MENGHITUNG RESULTAN DUA SUKU BANYAK DENGAN MENGGUNAKAN METODE SYLVESTER DAN CAYLEY

SKRIPSI

Diajukan untuk Memenuhi Salah Satu Syarat
Memperoleh Gelar Sarjana Pendidikan
Program Studi Pendidikan Matematika

Oleh:
Gati Sri Wahyuni
NIM: 001414064

Program Studi Pendidikan Matematika
Jurusan Pendidikan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan
Universitas Sanata Dharma
Yogyakarta
2006

MENGHITUNG RESULTAN DUA SUKU BANYAK DENGAN MENGGUNAKAN METODE SYLVESTER DAN CAYLEY

Oleh:

Gati Sri Wahyuni

NIM : 001414064

Telah disetujui oleh:

Pembimbing

M.V. Any Herawati, S.Si., M.Si

Tanggal : 7 Maret 2006

MENGHITUNG RESULTAN DUA SUKU BANYAK DENGAN MENGGUNAKAN METODE SYLVESTER DAN CAYLEY

Dipersiapkan dan ditulis oleh:
Gati Sri Wahyuni
NIM: 001414064

Telah Dipertahankan di Depan Panitia Penguji
Pada tanggal 24 Maret 2006
dan Dinyatakan Telah Memenuhi Syarat

Susunan Panitia Penguji

	Nama Lengkap	Tanda Tangan
Ketua	: Drs. Severinus Domi, M.Si.	....
Sekretaris	: M. Andy Rudhito, S.Pd., M.Si.	....
Anggota	: M.V. Any Herawati, S.Si., M.Si.	....
Anggota	: M. Andy Rudhito, S.Pd., M.Si.	....
Anggota	: Hongki Julie, S.Pd., M.Si.	....

Yogyakarta, 24 Maret 2006
Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan
Universitas Sanata Dharma
Dekan,

Drs. T. Sarkim, M.Ed., Ph.D.

Jadikanlah Kemarin Sebagai Pengalaman, Hari Ini Sebagai Usaha, Dan Esok Sebagai Harapan dan Cita-cita

Dengan Penuh Syukur Kehadirat Allah SWT,

Skripsi Ini Kupersembahkan Untuk :

- Bapak dan Ibu tercinta
- Kakakku dan Adikku

PERNYATAAN KEASLIAN KARYA

Saya menyatakan dengan sesungguhnya bahwa skripsi yang saya tulis ini tidak memuat karya atau bagian karya orang lain, kecuali yang telah disebutkan dalam kutipan dan daftar pustaka, sebagaimana layaknya karya ilmiah.

Yogyakarta, 24 Maret 2006

Penulis

Gati Sri Wahyuni

ABSTRAK

Dalam skripsi ini akan dibahas tentang metode Sylvester dan Cayley untuk menghitung resultan dua suku banyak f dan g yang dilambangkan dengan $R(f,g)$. Misalkan F adalah suatu lapangan dan suku banyak $f(x)$ serta $g(x)$ dalam $F[x]$ yang berderajat berturut-turut n dan m. Perhitungan resultan dua buah suku banyak dengan metode Sylvester menggunakan matriks Sylvester yang berukuran $(n+m)\times(n+m)$, sedangkan perhitungan resultan dengan metode Cayley menggunakan matriks Cayley yang berukuran $maks(n,m)\times maks(n,m)$. Perhitungan resultan dengan menggunakan metode Sylvester digunakan jika $m \geq n$, sedangkan perhitungan resultan dengan menggunakan metode Cayley digunakan jika $m < n$.

ABSTRACT

This thesis will discuss about Sylvester and Cayley method for counting the two polynomials resultant that is symbolized by $R(f,g)$. Let F be any field, polynomials $f(x)$ and $g(x)$ in $F[x]$, where degree $f(x)$ is n and degree $g(x)$ is m. To compute the resultant two polynomial by the Sylvester method use Sylvester matrix which size is $(n+m)\times(n+m)$ and it use Cayley method with Cayley matrix which size is $maks(n,m)\times maks(n,m)$. Sylvester method used if $m \geq n$ and Cayley method used if $m < n$

KATA PENGANTAR

Puji Syukur penulis panjatkan kehadirat Allah SWT yang telah memberikan rahmat serta hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini dengan lancar. Skripsi ini dimaksudkan untuk memenuhi salah satu syarat dalam menyelesaikan pendidikan Srata I (SI) dan meraih gelar Sarjana Pendidikan pada Program Studi Pendidikan Matematika di Universitas Sanata Dharma Yogyakarta.

Penulis menyadari bahwa dalam proses penulisan skripsi ini tidak lepas dari keterlibatan banyak pihak. Oleh karena itu pada kesempatan ini sudah selayaknya penulis mengucapkan banyak terima kasih kepada :

1. Ibu M.V. Any Herawati, S.Si., M.Si, atas segala kesabarannya dalam memberikan bimbingan selama penyusunan skripsi.
2. Bapak M. Andi Rudhito, S. Pd, M.Si, selaku Kaprodi Pendidikan Matematika Universitas Sanata Dharma.
3. Ibu D. Novi Handayani, S. Pd, atas segala bantuannya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.
4. Pak Sugeng dan Pak Narjo, atas segala keramahannya dalam melayani mahasiswa-mahasiswi untuk kelancaran studi.
5. Bapak dan Ibu tercinta yang selama ini selalu mendampingi, memberi semangat, dorongan dan juga doanya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.

6. Kakakku dan Adikku yang selalu memberikan semangat kepada penulis untuk segera menyelasaikan skripsi ini.
7. Sahabat-sahabatku Lina, Paulin, Yuli, Nia, Eni, Rina yang selalu memberikan semangat, dorongan dan perhatian kepada penulis.
8. Teman-temanku Anis, Dina, Deni, Firman, Dwi, Andre, Tinus, Didik, Susi, Ria, Jeki, Purba yang selalu memberikan dorongan serta menemani penulis diperpustakaan.
9. Semua teman-teman angkatan 2000, terima kasih atas perhatian, dukungan dan kebersamaannya selama ini.
10. Semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu.

Penulis menyadari akan segala kekurangan yang termuat dalam skripsi ini. Oleh karena itu, penulis mengharapkan kritik dan saran guna menyempurnakan skripsi ini. Akhirnya penulis berharap semoga skripsi ini bermanfaat bagi para pembaca.

Yogyakarta, 24 Maret 2006

Penulis

Gati Sri Wahyuni

DAFTAR ISI

BAB I

PENDAHULUAN

A. Latar Belakang Masalah

Dalam aljabar kita mengenal istilah suku banyak. Suku banyak yang di maksud di sini adalah suku banyak atas lapangan F. Misalkan F adalah suatu lapangan, $f(x)$ dan $g(x)$ adalah dua suku banyak dalam $F[x]$ yang berturut-turut berderajat n dan m dengan $n+m \geq 1$.

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

$$g(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0$$

Resultan f dan g didefinisikan sebagai berikut :

$$R(f,g) = \det \begin{pmatrix} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \ldots & a_0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \ldots & a_0 & \ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \ldots & 0 & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \ldots & a_0 \\ b_m & b_{m-1} & b_{m-2} & \ldots & b_0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & b_m & b_{m-1} & b_{m-2} & \ldots & b_0 & \ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \ldots & 0 & b_m & b_{m-1} & b_{m-2} & \ldots & b_0 \end{pmatrix}$$

Matriks yang berukuran $(n+m)\times(n+m)$ di atas disebut dengan matriks Sylvester[1].

[1] Sylvester diambil dari nama seorang ilmuwan yaitu James Joseph Sylvester (English, 1814-1897) dan Cayley diambil dari nama seorang ilmuwan yaitu Arthur Cayley (English, 1821-1895)

Ide dasar pengertian resultan dua suku banyak adalah sebagai berikut :

Misalkan F adalah suatu lapangan, $f(x)$ dan $g(x)$ adalah dua suku banyak dalam $F[x]$ yang berturut-turut berderajat n dan m dengan $n+m \geq 1$.

Misal : $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, $a_n \neq 0$ dan

$$g(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0$$

Suku banyak $f(x)$ dan $g(x)$ mempunyai pembagi persekutuan yang tidak konstan jika dan hanya jika terdapat suku banyak tak konstan $h(x)$ dan $k(x)$ didalam $F[x]$ sedemikian sehingga :

$$h(x)f(x) = k(x)g(x) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

dengan derajat $h(x) \leq m-1$ dan derajat $k(x) \leq n-1$.

Misalkan : $h(x) = c_{m-1}x^{m-1} + c_{m-2}x^{m-2} + \ldots + c_0$

$$k(x) = d_{n-1}x^{n-1} + d_{n-2}x^{n-2} + \ldots + d_0$$

Persamaan (1) dapat dinyatakan dalam bentuk sistem persamaan linear berikut :

$$\left.\begin{array}{c} c_{m-1}a_n = d_{n-1}b_m \\ c_{m-1}a_{n-1} + c_{m-2}a_n = d_{n-1}b_{m-1} + d_{n-2}b_m \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ c_0 a_0 = d_0 b_0 \end{array}\right\} \quad (2)$$

yang terdiri atas $n+m$ persamaan linear dengan variabel-veriabel c_i dan d_j, dengan $i = 0, 1, 2, \ldots, m-1$ dan $j = 0, 1, 2, \ldots, n-1$. Suku banyak $f(x)$ dan $g(x)$ memiliki pembagi persekutuan yang tidak konstan jika sistem persamaan (2) memiliki penyelasaian yang tidak nol.

Apabila sistem persamaan (2) disusun dalam bentuk matriks maka diperoleh :

$$\begin{bmatrix} a_n & 0 & \cdots & 0 & -b_m & 0 & \cdots & 0 \\ a_{n-1} & a_n & \cdots & 0 & -b_{m-1} & -b_m & \cdots & 0 \\ a_{n-2} & a_{n-1} & \cdots & 0 & -b_{m-2} & -b_{m-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} & -b_0 & -b_1 & \cdots & 0 \\ 0 & a_0 & \cdots & a_{n-2} & 0 & -b_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_0 & 0 & 0 & \cdots & -b_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{m-1} \\ c_{m-2} \\ \vdots \\ c_0 \\ d_{n-1} \\ d_{n-2} \\ \vdots \\ d_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

Menunjukkan bahwa sistem persamaan (3) mempunyai penyelesaian non trivial ekuivalen dengan menyatakan determinan matriks bujur sangkar dalam persamaan (3) adalah nol. Determinan dari matriks bujur sangkar pada persamaan (3) bila diubah dengan menggunakan operasi baris elementer dan operasi transpose kita dapatkan

$$\begin{pmatrix} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_0 \\ b_m & b_{m-1} & b_{m-2} & \cdots & b_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_m & b_{m-1} & b_{m-2} & \cdots & b_0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_m & b_{m-1} & b_{m-2} & \cdots & b_0 \end{pmatrix}$$

Determinan dari matriks diatas disebut dengan Resultan dari suku banyak $f(x)$ *dan* $g(x)$, ditulis dengan $R(f,g)$.

Sylvester mendefinisikan $R(f,g)$ dengan mengubah matriks bujur sangkar pada persamaan (3) melalui operasi baris elementer dan operasi transpose. Dari definisi $R(f,g)$, yang diberikan Sylvester, ukuran matriks yang berkaitan dengan $R(f,g)$ adalah $(n+m)\times(n+m)$. Ukuran matriks yang lebih kecil dalam perhitungan resultan dua suku banyak diberikan oleh Cayley yaitu $maks\,(n,m)\ \times\ maks\ (n,m)$ yang disebut dengan metode Cayley.

B. Perumusan Masalah

Pokok permasalahan yang akan di bahas adalah :

a. Bagaimana metode Sylvester digunakan dalam menyelesaikan resultan dua suku banyak ?

b. Bagaimana metode Cayley digunakan dalam menyelesaikan resultan dua suku banyak ?

C. Tujuan Penulisan

Penulisan ini bertujuan untuk :

a. Memahami metode Sylvester dalam penyelesaian resultan dua buah suku banyak.

b. Memahami metode Cayley dalam penyelesaian resultan dua buah suku banyak.

D. Pembatasan Masalah

Dalam skripsi ini penulis membatasi permasalahan pada resultan dua suku banyak dengan menggunakan metode Sylvester dan Cayley serta landasan teori yang mendukungnya. Matriks dan sistem persamaan linear tidak akan dibahas karena dianggap sudah tahu.

E. Metode Penulisan

Metode yang digunakan dalam penulisan skripsi ini adalah metode studi pustaka.

BAB II

SUKU BANYAK

Pada bab ini akan dibahas suku banyak atas lapangan F, khususnya lapangan bilangan real R , yang meliputi definisi, operasi-operasi yang berlaku serta sifat-sifatnya. Tapi sebelumnya akan dibahas terlebih dulu pengertian daerah integral dan lapangan dengan dua operasi penjumlahan dan perkalian.

A. Pengertian Daerah Integral

Definisi 2.1

Himpunan tak kosong R yang dilengkapi dengan 2 operasi penjumlahan (+) dan perkalian (.) disebut *Ring* apabila memenuhi aksioma-aksioma berikut :

1. $(\forall\ a,b \in R)\ \ (a+b) \in R \ \ dan\ \ (a.b) \in R$
2. $(\forall\ a,b \in R)\ \ a+b = b+a$
3. $(\forall\ a,b \in R)\ \ (a+b)+c = a+(b+c)$
4. $(\exists\ 0 \in R)\ (\forall\ a \in R)\ 0+a = a+0 = a$
5. $(\forall\ a \in R)\ (\exists\ -a \in R)\ a+(-a) = (-a)+a = 0$
6. $(\forall\ a,b,c \in R)\ \ (a.b).c = a.(b.c)$
7. $(\forall\ a,b,c \in R)\ \ a.(b+c) = a.b+a.c \ \ dan\ \ (a+b).c = a.c+b.c$

Definisi 2.2

Ring R disebut *ring komutatif* jika operasi perkalian bersifat komutatif di R yaitu $(\forall\, a,b \in R)\;\; a.b = b.a$.

Definisi 2.3

Elemen $e \in R$ disebut *elemen satuan* ring R bila $(\forall\, a \in R)\;\; a.e = e.a = a$.

Contoh 2.1

Bilangan 1 merupakan elemen satuan dalam ring bilangan-bilangan bulat (Z).

Definisi 2. 4

Suatu elemen $a \neq 0$ dalam ring komutatif R disebut *pembagi nol* di dalam R bila dan hanya bila $(\exists\; b \in R,\;\; b \neq 0)\;\; a.b = 0$.

Jadi ring R memuat pembagi nol bila dan hanya bila $(\exists\, a,b \in R)(a \neq 0,\;\; b \neq 0)\, a.b = 0$.

Ring R tidak memuat pembagi nol bila dan hanya bila $(\forall\, a,b \in R)\, a.b = 0 \;\; \rightarrow \;\; a = 0 \;\; \vee \;\; b = 0$.

Definisi 2.5

Suatu ring komutatif D yang memuat elemen satuan e dan tidak memuat pembagi nol disebut *daerah integral*. Jadi D daerah integral bila dan hanya bila D ring yang memenuhi :

1. $(\forall\, a,b \in D)\;\; a.b = b.a,$

2. $(\exists\, e \in D)(\forall\, a \in D)\, a.e = e.a = a,$

3. $(\forall\, a,b \in D)\, a.b = 0 \;\rightarrow\; a = 0 \;\vee\; b = 0\,.$

Contoh 2.2

Ring bilangan bulat Z merupakan daerah integral dan ring bilangan genap bukan merupakan daerah integral karena tidak memuat elemen satuan.

B. Pengertian Lapangan

Definisi 2.6

Himpunan F disebut *lapangan*, jika F memuat lebih dari dua elemen, dilengkapi dengan operasi penjumlahan dan perkalian, dan memenuhi aksioma-aksioma berikut :

1. Untuk semua $a, b \in F$ maka $a + b \in F$
2. Untuk semua $a, b \in F$ berlaku $a + b = b + a$
3. Untuk semua $a, b, c \in F$ berlaku $a + (b + c) = (a + b) + c$
4. Ada elemen $0 \in F$ sedemikian sehingga $a + 0 = a \quad \forall a \in F$
5. Untuk setiap $a \in F$ ada elemen $-a \in F$ sedemikian sehingga $a + (-a) = 0$
6. Untuk semua $a, b \in F$ maka $a\,b \in F$
7. Untuk semua $a, b \in F$ maka $ab = ba$
8. Untuk semua $a, b, c \in F$ berlaku $a\,(b\,c) = (a\,b)\,c$

9. Ada elemen $1 \in F$ sedemikian sehingga $a1 = a \quad \forall a \in F$
10. Untuk setiap elemen $a \neq 0 \in F$, ada elemen $a^{-1} \in F$ (yang disebut invers dari a) sedemikian sehingga $aa^{-1} = 1$
11. Untuk semua $a, b, c \in F$ berlaku $a(b+c) = ab + ac$ dan $(a+b)c = ac + bc$.

Contoh 2.3

Himpunan semua bilangan rasional Q dan bilangan real R terhadap operasi penjumlahan dan operasi perkalian masing-masing membentuk lapangan.

Teorema 2.1

Setiap lapangan pasti merupakan daerah integral.

Bukti :

Andaikan $(F, +, .)$ adalah suatu lapangan, maka $(F, +, .)$ merupakan ring komutatif dan memuat elemen satuan e.

Ambil dua elemen $a, b \in F$ sedemikian sehingga $a.b = 0$ dan $a \neq 0$, maka

$$a^{-1}.(a.b) = a^{-1}.0$$

$$(a^{-1}.a).b = 0$$

$$e.b = 0$$

$$b = 0.$$

Jadi F merupakan daerah integral. ■

2. Untuk $n > m$

$$f(x)+g(x) = (a_0+b_0)+ \ \dots \ +(a_m+b_m)x^m + a_{m+1}x^{m+1} + \dots + a_n x^n$$

$$= \sum_{i=0}^{m}(a_i+b_i)x^i + \sum_{i=m+1}^{n} a_i x^i$$

3. Untuk $n < m$

$$f(x)+g(x) = (a_0+b_0)+ \ \dots \ +(a_n+b_n)x^n + b_{n+1}x^{n+1} + \dots + b_m x^m$$

$$= \sum_{i=0}^{n}(a_i+b_i)x^i + \sum_{i=n+1}^{m} b_i x^i$$

Definisi 2.9

Andaikan $f(x)$ dan $g(x) \in$ F[x] dengan $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i\, x^i$ dan $g(x) = \sum_{j=0}^{m} b_j\, x^j$,

dimana $a_n \neq 0$ dan $b_m \neq 0$. *Hasil kali* $f(x)g(x)$ didefinisikan sebagai :

$$f(x).g(x) = \sum_{r=0}^{n+m}\left(\sum\nolimits_{i+j=r} a_i b_j\right)x^r$$

Di bawah ini akan ditunjukkan bahwa $(F[x],+,\times)$, operasi penjumlahan dan operasi perkalian pada $F[x]$ membentuk daerah integral.

Terhadap operasi penjumlahan $(F[x],+)$

Selanjutnya, misal $f(x), g(x)$, $h(x)$ $\in F[x]$ dengan

$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$; $g(x) = \sum_{i=0}^{m} b_i x^i$ dan $h(x) = \sum_{i=0}^{s} c_i x^i$,

1. Bersifat komutatif

Untuk $n = m$

$$f(x)+g(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i + \sum_{i=0}^{m} b_i x^i = \sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i) x^i$$

$$= \sum_{i=0}^{n} (b_i + a_i) x^i = \sum_{i=0}^{m} b_i x^i + \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = g(x) + f(x)$$

Untuk $n > m$

$$f(x)+g(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i + \sum_{i=0}^{m} b_i x^i = \sum_{i=0}^{m} (a_i + b_i) x^i + \sum_{i=m+1}^{n} a_i x^i$$

$$= \sum_{i=0}^{m} (b_i + a_i) x^i + \sum_{i=m+1}^{n} a_i x^i = \sum_{i=0}^{m} b_i x^i + \sum_{i=0}^{m} a_i x^i + \sum_{i=m+1}^{n} a_i x^i$$

$$= \sum_{i=0}^{m} b_i x^i + \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = g(x) + f(x)$$

Karena untuk setiap $a_i, b_i \in F$ berlaku $a_i + b_i = b_i + a_i$

Untuk $n < m$

$$f(x)+g(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i + \sum_{i=0}^{m} b_i x^i = \sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i) x^i + \sum_{i=n+1}^{m} b_i x^i$$

$$= \sum_{i=0}^{n} (b_i + a_i) x^i + \sum_{i=n+1}^{m} b_i x^i = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i + \sum_{i=0}^{n} a_i x^i + \sum_{i=n+1}^{m} b_i x^i$$

$$= \sum_{i=0}^{n} b_i x^i + \sum_{i=n+1}^{m} b_i x^i + \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = \sum_{i=0}^{m} b_i x^i + \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = g(x) + f(x).$$

Karena untuk setiap $a_i, b_i \in F$ berlaku $a_i + b_i = b_i + a_i$

Jadi operasi penjumlahan bersifat komutatif.

2. Bersifat asosiatif . Bukti untuk sifat asosiatif ini terdapat banyak kemungkinan, tetapi di sini hanya akan dibuktikan untuk beberapa saja. Sedangkan kemungkinan-kemungkinan yang lain buktinya analog.

untuk $n = m = s$

$$
\begin{aligned}
(f(x)+g(x))+h(x) &= \left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i + \sum_{i=0}^{m} b_i x^i\right) + \sum_{i=0}^{s} c_i x^i \\
&= \sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i)x^i + \sum_{i=0}^{s} c_i x^i = \sum_{i=0}^{n} ((a_i + b_i) + c_i)x^i \\
&= \sum_{i=0}^{n} (a_i + (b_i + c_i)x^i = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i + \sum_{i=0}^{m} (b_i + c_i)x^i \\
&= \sum_{i=0}^{n} a_i x^i + \left(\sum_{i=0}^{m} b_i x^i + \sum_{i=0}^{s} c_i x^i\right) \\
&= f(x) + (g(x) + h(x))
\end{aligned}
$$

Karena untuk setiap a_i , b_i , $c_i \in F$ berlaku $(a_i + b_i) + c_i = a_i + (b_i + c_i)$

Untuk $n > m > s$

$$
\begin{aligned}
(f(x)+g(x))+h(x) &= \left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i + \sum_{i=0}^{m} b_i x^i\right) + \sum_{i=0}^{s} c_i x^i \\
&= \left(\sum_{i=0}^{m} (a_i + b_i)x^i + \sum_{i=m+1}^{n} a_i x^i\right) + \sum_{i=0}^{s} c_i x^i \\
&= \left(\sum_{i=0}^{m} (a_i + b_i)x^i + \sum_{i=0}^{s} c_i x^i\right) + \sum_{i=m+1}^{n} a_i x^i \\
&= \left(\sum_{i=0}^{s} ((a_i + b_i) + c_i)x^i + \sum_{i=s+1}^{m} (a_i + b_i)x^i\right) + \sum_{i=m+1}^{n} a_i x^i
\end{aligned}
$$

$$= \sum_{i=0}^{s}(a_i + (b_i + c_i))x^i + \sum_{i=s+1}^{m} a_i x^i + \sum_{i=s+1}^{m} b_i x^i + \sum_{i=m+1}^{n} a_i x^i$$

$$= \sum_{i=0}^{s} a_i x^i + \sum_{i=s+1}^{m} a_i x^i + \sum_{i=m+1}^{n} a_i x^i + \sum_{i=0}^{s}(b_i + c_i)x^i + \sum_{i=s+1}^{m} b_i x^i$$

$$= \sum_{i=0}^{n} a_i x^i + \left(\sum_{i=0}^{s}(b_i + c_i)x^i + \sum_{i=s+1}^{m} b_i x^i\right)$$

$$= \sum_{i=0}^{n} a_i x^i + \left(\sum_{i=0}^{m} b_i x^i + \sum_{i=0}^{s} c_i x^i\right)$$

$$= f(x) + (g(x) + h(x))$$

Karena untuk setiap a_i , b_i , c_i $\in$ F berlaku $(a_i + b_i) + c_i = a_i + (b_i + c_i)$

Untuk $n = m > s$

$$(f(x) + g(x)) + h(x) = \left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i + \sum_{i=0}^{m} b_i x^i\right) + \sum_{i=0}^{s} c_i x^i = \sum_{i=0}^{n}(a_i + b_i)x^i + \sum_{i=0}^{s} c_i x^i$$

$$= \sum_{i=0}^{s}((a_i + b_i) + c_i)x^i + \sum_{i=s+1}^{n}(a_i + b_i)x^i$$

$$= \sum_{i=0}^{s}(a_i + (b_i + c_i))x^i + \sum_{i=s+1}^{n} a_i x^i + \sum_{i=s+1}^{n} b_i x^i$$

$$= \sum_{i=0}^{s} a_i x^i + \sum_{i=s+1}^{n} a_i x^i + \sum_{i=0}^{s}(b_i + c_i)x^i + \sum_{i=s+1}^{n} b_i x^i$$

$$= \sum_{i=0}^{n} a_i x^i + \left(\sum_{i=0}^{s}(b_i + c_i)x^i + \sum_{i=s+1}^{n} b_i x^i\right)$$

$$= f(x) + (g(x) + h(x))$$

Karena untuk setiap a_i , b_i , c_i $\in$ F berlaku $(a_i + b_i) + c_i = a_i + (b_i + c_i)$

Untuk $n < m < s$

$$\begin{aligned}
(f(x)+g(x))+h(x) &= \left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i + \sum_{i=0}^{m} b_i x^i\right) + \sum_{i=0}^{s} c_i x^i \\
&= \left(\sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i) x^i + \sum_{i=n+1}^{m} b_i x^i\right) + \sum_{i=0}^{s} c_i x^i \\
&= \left(\sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i) x^i + \sum_{i=0}^{s} c_i x^i\right) + \sum_{i=n+1}^{m} b_i x^i \\
&= \left(\sum_{i=0}^{n} ((a_i + b_i) + c_i) x^i + \sum_{i=n+1}^{s} c_i x^i\right) + \sum_{i=n+1}^{m} b_i x^i \\
&= \sum_{i=0}^{n} (a_i + (b_i + c_i)) x^i + \sum_{i=n+1}^{s} c_i x^i + \sum_{i=n+1}^{m} b_i x^i \\
&= \sum_{i=0}^{n} a_i x^i + \left(\sum_{i=0}^{n} (b_i + c_i) x^i + \sum_{i=n+1}^{m} b_i x^i + \sum_{i=n+1}^{s} c_i x^i\right) \\
&= \sum_{i=0}^{n} a_i x^i + \left(\sum_{i=0}^{m} (b_i + c_i) x^i + \sum_{i=m+1}^{s} c_i x^i\right) \\
&= \sum_{i=0}^{n} a_i x^i + \left(\sum_{i=0}^{m} b_i x^i + \sum_{i=0}^{s} c_i x^i\right) = f(x) + (g(x) + h(x))
\end{aligned}$$

Karena untuk setiap a_i, b_i, $c_i \in F$ berlaku $(a_i + b_i) + c_i = a_i + (b_i + c_i)$

Jadi operasi penjumlahan bersifat asosiatif.

3. Ada elemen identitas, yaitu $0 = \sum_{i=0}^{n} 0\,x^i$ didalam $F[x]$, sedemikian sehingga

   untuk setiap $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in F[x]$ berlaku :

$$f(x)+0=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i+\sum_{i=0}^{n}0\,x^i \;=\; \sum_{i=0}^{n}(a_i+0)\,x^i \;=\; \sum_{i=0}^{n}a_ix^i$$

4. Untuk setiap suku banyak $f(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i \in F[x]$ terdapat suku banyak

$-f(x)=\sum_{i=0}^{n}(-a_i)x^i \in F[x]$, sedemikian sehingga

$$f(x)+(-f(x))=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i+\sum_{i=0}^{n}(-a_i)x^i=\sum_{i=0}^{n}(a_i+(-a_i))x^i=\sum_{i=0}^{n}0\,x^i=0$$

Terhadap operasi perkalian $(F[x],\times)$

Diambil sembarang $f(x), g(x), h(x) \in F[x]$, dengan

$f(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i$; $g(x)=\sum_{j=0}^{m}b_jx^j$ dan $h(x)=\sum_{k=0}^{s}c_kx^k$

5. $f(x)g(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i\,.\sum_{j=0}^{m}b_jx^j = \sum_{r=0}^{n+m}\left(\sum_{i+j=r}a_ib_j\right)x^r=\sum_{r=0}^{n+m}\left(\sum_{j+i=r}b_ja_i\right)x^r$

$$=\sum_{j=0}^{m}b_jx^j\ \sum_{i=0}^{n}a_ix^i = g(x)f(x)$$

Jadi operasi perkalian bersifat komutatif.

6. $(f(x)g(x))h(x)=\left(\sum_{i=0}^{n}a_ix^i\ \sum_{j=0}^{m}b_jx^j\right)\sum_{k=0}^{s}c_kx^k$

$$=\sum_{r=0}^{n+m}\left(\sum_{i+j=r}a_ib_j\right)x^r\ \sum_{k=0}^{s}c_kx^k=\sum_{l=0}^{n+m+s}\left(\sum_{r+k=l}\left(\sum_{i+j=r}a_ib_j\right)c_k\right)x^l$$

$$= \sum_{i=0}^{n+m+s} \left(\sum_{r+k=l} \; \sum_{i+j=r} a_i b_j c_k \right) x^l = \sum_{l=0}^{n+m+s} \left(\sum_{i+j+k=l} a_i b_j c_k \right) x^l$$

$$= \sum_{l=0}^{n+m+s} \left(\sum_{i+t=l} a_i \left(\sum_{j+k=t} b_j c_k \right) \right) x^l = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \sum_{t=0}^{m+s} \left(\sum_{j+k=t} b_j c_k \right) x^t$$

$$= \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \left(\sum_{j=0}^{m} b_j x^j \sum_{k=0}^{s} c_k x^k \right)$$

$$= f(x)\big(g(x)h(x)\big)$$

Jadi operasi perkalian bersifat asosiatif.

2. Terdapat elemen satuan 1 di $F[x]$, yaitu $1x^0 = 1$ sedemikian sehingga untuk setiap $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ berlaku $1 f(x) = \sum_{i=0}^{n} 1 a_i x^i = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = f(x)$.

4. Tidak memuat pembagi nol.

Misalkan $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ dan $g(x) = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j$, dengan $f(x), g(x) \in F[x]$ sedemikian sehingga $f(x)g(x) = 0$. Selanjutnya misalkan $f(x) \neq 0$ dengan $a_n \neq 0$ dan $a_{n-1} = \ldots = a_0 = 0$. Kita dapatkan

$$f(x)g(x) = \sum_{r=n}^{n+m} \left(\sum\nolimits_{i+j=r} a_i b_j \right) x^r = \sum_{r=n}^{n+m} c_r x^r$$

Untuk $r = n$ kita dapatkan

$$c_n = \sum_{i+j=n} a_i b_j = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i} = a_n b_0 = 0$$

karena $a_n \neq 0$, maka $b_0 = 0$. Untuk $r = n+1$ kita dapatkan

$$c_{n+1} = \sum_{i+j=n+1} a_i b_j = \sum_{i=0}^{n+1} a_i b_{n+1-i} = a_n b_1 = 0$$

karena $a_n \neq 0$, maka $b_1 = 0$. Dengan cara yang sama misalkan kita dapatkan $b_0 = b_1 = \ldots = b_n = 0$. Untuk $r = 2n+1$ kita dapatkan

$$c_{2n+1} = \sum_{i+j=2n+1} a_i b_j = \sum_{i=0}^{2n+1} a_i b_{2n+1-i} = a_n b_{n+1} = 0$$

karena $a_n \neq 0$, maka $b_{n+1} = 0$. Jadi $b_j = 0$ untuk semua $j = 0, 1, \ldots,$ dengan kata lain $g(x) = 0$. Dengan demikian $F[x]$ tidak memuat pembagi nol.

5. Memenuhi sifat distributif.

$$\begin{aligned}
(f(x)+g(x))h(x) &= \left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i + \sum_{i=0}^{m} b_i x^i\right) \sum_{k=0}^{s} d_k x^k = \sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i) x^i \sum_{k=0}^{s} d_k x^k \\
&= \sum_{r=0}^{n+s} \left(\sum_{i+k=r} (a_i + b_i) d_k \right) x^r = \sum_{r=0}^{n+s} \left(\sum_{i+k=r} a_i d_k + b_i d_k \right) x^r \\
&= \sum_{r=0}^{n+s} \left(\sum_{i+k=r} a_i d_k \right) x^r + \sum_{r=0}^{n+s} \left(\sum_{i+k=r} b_i d_k \right) x^r \\
&= \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \sum_{k=0}^{s} d_k x^k + \sum_{i=0}^{n} b_i x^i \sum_{k=0}^{s} d_k x^k \\
&= f(x)h(x) + g(x)h(x)
\end{aligned}$$

Jadi operasi perkalian bersifat distributif.

Jadi $(F[x], +, \times)$ membentuk suatu daerah integral.

Teorema 2.2

Misalkan suku banyak $f(x), g(x)$ dalam F[x], maka

$$\text{der } (f(x)g(x)) = \text{der } f(x) + \text{der } g(x)$$

Bukti :

Andaikan $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ \ldots \ + a_nx^n$, dan

$$g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_mx^m$$

Dengan $a_n \neq 0$ dan $b_m \neq 0$, dengan definisi (2.9) kita lihat bahwa :

$$f(x)g(x) = a_0b_0 + \ldots + a_nb_mx^{n+m}, a_nb_m \neq 0$$

Karena der $(f(x)g(x)) = n + m$, maka

$$\text{der } (f(x)g(x)) = \text{der } f(x) + \text{der } g(x)$$

Definisi 2. 10

Andaikan suku banyak $f(x)$ dan $g(x)$ dalam F[x]. Suku banyak $g(x)$ *disebut membagi* $f(x)$, jika $f(x) = g(x)h(x)$ untuk suatu suku banyak $h(x)$ dalam F[x], sedangkan $g(x)$ dan $h(x)$ disebut *faktor-faktor dari* $f(x)$.

Contoh 2.4

Atas lapangan riil R, x +1 dan x – 1 keduanya membagi $x^2 - 1$. Begitu juga 3x + 3 membagi $x^2 - 1$ karena $x^2 - 1 = (3x + 3)(\frac{1}{3}x - \frac{1}{3})$.

Definisi 2.11

Jika suku banyak $h(x)$ membagi $f(x)$ dan $g(x)$ maka $h(x)$ disebut pembagi persekutuan dari $f(x)$ dan $g(x)$.

Teorema 2.3

Misalkan F suatu lapangan, dan misalkan suku banyak $f(x)$ dan $g(x)$ dalam $F[x]$, dengan $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, $a_n \neq 0$ dan $g(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0$, $b_m \neq 0$. Suku banyak $f(x)$ dan $g(x)$ memiliki pembagi persekutuan yang tidak konstan $\varphi(x)$ jika dan hanya jika ada suku banyak $h(x)$ dan $k(x)$ dengan derajat $h(x) \leq m-1$ dan derajat $k(x) \leq n-1$ sedemikian sehingga

$$h(x)f(x) = k(x)g(x) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Bukti :

$(\Leftarrow)$ Jika (4) dipenuhi dan $a_n \neq 0$, maka $f(x)$ mempunyai n faktor yang mana paling banyak $n-1$ faktor tadi dapat difaktorkan dari $k(x)$ sebab $f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)} k(x)$. Oleh karena itu sedikitnya salah satu faktor ini adalah faktor dari $g(x)$.

$(\Rightarrow)$ Sebaliknya, jika $f(x)$ dan $g(x)$ mempunyai faktor persekutuan yang tidak konstan $\varphi(x)$, maka dapat ditulis:

$$f(x) = \varphi(x)k(x),$$

$$g(x) = \varphi(x)h(x),$$

dengan subtitusi kita dapatkan :

$$f(x) = \varphi(x)\,k(x),$$

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}\,k(x),$$

$$h(x)f(x) = k(x)g(x)$$

Sehingga kondisi (4) dipenuhi ■

Definisi 2.12

Suatu suku banyak $f(x)$ bukan konstanta atas F di sebut *tak tereduksi* atas F jika satu-satunya faktorisasinya adalah trivial. (yaitu, jika $f(x) = g(x)h(x)$ maka $g(x)$ atau $h(x)$ adalah suku banyak konstan).

Contoh 2.5

Atas lapangan rasional Q, $x^2 - 2$ tak tereduksi; atas lapangan riil R, $x^2 - 2$ tereduksi karena dapat faktorkan sebagai (x - $\sqrt{2}$) (x + $\sqrt{2}$). Atas lapangan riil R dan atas lapangan rasional Q, $x^2 + 4$ tak tereduksi; atas lapangan komplek C tereduksi, karena dapat difaktorkan sebagai (x + 2i) (x – 2i).

Teorema 2.4

Untuk setiap suku banyak $f(x)$ dan $g(x)$ di $F[x]$, dengan $g(x) \neq 0$ terdapat dengan tunggal suku banyak $q(x)$ dan $r(x)$ di $F[x]$ yang memenuhi $f(x) = q(x)g(x) + r(x)$, dengan $r(x) = 0$ atau $der\ r(x) < der\ g(x)$.

Bukti

Misalkan $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ \ldots \ + a_nx^n$, dan

$$g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_mx^m$$

Jika $f(x) = 0$, pilih $q(x) = 0$ dan $r(x) = 0$. Kita dapatkan $f(x) = q(x)g(x) + r(x)$, dengan $r(x) = 0$.

Dalam hal $f(x) \neq 0$, misalkan *der* $f(x) = n$ dan *der* $g(x) = m$. Kita bedakan dua kasus :

1. Untuk $n < m$. Dalam hal ini pilih $q(x) = 0$ dan $r(x) = f(x)$. Kita dapatkan $f(x) = q(x)g(x) + r(x)$, dengan *der* $r(x)$ < *der* $g(x)$.
2. Untuk $n \geq m$

   Dalam hal ini kita bentuk

   $f(x) - \frac{a_n}{b_m}x^{n-m}g(x) = f_1(x)$, dengan derajat. $f_1(x) <$ derajat $f(x)$

   Jika derajat $f_1(x) = p \geq m$ dan jika koefisien utama dari $f_1(x)$ adalah c, maka kita dapatkan

   $f(x) - \frac{a_n}{b_m}x^{n-m}\ g(x) - \frac{c}{b_m}x^{p-m}\ g(x) = f_2(x)$, dengan derajat $f_2(x) < f_1(x)$

   Jika derajat $f_2(x) \geq m$ maka proses diulang. Karena dalam setiap langkah, derajat suku banyak diruas kanan (anggap $\neq$ 0) direduksi, akhirnya kita mencapai suatu sisa $r(x) = f_n(x)$ yang berupa suku banyak nol atau berderajat kurang dari derajat $g(x)$.

Untuk ketunggalan

Andaikan $f(x) = q_1(x)g(x) + r_1(x)$ dan

$f(x) = q_2(x)g(x) + r_2(x)$, dengan $r_1(x) = r_2(x) = 0$ atau $der\ r_1(x) = der\ r_2(x) < der\ g(x)$. Maka

$q_1(x)g(x) + r_1(x) = q_2(x)g(x) + r_2(x)$

$[q_1(x) - q_2(x)]g(x) = r_2(x) - r_1(x)$

Karena derajat dari $r_2(x) - r_1(x)$ kurang dari derajat $g(x)$, sedangkan derajat $[q_1(x) - q_2(x)]g(x) \geq$ derajat $g(x)$, maka $q_1(x) - q_2(x) = 0$ dan $r_2(x) - r_1(x)$ $= 0$ kita dapatkan $q_1(x) = q_2(x)$ dan $r_2(x) = r_1(x)$ ■

Definisi 2.13

Misalkan F suatu lapangan, suku banyak $f(x) \in F[x]$ dengan $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ \dots\ + a_nx^n$. Jika $k \in F$ sedemikian sehingga $f(k) = 0$, dimana

$$f(k) = a_0 + a_1k + a_2k^2 + \dots + a_nk^n$$

maka k disebut *akar dari suku banyak* $f(x)$ atau *akar dari persamaan* $f(x) = 0$.

Teorema 2.5

Misalkan $f(x) \in F[x]$ dan $\alpha \in F$. Maka α adalah akar suku banyak $f(x)$ jika dan hanya jika $x - \alpha$ faktor $f(x)$.

Bukti:

Misalkan α akar dari suku banyak $f(x)$ maka $f(\alpha)=0$. Kita pandang suku banyak $x-\alpha \in F[x]$. Dari teorema (2.4), untuk setiap suku banyak $f(x)$ dan $g(x)$ di F[x] dengan $g(x) \neq 0$, terdapat suku banyak $q(x)$ dan $r(x)$ yang memenuhi $f(x)=q(x)(x-\alpha)+r(x)$, dengan der $r(x) <$ der$(x-\alpha)$ = 1. Karena der $r(x)$=1 berarti $r(x)=c$ untuk suatu $c \in F$ sehingga $f(x)=q(x)(x-\alpha)+c$ akibatnya $f(\alpha)=q(\alpha)0+c$ sehingga di dapat $c=0$. Dengan demikian kita dapatkan $f(x)=q(x)(x-\alpha)$ atau $x-\alpha$ merupakan faktor dari $f(x)$.

Sebaliknya, misalkan $x-\alpha$ adalah faktor dari $f(x)$ berarti $f(x)=q(x)(x-\alpha)$ untuk suatu $q(x) \in F[x]$. Kita dapatkan $f(\alpha)=0$, yaitu α akar suku banyak $f(x)$. ■

Teorema 2.6

Misalkan F suatu lapangan, suku banyak $f(x) \in F[x]$ yang berderajat $n \geq 1$. Maka suku banyak $f(x)$ mempunyai paling banyak n akar.

Bukti

Dengan menggunakan induksi matematika atas n.

Untuk n = 1, misalkan $f(x)=a_0+a_1x$. Maka $-a_0/a_1$ adalah akar dari $f(x)$. Jadi $f(x)$ mempunyai paling banyak satu akar (Dalam hal ini $f(x)$ mempunyai satu akar). Misalkan untuk semua $g(x)$ dengan derajat $g(x)=n-1$, dengan $n \geq 2$ mempunyai paling banyak $n-1$ akar.

Kita pandang suku banyak $f(x)$, dengan derajat $f(x)=n$.

Misalkan α suatu akar dari $f(x)$. Menurut teorema (2.5) kita dapatkan $f(x)=q(x)(x-\alpha)$, untuk suatu $q(x)\in F[x]$. Sehingga kita peroleh derajat dari $q(x)$ adalah $n-1$. Menurut pemisalan induksi, suku banyak $q(x)$ mempunyai paling banyak $n-1$ akar. Dengan demikian suku banyak $f(x)$ mempunyai paling banyak n akar. ■

Teorema 2.7

Misalkan suku banyak $f(x)\in F[x]$ berderajat $n>0$ dan a adalah koefisien utama. Jika elemen-elemen yang berbeda $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n \in F$ adalah akar-akar yang berbeda dari $f(x)$, maka suku banyak $f(x)$ dapat dituliskan sebagai hasil kali suku banyak berderajat satu, yaitu :

$$f(x)=a(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ \dots\ (x-\alpha_n)$$

Bukti:

Andaikan $n=1$, sehingga $f(x)=ax+a_1$, mempunyai akar namakan α_1.

Selanjutnya $f(\alpha_1)=a\alpha_1+a_1=0$, kita dapatkan $a_1=-a\alpha_1$, dan

$$f(x)=ax+a_1=ax-a\alpha_1=a(x-\alpha_1)$$

Dengan demikian untuk $n=1$ teorema benar.

Andaikan teorema benar untuk $n=k$

Akan dibuktikan bahwa teorema benar untuk $n=k+1$.

Suku banyak $f(x)$ yang berderajat $k+1$ mempunyai akar-akar $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_{k+1}$.

Karena α_1 akar dari $f(x)$, maka dengan teorema (2.5) kita dapatkan

$$f(x) = (x - \alpha_1)q(x)$$

di mana suku banyak $q(x)$ berderajat k dengan koefisien utama a.

Karena $f(\alpha_j) = (\alpha_j - \alpha_1)q(\alpha_j) = 0$, untuk $j = 2, 3, \ldots, k+1$ dan karena $\alpha_j - \alpha_1 \neq 0$ untuk semua $j \neq 1$. Ini berarti bahwa $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k+1}$ adalah k akar yang berbeda dari $q(x)$. Menurut pengandaian teorema benar untuk $n = k$, sehingga kita dapatkan

$$q(x) = a(x - \alpha_2)(x - \alpha_3)\ldots(x - \alpha_{k+1})$$

Dengan demikian kita peroleh

$$f(x) = a(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3)\ldots(x - \alpha_{k+1}) \quad \blacksquare$$

Definisi 2.14

Misalkan F suatu lapangan, x, y dua variabel . Bentuk

$$\sum_{r=0}^{n} a_{ij} x^i y^j, \quad \text{dengan} \quad i + j = r$$

dengan koefisien a_{ij} dalam F disebut *suku banyak dalam variabel* x, y *atas* F.

Jika $a_{ij} \neq 0$ untuk $i + j = m$, dan $a_{ij} = 0$ untuk $i + j > m$, maka m disebut derajat dari suku banyak dalam variabel x, y. Himpunan suku banyak dalam variabel x, y dinotasikan dengan $F[x, y]$.

Kita dapat menuliskan suku banyak dalam variabel x, y ke bentuk suku banyak dalam variabel y dengan koefisien dalam $F[x]$ atau suku banyak dalam variabel x dengan koefisien dalam $F[y]$.

Contoh 2.6

$1+y+xy+y^2+x^2y^2$ (suku banyak dalam variabel x, y)

$= 1+(1+x)y+(1+x^2)y^2$ (suku banyak dalam variabel y dengan koefisien dalam $F[x]$)

$= (1+y+y^2)+(y)x+(y^2)x^2$ (suku banyak dalam variabel x dengan koefisien dalam $F[y]$.

BAB III

MENGHITUNG RESULTAN DUA SUKU BANYAK DENGAN MENGGUNAKAN METODE SYLVESTER DAN CAYLEY

Pada bab ini kita akan membahas metode Sylvester dan Cayley yang dapat digunakan untuk mencari resultan dua suku banyak.

A. Menghitung Resultan dengan Metode Sylvester

Definisi 3.1

Misalkan F suatu lapangan, suku banyak $f(x)$ dan $g(x)$ dalam $F[x]$, dengan

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0$$

dan

$$g(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0, \quad b_m \neq 0$$

Resultan f dan g ditulis dengan $R(f,g)$ adalah determinan matriks $S(f,g)$ berukuran $(n+m)\times(n+m)$ yang didefinisikan sebagai berikut :

$$R(f,g) = \det S(f,g) = \det \begin{pmatrix} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_0 \\ b_m & b_{m-1} & b_{m-2} & \cdots & b_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_m & b_{m-1} & b_{m-2} & \cdots & b_0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_m & b_{m-1} & b_{m-2} & \cdots & b_0 \end{pmatrix}$$

Matriks di atas disebut dengan matriks Sylvester.

Teorema 3.1

Misalkan $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ dan

$$g(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0 \text{ , dimana } n, m > 0$$

$R(f,g) = 0$ jika $a_n = b_m = 0$ atau $f(x)$ dan $g(x)$ mempunyai faktor persekutuan yang berderajat positif dalam $F[x]$.

Bukti:

Jika $a_n = b_m = 0$ maka kolom pertama dari matriks Sylvesternya adalah nol, jadi $R(f,g) = 0$.

Andaikan $f(x)$ dan $g(x)$ mempunyai faktor persekutuan $h(x)$ yang berderajat positif dan $a_n \neq 0$ atau $b_m \neq 0$. Selanjutnya $f(x) = f_1(x)h(x)$ dan $g(x) = g_1(x)h(x)$ dengan $f_1(x) \neq 0$ dan $g_1(x) \neq 0$. Jika *der* $h(x) = r$ maka *der* $f_1(x) = n - r$.

selain itu kita dapatkan hubungan $f(x)g_1(x) = g(x)f_1(x)$ memberikan *der* $g_1(x) \leq m - r$.

Misalkan

$$f_1(x) = -c_{n-r}x^{n-r} - c_{n-r-1}x^{n-r-1} - \cdots - c_0,$$

$$g_1(x) = d_{m-r}x^{m-r} + d_{m-r-1}x^{m-r-1} + \cdots + d_0$$

kita peroleh hubungan

$$(a_n x^n + \cdots + a_0)(d_{m-r}x^{m-r} + \cdots + d_0) + (b_m x^m + \cdots + b_0)(c_{n-r}x^{n-r} + \cdots + c_0) = 0$$

kita samakan koefisien-koefisien dari $x^{m+n-r}, x^{m+n-r-1}, \ldots, 1$ kita dapatkan sistem persamaan linear sebagai berikut :

$$
\left.\begin{aligned}
a_n d_{m-1} + b_m c_{n-1} &= 0 \\
a_n d_{m-2} + a_{n-1} d_{m-1} + b_m c_{n-2} + b_{m-1} c_{n-1} &= 0 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\
a_0 d_0 + b_0 c_0 &= 0
\end{aligned}\right\} \qquad (\text{ iv })
$$

yang merupakan sistem persamaan linear dengan variabel-variabel c_i dan d_j, $i = 0, 1, 2, \ldots, n-1, \quad j = 0, 1, 2, \ldots, m-2$.

Apabila sistem persamaan (iv) disusun dalam bentuk matriks maka diperoleh :

$$
\begin{bmatrix}
a_n & 0 & \cdots & 0 & b_m & 0 & \cdots & 0 \\
a_{n-1} & a_n & \cdots & 0 & b_{m-1} & b_m & \cdots & 0 \\
a_{n-2} & a_{n-1} & \cdots & 0 & b_{m-2} & b_{m-1} & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} & b_0 & b_1 & \cdots & b_{m-1} \\
0 & a_0 & \cdots & a_{n-2} & 0 & b_0 & \cdots & b_{m-2} \\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & a_0 & 0 & 0 & \cdots & b_0
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
d_{m-1} \\ d_{m-2} \\ \vdots \\ d_0 \\ c_{n-1} \\ c_{n-2} \\ \vdots \\ c_0
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0
\end{bmatrix} \qquad (\text{ v })
$$

dapat kita lihat bahwa determinan dari matriks bujur sangkar dalam persamaan (v) adalah nol karena mempunyai penyelasaian non trivial $\left(c_{n-r} \neq 0,\; d_{m-r} \neq 0\right)$.

Matriks bujur sangkar dalam persamaan (v) kita ubah dengan menggunakan operasi transpose kita dapatkan :

$$
\begin{bmatrix}
a_n & a_{n-1} & \cdot & \cdot & \cdot & a_0 & 0 & \cdot & \cdots & 0 \\
0 & a_n & a_{n-1} & \cdot & \cdot & \cdot & a_0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & \cdot & 0 & a_n & a_{n-1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & a_0 \\
b_m & b_{m-1} & \cdot & \cdot & \cdot & b_0 & 0 & \cdot & \cdots & 0 \\
0 & b_m & b_{m-1} & \cdot & \cdot & \cdot & b_0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & \cdot & 0 & b_m & b_{m-1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & b_0
\end{bmatrix}
$$

yang mana determinan matriks diatas sama dengan $R(f,g)$, sehingga kita dapatkan $R(f,g)=0$. ■

Teorema 3.2

Jika $f(x)=a_n(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ \dots\ (x-\alpha_n)$, dan

$$g(x)=b_m(x-\beta_1)(x-\beta_2)\ \dots\ (x-\beta_m)$$

Maka

$$R(f,g)=a_n{}^m b_m{}^n \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}(\alpha_i-\beta_j).$$

Bukti:

Misalkan $R=a_n{}^m b_m{}^n \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}(\alpha_i-\beta_j)$ dan $R'=\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}(\alpha_i-\beta_j)$

$$f(x)=a_n(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ \dots\ (x-\alpha_n),$$

$$=a_n\left(x^n-(\alpha_1+\dots+\alpha_n)x^{n-1}+(\alpha_1\alpha_2+\dots+\alpha_{n-1}\alpha_n)x^{n-2}+\dots+(-1)^n\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n\right)$$

$$=a_nx^n-a_n(\alpha_1+\dots+\alpha_n)x^{n-1}+\dots+(-1)^n a_n\ \alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n$$

$$g(x)=b_m(x-\beta_1)(x-\beta_2)\ \dots\ (x-\beta_m).$$

$$=b_m\left(x^m-(\beta_1+\dots+\beta_m)x^{m-1}+(\beta_1\beta_2+\dots+\beta_{m-1}\beta_m)x^{m-2}+\dots+(-1)^m\beta_1\beta_2\dots\beta_m\right)$$

$$=b_mx^m-b_m(\beta_1+\dots+\beta_n)x^{m-1}+\dots+(-1)^m b_m\ \beta_1\beta_2\dots\beta_m$$

Misalkan S adalah determinan yang mana diperoleh dengan menggantikan $a_{n-1},a_{n-2},\dots,a_0,b_{m-1},b_{m-2},\dots,b_0$ dalam matriks Sylvester dengan:

$$a_{n-1} = a_n(\alpha_1 + \ldots + \alpha_n), \qquad b_{m-1} = b_m(\beta_1 + \ldots + \beta_m)$$

$$a_{n-2} = a_n(\alpha_1\alpha_2 + \ldots + \alpha_{n-1}\alpha_n), \qquad b_{m-2} = b_m(\beta_1\beta_2 + \ldots + \beta_{m-1}\beta_m)$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$a_0 = a_n(\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n), \qquad b_0 = b_m(\beta_1\beta_2 \ldots \beta_m)$$

dalam hal ini a_{n-k} disebut suku banyak berorde ke- k dalam α_i dan b_{m-k} disebut suku banyak berorde ke- k dalam β_j.

Kita akan menunjukkan bahwa $R = S$

Pertama, catat bahwa, dalam setiap baris dari matriks Sylvester, setiap elemen dikalikan dengan a_n atau b_m. Dengan menggunakan sifat determinan, kita dapat mengeluarkan semua faktor a_n atau b_m keluar dari determinan. Karena setiap m baris memuat a_n dan setiap n baris memuat b_m, kita dapatkan :

$$S = a_n^{\,m} b_m^{\,n} \det \begin{pmatrix} 1 & (\alpha_1+..+\alpha_n) & (\alpha_1\alpha_2+..+\alpha_{n-1}\alpha_n) & \ldots & (\alpha_1\alpha_2..\alpha_n) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & (\alpha_1+..+\alpha_n) & \ldots & & (\alpha_1\alpha_2..\alpha_n) & \ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & (\alpha_1+..+\alpha_n) & & \ldots & (\alpha_1\alpha_2..\alpha_n) \\ 1 & (\beta_1+..+\beta_m) & (\beta_1\beta_2+..+\beta_{m-1}\beta_m) & \ldots & (\beta_1\beta_2..\beta_m) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & (\beta_1+..+\beta_m) & \ldots & & (\beta_1\beta_2..\beta_m) & \ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & (\beta_1+..+\beta_m) & & \ldots & (\beta_1\beta_2..\beta_m) \end{pmatrix}$$

$$S = a_n^{\,m} b_m^{\,n} S'$$

Catat bahwa, faktor-faktor ini sama untuk pangkat dari a_n dan b_m dalam pernyataan dari R. Sehingga untuk menunjukkan $R = S$, berarti kita tinggal menunjukkan $R' = S'$, dimana

$$R' = \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}(\alpha_i - \beta_j)$$

Kedua, catat bahwa derajat dari S' tidak melebihi derajat dari R'. Karena $R' = \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}(\alpha_i - \beta_j)$, berarti jelas bahwa R' berderajat mn. Dengan mengingat bahwa a_{n-k} dan b_{m-k} adalah berderajat k, ini tidak sulit melihat bahwa derajat dari S' tidak dapat melebihi mn.

Ketiga, kita akan menunjukkan bahwa R' membagi S' .

Berdasarkan teorema (3.1), dapat kita lihat bahwa, jika $\alpha_i = \beta_j$ untuk $(i = 1,\ldots,n \;\; dan \;\; j = 1,\ldots,m)$ maka Resultan $R = 0$, dan oleh sebab itu $R' = 0$. Satu-satunya cara agar resultan menjadi nol adalah $\alpha_i = \beta_j$ untuk $\alpha_i - \beta_j$ faktor dari resultan. Karena S' adalah resultan yang tidak sama dengan nol, dan oleh sebab itu $\alpha_i - \beta_j$ harus merupakan faktor dari S'. Ini berarti bahwa setiap faktor dari R' juga merupakan faktor dari S'. Sehingga R' membagi S', dapat kita tulis $S' = cR'$ dengan c adalah suatu konstanta.

Untuk menentukan nilai c kita perlu melakukan perbandingan nilai-nilai dari dua resultan untuk satu set nilai dari variabel yang mana resultannya tidak nol. Dimana, untuk $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 1$ dan $\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_m = 0$. Kita dapatkan $R' = S' = 1$, sehingga $c = 1$, kita dapatkan $R' = S'$. ■

Teorema 3.3

Jika $f(x) = a_n(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ \dots\ (x-\alpha_n)$, dan

$$g(x) = b_m(x-\beta_1)(x-\beta_2)\ \dots\ (x-\beta_m)$$

dengan $\alpha_1,\ \dots\ ,\alpha_n$ adalah akar-akar dari $f(x)$ dan $\beta_1,\ \dots\ ,\beta_m$ adalah akar-akar dari $g(x)$, maka

$$R(f,g) = a_n{}^m b_m{}^n \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}(\alpha_i - \beta_j) = a_n^m \prod_{i=1}^{n} g(\alpha_i) = (-1)^{nm}\, b_m{}^n \prod_{j=1}^{m} f(\beta_j)$$

Bukti :

Pertama $R(f,g) = a_n{}^m b_m{}^n \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}(\alpha_i - \beta_j)$

Dari

$$g(x) = b_m(x-\beta_1)(x-\beta_2)\ \dots\ (x-\beta_m)$$

Kita subtitusikan x = α_i, sehingga kita dapatkan :

$$g(\alpha_1) = b_m\ (\alpha_1 - \beta_1)(\alpha_1 - \beta_2)\dots(\alpha_1 - \beta m)$$

$$g(\alpha_2) = b_m\ (\alpha_2 - \beta_1)(\alpha_2 - \beta_2)\dots(\alpha_2 - \beta m)$$

$$\vdots$$

$$g(\alpha_n) = b_m\ (\alpha_n - \beta_1)(\alpha_n - \beta_2)\dots(\alpha_n - \beta m)$$

Sehingga diperoleh :

$$g(\alpha_1).g(\alpha_2)\dots g(\alpha_n) = b_m{}^n \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}(\alpha_i - \beta_j),$$

sehingga kita dapatkan resultan :

$$R(f,g) = a_n^m \prod_{i=1}^{n} g(\alpha_i)$$

Kedua, kita buktikan $R(f,g) = (-1)^{nm}\, b_m{}^n \prod_{j=1}^{m} f(\beta_j)$

Dari

$$f(x) = a_n(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ \dots\ (x-\alpha_n)$$

$$f(x) = a_n \prod_{i=1}^{n}(x-\alpha_i) = (-1)^n\, a_n \prod_{i=1}^{n}(\alpha_i - x)$$

Kita subtitusikan x = β_j didapat :

$$f(\beta_1) = (-1)^n a_n(\alpha_1-\beta_1)(\alpha_2-\beta_1)\ \dots\ (\alpha_n-\beta_1)$$

$$f(\beta_2) = (-1)^n a_n(\alpha_1-\beta_2)(\alpha_2-\beta_2)\ \dots\ (\alpha_n-\beta_2)$$

$$\vdots$$

$$f(\beta_m) = (-1)^n\, a_n\, (\alpha_1-\beta_m)(\alpha_2-\beta_m)\ \dots\ (\alpha_n-\beta_m)$$

Sehingga diperoleh :

$$f(\beta_1)f(\beta_2)\dots f(\beta_m) = (-1)^{nm}\, a_n{}^m \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}(\alpha_i-\beta_j)$$

Dengan demikian kita dapatkan

$$R(f,g) = (-1)^{nm}\, b_m{}^n f(\beta_1)f(\beta_2)\dots f(\beta_m)$$

$$R(f,g) = (-1)^{nm}\, b_m{}^n \prod_{j=1}^{m} f(\beta_j) \qquad \blacksquare$$

Contoh 3.1

Diketahui $f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ dan $g(x) = b_1x + b_0$, jika α_1, α_2 adalah akar-akar dari persamaan $f(x) = 0$ dan β_1 adalah akar dari persamaan $g(x) = 0$. Carilah resultan dari suku banyak $f(x)$ dan $g(x)$.

Penyelesaian :

$$f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0 = a_2(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)$$
$$= a_2(x^2 - (\alpha_1+\alpha_2)x + \alpha_1\alpha_2)$$
$$= a_2x^2 - a_2(\alpha_1+\alpha_2)x + a_2\alpha_1\alpha_2$$

dengan $-a_2(\alpha_1+\alpha_2) = a_1$ dan $a_2\alpha_1\alpha_2 = a_0$

$$-(\alpha_1+\alpha_2) = \frac{a_1}{a_2} \qquad \alpha_1\alpha_2 = \frac{a_0}{a_2}$$

$$g(x) = b_1x + b_0 = b_1(x-\beta_1) = b_1x - b_1\beta_1$$

dengan $-b_1\beta_1 = b_0$ dan kita dapatkan $\beta_1 = -\frac{b_0}{b_1}$

Dengan menggunakan definisi dari resultan kita dapatkan

$$R(f,g) = a_2b_1^2(\alpha_1-\beta_1)(\alpha_2-\beta_1) = a_2b_1^2(\alpha_1\alpha_2 - (\alpha_1+\alpha_2)\beta_1 + \beta_1^2)$$
$$= a_2b_1^2\left(\frac{a_0}{a_2} + \frac{a_1}{a_2}\beta_1 + \beta_1^2\right)$$
$$= b_1^2(a_0 + a_1\beta_1 + a_2\beta_1^2)$$
$$= b_1^2\left(a_0 - a_1\frac{b_0}{b_1} + a_2\frac{b_0^2}{b_1^2}\right)$$
$$= a_0b_1^2 - a_1b_0b_1 + a_2b_0^2.$$

Teorema 3.4

Jika : $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, $g(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0$

dan $R(f,g) \neq 0$ maka $R(f,g) = A(x)f(x) + B(x)g(x)$

dimana $A(x) = A_{m-1}x^{m-1} + \ldots + A_0$ dan $B(x) = B_{n-1}x^{n-1} + \ldots + B_0$

Bukti :

$$
\begin{array}{rcl}
a_n x^{n+m-1} + a_{n-1}x^{n+m-2} + \ldots + a_0 x^{m-1} & = & x^{m-1}f(x) \\
a_n x^{n+m-2} + \quad \ldots \quad + a_0 x^{m-2} & = & x^{m-2}f(x) \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \\
a_n x^n + \ \ldots \ + a_0 & = & f(x) \\
b_m x^{n+m-1} + b_{m-1}x^{n+m-2} + \ldots + b_0 x^{n-1} & = & x^{n-1}g(x) \\
b_m x^{n+m-2} + \quad \ldots \quad + b_0 x^{n-2} & = & x^{n-2}g(x) \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \\
b_m x^m + \ \ldots \ + b_0 & = & g(x)
\end{array}
$$

Persamaan diatas dapat ditulis dalam bentuk matriks sebagai berikut :

$$
\begin{pmatrix}
a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \ldots & a_0 & 0 & \ldots & 0 \\
0 & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \ldots & a_0 & \ldots & 0 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
0 & \ldots & 0 & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \ldots & a_0 \\
b_m & b_{m-1} & b_{m-2} & \ldots & b_0 & 0 & \ldots & 0 \\
0 & b_m & b_{m-1} & b_{m-2} & \ldots & b_0 & \ldots & 0 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
0 & \ldots & 0 & b_m & b_{m-1} & b_{m-2} & \ldots & b_0
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
x^{n+m-1} \\ x^{n+m-2} \\ x^{n+m-3} \\ \\ \vdots \\ \\ x \\ 1
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
x^{m-1}f(x) \\ x^{m-2}f(x) \\ \vdots \\ f(x) \\ x^{n-1}g(x) \\ x^{n-2}g(x) \\ \vdots \\ g(x)
\end{pmatrix}
$$

Andaikan C adalah vektor kolom pada ruas kanan, maka persamaan diatas dapat dituliskan sebagai berikut :

$$C = x^{n+m-1}C_1 + \ldots + 1 \cdot C_{m+n}$$

dengan C_1, … ,C_{m+n} adalah vektor-vektor kolom dari matriks koefisien dari ruas kiri. Dengan menerapkan aturan Cramer, dimana koefisien C_{m+n} adalah 1 kita peroleh

$$x^0 = 1 = \frac{\begin{vmatrix} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_0 & 0 & \cdots & x^{m-1}f(x) \\ 0 & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_0 & \cdots & x^{m-2}f(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & f(X) \\ b_m & b_{m-1} & b_{m-2} & \cdots & b_0 & 0 & \cdots & x^{n-1}g(x) \\ 0 & b_m & b_{m-1} & b_{m-2} & \cdots & b_0 & \cdots & x^{n-2}g(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_m & b_{m-1} & b_{m-2} & \cdots & g(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_0 \\ b_m & b_{m-1} & b_{m-2} & \cdots & b_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_m & b_{m-1} & b_{m-2} & \cdots & b_0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_m & b_{m-1} & b_{m-2} & \cdots & b_0 \end{vmatrix}}$$

Sehingga

$$\begin{vmatrix} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_0 \\ b_m & b_{m-1} & b_{m-2} & \cdots & b_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_m & b_{m-1} & b_{m-2} & \cdots & b_0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_m & b_{m-1} & b_{m-2} & \cdots & b_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_0 & 0 & \cdots & x^{m-1}f(x) \\ 0 & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_0 & \cdots & x^{m-2}f(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & f(X) \\ b_m & b_{m-1} & b_{m-2} & \cdots & b_0 & 0 & \cdots & x^{n-1}g(x) \\ 0 & b_m & b_{m-1} & b_{m-2} & \cdots & b_0 & \cdots & x^{n-2}g(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_m & b_{m-1} & b_{m-2} & \cdots & g(x) \end{vmatrix}$$

Dengan demikian kita dapatkan

$$R(f,g) = \det(C_1, \dots, C_{m+n}) = \det(C_1, \dots, C_{m+n-1}, C)$$

dengan melakukan penguraian laplace menurut kolom terakhir dapat kita lihat bahwa ada suku banyak $A(x)$ dan $B(x)$. Sedemikian sehingga :

$$R(f,g) = A(x)f(x) + B(x)g(x)$$

Dimana $A(x) = A_{m-1}x^{m-1} + \dots + A_0$ dan $B(x) = B_{n-1}x^{n-1} + \dots + B_0$.

Contoh 3.2

Diketahui : $f(x) = x^2 + 2x + 1$ dan $g(x) = x + 2$

Kita peroleh : $|S(f,g)| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 0 + 1 - 0 - 0 - 4 = 1$

Selanjutnya, $f(x) = x^2 + 2x + 1$

$x\,g(x) = x^2 + 2x$

$g(x) = x + 2$

Dengan menggantikan kolom yang terakhir kita dapatkan

$$|S(f,g)| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & f(x) \\ 1 & 2 & x\,g(x) \\ 0 & 1 & g(x) \end{vmatrix} = 2g(x) + 0 + f(x) - 0 - xg(x) - 2g(x)$$

$$= f(x) - x\,g(x) = x^2 + 2x + 1 - x^2 - 2x = 1$$

Teorema 3.5

Misalkan $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ dan

$$g(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0$$

$S(f,g)$ adalah matriks yang berukuran $(n+m)\times(n+m)$

$$\begin{pmatrix} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \ldots & a_0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \ldots & a_0 & \ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \ldots & 0 & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \ldots & a_0 \\ b_m & b_{m-1} & b_{m-2} & \ldots & b_0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & b_m & b_{m-1} & b_{m-2} & \ldots & b_0 & \ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \ldots & 0 & b_m & b_{m-1} & b_{m-2} & \ldots & b_0 \end{pmatrix}$$

Buktikan bahwa : $|S((x-\alpha)f,g)| = g(\alpha)|S(f,g)|$

Bukti :

$$(x-\alpha)f(x) = (x-\alpha)(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0)$$

$$= a_n x^{n+1} + a_{n-1}x^n + \ldots + a_1 x^2 + a_0 x - \alpha a_n x^n - \alpha a_{n-1} x^{n-1} - \ldots - \alpha a_1 x - \alpha a_0$$

$$= a_n x^{n+1} + (a_{n-1} - \alpha a_n)x^n + (a_{n-2} - \alpha a_{n-1})x^{n-1} + \ldots + (a_0 - \alpha a_1)x + (-\alpha a_0)$$

$$|S((x-\alpha)f,g)| = \begin{vmatrix} a_n & a_{n-1}-\alpha a_n & a_{n-2}-\alpha a_{n-1} & \ldots & -\alpha a_0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-1}-\alpha a_n & \ldots & & -\alpha a_0 & \ldots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & a_n & a_{n-1}-\alpha a_n & \ldots & a_0-\alpha a_1 & -\alpha a_0 \\ b_m & b_{m-1} & \ldots & b_0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & b_m & b_{m-1} & \ldots & b_0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & \ldots & 0 & b_m & b_{m-1} & b_{m-2} & \ldots & b_0 & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & b_m & b_{m-1} & \ldots & b_1 & b_0 \end{vmatrix}$$

Tambahkan α kali kolom 1 ke kolom ke 2

$$|S((x-\alpha)f,g)| = \begin{vmatrix} a_n & a_{n-1}-\alpha a_n+\alpha(a_n) & a_{n-2}-\alpha a_{n-1} & \dots & -\alpha a_0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_n+\alpha(0) & a_{n-1}-\alpha a_n & \dots & & -\alpha a_n & \dots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0+\alpha(0) & 0 & \dots & a_n & a_{n-1}-\alpha a_n & \dots & a_0-\alpha a_1 & -\alpha a_0 \\ b_m & b_{m-1}+\alpha(b_m) & b_{m-2} & \dots & b_0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & b_m+\alpha(0) & b_{m-1} & \dots & & b_0 & \dots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0+\alpha(0) & 0 & \dots & b_m & b_{m-1} & \dots & b_0 & 0 \\ 0 & 0+\alpha(0) & 0 & \dots & 0 & b_m & \dots & b_1 & b_0 \end{vmatrix}$$

kita dapatkan

$$|S((x-\alpha)f,g)| = \begin{vmatrix} a_n & a_{n-1} & a_{n-2}-\alpha a_{n-1} & a_0-\alpha a_1 & -\alpha a_0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-1}-\alpha a_n & \dots & & -\alpha a_0 & \dots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n & a_{n-1}-\alpha a_n & \dots & a_0-\alpha a_1 & -\alpha a_0 \\ b_m & b_m\alpha+b_{m-1} & b_{m-2} & \dots & b_0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & b_m & b_{m-1} & \dots & & b_0 & \dots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_m & b_{m-1} & \dots & b_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & b_m & \dots & b_1 & b_0 \end{vmatrix}$$

Tambahkan α kali kolom 2 yang baru ke kolom ke 3

$$|S((x-\alpha)f,g)| = \begin{vmatrix} a_n & a_{n-1} & a_{n-2}-\alpha a_{n-1}+\alpha(a_{n-1}) & \dots & -\alpha a_0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-1}-\alpha a_n+\alpha(a_n) & \dots & & -\alpha a_0 & \dots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0+\alpha(0) & \dots & a_n & a_{n-1}-\alpha a_n & \dots & a_0-\alpha a_1 & -\alpha a_0 \\ b_m & b_m\alpha+b_{m-1} & b_{m-2}+\alpha(b_m\alpha+b_{m-1}) & \dots & b_0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & b_m & b_{m-1}+\alpha(b_m) & \dots & & b_0 & \dots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0+\alpha(0) & \dots & b_m & b_{m-1} & \dots & b_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0+\alpha(0) & \dots & 0 & b_m & \dots & b_1 & b_0 \end{vmatrix}$$

$$|S((x-\alpha)f,g)| = \begin{vmatrix} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & -\alpha a_0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-1} & \dots & & -\alpha a_n & \dots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n & a_{n-1}-\alpha a_n & \dots & a_0-\alpha a_1 & -\alpha a_0 \\ b_m & b_m\alpha+b_{m-1} & b_m\alpha^2+b_{m-1}\alpha+b_{m-2} & \dots & b_0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & b_m & b_m\alpha+b_{m-1} & \dots & & b_0 & \dots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_m & b_{m-1} & \dots & b_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & b_m & \dots & b_1 & b_0 \end{vmatrix}$$

tambahkan α kali kolom 3 yang baru ke kolom ke 4 dan seterusnya sampai kita dapatkan

$$|S((x-\alpha)f,g)| = \begin{vmatrix} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-1} & \dots & & a_0 & \dots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n & a_{n-1} & \dots & a_0 & 0 \\ b_m & b_m\alpha+b_{m-1} & b_m\alpha^2+b_{m-1}\alpha+b_{m-2} & \dots & & & & & b_m\alpha^{n+m}+\dots+b_0\alpha^n \\ 0 & b_m & b_m\alpha+b_{m-1} & \dots & & & & & b_m\alpha^{n+m-1}+\dots+b_0\alpha^{m-1} \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_m & b_m\alpha+b_{m-1} & \dots & & b_m\alpha^{m+1}+\dots+b_0x \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & b_m & b_m\alpha+b_{m-1} & \dots & b_m\alpha^m+\dots+b_0 \end{vmatrix}$$

Selanjutnya

$$
|S((x-\alpha)f,g)| = \begin{pmatrix}
a_n & a_{n-1} & \dots & a_0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & a_n & a_{n-1} & \dots & a_0 & \dots & 0 & 0 \\
. & . & . & . & . & . & . & . \\
0 & \dots & 0 & a_n & a_{n-1} & \dots & a_0 & 0 \\
b_m-\alpha(0) & b_m\alpha+b_{m-1}-\alpha(b_m) & & \dots & & & & b_m\alpha^{n+m}+\dots+b_0\alpha^{n}-\alpha\left(b_m\alpha^{n+m-1}+\dots+b_0\alpha^{n-1}\right) \\
0 & b_m & & \dots & & & & b_m\alpha^{n+m-1}+\dots+b_0\alpha^{n-1} \\
. & . & . & . & . & . & . & . \\
0 & 0 & \dots & b_m & & & & b_m\alpha^{m+1}+\dots+b_0\alpha \\
0 & 0 & \dots & 0 & b_m & & & b_m\alpha^{m}+\dots+b_0
\end{pmatrix}
$$

$$
|S((x-\alpha)f,g)| = \begin{pmatrix}
a_n & a_{n-1} & \dots & a_0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & a_n & a_{n-1} & \dots & a_0 & \dots & 0 & 0 \\
. & . & . & . & . & . & . & . \\
0 & \dots & 0 & a_n & a_{n-1} & \dots & a_0 & 0 \\
b_m & b_{m-1} & & \dots & & & 0 & 0 \\
0 & b_m & & \dots & & & & b_m\alpha^{n+m-1}+\dots+b_0\alpha^{m-1} \\
. & . & . & . & . & . & . & . \\
0 & 0 & \dots & b_m & & & & b_m\alpha^{m+1}+\dots+b_0\alpha \\
0 & 0 & \dots & 0 & b_m & & & b_m\alpha^{m}+\dots+b_0
\end{pmatrix}
$$

$$
|S((x-\alpha)f,g)| = \begin{pmatrix}
a_n & a_{n-1} & \dots & a_0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & a_n & a_{n-1} & \dots & a_0 & \dots & 0 & 0 \\
. & . & . & . & . & . & . & . \\
0 & \dots & 0 & a_n & a_{n-1} & \dots & a_0 & 0 \\
b_m & b_{m-1} & & \dots & & & 0 & 0 \\
0 & b_m-\alpha(0) & b_m\alpha+b_{m-1}-\alpha(b_m) & \dots & & & & b_m\alpha^{n+m-1}+\dots+b_0\alpha^{n-1}-\alpha\left(b_m\alpha^{n+m-2}+\dots+b_0\alpha^{n-2}\right) \\
. & . & . & . & . & . & . & . \\
0 & 0 & \dots & b_m & & & & b_m\alpha^{m+1}+\dots+b_0\alpha \\
0 & 0 & \dots & 0 & b_m & & & b_m\alpha^{m}+\dots+b_0
\end{pmatrix}
$$

$$
\left|S\left((x-\alpha)f,g\right)\right| = \begin{pmatrix}
a_n & a_{n-1} & \ldots & a_0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\
0 & a_n & a_{n-1} & \ldots & a_0 & \ldots & 0 & 0 \\
. & . & . & . & . & . & . & . \\
0 & \ldots & 0 & a_n & a_{n-1} & \ldots & a_0 & 0 \\
b_m & b_{m-1} & & \ldots & & & 0 & 0 \\
0 & b_m & b_{m-1} & \ldots & & & & 0 \\
. & . & . & . & . & . & . & . \\
0 & 0 & \ldots & b_m & & & & b_m\alpha^{m+1}+\ldots+b_0\alpha \\
0 & 0 & \ldots & 0 & b_m & & & b_m\alpha^m+\ldots+b_0
\end{pmatrix}
$$

$$
\left|S\left((x-\alpha)f,g\right)\right| = \begin{pmatrix}
a_n & a_{n-1} & \ldots & a_0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\
0 & a_n & a_{n-1} & \ldots & a_0 & \ldots & 0 & 0 \\
. & . & . & . & . & . & . & . \\
0 & \ldots & 0 & a_n & a_{n-1} & \ldots & a_0 & 0 \\
b_m & b_{m-1} & & \ldots & & & 0 & 0 \\
0 & b_m & b_{m-1} & \ldots & & & & 0 \\
. & . & . & . & . & . & . & . \\
0 & 0 & \ldots & b_m-\alpha(0) & & \ldots & & b_m\alpha^{m+1}+\ldots+b_0\alpha-\alpha\left(b_m\alpha^m+\ldots+b_0\right) \\
0 & 0 & \ldots & 0 & b_m & & & b_m\alpha^m+\ldots+b_0
\end{pmatrix}
$$

$$
\left|S\left((x-\alpha)f,g\right)\right| = \begin{pmatrix}
a_n & a_{n-1} & \ldots & a_0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\
0 & a_n & a_{n-1} & \ldots & a_0 & \ldots & 0 & 0 \\
. & . & . & . & . & . & . & . \\
0 & \ldots & 0 & a_n & a_{n-1} & \ldots & a_0 & 0 \\
b_m & b_{m-1} & & \ldots & & & 0 & 0 \\
0 & b_m & b_{m-1} & \ldots & & & 0 & 0 \\
. & . & . & . & . & . & . & . \\
0 & 0 & \ldots & b_m & & \ldots & b_0 & 0 \\
0 & 0 & \ldots & 0 & b_m & & & b_m\alpha^m+\ldots+b_0
\end{pmatrix}
$$

$$|S((x-\alpha)f,g)| = b_m\alpha^m + \ldots + b_0 \begin{vmatrix} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-1} & \cdots & & a_0 & \cdots & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n & a_{n-1} & \cdots & a_0 \\ b_m & b_{m-1} & b_{m-2} & \cdots & b_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_m & b_{m-1} & \cdots & & b_0 & \cdots & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_m & b_{m-1} & \cdots & b_0 \end{vmatrix}$$

$$|S((x-\alpha)f,g)| = g(\alpha)|S(f,g)| \quad \blacksquare$$

Contoh 3.3

Misalkan : $f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ dan $g(x) = b_2x^2 + b_1x + b_0$

$$(x-\alpha)f(x) = (x-\alpha)(a_2x^2 + a_1x + a_0)$$

$$= a_2x^3 + a_1x^2 + a_0x - \alpha a_2x^2 - \alpha a_1x - \alpha a_0$$

$$|S((x-\alpha)f,g)| = \begin{vmatrix} a_2 & a_1 - \alpha a_2 & a_0 - \alpha a_1 & -\alpha a_0 & 0 \\ 0 & a_2 & a_1 - \alpha a_2 & a_0 - \alpha a_1 & -\alpha a_0 \\ b_2 & b_1 & b_0 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & b_1 & b_0 & 0 \\ 0 & 0 & b_2 & b_1 & b_0 \end{vmatrix}$$

$$|S((x-\alpha)f,g)| = \begin{vmatrix} a_2 & a_1 - \alpha a_2 + \alpha(a_2) & a_0 - \alpha a_1 & -\alpha a_0 & 0 \\ 0 & a_2 + \alpha(0) & a_1 - \alpha a_2 & a_0 - \alpha a_1 & -\alpha a_0 \\ b_2 & b_1 + \alpha(b_2) & b_0 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 + \alpha(0) & b_1 & b_0 & 0 \\ 0 & 0 + \alpha(0) & b_2 & b_1 & b_0 \end{vmatrix}$$

$$|S((x-\alpha)f,g)| = \begin{vmatrix} a_2 & a_1 & a_0-\alpha a_1 & -\alpha a_0 & 0 \\ 0 & a_2 & a_1-\alpha a_2 & a_0-\alpha a_1 & -\alpha a_0 \\ b_2 & b_2\alpha+b_1 & b_0 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & b_1 & b_0 & 0 \\ 0 & 0 & b_2 & b_1 & b_0 \end{vmatrix}$$

$$|S((x-\alpha)f,g)| = \begin{vmatrix} a_2 & a_1 & a_0-\alpha a_1+\alpha(a_1) & -\alpha a_0 & 0 \\ 0 & a_2 & a_1-\alpha a_2+\alpha(a_2) & a_0-\alpha a_1 & -\alpha a_0 \\ b_2 & b_2\alpha+b_1 & b_0+\alpha(b_2\alpha+b_1) & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & b_1+\alpha(b_2) & b_0 & 0 \\ 0 & 0 & b_2+\alpha(0) & b_1 & b_0 \end{vmatrix}$$

$$|S((x-\alpha)f,g)| = \begin{vmatrix} a_2 & a_1 & a_0 & -\alpha a_0 & 0 \\ 0 & a_2 & a_1 & a_0-\alpha a_1 & -\alpha a_0 \\ b_2 & b_2\alpha+b_1 & b_2\alpha^2+b_1\alpha+b_0 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & b_2\alpha+b_1 & b_0 & 0 \\ 0 & 0 & b_2 & b_1 & b_0 \end{vmatrix}$$

$$|S((x-\alpha)f,g)| = \begin{vmatrix} a_2 & a_1 & a_0 & -\alpha a_0+\alpha(a_0) & 0 \\ 0 & a_2 & a_1 & a_0-\alpha a_1+\alpha(a_1) & -\alpha a_0 \\ b_2 & b_2\alpha+b_1 & b_2\alpha^2+b_1\alpha+b_0 & 0+\alpha(b_2\alpha^2+b_1\alpha+b_0) & 0 \\ 0 & b_2 & b_2\alpha+b_1 & b_0+\alpha(b_2\alpha+b_1) & 0 \\ 0 & 0 & b_2 & b_1+\alpha(b_2) & b_0 \end{vmatrix}$$

$$|S((x-\alpha)f,g)| = \begin{vmatrix} a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & a_1 & a_0 & -\alpha a_0 \\ b_2 & b_2\alpha+b_1 & b_2\alpha^2+b_1\alpha+b_0 & b_2\alpha^3+b_1\alpha^2+b_0\alpha & 0 \\ 0 & b_2 & b_2\alpha+b_1 & b_2\alpha^2+b_1\alpha+b_0 & 0 \\ 0 & 0 & b_2 & b_2\alpha+b_1 & b_0 \end{vmatrix}$$

$$|S((x-\alpha)f,g)| = \begin{vmatrix} a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0+\alpha(0) \\ 0 & a_2 & a_1 & a_0 & -\alpha a_0+\alpha(a_0) \\ b_2 & b_2\alpha+b_1 & b_2\alpha^2+b_1\alpha+b_0 & b_2\alpha^3+b_1\alpha^2+b_0\alpha & 0+\alpha(b_2\alpha^3+b_1\alpha^2+b_0\alpha) \\ 0 & b_2 & b_2\alpha+b_1 & b_2\alpha^2+b_1\alpha+b_0 & 0+\alpha(b_2\alpha^2+b_1\alpha+b_0) \\ 0 & 0 & b_2 & b_2\alpha+b_1 & b_0+\alpha(b_2\alpha+b_1) \end{vmatrix}$$

$$|S((x-\alpha)f,g)| = \begin{vmatrix} a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 \\ b_2 & b_2\alpha + b_1 & b_2\alpha^2 + b_1\alpha + b_0 & b_2\alpha^3 + b_1\alpha^2 + b_0\alpha & b_2\alpha^4 + b_1\alpha^3 + b_0\alpha^2 \\ 0 & b_2 & b_2\alpha + b_1 & b_2\alpha^2 + b_1\alpha + b_0 & b_2\alpha^3 + b_1\alpha^2 + b_0\alpha \\ 0 & 0 & b_2 & b_2\alpha + b_1 & b_2\alpha^2 + b_1\alpha + b_0 \end{vmatrix}$$

$$|S((x-\alpha)f,g)| = \begin{vmatrix} a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 \\ b_2 - \alpha(0) & \begin{matrix} b_2\alpha + b_1 \\ -\alpha(b_2) \end{matrix} & \begin{matrix} b_2\alpha^2 + b_1\alpha + b_0 \\ -\alpha(b_2\alpha + b_1) \end{matrix} & \begin{matrix} b_2\alpha^3 + b_1\alpha^2 + b_0\alpha \\ -\alpha(b_2\alpha^2 + b_1\alpha + b_0) \end{matrix} & \begin{matrix} b_2\alpha^4 + b_1\alpha^3 + b_0\alpha^2 \\ -\alpha(b_2\alpha^3 + b_1\alpha^2 + b_0\alpha) \end{matrix} \\ 0 - \alpha(0) & b_2 - \alpha(0) & \begin{matrix} b_2\alpha + b_1 \\ -\alpha(b_2) \end{matrix} & \begin{matrix} b_2\alpha^2 + b_1\alpha + b_0 \\ -\alpha(b_2\alpha + b_1) \end{matrix} & \begin{matrix} b_2\alpha^3 + b_1\alpha^2 + b_0\alpha \\ -\alpha(b_2\alpha^2 + b_1\alpha + b_0) \end{matrix} \\ 0 & 0 & b_2 & b_2\alpha + b_1 & b_2\alpha^2 + b_1\alpha + b_0 \end{vmatrix}$$

$$|S((x-\alpha)f,g)| = \begin{vmatrix} a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 \\ b_2 & b_1 & b_0 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & b_1 & b_0 & 0 \\ 0 & 0 & b_2 & b_2\alpha + b_1 & b_2\alpha^2 + b_1\alpha + b_0 \end{vmatrix}$$

$$|S((x-\alpha)f,g)| = b_2\alpha^2 + b_1\alpha + b_0 \begin{vmatrix} a_2 & a_1 & a_0 & 0 \\ 0 & a_2 & a_1 & a_0 \\ b_2 & b_1 & b_0 & 0 \\ 0 & b_2 & b_1 & b_0 \end{vmatrix}$$

$$|S((x-\alpha)f,g)| = g(\alpha)|S(f,g)|$$

B. Cara Untuk Mereduksi Ukuran Matriks Sylvester

Dalam perhitungan determinan Sylvester yang menggunakan matriks yang berukuran $(n+m)\times(n+m)$ mungkin akan tidak menyenangkan karena ukuran matriks yang terlalu besar. Ada dua cara yang bisa digunakan untuk mereduksi ukuran matriks Sylvester yaitu:

1. a. Untuk $m \geq n$

Misalkan $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$,

dan

$$g(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0$$

Maka ada suku banyak :

$$q(x) = q_{m-n}x^{m-n} + q_{m-n-1}x^{m-n-1} + \ldots + q_0$$

dan

$$r(x) = r_{n-1}x^{n-1} + r_{n-2}x^{n-2} + \ldots + r_0$$

sedemikian sehingga

$$g(x) = f(x)q(x) + r(x)$$

Persamaan diatas dapat dinyatakan dalam sistem persamaan linear berikut :

$$\left.\begin{aligned}
b_m &= q_0 a_m + q_1 a_{m-1} + \ldots + q_{m-n}a_n, \\
b_{m-1} &= q_0 a_{m-1} + q_1 a_{m-2} + \ldots + q_{m-n}a_{n-1} + q_{m-n-1}a_n, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
b_n &= q_0 a_n + q_1 a_{n-1} + \ldots + q_n a_0, \\
b_{n-1} &= q_0 a_{n-1} + q_1 a_{n-2} + \ldots + q_{n-1}a_0 + r_{n-1}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
b_0 &= q_0 a_0 + r_0,
\end{aligned}\right\} \quad (3.1.1e)$$

dimana $a_i = 0$ untuk $i > n$

Diberikan matriks

$$
S(f,g)=\begin{pmatrix}
a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_0 & \cdots & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & \cdots & 0 & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_0 \\
b_m & b_{m-1} & b_{m-2} & \cdots & b_0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & b_m & b_{m-1} & b_{m-2} & \cdots & b_0 & \cdots & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & \cdots & 0 & b_m & b_{m-1} & b_{m-2} & \cdots & b_0
\end{pmatrix}
$$

Apabila elemen dari matriks $S(f,g)$ yaitu $b_m, b_{m-1}, \ldots, b_0$ diganti sesuai dengan sistem persamaan (3.1.1e), kita dapatkan

$$
\begin{pmatrix}
a_n & a_{n-1} & \cdots & a_0 & 0 & 0 & & \cdots & 0 & 0 \\
0 & a_n & a_{n-1} & \cdots & a_0 & 0 & & \cdots & 0 & 0 \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
0 & \cdots & 0 & a_n & a_{n-1} & & \cdots & & a_0 & 0 \\
0 & \cdots & 0 & 0 & a_n & a_{n-1} & & \cdots & & a_0 \\
q_{m-n}a_n & q_{m-n}a_{n-1}+q_{m-n-1}a_n & & \cdots & & & q_0a_0+r_0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & q_{m-n}a_n & q_{m-n}a_{n-1}+q_{m-n-1}a_n & & \cdots & & & q_0a_0+r_0 & \cdots & 0 \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
0 & \cdots & 0 & q_{m-n}a_n & & & \cdots & & & q_0a_0+r_0
\end{pmatrix}
$$

maka dengan operasi baris berikut, yaitu :

Kurangkan q_{m-n} kali baris t, q_{m-n-1} kali baris t + 1, q_0 kali baris t + m – n dari baris m + t, dengan $t = 1, 2, \ldots, n$. Sehingga hasil dari operasi tersebut adalah matriks berikut :

$$A=\left(\begin{array}{cccc|cccccc}
a_n & a_{n-1} & \dots & a_0 & 0 & 0 & & \dots & 0 & 0 \\
0 & a_n & a_{n-1} & \dots & a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
0 & \dots & 0 & a_n & a_{n-1} & & \dots & & a_0 & 0 \\
\hline
0 & \dots & 0 & 0 & a_n & a_{n-1} & & \dots & & a_0 \\
0 & \dots & 0 & 0 & r_{n-1} & \dots & r_0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & \dots & 0 & 0 & 0 & r_{n-1} & \dots & r_0 & \dots & 0 \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r_{n-1} & \dots & r_0
\end{array}\right)$$

Determinan dari matriks diatas sama dengan determinan dari $S(f,g)$. Andaikan bahwa :

$$r_{n-1}=r_{n-2}=\dots=r_{n-j}=0,\quad r_{n-j-1}\neq 0,$$

Dengan begitu bahwa derajat dari $r(x)$ adalah $n-j-1$. Dengan ekspansi laplace yaitu dengan menggunakan minor-minor dari $m-n+j+1$ kolom pertama, kita dapatkan determinan dari matriks A yaitu :

$$|A|=(-1)^s\begin{vmatrix} a_n & a_{n-1} & \dots & a_0 \\ 0 & a_n & a_{n-1} & \dots \\ . & . & . & . \\ 0 & \dots & 0 & a_n \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_n & a_{n-1} & & \dots & & a_0 \\ r_{n-1} & \dots & r_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & r_{n-1} & \dots & r_0 & \dots & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & \dots & 0 & r_{n-1} & \dots & r_0 \end{vmatrix}$$

dengan $s=1+\dots+(m-n+j+1)+1+\dots+(m-n+j+1)$.

Sehingga kita dapatkan

$$|A|=a_n^{\,m-n+j+1}|S(f,r)|.$$

Jadi, jika $m\geq n$ dan $r(x)$ adalah sisa pembagian $g(x)$ oleh $f(x)$, dimana $r(x)$ berderajat k maka :

$$R(f,g)=|S(f,g)|=a_n^{\,m-k}|S(f,r)|$$

Contoh 3.4

Diketahui : $g(x) = x^3 + 3Hx + G$ dan $f(x) = 3x^2 + 3H$

Carilah resultan $R(f,g)$ dari suku banyak $f(x)$ dan $g(x)$

Penyelesaian :

Dari proses pembagian $g(x)$ oleh $f(x)$ didapat $q(x) = \frac{1}{3}x$ dan $r(x) = 2Hx + G$

Dengan demikian,

$$x^3 + 3Hx + G = (3x^2 + 3H)\left(\frac{1}{3}x\right) + (2Hx + G)$$

Sehingga kita dapatkan matriks $S(f,r)$ sebagai berikut

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 3H \\ 2H & G & 0 \\ 0 & 2H & G \end{pmatrix}$$

determinan dari matriks diatas adalah

$$|S(f,r)| = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 3H \\ 2H & G & 0 \\ 0 & 2H & G \end{vmatrix} = 3G^2 + 0 + 12H^3 - 0 - 0 - 0$$

$$= 3G^2 + 12H^3$$

Sehingga kita dapatkan

$$R(f,g) = |S(f,g)| = a_n{}^{m-k}|S(f,r)|$$

$$R(f,g) = 3^{3-1}(3G^2 + 12H^3) = 9(3G^2 + 12H^3).$$

b. Untuk kasus tertentu yaitu untuk $n = m = 3$. Kita kalikan matriks $S(f,g)$ dari sebelah kiri dengan matriks $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -b_3 & -b_2 & -b_1 & a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & -b_3 & -b_2 & 0 & a_3 & a_2 \\ 0 & 0 & -b_3 & 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix}$ sehingga tiga baris terakhir dari matriks $S(f,g)$ berbentuk blok (0 C), dimana C adalah 3 x 3.

Metode ini disebut dengan metode bezout.

Determinan dari matriks diatas adalah $a_3^{\,3}$

Misalkan $S(f,g) = \begin{pmatrix} a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ b_3 & b_2 & b_1 & b_0 & 0 & 0 \\ 0 & b_3 & b_2 & b_1 & b_0 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 & b_2 & b_1 & b_0 \end{pmatrix}$

Kita kalikan matriks diatas dengan matriks $S(f,g)$ seperti berikut :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -b_3 & -b_2 & -b_1 & a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & -b_3 & -b_2 & 0 & a_3 & a_2 \\ 0 & 0 & -b_3 & 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ b_3 & b_2 & b_1 & b_0 & 0 & 0 \\ 0 & b_3 & b_2 & b_1 & b_0 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 & b_2 & b_1 & b_0 \end{pmatrix}$$

Sehingga kita dapatkan matriks dibawah ini,

$$\begin{pmatrix} a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ 0 & 0 & 0 & -b_3a_0+a_3b_0 & -b_2a_0+a_2b_0 & -b_1a_0+a_1b_0 \\ 0 & 0 & 0 & -b_3a_1+a_3b_1 & -b_3a_0-b_2a_1+a_3b_0+a_2b_1 & -b_2a_0+a_2b_0 \\ 0 & 0 & 0 & -b_3a_2+a_3b_2 & -b_3a_1+a_3b_1 & -b_3a_0+a_3b_0 \end{pmatrix}$$

Dan

$$R(f,g)=|S(f,g)|=\begin{vmatrix} -b_3a_0+a_3b_0 & -b_2a_0+a_2b_0 & -b_1a_0+a_1b_0 \\ -b_3a_1+a_3b_1 & -b_3a_0-b_2a_1+a_3b_0+a_2b_1 & -b_2a_0+a_2b_0 \\ -b_3a_2+a_3b_2 & -b_3a_1+a_3b_1 & -b_3a_0+a_3b_0 \end{vmatrix}$$

Determinan pada ruas kanan disebut disebut bezoutian dari $f(x)$ dan $g(x)$.

Contoh 3.5

Diketahui $f(x)=x^3-2x^2+x-1$ dan $g(x)=x^3-3x^2+2x+1$

Carilah determinan dari matriks $S(f,g)$.

Jawab:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Jadi

$$R(f,g)=|S(f,g)|=\begin{vmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 1 & 1 & -5 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}=5$$

2. Untuk $n>m$

Kita kalikan matriks $S(f,g)$ dari sebelah kiri dengan matriks elementer, sedemikian sehingga dalam setiap m elemen pertama dari n baris terakhir semuanya nol.

Sebagai contoh, untuk $n=4$ dan $m=2$, Kita kalikan matriks $S(f,g)$ dari sebelah kiri dengan matriks elementer berikut

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -b_2 & -b_1 & a_4 & a_3 & 0 & 0 \\ 0 & -b_2 & 0 & a_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Determinan matriks diatas sama dengan $a_4{}^2$. Selanjutnya kita kalikan dengan matriks $S(f,g)$ seperti berikut :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -b_2 & -b_1 & a_4 & a_3 & 0 & 0 \\ 0 & -b_2 & 0 & a_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 \\ 0 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ b_2 & b_1 & b_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & b_1 & b_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_2 & b_1 & b_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_2 & b_1 & b_0 \end{pmatrix}$$

kita dapatkan matriks berikut :

$$\begin{pmatrix} a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 \\ 0 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ 0 & 0 & -b_2a_2+a_4b_0 & -b_2a_1-b_1a_2+a_3b_0 & -b_2a_0-b_1a_1 & -b_1a_0 \\ 0 & 0 & -b_2a_3+a_4b_1 & -b_2a_0+a_4b_0 & -b_2a_1 & -b_2a_0 \\ 0 & 0 & b_2 & b_1 & b_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_2 & b_1 & b_0 \end{pmatrix}$$

Sehingga

$$R(f,g)=|S(f,g)|=\begin{vmatrix} -b_2a_2+a_4b_0 & -b_2a_1-b_1a_2+a_3b_0 & -b_2a_0-b_1a_1 & -b_1a_0 \\ -b_2a_3+a_4b_1 & -b_2a_0+a_4b_0 & -b_2a_1 & -b_2a_0 \\ b_2 & b_1 & b_0 & 0 \\ 0 & b_2 & b_1 & b_0 \end{vmatrix}$$

Determinan pada ruas kanan disebut disebut bezoutian dari $f(x)$ dan $g(x)$.

C. Menghitung Resultan dengan Metode Cayley

Dalam menghitung resultan dua suku banyak dengan menggunakan metode Cayley menggunakan matriks yang berukuran lebih kecil , yaitu maksimum dari derajat suku banyak $f(x)$ dan $g(x)$.

Definisi 3.2

Misalkan F adalah suatu lapangan, P_n himpunan suku banyak di dalam $F[x]$ dengan derajat kurang dari atau sama dengan $n-1$ dan $M_n(F)$ adalah himpunan matriks berukuran nxn atas F. Andaikan $f(x)$ suku banyak berderajat n di dalam $F(x)$. Fungsi $\psi : P_n \rightarrow M_n$ disebut $f-map$ apabila memenuhi :

1. $\psi(1)$ matriks yang mempunyai invers.
2. $\psi(g(x)+c)=\psi(g(x))+c\psi(1)$, $\forall g(x)\in P_n, \forall c\in F$
3. Jika $g(x)$ memiliki faktor non trivial maka matriks $\psi(g(x))$ tidak mempunyai invers.

Teorema 3.6

Jika $f(x)$ memiliki n akar yang berbeda yaitu α_1, α_2, ... , α_n, maka untuk setiap $f-map$ $\psi: P_n \to M_n$, berlaku : $\det(\psi(g(x))) = \det(\psi(1))(g(\alpha_1)g(\alpha_2)\ldots g(\alpha_n))$.

Bukti

Karena ψ merupakan $f-map$, berarti $\psi(1)^{-1}$ ada. Jika α_i akar dari $f(x)$, maka sebarang suku banyak $g(x)-g(\alpha_i)$ memiliki akar α_i. Andaikan :

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0,$$

dan

$$g(x)=b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_1x+b_0,$$

maka diperoleh :

$$\begin{aligned} g(x)-g(\alpha_i) &= (b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_1x+b_0)-(b_m\alpha_i^m+b_m\alpha_i^{m-1}+\ldots+b_1\alpha_i+b_0) \\ &= (b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_1x)-(b_m\alpha_i^m+b_m\alpha_i^{m-1}+\ldots+b_1\alpha_i) \end{aligned}$$

Karena $f(x)$ dan $g(x)-g(\alpha_i)$ memiliki faktor non trivial maka :

$$\det(\psi(g(x)-g(\alpha_i)))=0,$$

$$\det(\psi(g(x))-g(\alpha_i)\psi(1))=0,$$

Dengan demikian :

$$\det\left(\left(\psi(1)\psi(1)^{-1}\right)\psi(g(x)) - g(\alpha_i)\psi(1)\right) = 0,$$

$$\det\left(\psi(1)\left(\psi(1)^{-1}\psi(g(x)) - g(\alpha_i)I_n\right)\right) = 0,$$

Sehingga :

$$\det\left((\psi(1))\det\left(\psi(1)^{-1}\psi(g(x)) - g(\alpha_i)I_n\right)\right) = 0,$$

Karena $\det(\psi(1)) \neq 0,$ maka didapat :

$$\det\left(\psi(1)^{-1}\psi(g(x)) - g(\alpha_i)I_n\right) = 0,$$

Atau dapat ditulis :

$$\det(V - g(\alpha_i)I_n) = 0, \text{ dengan } V = \psi(1)^{-1}\psi(g(x)).$$

Dimana $g(\alpha_i)$ merupakan nilai eigen dari V .

Diandaikan $f(x)$ mempunyai n akar yang berbeda yaitu $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, berarti terdapat $g(\alpha_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, yang merupakan nilai eigen dari V ,

Sehingga nilai determinan V adalah ;

$$\det(V) = g(\alpha_1)g(\alpha_2)\ldots g(\alpha_n)$$

Karena $V = \psi(1)^{-1}\psi(g(x))$, sehingga nilai determinan dari V adalah :

$$\begin{aligned}\det(V) &= \det\left(\psi(1)^{-1}\psi(g(x))\right)\\ &= \det\left(\psi(1)^{-1}\right)\det(\psi(g(x)))\end{aligned}$$

Sehingga

$$\det(\psi(g(x))) = \frac{\det(V)}{\det\left(\psi(1)^{-1}\right)}$$

$$= \det(\psi(1))\det(V)$$

$$= \det(\psi(1))(g(\alpha_i)g(\alpha_2)\ldots g(\alpha_n))$$

■

Definisi 3.3

Andaikan F suatu lapangan, $f(x)$ dan g(x) adalah dua suku banyak dalam $F[x]$, dengan $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, dan

$$g(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0$$

dimana m ≤ n – 1. Didefinisikan :

$$H(x,y) = f(x)g(y) - f(y)g(x),$$

$$h(x,y) = \frac{H(x,y)}{x-y} = \frac{f(x)g(y) - f(y)g(x)}{x-y}$$

$$= \frac{\sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{i=0}^{n} c_{ij}y^i\right)x^j}{x-y}$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1}\left(\sum_{i=0}^{n-1} c_{ij}y^i\right)x^j$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} P_i(y)x^j \text{, dengan } P_i(y) = \sum_{i=0}^{n-1} c_{ij}y^i$$

Jika $f(x)$ dan $g(x)$ mempunyai akar $z \in C$, maka $H(x,z) = 0$, juga untuk setiap nilai x, selanjutnya $h(x,z) = 0$. Sehingga kita dapatkan

$$P_j(z) = \sum_{j=0}^{n-1} c_{ij}z^j = 0 \text{ untuk } j = 0, 1, 2, \ldots, n-1 \quad\ldots\ldots(5)$$

Andaikan persamaan (5) yang terdiri dari n persamaan dipandang sebagai sistem persamaan linear homogen mempunyai penyelesaian non trivial $1, z, z^2, \ldots, z^{n-1}$, syaratnya $\det\lfloor c_{ij} \rfloor = 0$. Determinan $\lfloor c_{ij} \rfloor$ disebut *determinan Cayley*, dan matriks $\lfloor c_{ij} \rfloor$ disebut *matriks Cayley*.

Contoh 3.6

Diketahui $F = R$ dengan $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + x + 1$ dan $g(x) = x^2 - 2x + 1$.

Dari definisi dapat diperoleh :

$$h(x,y) = \frac{(2x^3 - 4x^2 + x + 1)(y^2 - 2y + 1) - (2y^3 - 4y^2 + y + 1)(x^2 - 2x + 1)}{x - y}$$

$$= \frac{2x^3y^2 - 2x^2y^3 - 4x^3y + 4xy^3 + 2x^3 - 2y^3 + 7x^2y - 7xy^2 - 5x^2 + 5y^2 + 3x - 3y}{x - y}$$

$$= \frac{(x-y)(2x^2y^2 - 4x^2y - 4xy^2 + 2x^2 + 2y^2 + 2xy + 7xy - 5x - 5y + 3)}{x - y}$$

$$= (3 - 5y + 2y^2) + (-5 + 9y - 4y^2)x + (2 - 4y + 2y^2)x^2.$$

Definisi 3.4

Andaikan F suatu lapangan, $f(x)$ dan $g(x)$ adalah dua suku banyak dalam F[x], dengan $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, dan

$$g(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0$$

Didefinisikan pemetaan $K_f : P_n \rightarrow M_n$, dengan aturan $K_f(g) = \lfloor c_{ij} \rfloor$; dengan c_{ij} adalah koefisien-koefisien $h(x,y)$.

Contoh 3.7

Dari contoh 3.6 diperoleh

$$h(x,y) = \left(3-5y+2y^2\right)+\left(-5+9y-4y^2\right)x+\left(2-4y+2y^2\right)x^2$$

Jadi $K_f(g) = \lfloor c_{ij} \rfloor = \begin{bmatrix} 3 & -5 & 2 \\ -5 & 9 & -4 \\ 2 & -4 & 2 \end{bmatrix}$

Teorema 3.7

Pemetaan K_f dalam definisi 3.4 merupakan $f-map$

Bukti :

1. $$h(x,y) = \frac{f(x)-f(y)}{x-y}$$

$$= \frac{\left(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0\right) - \left(a_n y^n + a_{n-1}y^{n-1} + \ldots + a_1 y + a_0\right)}{x-y}$$

$$= \frac{a_n x^n - a_n y^n}{x-y} + \frac{a_{n-1}x^{n-1} - a_{n-1}y^{n-1}}{x-y} + \ldots + \frac{a_1 x - a_1 y}{x-y}$$

$$= \left(a_n x^{n-1} + a_n x^{n-2}y + \ldots + a_n xy^{n-2} + a_n y^{n-1}\right) +$$
$$\left(a_{n-1}x^{n-2} + a_{n-1}x^{n-3}y + \ldots + a_{n-1}xy^{n-3} + a_{n-1}y^{n-2}\right) + \ldots + \left(a_2 x + a_2 y\right) + a_1$$

$$= \left(a_1 + a_2 y + \ldots + a_{n-1}y^{n-2} + a_n y^{n-1}\right) +$$
$$\left(a_2 + a_3 y + \ldots + a_{n-1}y^{n-3} + a_n y^{n-2}\right)x +$$
$$\left(a_3 + a_4 y + \ldots + a_{n-1}y^{n-4} + a_n y^{n-3}\right)x^2 +$$
$$\vdots$$
$$\left(a_n\right)x^{n-1}$$

Matriks Cayley yang berhubungan dengan pemetaan $K_f(1)$ adalah :

$$K_f(1) = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_n & 0 \\ \vdots & \vdots & ⋰ & 0 & 0 \\ a_{n-1} & a_n & ⋰ & 0 & \vdots \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Untuk mencari determinan dari $K_f(1)$, kita misalkan :

1. Untuk n = 2, maka matriks yang berhubungan dengan pemetaan $K_f(1)$, yaitu $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & 0 \end{bmatrix}$ determinannya = $-(a_2)^2$

2. Untuk n = 3, maka matriks yang berhubungan dengan pemetaan $K_f(1)$, yaitu

   $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & 0 \\ a_3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ determinannya = $-(a_3)^3$

Secara analog maka determinan dari $K_f(1) = -(a_n)^n = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}(a_n)^n \neq 0$

Karena determinan dari $K_f(1) \neq 0$ maka $K_f(1)$ matriks yang mempunyai invers.

2. $h(x,y) = \dfrac{f(x)(g(y)+c) - f(y)(g(x)+c)}{x-y}$

$$= \frac{f(x)g(y) + f(x)c - f(y)g(x) - f(y)c}{x-y}$$

$$= \frac{f(x)g(y) - f(y)g(x)}{x-y} + \frac{f(x)c - f(y)c}{x-y}$$

$$= \frac{f(x)g(y) - f(y)g(x)}{x-y} + c\left[\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right]$$

Jadi $K_f(g+c) = K_f(g) + cK_f(1)$

3. $h(x,y) = \dfrac{H(x,y)}{x-y} = \dfrac{f(x)g(y) - f(y)g(x)}{x-y}$

$$= \frac{\sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{i=0}^{n} c_{ij} y^i\right) x^j}{x-y}$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1}\left(\sum_{i=0}^{n-1} c_{ij} y^i\right) x^j$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} P_i(y) x^j \text{, dengan } P_i(y) = \sum_{i=0}^{n-1} c_{ij} y^i$$

Karena $f(x)$ dan $g(x)$ memiliki akar z, maka untuk $x \in C$, $H(x,z) = 0$. Dengan begitu $h(x,z)$ = 0, kecuali untuk $x = z$. Agar sistem persamaan (5) memiliki penyelesaian tak trivial 1, $z, z^2, \ldots, z^{n-1}$, syaratnya adalah determinan $\lfloor c_{ij} \rfloor$ sama dengan nol. Dengan kata lain $K_f(g)$ tidak mempunyai invers.

Matriks Cayley $\lfloor c_{ij} \rfloor$ adalah matriks representasi pemetaan $K_f(g)$ yang memenuhi definisi $f-map$. Dengan melihat definisi dan sifat dari $f-map$ dapat diperoleh hubungan antara matriks Cayley dengan resultan dua suku banyak yang tertuang teorema 3.9 berikut.

Teorema 3.8

Jika diketahui F suatu lapangan, $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, dan $g(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0$ dengan m $\leq$ n-1, $f(x)$ memiliki akar-akar yang berbeda $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ dan $g(x)$ memiliki akar-akar yang berbeda $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ maka $\det[c_{ij}] = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} (a_n)^n (g(\alpha_1) g(\alpha_2) \ldots g(\alpha_n))$.

Bukti

Dari definisi diketahui : $K_f(g) = [c_{ij}]$

$$\det(K_f(g)) = \det[c_{ij}]$$

Telah dibuktikan bahwa K_f merupakan $f-map$ (Teorema 3.7), sehingga teorema (3.6) berlaku, dengan demikian nilai determinan $K_f(g)$ adalah :

$$\det(K_f(g)) = \det(K_f(1))(g(\alpha_1) g(\alpha_2) \ldots g(\alpha_n))$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} (a_n)^n (g(\alpha_1) g(\alpha_2) \ldots g(\alpha_n))$$

■

Teorema 3.9

Jika diketahui F suatu lapangan, suku banyak $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, dan $g(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0$ yang memiliki akar-akar berturut-turut α_i dan β_j, dengan n + m $\geq$ 1. Maka

$$R(f, g) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_n^{m-n} \det[c_{ij}]$$

Bukti

Suku banyak $f(x)$ dan $g(x)$ memiliki akar-akar berturut-turut α_i dan β_j, dari teorema (3.3) kita punyai :

$$R(f,g) = a_n^{\ m} \prod_{i=1}^{n} g(\alpha_i)$$

Kita dapatkan :

$$\begin{aligned} R(f,g) &= a_n^{\ m}\left(g(\alpha_1)g(\alpha_2)\ldots g(\alpha_n)\right) \\ &= a_n^{\ m}\frac{\det\left(K_f(g)\right)}{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}(a_n)^n} \qquad \text{(teorema 3.8)} \\ &= a_n^{\ m}\frac{\det\left[c_{ij}\right]}{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}(a_n)^n} \\ &= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_n^{\ m-n}\det[c_{ij}] \end{aligned}$$

■

D. PENERAPAN RESULTAN DUA SUKU BANYAK

1. Diketahui $F = R$ dengan $f(x) = x^2 - 2x + 2$ dan $g(x) = 3x^3 - 5x^2 + 2x + 1$.

   Carilah resultan dari suku banyak $f(x)$ dan $g(x)$.

   Penyelesaian :

   Berdasarkan (B. 1.a), untuk $m > n$ kita dapat gunakan metode Sylvester kita dapatkan matriks

$$S(f,g)=\begin{bmatrix}1 & -2 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2\\ 3 & -5 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 3 & -5 & 2 & 1\end{bmatrix}$$

Sehingga $R(f,g)=|S(f,g)|=a_n^{m-k}|S(f,r)|$

Dengan k adalah derajat dari sisa pembagian $g(x)$ oleh $f(x)$.

$$\begin{array}{r|l} & 3x+1 \\ \hline x^2-2x+2 & 3x^3-5x^2+2x+1 \\ & \underline{3x^3-6x^2+6x} \ - \\ & \quad x^2-4x+1 \\ & \quad \underline{x^2-2x+2} \ - \\ & \quad -2x-1 \end{array}$$

Kita dapatkan $r(x)=-2x-1$, jadi $r(x)$ berderajat 1.

$R(f,g)=|S(f,g)|=a_n^{m-k}|S(f,r)|$

$$=1^{(3-1)}\begin{vmatrix}1 & -2 & 2\\ -2 & -1 & 0\\ 0 & -2 & -1\end{vmatrix}$$

$$=1^2(1+0+8-0-0+4)=13.$$

2. Diketahui $F=R$ dengan $f(x)=x^3-2x^2-x+2$ dan

   $g(x)=x^3-2x^2-5x+6$

   Carilah resultan dari suku banyak $f(x)$ dan $g(x)$.

   Penyelesaian :

Kita dapatkan matriks $S(f,g)=\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -5 & 6 \end{vmatrix}$

Berdasarkan (B. 1.b), untuk $m = n$, untuk mencari determinan dari $S(f,g)$ kita gunakan matriks

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -b_3 & -b_2 & -b_1 & a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & -b_3 & -b_2 & 0 & a_3 & a_2 \\ 0 & 0 & -b_3 & 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 5 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

selanjutnya kita kalikan matriks diatas dari sebelah kiri matriks $S(f,g)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 5 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -8 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 12 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$R(f,g) = |S(f,g)| = \begin{vmatrix} 4 & -8 & 4 \\ -4 & 12 & -8 \\ 0 & -4 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 192 + 0 + 64 - 0 - 128 - 128$$

$$= 0.$$

3. Diketahui $F = R$ dengan $f(x) = x^4 - 3x^3 - 3x^2 - 11x + 6$ dan $g(x) = x^3 - 2x^2 - 2x - 3$.

Carilah resultan dari suku banyak $f(x)$ dan $g(x)$.

Penyelesaian :

Karena $n > m$, untuk lebih mudahnya kita gunakan metode Cayley, karena metode Cayley hanya bisa digunakan untuk $n > m$.

$$h(x,y) = \frac{f(x)g(y) - f(y)g(x)}{x-y}$$

$$h(x,y) = \frac{(x^4 - x^3 - 3x^2 - 11x + 6)(y^3 - 2y^2 - 2y - 3)}{x-y} - \frac{(y^4 - y^3 - 3y^2 - 11y + 6)(x^3 - 2x^2 - 2x - 3)}{x-y}$$

$$= \frac{x^4y^3 - x^3y^4 - 2x^4y^2 + 2x^2y^4 - 2x^4y + 2xy^4 - 3x^4 + 3y^4}{x-y} + \frac{5x^3y^2 - 5x^2y^3 + 13x^3y - 13xy^3 - 3x^3 + 3y^3 - 16x^2y + 16xy^2}{x-y} + \frac{21x^2 - 21y^2 + 45x - 45y}{x-y}$$

$$= \frac{(x-y)(x^3y^3 - 2x^3y^2 - 2x^2y^3 - 2x^3y - 2xy^3 - 2x^2y^2 - 3x^3 - 3y^3)}{x-y} + \frac{(x-y)(-3x^2y - 3xy^2 + 5x^2y^2 + 13x^2y + 13xy^2 - 3x^2 - 3y^2 - 3xy)}{x-y} + \frac{(x-y)(-16xy + 21x + 21y + 45)}{x-y}$$

$$= (45 + 21y - 3y^2 - 3y^3) + (21 - 19y + 10y^2 - 2y^3)x +$$

$$\left(-3+10y+3y^2-2y^3\right)x^2+\left(-3-2y-2y^2+y^3\right)x^3$$

$$K_f(f,g)=\left[c_{ij}\right]=\begin{bmatrix}45 & 21 & -3 & -3\\ 21 & -19 & 10 & -2\\ -3 & 10 & 3 & -2\\ -3 & -2 & -2 & 1\end{bmatrix}$$

Selanjutnya kita cari

$$\begin{vmatrix}45 & 21 & -3 & -3\\ 21 & -19 & 10 & -2\\ -3 & 10 & 3 & -2\\ -3 & -2 & -2 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}45+3(-3) & 21+3(-2) & -3+3(-2) & -3+3(1)\\ 21+2(-3) & -19+2(-2) & 10+2(-2) & -2+2(1)\\ -3+2(-3) & 10+2(-2) & 3+2(-2) & -2+2(1)\\ -3 & -2 & -2 & 1\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}36 & 15 & -9 & 0\\ 15 & -23 & 6 & 0\\ -9 & 6 & -1 & 0\\ -3 & -2 & -2 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}36 & 15 & -9\\ 15 & -23 & 6\\ -9 & 6 & -1\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}36-9(-9) & 15-9(6) & -9-9(-1)\\ 15+6(-9) & -23+6(6) & 6+6(-1)\\ -9 & 6 & -1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}117 & -39 & 0\\ -39 & 13 & 0\\ -9 & 6 & -1\end{vmatrix}$$

$$=(-1)\begin{vmatrix}117 & -39\\ -39 & 13\end{vmatrix}$$

$$=(-1)\,(1521-1521)$$

$$=(-1)(0)$$

$$=0$$

$$R(f,g)=\left(-1\right)^{\frac{n(n-1)}{2}}\ a_n^{m-n}\ \det\,[c_{ij}]$$

$$=\left(-1\right)^{\frac{4(3)}{2}}\,1^{(3-4)}\,(0)$$

$$=0.$$

4. Diketahui $F = R$ dengan $f(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$ dan $g(x) = x^2 + 2x - 1$.

Carilah resultan dari suku banyak $f(x)$ dan $g(x)$.

Penyelesaian :

Karena $n > m$, untuk lebih mudahnya kita gunakan metode Cayley

$$h(x,y) = \frac{f(x)g(y) - f(y)g(x)}{x-y}$$

$$h(x,y) = \frac{(x^3 - 4x^2 + 5x - 2)(y^2 + 2y - 1) - (y^3 - 4y^2 + 5y - 2)(x^2 + 2x - 1)}{x-y}$$

$$= \left(\frac{x^3y^2 - x^2y^3}{x-y}\right) + \left(\frac{2x^3y - 2xy^3}{x-y}\right) + \left(\frac{-13x^2y + 13xy^2}{x-y}\right) + \left(\frac{-x^3 + y^3}{x-y}\right) +$$
$$\left(\frac{6x^2 - 6y^2}{x-y}\right) + \left(\frac{-x+y}{x-y}\right)$$

$$= x^2y^2 + 2x^2y + 2xy^2 - 13xy - x^2 - xy - y^2 + 6x + 6y - 1$$

$$= (-1 + 6y - y^2) + (6 - 14y + 2y^2)x + (-1 + 2y + y^2)x^2$$

$$K_f(f,g) = [c_{ij}] = \begin{bmatrix} -1 & 6 & -1 \\ 6 & -14 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya kita cari

$$\begin{vmatrix} -1 & 6 & -1 \\ 6 & -14 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 14 - 12 - 12 + 14 + 4 - 36 = -28$$

$$R(f,g) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_n^{m-n} \det [c_{ij}] = (-1)^{\frac{3(2)}{2}} \cdot 1^{(2-3)} \cdot (-28)$$

$$= 28$$

BAB IV
PENUTUP

Berdasarkan hasil uraian sebelumnya dapat kita simpulkan bahwa :

Misalkan F suatu lapangan, suku banyak $f(x)$ dan $g(x)$ dalam $F[x]$, dengan

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

dan

$$g(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0$$

adalah dua suku banyak yang berturut-turut berderajat n dan m atas F.

Dalam menghitung resultan dua suku banyak dengan menggunakan metode Sylvester, sebaiknya digunakan jika $m > n$ dan jika $m = n$. Setelah itu kita cari matriks Sylvesternya, yang mempunyai bentuk seperti :

$$S(f,g) = \begin{pmatrix} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_0 \\ b_m & b_{m-1} & b_{m-2} & \cdots & b_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_m & b_{m-1} & b_{m-2} & \cdots & b_0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_m & b_{m-1} & b_{m-2} & \cdots & b_0 \end{pmatrix}$$

Sehingga kita dapatkan resultan $R(f,g)$ yaitu determinan dari matriks $S(f,g)$.

Dalam menghitung resultan mungkin akan sedikit mengalami kesulitan karena ukuran matriksnya yang terlalu besar, ada dua cara yang bisa digunakan untuk mereduksi ukuran matriks yaitu :

1. Jika $m > n$

   Langkah pertama kita cari sisa pembagian $g(x)$ oleh $f(x)$, misalkan $r(x)$ mempunyai derajat k, maka $R(f,g) = |S(f,g)| = a_n^{m-k} \, |S(f,r)|$.

2. Jika $m = n$

   Langkah pertama kita cari matriks Sylvesternya, setelah itu kita terapkan operasi baris ke $S(f,g)$. Misal $m = n = 3$

   Operasi baris yang sesuai adalah yang mengalikan dari sebelah kiri $S(f,g)$ dengan matriks berkut:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -b_3 & -b_2 & -b_1 & a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & -b_3 & -b_2 & 0 & a_3 & a_2 \\ 0 & 0 & -b_3 & 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix}$$

Metode Cayley digunakan dalam menghitung resultan jika $n > m$. Langkah pertama kita cari matriks Cayley $[c_{ij}]$; dengan c_{ij} adalah koefisien-koefisien $h(x,y)$, dimana

$$h(x,y) = \frac{f(x)g(y) - f(y)g(x)}{x-y}.$$

Kemudian kita cari determinan dari matriks Cayley $[c_{ij}]$, Selanjutnya kita cari resultannya dengan rumus : $R(f,g) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_n^{m-n} \det[c_{ij}]$.

DAFTAR PUSTAKA

Archbold J.W. 1972 *Algebra*. London : The English Language Book Society.

Arifin, A. 2000. *Aljabar*. Bandung : ITB

Ayres, F. 1965. *Theory and Problem of Modern Algebra*. New York : Schaum's out line series.

Lang, S. 1965. *Algebra*. New York : Columbia University

Rosnawati, R. 2001. *Artikel Resultan Dua Polinomial dengan Metode Cayley*. Jurusan Pendidikan Matematika, FMIPA, UNY : Jurnal Pendidikan Matematika dan Sains.

Waerden, B.L. Van der. 1953. *Modern Algebra*. New York : Frederikck Ungar.