 dapat merupakan titik biasa atau titik singular.

Dalam pembahasan ini akan ditunjukkan bahwa metode deret pangkat dapat diperluas untuk mencakup persamaan semacam itu.

B. Pembatasan Masalah

Permasalahan dibatasi untuk penyelesaian persamaan diferensial biasa linear orde dua dengan koefisien konstan dan variabel di sekitar titik biasa dan titik singular regular. Untuk penyelesaian persamaan diferensial di sekitar titik singular regular diambil akar – akar persamaan indisial F(r) = 0 yang merupakan bilangan real. Penyelesaian beberapa persamaan diferensial yang menghasilkan fungsi – fungsi khas yang akan dibahas adalah persamaan Airy, Hermite, Bessel, dan persamaan Hipergeometri.

C. Perumusan Masalah

Pokok – pokok permasalahan yang akan dibahas dalam penulisan ini dapat dirumuskan sebagai berikut :

1. Bagaimana penyelesaian persamaan diferensial dengan metode deret pangkat di sekitar titik biasa.
2. Bagaimana penyelesaian persamaan diferensial dengan metode deret pangkat di sekitar titik singular regular.
3. Bagaimana penyelesaian dari beberapa persamaan diferensial yang menghasilkan fungsi – fungsi khas.

D. Tujuan Penelitian

1. Untuk lebih mendalami dan memahami salah satu metode penyelesaian persamaan diferensial yaitu metode deret pangkat.
2. Memacu pembaca untuk dapat mempelajari metode penyelesaian persamaan diferensial yang lain dan dapat membandingkannya dengan metode deret pangkat.

E. Manfaat Penelitian

Secara umum, penelitian ini bermanfaat untuk mengetahui salah satu metode yang dapat dipakai untuk mencari penyelesaian persamaan diferensial biasa linear orde dua dengan koefisien konstan maupun variabel. Metode ini disebut metode deret pangkat.

F. Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penulisan ini adalah metode studi pustaka.

G. Sistematika Penulisan

BAB I Berisi Pendahuluan, yang terdiri dari Latar Belakang Masalah, Pembatasan Masalah, Perumusan Masalah, Manfaat Penelitian, Metode Penelitian, dan Sistematika Penulisan.

BAB II Berisi Barisan dan Deret Fungsi yang terbagi dalam tiga pasal utama, yaitu Barisan dan Deret Bilangan Real, Kekonvergenan Seragam, dan Deret Pangkat.

BAB III Berisi Penyelesaian Persamaan Diferensial Dengan Metode Deret Pangkat, yang terdiri dari Titik Biasa dan Titik Singular, Penyelesaian Persamaan Diferensial (koefisien variabel maupun konstan) di Sekitar Titik Biasa, dan Penyelesaian Persamaan Diferensial di Sekitar Titik Singular Regular.

BAB IV Membahas tentang Penyelesaian Persamaan Diferensial Yang Menghasilkan Fungsi – Fungsi Khas. Beberapa persamaan yang diambil adalah persamaan Airy, Hermite, Bessel, dan persamaan Hipergeometri.

BAB V Berisi Kesimpulan dan Saran.

DAFTAR PUSTAKA

BAB II

BARISAN DAN DERET FUNGSI

Dalam bab ini dibicarakan barisan dan deret fungsi yang didefinisikan pada suatu subset dari himpunan bilangan real **R**. Namun lebih dahulu diberikan ikhtisar singkat tentang barisan dan deret bilangan real.

A. BARISAN DAN DERET BILANGAN REAL

1. Barisan Bilangan Real

Definisi 2.A.1

Barisan $\{a_n\}$ adalah suatu fungsi yang daerah asalnya adalah himpunan bilangan bulat positif.

Definisi 2.A.2

Barisan $\{a_n\}$ dikatakan konvergen jika terdapat bilangan real L dengan sifat untuk setiap ε > 0 yang diberikan, ada bilangan bulat positif N sehingga $|a_n - L| < \varepsilon$ untuk setiap n ≥ N. Bilangan L dinamakan limit barisan $\{a_n\}$ dan ditulis $\lim_{n\to\infty} a_n = L$. Barisan yang tidak konvergen dinamakan barisan divergen.

Jika untuk setiap bilangan real M ada bilangan bulat positif N sehingga $a_n \geq$ M untuk semua n ≥ N, sering dituliskan $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

Barisan ini termasuk barisan divergen, dan sering dikatakan konvergen tak sebenarnya ke $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

Demikian halnya jika untuk setiap bilangan real M ada bilangan bulat positif N sehingga a_n < M untuk semua n ≥ N sering dituliskan $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ dan juga merupakan barisan divergen atau konvergen tak sebenarnya ke $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$

Definisi 2.A.3

Barisan $\{a_n\}$ naik bila $\forall n \in \mathbf{N}$ berlaku $a_n \le a_{n+1}$ dan turun bila $\forall n \in \mathbf{N}$ berlaku $a_n \ge a_{n+1}$. Barisan yang naik atau turun dinamakan barisan monoton.

Definisi 2.A.4

Barisan $\{a_n\}$ dikatakan terbatas jika terdapat bilangan real A sehingga $|a_n| \le A$, $\forall n \in \mathbf{N}$.

Teorema 2.A.1

Barisan monoton yang terbatas adalah konvergen.

Jika $\{a_n\}$ monoton naik dan terbatas ke atas maka

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup remum \quad \{a_n : n \in \mathbf{N}\}$$

Jika barisan $\{b_n\}$ monoton turun dan terbatas ke bawah maka

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \inf imum \ \{b_n : n \in \mathbf{N}\}$$

Definisi 2.A.5

Barisan bilangan yang memenuhi

$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbf{N})(\forall n, m \geq N \Rightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon)$ dinamakan ***barisan Cauchy.***

Teorema 2.A.2

Barisan bilangan $\{a_n\}$ konvergen bila dan hanya bila $\{a_n\}$ barisan Cauchy.

Barisan Bagian

Diberikan barisan $\{a_n\}$ dan dibentuk barisan bilangan asli $\{n_k\}$ dengan $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots < n_k < \ldots$

Barisan $\{a_{n_k} : k \in \mathbf{N}\}$ yakni $a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots, a_{n_k}, \ldots$ dinamakan barisan bagian dari barisan $\{a_n\}$. Jadi ada tak hingga barisan bagian dari $\{a_n\}$.

Barisan $\{a_n\}$ juga merupakan barisan bagian, yakni untuk $n_k = k$, $k \in \mathbf{N}$.

Teorema 2.A.3

Barisan $\{a_n\}$ konvergen ke a bila dan hanya bila semua sub barisan juga konvergen ke a

2. Deret Bilangan Real

Definisi 2.A.6

$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ disebut deret tak hingga.

$u_1, u_2, u_3, \ldots u_n, \ldots$ disebut suku-suku deret.

Definisi 2.A.7

Barisan { S_n } dengan $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$ dinamakan barisan jumlah parsial dari deret $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$. Bila barisan { S_n } konvergen maka deret $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ dikatakan konvergen.

$\lim_{n\to\infty} S_n = S$ disebut jumlah deret, ditulis $S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$

Jika { S_n } divergen maka deret $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ dikatakan divergen.

Teorema 2.A.4

Syarat perlu agar $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ konvergen adalah $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$

Definisi 2.A.8

Deret $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ konvergen mutlak jika deret $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ konvergen. Deret yang konvergen mutlak pasti konvergen.

Deret $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ yang konvergen tetapi $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ divergen disebut konvergen bersyarat.

Teorema 2.A.5

(1) Deret geometri $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1} + \ldots$ konvergen bila $|r| < 1$ dengan jumlah deretnya $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r}$ dan divergen bila $|r| \geq 1$.

(2) Deret p, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ $p > 0$ konvergen bila $p > 1$ dan divergen bila $p \leq 1$

(3) Deret harmonis $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ merupakan deret yang divergen.

(4) Deret selang seling $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ konvergen bila

$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \ldots \geq a_n \geq \ldots$ dan $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$

Bila deret $\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ konvergen maka jumlah deretnya ln 2.

Teorema 2.A.6

Andaikan $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ dan $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ adalah deret-deret dengan suku-suku positif dan

$u_n \leq v_n, \forall n \in \mathbf{N}$

(1). Jika $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ konvergen maka $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ konvergen.

(2). Jika $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ divergen maka $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ juga divergen.

Teorema 2.A.7

Andaikan $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ adalah deret dengan suku-suku positif dan $\rho = \lim_{n \to \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$.

(1) Deret konvergen jika $\rho < 1$

(2) Deret divergen jika $\rho > 1$ atau $\rho = +\infty$

(3) Deret dapat konvergen atau divergen jika $\rho = 1$.

Teorema 2.A.8

Jika $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ deret dengan suku – suku tidak nol dan $\rho = \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right|$

(1) Deret konvergen mutlak jika $\rho < 1$

(2) Deret divergen jika $\rho > 1$ atau $\rho = +\infty$

(3) Deret dapat konvergen atau divergen jika $\rho = 1$.

Teorema 2.A.9

Andaikan $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ adalah deret dengan suku – suku positif dan $\rho = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n}$ ada

(1) Deret konvergen mutlak jika $\rho < 1$

(2) Deret divergen jika $\rho > 1$ atau $\rho = +\infty$

(3) Deret dapat konvergen atau divergen jika $\rho = 1$.

Teorema 2.A.10

Diberikan fungsi $f(x)$ yang bernilai positif, kontinu, dan turun untuk semua nilai $x \geq$ N, untuk suatu bilangan bulat positif N.

Maka deret $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ dengan $u_n = f(n)$, untuk n ≥ N konvergen atau divergen berturut – turut bila $\int_N^{\infty} f(x)dx$ konvergen atau divergen.

B. KEKONVERGENAN SERAGAM

Diberikan barisan fungsi $\{f_n\}$ yang didefinisikan pada suatu himpunan E subset dari **R**. Jika untuk semua $x \in$E barisan bilangan $\{f_n(x)\}$ konvergen maka dikatakan bahwa barisan fungsi $\{f_n\}$ konvergen titik demi titik pada E atau disingkat konvergen pada E. Jika barisan $\{f_n\}$ konvergen titik demi titik pada E maka barisan itu menentukan fungsi $f(x)$ yang dinamakan fungsi limit barisan $\{f_n\}$ pada E.

Jadi, untuk semua $x \in$E ,

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

Barisan $\{f_n\}$ yang konvergen titik demi titik pada E didefinisikan sebagai berikut :

Definisi 2.B.1

Barisan fungsi $\{f_n\}$ konvergen titik demi titik ke fungsi f pada E bila dan hanya bila untuk setiap $x \in$E dan untuk setiap ε > 0 yang diberikan, terdapat bilangan bulat positif N ∈**N** sehingga untuk semua n ∈**N**, n ≥ N berlaku

$$| f_n(x) - f(x) | < \varepsilon$$

Barisan $\{f_n\}$ yang konvergen titik demi titik pada E dinyatakan dengan $f_n \to f$ konvergen titik demi titik pada E atau disingkat $f_n \to f$ pada E.

Jika ditulis dengan lambang :

($f_n \to f$ pada E) $\Leftrightarrow$ ($\forall x \in$E)($\exists\varepsilon > 0$)($\exists$N$\in$**N**)($\forall$n$\in$**N**, n $\geq$ N $\Rightarrow$

$|\, f_n(x) - f(x)\,| < \varepsilon$)

Jadi dalam hal ini bilangan asli N adalah fungsi dari x dan ε. Jadi, jika $\varepsilon > 0$ telah diberikan, maka untuk $\forall x \in$E, N tergantung pada x. Jadi masing – masing $x \in$E bersesuaian dengan nilai N sendiri – sendiri.

Jika diberikan $\varepsilon > 0$ dapat dicari bilangan bulat positif N$\in$**N** yang bisa bekerja untuk $\forall x \in$E sehingga untuk $\forall$n$\in$**N**, n $\geq$ N berlaku $|\, f_n(x) - f(x)\,| < \varepsilon$ untuk $\forall x \in$E, maka barisan $\{ f_n \}$ dikatakan konvergen seragam ke fungsi f pada E. Barisan $\{ f_n \}$ yang konvergen seragam pada E dinyatakan dengan $f_n \to f$ konvergen seragam pada E.

Definisi 2.B.2

Barisan fungsi $\{ f_n \}$ dikatakan konvergen seragam ke fungsi f pada E bila dan hanya bila $\forall\varepsilon > 0$ yang diberikan, terdapat bilangan bulat positif N$\in$**N** sehingga $\forall$n$\in$**N**, n $\geq$ N dan $\forall x \in$E berlaku $|\, f_n(x) - f(x)\,| < \varepsilon$

Dengan notasi dapat dituliskan sebagai berikut :

($f_n \to f$ konvergen seragam pada E)$\Leftrightarrow$($\forall\varepsilon > 0$)($\exists$N$\in$**N**)($\forall$n$\in$**N**, n $\geq$ N, $\forall x \in$E $\Rightarrow |\, f_n(x) - f(x)\,| < \varepsilon$)

Dari kedua definisi di atas jelas bahwa jika $f_n \to f$ konvergen seragam pada E maka $f_n \to f$ konvergen titik demi titik pada E, tetapi sebaliknya tidak benar.

Dengan lambang dapat dituliskan bahwa barisan $\{f_n\}$ tidak konvergen seragam ke fungsi f pada E jika

$(\exists \varepsilon > 0)(\forall N \in \mathbf{N})(\exists n \in \mathbf{N} \wedge n \geq N, \exists x \in E \wedge |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon)$

Catatan :

Konsep kekonvergenan seragam untuk barisan fungsi adalah pada suatu himpunan, tidak pernah pada suatu titik.

Contoh 2.B.1

Diketahui $f_n(x) = \dfrac{1}{nx}$ $\quad x \in [a,1]$ dan $a > 0$

Buktikan bahwa $f_n(x)$ konvergen seragam pada $[a,1]$

Penyelesaian :

Untuk $\forall x \in E$,

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{nx} = 0$$

Diberikan $\varepsilon > 0$

Untuk $\forall x \in [a,1]$ berlaku

$$|f_n(x) - 0| = |f_n(x)| = \frac{1}{nx} < \frac{1}{na} \qquad \text{sebab } 0 < a \leq x \leq 1$$

Ada bilangan bulat positif $N \in \mathbf{N}$ sehingga $\dfrac{1}{Na} < \varepsilon$

Dan untuk semua n ≥N, $\frac{1}{na} \leq \frac{1}{Na} < \varepsilon$

Jadi, (∀ε >0)(∃N∈**N**)(∀n ≥ N, $\forall x \in [a,1]$ ⇒ $|f_n(x) - f(x)|$

$= \frac{1}{nx} < \frac{1}{na} < \varepsilon$)

$\therefore f_n(x)$ konvergen seragam pada $[a,1]$

Bila interval diganti menjadi $0 < x < 1$, $f_n(x)$ tidak konvergen seragam.

Ada ε > 0, diambil ε = 1

N sembarang ∈**N**

Ada n ∈**N**, diambil n = 3N >N dan dapat dicari

$x \in (0,1)$ diambil $x = \frac{1}{3N}$ sehingga

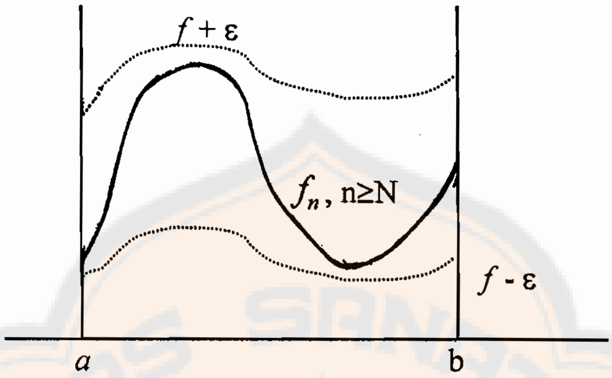
$| f_n(x) - 0 | = \frac{1}{nx} = \frac{1}{3N.\frac{1}{3N}} = 1 \geq \varepsilon$, sebab ε = 1

Jadi dapat dicari ε > 0, yaitu ε = 1, untuk sembarang N∈**N** dapat dicari n ≥N, sebut saja n = 3N dan dapat dicari $x \in (0,1)$ yakni $x = \frac{1}{3N}$ sehingga

$\left| f_n\left(\frac{1}{3N}\right) - 0 \right| = 1 \geq \varepsilon$

$\therefore f_n(x)$ tidak konvergen seragam pada (0,1)

Secara geometri, konvergen seragam dapat dilukiskan sebagai berikut :



$f_n \to f$ konvergen seragam pada E

Untuk n ≥ N, gambar f_n terletak diantara $f - \varepsilon$ dan $f + \varepsilon$

Teorema 2.B.1

Barisan fungsi $\{f_n\}$ konvergen seragam pada E bila dan hanya bila untuk setiap ε > 0 ada bilangan bulat positif N sedemikian sehingga untuk semua n, m dengan m ≥N, n ≥N dan untuk semua $x \in$E berlaku $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$

Bukti :

(1) Diketahui $f_n \to f$ konvergen seragam pada E dan diberikan ε > 0.

Maka terdapat N∈**N** sehingga ∀n∈**N**, n ≥ N ⇒

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ dan } |f_m(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Jadi ∀ $x \in$E, ∀m, n ≥ N berlaku

$$|f_n(x) - f_m(x)| = |(f_n(x) - f(x)) + (f(x) - f_m(x))|$$

$$\leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)|$$

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \qquad \text{(terbukti)}$$

(2) Diketahui bahwa $\forall\varepsilon > 0$ terdapat $N \in \mathbf{N}$ sehingga $\forall m, n \geq N$, $\forall x \in E$ berlaku $|f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Jadi $\forall x \in E$ barisan bilangan $\{f_n(x)\}$ barisan Cauchy sehingga $\{f_n(x)\}$ konvergen. Dimisalkan $f_n(x) \rightarrow f(x)$, $\forall x \in E$.

$\forall x \in E$, apabila $m \rightarrow \infty$ maka $f_m(x) \rightarrow f(x)$ sehingga $\forall n \geq N$, $\forall x \in E$ berlaku $|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$

Jadi $f_n \rightarrow f$ konvergen seragam pada E.

Teorema 2.B.2

Andaikan $f(x) = \lim\limits_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$, $x \in E$ dan $M_n = \sup\limits_{x \in E} remum\ |f_n(x) - f(x)|$

maka $f_n \rightarrow f$ konvergen seragam pada E bila dan hanya bila $M_n \rightarrow 0$

<u>Bukti :</u>

(1) Diketahui $f_n \rightarrow f$ konvergen seragam pada E

Diberi $\varepsilon > 0$, maka terdapat $N \in \mathbf{N}$ sehingga $\forall n \in N$, $n \geq N$, $\forall x \in E$ berlaku

$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$

Jadi $M_n = \sup\limits_{x \in E} remum\ |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$, $\forall n \geq N$

Bila $n \rightarrow 0$ maka $M_n \rightarrow 0$

$\therefore M_n \rightarrow 0$

(2) Diketahui $M_n \to 0$

Diberi $\varepsilon > 0$ harus dibuktikan terdapat N sehingga $\forall n \geq N$

$$M_n = \underset{x \in E}{\sup remum} \; | f_n(x) - f(x) | < \varepsilon$$

Diberi $\varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbf{N}$, $\forall n \geq N \Rightarrow M_n < \varepsilon$

$M_n = \underset{x \in E}{\sup remum} \; | f_n(x) - f(x) |$

$| f_n(x) - f(x) | \leq M_n$, $\forall x \in E$

$| f_n(x) - f(x) | < \varepsilon$, $\forall x \in E$, $\forall n \geq N$

$\therefore f_n$ konvergen seragam.

Contoh 2.B.2 (1)

Diketahui $f_n(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + (1 - nx)^2}$, $x \in [0,1]$, n = 1, 2, 3, …

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{x^2}{x^2 + (1 - nx)^2} = 0$$

Bila $x \neq 0$, $f_n(x) = \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{x^2}(1 - nx)^2}$ dan $f_n\left(\dfrac{1}{n}\right) = 1$

$M_n = | f_n(x) - f(x) | = | f_n(x) - 0 | \leq 1$, sebab $0 < f_n(x) \leq 1$, $\forall x \in [0,1]$

Sedangkan $f_n\left(\dfrac{1}{n}\right) = 1$

Jadi $M_n = 1$ untuk $\forall n \in \mathbf{N}$, sehingga M_n tidak konvergen seragam ke 0.

$\therefore f_n(x)$ tidak konvergen seragam.

Contoh 2.B.2 (2)

Diketahui $f_n(x) = \dfrac{\sin nx}{n}$ $\quad x \in [0,\pi]$, n = 1, 2, 3, ...

$f_n(x) \to 0$

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin nx}{n} = 0$$

$$| f_n(x) | \leq \frac{1}{n}$$

$$| f_n(x) - f(x) | = | f_n(x) - 0 | = | \frac{\sin nx}{n} | \leq \frac{1}{n}$$

Jadi $M_n = \underset{x\in E}{\text{sup}\textit{remum}} \ | f_n(x) - 0 | = \dfrac{1}{n}$

$M_n \to 0$

$\therefore f_n(x)$ konvergen seragam pada $[0,\pi]$

Teorema 2.B.3 (*Uji M. Weierstrass*)

Andaikan deret fungsi

$$u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots \qquad \text{pada } E$$

$M_1 + M_2 + \ldots + M_n + \ldots$ merupakan deret dengan suku – suku positif yang konvergen dan $| u_n(x) | \leq M_n$, $\forall x \in E$

Maka deret $u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots$ konvergen seragam.

<u>Bukti :</u>

Diandaikan barisan jumlah parsial

$$S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x)$$

Maka, jika n > m dan $x \in E$

$$S_n(x) - S_m(x) = u_{m+1}(x) + \ldots + u_n(x)$$

Dan $\quad | S_n(x) - S_m(x)| \leq M_{m+1} + \ldots + M_n \quad (\text{ karena } |u_k(x)| \leq M_k)$

Diberi $\varepsilon > 0$

Karena $\sum M_n$ konvergen maka barisan jumlah parsialnya konvergen, jadi menurut barisan Cauchy maka $\exists N \in \mathbf{N}$ sehingga $\forall m, n \geq N$ berlaku

$$M_{m+1} + \ldots + M_n < \varepsilon$$

Jadi, diberi $\varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbf{N}$ sehingga $\forall m, n \geq N$ dan $\forall x \in E$ berlaku

$$| S_n(x) - S_m(x)| < \varepsilon$$

Menurut kriteria Cauchy (teorema 2.B.2), $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ konvergen seragam pada E.

Contoh 2.B.3

Diketahui deret $\frac{\sin x}{1^2} + \frac{\sin 2x}{2^2} + \frac{\sin 3x}{3^2} + \ldots + \frac{\sin nx}{n^2} + \ldots$

Berarti $M_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + .. + \frac{1}{n^2} + \ldots$ konvergen (karena merupakan deret p dengan p = 2 > 1).

Jadi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$ konvergen seragam untuk semua x.

Teorema 2.B.4

Jika $\{ f_n \}$ kontinu di x_0 pada E dan $f_n \to f$ konvergen seragam pada E maka f kontinu di x_0 pada E.

Bukti :

Dapat dituliskan :

$|f(x) - f(x_0)| \le |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)|$

Jika diberi $\varepsilon > 0$ harus dibuktikan bahwa terdapat $\delta > 0$ sehingga $\forall x \in E$,

$|x - x_0| < \delta$ berlaku $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

Karena $f_n \rightarrow f$ konvergen seragam pada E dapat dipilih $N_1 \in \mathbf{N}$ sehingga

$\forall n \ge N_1 \Rightarrow |f_{N_1}(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$, $\forall x \in E$

Karena $f_n(x_0)$ konvergen ke $f(x_0)$ maka terdapat N_2 sehingga untuk

$\forall n \ge N_2$ berlaku $|f_n(x_0) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$

Jika $N = \max(N_1, N_2)$ berlaku

$|f_N(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ dan $|f_N(x_0) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$, $\forall x \in E$

Karena f_N kontinu di x_0 maka terdapat $\delta > 0$ sehingga $\forall x \in E$, $|x - x_0| < \delta$

berlaku $|f_N(x) - f_N(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$

Jadi, untuk $|x - x_0| < \delta$ berlaku :

$$|f(x) - f(x_0)| \le |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(x_0)| + |f_N(x_0) - f(x_0)|$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

$\therefore$ f kontinu di x_0.

Akibat :

Jika f_n konvergen seragam ke f dan f_n kontinu pada E maka f kontinu pada E.

Teorema 2.B.5

Jika barisan $\{f_n\}$ kontinu pada $[a,b]$ dan konvergen seragam ke limit fungsi f pada $[a,b]$ maka $\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx$

Bukti :

Karena f_n kontinu pada $[a,b]$ maka $\int_a^b f(x)dx$ ada

Harus dibuktikan jika diberi ε > 0, terdapat N∈**N** sehingga ∀n ≥ N berlaku

$$\left|\int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx\right| < \varepsilon$$

Terdapat N sehingga ∀n ≥ N, $\forall x \in [a,b]$ berlaku

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$, karena $f_n \to f$ konvergen seragam pada $[a,b]$

Jadi
$$\left|\int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f_n(x) - f(x)|dx$$
$$< \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a}dx \quad = \varepsilon$$

$$\therefore \left|\int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx\right| < \varepsilon$$

Akibat :

Jika $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ konvergen seragam dan kontinu pada [a, b] maka

$$\int_a^b f(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n(x)dx$$

Dengan kata lain, deret di atas dapat diintegralkan suku demi suku.

Contoh 2.B.4 (1)

Diketahui $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}$

Tunjukkan bahwa $\int_0^{\pi/2} f(x)dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$

Penyelesaian :

$$\int_a^b f(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n(x)dx$$

Jadi $\int_0^{\pi/2} f(x)dx=\int_0^{\pi/2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\pi/2}\frac{\cos nx}{n^2}$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n^3}\sin nx\right]_0^{\pi/2}$$

$$=\left[\sin x+\frac{\sin 2x}{8}+\frac{\sin 3x}{27}+\frac{\sin 4x}{64}+\ldots+\frac{\sin nx}{n^3}+\ldots\right]_0^{\pi/2}$$

$$=1-\frac{1}{27}+\frac{1}{125}+\ldots+\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$$

Contoh 2.B.4 (2)

Diberikan barisan $\{ f_n \}$ dengan $f_n(x) = \dfrac{2nx}{1+n^2x^4}$ $\quad x \in [0,1]$

Jika $f_n(x) \to f(x), \forall x \in [0,1]$ tentukan $\int_0^1 f(x)dx$ dan $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 f_n^{'}(x)dx$

<u>Penyelesaian :</u>

Untuk $x = 0$ maka $f_n(0) = 0, \forall n \in N$. Jadi $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$

Untuk $0 < x \leq 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2nx}{1+n^2x^4} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2x}{\dfrac{1}{n} + nx^4} = 0$

Jadi $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$, untuk $0 \leq x \leq 1$

dan $\int_0^1 f(x)dx = 0$

$$\int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 \frac{2nx}{1+n^2x^4}dx = \int_0^1 \frac{du}{1+u^2} = \left[\tan^{-1}(nx^2)\right]_0^1$$

$$= \tan^{-1} n - \tan^{-1} 0 = \tan^{-1} n$$

$\tan^{-1} n \to \pi/2$, jadi $\int_0^1 f_n\,(x)dx \to \pi/2$,

Jadi $\int_0^1 f(x)dx \neq \lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 f_n^{'}(x)dx$

Kekonvergenan tidak seragam dari f_n dapat diselidiki dengan menggunakan teorema 2.B.2

Karena $\left| f_n\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) - 0 \right| = \sqrt{n}$, maka

$$M_n = \sup_{x\in[0,1]} remum\,|\, f_n(x) - f(x)\,| \;= \sup_{x\in[0,1]} remum\,|\, f_n(x)\,| \geq f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \sqrt{n}$$

Teorema 2.B.6

Diandaikan $\{f_n\}$ barisan fungsi yang terdiferensialkan dan konvergen titik demi titik ke fungsi f pada $[a$, b]. Jika $\{f_n'\}$ barisan fungsi kontinu dan konvergen seragam pada $[a$, b] maka $\{f_n\}$ konvergen seragam pada $[a$, b] dan $f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$, $x \in [a$, b]

Bukti :

(1) Diberi ε > 0 dan titik tetap $x_0 \in [a$, b]

Karena $\{f(x_0)\}$ konvergen maka barisan ini merupakan barisan Cauchy, sehingga dapat dipilih N sehingga ∀n ≥ N berlaku

(i) $|f_n(x_0) - f_m(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$ dan

(ii) $\left|f_n'(t) - f_m'(t)\right| \prec \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$ t∈$[a$, b] (karena konvergen seragam)

Menurut teorema nilai rata – rata hitung diferensial, untuk x, t∈$[a$, b] dan F = $f_n - f_m$ terdapat X diantara x dan t sehingga

$$F(x) - F(t) = (x - t)F'(X)$$

Jadi $\left|(f_n(x) - f_m(x)) - (f_n(t) - f_m(t))\right| = \left|(x-t)F'(X)\right|$

$= |x - t| \, |f_n'(X) - f_m'(X)|$

$\leq |x - t| \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$

$< \frac{\varepsilon}{2}$ untuk sembarang x dan t pada $[a$, b]

Dari ketaksamaan

$$|f_n(x) - f_m(x)| \le |(f_n(x) - f_m(x)) - (f_n(x_0) - f_m(x_0))| + |f_n(x_0) - f_m(x_0)|$$

yang berakibat $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$, untuk $a \le x \le b$, $n \ge N$, dan $m \ge N$. Jadi menurut kriteria Cauchy, barisan $\{f_n\}$ konvergen seragam ke $f(x)$ pada $[a, b]$.

(2) Karena f_n terdiferensialkan jadi f_n kontinu dan $f_n \to f$ konvergen seragam maka f kontinu pada $[a, b]$.

Akan dibuktikan $f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$, $x \in [a, b]$

Bukti :

Karena f_n' kontinu pada $[a, b]$ maka

$$\int_a^x f_n'(t)dt = f_n(x) - f_n(a) \text{ , } x \in [a, b]$$

Diandaikan $f_n' \to g$ konvergen seragam. Karena f_n' kontinu maka g kontinu pada $[a, b]$.

$$f_n(x + \Delta x) - f_n(x) = \int_x^{x+\Delta x} f_n'(t)dt = \Delta x . f_n'(X)$$

$$\frac{f_n'(x + \Delta x) - f_n(x)}{\Delta x} = f_n'(X)$$

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{n\to\infty} f_n'(X) = g(X)$$

Jika Δx mendekati nol, X mendekati x,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} g(X)$$

Karena g kontinu maka $\lim_{\Delta x \to 0} g(X) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$

$\therefore\ f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$

Akibat :

Jika $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ konvergen dan $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ konvergen seragam dan kontinu maka $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$

Dengan kata lain deret tersebut dapat didiferensialkan suku demi suku.

Contoh 2.B.5

Diberikan barisan $\{f_n\}$ dengan $f_n(x) = \dfrac{x}{1+nx^2}$, $x \in \mathbf{R}$

Tunjukkan bahwa barisan $\{f_n\}$ konvergen seragam ke suatu fungsi f dan bahwa persamaan $f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$ benar jika $x \neq 0$ tetapi salah jika $x = 0$

Penyelesaian :

$$f(x) = \lim_{x\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{1+nx^2} = 0\ ,\ x \in \mathbf{R}$$

dan $f_n'(x) = \dfrac{1-nx^2}{(1+nx^2)^2}$.

$f_n'(x) = 0$ untuk $\mathrm{n}x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = \dfrac{1}{n}$ atau $x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{n}}$. Dapat diberikan bahwa $\forall \mathrm{n} \in \mathrm{N}$, $f_n(x)$ mempunyai maksimum di $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ dan minimum di $-\dfrac{1}{\sqrt{n}}$

Sedangkan $f_n\left(\pm\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \pm\frac{1/\sqrt{n}}{1+1} = \pm\frac{1}{2\sqrt{n}}$, $-\frac{1}{2\sqrt{n}} \le f_n(x) \le \frac{1}{2\sqrt{n}}$ $\forall x \in \mathbf{R}$

Dengan demikian $M_n = \sup_{x\in R} remum\left|f_n(x) - f(x)\right| = \frac{1}{2\sqrt{n}}$

Bila $n \to \infty$ maka $M_n \to 0$.

$\therefore$ $f_n \to f$ konvergen seragam pada **R.**

Karena $f(x) = 0$ maka $f'(x) = 0$, untuk $\forall x \in \mathbf{R}$.

Untuk $\forall n \in \mathbf{N}$ dan $\forall x \in \mathbf{R}$ nilai dan $f_n'(x) = \frac{1-nx^2}{(1+nx^2)^2}$

$f_n'(0) = 1$, jadi $\lim_{n\to\infty} f_n'(0) = 1 \ne f'(0)$

$\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = 0$, untuk $x \ne 0$.

Jadi $f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$, untuk $x \ne 0$.

$\therefore$ $f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$, $x \in \mathbf{R} - \{0\}$

Catatan :

Akan diselidiki apakah $\{f_n'\}$ konvergen seragam pada $\mathbf{R} - \{0\}$

Diambil $\varepsilon > 0$ yakni $\varepsilon = \frac{1}{25}$, dan N sembarang bilangan bulat positif, maka

dapat dicari n = N dan $x = \frac{2}{\sqrt{n}}$ $\in \mathbf{R} - \{0\}$ sehingga

$$\left|f_N'\left(\frac{2}{\sqrt{n}}\right) - f'\left(\frac{2}{\sqrt{n}}\right)\right| = \left|f_N'\left(\frac{2}{\sqrt{n}}\right) - 0\right| = \left|f_N'\left(\frac{2}{\sqrt{n}}\right)\right| = \frac{3}{25} > \varepsilon$$

Jadi f_n' tidak konvergen seragam pada $\mathbf{R} - \{0\}$

Jadi, untuk $\varepsilon = \dfrac{1}{25}$ dan sembarang N∈N, dapat dicari n ≥ N yakni n = N dan

$x \in \mathbf{R} - \{0\}$ yakni $x = \dfrac{2}{\sqrt{N}}$ sehingga

$$\left| f_N'\left(\frac{2}{\sqrt{N}}\right) - f'\left(\frac{2}{\sqrt{N}}\right) \right| = \left| \frac{3}{25} - 0 \right| = \frac{3}{25} > \varepsilon = \frac{1}{25}$$

$\therefore$ barisan $\{f_n'\}$ tidak konvergen seragam pada $\mathbf{R} - \{0\}$.

Jadi hipotesis dalam teorema 2.B.6 tidak dipenuhi yakni $\{f_n'\}$ tidak konvergen seragam pada $\mathbf{R} - \{0\}$tetapi konklusi yakni $f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$, $x \in \mathbf{R} - \{0\}$ benar.

Dengan demikian, hipotesis dalam teorema 2.B.6 adalah cukup tetapi tidak perlu.

DERET PANGKAT

Definisi 2.C.1

Deret pangkat dalam x adalah $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, dengan a_n koefisien deret.

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ dinamakan deret pangkat dalam $(x - x_0)$

Teorema 2.C.1

Pada deret pangkat $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ tepat satu diantara pernyataan – pernyataan berikut yang berlaku :

(1) Deret konvergen hanya untuk $x = 0$.

(2) Deret konvergen mutlak untuk semua nilai x.

(3) Terdapat suatu R > 0 sehingga deret konvergen mutlak untuk semua nilai x dengan $|x| < R$ dan divergen untuk semua nilai x dengan $|x| > R$.

<u>Bukti :</u>

(1) Jika nol satu – satunya nilai x yang menyebabkan deret konvergen, maka (1) berlaku. Dengan kata lain, (1) terjadi bila dan hanya bila $x = 0$. Kita katakan R radius konvergensi, dimana R = 0 dan interval konvergensinya tidak ada.

(2) Andaikan deret yang diketahui konvergen untuk $x = x_1$ ($x_1 \neq 0$), maka deret konvergen mutlak untuk $|x| < |x_1|$

Jadi, jika tidak ada nilai x yang menyebabkan deret divergen, maka deret konvergen mutlak untuk semua x. Jadi, deret konvergen di $|x| < \infty$. Dalam hal ini interval konvergensi deret adalah di sepanjang sumbu x dengan radius konvergensi R = ∞.

(3) Diandaikan deret konvergen di x_1 $(x_1 \neq 0)$ maka deret konvergen mutlak untuk $|x| < |x_1|$ dan jika deret divergen di x_2 maka deret divergen untuk $|x| > |x_2|$.

Jadi, jika terdapat $x_1 < x_2$ sehingga deret konvergen di x_1 dan divergen di x_2 maka terdapat R diantara x_1 dan x_2 sehingga deret konvergen untuk $-R < x < R$ dan divergen untuk $|x| > R$

Deret dapat konvergen atau divergen di $x = \pm$ R. Perlu pemeriksaan khusus pada ujung-ujung interval konvergensi, yaitu di x = -R atau x = R apakah deret konvergen atau divergen.

Teorema 2.C.2

Radius konvergensi deret $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ adalah

$$R = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

asalkan limitnya ada atau bernilai +∞.

Contoh 2.C.1

Tentukan radius konvergensi deret $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} x^n$

Penyelesaian :

Diketahui $a_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$ maka $a_{n+1} = \frac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2}$

$$R = \lim_{n \leftarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{(2n)!((n+1)!)^2}{(n!)^2 (2n+2)!} \right|$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left| \frac{(2n)!(n+1)!(n+1)!}{n!n!(2n+2)!} \right|$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left| \frac{(n+1)(n+1)}{(2n+2)(2n+1)} \right|$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left| \frac{(n+1)(n+1)}{2(n+1)(2n+1)} \right| = \frac{1}{2} \lim_{n \to \infty} \left| \frac{n+1}{2n+1} \right| = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$\therefore R = \frac{1}{4}$$

Teorema 2.C.3

Andai deret pangkat $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konvergen dalam $|x| < R$, $R > 0$ dan $0 < r < R$

maka deret konvergen seragam pada $-r \le x \le r$.

Bukti :

Deret $\sum |a_n| r^n$ konvergen (karena deret pangkat konvergen mutlak di $x = r$).

$\forall x \in [-r, r]$, $|a_n x^n| \le |a_n| r^n$.

Didefinisikan $M_n = |a_n| r^n$ sehingga $|a_n x^n| \le M_n$, $\forall x \in [-r,r]$

Menurut uji M. Weierstrass $a_n x^n$ konvergen seragam.

$\therefore \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konvergen seragam pada [-r, r]

Teorema 2.C.4

Jika $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ dan $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ konvergen untuk $|x| < R$, maka kedua deret pangkat tersebut mempunyai radius konvergensi yang sama.

Bukti :

(1) Terlebih dahulu akan dibuktikan deret pangkat $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ konvergen mutlak. Andaikan $|x| < R$, dapat dipilih x_1 sedemikian sehingga $|x| < |x_1| < R$, akibatnya deret $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konvergen di $x = x_1$ sehingga $\lim_{n\to\infty} a_n x_1^n = 0$. Dipilih bilangan real M > 0 sedemikian sehingga $|a_n x_1^n| \le M$, untuk setiap n $\in$ **N**. Diperoleh,

$$n a_n x^{n-1} = \frac{n}{x_1} a_n x_1^n \left(\frac{x}{x_1}\right)^{n-1}$$

$$\left|n a_n x^{n-1}\right| \le \frac{M}{|x_1|} n \left|\frac{x}{x_1}\right|^{n-1}$$

Karena $\lim_{n\to\infty}\left|(n+1)\frac{|x|^n}{|x_1|^n}\cdot\frac{|x_1|^{n-1}}{n|x|^{n-1}}\right| = \left|\frac{x}{x_1}\right| \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = \left|\frac{x}{x_1}\right| < 1$

Maka deret pangkat $\sum_{n=1}^{\infty} n\left|\frac{x}{x_1}\right|^{n-1}$ konvergen, akibatnya deret $\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1}$ konvergen mutlak.

(2) Diandaikan radius konvergensi deret $\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1}$ adalah R_1, akan ditunjukkan $R_1 = R$.

Karena deret berlaku untuk $| x | < R$, maka $R_1 \geq R$. Akan ditunjukkan $R_1 \leq R$ juga benar.

Andaikan $R_1 > R$ dan dipilih x_2 sehingga $R < | x_2 | < R_1$ maka deret $\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1}$ konvergen mutlak dan deret $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_2{}^n$ divergen. Diperoleh

$$\left|a_n x_2{}^n\right| = \left|na_n x_2{}^{n-1}\right|\left|\frac{x_2}{n}\right|$$

$$< \left|na_n x_2{}^{n-1}\right|$$

Akibatnya deret $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_2{}^n$ harus konvergen (kontradiksi dengan kenyataan bahwa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_2{}^n$ divergen) Jadi haruslah $R_1 \leq R$, yang menghasilkan $R_1 = R$.

Terbukti bahwa radius konvergensi deret $\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1}$ juga adalah R.

Andaikan kita bermaksud mendekati fungsi f dengan polinomial

$$P(x) = c_0 + c_1 x + \ldots + c_n x^n \tag{2.1}$$

Fungsi $P(x)$ mempunyai sifat kontinu dan berturunan dimana-mana untuk semua x. Diandaikan pula $f(x)$ fungsi kontinu dan berturunan n kali di sekitar $x = 0$. Jika $P(x)$ mendekati $f(x)$ di sekitar $x = 0$ maka keduanya harus mempunyai sifat yang sama di sekitar $x = 0$, yaitu

$P(0) = f(0)$, $P'(0) = f'(0)$, $P'''(0) = f'''(0), \ldots$, $P^{(n)}(0) = f^{(n)}(0)$.

Karena

$$P(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n$$

$$P'(x) = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + \ldots + nc_n x^{n-1}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$P^{(n)}(x) = n(n-1)(n-2)\ldots 1\, c_n = n!c_n$$

Sehingga diperoleh

$P(0) = c_0$ $\qquad f(0) = c_0$

$P'(0) = c_1$ $\qquad f'(0) = c_1$

$P''(0) = 2c_2$ $\qquad f''(0) = 2!c_2$

$P'''(0) = 3.2c_3$ $\qquad f'''(0) = 3!c_3$

$\ldots$ $\qquad \ldots$

$P^{(n)}(0) = n!c_n$ $\qquad f^{(n)}(0) = n!c_n$

Jadi (2.1) dapat ditulis dalam bentuk

$$P(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

atau $f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$

Dengan cara yang sama, untuk mendekati fungsi di sekitar $x = a$ digunakan

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Definisi 2.C.2

Jika $f(x)$ berturunan pada semua tingkat di $x = a$, didefinisikan deret Taylor untuk fungsi $f(x)$ di sekitar titik $x = a$ adalah

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Definisi 2.C.3

Jika $f(x)$ berturunan pada semua tingkat di $x = 0$, didefinisikan deret Maclaurin untuk fungsi $f(x)$ adalah $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$

Definisi 2.C.4.

Fungsi $f(x)$ dikatakan analitik di x_0 jika fungsi ini dapat dinyatakan dalam ekspansi deret Taylor disekitar titik $x = x_0$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

Beberapa deret Maclaurin yang sering dipakai diberikan dalam tabel berikut :

Deret Maclaurin	Interval Konvergensi
1. $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + ...$	$-\infty < x < \infty$
2. $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + ...$	$-\infty < x < \infty$
3. $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + ...$	$-\infty < x < \infty$
4. $\ln(x+1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} = x - \frac{x^2}{2} + ... + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} + ...$	$-1 < x \leq 1$
5. $tg^{-1}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + ... + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + ...$	$-1 \leq x \leq 1$
6. $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + ... + x^n + ...$	$-1 < x < 1$
7. $\sinh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + ...$	$-\infty < x < \infty$
8. $\cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + ...$	$-\infty < x < \infty$

BAB III

PENYELESAIAN PERSAMAAN DIFERENSIAL DENGAN METODE DERET PANGKAT

Diperhatikan suatu persamaan diferensial linear homogen orde dua dengan koefisien variabel dari bentuk

$$a_2(x)y''+a_1(x)y'+a_0(x)y=0 \tag{3.1}$$

dengan $a_2(x), a_1(x)$ dan $a_0(x)$ fungsi analitik dalam interval $|x - x_0| < R$ dan $a_2(x) \neq 0$. Persamaan diferensial (3.1) dapat dituliskan dalam bentuk

$$y''+\frac{a_1(x)}{a_2(x)}y'+\frac{a_0(x)}{a_2(x)}y=0.$$

Atau jika $P_1(x)=\dfrac{a_1(x)}{a_2(x)}$ dan $P_2(x)=\dfrac{a_0(x)}{a_2(x)}$ maka persamaan diferensial berbentuk $y''+P_1(x)y'+P_2(x)y=0$, yang merupakan bentuk baku persamaan diferensial (3.1)

Kita akan mencari deret sebagai penyelesaian persamaan diferensial (3.1) dalam pangkat dari ($x - x_0$), dimana x_0 bilangan real. Akan kita lihat bahwa bentuk penyelesaian akan sangat tergantung pada macam titik x_0 terhadap persamaan diferensial tersebut. Sebuah titik x_0 dapat merupakan titik biasa atau titik singular.

Pada kesempatan ini akan dibahas deret sebagai penyelesaian di sekitar titik biasa dan titik singular regular.

A. Titik Biasa dan Titik Singular

Definisi 3.A.1

Sebuah titik x_0 disebut titik biasa dari persamaan diferensial (3.1) jika kedua fungsi $\dfrac{a_1(x)}{a_2(x)}$ dan $\dfrac{a_0(x)}{a_2(x)}$ analitik di titik x_0. Jika paling sedikit satu diantara kedua fungsi di atas tidak analitik di titik x_0, maka x_0 disebut titik singular.

Definisi 3.A.2

Sebuah titik x_0 disebut titik singular regular dari persamaan diferensial (3.1) jika titik ini adalah sebuah titik singular dan kedua fungsi

$$(x-x_0)\frac{a_1(x)}{a_2(x)} \quad \text{dan} \quad (x-x_0)^2\frac{a_0(x)}{a_2(x)} \qquad (3.2)$$

analitik di titik x_0. Jika paling sedikit satu fungsi dalam (3.2) tidak analitik di titik x_0, maka x_0 disebut titik singular tak regular.

Contoh 3.A.1

Tentukan titik-titik biasa, titik-titik singular, dan titik-titik singular tak regular dari persamaan diferensial

$$(x^4 - x^2)y'' + (2x + 1)y' + x^2(x + 1)y = 0$$

Penyelesaian :

Dari persamaan diferensial diketahui bahwa $a_2(x) = x^4 - x^2$, $a_1(x) = 2x+1$ dan $a_0(x) = x^2(x+1)$.

Dengan demikian , $\dfrac{a_1(x)}{a_2(x)} = \dfrac{2x+1}{x^4 - x^2} = \dfrac{2x+1}{x^2(x^2-1)}$

dan $\dfrac{a_0(x)}{a_2(x)} = \dfrac{x^2(x+1)}{x^4 - x^2} = \dfrac{1}{x-1}$. Terlihat bahwa setiap bilangan real kecuali 0, 1, dan -1 adalah titik biasa dari persamaan diferensial yang diketahui.

Untuk mengetahui jenis dari titik singular, kita gunakan definisi (3.A.2)

- Untuk $x_0 = 0$, kedua fungsi menjadi

  $$x\frac{2x+1}{x^4-x^2} = \frac{2x+1}{x(x-1)(x+1)} \quad \text{dan} \quad x^2\frac{x^2(x+1)}{x^4-x^2} = \frac{x^2}{x-1}$$

  sehingga $x_0 = 0$ merupakan titik singular. Akan tetapi fungsi $x\dfrac{2x+1}{x^4-x^2} = \dfrac{2x+1}{x(x-1)(x+1)}$ tidak analitik di $x_0 = 0$. Jadi titik $x_0 = 0$ adalah sebuah titik singular tak regular.

- Untuk $x_0 = 1$, kedua fungsi menjadi

  $$(x-1)\frac{2x+1}{x^4-x^2} = \frac{2x+1}{x^2(x+1)} \quad \text{dan} \quad (x-1)^2\frac{x^2(x+1)}{x^4-x^2} = x-1$$

  yang analitik di $x_0 = 1$. Jadi $x_0 = 1$ adalah titik singular regular.

- Dan juga serperti halnya titik $x_0 = 1$, titik $x_0 = -1$ juga merupakan sebuah titik singular regular.

B. Penyelesaian Persamaan Diferensial Di Sekitar Titik Biasa

1. Persamaan Diferensial Linear Dengan Koefisien Variabel

   Berikut ini merupakan teorema mendasar dari solusi deret pangkat di sekitar titik biasa.

   Teorema 3.B.1

   Jika x_0 adalah sebuah titik biasa dari persamaan diferensial

   $a_2(x)y''+a_1(x)y'+a_0(x)y=0$

   maka penyelesaian umum persamaan diferensial itu merupakan suatu ekspansi deret pangkat di sekitar x_0, yaitu $y=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ dan konvergen dalam $|x-x_0|<R$, $R>0$.

   Bukti :

   Diasumsikan $x_0=0$ sebagai titik biasa.

   Bentuk baku persamaan diferensial $y''+P_1(x)y'+P_2(x)y=0$, $P_1(x)$ dan $P_2(x)$ fungsi analitik.

   Diandaikan $P_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$, $P_2(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$, dan $y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ untuk $|x|<R$

   Maka

   $$y'=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$$

   $$y''=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n$$

$$P_1(x)y' = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1}x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{n}(k+1)a_{k+1}b_{n-k}\right]x^n$$

$$P_2(x)y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{n} a_k c_{n-k}\right]x^n$$

Disubstitusikan ke persamaan $y'' + P_1(x)y' + P_2(x)y = 0$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + \sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{n}(k+1)a_{k+1}b_{n-k}\right]x^n + \sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{n}a_k c_{n-k}\right]x^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+2)(n+1)a_{n+2} + \sum_{k=0}^{n}(k+1)a_{k+1}b_{n-k} + \sum_{k=0}^{n}a_k c_{n-k}\right]x^n = 0$$

Berdasarkan sifat kesamaan dua deret pangkat diperoleh :

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} + \sum_{k=0}^{n}(k+1)a_{k+1}b_{n-k} + \sum_{k=0}^{n}a_k c_{n-k} = 0$$

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} + \sum_{k=0}^{n}\left[(k+1)a_{k+1}b_{n-k} + a_k c_{n-k}\right] = 0$$

Jadi $a_{n+2} = -\dfrac{1}{(n+2)(n+1)}\left[\sum_{k=0}^{n}\left((k+1)a_{k+1}b_{n-k} + a_k c_{n-k}\right)\right] \quad n \geq 0$

Relasi di atas disederhanakan menjadi

$$a_n = -\frac{1}{n(n-1)}\left[\sum_{k=0}^{n-2}\left((k+1)a_{k+1}b_{n-k-2} + a_k c_{n-k-2}\right)\right] \quad n \geq 2 \qquad (3.3)$$

Selanjutnya relasi (3.3) disebut rumus rekursif.

Dari relasi ini, nilai dari koefisien – koefisien $a_2, a_3, \ldots\ a_n, \ldots$ dapat ditentukan sebagai kombinasi linear dari a_0 dan a_1 yang merupakan konstanta sembarang.

Jadi $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ merupakan penyelesaian umum persamaan diferensial $a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$ di sekitar titik biasa $x_0 = 0$.

Sekarang akan ditunjukkan deret konvergen untuk $|\ x\ | < R$

Diketahui $P_1(x)$ dan $P_2(x)$ konvergen untuk $|\ x\ | < R$, sehingga untuk sembarang $|\ x\ | = R_0 < R$ ada $M > 0$ sedemikian sehimgga

$$|b_j| R_0^{\ j} \le M \ \text{ dan } \ |c_j| R_0^{\ j} \le M \ , j \ge 0 \qquad (3.4)$$

Disubstitusikankan (3.4) ke (3.3) sehingga diperoleh :

$$|a_n| \le \frac{M}{n(n-1)} \left[\sum_{k=0}^{n-2} \left(\frac{(k+1)|a_{k+1}|}{R_0^{\ n-k-2}} + \frac{|a_k|}{R_0^{\ n-k-2}} \right) \right] + \frac{M|a_{n-1}|R_0}{n(n-1)} \qquad (3.5)$$

Didefinisikan konstanta positif A_n dengan $A_0 = |a_0|$ dan $A_1 = |a_1|$,

$$A_n = \frac{M}{n(n-1)} \left[\sum_{k=0}^{n-2} \left(\frac{(k+1)A_{k+1}}{R_0^{\ n-k-2}} + \frac{A_k}{R_0^{\ n-k-2}} \right) \right] + \frac{MA_{n-1}R_0}{n(n-1)} \quad ,n \ge 2 \qquad (3.6)$$

Dari (3.5) dan (3.6) jelas bahwa $|a_n| \le A_n$, $n \ge 0$.

Diganti n dengan (n+1) pada (3.6) sehingga diperoleh

$$A_{n+1} = \frac{M}{n(n+1)} \left[\sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{(k+1)A_{k+1}}{R_0^{\ n-k-1}} + \frac{A_k}{R_0^{\ n-k-1}} \right) \right] + \frac{MA_n R_0}{n(n+1)}$$

Jika kedua ruas dikalikan R_0 diperoleh :

$$R_0 A_{n+1} = \frac{MR_0}{n(n+1)} \left[\sum_{k=0}^{n-2} \left(\frac{(k+1)A_{k+1} + A_k}{R_0^{\ n-k-1}} \right) \right] + \frac{M\ R_0}{n(n+1)} (nA_n + A_{n-1}) + \frac{MA_n R_0^{\ 2}}{n(n+1)}$$

……………… (3.7)

Dari (3.6) dan (3.7) diperoleh :

$$R_0 A_{n+1} = \frac{M}{n(n+1)}\left[\frac{n(n-1)A_n}{M} - R_0 A_{n-1}\right] + \frac{MR_0}{n(n+1)}\left(nA_n + A_{n-1}\right) + \frac{MA_n R_0^{\ 2}}{n(n+1)}$$

$$R_0 A_{n+1} = \frac{(n-1)A_n}{(n+1)} + \frac{nMA_n R_0}{n(n+1)} + \frac{MA_n R_0^{\ 2}}{n(n+1)}$$

$$R_0 A_{n+1} = A_n\left[\frac{n(n-1) + nMR_0 + MR_0^{\ 2}}{n(n+1)}\right]$$

$$A_{n+1} = A_n\left[\frac{n(n-1) + nMR_0 + MR_0^{\ 2}}{n(n+1)R_0}\right]$$

$$\frac{A_{n+1}}{A_n} = \frac{n(n-1) + nMR_0 + MR_0^{\ 2}}{n(n+1)R_0}$$ sehingga diperoleh

$$\left|\frac{A_{n+1}x^{n+1}}{A_n x^n}\right| = \frac{n(n-1) + nMR_0 + MR_0^{\ 2}}{n(n+1)R_0}|x|$$

dan $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{A_{n+1}x^{n+1}}{A_n x^n}\right| = \frac{|x|}{R_0}$

Dengan uji rasio, deret $\sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n$ konvergen untuk $|\ x\ | < R_0$ dan dengan uji banding, deret $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konvergen mutlak untuk $|\ x\ | < R_0$.

Karena R_0 sembarang konstanta dalam $0 < R_0 < R$, maka deret pangkat $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konvergen mutlak untuk $|\ x\ | < R$.

Contoh 3.B.1.

Tentukan solusi dalam deret pangkat dari persamaan diferensial

y'' + xy' + (1 – x)y = 0 di sekitar titik biasa $x_0 = 0$

Penyelesaian :

Diandaikan solusi berbentuk $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, maka $y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ dan

$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$. Disubstitusikan y, y', dan y'' ke persamaan

diferensial yang diketahui :

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + x\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = 0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=3}^{\infty} (n-2)a_{n-2} x^{n-2} + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^{n-2} - \sum_{n=3}^{\infty} a_{n-3} x^{n-2} = 0$$

$$2a_2 + a_0 + \sum_{n=3}^{\infty} \left[n(n-1)a_n + (n-1)a_{n-2} - a_{n-3} \right] x^{n-2} = 0$$

Berdasarkan sifat kesamaan dua deret pangkat diperoleh :

$$(2a_2 + a_0) + \left[n(n-1)a_n + (n-1)a_{n-2} - a_{n-3} \right] = 0$$

$$2a_2 + a_0 = 0, \text{ maka } a_2 = -\frac{a_0}{2}$$

dan untuk n ≥ 3 diperoleh

$$\left[n(n-1)a_n + (n-1)a_{n-2} - a_{n-3} \right] = 0$$

$$a_n = \frac{a_{n-3}}{n(n-1)} - \frac{a_{n-2}}{n}$$

Jadi $a_3 = \dfrac{a_0}{6} - \dfrac{a_1}{3}$

$$a_4 = \frac{a_1}{12} + \frac{a_0}{8}$$

$$a_5 = \frac{a_1}{15} - \frac{7a_0}{120}$$

...

Sulit untuk dicari rumus umum suku ke-n. Jadi penyelesaian umum dari beberapa suku deret berbentuk :

$$= a_0 + a_1 x - \frac{a_0}{2}x^2 + \left(\frac{a_0}{63} - \frac{a_1}{3}\right)x^3 + \left(\frac{a_1}{12} + \frac{a_0}{8}\right)x^4 + \ldots$$

$$= a_0\left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{8}x^4 + \ldots\right) + a_1\left(x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{12}x^4 + \ldots\right)$$

Contoh 3.B.2

Selesaikan persamaan diferensial $(1 - x^2)y'' - 6xy' - 4y = 0$ di sekitar titik biasa $x_0 = 0$.

Penyelesaian :

Dengan cara yang sama pada contoh sebelumnya, kita peroleh

$$(1-x^2)\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - 6\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^n - 4\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^n - 6\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^n - 4\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - \sum_{n=4}^{\infty}(n-2)(n-3)a_{n-2}x^{n-2} - 6\sum_{n=3}^{\infty}(n-2)a_{n-2}x^{n-2}$$

$$-4\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}x^{n-2} = 0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left[n(n-1)a_n - 4a_{n-2}\right]x^{n-2} - 6\sum_{n=3}^{\infty}(n-2)a_{n-2}x^{n-2} - \sum_{n=4}^{\infty}(n-2)(n-3)a_{n-2}x^{n-2} = 0$$

Berdasarkan sifat kesamaan deret pangkat diperoleh :

$$a_n = \frac{n+2}{n}a_{n-2} \qquad n \geq 2 \qquad \text{dengan } a_0 \text{ dan } a_1 \text{ konstan.}$$

Berturut – turut diperoleh

$$a_2 = \frac{4}{2}a_0, a_4 = \frac{6}{4}a_2, a_6 = \frac{8}{6}a_4, \ldots, a_{2k} = \frac{2k+2}{2k}a_{2k-2} \qquad k \geq 1$$

Jika $a_2, a_4, a_6, \ldots, a_{2k}$ dikalikan maka diperoleh

$$a_2a_4a_6\ldots a_{2k} = \frac{4.6.8\ldots 2(k+1)a_0a_2a_4\ldots a_{2k-2}}{2.4.6\ldots 2k}$$

$$a_{2k} = (k+1)a_0 \qquad k \geq 1$$

sehingga $a_2 = 2a_0, a_4 = 3a_0, a_6 = 4a_0, \ldots$

Demikian pula jika kita mengalikan $a_3, a_5, a_7, \ldots, a_{2k+1}$ maka diperoleh

$$a_3a_5a_7\ldots a_{2k+1} = \frac{5.7.9\ldots(2k+3)a_1a_3a_5\ldots a_{2k-1}}{3.5.7\ldots(2k+1)}$$

$$a_{2k+1} = \frac{(2k+3)a_1}{3} \qquad k \geq 1$$

sehingga $a_3 = \frac{5}{3}a_1, a_5 = \frac{7}{3}a_1, a_7 = \frac{9}{3}a_1, \ldots$

Jadi penyelesaian persamaan diferensial $(1 - x^2)y'' - 6xy' - 4y = 0$ di sekitar titik biasa $x_0 = 0$ berbentuk

$$y = a_0\left[1+\sum_{k=1}^{\infty}(k+1)x^{2k}\right]+a_1\left[x+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2k+3}{3}x^{2k+1}\right]$$

Contoh 3.B.3

Selesaikan persamaan diferensial $(x - 1)y'' - xy' + y = 0$ di sekitar titik biasa $x_0 = 0$.

Penyelesaian :

Karena $x_0 = 0$ merupakan titik biasa maka asumsi solusi berbentuk $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Dengan langkah yang sama diperoleh :

$$(x-1)\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_n x^{n-2} - \sum_{n=1}^{\infty}na_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_n x^{n-1} - \sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_n x^{n-2} - \sum_{n=1}^{\infty}na_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n = 0$$

Dengan menyamakan kedalam pangkat x^n,

$$\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)a_{n+1}x^n - \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - \sum_{n=1}^{\infty}na_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n = 0$$

$$(a_0 - 2a_2) + \sum_{n=1}^{\infty}\left[n(n+1)a_{n+1} - (n+2)(n+1)a_{n+2} + (1-n)a_n\right]x^n = 0$$

Berdasarkan sifat kesamaan deret pangkat diperoleh :

$$a_2 = \frac{a_0}{2} \text{ dan } a_{n+2} = \frac{n(n+1)a_{n+1} + (1-n)a_n}{(n+2)(n+1)} \quad , \ n \geq 1$$

sehingga $a_3 = \frac{a_0}{3!}, a_4 = \frac{a_0}{4!}, a_5 = \frac{a_0}{5!}, \ldots$

dan dapat dibuktikan $a_{k+1} = \frac{a_0}{(k+1)!}$ $\quad$ $k \geq 1$

Jadi penyelesaian persamaan diferensial $(x - 1)y'' - xy' + y = 0$ di sekitar titik biasa $x_0 = 0$ berbentuk

$$y = a_0\left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!} x^{k+2}\right] + a_1 x$$

Contoh 3.B.4.

Selesaikan persamaan diferensial $(1-x^2)y''-2xy'+2y=0$ di sekitar titik biasa $x_0 = 0$

Penyelesaian :

Karena $x_0 = 0$ merupakan titik biasa maka asumsi solusi berbentuk $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Disubstitusikan y dan turunan – turunannya ke persamaan diferensial yang diketahui :

$$(1-x^2)\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - 2x\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

Dengan melakukan penyederhanaan diperoleh :

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - \sum_{n=4}^{\infty}(n-2)(n-3)a_{n-2}x^{n-2} - 2\sum_{n=3}^{\infty}(n-2)a_{n-2}x^{n-2} + 2\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}x^{n-2} = 0$$

Untuk n = 2, bentuk deret menjadi :

$$(2a_2 + 2a_0) + \sum_{n=3}^{\infty}\left[n(n-1)a_n - 2(n-2)a_{n-2} + 2a_{n-2}\right]x^{n-2} - \sum_{n=4}^{\infty}(n-2)(n-3)a_{n-2}x^{n-2} = 0$$

sehingga $2a_2 + 2a_0 = 0$, jadi $a_2 = -a_0$

Untuk n =3, bentuk deret menjadi :

$$6a_3 + \sum_{n=4}^{\infty}\left[n(n-1)a_n - 2(n-2)a_{n-2} + 2a_{n-2} - (n-2)(n-3)a_{n-2}\right]x^{n-2} = 0$$

Berdasarkan sifat kesamaan dua deret pangkat diperoleh $6a_3 = 0$, $a_3 = 0$

dan untuk n ≥ 4 diperoleh rumus rekursif $a_n = \dfrac{(n-3)}{(n-1)}a_{n-2}$

Dari rumus rekursif tersebut dapat dicari koefisien – koefisien yang lain,

seperti $a_4 = -\dfrac{a_0}{3}, a_6 = -\dfrac{a_0}{5}, a_8 = -\dfrac{a_0}{7}, \ldots$

dan dapat dibuktikan $a_{2k} = -\dfrac{a_0}{(2k-1)}$ $\qquad$ k ≥ 2

Karena $a_3 = 0$ maka pastilah $a_5 = a_7 = \ldots = 0$

Jadi penyelesaian persamaan diferensial $(1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$ di sekitar titik biasa $x_0 = 0$ dapat ditulis dalam bentuk

$$y = a_1x + a_0\left(1 - x^2 - \frac{x^4}{3} - \frac{x^6}{5} - \frac{x^8}{7} - \ldots\right)$$

$$= a_1x + a_0\left[1 - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k-1}x^{2k}\right]$$

2. Persamaan Diferensial Linear Dengan Koefisien Konstan

Bentuk umum persamaan diferensial linear dengan koefisien konstan adalah $b_n y^{(n)} + b_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + b_1 y' + b_0 y = f(x)$, dengan $b_n \neq 0$, b_0 , b_1 , … , b_n adalah konstanta – konstanta real atau imaginer.

Karena persamaan diferensial linear dengan koefisien konstan tidak memiliki titik singular, maka menurut teorema (3.B.1) persamaan diferensial tersebut mempunyai penyelesaian berupa ekspansi deret pangkat di sekitar titik x_0.

Pada pembahasan ini akan dipusatkan penyelesaian deret pangkat di sekitar titik awal, yaitu titik $x_0 = 0$.

Contoh 4.B.5.

Selesaikan persamaan diferensial y’’ + y = e^{-x}

Penyelesaian :

Diasumsikan solusi berbentuk $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ yang konvergen untuk semua x. y’’ dan y disubstitusikan ke persamaan diferensial yang diketahui :

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} \left[a_n - \frac{(-1)^n}{n!} \right] x^n = 0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left[n(n-1)a_n + a_{n-2} - \frac{(-1)^{n-2}}{(n-2)!} \right] x^{n-2} = 0$$

$$\Leftrightarrow n(n-1)a_n + a_{n-2} - \frac{(-1)^{n-2}}{(n-2)!} = 0$$

$$\Leftrightarrow a_n = \frac{(-1)^{n-2}}{n!} - \frac{a_{n-2}}{n(n-1)}$$ $n \geq 2$, dengan a_0 dan a_1 konstan, diperoleh

$a_2 = \frac{1}{2!} - \frac{a_0}{2!}$ $\qquad$ $a_3 = -\frac{1}{3!} - \frac{a_1}{3!}$

$a_6 = \frac{1}{6!} - \frac{a_0}{6!}$ $\qquad$ $a_7 = -\frac{1}{7!} - \frac{a_1}{7!}$

$a_{10} = \frac{1}{10!} - \frac{a_0}{10!}$ $\qquad$ $a_{11} = -\frac{1}{11!} - \frac{a_1}{11!}$

... $\qquad$ ...

$a_4 = \frac{a_0}{4!}, a_8 = \frac{a_0}{8!}, a_{12} = \frac{a_0}{12!}, \ldots$ dan $a_5 = \frac{a_1}{5!}, a_9 = \frac{a_1}{9!}, a_{13} = \frac{a_1}{13!}, \ldots$

Dengan induksi matematik dapat dibuktikan rumus – rumus berikut :

1) $a_{4n-2} = \frac{1}{(4n-2)!} - \frac{a_0}{(4n-2)!}$ $\qquad$ $n \geq 1$

2) $a_{4n-1} = -\frac{1}{(4n-1)!} - \frac{a_1}{(4n-1)!}$ $\qquad$ $n \geq 1$

3) $a_{4n} = \frac{a_0}{(4n)!}$ $\qquad$ $n \geq 1$

4) $a_{4n+1} = \frac{a_1}{(4n+1)!}$ $\qquad$ $n \geq 1$

untuk semua n bilangan bulat positif.

1) $a_{4n-2} = \frac{1}{(4n-2)!} - \frac{a_0}{(4n-2)!}$

- Dapat dibuktikan rumus benar untuk n = 1

$$a_2 = \frac{1}{2!} - \frac{a_0}{2!}$$

- Diasumsikan rumus benar untuk n = k

$$a_{4k-2} = \frac{1}{(4k-2)!} - \frac{a_0}{(4k-2)!}$$

Berdasarkan asumsi tersebut, dibuktikan rumus benar untuk n = k + 1, yaitu $a_{4k+2} = \frac{1}{(4k+2)!} - \frac{a_0}{(4k+2)!}$

$$a_{4(k+1)-2} = \frac{(-1)^{k+1-2}}{(k+1)!} - \frac{a_{k+1-2}}{(k+1)k}$$

$$a_{4k+2} = \frac{(-1)^{k-1}}{(k+1)!} - \frac{a_{k-1}}{k(k+1)}$$

$$= \frac{(-1)^{4k}}{(4k+2)!} - \frac{a_{4k}}{(4k+1)(4k+2)} = \frac{1}{(4k+2)} - \frac{a_0}{(4k)!(4k+1)(4k+2)}$$

$$a_{4k-2} = \frac{1}{(4k-2)!} - \frac{a_0}{(4k-2)!}$$

2) $a_{4n-1} = -\frac{1}{(4n-1)!} - \frac{a_1}{(4n-1)!}$

- Dapat dibuktikan rumus benar untuk n = 1

$$a_3 = -\frac{1}{3!} - \frac{a_1}{3!}$$

- Diasumsikan rumus benar untuk n = k

$$a_{4k-1} = -\frac{1}{(4k-1)!} - \frac{a_1}{(4k-1)!}$$

Berdasarkan asumsi tersebut, dibuktikan rumus benar untuk

n = k + 1, yaitu $a_{4k+3} = -\frac{1}{(4k+3)!} - \frac{a_1}{(4k+3)!}$

$$a_{4k+3} = \frac{(-1)^{k-1}}{(k+1)!} - \frac{a_{k-1}}{k(k+1)}$$

$$= \frac{(-1)^{4k+1}}{(4k+3)!} - \frac{a_{4k+1}}{(4k+2)(4k+3)}$$

$$= -\frac{1}{(4k+3)!} - \frac{a_1}{(4k+1)!(4k+2)(4k+3)}$$

$$a_{4k+3} = -\frac{1}{(4k+3)!} - \frac{a_1}{(4k+3)!}$$

3) $a_{4n} = \frac{a_0}{(4n)!}$

- Dapat dibuktikan rumus benar untuk n = 1

$$a_4 = \frac{a_0}{4!}$$

- Diasumsikan rumus benar untuk n = k

$$a_{4k} = \frac{a_0}{(4k)!}$$

Berdasarkan asumsi tersebut, dibuktikan rumus benar untuk

n = k + 1, yaitu $a_{4k+4} = \frac{a_0}{(4k+4)!}$

$$a_{4k+4} = \frac{(-1)^{k-1}}{(k+1)!} - \frac{a_{k-1}}{k(k+1)}$$

$$= \frac{(-1)^{4k+2}}{(4k+4)!} - \frac{a_{4k+2}}{(4k+3)(4k+4)}$$

$$= -\frac{1}{(4k+4)!} - \left(\frac{1}{(4k+4)!} - \frac{a_0}{(4k+4)!}\right)$$

$$a_{4k+4} = \frac{a_0}{(4k+4)!}$$

4) $a_{4n+1} = \dfrac{a_1}{(4n+1)!}$

- Dapat dibuktikan rumus benar untuk n = 1

$$a_5 = \frac{a_1}{5!}$$

- Diasumsikan rumus benar untuk n = k

$$a_{4k+1} = \frac{a_1}{(4k+1)!}$$

Berdasarkan asumsi tersebut, dibuktikan rumus benar untuk n = k + 1, yaitu $a_{4k+5} = \dfrac{a_1}{(4k+5)!}$

$$a_{4k+5} = \frac{(-1)^{k-1}}{(k+1)!} - \frac{a_{k-1}}{k(k+1)}$$

$$= \frac{(-1)^{4k+3}}{(4k+5)!} - \frac{a_{4k+3}}{(4k+4)(4k+5)}$$

$$= -\frac{1}{(4k+5)!} + \frac{1}{(4k+3)!(4k+4)(4k+5)} + \frac{a_1}{(4k+3)!(4k+4)(4k+5)}$$

$$= -\frac{1}{(4k+5)!} + \frac{1}{4k+5} + \frac{a_1}{(4k+5)!}$$

$$a_{4k+5} = \frac{a_1}{(4k+5)!}$$

Jadi penyelesaian persamaan diferensial y'' + y = e^{-x} berbentuk

$$y=\left[a_0+\sum_{k=1}^{\infty}a_{4k-2}x^{4k-2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_{4k}x^{4k}\right]+\left[a_1x+\sum_{k=1}^{\infty}a_{4k-1}x^{4k-1}+\sum_{k=1}^{\infty}a_{4k+1}x^{4k+1}\right]$$

atau dapat ditulis sebagai berikut :

$$y=a_0\left[1+\sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{x^{4k-2}}{(4k-2)!}+\frac{x^{4k}}{(4k)!}\right)\right]+a_1\left[x+\sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{x^{4k-1}}{(4k-1)!}+\frac{x^{4k+1}}{(4k+1)!}\right)\right]$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{x^{4k-2}}{(4k-2)!}-\frac{x^{4k-1}}{(4k-1)!}\right]$$

$$y=a_0\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots\right)+a_1\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots\right)+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^6}{6!}+\ldots$$

Sekarang jika diambil $a_0^*=a_0-\frac{1}{2}\Leftrightarrow a_0=a_0^*+\frac{1}{2}$ dan $a_1^*=a_1+\frac{1}{2}\Leftrightarrow a_1=a_1^*-\frac{1}{2}$ sehingga diperoleh

$$y=\left(a_0^*+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots\right)+\left(a_1^*-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots\right)$$

$$+\left(\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^6}{6!}+\ldots\right)$$

$$=a_0^*\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots\right)$$

$$+a^*{}_1\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots\right)+\frac{1}{2}\left(1-x+\frac{x}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\ldots\right)$$

Penyelesaian dapat ditulis sebagai $\mathrm{y}=a_0^*\cos x+a_1^*\sin x+\frac{1}{2}e^{-x}$

Contoh 3.B.6.

Selesaikan persamaan diferensial y'' + y' = x

Penyelesaian :

Diasumsikan solusi berbentuk $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Dengan mensubstitusikan y dan turunan - turunannya ke persamaan diferensial yang diketahui diperoleh :

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = x$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1} x^n = x$$

Dengan menuliskan bentuk deret untuk n = 0 dan menggabungkan kedua deret tersebut diperoleh :

$$(2a_2 + a_1) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(n+2)(n+1)a_{n+2} + (n+1)a_{n+1}\right] x^n = x$$

Dengan menyamakan koefisien pangkat dari x pada kedua persamaan diperoleh :

Koefisien $x^0 = 2a_2 + a_1 = 0 \Leftrightarrow a_2 = -\frac{a_1}{2}$

Koefisien $x^1 = 6a_3 + 2a_2 = 1 \Leftrightarrow a_3 = \frac{1 + a_1}{3!}$

Dan untuk n ≥ 2, koefisien $x^n = 0$ dan rumus rekursif diberikan oleh

$$a_{n+2} = -\frac{1}{n+2} a_{n+1}$$

Maka $a_4 = -\frac{1}{4!}(1 + a_1)$, $a_5 = \frac{1}{5!}(1 + a_1)$, $a_6 = -\frac{1}{6!}(1 + a_1)$ ...

Dan dapat dibuktikan $a_{k+2} = (-1)^{k+1}\dfrac{(1+a_1)}{(k+2)!}$ $\quad k \geq 1$

Sehingga solusi dapat ditulis sebagai

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$= a_0 + a_1\left[x - \frac{x^2}{2!} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(k+2)!}x^{k+2}\right] + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(k+2)!}$$

$$= a_0 + a_1\left(x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots\right) + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots$$

Jika diambil $a_0^* = a_0 + a_1 + 1$ dan $a_1^* = -a_1 - 1$ sehingga $a_1 = -a_1^* - 1$ dan $a_0 = a_0^* + a_1^* + 1$. Disubstitusikan nilai a_0 dan a_1, sehingga solusi dapat ditulis sebagai :

$$y = (a_0^* + a_1^* + 1) + (-a_1^* - 1)\left(x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^4}{4!} + \ldots\right) + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots$$

$$= (a_0^* + a_1^*) + (-a_1^* - 1)\left(x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^4}{4!} + \ldots\right) + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots$$

$$= a_0^* + a_1^*\left(1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{5!} + \ldots\right) - x + \frac{1}{2}x^2$$

Solusi di atas dapat ditulis sebagai

$$y = a_0^* + a_1^* e^x + \frac{1}{2}x^2 - x.$$

C. Penyelesaian Persamaan Diferensial Di Sekitar Titik Singular Regular

Diingatkan kembali persamaan diferensial linear homogen berbentuk $a_2(x)y''+a_1(x)y'+a_0(x)y=0$, dengan $a_2(x), a_1(x)$ dan $a_0(x)$ merupakan fungsi analitik dalam interval $|x - x_0| < R$ dan $a_2(x) \neq 0$. Bila persamaan diferensial (4.1) ditulis dalam bentuk baku diperoleh $y''+P_1(x)y'+P_2(x)y=0$, dimana $P_1(x)=\dfrac{a_1(x)}{a_2(x)}$ dan $P_2(x)=\dfrac{a_0(x)}{a_2(x)}$ juga merupakan fungsi – fungsi analitik. $P_1(x)$ dan $P_2(x)$ memiliki titik singular regular x_0 jika titik ini adalah sebuah titik singular dan fungsi $(x - x_0)P_1(x)$ dan $(x - x_0)^2P_2(x)$ analitik di titik x_0. Jika salah satu dari kedua fungsi ini tidak analitik di x_0 maka x_0 disebut titik singular tak regular.

Persamaan diferensial linear orde dua dengan titik singular regular x_0 mempunyai bentuk

$$y''+\frac{p(x)}{(x-x_0)}y'+\frac{q(x)}{(x-x_0)^2}y=0 \qquad (3.8)$$

dimana $p(x)$ dan $q(x)$ analitik di titik $x = x_0$.

Sebagai ilustrasi, diperhatikan persamaan diferensial Euler berikut :

$$2x^2y'' + xy' - y = 0 \qquad (3.9)$$

Jelas bahwa titik $x_0 = 0$ merupakan titik singular regular dari persamaan diferensial (3.9) dan penyelesaian umum persamaan diferensial tersebut adalah

$$y(x) = a_1x + a_2x^{-1/2} \qquad (3.10)$$

Penyelesaian itu ada dalam suatu interval I = (0, ∞). Tampak bahwa tidak ada penyelesaian dari persamaan (3.9) yang dapat diekspansikan dalam deret pangkat dengan $x_0 = 0$ sebagai titik ekspansinya. Jadi persamaan diferensial (3.9) tidak analitik di titik $x_0 = 0$.

Sebab jika

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad a_0 \neq 0$$

merupakan penyelesaian persamaan diferensial (3.9) maka y(x) dan semua derivatifnya memiliki derivatif kanan di titik $x_0 = 0$, padahal tidak ada fungsi dari persamaan (3.10) dengan sifat seperti itu. Karena itu, penyelesaian persamaan diferensial di sekitar titik singular regular tidak perlu analitik (dalam beberapa contoh penyelesaian mungkin analitik).

Walaupun demikian, kita akan menunjukkan bahwa setiap persamaan diferensial semacam itu memiliki sekurang – kurangnya satu penyelesaian berbentuk

$$y(x) = (x - x_0)^r g(x)$$

dimana g(x) analitik di titik x_0

Untuk persamaan diferensial dengan titik singular regular $x_0 = 0$ yang berbentuk

$$y'' + \frac{p(x)}{x} y' + \frac{q(x)}{x^2} y = 0 \qquad (3.11)$$

kita mulai mencoba mencari sebuah penyelesaian berbentuk

$$y(x) = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad a_0 \neq 0$$

Karena p(x) dan q(x) analitik di titik $x_0 = 0$ maka p(x) dan q(x) dapat dinyatakan dalam deret pangkat dalam x.

Disubstitusikan $y(x)$ dan turunan – turunannya ke persamaan diferensial (3.11) sehingga diperoleh :

$$x^{r-2}\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n x^n + \frac{1}{x}\left(\sum_{n=0}^{\infty}p_n x^n\right)\left(x^{r-1}\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^n\right)$$

$$+\ \frac{1}{x^2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}q_n x^n\right)\left(x^r\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n\right) = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-2} + \left(\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r-2}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}p_n x^n\right)$$

$$+\ \left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+r-2}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}q_n x^n\right) = 0$$

Persamaan dapat disederhanakan menjadi :

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+r)(n+r-1)a_n + \sum_{k=0}^{n}\left((k+r)p_{n-k} + q_{n-k}\right)a_k\right]x^{n+r-2} = 0 \qquad (3.12)$$

Koefisien x^{r-2} dalam persamaan (3.12) adalah a_0F(r), dimana

$F(r) = r(r-1) + p_0 r + q_0$

Karena koefisien x^{r-2} harus nol dan $a_0 \neq 0$, maka

$F(r) = r(r-1) + p_0 r + q_0 = 0$

Persamaan F(r) = 0 dinamakan **persamaan indisial** , dimana F(r) diperoleh dari koefisien x dari pangkat yang paling rendah. Persamaan indisial ini akan menghasilkan nilai r tertentu, kita sebut dengan r_1 dan r_2. Akar – akar r_1 dan r_2 dinamakan eksponen dari titik singular regular $x_0 = 0$

Sedangkan untuk n yang lain memberikan rumus rekursif

$$(n+r)(n+r-1)a_n + \sum_{k=0}^{n-1}\left[(k+r)p_{n-k} + q_{n-k}\right]a_k = 0 \qquad n \geq 1$$

$$(n+r)(n+r-1)a_n + ((n+r)p_0 + q_0)a_n + \sum_{k=0}^{n-1}[(k+r)p_{n-k} + q_{n-k}]a_k = 0$$

$$[(n+r)(n+r-1) + (n+r)p_0 + q_0]a_n + \sum_{k=0}^{n-1}[(k+r)p_{n-k} + q_{n-k}]a_k = 0$$

Persamaan terakhir dapat dinyatakan sebagai

$$F(r+n)a_n + \sum_{k=0}^{n-1}[(k+r)p_{n-k} + q_{n-k}]a_k = 0$$

$$F(r+n)a_n = -\sum_{k=0}^{n-1}[(k+r)p_{n-k} + q_{n-k}]a_k \qquad n \geq 1 \tag{3.13}$$

Persamaan (3.13) merupakan fungsi yang bergantung pada nilai r dan koefisien sebelumnya. Begitu nilai r telah ditentukan, relasi (3.13) akan menentukan nilai a_n berturut – turut sebagai perkalian dari a_0. Sebagai contoh untuk n = 1, 2, … persamaan (3.13) menjadi :

$$F(r+1)a_1 = -\sum_{k=0}^{0}((k+r)p_{n-k} + q_{n-k})a_k = -(rp_1 + q_1)a_0$$

$$a_1 = -\frac{(rp_1 + q_1)}{F(r+1)}a_0$$

$$F(r+2)a_2 = -\sum_{k=0}^{1}((k+r)p_{n-k} + q_{n-k})a_k$$

$$= -[(rp_2 + q_2)a_0 + ((1+r)p_1 + q_1)a_1$$

$$= -[(rp_2 + q_2)a_0 + ((1+r)p_1 + q_1)\frac{(rp_1 + q_1)}{F(r+1)}a_0$$

$$a_2 = -\frac{(rp_2 + q_2)}{F(r+2)}a_0 + \frac{((1+r)p_1 + q_1)(rp_1 + q_1)}{F(r+2)F(r+1)}a_0$$

……..

Karena r_1 dan r_2 akar –akar persamaan indisial $F(r) = 0$ dan $r_1 + r_2 = 1 - p_0$ maka

$$F(r_2 + n) = (n + r_2)(n + r_2 - 1) + (n + r_2)p_0 + q_0$$

$$= n^2 + 2nr_2 - n + r_2^2 - r_2 + np_0 + r_2p_0 + q_0$$

$$= n(2r_2 + p_0 + n - 1) + r_2(r_2 - 1) + p_0r_2 + q_0$$

$$= n(2r_2 + p_0 + n - 1) + F(r_2)$$

Karena r_2 merupakan akar persamaan indisial maka $F(r_2) = 0$ sehingga

$$F(r_2 + n) = n(n + r_2 - r_1)$$

Dapat dilihat bahwa $F(r_2 + n) = 0$ bila dan hanya bila $n = r_1 - r_2$

Sekarang, apabila $F(r_2 + n)$ menjadi nol, metode ini akan berhenti karena

$$F(r_2 + n)\, a_n = -\sum_{k=0}^{n-1}\left[(k+r)p_{n-k} + q_{n-k}\right]a_k$$

$$0.\ a_n = -\sum_{k=0}^{n-1}\left[(k+r)p_{n-k} + q_{n-k}\right]a_k$$

Ada tiga kasus yang dapat terjadi, yaitu

(1) $r_1 - r_2 \neq N$

(2) $r_1 - r_2 = 0$

(3) $r_1 - r_2 = N$

untuk N bilangan bulat positif.

Untuk kasus (1) akan diperoleh dua penyelesaian yang bebas linear, sedangkan untuk kasus (2) dan (3) akan diperoleh sekurang – kurangnya satu penyelesaian berbentuk $y_1 = x^{r_1}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Metode untuk menyelesaikan persamaan diferensial semacam ini disebut metode pengembangan deret pangkat. Penyelesaian kedua yang bebas linear akan dibicarakan dalam teorema.

Teorema 4.C.1

Suatu persamaan diferensial dengan titik singular regular x_0 berbentuk

$$y''+\frac{p(x)}{(x-x_0)}y'+\frac{q(x)}{(x-x_0)^2}y=0$$

p(x) dan q(x) analitik di $x = x_0$, dengan r_1 dan r_2 akar – akar persamaan indisial F(r) = 0 sedemikian sehingga $r_1 - r_2 \neq N$ dan $r_1 > r_2$, maka dua penyelesaian bebas linearnya berbentuk

$$y_1=(x-x_0)^{r_1}\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n \qquad (3.14)$$

dan $y_2=(x-x_0)^{r_2}\sum_{n=0}^{\infty}A_n(x-x_0)^n$

Kedua penyelesaian ini analitik dalam selang $0 < | x - x_0 | < R$

<u>Bukti :</u>

Diasumsikan $x_0 = 0$ sebagai titik singular regular.

Persamaan diferensial dengan titik singular regular $x_0 = 0$ berbentuk :

$$y''+\frac{p(x)}{x}y'+\frac{q(x)}{x^2}y=0 \qquad (3.15)$$

Karena $x_0 = 0$ titik singular regular maka kedua fungsi p(x) dan q(x) analitik di titik $x_0 = 0$ sehingga kedua fungsi ini dapat dinyatakan sebagai deret pangkat, $xP_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$ dan $x^2P_2(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$

Penyelesaian pertama

Diandaikan penyelesaian berbentuk $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$ maka

$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r-1}$ dan $y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r-2}$.

Disubstitusikan y′ dan y″ ke persamaan (3.15) :

$$x^{r-2} \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n x^n + \frac{1}{x} \left(\sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n \right) \left(x^{r-1} \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^n \right)$$

$$+ \frac{1}{x^2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n \right) \left(x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r-2} + \left(\sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r-2} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n \right)$$

$$+ \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r-2} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n \right) = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+r)(n+r-1) a_n + \sum_{k=0}^{n} \left((k+r) p_{n-k} + q_{n-k} \right) a_k \right] x^{n+r-2} = 0$$

Berdasarkan sifat kesamaan dua deret pangkat diperoleh :

$$(n+r)(n+r-1) a_n + \sum_{k=0}^{n-1} \left[(k+r) p_{n-k} + q_{n-k} \right] a_k = 0$$

Untuk n = 0 diperoleh :

$r(r-1) + p_0 r + q_0 = 0$

Atau dituliskan $F(r) = r(r-1) + p_0 r + q_0 = 0$

Diingatkan kembali bahwa persamaan F(r) = 0 disebut persamaan indisial.

Kemudian untuk n ≥ 1 ,

$$(n+r)(n+r-1)a_n + \sum_{k=0}^{n} [(k+r)p_{n-k} + q_{n-k}]a_k = 0$$

$$(n+r)(n+r-1)a_n + \sum_{k=0}^{n-1} [(k+r)a_k p_{n-k} + a_k q_{n-k}] + [(n+r)p_{n-n} + q_{n-n}] = 0$$

$$[(n+r)(n+r-1) + (n+r)p_0 + q_0]a_n = -\sum_{k=0}^{n-1} [(k+r)p_{n-k} + q_{n-k}]a_k \qquad (3.16)$$

Sekarang, diketahui r_1 dan r_2 adalah akar – akar dari persamaan indisial $F(r) = 0$.

$$F(r) = r(r-1) + p_0 r + q_0 = (r - r_1)(r - r_2)$$

Sehingga

$$F(r_1 + n) = (r_1 + n - r_1)(r_1 + n - r_2) = n(n + r_1 - r_2)$$

$$n(n - |r_1 - r_2|) \leq |P(r_1 + n)| \qquad (3.17)$$

Sama seperti pembuktian dalam teorema 2.B.1, untuk sembarang $|x| = R_0 < R$ ada konstanta $M > 0$ sedemikian sehingga $|b_{n-k}| R_0^{n-k} \leq M$ dan $|c_{n-k}| R_0^{n-k} \leq M$, $j \geq 0$. Dengan menggunakan (3.16) dan (3.17) diperoleh

$$n(n - |r_1 - r_2|)\,|a_n| \leq M \sum_{k=0}^{n-1} (k + |r_1| + 1) R_0^{k-n} |a_k|$$

Dipilih bilangan bulat positif N sehingga

$$N - 1 \leq |r_1 - r_2| < N$$

dan didefinisikan konstanta positif A_j yang memenuhi $A_j = |a_j|$ $j = 0, 1, \ldots, N-1$, maka

$$j(j - |r_1 - r_2|)A_j = M \sum_{k=0}^{j-1} (k + |r_1| + 1) R_0^{k-j} A_k \qquad (3.18)$$

maka diperoleh bahwa $|a_n| \leq A_n$ $\quad n = 0, 1, 2, \ldots$

Dengan mengganti j dengan n dan n – 1, pada (3.18) diperoleh

$$A_n = \frac{M\sum_{k=0}^{n-1}(k+|r_1|+1)R_0^{\,k-n}A_k}{n(n-|r_1-r_2|)} \quad \text{dan} \quad A_{n-1} = \frac{M\sum_{k=0}^{n-2}(k+|r_1|+1)R_0^{\,k-n+1}A_k}{(n-1)(n-1-|r_1-r_2|)}$$

sehingga

$$\frac{A_n}{A_{n-1}} = \left(\frac{M\sum_{k=0}^{n-1}(k+|r_1|+1)R_0^{\,k-n}A_k}{n(n-|r_1-r_2|)}\right)\left(\frac{(n-1)(n-1-|r_1-r_2|}{M\sum_{k=0}^{n-2}(k+|r_1|+1)R_0^{\,k-n+1}A_k}\right)$$

$$= \frac{(n-1)(n-1-|r_1-r_2|)+M(n+|r_1|)}{n(n-|r_1-r_2|R_0}$$

dan

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{A_n x^n}{A_{n-1}x^{n-1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)(n-1-|r_1-r_2|)+M(n+|r_1|)|x|}{n(n-|r_1-r_2|R_0} = \frac{|x|}{R_0}$$

Berdasarkan uji rasio, deret $\sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n$ konvergen mutlak untuk $|x| < R_0$ dan dengan uji banding deret $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konvergen mutlak untuk $|x| < R_0$. Karena R_0 konstanta sembarang, deret $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konvergen mutlak untuk $|x| < R$

Akhirnya karena $|x|^{r_1}$ juga konvergen dalam $|x| < R$, maka $|x|^{r_1}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ juga konvergen dalam $|x| < R$.

$\therefore$ Salah satu penyelesaian persamaan diferensial di sekitar titik singular regular $x_0 = 0$ berbentuk $y_1 = (x)^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ dan analitik untuk $0 < | x | < R$

Penyelesaian Kedua

Dapat dilihat kembali penyelesaian pertama (y_1), selanjutnya diketahui bahwa $r_1 - r_2 \neq N$ dan penyelesaian pertama berbentuk $y_1 = (x)^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Jika kita mengganti nilai r_1 dengan r_2 pada pembuktian penyelesaian pertama sehingga diperoleh $y_2 = x^{r_2}(A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + ...) = \sum_{n=o}^{\infty} A_n x^{n+r_2}$ sebagai penyelesaian kedua yang juga akan analitik dalam $0 < | x | < R$.

(Untuk lebih jelasnya dapat dilihat dalam *Essentials Of Ordinary Differential Equations, Ravi – Gupta, hal.292)*

Teorema 3.C.2

Suatu persamaan diferensial dengan titik singular regular x_0 dengan r_1 dan r_2 akar – akar persamaan indisial F(r) = 0 sedemikian sehingga $r_1 = r_2$ maka dua penyelesaian bebas linearnya berbentuk (3.14) dan

$$y_2 = y_1 \ln(x - x_0) + (x - x_0)^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} A_n (x - x_0)^n$$

Kedua penyelesaian ini analitik dalam selang $0 < | x - x_0 | < R$

Bukti :

Sama seperti teorema 3.C.1 akan dibuktikan untuk titik singular regular $x_0 = 0$

Diketahui bahwa $r_1 = r_2 = r$ dan penyelesaian pertama berbentuk $y_1 = x^r\,(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots)$. Kita gunakan metode yang banyak digunakan untuk mencari penyelesaian kedua dalam persamaan diferensial jika penyelesaian pertama diketahui, yaitu metode *penyederhanaan tingkat.* dengan memisalkan y_2 sedemikian sehingga $y_2 = uy_1$ merupakan penyelesaian persamaan diferensial yang diketahui. Dengan pendiferensialan diperoleh

$$y_2' = u'y_1 + uy_1' \text{ dan } y_2'' = u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1''$$

Bentuk baku persamaan diferensial $a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$ adalah $y'' + P_1(x)y' + P_2(x)y = 0$, dengan $P_1(x)$ dan $P_2(x)$ fungsi – fungsi analitik sehingga $xP_1(x)$ dan $x^2P_2(x)$ juga analitik.

Disubstitusikan y_2 dan turunan – turunannya ke persamaan diferensial

$$x^2y'' + x(xP_1(x))y' + (x^2P_2(x))y = 0.$$

Untuk memudahkan, kita tulis $xP_1(x) = b$ dan $x^2P_2(x) = c$ sehingga diperoleh

$$x^2(u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1'') + xb(u'y_1 + uy_1') + cuy_1 = 0$$

Karena y_1 merupakan penyelesaian persamaan diferensial, maka jumlah suku yang mengandung u adalah nol, sehingga persamaan menjadi

$$x^2y_1u'' + 2x^2y_1'u' + xby_1u' = 0$$

Jika kedua ruas dibagi oleh x^2y_1 dan dengan memasukkan deret pangkat ke b

akan diperoleh $u''+\left(\frac{2y_1'}{y_1}+\frac{b_0}{x}+\ldots\right)u'=0$

Sekarang $\frac{y_1'}{y_1}=\frac{x^{r-1}[ra_0+(r+1)a_1x+\ldots]}{x^r[a_0+a_1x+\ldots]}=\frac{1}{x}\left[\frac{ra_0+(r+1)a_1x+\ldots}{a_0+a_1x+\ldots}\right]$

sehingga persamaan sebelumnya dapat ditulis menjadi

$$u''+\left(\frac{2r+b_0}{x}+\ldots\right)u'=0\ .$$

Dari persamaan indisial diperoleh $r=\frac{1}{2}(1-b_0)$ sehingga persamaan

disederhanakan menjadi $u''+\left(\frac{1}{x}+\ldots\right)u'=0 \Leftrightarrow \frac{u''}{u'}=-\frac{1}{x}+\ldots$

Dengan mengintegralkan diperoleh $\ln u'=-\ln x+\ldots$ karenanya $u'=\frac{1}{x}e^{(\ldots)}$

Dengan memperluas fungsi eksponen dalam pangkat x dan

mengintegralkannya sekali lagi diperoleh $u=\ln x+k_1x+k_2x^2+\ldots$

Masukkan persamaan ini ke persamaan $y_2 = uy_1$ sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
y_2 &= (\ln x+k_1x+k_2x^2+\ldots)x^r(a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots)\\
&= x^r(a_0+a_1x+\ldots)\ln x+x^rk_1x(a_0+a_1x+\ldots)+x^rk_2x^2(a_0+a_1x+\ldots)\\
&= y_1\ln x+x^r(a_0+a_1x+\ldots)(k_1x+k_2x^2+\ldots)\\
&= y_1\ln x+x^r(A_1x+A_2x^2+\ldots)
\end{aligned}$$

Jadi penyelesaian kedua berbentuk $y_2=y_1\ln x+x^r\sum_{n=0}^{\infty}A_nx^n$, $x>0$, yang

juga akan konvergen dalam $0<|\ x\ |<R$

Teorema 3.C.3

Jika persamaan diferensial $a_2(x)y''+a_1(x)y'+a_0(x)y=0$ memiliki titik singular regular x_0 dengan r_1 dan r_2 akar – akar persamaan indisial F(r) = 0 sedemikian sehingga $r_1 - r_2 = N$ (N bilangan bulat positif) dan $r_1 > r_2$ maka dua penyelesaian bebas linearnya berbentuk (3.14) dan

$$y_2 = ky_1 \ln(x-x_0) + (x-x_0)^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} A_n (x-x_0)^n$$

Kedua penyelesaian ini analitik dalam selang $0 < | x - x_0 | < R$

<u>Bukti :</u>

Sama seperti kedua teorema sebelumnya, akan dibuktikan untuk titik singular regular $x_0 = 0$.

Serupa dengan langkah pada teorema 3.C.2 sehingga menghasilkan persamaan

$$u''+\left(\frac{2r+b_0}{x}+\ldots\right)u'=0. \qquad (3.19)$$

Diandaikan $r_1 = r$ dan $r_2 = r - p$, p bilangan bulat positif.

Dari persamaan indisial $F(r) = r(r-1) + r\,b_0 + c_0 = 0$ diperoleh $r_1 + r_2 = 1 - b_0$. Dengan mensubstitusikan $r_1 = r$ dan $r_2 = r - p$ diperoleh

$$2r - p = 1 - b_0 \iff 2r + b_0 = p + 1$$

Sehingga (3.19) dapat ditulis sebagai

$$u''+\left(\frac{p+1}{x}+\ldots\right)u'=0 \Leftrightarrow \frac{u''}{u'} = -\left(\frac{p+1}{x}+\ldots\right)$$

Dengan mengintegralkan diperoleh

$$\ln u' = -(p+1)\ln x + \ldots$$

$$u' = x^{-(p+1)}e^{(\ldots)} .$$

Dengan memperluas fungsi eksponen dalam pangkat x diperoleh suatu deret berbentuk $u' = \frac{1}{x^{p+1}} + \frac{k_1}{x^p} + \ldots + \frac{k_{p-1}}{x^2} + \frac{k_p}{x} + k_{p+1} + k_{p+2}x + \ldots$

Dengan mengintegralkan sekali lagi diperoleh

$$u = k_p \ln x + \left(-\frac{1}{px^p} - \ldots - \frac{k_{p-1}}{x} + k_{p-1}x + \ldots \right) \qquad (3.20)$$

Selanjutnya persamaan (3.20) disubstitusikan ke persamaan $y_2 = uy_1$

$$y_2 = k_p y_1 \ln x + \left(-\frac{1}{px^p} - \ldots - \frac{k_{p-1}}{x} + k_{p-1}x + \ldots \right)\left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots\right) x^{r_1}$$

$$= k_p y_1 \ln x + x^{r_1 - p}\left(-\frac{1}{p} - \ldots - k_{p-1}x^{p-1} + \ldots \right)\left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots\right)$$

Karena $r_1 - p = r_2$ dan $k = k_p$,

$$y_2 = k_p y_1 \ln x + x^{r_2}\left(A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots\right)$$

atau $\qquad y_2 = ky_1 \ln x + x^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n$

yang juga akan analitik dalam $0 < |\ x\ | < R$

Contoh 3.C.1

Selesaikan persamaan diferensial $4xy'' + 2y' + y = 0$

Penyelesaian :

Titik $x_0 = 0$ merupakan titik singular regular, jadi asumsi solusi berbentuk $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$. Asumsi solusi dan turunan – turunannya disubstitusikan ke persamaan diferensial yang diketahui sehingga menghasilkan :

$$4\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-1}+2\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r-1}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+r}=0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n[4(n+r)(n+r-1)+2(n+r)]x^{n+r-1}+\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}x^{n+r-1}=0$$

Ditulis bentuk dari deret pertama yaitu untuk n = 0, kemudian digabungkan :

$$a_0[4r(r-1)+2r]x^{r-1}+\sum_{n=1}^{\infty}[a_n(4(n+r)(n+r-1)+2(n+r))+a_{n-1}]x^{n+r-1}=0$$

Dengan menyamakan jumlah koefisien x^{r-1} dengan nol diperoleh persamaan indisial $4r(r-1)+2r=0$ sehingga $r_1=0$ dan $r_2=\frac{1}{2}$

Ini merupakan bentuk *kasus 1*. Sekarang koefsen x^{n+r-1} disamakan dengan nol

$$[4(n+r)(n+r-1)+2(n+r)]a_n+a_{n-1}=0$$

Jadi $a_n=-\dfrac{a_{n-1}}{4(n+r)(n+r-1)+2(n+r)}$

Penyelesaian pertama

Untuk $r=r_1=0$ rumus rekursif menjadi $a_n=-\dfrac{a_{n-1}}{2n(2n-1)}$ $n\geq 1$.

Dari sini berturut – turut diperoleh

$$a_1=-\frac{a_0}{2.1}$$

$$a_2=-\frac{a_1}{4.3}$$

$$a_3=-\frac{a_2}{6.5}$$

$$a_4=-\frac{a_3}{8.7}$$

....

$$a_k = -\frac{a_{k-1}}{2k(2k-1)} \qquad k \geq 1$$

Jika $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k$ dikalikan maka diperoleh

$$a_1 a_2 a_3 \ldots a_k = -\left(\frac{a_0 a_1 a_2 a_3 \ldots a_{k-1}}{(1.2)(3.4)(5.6)\ldots(2k-1)(2k)}\right)$$

$$a_k = \frac{(-1)^k}{(2k)!} a_0 \qquad k \geq 1$$

Sehingga berturut – turut diperoleh :

$$a_1 = -\frac{a_0}{2!}, a_2 = \frac{a_0}{4!}, a_3 = -\frac{a_0}{6!}, \ldots.$$

Jadi penyelesaian pertama berbentuk

$$y_1 = a_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^k = a_0\left(1 - \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{4!} - \frac{x^3}{6!} + \ldots\right)$$

Penyelesaian kedua

Untuk $r = r_2 = \frac{1}{2}$ rumus menjadi $A_n = -\frac{A_{n-1}}{2n(2n+1)}$

Dari rumus tersebut, berturut – turut diperoleh

$$A_1 = -\frac{A_0}{2.3}$$

$$A_2 = -\frac{A_1}{4.5}$$

$$A_3 = -\frac{A_2}{6.7}$$

...

$$A_k = -\frac{A_{k-1}}{2k(2k+1)}$$

Jika A_1 , A_2 , A_3 , … , A_k dikalikan maka diperoleh

$$A_1A_2A_3 \ldots A_k = -\left(\frac{A_0A_1A_2A_3\ldots A_{k-1}}{(2.3)(4.5)(6.7)\ldots(2k)(2k+1)}\right)$$

$$A_k = \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}A_0 \qquad\qquad k \geq 1$$

sehingga berturut – turut diperoleh

$$A_1 = -\frac{A_0}{3!}, A_2 = \frac{A_0}{5!}, A_3 = -\frac{A_0}{7!}, \ldots$$

Dengan demikian penyelesaian kedua berbentuk

$$y_2 = A_0\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{k+\frac{1}{2}}$$

$$= A_0\sqrt{x}\left(1 - \frac{1}{3!}x + \frac{1}{5!}x^2 - \frac{1}{7!}x^3 + \ldots\right)$$

Contoh 3.C.2.

Selesaikan persamaan diferensial yang berbentuk :

$2x(1-2x)y''+(12x^2-4x+1)y'-(8x^2+2)y = 0$ di sekitar titik singular regular $x_0 = 0$

Penyelesaian :

Karena x_0 merupakan titik singular regular jadi asumsi solusi berbentuk $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$. Disubstitusikan asumsi solusi dan turunan – turunannya ke persamaan diferensial yang diketahui sehingga menghasilkan :

$$2\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-1} - 4\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r} + 12\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r+1}$$

$$-4\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r}+\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r-1}-8\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+r+2}-2\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+r}=0$$

Disederhanakan menjadi :

$$\sum_{n=0}^{\infty}[2(n+r)(n+r-1)+(n+r)]a_n x^{n+r-1}+12\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r+1}$$

$$-\sum_{n=0}^{\infty}[4(n+r)(n+r-1)+4(n+r)+2]a_n x^{n+r}-8\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+r+2}=0$$

Pangkat terkecil adalah x^{n+r-1} dan dengan menyamakan koefisiennya dengan nol untuk n = 0 diperoleh persamaan indisial r(2r – 1) = 0. Jadi $r_1 = 0$ dan $r_2 = \frac{1}{2}$. Sekarang diseragamkan deret dalam bentuk pangkat yang sama yaitu x^{n+r-1}, diperoleh :

$$\sum_{n=1}^{\infty}[2(n+r)(n+r-1)+(n+r)]a_n x^{n+r-1}+12\sum_{n=2}^{\infty}(n+r-2)a_{n-2}x^{n+r-1}$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty}[4(n+r-1)(n+r-2)+4(n+r-1)+2]a_{n-1}x^{n+r-1}-8\sum_{n=3}^{\infty}a_{n-3}x^{n+r-1}=0$$

Penyelesaian pertama :

Untuk n = 1 diperoleh hubungan

$$[2(n+r)(n+r-1)+(n+r)]a_n-[4(n+r-1)(n+r-2)+4(n+r-1)+2]a_{n-1}=0$$

sedemikian sehingga jika kita substitusikan $r_1 = 0$ dan n = 1diperoleh $a_1 = 2a_0$

Untuk n = 2 diperoleh hubungan

$$[2(n+r)(n+r-1)+(n+r)]a_n+12(n+r-2)a_{n-2}$$

$-[4(n+r-1)(n+r-2)+4(n+r-1)+2]a_{n-1}=0$, Jadi jika disubstitusikan $r_1 = 0$ dan n = 2 diperoleh $a_2 = 2a_0$

Untuk n ≥ 3 diperoleh hubungan :

$$[2(n+r)(n+r-1)+(n+r)]a_n + 12(n+r-2)a_{n-2}$$

$$-[4(n+r-1)(n+r-2)+4(n+r-1)+2]a_{n-1} - 8a_{n-3} = 0$$

sehingga jika kita substitusikan $r_1 = 0$ diperoleh persamaan :

$$(2n(n-1)+n)a_n + 12(n-2)a_{n-2} - (4(n-1)(n-2)+4(n-1)+2)a_{n-1} - 8a_{n-3} = 0$$

Jadi $a_3 = \frac{4}{3}a_0, a_4 = \frac{2}{21}a_0, \ldots$

Sulit untuk dicari rumus umum suku ke-n dari bentuk di atas.

Penyelesaian pertama dari beberapa deret berbentuk $y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$ yaitu

$$y_1 = a_0\left(1 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \ldots\right)$$

Penyelesaian kedua

Untuk n = 1 diperoleh hubungan

$$[2(n+r)(n+r-1)+(n+r)]A_n - [4(n+r-1)(n+r-2)+4(n+r-1)+2]A_{n-1} = 0$$

sedemikian sehingga jika kita substitusikan $r_2 = \frac{1}{2}$ dan n = 1 diperoleh $A_1 = A_0$. Untuk n = 2 diperoleh hubungan

$$[2(n+r)(n+r-1)+(n+r)]A_n + 12(n+r-2)A_{n-2}$$

$-[4(n+r-1)(n+r-2)+4(n+r-1)+2]A_{n-1} = 0$, Jadi jika kita substitusikan $r_2 = \frac{1}{2}$ dan n = 2 diperoleh $A_2 = \frac{1}{2}A_0$

Untuk n ≥ 3 diperoleh hubungan :

$$[2(n+r)(n+r-1)+(n+r)]A_n + 12(n+r-2)A_{n-2}$$
$$-[4(n+r-1)(n+r-2)+4(n+r-1)+2]A_{n-1} - 8A_{n-3} = 0$$

sehingga jika kita substitusikan $r_2 = \frac{1}{2}$ diperoleh persamaan :

$$\left[2\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{1}{2}\right)+\left(n+\frac{1}{2}\right)\right]A_n + 12\left(n-\frac{3}{2}\right)A_{n-2}$$
$$-\left[4\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)+4\left(n-\frac{1}{2}\right)+2\right]A_{n-1} - 8A_{n-3} = 0$$

Dapat dibuktikan bahwa untuk setiap k ≥ 1 maka $A_{k+2} = \frac{A_0}{(k+2)!}$

Sehingga diperoleh $A_3 = \frac{A_0}{3!}, A_4 = \frac{A_0}{4!}, A_5 = \frac{A_0}{5!}, \ldots$

Sehingga penyelesaian kedua berbentuk

$$y_2 = x^{\frac{1}{2}} A_0 \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots\right)$$

Atau $y_2 = x^{\frac{1}{2}} A_0 e^x$

Contoh 3.C.3

Selesaikan persamaan diferensial $(x^2-1)x^2y''-(x^2+1)xy'+(x^2+1)y=0$

Penyelesaian :

Titik $x_0 = 0$ merupakan titik singular regular, jadi asumsi solusi berbentuk $y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$. Disubstitusikan asumsi solusi dan turunan – turunannya ke persamaan diferensial yang diketahui :

$$(x^2-1)\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r}-(x^2+1)\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r}+(x^2+1)\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+r}=0$$

Dengan melakukan perkalian dan penyederhanaan diperoleh :

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r-1)^2 a_n x^{n+r+2}-\sum_{n=0}^{\infty}(n+r+1)(n+r-1)a_n x^{n+r}=0$$

Pangkat terkecil adalah x^{n+r} dan dengan menyamakan koefisiennya dengan nol diperoleh persamaan indisial (r – 1)(r + 1) = 0, sehingga $r_1 = 1$ dan $r_2 = -1$

Ini merupakan bentuk *kasus 3.*

Sekarang bentuk deret pangkat disederhanakan menjadi

$$\sum_{n=2}^{\infty}(n+r-3)^2 a_{n-2} x^{n+r}-\sum_{n=1}^{\infty}(n+r+1)(n+r-1)a_n x^{n+r}=0$$

Dengan menyamakan koefisien x^{n+r} dengan nol untuk deret kedua diperoleh $a_1=0$. Kemudian $(n+r-3)^2 a_{n-2}=(n+r+1)(n+r-1)a_n$

Jadi $a_n=\dfrac{(n+r-3)^2}{(n+r+1)(n+r-1)}a_{n-2}$

Penyelesaian pertama

Untuk $r = r_1 = 1$, $(n-2)^2 a_{n-2} = n(n+2)\ a_n$.

Karena $a_1 = 0$ maka $a_3 = 0, a_5 = 0, \ldots$ Untuk n = 2, 4, 6, … juga diperoleh $a_2 = 0$ sehingga $a_4 = 0, a_6 = 0, \ldots$

Jadi penyelesaian pertama berbentuk $y_1 = a_0 x$

Penyelesaian kedua

Untuk r = r_2 = -1, $(n-4)^2 A_{n-2} = n(n-2)A_n \quad n \geq 2$

Bila kita pilih n =2 mengakibatkan $A_0 = 0$, bertentangan dengan $A_0 \neq 0$.

Untuk memperoleh penyelesaian kedua, substitusikan $y_2 = u\,x$ dan turunan – turunannya ke persamaan diferensial yang diketahui sehingga diperoleh persamaan $(x^3 - x)u'' + (x^2 - 3)u' = 0$.

Dengan pengandaian $u' = w$ dan pengintegralan biasa diperoleh

$$u = \ln x + \frac{2}{x^2}$$

sehingga penyelesaian kedua berbentuk $y_2 = \left(\ln x + \frac{2}{x^2}\right)x = x\ln x + \frac{2}{x}$

Contoh 3.C.4

Selesaikan persamaan diferensial

$$(2x^2 + x^2)y'' + (6x^2 + 4x)y' + 2y = 0$$

Penyelesaian :

Titik $x_0 = 0$ merupakan titik singular regular, jadi asumsi solusi berbentuk $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$. Asumsi solusi dan turunan – turunannya disubstitusikan ke persamaan diferensial yang diketahui :

$$(2x+1)\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r} + (6x+4)\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r} + 2\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+r} = 0$$

Dengan melakukan perkalian dan penyederhanaan diperoleh

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(2(n+r)(n+r-1)+6(n+r)\right)a_n x^{n+r+1} + \sum_{n=0}^{\infty}\left((n+r)(n+r-)+4(n+r)+2\right)a_n x^{n+r} = 0$$

sehingga persamaan indisialnya (r + 1)(r + 2) = 0 dengan akar – akar persamaan indisial $r_1 = -1$ dan $r_2 = -2$

Bentuk deret terakhir dapat ditulis dalam bentuk

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(2(n+r-1)(n+r-2)+6(n+r-1)\right)a_{n-1} + \left((n+r)(n+r-)+4(n+r)+2\right)a_n\right]x^{n+r} = 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(2(n+r-1)(n+r+1)a_{n-1} + (n+r+1)(n+r+2)a_n\right)x^{n+r} = 0$$

Berdasarkan sifat kesamaan deret pangkat diperoleh

$$2(n+r-1)(n+r+1)a_{n-1} + (n+r+1)(n+r+2)a_n = 0 \qquad n \geq 1$$

Penyelesaian pertama

Untuk $r = r_1 = -1$ diperoleh rumus rekursif

$$a_n = -\frac{2(n-2)}{(n+1)}a_{n-1} \qquad n \geq 1$$

Karena $a_1 = a_0$, $a_2 = a_3 = a_4 = ... = a_{n+1} = 0$

Jadi penyelesaian pertama berbentuk

$$y_1 = a_0\left(x^{-1}+1\right)$$

Penyelesaian kedua

Untuk r = r_2 = -2, diperoleh rumus rekursif

$$a_n = -\frac{2(n-3)}{n}a_{n-1} \qquad n \geq 1$$

Sehingga diperoleh $a_1 = 4a_0, a_2 = a_1, a_3 = a_4 = ... = a_{n+2} = 0$

Jadi penyelesaian kedua berbentuk

$$y_2 = a_0\left(x^{-2} + \frac{4}{x} + 4\right)$$

Contoh 3.C.5

Selesaikan persamaan diferensial $x(x-1)y'' + (3x-1)y' + y = 0$

Penyelesaian :

Titik $x_0 = 0$ merupakan titik singular regular, jadi asumsi solusi berbentuk $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$ (teorema 3.C.1). Disubstitusikan asumsi solusi dan turunan – turunannya ke persamaan diferensial yang diketahui :

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r} - \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-1} + 3\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r}$$

$$-\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+r} = 0 .$$

Disederhanakan menjadi

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[\left((n+r)(n+r-1) + 3(n+r) + 1\right)a_n\right]x^{n+r} - \sum_{n=0}^{\infty}\left[\left((n+r)(n+r-1)a_n\right)\right]x^{n+r-1} = 0$$

Pangkat terkecil adalah x^{n+r-1} dan dengan menyamakan jumlah koefisiennya dengan nol diperoleh - r(r – 1) + r = 0 atau $r^2 = 0$ sehingga $r_1 = r_2 = 0$.

Ini adalah bentuk kasus 2.

Bentuk deret terakhir dapat ditulis sebagai

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left((n+r-1)(n+r-2)+3(n+r-1)+1\right)a_{n-1}\right]x^{n+r-1}$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left((n+r)(n+r-1)a_n\right)\right]x^{n+r-1}=0$$

Koefisien x^{n+r-1} disamakan dengan nol dan disederhanakan $(n+r)^2 a_{n-1}-(n+r)^2 a_n=0$ atau $a_{n-1}=a_n$. Jadi $a_0=a_1=a_2=\ldots$

Dengan mengambil $a_0=1$ menyebabkan $a_n=1$, $n\geq 0$

Jadi penyelesaian pertama berbentuk $y_1=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\dfrac{1}{1-x}$

Penyelesaian kedua

Disubstitusikan $y_2 = uy_1$ dan turunan – turunannya ke persamaan diferensial yang diketahui :

$$x(x-1)(u''y_1+2u'y_1'+uy_1'')+(3x-1)(u'y_1+uy_1')+uy_1=0$$

Karena y_1 merupakan penyelesaian persamaan diferensial yang diketahui, koefisien u adalah nol sehingga persamaan dapat disederhanakan menjadi

$$x(x-1)(u''y_1+2u'y_1')+(3x-1)u'y_1=0$$

$$\Leftrightarrow x(x-1)\left(\frac{u''}{1-x}+\frac{2u'}{(1-x)^2}\right)+(3x-1)\frac{u'}{1-x}=0$$

$$\Leftrightarrow x(x-1)\left(\frac{u''}{1-x}+\frac{2u'}{(1-x)^2}\right)-\frac{(3x-1)u'}{1-x}=0$$

$$\Leftrightarrow xu''+\frac{u'-xu'}{1-x}=0 \quad \Leftrightarrow \quad x(1-x)u''-xu'+u'=0$$

$\Leftrightarrow xu''+u'=0$. Dengan pengandaian $u'=w$ diperoleh u = ln x

Jadi penyelesaian kedua berbentuk $y_2=\ln x\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{\ln x}{1-x}$

Contoh 3.C.6

Selesaikan persamaan diferensial $(1+x)x^2y''-(1+2x)xy'+(1+2x)y=0$

Penyelesaian :

Titik $x_0 = 0$ merupakan titik singular regular, jadi asumsi solusi berbentuk $y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r}$. Disubstitusikan asumsi solusi dan turunan – turunannya ke persamaan diferensial yang diketahui :

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_nx^{n+r}+\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_nx^{n+r+1}-\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_nx^{n+r}$$

$$-2\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_nx^{n+r+1}+\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r}+2\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r+1}=0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n[(n+r)(n+r-1)-(n+r)+1]x^{n+r}$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}[(n+r-1)(n+r-2)-2(n+r-1)+2]x^{n+r}=0$$

diperoleh persamaan indisial r(r – 1) – r + 1 = 0 atau $r^2 - 2r + 1 = 0$ sehingga akar – akar persamaan indisial $r_1 = r_2 = 1$.

Dengan menyamakan koefisien x^{n+r} dengan nol diperoleh

$$[(n+r)(n+r-1)-(n+r)+1]a_n+[(n+r-1)(n+r-2)-2(n+r-1)+2]a_{n-1}=0$$

Penyelesaian pertama

Untuk r = 1 persamaan menjadi

$$(n(n+1)-(n+1)+1)a_n+(n(n-1)-2n+2)a_{n-1}=0$$

$$\Leftrightarrow n^2a_n+[(n-1)(n-2)a_{n-1}=0] \qquad n\geq 1$$

Berturut – turut diperoleh $a_1=0, a_2=0,\ldots$

Dengan mengambil $a_0=1$ penyelesaian pertama berbentuk $y_1 = x$.

Penyelesaian kedua

Disubstitusikan $y_2 = uy_1$ dan turunan – turunannya ke persamaan diferensial yang diketahui :

$$(1+x)x^2(u''x+2u')-(1+2x)x(u'x+u)+(1+2x)ux=0$$

Persamaan tersebut dapat disederhanakan menjadi

$x^2(xu''+x^2u''+u')=0 \Leftrightarrow x(1+x)u''+u'=0$. Dengan pengandaian $u'=w$ dan pengintegralan biasa diperoleh $\ln w=-\int\frac{1}{x(1+x)}dx=-\int\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{1+x}\right)dx$

$\ln w = \ln(1+x)-\ln x = \ln\left(\frac{1+x}{x}\right)$, sehingga $u = \ln x + x$

Jadi penyelesaian kedua berbentuk $y_2=(\ln x+x)x$ atau $y_2=x\ln x+x^2$.

BAB IV

PENYELESAIAN PERSAMAAN DIFERENSIAL YANG MENGHASILKAN FUNGSI – FUNGSI KHAS

Persamaan difernsial linear orde dua sering muncul dalam matematika terapan. Persamaan diferensial tersebut sering muncul dalam kajian ilmu fisika maupun teknik, karena itu lahirlah berbagai macam persamaan diferensial yang khas sesuai dengan orang yang menemukan/meneliti persamaan diferensial itu. Berikut ini beberapa persamaan diferensial linear orde dua dengan koefisien variabel yang paling penting yang terdapat dalam penerapan. Adalah umum untuk menyebut persamaan – persamaan berikut dengan nama yang ada di sebelah kiri persamaan diferensial :

Persamaan Airy	$y''-xy=0$
Persamaan Bessel	$x^2y''+xy'+(x^2-p^2)y=0$
Persamaan Chebyshev	$(1-x^2)y''-xy'+p^2y=0$
Persamaan Hipergeometri dari Gauss	$x(1-x)y''+[c-(a+b+1)x]y'-aby=0$
Persamaan Hermite	$y''-2xy'+2py=0$
Persamaan Laguerre	$xy''+(1-x)y'+py=0$
Persamaan Legendre	$(1-x^2)y''-2xy'+n(n+1)y=0$

Semua persamaan diferensial itu dapat diselesaikan dengan metode deret pangkat maupun metode pengembangan deret pangkat, yaitu dengan menyatakan fungsi penyelesaian dan koefisien penyelesaian kedalam deret pangkat.

A. Persamaan *Airy*

Persamaan diferensial

$$y''-xy=0 \qquad (4.1)$$

disebut *persamaan Airy* . Persamaan ini dikenalkan oleh *Sir George Airy* (1801 – 1892), seorang ahli astronomi dan matematikawan Inggris. Penyelesaian persamaan Airy di sekitar titik biasa $x_0 = 0$ disebut fungsi Airy dan penerapannya ada dalam teorema difraksi. Fungsi Airy mula – mula dipelajari oleh Airy dalam hubungannya dengan perhitungan intensitas sinar di lingkungan suatu permukaan austik.

Karena semua titik merupakan titik biasa, khususnya $x = 0$ maka asumsi solusi berbentuk $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ dan konvergen untuk semua x.

Disubstitusikan y dan turunan – turunannya ke persamaan diferensial (4.1) dan dengan melakukan penyederhanaan diperoleh

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}x^n = 0$$

$$2a_2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[(n+2)(n+1)a_{n+2} - a_{n-1}\right]x^n = 0$$

Berdasarkan sifat kesamaan dua deret pangkat diperoleh :

$a_2 = 0$ dan untuk n ≥ 1 berlaku $(n+2)(n+1)a_{n+2} - a_{n-1} = 0$ atau

$$a_{n+2} = \frac{a_{n-1}}{(n+2)(n+1)} \qquad n \geq 1$$

$$a_3 = \frac{a_0}{3.2} \qquad\qquad a_4 = \frac{a_1}{4.3}$$

$$a_6 = \frac{a_3}{6.5} \qquad\qquad a_7 = \frac{a_4}{7.6}$$

$$a_9 = \frac{a_6}{9.8} \qquad \text{dan} \qquad a_{10} = \frac{a_7}{10.9}$$

$$\ldots \qquad\qquad \ldots$$

$$a_{3n} = \frac{a_{3n-3}}{3n(3n-1)} \qquad\qquad a_{3n+1} = \frac{a_{3n-2}}{(3n+1)(3n)}$$

Sedangkan $a_5 = 0$, $a_8 = 0$, ... , $a_{3n+2} = 0$

Apabila $a_3, a_6, a_9, \ldots a_{3n}$ dikalikan maka diperoleh

$$a_3 a_6 a_9 \ldots a_{3n} = \frac{a_0 a_3 a_6 \ldots a_{3n-3}}{2.3.5.6\ldots(3n-1)(3n)}$$

$$a_{3n} = \frac{a_0}{2.3.5.6\ldots(3n-1)(3n)} = \frac{1.4.7\ldots(3n-2)a_0}{1.2.3.4\ldots(3n-1)(3n)}$$

$$a_{3n} = \frac{1.4.7\ldots(3n-2)}{(3n)!}a_0$$

Demikian halnya jika $a_4, a_7, a_{10}, \ldots a_{3n+1}$ dikalikan maka diperoleh

$$a_3 a_6 a_9 \ldots a_{3n+1} = \frac{a_1 a_4 a_7 \ldots a_{3n-2}}{3.4.6.7.9.10\ldots3n(3n+1)}$$

$$a_{3n+1} = \frac{a_1}{3.4.6.7\ldots3n(3n+1)}$$

$$a_{3n+1} = \frac{2.5\ldots(3n-1)}{(3n+1)!}a_1$$

Sehingga diperoleh nilai koefisien – koefisien deret sebagai berikut :

$$a_3 = \frac{a_0}{3!}\ ,\ a_4 = \frac{2a_1}{4!}\ ,\ a_6 = \frac{4a_0}{6!}\ ,\ a_7 = \frac{2.5a_1}{7!}\ ,\ a_9 = \frac{4.7a_0}{9!}\ ,\ \ldots$$

Jadi penyelesaian umum persamaan Airy berbentuk

$$y = a_0\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1.4.7...(3n-2)}{(3n)!}x^{3n}\right] + a_1\left[x + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2.5...(3n-1)}{(3n+1)!}x^{3n+1}\right]$$

B. Persamaan *Hermite*

Persamaan diferensial

$$y'' - 2xy' + 2py = 0 \qquad (4.2)$$

dengan p konstanta disebut *persamaan Hermite*. *Charles Hermite* (1822 – 1901) adalah seorang analis dan ahli aljabar Perancis yang berpengaruh. Namanya juga dipakai sebagai nama sebuah matriks *(matriks Hermite)*. Persamaan ini sangat penting dalam banyak cabang matematika dan fisika, sebagai contoh dalam mekanika kuantum persamaan Hermite muncul dalam penyelidikan persamaan Schrödinger (1887 – 1961) untuk osilator harmonik.

Jelas bahwa titik $x_0 = 0$ merupakan titik biasa dari persamaan diferensial (4.2) sehingga solusi berbentuk $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ dan konvergen untuk semua x.

Dengan substitusi y dan turunan – turunannya serta beberapa penyederhanaan diperoleh persamaan :

$$(2a_2 + 2pa_0) + \sum_{n=1}^{\infty}\left[(n+2)(n+1)a_{n+2} + 2pa_n - 2na_n\right]x^n = 0$$

Berdasarkan sifat kesamaan deret pangkat diperoleh

$(2a_2 + 2pa_0) = 0$ dan $(n+2)(n+1)a_{n+2} + 2(p-n)\, a_n = 0$

$$a_{n+2} = -\frac{2(p-n)}{(n+2)(n+1)}a_n \qquad n \geq 0$$

Sehingga

$$a_2 = -\frac{2p}{2.1}a_0 \qquad a_3 = -\frac{2(p-1)}{3.2}a_1$$

$$a_4 = -\frac{2(p-2)}{4.3}a_2 \qquad a_5 = -\frac{2(p-3)}{5.4}a_3$$

$$a_6 = -\frac{2(p-4)}{6.5}a_4 \qquad a_7 = -\frac{2(p-5)}{7.6}a_5$$

$$\ldots \qquad \ldots$$

$$a_{2n} = -\frac{2(p-2n+2)}{2n(2n+1)}a_{2n-2} \qquad a_{2n+1} = -\frac{2(p-2n+1)}{(2n+1)2n}a_{2n-1}$$

Apabila $a_3, a_5, a_7, \ldots a_{2n+1}$ dikalikan, maka diperoleh :

$$a_3 a_5 a_7 \ldots a_{2n+1} = \frac{(-2(p-1))(-2(p-3))\ldots(-2(p-2n+1))a_1 a_3 a_5 \ldots a_{2n-1}}{2.3.4.5\ldots 2n(2n+1)}$$

$$a_{2n+1} = (-1)^n \frac{2^n (p-1)(p-3)\ldots(p-2n+1)}{(2n+1)!}a_1 \qquad n \geq 1$$

Demikian halnya apabila $a_2, a_4, a_6, \ldots, a_{2n}$ dikalikan, maka akan diperoleh rumus umum :

$$a_{2n} = (-1)^n \frac{2^n p(p-2)\ldots(p-2n+2)}{(2n)!}a_0$$

Sehingga diperoleh nilai koefisien – koefisien deret sebagai berikut :

$$a_2 = -pa_0 \qquad a_3 = -\frac{2(p-1)}{3!}a_1$$

$$a_4 = \frac{2^2 p(p-2)}{4!} a_0 \qquad\qquad a_5 = \frac{2^2 (p-1)(p-3)}{5!} a_1$$

$$a_6 = -\frac{2^3 p(p-2)(p-4)}{6!} a_0 \qquad , \ldots$$

Jadi penyelesaian umum persamaan Hermite berbentuk

$$y = a_0 \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n p(p-2)\ldots(p-2n+2)}{(2n)!} x^{2n} \right] +$$

$$a_1 \left[x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n .(p-1)(p-3)\ldots(p-2n+1)}{(2n+1)!} x^{2n+1} \right]$$

C. Persamaan *Bessel*

Persamaan diferensial

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - p^2) y = 0 \qquad (4.3)$$

disebut *persamaan Bessel,* dimana parameter p merupakan bilangan yang diberikan. *Friedrich Wilhelm Bessel* (1784 – 1846) adalah seorang matematikawan dan astronom Jerman. Ia pernah menjadi asisten di sebuah observatori swasta dan akhirnya menjadi direktur observatori Königsberg yang baru didirikan. Makalahnya tentang fungsi – fungsi Bessel (1824) diterbitkan tahun 1826.

Persamaan Bessel timbul dalam soal – soal tentang getaran (vibrasi), medan elektrostatik, rambatan (konduksi) panas, dan sebagainya. Penyelesaian persamaan Bessel disebut fungsi Bessel.

Sekarang akan diselesaikan persamaan ini untuk p = 0 sehingga persamaan menjadi $x^2 y'' + xy' + x^2 y = 0$

Kita dapat melihat bahwa $x_0 = 0$ adalah titik singular yang regular. Jadi persamaan Bessel mempunyai penyelesaian berbentuk $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$

sehingga persamaan menjadi :

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r+2} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}[(n+r)(n+r-1)+(n+r)]a_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r+2} = 0$$

Diperoleh persamaan indisial $r^2 = 0$ dan akar – akar persamaan indisial $r_1 = r_2 = 0$.

Sekarang bentuk deret disederhanakan menjadi :

$$\sum_{n=1}^{\infty}[(n+r)(n+r-1)+(n+r)]a_n x^{n+r} + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^{n+r} = 0$$

$$[(1+r)r + (1+r)]\, a_1 + \sum_{n=2}^{\infty}[((n+r)(n+r-1)+(n+r))a_n + a_{n-2}]\, x^{n+r} = 0$$

Untuk r = 0 diperoleh $a_1 = 0$ dan untuk $n \geq 2$ berlaku

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{(n+r)(n+r-1)+(n+r)} = -\frac{a_{n-2}}{(n+r)^2}$$

Karena $a_1 = 0$ maka $a_3 = a_5 = \ldots = a_{2n+1} = \ldots = 0$

Dengan cara yang sama, dapat dibuktikan rumus umum untuk $_{2n}$ yaitu

$$a_{2n} = (-1)^n \frac{a_0}{2^{2n}(n!)^2} \qquad n \geq 1$$

sehingga berturut – turut diperoleh

$$a_2 = -\frac{a_0}{2^2}, a_4 = \frac{a_0}{2^4(2.1)^2}, a_6 = -\frac{a_0}{2^6(3.2.1)^2}, \ldots$$

Jadi penyelesaian pertama persamaan Bessel berbentuk

$$y_1 = a_0\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2}x^{2n}\right] \qquad x>0$$

Fungsi dalam kurung dikenal sebagai *fungsi Bessel jenis pertama orde nol* dan dinotasikan oleh $J_0(x)$ dan deret konvergen untuk semua nilai x.

Penyelesaian kedua

Persamaan Bessel untuk p = 0 dapat ditulis dalam bentuk

$$xy'' + y' + xy = 0 \tag{4.4}$$

dan penyelesaian pertama berbentuk $y_1 = J_0(x)$, dimana

$$J_0(x) = \left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2}x^{2n}\right] \qquad x>0$$

Berdasarkan teorema 3.C.2 , penyelesaian kedua berbentuk

$$y_2 = y_1 \ln x + \sum_{n=1}^{\infty} A_n x^n$$

atau $$y_2 = J_0(x)\ln x + \sum_{n=1}^{\infty} A_n x^n$$

sehingga $$y_2' = J_0'\ln x + \frac{J_0}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} nA_n x^{n-1}$$

dan $$y_2'' = J_0''\ln x + \frac{2J_0'}{x} - \frac{J_0}{x^2} + \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)A_n x^{n-2}$$

Disubstitusikan y_2 dan turunan – turunannya ke persamaan diferensial (4.4) sehingga diperoleh :

$$x\left(J_0''\ln x + \frac{2J_0'}{x} - \frac{J_0}{x^2} + \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)A_n x^{n-2}\right) + J_0'\ln x + \frac{J_0}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} nA_n x^{n-1}$$

$$+\ x\left(J_0 \ln x + \sum_{n=1}^{\infty} A_n x^n\right) = 0$$

$$xJ_0''\ln x + 2J_0' - \frac{J_0}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)A_n x^{n-1} + J_0'\ln x + \frac{J_0}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} nA_n x^{n-1}$$

$$+\ x J_0 \ln\ x\ +\ \sum_{n=1}^{\infty} A_n x^{n+1} = 0$$

Suku – suku logaritma hilang karena J_0 merupakan penyelesaian persamaan diferensial (4.4) sehingga

$$2J_0' + \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)A_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} nA_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n x^{n+1} = 0$$

$$2J_0' + \sum_{n=1}^{\infty} \left(n(n-1) + n\right)A_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n x^{n+1} = 0 \qquad (4.5)$$

sedangkan $J_0' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2n}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n-1}$

Disubstitusikan J_0' ke persamaan (4.5) :

$$2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2n}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} n^2 A_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n x^{n+1} = 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 A_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n x^{n+1} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 4n}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n-1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 A_n x^{n-1} + \sum_{n=3}^{\infty} A_{n-2} x^{n-1} = -\left(-x + \frac{x^3}{8} - \frac{x^5}{8.24} + \frac{x^7}{16(24)^2} - \ldots\right)$$

Koefisien x^0 : $A_1 = 0$

x^2 : $9A_3 + A_1 = 0$, jadi $A_3 = 0$

x^4 : $25A_5 + A_3 = 0$, jadi $A_5 = 0$

Jadi, karena $A_1 = 0$ maka secara berurutan diperoleh $A_3 = A_5 = A_7 = \ldots = A_{2n+1} = 0$

Koefisien x^1 : $4A_2 = 1$, $A_2 = ¼$

x^3 : $16A_4 + A_2 = -\frac{1}{8}$, $A_4 = -\frac{3}{16.8} = -\frac{3}{2^5.4}$

x^5 : $36A_6 + A_4 = \frac{1}{8.24}$, $A_6 = \frac{11}{13824} = \frac{11}{2^7 6^2 3}$

x^7 : $64A_8 + A_6 = -\frac{1}{16.24^2}$, $A_8 = -\frac{25}{1769472} = -\frac{25}{2^{10} 24^2 3}$

…

Atau dapat kita tuliskan :

$$A_2 = \frac{1}{2^2(1)^2}(1)$$

$$A_4 = -\frac{1}{2^4(2.1)^2}\left(1+\frac{1}{2}\right)$$

$$A_6 = \frac{1}{2^6(3.2.1)^2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)$$

$$A_8 = -\frac{1}{2^8(4.3.2.1)^2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)$$

…

$$A_{2n} = \frac{(-1)^{n-1}}{2^{2n}(n!)^2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}\right)$$

……………………… (4.6)

untuk n = 1, 2, …

Didefinisikan nilai dalam kurung sebagai H_n

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}$$

Sehingga persamaan (4.6) menjadi

$$a_{2n} = -H_n \frac{(-1)^n a_0}{2^{2n}(n!)^2}$$

Dengan mensubstitusikan $A_1 = A_3 = A_5 = \ldots = A_{2n-1} = 0$ kedalam bentuk penyelesaian kedua (y_2) diperoleh hasil :

$$y_2 = J_0(x)\ln x + \sum_{n=1}^{\infty} A_{2n} x^{2n}$$

$$y_2 = J_0(x)\ln x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} H_n}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n} \qquad x > 0$$

Penyelesaian kedua dikenal sebagai *fungsi Bessel jenis kedua orde nol.*

D. Persamaan *Hipergeometri*

Persamaan diferensial

$$x(1-x)y'' + [c - (a+b+1)x]y' - aby = 0 \qquad (4.7)$$

dengan a, b, dan c parameter – parameter yang ditentukan disebut persamaan diferensial hipergeometri dari Gauss.

Titik $x_0 = 0$ merupakan titik singular regular dan kita andaikan c bukan bilangan bulat, maka salah satu penyelesaian berbentuk $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$.

Dengan mensubstitusikan y dan turunan – turunannya ke persamaan diferensial yang diketahui diperoleh :

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-1} - \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r} + c\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r-1}$$

$$-(a+b+1)\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r} - ab\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+r} = 0$$

Persamaan indisialnya $r(r-1) + cr = 0$ atau $r^2 + (c-1)r = 0$ sehingga akar – akar persamaan indisialnya $r_1 = 0$ dan $r_2 = 1 - c$

(1) Untuk akar – akar persamaan indisial $r_1 = 0$

Solusi berbentuk $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Dengan mensubstitusikan solusi ini ke persamaan (5.7) diperoleh persamaan :

$$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_n x^{n-1} - \sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_n x^n + c\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n - (a+b+1)\sum_{n=1}^{\infty}na_n x^n$$

$$-ab\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n = 0$$

Deret dapat disederhanakan menjadi

$$\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)a_{n+1}x^n - \sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_n x^n + c\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n - (a+b+1)\sum_{n=1}^{\infty}na_n x^n$$

$$-ab\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n = 0$$

Untuk n = 0, $ca_1 - aba_0 = 0$ sehingga $a_1 = \frac{ab}{c}a_0$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\{[(n+1)n + c(n+1)]a_{n+1} - [(a+b+1)n + ab]a_n\}x^n$$

$$-\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_n x^n = 0$$

Untuk n = 1, $a_2 = \frac{a(a+1)b(b+1)}{2c(c+1)}a_0$

Untuk n = 2, $a_3 = \frac{a(a+1)(a+2)b(b+1)(b+2)}{3.2c(c+1)(c+2)}a_0$

Untuk n = 3, $a_4 = \frac{a(a+1)(a+2)(a+3)b(b+1)(b+2)(b+3)}{4.3.2c(c+1)(c+2)(c+3)}a_0$

...

k ≥ 1 $\quad a_k = \frac{a(a+1)(a+2)...(a+k-1)b(b+1)(b+2)...(b+k-1)}{k!c(c+1)(c+2)...(c+k-1)}a_0$

atau dapat disederhanakan menjadi :

$$a_k = \frac{(a)_k(b)_k}{k!(c)_k}a_0$$

Dengan memilih $a_0 = 1$ diperoleh penyelesaian pertama dari persamaan hipergeometrik yaitu :

$$y_1 = \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(a)_k(b)_k}{k!(c)_k}x^k\right]$$

dengan $(a)_k = a(a+1)(a+2)...(a+k-1)$

$(b)_k = b(b+1)(b+2) \ldots (b+k-1)$

$(c)_k = c(c+1)(c+2) \ldots (c+k-1)$

Bentuk penyelesaian khusus diatas dinamakan fungsi hipergeometri dan dinyatakan oleh F(a , b ; c; x).

(2) Untuk akar – akar persamaan indisial r = 1 – c , maka solusi berbentuk $y = \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^{n+1-c}$ (teorema 3.C.1). Dengan mensubstitusikannya ke persamaan diferensial (4.7) diperoleh :

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1-c)(n-c)A_n x^{n-c} - \sum_{n=0}^{\infty}(n+1-c)(n-c)A_n x^{n-c+1}$$

$$+c\sum_{n=0}^{\infty}(n+1-c)A_n x^{n-c} - (a+b+1)\sum_{n=0}^{\infty}(n+1-c)A_n x^{n-c+1} - ab\sum_{n=0}^{\infty}A_n x^{n+1-c} = 0$$

Dengan menyamakan kedalam pangkat x^{n-c} diperoleh :

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1-c)(n-c)A_n x^{n-c} - \sum_{n=1}^{\infty}(n-c)(n-c-1)A_{n-1} x^{n-c}$$

$$+c\sum_{n=0}^{\infty}(n+1-c)A_n x^{n-c} - (a+b+1)\sum_{n=1}^{\infty}(n-c)A_{n-1} x^{n-c} - ab\sum_{n=1}^{\infty}A_{n-1} x^{n-c} = 0$$

Kita mulai untuk n = 1, persamaan di atas dapat disederhanakan menjadi

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[(n+1-c)(n-c)+c(n+1-c)\right]A_n x^{n-c}$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\left[(n-c)(n-c-1)+(a+b+1)(n-c)+ab\right]A_{n-1} x^{n-c} = 0$$

Berdasarkan sifat kesamaan deret pangkat diperoleh

$$A_n = \frac{n(n-2c+a+b)+c(c-a-b)}{n(n-c+1)}A_{n-1} \qquad n \geq 1$$

$$A_1 = \frac{(a+1-c)(b+1-c)}{(2-c)}A_0$$

$$A_2 = \frac{(a+1-c)(a+2-c)(b+1-c)(b+2-c)}{(2-c)(3-c)2!}A_0$$

$$A_3 = \frac{(a+1-c)(a+2-c)(a+3-c)(b+1-c)(b+2-c)(b+3-c)}{(2-c)(3-c)(4-c)3!} A_0$$

...

$$A_k = \frac{(a+1-c)_k (b+1-c)_k}{(2-c)_k k!} A_0 \qquad k \geq 1$$

Jadi penyelesaian kedua berbentuk

$$y_2 = A_0 \left[x^{1-c} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(a+1-c)_k (b+1-c)_k}{(2-c)_k} x^{k+1-c} \right]$$

dengan $(a+1-c)_k = (a+1-c)(a+2-c)...(a+(k-1)-c)$

$(b+1-c)_k = (b+1-c)(b+2-c) ... (b+(k-1)-c)$

$(2-c)_k = (2-c)(3-c)...((k-1)-c)$

Dalam notasi hipergeometri, penyelesaian kedua ditulis dalam bentuk

$$y_2 = x^{1-c} F(a+1-c, b+1-c; 2-c; x)$$

BAB V

PENUTUP

A. KESIMPULAN

Metode deret pangkat dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial linear orde dua, baik itu persamaan diferensial dengan koefisien konstan maupun variabel. Metode deret pangkat menghasilkan penyelesaian umum berbentuk deret pangkat. Bentuk penyelesaian tergantung pada jenis titik yang dimiliki persamaan diferensial itu, apakah titik biasa atau titik singular. Sebuah titik x_0 disebut titik biasa dari persamaan diferensial

$$a_2(x)y''+a_1(x)y'+a_0(x)y=0$$

jika kedua fungsi

$$P_1(x)=\frac{a_1(x)}{a_2(x)} \text{ dan } P_2(x)=\frac{a_0(x)}{a_2(x)}$$

analitik pada titik x_0. Jika paling sedikit satu fungsi di atas tidak analitik pada x_0 maka x_0 disebut titik singular. Titik singular dibagi menjadi dua yaitu titik singular regular dan titik singular tak regular.

Sebuah titik x_0 disebut titik singular regular dari persamaan diferensial $a_2(x)y''+a_1(x)y'+a_0(x)y=0$ jika titik ini adalah sebuah titik singular dan kedua fungsi

$$(x-x_0)\frac{a_1(x)}{a_2(x)} \text{ dan } (x-x_0)^2\frac{a_0(x)}{a_2(x)}$$

analitik pada titik x_0. Jika paling sedikit satu fungsi di atas tidak analitik pada x_0, maka x_0 disebut titik singular tak regular.

Penyelesaian persamaan diferensial disekitar titik biasa berbentuk $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ yang konvergen dalam $| x - x_0 | < R$, $R > 0$ sedangkan salah satu penyelesaian persamaan diferensial di sekitar titik singular regular berbentuk

$$y = (x - x_0)^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n .$$

Bentuk penyelesaian kedua akan ditunjukkan oleh persamaan indisial, bergantung pada akar – akar persamaan indisial tersebut.

Langkah – langkah penyelesaian persamaan diferensial di sekitar titik biasa dapat dirumuskan sebagai berikut :

1. Diasumsikan penyelesaian berbentuk $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$.
2. Disubstitusikan y dan turunan – turunannya ke persamaan diferensial yang diketahui.
3. Pangkat – pangkat x yang sama dikelompokkan dan koefisien – koefisien dari setiap pangkat x disamakan dengan nol (untuk persamaan diferensial homogen). Ini memberikan hubungan yang dapat digunakan untuk menentukan koefisien – koefisien lain secara berurutan.
4. Nilai – nilai dari koefisien tersebut disubstitusikan ke asumsi penyelesaian.

Untuk menemukan penyelesaian persamaan diferensial di sekitar titik singular regular, harus ditentukan nilai r_1 dan r_2 , dengan langkah – langkah :

1. Diasumsikan penyelesaian berbentuk $y = (x - x_0)^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$
2. Disubstitusikan y dan turunan – turunannya ke persamaan diferensial yang diketahui dan disederhanakan.
3. Koefisien pangkat terendah dari $(x - x_0)$ disamakan dengan nol. Ini bertujuan untuk mencari akar – akar persamaan indisial (r_1 dan r_2).
4. Apabila nilai r telah ditentukan, selanjutnya adalah menggunakan nilai r tersebut pada persamaan deret pangkat untuk menentukan hubungan antara koefisien – koefisien dari pangkat x.

Kasus 1, $r_1 - r_2 \neq N$ (N bilangan bulat).

Basis penyelesaian :

$$y_1 = (x - x_0)^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

$$y_2 = (x - x_0)^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} A_n (x - x_0)^n$$

Kasus 2, $r_1 = r_2 = r$, dengan $r = \frac{1}{2}(1 - b_0)$

Basis penyelesaian :

$$y_1 = (x - x_0)^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

$$y_2 = y_1 \ln x + (x - x_0)^r \sum_{n=1}^{\infty} A_n (x - x_0)^n$$

Kasus 3, $r_1 - r_2 = N$ (N bilangan bulat positif).

Basis penyelesaian :

$$y_1 = (x - x_0)^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

$$y_2 = k y_1 \ln x + (x - x_0)^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} A_n (x - x_0)^n$$

Penyelesaaian persamaan diferensial Airy, Hermite, Bessel, dan Hipergeometri disebut fungsi Airy, fungsi Hermite, fungsi Bessel, dan fungsi Hipergeometri.

Salah satu keunggulan metode deret pangkat adalah metode deret pangkat dapat dipakai untuk mencari penyelesaian tertentu atau untuk menghampiri penyelesaian dari persamaan diferensial linear dengan koefisien konstan maupun variabel.

B. SARAN

Metode deret pangkat tidak hanya dapat dipakai untuk menyelesaikan persamaan diferensial linear, tetapi juga untuk persamaan diferensial tak linear. Untuk itu kajian tersebut dapat diteliti oleh pembaca yang berminat sebagai khasanah ilmu pengetahuan.

DAFTAR PUSTAKA

Agarwal, Ravi P & Gupta, Ramesh C. (1993). *Essentials Of Ordinary Differential Equations.* Singapore : Mc Graw-Hill Book Company.

Finizio, Ladas, Santoso. (1988). *Persamaan Diferensial Biasa Dengan Penerapan Modern Edisi 2.* Jakarta : Erlangga.

Kreyszig, Erwin. (1990). *Matematika Teknik Lanjutan Jilid 1 Edisi 6.* Jakarta : Erlangga.

Purcell, Dale, Susila. (1989). *Kalkulus Dan Geometri Analitis Jilid 2 Edisi 4.* Jakarta : Erlangga.

Rainville, Earl D & Bedient, Philip E. (1974). *Elementary Differential Equations (fifth edition).* New York : Macmillan Publishing Co, Inc.

Rice, Bernard J & Strange, Jerry D. (1986). *Ordinary Differential Equations With Applications.* California : Brooks/Cole Publishing Company.

Rudin, Walter. (1976). *Principles Of Mathematical Analysis (Third Edition).* Singapore : McGraw – Hill Book Company.

Taylor, Angus E. (1955). *Advanced Calculus.* Ginn and Company.