MULTI STAGE RANDOM SAMPLING DAN PENERAPANNYA PADA METODE *QUICK COUNT*

Skripsi

Diajukan Untuk Memenuhi Salah Satu Syarat

Memperoleh Gelar Sarjana Pendidikan

Program Studi Pendidikan Matematika

Oleh

Jeki Wulandari

NIM: 001414067

PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA

JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN

UNIVERSITAS SANATA DHARMA

YOGYAKARTA

2006

MULTI STAGE RANDOM SAMPLING DAN PENERAPANNYA PADA METODE *QUICK COUNT*

Skripsi

Diajukan Untuk Memenuhi Salah Satu Syarat

Memperoleh Gelar Sarjana Pendidikan

Program Studi Pendidikan Matematika

Oleh

Jeki Wulandari

NIM: 001414067

PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA

JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN

UNIVERSITAS SANATA DHARMA

YOGYAKARTA

2006

SKRIPSI

MULTI STAGE RANDOM SAMPLING* DAN PENERAPANNYA PADA METODE *QUICK COUNT

Oleh:

Jeki Wulandari

NIM: 0011414067

Telah Disetujui oleh:

Pembimbing,

Ir.Ig. Aris Dwiatmoko, M.Sc.

Tanggal 13 Maret 2006

SKRIPSI

MULTI STAGE RANDOM SAMPLING* DAN PENERAPANNYA PADA METODE *QUICK COUNT

Dipersiapkan dan ditulis oleh:

Jeki Wulandari
NIM: 0011414067

Telah dipertahankan di depan Panitia Penguji
pada tanggal 24 Maret 2006
dan dinyatakan telah memenuhi syarat

Susunan Panitia Penguji

	Nama Lengkap	Tanda Tangan
Ketua	Drs. Severinus Domi, M.Si.	....
Sekretaris	M. Andy Rudhito, S.Pd.,M.Si.	....
Anggota	Ir. Ig. Aris Dwiatmoko,M.Sc.	....
Anggota	M. Andy Rudhito, S.Pd., M.Si.	....
Anggota	Hongki Julie, S.Pd.,M.Si.	....

Yogyakarta, 24 Maret 2006
Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan
Universitas Sanata Dharma
Dekan,

Drs. T. Sarkim. M.Ed, Ph.D

HALAMAN PERSEMBAHAN

Proses belajar tak akan pernah berakhir

Proses belajar seluas dan sepanjang jalan roda kehidupan yang akan dilaluinya

Ia akan baru berhenti bila kehidupan dalam dirinya berhenti pula

Di masa muda mengejar pengetahuan, semoga di masa tua diraihnya kebijaksanaan

(Rusdyn Ugiwan)

Karya kecilku ini kupersembahkan untuk :

Bapak dan Ibuku
Mbak Ningrum dan adikku Wulan
Sahabat-sahabatku
Teman-teman Pend. Matematika'00
Almamaterku

PERNYATAAN KEASLIAN KARYA

Saya menyatakan dengan sesungguhnya bahwa skripsi yang saya tulis ini tidak memuat karya atau bagian karya orang lain, kecuali yang telah disebutkan dalam kutipan dan daftar pustaka, sebagaimana layaknya karya ilmiah.

Yogyakarta, 24 Maret 2006

Jeki Wulandari

ABSTRAK

Penarikan sampel acak bertingkat merupakan pengembangan dari penarikan sampel acak kelompok. Dalam metode penarikan sampel acak bertingkat populasi dibagi dalam beberapa N kelompok, sehingga jumlah semua elemen dari tiap kelompok merupakan jumlah seluruh elemen populasi. Tingkat pertama diambil secara acak n kelompok dari N kelompok populasi. Tingkat berikutnya dari masing-masing kelompok terpilih diambil sampel secara acak. Sampel yang diobservasi adalah sampel yang terpilih pada tingkat terakhir.

Penarikan sampel acak bertingkat dapat digunakan untuk menduga rata-rata dan variansi populasi dengan mempertimbangkan informasi sampel dari setiap tingkat. Pada penarikan sampel acak bertingkat rata-rata populasi diduga dari rata-rata sampel tingkat akhir, begitu juga dengan variansi populasi merupakan gabungan variansi sampel dari tiap tingkatan. Secara khusus pendugaan parameter untuk panarikan sampel acak 3 tingkat dapat dirumuskan sebagai berikut :

Penduga rata-rata populasi, $\bar{\bar{\bar{y}}} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} \bar{\bar{y}}_i}{n}$

Penduga variansi rata-rata populasi,

$$v(\bar{\bar{\bar{y}}}) = \frac{1-f_1}{n}s_1^2 + \frac{f_1(1-f_2)}{nm}s_2^2 + \frac{f_1 f_2(1-f_3)}{nmk}s_3^2$$

Selang kepercayaan bagi rata-rata populasi,

$$P\left(\bar{\bar{\bar{y}}} - KS(\bar{\bar{\bar{y}}}) \le \bar{\bar{\bar{Y}}} \le \bar{\bar{\bar{y}}} + KS(\bar{\bar{\bar{y}}})\right) = 1-\alpha$$

Salah satu contoh penerapan penarikan sampel acak bertingkat adalah *quick count*. Parameter yang diduga adalah proporsi pemilih yang memilih calon tertentu dalam pemilu. Proporsi merupakan parameter rata-rata dengan data biner, sehingga proses pendugaan sama dengan proses pendugaan rata-rata diatas. Pada skripsi ini, diberikan simulasi *quick count* dengan menggunakan metode penarikan sampel acak 2 tingkat.

ABSTRACT

Multistage random sampling is a development of cluster random sampling. In multistage random sampling population is divided into several N groups, that the total of the whole elements from each cluster is a total of population element. First stage is n cluster from N population taken randomly. The next stage from the each chosen cluster is taken randomly sample. The observed sample is the sample which is chosen in the last-stage.

Multistage random sampling can be used to estimate the mean and of the variance population by considering sample information from each stage. In multistage random sampling, population mean is estimated from the last-stage of the sample mean, even so with the population variance which is estimated from the combination of sample variance, from each stage. Specifically the parameter estimation of these three stage random sampling can be formulated as follows :

Estimate population mean, $\bar{\bar{\bar{y}}} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} \bar{\bar{y}}_i}{n}$

Estimate population variance,

$$v\left(\bar{\bar{\bar{y}}}\right) = \frac{1-f_1}{n} s_1^2 + \frac{f_1(1-f_2)}{nm} s_2^2 + \frac{f_1 f_2 (1-f_3)}{nmk} s_3^2$$

Confidence interval for population mean,

$$P\left(\bar{\bar{\bar{y}}} - KS\left(\bar{\bar{\bar{y}}}\right) \leq \bar{\bar{\bar{Y}}} \leq \bar{\bar{\bar{y}}} + KS\left(\bar{\bar{\bar{y}}}\right)\right) = 1 - \alpha$$

An example of the aplication of multistage random sampling is quick count. Estimated parameter is a voter proportion which choose a certain candidate in a general election. Proportion is an mean parameter with binary data, so the estimated process equal with the above mean estimated process. In this thesis, the simulation of quick count is using two stage random sampling method.

KATA PENGANTAR

Penulis menghaturkan puji dan syukur kepada Tuhan Yang Maha Esa atas cinta dan kasih-Nya, sehingga skripsi yang bejudul" *Multistage random sampling* dan penerapannya pada metode *quick count"* dapat terselesaikan.

Penyusunan skripsi ini diajukan untuk memenuhi salah satu persyaratan dalam memperoleh gelar sarjana pendidikan pada Program Studi Pendidikan Matematika di Universitas Sanata Dharma.

Dalam proses penyusunan skripsi ini penulis menemukan banyak hambatan dan rintangan, namun berkat bantuan dan keterlibatan berbagai pihak penulis dapat menyelesaikannya dengan baik.

Bersama ucapan syukur ini penulis menghaturkan terima kasih kepada semua pihak yang telah membantu dan turut ambil bagian dalam proses penyusunan skripsi in, terutama kepada :

1. Bapak Ir. Ig. Aris Dwiatmoko, M. Sc, selaku dosen pembimbing skripsi yang telah banyak meluangkan waktu, memberikan perhatian, bimbingan dan dorongan kepada penulis selama proses penyusunan skripsi.
2. Para dosen JPMIPA yang telah membimbing, mendidik, mensharingkan ilmu pengetahuan, pengalaman hidup, dan kreatifitas kepada penulis selama belajar di Universitas Sanata Dharma.
3. Pak Narjo dan Pak Sugeng selaku staf sekretariat JPMIPA yang telah membantu memperlancar studi penulis di Universitas Sanata Dharma.
4. Seluruh staf perpustakaan, terima kasih atas bantuan dan kerjasamanya.

5. Keluarga besar Bapak/Ibu Sudarlan tercinta yang selalu memberi kesempatan, kepercayaan, dan setia menantiku. Terima kasih atas kesabarannya.
6. Buat kakakku mbak Room_cantik dan adikku Who_Land terimakasih atas doa, cinta, kasih sayang serta dukungannya.
7. Keluarga besar Bapak/Ibu Vc. Budi Soeroto terima kasih atas doanya.
8. Teman-teman mahasiswa PMAT dari semua angkatan, terima kasih atas kebersamaan, kerja sama, kegembiraan, suka duka, penerimaan, kesedian diri untuk bersama dan saling berbagi ilmu.
9. Teman-teman yang menjadi " anak bimbing "Pak Aris, terima kasih atas pengertian dan kebersamaanya selama ini.
10. Teman-teman kost " Banana Home ", terima kasih kebersamaan dan canda tawanya selama ini.
11. Sahabat-sahabat (mas_robert, mas_indra, mb_ncis, yoko, kojek, emral, ega, n'chris, indri, deny, betty, buny, happy, dewi, hana) yang selalu setia menemaniku di setiap waktu.
12. Semua orang yang telah membantu penulis dalam menyelesaikan skripsi ini yang tidak bisa penulis sebutkan satu persatu.

Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih banyak kekurangan dan kesalahan baik dalam hal isi maupun tata bahasa. Oleh sebab itu penulis sangat mengharapkan saran dan kritik yang membangun dari para pembaca. Akhirnya semoga skripsi ini dapat dimanfaatkan sebaik-baiknya.

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR LAMPIRAN

BAB I

PENDAHULUAN

A. Latar Belakang

Penelitian yang baik memerlukan metode penelitian yang tepat, agar masalah penelitian dapat dijawab. Penelitian yang melibatkan objek-objek penelitian dalam jumlah besar, akan menimbulkan masalah bagi peneliti, karena akan membutuhkan waktu, biaya, serta tenaga yang besar pula. Untuk mengatasi hal tersebut, salah satu metode yang dilakukan oleh peneliti adalah dengan melakukan *sampling* (penarikan sampel). Penarikan sampel adalah suatu metode untuk pengumpulan data bila hanya elemen sampel yang diteliti (Supranto,1992). Dalam menggunakan metode penarikan sampel harus diperhatikan bagaimana menentukan sampel. Ada dua macam sampel yang dapat digunakan yaitu *random sample* (sampel acak) dimana pemilihan elemen-elemen sampel dilakukan secara objektif, perasaan atau selera peneliti tidak ikut campur dalam penentuan elemen mana yang akan diteliti. Berlainan dengan sampel acak, dalam *non random sample* (sampel non acak) pemilihan elemen-elemen untuk diteliti ditentukan oleh subyektifitas peneliti atau tujuan-tujuan spesifik penelitian.

Ada bermacam-macam metode penarikan sampel acak. Salah satunya adalah *multistage random sampling* (penarikan sampel acak bertingkat) yang akan dibahas dalam tulisan ini. Sampel acak bertingkat adalah suatu sampel dimana pemilihan elemen-elemen populasi sebagai anggota sampel dilakukan secara bertingkat. Untuk penarikan sampel acak dilakukan secara bertingkat sebanyak dua kali sering disebut *twostage random sampling* (penarikan sampel acak bertingkat dua), tetapi apabila penarikan sampel acak dilakukan lebih dari dua tingkat sering disebut penarikan sampel acak bertingkat. Dalam praktek, penarikan sampel acak bertingkat (PSAB) digunakan sebagai metode pengambilan sampel untuk melakukan *quick count,* yaitu suatu proses pencatatan hasil penelitian secara cepat. Sebagai contoh dalam kasus penghitungan suara dalam pemilu 2004, beberapa lembaga penelitian menggunakan *quick count* untuk menghitung perolehan suara pemilu. Q*uick count* (perhitungan cepat) merupakan metode menghitung hasil pemilu dengan menggunakan sampel (Shobirin, 2004).

Secara garis besar langkah-langkah penggunaan penarikan sampel acak bertingkat adalah menentukan tujuan penelitian secara pasti dan melakukan pengambilan sampel secara bertingkat pada setiap kelompok. Elemen dalam setiap kelompok tidak diteliti semua, akan tetapi diambil sampelnya saja. Tinjauan teori dari penarikan sampel acak bertingkat ini kiranya sangat penting untuk dapat menghasilkan pendugaan dalam membuat kesimpulan mengenai populasi.

B. Perumusan Masalah

Pokok-pokok permasalahan yang akan dibahas dalam tulisan ini dirumuskan sebagai berikut :

1. Bagaimana langkah-langkah penarikan sampel dengan penarikan sampel acak bertingkat ?
2. Bagaimana landasan teori penarikan sampel acak bertingkat ?
3. Bagaimana penerapan penarikan sampel acak bertingkat pada metode *quick count*?

C. Tujuan Penulisan

Tujuan penulisan skripsi ini adalah untuk memperkenalkan penarikan sampel acak bertingkat dalam teori penarikan sampel yang sering dipergunakan dalam suatu penelitian.

D. Manfaat Penulisan

Manfaat yang akan diperoleh setelah mempelajari topik ini adalah dapat menggunakan penarikan sampel acak bertingkat banyak untuk menduga parameter populasi yang tidak diketahui seperti rata-rata dan variansi populasi.

E. Metode Penulisan

Metode yang digunakan penulis dalam menyusun skripsi adalah metode studi pustaka yaitu dengan mempelajari buku-buku yang berkaitan dengan topik skripsi ini.

F. Pembatasan Masalah

Penulis menggunakan konsep-konsep dasar teori sampling sehingga, ruang lingkup penulisan dalam skripsi ini hanyalah mengenai penarikan sampel acak bertingkat dimana pada pengambilan elemen dalam kelompok mempunyai probabilitas yang sama untuk terpilih dalam sampel dan dipilih secara acak tanpa pengembalian. Dibatasi pula bahwa penarikan sampel acak bertingkat pembahasanya hanya pada penarikan sampel acak 2 tingkat dan penarikan sampel acak 3 tingkat. Ada beberapa landasan teori yang tidak dibahas dalam skripsi ini karena sudah diperoleh di bangku kuliah. Sebagai pembatasan, beberapa teorema tidak akan dibuktikan misalnya, teorema limit pusat dan teorema nilai harapan.

G. Sistematika Penulisan

Dalam sistematika penulisan mengenai *multistage random sampling* dan penerapannya pada metode *quick count* ini, pada bab pertama berisi tentang latar belakang, perumusan masalah, tujuan penulisan, manfaat penulisan, metode penulisan, pembatasan masalah serta sistematika penulisan.

Pada bab II, penulis menguraikan beberapa prasyarat yang diperlukan untuk memahami metode penarikan sampel acak bertingkat banyak dan penerapannya secara keseluruhan. Dalam bab II diperlukan pengetahuan dasar probabilitas antara lain pengertian sampel, populasi, statistik, variabel random, kesalahan sampling, nilai harapan, selang kepercayaan, dan penarikan sampel acak sederhana (PSAS).

Dalam bab III, penulis menguraikan PSA bertingkat yang dibagi menjadi dua sub bab yaitu PSA 2 tingkat dan PSA 3 tingkat. Dari masing-masing sub bab dibahas mengenai langkah-langkah penarikan sampel dan pendugaan parameter populasi. Penerapan PSA 2 tingkat diberikan dengan contoh kasus yang diangkat penulis.

Dilanjutkan dengan bab IV, membahas tentang penerapan penarikan sampel acak bertingkat pada metode *quick qount*.

Bab terakhir, yaitu bab V berisi kesimpulan yang berkaitan dengan pembahasan teori penarikan sampel acak bertingkat pada bab-bab sebelumnya.

BAB II

LANDASAN TEORI

Dalam bab II ini akan dibahas beberapa pengertian dasar yang perlu dikuasai untuk mempelajari bab-bab selanjutnya. Definisi, teorema – teorema dan beberapa contoh akan diberikan untuk membahas penarikan sampel acak bertingkat.

A. Pendahuluan

Salah satu usaha yang dilakukan manusia untuk memecahkan masalah diberbagai bidang kehidupan adalah melakukan penelitian. Karena adanya berbagai keterbatasan (biaya, waktu, dan tenaga) penelitian dilakukan dengan hanya mengambil sebagian objek dari sasaran penelitian dan menganalisanya. Dalam melakukan penelitian perlu didefinisikan populasi dengan jelas. Bagian yang diambil dari populasi yang sudah ditentukan disebut sampel. Misalkan seorang peneliti ingin memperoleh keterangan mengenai pemakaian sabun mandi rumah tangga didaerah A, maka peneliti mengadakan penelitian terhadap rumah tangga didaerah A tersebut. Dalam hal ini peneliti tidak perlu mengamati seluruh rumah tangga yang ada didaerah A, tetapi peneliti hanya mengambil sebagian saja rumah tangga untuk dijadikan sampel penelitiannya. Sejauh mana ketepatan dari kesimpulan tentang sifat populasi tergantung pada penarikan sampel. Beberapa keuntungan yang didapat dari melakukan penarikan sampel :

1. Biaya berkurang

   Data yang diperoleh berasal dari sejumlah bagian kecil dari populasi, tentu saja biaya yang dikeluarkan akan lebih murah daripada biaya untuk meneliti seluruh anggota populasi.

2. Kecepatan pengumpulan data lebih besar

   Data dikumpulkan dan diringkas lebih cepat dengan sebuah sampel daripada dengan sebuah populasi.

3. Tingkat ketelitian lebih besar

   Sebuah sampel akan memberikan hasil yang lebih teliti daripada populasi karena jumlah pekerjaan menjadi kecil. Dengan tenaga yang berkualitas baik dan pengawasan terhadap pekerjaan diperketat maka hasil dapat diproses dengan lebih baik bila dibandingkan dengan mengobservasi seluruh anggota populasi.

B. Variabel Random

Peluang timbulnya suatu kejadian dalam ruang sampel dideskripsikan dalam model matematika yang diekspresikan dalam bentuk nilai-nilai numeris dari hasil percobaan. Hal tersebut menimbulkan gagasan untuk mendefinisikan sebuah fungsi yang dikenal dengan variabel random, yang memetakan setiap hasil dalam percobaan dengan bilangan real.

Definisi 2.2.1 Variabel Random

Variabel random, dilambangkan misalnya dengan Y adalah suatu fungsi yang didefinisikan pada ruang sampel S yang memetakan setiap elemen $e \in S$ ke bilangan real, $\mathrm{Y}(\mathrm{e}) = y$.

Catatan : Huruf kapital Y digunakan sebagai lambang variabel random, sedangkan y huruf kecil melambangkan nilai variabel random yang mungkin.

Definisi 2.2.2 Variabel Random Diskrit

Suatu variabel random disebut variabel random diskrit bila daerah hasilnya merupakan suatu himpunan diskrit.

Contoh 2.2.2 Variabel Random Diskrit

Banyak barang yang cacat dalam sampel n barang atau banyak korban meninggal di suatu jalan pertahun.

Definisi 2.2.3 Variabel Random Kontinu

Suatu variabel random disebut variabel random kontinu bila daerah hasilnya merupakan suatu himpunan non diskrit (kontinu).

Contoh 2.2.3 Variabel Random Kontinu

Pada pengukuran tinggi badan siswa SD kelas V, jika Y adalah variabel random yang menyatakan tinggi badan siswa SD kelas V maka Y adalah variabel random kontinu karena Y menjalani nilai-nilai dalam suatu interval.

Definisi 2.2.4 Fungsi Probabilitas Diskret

Probabilitas variabel random diskrit didefinisikan sebagai berikut :

$P(Y = y) = P(\{e \in S | Y(e) = y\})$

$P(Y = y)$ biasa ditulis dengan $f(y_i)$

Jadi f adalah fungsi probabilitas diskrit jika memenuhi sifat berikut :

1. $f(y_i) \geq 0$
2. $\sum_{\forall_i} f(y_i) = 1$

Definisi 2.2.5 Fungsi Probabilitas kontinu

Jika Y variabel random kontinu maka suatu kejadian akan berkaitan dengan suatu interval. Probabilitas variabel random Y terletak antara a dan b atau $P(a \leq y \leq b)$ dapat diperoleh dengan mengandaikan ada fungsi $f(y)$ sedemikian sehingga luas daerah dibawah kurva fungsi ini pada interval $[a,b]$ sama dengan $P(a \leq y \leq b)$. Jadi $P(a \leq y \leq b) = \int_a^b f(y)dy$. Fungsi probabilitas variabel random kontinu juga dikenal dengan nama fungsi densitas.

f merupakan fungsi densitas kontinu jika memenuhi syarat berikut :

1. $f(y) \geq 0$ untuk semua $y \in R$
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)dy = 1$

Contoh 2.2.5 Variabel random Y dikatakan berdistribusi normal dengan mean $\overline{Y}$ dan simpangan baku S bila fungsi probabilitasnya berbentuk :

$$f(y,\bar{Y},S)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}S}e^{\frac{1}{2}\left(\frac{y-\bar{Y}}{S}\right)^2}\text{, untuk } -\infty \langle\, y \,\langle +\infty,$$

dimana $\pi = 3{,}14159$ dan $\mathrm{e} = 2{,}171828$

Distribusi peluang kontinu yang paling penting dalam bidang statistika adalah distribusi normal. Persamaan matematika bagi distribusi peluang variabel random normal tersebut bergantung pada dua parameter yaitu rata-rata dan simpangan baku. Oleh karena itu dilambangkan nilai-nilai fungsi densitas normal bagi Y dengan $N(y,\bar{Y},S)$. Pada tulisan ini distribusi normsal berperan dalam pembahasan selang kepercayaan dan kesalahan sampling.

Definisi 2.2.6 Variabel Random yang Bebas Stokastik

Variabel random Y_i disebut bebas stokastik bila fungsi densitas bersamanya

$$f_{Y_{1,2,\ldots,k}}(y_1,y_2,y_3,\ldots,y_k)=\begin{cases}\prod_{i=1}^{k} p(y_i)\text{, untuk } y_i \text{ diskrit}\\ \prod_{i=1}^{k} f(y_i)\text{, untuk } y_i \text{ kontinu}\end{cases}$$

$p(y_i)$ merupakan fungsi probablilitas diskrit dan $f(y_i)$ merupakan fungsi probabilitas kontinu. Konsep variabel random bebas stokastik sangat penting untuk memberikan dasar konsep sampel acak.

Defisini 2.2.7 Sampel Acak

Jika diketahui variabel random $Y_1,Y_2,Y_3,\ldots,Y_n$ yang mempunyai fungsi densitas $f_{Y_1,Y_2,\ldots,Y_n}(y_1,y_2,y_3,\ldots,y_n)$ dapat difaktorkan menjadi $f_{Y_1,Y_2,\ldots,Y_n}(y_1,y_2,y_3,\ldots,y_n)= f(y_1)f(y_2)\ldots f(y_n)$, dengan $f(.)$ adalah fungsi densitas untuk masing-masing y_i, maka $Y_1,Y_2,\ldots,Y_n$ disebut sampel acak berukuran n.

C. Nilai Harapan

Konsep nilai harapan memegang peranan penting dalam statistika. Contoh yang paling mudah adalah rata-rata dan variansi suatu variabel random. Keduanya adalah parameter-parameter yang hampir selalu muncul dalam teknik-teknik analisis statistika elementer atau lanjut. Yang dimaksud dengan nilai harapan dinyatakan dengan definisi sebagai berikut :

Definisi 2.3.1 Nilai Harapan , $E(Y)$

$$E(Y)=\begin{cases}\sum_{i=1}^{n} y_i p(y_i) \text{ jika Y diskrit dengan fungsi probabilitas } p(y)\\ \int_{-\infty}^{+\infty} yf(y)dy \text{ Jika Y kontinu dengan fungsi densitas } f(y)\end{cases}$$

Teorema 2.3.1 Misalkan Y suatu variabel random dengan distribusi peluang $p(y)$ atau $f(y)$. Nilai harapan fungsi $g(Y)$ adalah

$$E[g(Y)]=\begin{cases}\sum_{\forall_y} g(y)p(y)\,; \textit{bila Y diskrit}\\ \int_{-\infty}^{+\infty} g(y)f(y)\,; \textit{bila Y kontinu}\end{cases}$$

Sifat-Sifat Nilai Harapan

Teorema 2.3.2 Bila a dan b konstanta, maka $E(aY+b)=aE(Y)+b$

Bukti Menurut definisi nilai harapan,

$$
\begin{aligned}
E(aY+b) &= \sum_{i=1}^{n}(ax_i+b)f(x_i) \\
&= (ax_1+b)f(x_1)+(ax_2+b)f(x_2)+\ldots+(ax_n+b)f(x_n) \\
&= a[x_1f(x_1)+x_2f(x_2)+\ldots+x_nf(x_n)]+b[f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)] \\
&= a\sum_{i=1}^{n}x_if(x_i)+b\sum_{i=1}^{n}f(x_i)
\end{aligned}
$$

Jumlah yang pertama disebelah kanan adalah $E(Y)$ dan jumlah yang kedua sama dengan 1. Jadi $E(aY+b)=aE(Y)+b$

Teorema 2.3.3 $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$

Bukti Misalkan $g(X,Y)$ adalah fungsi dari variabel random X dan Y

$$E(g(X,Y))=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}g(x,y)f(x,y)dxdy$$

$$E(g(X,Y))=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x+y)f(x,y)dxdy$$

$$E(g(X,Y))=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)dxdy+\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}yf(x,y)dxdy$$

$$E(g(X,Y))=\int_{-\infty}^{+\infty}x\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dydx+\int_{-\infty}^{+\infty}y\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy$$

$$E(g(X,Y))=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx+\int_{-\infty}^{+\infty}yf(y)dy$$

$$E(g(X,Y))=E(X)+E(Y)$$

Teorema 2.3.4 Misalkan X dan Y dua variabel random independen, maka

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

Bukti Menurut definisi,

$$E(XY) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xyf(x,y)dxdy$$

Karena X dan Y independen, maka dapat ditulis $f(x,y) = g(x)h(y)$ dengan $g(x)$ dan $h(y)$ menyatakan masing-masing distribusi marginal X dan Y.

Jadi $E(XY) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xyg(x)h(y)dxdy$

$$E(XY) = \int_{-\infty}^{+\infty} xg(x)\left[\int_{-\infty}^{+\infty} yh(y)dy\right]dx = \int_{-\infty}^{+\infty} xg(x)E(Y)dx$$

$$E(XY) = E(Y)\int_{-\infty}^{+\infty} xg(x)dx = E(Y)E(X)$$

D. Variansi dan Kovariansi

Salah satu nilai harapan yang penting adalah variansi yang merupakan nilai harapan fungsi $g(Y) = (Y - \bar{Y})^2$, dimana $\bar{Y} = E(Y)$.

Definisi 2.4.1 Variansi variabel random Y

Var (Y) = $E\left[(Y - \bar{Y})^2\right] = E\left[Y^2\right] - \bar{Y}^2$

Akar pangkat dua dari Var (Y)adalah standar deviasi dari Y dan diberi notasi S. Kegunaan dari variansi adalah untuk mengukur keragaman data.

Teorema 2.4.1 Bila a adalah konstata, maka Var $(aY) = a^2 VarY$

Bukti $Var(aY) = E(aY - a\bar{Y})^2 = a^2 E(Y - \bar{Y})^2 = a^2 VarY$

Definisi 2.4.2 Kovariansi dari X dan Y

Kov $(X,Y) = E[(X - \bar{X})(Y - \bar{Y})] = E(XY) - E(\bar{X})E(\bar{Y})$

E. Populasi dan Sampel

1. Populasi

Keseluruhan pengamatan yang menjadi perhatian peneliti baik terhingga maupun tak hingga, menyusun apa yang disebut populasi. Populasi berkaitan dengan sembarang pengamatan yang menarik perhatian peneliti, apakah itu sekelompok orang, binatang, bilangan atau benda apa saja. Berikut akan didefinisikan pengertian populasi.

Definisi 2.5.1 Populasi adalah

— Himpunan dari semua unit observasi yang mungkin, di mana unit observasi adalah individu atau kelompok yang dapat memberikan keterangan tentang apa yang ingin diamati atau dipelajari oleh seorang peneliti. (Agung, 1992 : 12)

— Himpunan berhingga atau tak hingga dari individu-individu.

Populasi tersebut analog dengan istilah semesta pembicaraan dalam teori himpunan. Secara praktis, populasi sinonim dengan suatu kumpulan yang anggotanya tidak selalu berupa organisme hidup. (Kendall, S.N.G, W.r Buckland.1982)

Kedua definisi tersebut pada dasarnya mempunyai inti yang sama dan saling melengkapi. Populasi merupakan suatu kumpulan, yang pendefinisiannya tergantung pada minat dan kepentingan masing-masing peneliti. Peneliti yang satu mungkin ingin membuat pengamatan tentang karakteristik mahasiswa-mahasiswa di semua perguruan tinggi di Yogyakarta. Peneliti yang lain mungkin ingin meneliti karakteristik mahasiswa-mahasiswa disuatu perguruan tinggi tertentu saja. Kedua peneliti tersebut sama-sama menganggap populasi sebagai kumpulan mahasiswa yang akan menjadi objek peneliti.

Contoh 2.5.1

Andaikan seorang peneliti ingin mengetahui hasil belajar siswa SMU di Yogyakarta, melalui rata-rata nilai UAN SMU. Populasinya adalah semua nilai UAN siswa SMU di Yogyakarta.

Inferensia statistika mencakup semua metode yang berhubungan dengan analisis sebagian data untuk kemudian sampai pada peramalan atau penarikan kesimpulan. Untuk memperoleh kesimpulan mengenai populasi, peneliti dapat memilih sebagian anggota populasi untuk membantu peneliti menarik kesimpulan mengenai populasi tersebut. Berikut akan didefinisikan pengertian sampel.

2. Sampel

Definisi 2.5.2 Sampel adalah himpunan bagian dari populasi.

Syarat utama agar suatu sampel mempunyai sifat acak, apabila pemilihan sampel harus melalui proses acak, yaitu suatu proses yang hasilnya tidak dapat diketahui sebelumnya dengan pasti. Pemilihan sampel yang objektif caranya harus acak yaitu, cara pemilihan sampel sedemikian rupa sehingga setiap elemen populasi mendapat kesempatan yang sama untuk dipilih menjadi anggota sampel. Misalnya, seorang peneliti pasar ingin mengetahui banyaknya permintaan terhadap suatu jenis barang konsumsi dari 18.000 rumah di kota besar. Peneliti mengambil sampel dari 18.000 rumah tersebut secara acak, tanpa memperhatikan apakah rumah yang terpilih sebagai sampel membeli atau tidak barang konsumsi tersebut.

Definisi 2.5.3 Penarikan Sampel Acak ialah metode pengambilan sampel dari suatu populasi berukuran N sedemikian rupa sehingga semua sampel yang mungkin terambil memiliki probabilitas yang sama untuk terpilih.

Ada beberapa cara bagaimana sampel acak diperoleh, hal ini sangat tergantung kepada keadaan populasi yang akan diperiksa, apakah keadaanya homogen atau tidak, di samping itu juga pertimbangan biaya, waktu, dan tenaga. Penarikan sampel acak dapat dilakukan dengan beberapa cara antara lain adalah penarikan sampel acak sederhana (PSAS), penarikan sampel acak berlapis, penarikan sampel acak berkelompok (PSAK), dan penarikan sampel acak bertingkat (PSAB).

Contoh 2.5.2

Andaikan populasi yang hendak di teliti adalah semua siswa kelas 3 SLTP di sekolah X. Andaikan terdapat 50 siswa, jika seorang anak diambil secara acak dari populasi tersebut maka peluang terambilnya anak tersebut adalah $\frac{1}{50}$ jika yang terpilih pertama tidak dikembalikan, peluang siswa lain untuk terambil adalah $\frac{1}{49}$, prosedur tersebut disebut penarikan sampel tanpa pengembalian. Jika anak pada pengambilan sampel yang pertama dikembalikan ke dalam populasi maka peluang siswa lain untuk terambil adalah $\frac{1}{50}$ prosedur penarikan sampel tersebut disebut penarikan sampel dengan pengembalian.

Definisi 2.5.4 Sampel yang representatif adalah sampel yang memiliki karakteristik populasi yang relevan dengan tujuan penelitian yang bersangkutan.

Dalam penelitian, peneliti mengambil sampel acak dengan harapan dan mengasumsikan sampel tersebut representatif, bahwa karakteristik populasi tersebut akan terdapat pula dalam sampel yang terambil. Makin homogen keadaan karakter subjek dalam suatu populasi maka makin mudah dicapai representativitas sampel, karena sampel yang terambil akan mewakili karakteristik populasi.

Contoh 2.5.3

Lembaga Penelitian, Pendidikan dan Penerangan Ekonomi dan Sosial (LP3ES) dalam penelitiannya ingin mengetahui total hasil perolehan suara pada pemilu presiden 2004. Karakteristik populasi yang relevan dengan tujuan penelitian adalah hak pilih masyarakat dari berbagai golongan partai.

F. Kerangka (frame)

Peneliti membutuhkan populasi yang jelas, dan elemen populasi juga harus diketahui oleh peneliti. Sebelum sampel diambil dari populasi, populasi dibagi dalam bagian-bagian yang disebut unit penarikan sampel. Unit tersebut harus mencakup seluruh anggota populasi dan tidak boleh tumpang tindih dalam arti bahwa setiap elemen dalam populasi hanya menjadi anggota satu unit.

Definisi 2.6.1 Kerangka adalah daftar unit penarikan sampel.

Contoh 2.6.1 Pengamatan sebuah pasar, kerangkanya berupa daftar semua nama pedagang di pasar tersebut.

G. Parameter dan Statistik

Notasi yang digunakan statistikawan dalam mengolah data statistik sepenuhnya tergantung pada apakah data tersebut merupakan populasi atau suatu sampel yang diambil dari suatu populasi. Misalkan sekelompok data berikut yang berupa banyaknya kesalahan ketik pada tiap halaman yang dilakukan oleh seorang sekretaris ketika mengetik sebuah dokumen setebal 10 halaman : 1,0,1,2,3,1,1,4,0, dan 2. Misalkan dapat dikatakan bahwa banyaknya kesalahan terbesar adalah 4, atau menyatakan nilai tengah hitung (rata-rata) 10 hitungan itu adalah 1,5. Bilangan 4 dan 1,5 merupakan deskripsi bagi populasi tersebut. Nilai-nilai tersebut merupakan parameter. Rata-rata populasi yang akan dilambangkan dengan $\overline{Y}$.

Definisi 2.7.1 Parameter adalah suatu nilai berdasarkan data yang diobservasi dari suatu populasi secara keseluruhan.

Dari definisi tersebut parameter ditafsirkan sebagai karakteristik dari populasi. Dalam teori probabilitas populasi dicirikan dengan distribusi probabilitas dari variabel random yang merupakan fungsi dari parameter. Oleh karenanya distribusi probabilitas variabel random sering diindekskan dengan suatu parameter θ.

Contoh parameter antara lain adalah rata-rata populasi $\overline{Y}$, variansi populasi S^2. Parameter biasanya tidak diketahui, dan dengan statistiklah nilai parameter tersebut ditaksir atau diduga. Sebagai contoh rata-rata sampel $\overline{y}$ untuk menduga rata-rata populasi $\overline{Y}$ yang tidak diketahui.

Contoh 2.7.1 Rata-rata banyaknya kesalahan ketik yang dilakukan oleh sekretaris adalah 1-2 per halaman.

Misalkan bahwa data tersebut merupakan sebuah sampel 10 halaman yang diambil dari sebuah naskah yang jauh lebih tebal. Jelaslah bahwa sekarang populasinya tersusun atas data yang jauh lebih besar, dan hanya memiliki informasi sebagian yang diberikan oleh sampel. Dengan demikian 4 dan 1,5 menjadi ukuran deskripsi sampel, dan tidak lagi merupakan parameter populasi.

Definisi 2.7.2 Statistik adalah suatu fungsi dari variabel random yang diobservasi dalam suatu sampel.

Statistik digunakan untuk membuat kesimpulan atau pendugaan tentang parameter populasi yang tidak diketahui. Statistik yang sering dijumpai adalah rata-rata sampel $\overline{y}$ dan variansi sampel s^2 yang masing-masing dapat dipakai untuk menduga $\overline{Y}$ dan S^2.

Contoh 2.7.2 Dari sampel acak kesalahan ketik diperoleh $\overline{y}$ =1,5.

H. Distribusi Sampling Statistik

Penelitian yang dilakukan biasanya menghasilkan statistik untuk menduga parameter populasi. Suatu statistik dihitung dari suatu sampel yang diambil dari suatu populasi, dan berdasarkan statistik tersebut dibuat pernyataan mengenai nilai parameter populasi. Suatu statistik sesungguhnya merupakan suatu variabel random yang nilainya bergantung pada sampel yang diamati. Karena suatu statistik merupakan variabel random maka statistik mempunyai sebaran (distribusi).

Definisi 2.8.1 Distribusi sampling statistik adalah distribusi probabilitas suatu statistik.

Teorema 2.8.1

a. Andaikan sampel acak berukuran n diambil dari suatu populasi dengan rata-rata $\bar{Y}$ maka nilai harapan dari $\bar{y}$ akan sama dengan $\bar{Y}$. ($\bar{Y}_{\bar{y}} = \bar{Y}$)

Bukti:

$$E\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}\right) = E\left(\frac{y_1}{n} + \frac{y_2}{n} + \ldots + \frac{y_n}{n}\right) = E\left(\frac{y_1}{n}\right) + E\left(\frac{y_2}{n}\right) + \ldots + E\left(\frac{y_n}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{n}\left(E(y_1) + E(y_2) + E(y_n)\right) = \frac{1}{n}\left(\bar{Y} + \bar{Y} + \ldots + \bar{Y}\right) = \frac{1}{n} n\bar{Y} = \bar{Y}$$

b. Andaikan sampel acak berukuran n diambil dari suatu populasi dengan deviasi standar (simpangan baku) s maka simpangan baku dari $\bar{y}$ akan mendekati (sama) simpangan baku populasi dibagi dengan akar kuadrat ukuran sampel $\left(s_{\bar{y}} = \frac{S}{\sqrt{n}}\right)$

Bukti:

$\left(s_{\bar{y}} = \frac{S}{\sqrt{n}}\right)$ sama saja dengan $s_{\bar{y}}^2 = \frac{S^2}{n} = Var(\bar{y})$

$$Var(\bar{y}) = Var\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i\right) = Var\left(\frac{1}{n}(y_1 + y_2 + \ldots + y_n)\right) = \frac{1}{n^2} Var(y_1 + y_2 + \ldots + y_n)$$

$$= \frac{1}{n^2} n Var\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right) = \frac{Var(y_i)}{n} = \frac{S^2}{n}$$

Kalau populasi terbatas, tetapi pemilihan sampel dilakukan tanpa pengambilan maka $Var(\bar{y}) = s_{\bar{y}}^2 = \frac{S^2}{n} \cdot \frac{N-n}{N-1}$, Faktor $\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$ disebut faktor koreksi populasi terbatas. Untuk N yang relatif besar dibandingkan dengan ukuran sampel n, faktor korelasi tersebut akan mendekati satu, sehingga nilai $s_{\bar{y}}^2$ akan menghampiri S^2/n.

Teorema 2.11.2 Limit Pusat

Bila sampel acak berukuran n ditarik dari suatu populasi dengan rata-rata $\bar{Y}$ dan variansi S^2 maka rata-rata sampel $\bar{y}$ akan menyebar menghampiri distribusi normal. Berdasarkan teorema 2.11.1 a dan 2.11.1 b maka $Z = \frac{\bar{y} - \bar{Y}}{S/\sqrt{n}}$ merupakan sebuah nilai untuk variabel random normal standar Z. Hampiran normal dalam teorema 2.11.1, digunakan bila $n \geq 30$, bagaimanapun bentuk populasinya. Bila n < 30, hampiran tersebut baik digunakan bila populasi asalnya tidak terlalu berbeda dari populasi normal. Bila populasi asalnya normal, maka $\bar{y}$ akan menyebar normal, sekecil apapun ukuran sampelnya.

Bukti

Lihat pembuktian pada (Catur Supatmono, 2000:14).

I. Penduga Parameter

Statistika banyak berhubungan dengan penarikan kesimpulan mengenai parameter populasi. Penarikan kesimpulan ini bersifat tidak pasti, karena hanya didasarkan pada hasil yang berasal dari sampel. Tingkat kebenaran penarikan kesimpulan diukur dengan seberapa besar peluang kesimpulan tersebut benar. Andaikan seorang guru ingin mengetahui berapa rata-rata lama belajar perhari siswa SMU di DIY. Peneliti dapat mengambil sampel sebesar 300 orang secara acak yang representatif dari seluruh SMU di DIY. Berdasarkan hasil perhitungan dari data sampel didapat rata-rata lama belajarnya adalah 2 jam/hari. Dari hasil tersebut dapat diduga bahwa rata-rata lama belajar siswa SMU DIY tiap hari adalah 2 jam. Berdasarkan penjelasan tentang statistik maka $\bar{y} = 2$ jam adalah suatu nilai dugaan bagi $\bar{Y}$.

Pendugaan parameter merupakan usaha penentuan nilai parameter yang sedang diselidiki. Untuk melakukan pendugaan nilai suatu parameter dapat ditempuh dengan dua cara. Cara pertama merupakan penentuan nilai tunggal yang mendekati nilai parameter itu dengan sebaik-baiknya (penduga titik). Cara kedua dapat merupakan penentuan suatu selang nilai dengan peluang yang besar mencakup nilai parameter yang diselidiki (pendugaan selang).

Definisi 2.9.1 Penduga titik adalah sembarang statistik yang digunakan untuk menduga parameter θ.

Suatu penduga titik bagi suatu parameter populasi adalah nilai tunggal numerik dari suatu statistik yang relevan dengan parameter tersebut. Secara umum dalam pembahasan selanjutnya, aplikasi teori penarikan sampel acak bertingkat banyak di fokuskan pada pendugaan rata-rata populasi ($\overline{Y}$) dan pendugaan proporsi populasi (P). Distribusi sampling statistik yang bersesuaian dengan parameter-parameter tersebut menggunakan distribusi normal.

Data sampel yang diperoleh melalui penarikan sampel menghasilkan nilai statistik yang dapat dipakai sebagai penduga parameter. Nilai statistik tidak bisa tepat sama dengan nilai parameter populasi, tetapi dapat ditentukan sejauh mana ketepatan pendugaan tersebut. Langkah-langkah pendugaan parameter dapat digambarkan dalam diagram berikut:

Penarikan sampel $\rightarrow$ data penarikan sampel $\rightarrow$ statistik $\rightarrow$ penduga parameter.

Prosedur pendugaan nilai parameter populasi yang belum diketahui harus dibuat dari informasi yang dikandung oleh data sampel yang didasarkan pada distribusi sampling statistik yang telah dibahas pada pokok bahasan sebelumnya. Distribusi sampling statistik tersebut memungkinkan peneliti untuk mengaitkan suatu taraf kepercayaan tertentu dengan setiap kesimpulan statistik yang dibuat, sebagai suatu ukuran seberapa jauh peneliti menaruh kepercayaan pada ketetapan ststistik dalam menduga parameter populasinya.

Besarnya parameter yang tidak diketahui menyebabkan diperlukannya metode pendugaan parameter yang menjamin bahwa hasil pendugaan harus sedekat mungkin dengan parameter yang diduga. Dengan kata lain, penduga yang dihasilkan haruslah dengan " baik " mendekati nilai parmeter sebenarnya. Suatu parameter yang tidak diketahui dimungkinkan mempunyai lebih dari satu penduga titik. Jika dihadapkan pada dua pilihan penduga tertentu, maka diperlukan ciri yang menjadi acuan untuk menentukan penduga mana yang lebih baik. Adapun ciri-ciri penduga yang baik adalah :

1. Tidak bias
2. Konsisten
3. Mempunyai variansi minimum

Definisi 2.9.2 Penduga tak bias

Suatu statistik $\hat{\theta}$ disebut sebagai penduga tak bias dari parameter θ, jika $E(\hat{\theta}) = \theta$

Penduga tak bias menyatakan bahwa bila dilakukan pengambilan sampel berukuran n secara berulang-ulang dan setiap kali dihitung penduganya maka yang diharapkan adalah rata-rata penduga tersebut sama dengan parameter yang diduga. Sebaliknya $\hat{\theta}$ merupakan penduga yang berbias, jika $E(\hat{\theta}) \neq \theta$ dan besarnya bias tersebut adalah $E(\hat{\theta}) - \theta$.

Definisi 2.9.3 $\hat{\theta}$ merupakan penduga konsisten apabila nilai dugaan dari $\hat{\theta}$ mendekati θ bila sampelnya diperbesar sampai tak hingga (∞).

Definisi 2.9.4 $\hat{\theta}$ merupakan penduga terbaik atau penduga yang mempunyai variansi minimum, jika memenuhi syarat-syarat berikut :

a) $E(\hat{\theta}) = \theta$

b) $S^2_{\hat{\theta}}$ minimum, artinya apabila dibandingkan dengan penduga θ lainnya, maka θ mempunyai variansi terkecil.

Definisi 2.9.5 Selang kepercayaan $(1-\alpha)$ bagi parameter populasi θ adalah suatu interval nilai $\left[\hat{\theta}-Z_{\frac{\alpha}{2}} S_{\hat{\theta}}, \hat{\theta}+Z_{\frac{\alpha}{2}} S_{\hat{\theta}}\right]$ sedemikian hingga

$\theta \in \left[\hat{\theta}-Z_{\frac{\alpha}{2}} S_{\hat{\theta}}, \hat{\theta}+Z_{\frac{\alpha}{2}} S_{\hat{\theta}}\right]$ dan

$P\left(\hat{\theta}-Z_{\frac{\alpha}{2}} S_{\hat{\theta}} \langle \theta \langle \hat{\theta}+Z_{\frac{\alpha}{2}} S_{\hat{\theta}}\right)=1-\alpha$ di mana $\hat{\theta}$ adalah nilai yang dihitung dari sampel sebagai penduga tak bias.

Pernyataan taraf kepercayaan 95% (misalnya) mempunyai implikasi bahwa jika rencana penarikan sampel berukuran sama dengan teknik yang sama dilakukan berulang kali, misalnya 100 kali penarikan sampel kemudian dari setiap sampel dibuat pernyataan tentang pendugaan selang, maka sekitar 95 kali dari selang nilai $\left[\hat{\theta}-Z_{\frac{\alpha}{2}} S_{\hat{\theta}}, \hat{\theta}+Z_{\frac{\alpha}{2}} S_{\hat{\theta}}\right]$ mencakup parameter populasi akan benar, dan hanya sekitar 5 kali pernyataan diatas akan salah.

J. Kesalahan Sampling

Penarikan sampel bermaksud untuk melakukan pendugaan parameter populasi berdasarkan nilai statistik sampel. Timbul masalah dalam pendugaan tersebut yaitu berapa besar kesalahan yang akan dibuat sebagai akibat menarik kesimpulan tentang sifat populasi berdasarkan sampel yang telah dipelajari. Persoalan tersebut dalam statistika disebut kesalahan sampling. Setelah mengetahui besar kesalahan sampling, peneliti dapat membuat suatu selang kepercayaan dengan tingkat kepercayaan tertentu untuk menyakini suatu pernyataan diterima atau ditolak.

Definisi 2.10.1 Kesalahan Sampling

Jika $\hat{\theta}$ merupakan penduga tak bias bagi parameter θ, maka kesalahan sampling didefinisikan sebagai jarak antara $\hat{\theta}$ dan θ atau penyimpangan mutlak dari $\hat{\theta}$ dengan θ, yang dinotasikan sebagai KS = $\left|\hat{\theta}-\theta\right|$. KS dan Galat (G) pada dasarnya mempunyai definisi yang sama. Galat merupakan penyimpangan pendugaan yang telah ditetapkan oleh peneliti sebelum melakukan penelitian, sedangkan KS merupakan kesalahan pendugaan berdasarkan data yang didapat dari penelitian, dan diharapkan KS lebih kecil dari galat pendugaan. Bila $(1-\alpha)$ merupakan tingkat keyakinan, maka perhatikan kurva normal berikut :

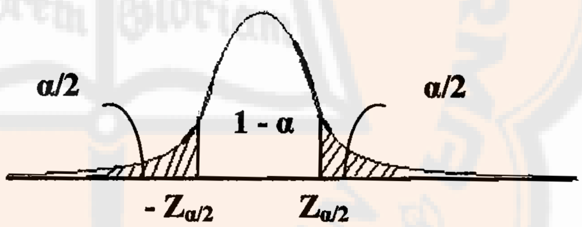
$$P\left(-z_{\alpha/2} \le z \le z_{\alpha/2}\right) = 1-\alpha$$

$$-z_{\alpha/2} \le \frac{\hat{\theta}-\theta}{S_{\hat{\theta}}} \le z_{\alpha/2}$$

$$-z_{\alpha/2} S_{\hat{\theta}} \le \hat{\theta}-\theta \le z_{\alpha/2} S_{\hat{\theta}}$$

$$-z_{\alpha/2} S_{\hat{\theta}} \le KS \le z_{\alpha/2} S_{\hat{\theta}}$$

$$|KS| \le z_{\alpha/2} \sigma_{\hat{\theta}}$$



Jadi besarnya kesalahan sampling sebesar $\pm z_{\alpha/2} S_{\hat{\theta}}$. Nilai $z_{\alpha/2}$ diperoleh dari tabel normal. Sedangkan $S_{\hat{\theta}}$ sering disebut sebagai galat pendugaan $\hat{\theta}$.

K. Penarikan Sampel Acak Sederhana

Definisi 2.11.1 Penarikan sampel acak sederhana (*simple random sampling*) adalah sebuah metode untuk n unit dari N sehingga setiap elemen dari ${}_{N}C_{n}$ sampel yang berbeda mempunyai kesempatan yang sama untuk dipilih.

Definisi 2.11.2 Sampel Acak Sederhana (SAS) adalah suatu sampel yang diperoleh melalui proses penarikan sampel acak sederhana.

Cara memilih anggota sampel agar sampel yang dihasilkan bersifat acak, antara lain sebagai berikut :

1. Pemilihan sampel dengan cara undian
2. Pemilihan sampel dengan tabel bilangan acak

Sampel acak sederhana adalah suatu contoh pengambilan sampel yang termudah dari suatu populasi. Penarikannya didasari anggapan bahwa populasi mempunyai karakteristik yang sama. Di dalam penarikan sampel acak sederhana, terdapat kendala apabila populasi penelitian dalam ukuran besar tentu saja hal ini akan membutuhkan waktu dan biaya besar. Pilihan penggunaan metode lain yang dapat diambil peneliti dalam menekan biaya adalah dengan menggunakan penarikan sampel acak bertingkat dimana populasi dibagi dalam kelompok-kelompok, kemudian dalam setiap kelompok tersebut diambil sampel sesuai dengan tingkatannya, metode tersebut akan menghemat waktu serta biaya.

Penduga rata-rata populasi dan variansi pada PSAS

Teorema 2.11.1

Rata-rata sampel $\bar{y}$ adalah penduga tidak bias dari rata-rata populasi $\bar{Y}$

Bukti

$$E(\bar{y}) = \frac{\sum \bar{y}}{{}_N C_n} = \frac{\sum (y_1 + y_2 + \ldots + y_n)}{n[N!/n!(N-n)!]} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; 2.11.1$$

Dimana jumlahnya ada sebanyak ${}_N C_n$ sampel. Untuk menghitung jumlah ini, ditentukan berapa banyak nilai-nilai yang muncul dari sampel y_i. Karena ada N-1 kelompok lainnya yang tersedia untuk sisa sampel, dan di sisi lain ada n-1 untuk mengisi, jumlah sampel yang berisi y_i adalah

$${}_{N-1}C_{n-1} = \frac{(N-1)!}{(n-1)!(N-n)!} \text{ sehingga}$$

$$\sum (y_1 + y_2 + y_3 + \ldots + y_n) = \frac{(N-1)!}{(n-1)!(N-n)!}(y_1 + y_2 + \ldots + y_N)$$

Dari (2.11.1) menghasilkan

$$E(\bar{y}) = \frac{(N-1)!}{(n-1)!(N-n)!} \frac{n!(N-n)}{nN!}(y_1 + y_2 + \ldots + y_N)$$

$$E(\bar{y}) = \frac{(y_1 + y_2 + \ldots + y_N)}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{N} y_i}{N} = \bar{Y} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; 2.11.2$$

Karena setiap kelompok muncul dalam jumlah sampel yang sama, maka

$$E(y_1 + y_2 + \ldots + y_n) = \frac{n}{N}(y_1 + y_2 + \ldots + y_N) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; 2.11.3$$

Teorema 2.11.2

Variansi dari rata-rata $\bar{y}$ dari sampel acak sederhana adalah $V(\bar{y}) = E(\bar{y} - \bar{Y})^2 = \frac{S^2}{n}\frac{(N-n)}{N} = \frac{S^2}{n}(1-f)$ dimana $f = \frac{n}{N}$ adalah penarikan sampel.

Bukti

$$n(\bar{y} - \bar{Y}) = (y_1 - \bar{Y}) + (y_2 - \bar{Y}) + \dots + (y_n - \bar{Y}) \quad \dots\dots\dots 2.11.4$$

Dengan alasan yang sama digunakan dalam (2.11.3) yaitu karena semua kelompok muncul dalam jumlah sampel yang sama, maka

$$E\left[(y_1 - \bar{Y})^2 + \dots + (y_n - \bar{Y})^2\right] = \frac{n}{N}\left[(y_1 - \bar{Y})^2 + \dots + (y_N - \bar{Y})^2\right] \quad \dots\dots\dots 2.11.5$$

dan juga bahwa

$$E\left[(y_1 - \bar{Y})(y_2 - \bar{Y}) + (y_1 - \bar{Y})(y_3 - \bar{Y}) + \dots + (y_{n-1} - \bar{Y})(y_n - \bar{Y})\right]$$

$$= \frac{n(n-1)}{N(N-1)}\left[(y_1 - \bar{Y})(y_2 - \bar{Y}) + \dots + (y_{N-1} - \bar{Y})(y_N - \bar{Y})\right] \quad \dots\dots\dots 2.11.6$$

Pada (2.11.6) jumlahnya terdiri dari seluruh pasangan kelompok-kelompok dalam sampel dan populasi. Penjumlahan di kiri terdiri atas $\frac{n(n-1)}{2}$ suku, dan di kanan terdiri atas $\frac{N(N-1)}{2}$.

Sekarang kuadratkan (2.11.4) akan diperoleh

$$n^2(\bar{y} - \bar{Y})^2 = \left((y_1 - \bar{Y}) + (y_2 - \bar{Y}) + \dots + (y_n - \bar{Y})\right)^2 \quad \dots\dots\dots 2.11.7$$

Dari (2.11.7) rata-ratakan seluruh sampel acak sederhana. Kemudian dengan menggunakan rumus (2.11.5) dan (2.11.6) diperoleh

$$n^2 E(\bar{y}-\bar{Y})^2 = E((y_1-\bar{Y})+(y_2-\bar{Y})+\ldots+(y_n-\bar{Y}))^2$$

$$n^2 E(\bar{y}-\bar{Y})^2 = E\left[(y_1-\bar{Y})^2+(y_2-\bar{Y})+\ldots.+(y_n-\bar{Y})^2\right] +$$

$$2E((y_1-\bar{Y})(y_2-\bar{Y})+(y_1-\bar{Y})(y_3-\bar{Y})+\ldots+(y_{n-1}-\bar{Y})(y_n-\bar{Y}))$$

$$n^2 E(\bar{y}-\bar{Y})^2 =$$

$$\frac{n}{N}\left[\left((y_1-\bar{Y})^2+\ldots+(y_N-\bar{Y})^2\right)+\frac{2(n-1)}{N-1}((y_1-\bar{Y})(y_2-\bar{Y})+\ldots+(y_{N-1}-\bar{Y})(y_N-\bar{Y}))\right]$$

$$n^2 E(\bar{y}-\bar{Y})^2 =$$

$$\frac{n}{N}\left[\left((y_1-\bar{Y})^2+\ldots+(y_N-\bar{Y})^2\right)+\frac{(n-1)}{N-1}\left(((y_1-\bar{Y})+\ldots+(y_N-1))^2-\left((y_1-\bar{Y})^2+\ldots+(y_N-\bar{Y})^2\right)\right)\right]$$

$$n^2 E(\bar{y}-\bar{Y})^2 =$$

$$\frac{n}{N}\left[\left(1-\frac{n-1}{N-1}\right)\left((y_1-\bar{Y})^2+\ldots+(y_N-\bar{Y})^2\right)+\frac{(n-1)}{N-1}\left(((y_1-\bar{Y})+\ldots+(y_N-1))^2\right)\right]$$

Suku kedua dalam tanda kurung akan hilang karena jumlah dari y_i sama dengan $N\bar{Y}$. Sehingga di dapat

$$n^2 E(\bar{y}-\bar{Y})^2 = \frac{n}{N}\left[\left(1-\frac{n-1}{N-1}\right)\left((y_1-\bar{Y})^2+\ldots+(y_N-\bar{Y})^2\right)\right]$$ setelah dibagi n^2 menjadi

$$E(\bar{y}-\bar{Y})^2 = \frac{n}{Nn}\left(\frac{N-n}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(y_i-\bar{Y})^2\right)$$

$$V(\bar{y}) = E(\bar{y}-\bar{Y})^2 = \frac{N-n}{Nn}S^2 = \frac{S^2}{n}(1-f) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 2.11.8$$

Teorema 2.11.3

Untuk sebuah sampel acak sederhana $s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}{n-1}$ adalah sebuah penduga tidak bias dari $S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N}(y_i - \bar{Y})^2}{N-1}$.

Bukti

Akan dibuktikan bahwa $E(s^2) = S^2$

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}{n-1}$$

$$(n-1)s^2 = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2$$

$$(n-1)s^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 - n\bar{y}^2 \quad \text{...} \quad 2.11.9$$

Menurut definisi variansi

$$V(\bar{y}) = E(\bar{y}^2) - [E(\bar{y})]^2$$

$$E(\bar{y}^2) = V(\bar{y}) + [E(\bar{y})]^2$$

$$E(\bar{y}^2) = V(\bar{y}) + \bar{Y}^2$$

$$E(\bar{y}^2) = (1-f)\frac{S^2}{n} + \bar{Y}^2$$

Dengan alasan yang sama pada (2.11.3) maka berlaku

$$E\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right) = \frac{n}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i^2$$

Pada (2.11.9) rata-ratakan seluruh penarikan sampel acak sederhana sehingga didapat

$$(n-1)E(s^2) = E\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right) - nE(\bar{y}^2)$$

$$(n-1)E(s^2) = \frac{n}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i^2 - n\left((1-f)\frac{S^2}{n} + \bar{Y}^2\right)$$

$$(n-1)E(s^2) = \frac{n}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i^2 - (1-f)S^2 - n\bar{Y}^2$$

$$(n-1)E(s^2) = \frac{n}{N}\left(\sum_{i=1}^{N} y_i^2 - n\bar{Y}^2\right) - (1-f)S^2$$

$$(n-1)E(s^2) = \frac{n}{N}(N-1)S^2 - \left(1-\frac{n}{N}\right)S^2$$

$$(n-1)E(s^2) = nS^2 - \frac{n}{N}S^2 - S^2 + \frac{n}{N}S^2$$

$(n-1)E(s^2) = (n-1)S^2$, setelah kedua ruas dibagi $(n-1)$ menjadi

$$E(s^2) = S^2$$

BAB III

PENARIKAN SAMPEL ACAK BERTINGKAT

Dasar yang melatar belakangi sehingga dirancang penarikan sampel acak bertingkat adalah bahwa pada umumnya suatu kelompok terdiri atas banyak sekali elemen sehingga sulit untuk melakukan pengukuran pada setiap elemen tersebut. Setiap kelompok memiliki karakteristik yang hampir sama sehingga pengukuran tidak perlu dilakukan terhadap setiap elemen tetapi cukup pada beberapa elemen dalam kelompok tersebut. Alasan tersebut berkaitan dengan prinsip efisiensi dalam penarikan sampel, artinya apabila suatu teknik penarikan sampel tertentu mampu memberikan informasi lebih banyak pada tingkat biaya tertentu atau mampu mengurangi biaya tanpa mengurangi informasi yang diperoleh dan waktu yang digunakan untuk penelitian tidak terlalu banyak, maka teknik penarikan sampel tersebut baik untuk digunakan.

Dalam bab ini akan dibahas mengenai penarikan sampel acak bertingkat beserta contohnya dalam pendugaan rata-rata dan variansi populasi serta proporsi. Penulis mengawalinya dengan menguraikan tentang penarikan sampel acak 2 tingkat (PSA 2 tingkat), pembahasan dilakukan karena materi ini berkaitan dengan apa yang akan dibicarakan dalam bab selanjutnya. Pada pengembangan lebih lanjut terdapat penarikan sampel acak 3 tingkat (PSA 3 tingkat).

A. Penarikan Sampel Acak 2 Tingkat

Disebut penarikan sampel acak 2 tingkat sebab diperlukan 2 tingkat dalam mendapatkan sampel. Tingkat pertama memilih sampel kelompok dan tingkat kedua memilih sebuah sampel dari sampel kelompok pada tahap pertama. Untuk pembahasan lebih lanjut penulis tetap menggunakan istilah penarikan sampel acak 2 tingkat (PSA 2 Tingkat). Keuntungan utama dari PSA 2 tingkat adalah peneliti mempunyai kesempatan untuk mengambil elemen dalam kelompok yang lebih kecil sehingga bisa meningkatkan efisiensi statistik sampel. Sub kelompok yang terbentuk mempunyai sifat yang lebih homogen jadi variansinya kecil dan berakibat kesimpulan yang didapat akan mendekati parameter populasi.

Dalam penarikan sampel acak kelompok anggota populasi dibagi N kelompok dengan banyaknya elemen dalam masing-masing kelompok (N_i; i = 1,2,…,N) tidak harus sama. Selanjutnya diambil secara acak n kelompok sampel dari N kelompok dalam populasi yang tersedia. Dalam penarikan sampel acak kelompok, n kelompok sampel yang terpilih tersebut disebut kelompok primer, sedangkan yang dimaksud kelompok sekunder adalah kelompok sampel yang terpilih secara acak dari masing-masing kelompok primer dengan kata lain kelompok sekunder tersebut merupakan sampel bagi PSA 2 tingkat. Penarikan sampel acak 2 tingkat merupakan pengembangan dari penarikan sampel acak kelompok, sehingga prinsip-prinsip yang berlaku pada PSAK juga berlaku pada PSA 2 tingkat, hanya dilakukan penyesuaian notasi. Pembahasan PSAK dapat dilihat pada (Debbie Santoso, 2000:44)

Contoh 3.1.1

Tim PUSKUR (Pusat Kurikulum) ingin meneliti pengaruh penggunaan kurikulum berbasis kompetensi terhadap hasil belajar matematika siswa SLTP disuatu kota X. Untuk mendapatkan sampel, Tim PUSKUR menggunakan PSA 2 tingkat. Populasi yang terdiri dari semua siswa SLTP di kota X di bagi dalam kelompok-kelompok sekolah. Tingkat pertama memilih sekolah yang menggunakan kurikulum berbasis kompetensi sebagai sampel primer, kemudian tahap kedua memilih sampel siswa dari sekolah yang terpilih tersebut. Dalam hal ini siswa menjadi sampel sekunder.

Definisi 3.1.1 Penarikan Sampel Acak 2 Tingkat

Penarikan sampel acak 2 tingkat adalah penarikan sampel yang dilakukan secara 2 tingkat dimana tingkat pertama memilih n kelompok sampel primer secara acak, selanjutnya pada tingkat kedua dilakukan pengambilan kelompok sampel sekunder secara acak pula dari masing-masing kelompok primer, sehingga diperoleh sampel untuk penelitian. Banyaknya elemen untuk masing-masing kelompok primer ($M_{i;}$ i = 1,2,3,…,N) maupun banyaknya elemen pada masing-masing kelompok sekunder ($m_{i;}$ i = 1,2,3,…,n) tidak harus sama.

1. Prosedur Penarikan Sampel Acak 2 Tingkat

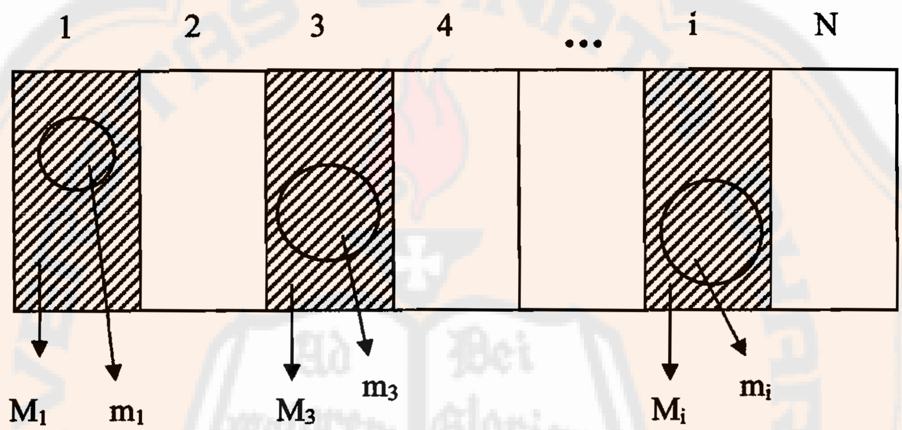
Berikut langkah-langkah penarikan sampel acak 2 tingkat :

1) Menentukan populasi yang jelas.
2) Populasi dibagi dalam N kelompok, dengan $M_{i;\ i}$ = 1,2,3,…,N sebagai banyaknya elemen dalam masing-masing kelompok.
3) Mengambil n kelompok sampel secara acak dari N kelompok populasi yang tersedia.
4) n kelompok sampel yang diperoleh pada tahap I (no 3) disebut kelompok primer.

5) Dari setiap kelompok primer diambil secara acak kelompok sekunder dengan banyaknya elemen pada masing-masing kelompok sekunder diberi notasi m_i; $i = 1,2,3,\ldots,n$.

6) Melakukan pemeriksaan terhadap masing-masing elemen (sampel sekunder) yang termasuk dalam kelompok sekunder.

Langkah-langkah diatas dapat digambarkan pada diagram di bawah ini :



Keterangan :

- Populasi terbagi menjadi N kelompok.
- Bagian yang diarsir merupakan kelompok sampel primer, dengan banyaknya elemen pada kelompok ke-i adalah M_i.
- Bagian yang terdapat dalam lingkaran adalah kelompok sampel sekunder dari kelompok i, dengan ukuran m_i.

Contoh 3.1.2

Seorang peneliti dalam bidang pertanian akan membuat pendugaan rata-rata penghasilan padi per petani dalam satu masa panen di Yogyakarta. Bagaimanakah peneliti harus mengambil sampelnya? Apabila menggunakan metode PSAS diperlukan kerangka penarikan sampel berupa daftar semua petani padi yang berada di Yogyakarta sebagai objek penelitian. Cara tersebut membutuhkan waktu, biaya, dan tenaga yang cukup besar. Untuk mengatasi hal tersebut maka peneliti menggunakan PSA 2 tingkat dengan menetapkan seluruh petani padi di Yogyakarta sebagai populasi. Langkah pertama yang dilakukan peneliti adalah membagi populasi dalam N kelompok berdasarkan kelurahan yang ada dan banyaknya petani padi dalam setiap kelurahan sama. Selanjutnya diambil secara acak sebanyak n kelurahan sebagai sampel primer. Dari masing-masing kelurahan yang terpilih diambil secara acak n desa sebagai sampel sekunder, dalam hal ini banyaknya petani dalam tiap desa juga sama. Dari uraian diatas, diketahui bahwa banyaknya kelompok primer (dalam contoh tersebut adalah kelurahan) dan kelompok sekunder (desa) besarnya sama. Jelas bahwa banyaknya petani yang tercakup dalam desa lebih sedikit dibandingkan dalam suatu kelurahan. Langkah berikutnya petani yang termasuk dalam desa yang terpilih secara acak tersebut diteliti satu per satu, dengan asumsi bahwa rata-rata penghasilan tiap petani yang diteliti akan menunjukan rata-rata penghasilan pada masing-masing petani di tiap kelurahan serta lebih lanjut dipergunakan sebagai penduga rata-rata penghasilan petani padi di Yogyakarta sebagai populasi dalam penelitian.

Persoalan yang dihadapi di dalam memilih sampel pada PSA 2 tingkat ialah memilih kelompok yang tepat, baik kelompok sampel primer maupun kelompok sampel sekunder yang terpilih dilakukan secara acak dengan menggunakan tabel bilangan acak. Pemilihan kelompok yang tepat juga tergantung pada keadaan, apakah peneliti akan memilih sedikit kelompok dengan banyak elemen atau banyak kelompok dengan sedikit elemen pemilihannya biasanya tergantung pada biaya. Kelompok yang besar cenderung memiliki elemen yang heterogen dengan demikian diperlukan pemilihan banyak elemen dari setiap kelompok sehingga diperoleh hasil penelitian dengan tingkat ketelitian yang tinggi.

Dari uraian diatas penulis melihat adanya kesamaan antara PSAK dan PSA 2 tingkat, hal tersebut dikarenakan PSA 2 tingkat merupakan pengembangan dari PSAK. Contoh kesamaan kedua penarikan sampel acak tersebut adalah :

1) Pada PSAK dan PSA 2 tingkat, sampel yang diambil berupa kelompok-kelompok.
2) Pengambilan sampel kelompok yang tepilih baik kelompok primer (untuk PSAK) maupun kelompok sekunder (untuk PSA 2 tingkat) diperoleh secara acak.

Pada PSA 2 tingkat terdapat dua keadaan, yaitu penarikan sampel dengan kelompok-kelompok berukuran sama dan penarikan sampel dengan kelompok-kelompok berukuran tidak sama. Akan dijelaskan satu persatu mengenai pendugaan pada kedua keadaan tersebut.

2. Notasi-Notasi pada Penarikan Sampel Acak 2 Tingkat

Notasi-notasi yang digunakan pada PSA 2 tingkat antara lain sebagai berikut:

a. N = Banyaknya kelompok dalam populasi

b. n = Banyaknya kelompok primer yang dipilih sacara acak

c. M_i = Banyaknya seluruh elemen dalam kelompok ke-i dengan i = 1,2,3,…,N

d. m_i = Banyaknya sampel elemen dalam kelompok sekunder dengan i = 1,2,3,…,n

e. M = Total elemen dalam populasi, $M = \sum_{i=1}^{N} M_i$

f. m = Total elemen dalam sampel, $m = \sum_{i=1}^{n} m_i$

g. $\overline{M}$ = Rata-rata banyaknya elemen per kelompok dalam populasi

$$\overline{M} = \frac{M}{N}$$

h. $\overline{m}$ = Rata-rata banyaknya elemen per kelompok dalam sampel

$$\overline{m} = \frac{m}{n}$$

i. y_{ij} = Nilai variabel pada kelompok primer ke-i dan kelompok sekunder ke-j dengan i = 1,2,3,…,n dan j = 1,2,3,…,m_i

j. $\overline{Y}_i$ = Rata-rata kelompok ke-i dalam populasi, $\overline{Y}_i = \dfrac{\sum_{i=1}^{M_i} y_{ij}}{M_i}$

k. $\overline{\overline{Y}}$ = Rata-rata seluruh elemen dalam populasi, $\overline{\overline{Y}} = \dfrac{\sum_{i=1}^{N} \overline{Y}_i}{N}$

l. $\overline{y}_i$ = Rata-rata dari kelompok sekunder ke-i sebagai penduga $\overline{Y}_i$

$$\overline{y}_i = \frac{\sum_{j=1}^{m_i} y_{ij}}{m_i}$$

m. $\bar{\bar{y}}$ = Rata-rata sampel kelompok sekunder sebagai penduga rata-rata populasi, $\bar{\bar{y}} = \frac{\sum_{i=n}^{n} \bar{y}_i}{n}$

n. S_2^2 = Variansi antar elemen dalam kelompok pada populasi

$$S_2^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} (y_{ij} - \bar{Y}_i)^2}{N(M-1)}$$

o. S_1^2 = Variansi di antara rata-rata kelompok pada populasi

$$S_1^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N} (\bar{Y}_i - \bar{\bar{Y}})^2}{N-1}$$

p. s_1^2 = Variansi antar kelompok sampel primer

$$s_1^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (\bar{y}_i - \bar{\bar{y}})^2}{n-1}$$

q. s_2^2 = Variansi antar elemen dalam kelompok sampel sekunder

$$s_2^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m_i} (y_{ij} - \bar{y}_i)^2}{n(m_i - 1)}$$

3. PSA 2 Tingkat dengan Kelompok-Kelompok Berukuran Sama

Prosedur penarikan sampel pada pembahasan ini sama seperti prosedur penarikan sampel yang telah dilakukan pada bagian 1, hanya saja jumlah elemen dalam sampel kelompok primer berukuran sama, begitu juga elemen dalam sampel kelompok sekunder berukuran sama. Sebelum membahas mengenai penduga variansi rata-rata penarikan sampel 2 tingkat, telebih dahulu akan dijelaskan tentang konsep nilai harapan dalam PSA 2 tingkat.

1) Penentuan Rata-Rata dan Variansi pada PSA 2 Tingkat

Rencana penarikan sampel pada PSA 2 tingkat yaitu pertama memberikan sebuah metode pemilihan n kelompok sampel primer. Kemudian untuk setiap kelompok sampel primer terpilih, diberikan metode untuk memilih sejumlah tertentu kelompok-kelompok sampel sekunder. Untuk sebuah pendugaan $\hat{\theta}$, metode ini dapat dinyatakan sebagai

$$E(\hat{\theta}) = E_1\left[E_2(\hat{\theta})\right] \qquad \text{3.1.1}$$

dimana E menyatakan nilai harapan atau rata-rata seluruh sampel, E_2 menyatakan rata-rata seluruh pemilihan yang mungkin pada tingkat kedua dari sekumpulan n kelompok tetap, dan E_1 menyatakan rata-rata seluruh pemilihan pada tingkat pertama. Untuk $V(\hat{\theta})$ metode ini memberikan hasil berikut yang mudah diingat.

$$V(\hat{\theta}) = V_1\left[E_2(\hat{\theta})\right] + E_1\left[V_2(\hat{\theta})\right] \qquad \text{3.1.2}$$

dimana $V_2(\hat{\theta})$ adalah variansi seluruh sampel sekunder pilihan yang mungkin untuk sekumpulan kelompok sampel primer tertentu. Untuk menunjukan ini, misalkan $\theta = E(\hat{\theta})$ (di mana θ diberikan untuk menduga $\hat{\theta}$, karena $\hat{\theta}$ dapat bias).

Menurut definisi,

$$V(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta} - \theta)^2 = E_1 E_2 (\hat{\theta} - \theta)^2 \qquad \text{3.1.3}$$

Tetapi,

$$E_2(\hat{\theta} - \theta)^2 = E_2(\hat{\theta}^2) - 2\theta\, E_2(\hat{\theta}) + \theta^2 \qquad \text{3.1.4}$$

Menurut definisi variansi

$$V_2(\hat{\theta}) = E_2(\hat{\theta})^2 - [E_2(\hat{\theta})]^2 \text{ maka diperoleh}$$

$$E_2(\hat{\theta} - \theta)^2 = [E_2(\hat{\theta})]^2 + V_2(\hat{\theta}) - 2\theta\, E_2(\hat{\theta}) + \theta^2 \quad \text{.......... 3.1.5}$$

Dari (3.1.5) dirata-ratakan seluruh pemilihan tingkat pertama menjadi

$$E_1\left[E_2(\hat{\theta} - \theta)^2\right] = E_1[E_2(\hat{\theta})]^2 + E_1[V_2(\hat{\theta})] - 2\theta E_1[E_2(\hat{\theta})] + \theta^2 \quad \text{.......... 3.1.6}$$

Dari (3.1.3) menghasilkan

$$V(\hat{\theta}) = E_1[E_2(\hat{\theta})]^2 + E_1[V_2(\hat{\theta})] - 2\,\theta\, E_1[E_2(\hat{\theta})] + \theta^2 \quad \text{.......... 3.1.7}$$

karena $E_1E_2(\hat{\theta}) = \theta$ maka

$$V(\hat{\theta}) = E_1[E_2(\hat{\theta})]^2 - \theta^2 + E_1[V_2(\hat{\theta})]$$

Menurut definisi variansi

$$V_1[E_2(\hat{\theta})] = E_1[E_2(\hat{\theta})]^2 - [E_1(E_2(\hat{\theta}))]^2 = E_1[E_2(\hat{\theta})]^2 - \theta \text{ maka diperoleh}$$

$$V(\hat{\theta}) = V_1[E_2(\hat{\theta})] + E_1[V_2(\hat{\theta})] \quad \text{.......... 3.1.8}$$

Rumus (3.1.8) dapat dilanjutkan untuk tiga tingkat atau lebih. Untuk penarikan sampel acak 3 tingkat penduga rata-rata populasi dan variansinya merupakan generalisasi dari penarikan sampel acak 2 tingkat, yaitu

$$V(\hat{\theta}) = V_1\{E_2[E_3(\hat{\theta})]\} + E_1\{V_2[E_3(\hat{\theta})]\} + E_1\{E_2[V_3(\hat{\theta})]\} \quad \text{.......... 3.1.9}$$

2) Penduga Rata-Rata Populasi

Andaikan suatu penelitian dilakukan pada suatu populasi yang terdiri dari N kelompok dan sampel sebanyak n kelompok primer diambil secara acak. M_i menyatakan banyaknya elemen pada sampel primer ke-i, dan m_i menyatakan banyaknya elemen pada sampel sekunder ke-i. Maka penduga rata-rata populasinya adalah : $\bar{\bar{y}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \bar{y}_i}{n}$

3) Penduga Variansi Rata-Rata Populasi

Karena dalam PSA 2 tingkat dilakukan 2 tingkat dalam penarikan sampelnya, maka nilai variansinya merupakan gabungan antara variansi penarikan tingkat 1 dengan variansi pada tingkat 2. Variansi tingkat 1 merupakan variansi antar kelompok primer yang terpilih sebagai sampel, sedangkan variansi pada tingkat 2 merupakan penjumlahan dari variansi antar elemen dalam kelompok ke-i yang terpilih sebagai sampel sekunder. Penduga variansi populasi pada PSA 2 tingkat dirumuskan dalam teorema sebagai berikut :

Teorema 3.1.1

Bila n kelompok primer dan m kelompok sekunder yang telah diambil dengan penarikan sampel acak sederhana, $\bar{\bar{y}}$ adalah sebuah penduga tidak bias dari $\bar{\bar{Y}}$ dengan variansi

$$V(\bar{\bar{y}}) = E\left(\bar{\bar{y}} - \bar{\bar{Y}}\right)^2 = \left(\frac{N-n}{N}\right)\frac{S_1^{\,2}}{n} + \left(\frac{M-m}{M}\right)\frac{S_2^{\,2}}{mn} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ 3.1.10$$

Bukti :

Akan ditunjukkan terlebih dahulu bahwa $\bar{\bar{y}}$ adalah penduga tak bias dari $\bar{\bar{Y}}$.

$$E_2\left(\bar{\bar{y}}\right) = E_2\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} \bar{y}_i}{n}\right) = \frac{\sum_{i=1}^{n} E_2(\bar{y}_i)}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \bar{Y}_i}{n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ 3.1.11$$

$$E(\bar{\bar{y}}) = E_1\left[E_2\left(\bar{\bar{y}}\right)\right] = E_1\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\bar{Y}_i\right) = \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\bar{Y}_i\right) = \bar{\bar{Y}}$$

karena PSA dilakukan secara 2 tingkat maka nilai variansinya merupakan gabungan antara variansi pada penarikan tingkat pertama dengan variansi pada tingkat kedua, dengan $S_2^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}(y_{ij} - \bar{Y}_i)^2}{N(M-1)}$ merupakan variansi diantara elemen dalam kelompok pada populasi dari tingkat kedua dan $S_1^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{N}(\bar{Y}_i - \bar{\bar{Y}})^2}{N-1}$ merupakan variansi di antara rata-rata kelompok pada populasi dari tingkat kedua.

Dari (3.1.8) diperoleh untuk V($\bar{\bar{y}}$) menggunakan rumus sebagai berikut :

$V(\bar{\bar{y}}) = V_1\left[E_2\left(\bar{\bar{y}}\right)\right] + E_1\left[V_2\left(\bar{\bar{y}}\right)\right]$ dimana $V_1\left[E_2\left(\bar{\bar{y}}\right)\right]$ menunjukkan variansi pada tingkat I dan $E_1\left[V_2\left(\bar{\bar{y}}\right)\right]$ menunjukkan nilai harapan variansi pada tingkat II.

Adapun langkah-langkah pembuktiannya sebagai berikut :

1. **Akan dibuktikan pada penarikan sampel acak tingkat 1 bahwa**

$$V_1\left[E_2\left(\bar{\bar{y}}\right)\right] = \left(\frac{N-n}{N}\right)\frac{S_1^{\,2}}{n}$$

Bukti

Dari (3.1.11) didapat $E_2\left(\bar{\bar{y}}\right) = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}\bar{Y}_i}{n}$, dan suku pertama pada ruas kanan (3.1.10) adalah variansi dari rata-rata per sampel sekunder untuk sebuah sampel acak sederhana satu tingkat berukuran n. Maka dengan teorema (2.11.2) berlaku :

$$n\left(\overline{Y}_i - \overline{\overline{Y}}\right)=\left(\overline{Y}_1 - \overline{\overline{Y}}\right)+\left(\overline{Y}_2 - \overline{\overline{Y}}\right)+\ldots+\left(\overline{Y}_n - \overline{\overline{Y}}\right) \text{ ....3.1.12}$$

dengan menggunakan alasan yang sama pada (2.11.3) berlaku

$$E_1\left[\left(\overline{Y}_1 - \overline{Y}\right)^2+\ldots+\left(\overline{Y}_n - \overline{Y}\right)^2\right]= \frac{n}{N}\left[\left(\overline{Y}_1 - \overline{Y}\right)^2+\ldots+\left(\overline{Y}_N - \overline{Y}\right)^2\right] \text{.............3.1.13}$$

dan juga bahwa

$$E_1\left[\left(\overline{Y}_1 - \overline{Y}\right)\left(\overline{Y}_2 - \overline{Y}\right)+\left(\overline{Y}_1 - \overline{Y}\right)\left(\overline{Y}_3 - \overline{Y}\right)+\ldots+\left(\overline{Y}_{n-1} - \overline{Y}\right)\left(\overline{Y}_n - \overline{Y}\right)\right]$$

$$= \frac{n(n-1)}{N(N-1)}\left[\left(\overline{Y}_1 - \overline{Y}\right)\left(\overline{Y}_2 - \overline{Y}\right)+\ldots+\left(\overline{Y}_{N-1} - \overline{Y}\right)\left(\overline{Y}_N - \overline{Y}\right)\right] \text{ ....3.1.14}$$

Sekarang kuadratkan (3.1.12) akan diperoleh

$$n\left(\overline{Y}_i - \overline{\overline{Y}}\right)^2 = \left(\left(\overline{Y}_1 - \overline{\overline{Y}}\right)+\left(\overline{Y}_2 - \overline{\overline{Y}}\right)+\ldots+\left(\overline{Y}_n - \overline{\overline{Y}}\right)\right)^2$$

Dari (3.1.12) rata-ratakan seluruh sampel acak sederhana pada tingkat 1. Kemudian dengan menggunakan rumus (3.1.13) dan (3.1.14) diperoleh

$$n^2 E_1\left(\overline{Y}_i - \overline{\overline{Y}}\right)^2 = E_1\left(\left(\overline{Y}_1 - \overline{\overline{Y}}\right)+\left(\overline{Y}_2 - \overline{\overline{Y}}\right)+\ldots+\left(\overline{Y}_n - \overline{\overline{Y}}\right)\right)^2$$

$$n^2 E_1\left(\overline{Y}_i - \overline{\overline{Y}}\right)^2 = \frac{n}{N}\left[\begin{array}{l}\left(\left(\overline{Y}_1 - \overline{\overline{Y}}\right)^2+\ldots+\left(\overline{Y}_N - \overline{\overline{Y}}\right)^2\right)+ \\ \frac{(n-1)}{N-1}\left(\left(\left(\overline{Y}_1 - \overline{\overline{Y}}\right)+\ldots+\left(\overline{Y}_N - \overline{\overline{Y}}\right)\right)^2 - \left(\left(\overline{Y}_1 - \overline{\overline{Y}}\right)^2+\ldots+\left(\overline{Y}_N - \overline{\overline{Y}}\right)^2\right)\right)\end{array}\right]$$

$$n^2 E_1\left(\overline{Y}_i - \overline{\overline{Y}}\right)^2 = \frac{n}{N}\left[\begin{array}{l}\left(1-\frac{n-1}{N-1}\right)\left(\left(\overline{Y}_1 - \overline{\overline{Y}}\right)^2+\ldots+\left(\overline{Y}_N - \overline{\overline{Y}}\right)^2\right) \\ +\frac{(n-1)}{N-1}\left(\left(\left(\overline{Y}_1 - \overline{\overline{Y}}\right)+\ldots+\left(\overline{Y}_N - \overline{\overline{Y}}\right)\right)^2\right)\end{array}\right]$$

Suku kedua dalam tanda kurung akan hilang karena jumlah dari $\overline{Y}_i$ sama dengan $N\overline{\overline{Y}}$. Setelah dibagi n^2 menjadi

$$E_1\left(\overline{Y}_i - \overline{\overline{Y}}\right)^2 = \frac{n}{Nn}\left(\frac{N-n}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\left(\overline{Y}_i - \overline{\overline{Y}}\right)^2\right)$$

$$E_1\left(\bar{Y}_i - \bar{\bar{Y}}\right)^2 = \left(\frac{N-n}{N}\right)\frac{S_1^{\;2}}{n}$$

Dari definisi variansi $V_1\left[E_2\left(\bar{\bar{y}}\right)\right]$ didapat

$$V_1\left[E_2\left(\bar{\bar{y}}\right)\right] = E_1\left[E_2\left(\bar{\bar{y}}\right)\right]^2 - \left[E_1\left(E_2\left(\bar{\bar{y}}\right)\right)\right]^2 = E_1\left[E_2\left(\bar{\bar{y}}\right)\right]^2 - \bar{\bar{Y}}^2 = E_1\left(\bar{Y}_i - \bar{\bar{Y}}\right)^2$$

Sehingga dapat $V_1\left[E_2\left(\bar{\bar{y}}\right)\right] = \dfrac{N-n}{N}\dfrac{S_1^2}{n}$ ………………………………... 3.1.15

2. **Akan dibuktikan pada penarikan sampel tingkat 2 bahwa**

$$E_1\left[V_2\left(\bar{\bar{y}}\right)\right] = \left(\frac{M-m}{M}\right)\frac{S_2^{\;2}}{mn}$$

Bukti

Untuk pembuktian diatas, terlebih dahulu harus dibuktikan bahwa $V_2\left(\bar{\bar{y}}\right) = \dfrac{(M-m)}{Mn^2}\dfrac{\sum_{i=1}^{n} S_{2i}^{\;2}}{m}$. Dengan $\bar{\bar{y}} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}\bar{y}_i}{n}$ dan penarikan sampel acak sederhana digunakan pada tingkat kedua, oleh karena itu dengan teorema (2.11.2) berlaku

$$V_2\left(\bar{\bar{y}}\right) = V_2\left[\frac{\sum_{i=1}^{n}\bar{y}_i}{n}\right] = \frac{(M-m)}{Mn^2}\frac{\sum_{i=1}^{n} S_{2i}^2}{m}$$

$$m\left(y_{ij} - \bar{Y}_i\right) = \left(y_{i1} - \bar{Y}_i\right) + \left(y_{i2} - \bar{Y}_i\right) + \ldots + \left(y_{im} - \bar{Y}_i\right) \quad \text{……………………….. 3.1.16}$$

dengan menggunakan alasan yang sama pada (2.11.3) berlaku

$$E_2\left[\left(y_{i1} - \bar{Y}_i\right)^2 + \ldots + \left(y_{im} - \bar{Y}_i\right)^2\right] = \frac{m}{M}\left[\left(y_{i1} - \bar{Y}_i\right)^2 + \ldots + \left(y_{iM} - \bar{Y}_i\right)^2\right] \quad \text{……….3.1.17}$$

dan juga bahwa

$$E_2\left[(y_{i1}-\overline{Y}_i)(y_{i2}-\overline{Y}_i)+(y_{i1}-\overline{Y}_i)(y_{i3}-\overline{Y}_i)+\ldots+(y_{i(m-1)}-\overline{Y}_i)(y_{im}-\overline{Y}_i)\right]$$

$$=\frac{m(m-1)}{M(M-1)}\left[(y_{i1}-\overline{Y}_i)(y_{i2}-\overline{Y}_i)+\ldots+(y_{i(M-1)i}-\overline{Y}_i)(y_M-\overline{Y}_i)\right] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 3.1.18$$

Sekarang kuadratkan (3.1.16) akan diperoleh

$$m^2(y_{ij}-\overline{Y}_i)^2=\left((y_{i1}-\overline{Y}_i)+(y_{i2}-\overline{Y}_i)+\ldots+(y_{im}-\overline{Y}_i)\right)^2$$

Dari (3.1.16) rata-ratakan seluruh sampel acak sederhana pada tingkat 2. Kemudian dengan menggunakan rumus (3.1.17) dan (3.1.18) diperoleh

$$m^2E_2(y_{ij}-\overline{Y}_i)^2 = E_2\left((y_{i1}-\overline{Y}_i)+(y_{i2}-\overline{Y}_i)+\ldots+(y_{im}-\overline{Y}_i)\right)^2$$

$$m^2E_2(y_{ij}-\overline{Y}_i)^2=$$

$$\frac{m}{M}\left[\begin{array}{l}\left((y_{i1}-\overline{Y}_i)^2+\ldots+(y_{iM}\;-\overline{Y}_i)^2\right)\\ +\dfrac{(m-1)}{M-1}\left(\left((y_{i1}-\overline{Y}_i)+\ldots+(y_{iM}-\overline{Y}_i)\right)^2-\left((y_{i1}-\overline{Y}_i)^2+\ldots+(y_{iM}-\overline{Y}_i)^2\right)\right)\end{array}\right]$$

$$m^2E_2(y_{ij}-\overline{Y}_i)^2=\frac{m}{M}\left[\begin{array}{l}\left(1-\dfrac{m-1}{M-1}\right)\left((y_{i1}-\overline{Y}_i)^2+\ldots+(y_{iM}-\overline{Y}_i)^2\right)\\ +\dfrac{(m-1)}{M-1}\left(\left((y_{i1}-\overline{Y}_i)+\ldots+(y_{iM}-\overline{Y}_i)\right)^2\right)\end{array}\right]$$

Suku kedua dalam tanda kurung akan hilang karena jumlah dari y_{ij} sama dengan $M\overline{Y}_i$. Setelah dibagi m^2 menjadi

$$E_2(y_{ij}-\overline{Y}_i)^2=\frac{1}{Mm}\left(\frac{M-m}{M-1}\sum_{j=11}^{M}(y_{ij}-\overline{Y}_i)^2\right)$$

$$E_2(y_{ij}-\overline{Y}_i)^2=\frac{M-m}{Mm}S_{2i}^2$$

Menurut sifat dari variansi bahwa

$$V_2(\bar{\bar{y}}) = V_2\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}\bar{y}_i}{n}\right) = E_2\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}\bar{y}_i}{n} - E_2\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}\bar{y}_i}{n}\right)\right)^2 = E_2\left(\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\bar{y}_i - E_2\left(\sum_{i=1}^{n}\bar{y}_i\right)\right)\right)^2$$

$$= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}E_2(\bar{y}_i - E_2(\bar{y}_i))^2 = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}E_2(y_{ij} - \bar{Y}_i)^2$$

sehingga didapat $V_2(\bar{\bar{y}}) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}E_2(y_{ij} - \bar{Y}_i)^2$

$$V_2(\bar{\bar{y}}) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{M-m}{Mm}\right)S_{2i}^2$$

$$V_2(\bar{\bar{y}}) = \frac{M-m}{Mmn^2}\sum_{i=1}^{n}S_{2i}^2$$

dimana $S_{2i}^2 = \frac{\sum_{j}^{M}(y_{ij} - \bar{Y}_i)^2}{(M-1)}$ merupakan variansi diantara kelompok sampel sekunder dalam kelompok sampel primer ke-i. Rata-ratakan seluruh sampel pada tahap kedua, $\frac{\sum_{i=1}^{n}S_{2i}^{\,2}}{N} = S_2^{\,2}$ oleh karena itu,

$$E_1\left[V_2(\bar{\bar{y}})\right] = \left(\frac{M-m}{M}\right)\frac{S_2^{\,2}}{mn} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ 3.1.19$$

Dari 2 langkah pembuktian diatas dan dengan menjumlahkan (3.1.15) dan (3.1.19) akan diperoleh

$$V(\bar{\bar{y}}) = \left(\frac{N-n}{N}\right)\frac{S_1^{\,2}}{n} + \left(\frac{M-m}{M}\right)\frac{S_2^{\,2}}{mn} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ 3.1.20$$

Jika $f_1 = \frac{n}{N}$ dan $f_2 = \frac{m}{M}$ merupakan fraksi penarikan sampel pada tahap pertama dan kedua, maka bentuk lain dari $V\left(\bar{\bar{y}}\right)$ adalah :

$$V\left(\bar{\bar{y}}\right)=\frac{1-f_1}{n}S_1^{\ 2}+\frac{1-f_2}{m}S_2^{\ 2}$$

Teorema 3.1.2 :

Perkiraan tidak bias $V\left(\bar{\bar{y}}\right)$ adalah

$$v\left(\bar{\bar{y}}\right)=\frac{1-f_1}{n}s_1^{\ 2}+\frac{f_1(1-f_2)}{mn}s_2^{\ 2}$$

dimana $f_1 = \frac{n}{N}$, $f_2 = \frac{m}{M}$, $s_1^{\ 2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\bar{y}_i-\bar{\bar{y}}\right)^2}{n-1}$ dan $s_2^{\ 2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\left(y_{ij}-\bar{y}_i\right)^2}{n(m-1)}$

Bukti :

Berdasarkan rumus variansi sampel, diperoleh :

$$(n-1)s_1^{\ 2}=\sum^{n}\left(\bar{y}_i-\bar{\bar{y}}\right)^2=\sum^{n}\bar{y}_i^{\,2}-n\bar{\bar{y}}^2 \quad\text{..3.1.21}$$

Rata-ratakan (3.1.21) pada penarikan sampel acak sederhana pada tingkat 2 sehingga didapat

$$(n-1)E_2\left(s_1^2\right)=E_2\left(\sum_{i=1}^{n}\bar{y}_i^2-n\bar{\bar{y}}^2\right) \quad\text{..3.1.22}$$

$$(n-1)E_2\left(s_1^2\right)=E_2\left(\sum_{i=1}^{n}\bar{y}_i^2\right)-nE_2\left(\bar{\bar{y}}^2\right) \quad\text{.. 3.1.23}$$

Dari (3.1. 23) didapat

$$E_2\left(\sum_{i=1}^{n}\bar{y}_i^2\right)=E_2\left\{\sum_{i=1}^{n}E\left(\bar{y}_i|i\right)^2\right\}=E_2\left\{\sum_{i=1}^{n}\left\{\bar{Y}_i^2+\left(\frac{1-f_2}{m}\right)S_{2i}^2\right\}\right\}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\overline{Y}_i^2+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1-f_2}{m}\right)S_{2i}^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ 3.1.24$$

Menurut definisi variansi

$$V_2(\overline{\overline{y}})=E_2(\overline{\overline{y}})^2-[E_2(\overline{\overline{y}})]^2$$

$$E_2(\overline{\overline{y}})^2=V_2(\overline{\overline{y}})+[E_2(\overline{\overline{y}})]^2=\frac{(1-f_2)}{n^2m}\sum_{i=1}^{n}S_{2i}^2+\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}\overline{Y}_i}{n}\right)^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ 3.1.25$$

oleh karena itu,

$$(n-1)E_2(s_1^{\ 2})=\sum_{i=1}^{n}\overline{Y}_i^2+\sum_{i=1}^{n}\frac{(1-f_2)}{m}S_{2i}^{\ 2}-n\overline{\overline{Y}}_n^2-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{(1-f_2)}{m}S_{2i}^{\ 2} \ \ldots 3.1.26$$

dimana $\overline{\overline{Y}}_n=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}\overline{Y}_i}{n}$. Maka,

$$(n-1)\ E_2(s_1^{\ 2})=\sum_{i=1}^{n}\left(\overline{Y}_i-\overline{\overline{Y}}_n\right)^2+\frac{(n-1)(1-f_2)}{nm}\sum_{i=1}^{n}S_{2i}^{\ 2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

3.1.27

Bila (3.1.27) dikalikan dengan $\dfrac{(1-f_1)}{n(n-1)}$ diperoleh

$$\frac{(1-f_1)}{n}E_2(s_1^{\ 2})=\frac{(1-f_1)}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}\left(\overline{Y}_i-\overline{\overline{Y}}_n\right)^2+\frac{(1-f_1)(1-f_2)}{n^2m}\sum_{i=1}^{n}S_{2i}^{\ 2} \ \ldots .\ 3.1.28$$

Dari (3.1.28) rata-ratakan seluruh penarikan sampel acak sederhana tingkat 1

$$E_1E_2\frac{(1-f_1)}{n}(s_1^{\ 2})=\frac{(1-f_1)}{n}E_1\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\overline{Y}_i-\overline{\overline{Y}}\right)^2}{(n-1)}\right)+\frac{(1-f_1)(1-f_2)}{nm}E_1\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}S_{2i}^2}{n}\right)$$

$$E_1E_2\frac{(1-f_1)}{n}\left(s_1^{\ 2}\right)=\frac{(1-f_1)}{n}\frac{\sum_{i=1}^{N}\left(\overline{Y}_i-\overline{\overline{Y}}\right)}{(N-1)}+\frac{(1-f_1)(1-f_2)}{nm}\frac{\sum_{i=1}^{N}S_{2i}^2}{N}$$

$$E\frac{(1-f_1)}{n}s_1^{\ 2}=\frac{(1-f_1)}{n}S_1^{\ 2}+\frac{(1-f_1)(1-f_2)}{mn}S_2^{\ 2} \quad \text{3.1.29}$$

Dengan mengalikan $\frac{n}{(1-f_1)}$ dari (3.1.29) didapat

$$E\left(s_1^2\right)=S_1^2+\frac{(1-f_2)}{m}S_2^2 \quad \text{3.1.30}$$

Karena $E_1E_2\left(s_2^{\ 2}\right)=S_2^{\ 2}$, maka penduga tidak bias dari $V\left(\overline{\overline{y}}\right)$ di dapat

$$E\left(v\left(\overline{\overline{y}}\right)\right)=E\left(\frac{1-f_1}{n}s_1^{\ 2}+\frac{f_1(1-f_2)}{mn}s_2^2\right)$$

$$E\left(v\left(\overline{\overline{y}}\right)\right)=\frac{1-f_1}{n}E\left(s_1^{\ 2}\right)+\frac{f_1(1-f_2)}{mn}E\left(s_2^2\right)$$

$$E\left(v\left(\overline{\overline{y}}\right)\right)=\frac{1-f_1}{n}\left(S_1^2+\frac{(1-f_2)}{m}S_2^2\right)+\frac{f_1(1-f_2)}{mn}S_2^2$$

$$E\left(v\left(\overline{\overline{y}}\right)\right)=\frac{1-f_1}{n}S_1^2+\frac{1-f_1}{n}\frac{(1-f_2)}{m}S_2^2+\frac{f_1(1-f_2)}{mn}S_2^2$$

$$E\left(v\left(\overline{\overline{y}}\right)\right)=\frac{1-f_1}{n}S_1^2+\frac{(1-f_2)}{m}S_2^2$$

$$E\left(v\left(\overline{\overline{y}}\right)\right)=V\left(\overline{\overline{y}}\right)$$

4. PSA 2 Tingkat dengan Kelompok-Kelompok Berukuran Tidak Sama

Pada PSA 2 tingkat dengan kelompok-kelompok berukuran tidak sama, banyaknya elemen kelompok sampel sekunder dari setiap kelompok sampel primer tidak harus sama. Notasi-notasi yang diberikan dalam PSA 2 tingkat dengan kelompok-kelompok berukuran tidak sama adalah sebagai berikut :

a. $\overline{\overline{Y}}$ = Rata-rata seluruh elemen dalam populasi, $\overline{\overline{Y}} = \frac{N}{M}\frac{\sum_{i=1}^{N} M_i \overline{Y}_i}{N}$

b. $\overline{\overline{y}}$ = Rata-rata sampel kelompok sekunder sebagai penduga rata-rata populasi, $\overline{\overline{y}} = \frac{N}{M}\frac{\sum_{i=1}^{n} M_i \overline{y}_i}{n}$

c. Y = Total elemen populasi, $Y = \frac{N}{n}\frac{\sum_{i=1}^{N} M_i \overline{Y}_i}{N}$

d. $\hat{Y}$ = Total elemen dalam sampel sebagai penduga total populasi

$$\hat{Y} = \frac{N}{n}\frac{\sum_{i=1}^{n} M_i \overline{y}_i}{n}$$

e. s_i^2 = Variansi antar elemen pada kelompok sekunder ke-I sebagai penduga S_i^2 dengan $s_i^2 = \frac{\sum_{i=1}^{m_i}\left(y_{ij} - \overline{y}_i\right)^2}{m_i - 1}$

f. s_1^2 = Variansi antar kelompok primer yang terpilih sebagai sampel sebagai penduga S_1^2 dengan $s_1^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(M_i \overline{y}_i - \overline{M}\,\overline{\overline{y}}\right)^2}{n-1}$

1) Penduga Rata-rata Populasi

Andaikan suatu penelitian dilakukan pada suatu populasi yang terdiri dari N kelompok dan sampel sebanyak n kelompok primer diambil secara acak. M_i menyatakan banyaknya elemen pada sampel primer ke-i, dan m_i menyatakan banyaknya elemen pada sampel sekunder ke-i, dengan banyaknya elemen masing-masing kelompok tidak sama. Maka penduga rata-rata populasinya adalah :

$$\bar{\bar{y}} = \frac{N}{M}\frac{\sum_{i=1}^{n} M_i \bar{y}_i}{n}$$

2) Penduga Variansi Rata-Rata Populasi

Teorema 3.1.3

Bila penarikan sampel dilakukan secara bertingkat, yaitu 2 tingkat maka penduga variansi rata-rata populasinya :

$$v(\bar{\bar{y}}) = \left(\frac{N-n}{N}\right)\frac{1}{n\bar{M}^2}s_1^2 + \frac{1}{nN\bar{M}^2}\sum_{i=1}^{n} M_i^2\left(\frac{M_i - m_i}{M_i}\right)\frac{s_i^2}{m_i}$$

Bukti

Untuk membuktikan teorema diatas terlebih dahulu dibuktikan bahwa penduga tak bias Y adalah $\hat{Y}$ dengan variansi $V(\hat{Y}) = N^2\left(\frac{N-n}{N}\right)\frac{S_1^2}{n}$ + $\frac{N}{n}\sum_{i=1}^{N} M_i^2\left(\frac{M_i - m_i}{M_i}\right)\frac{S_i^2}{m_i}$.

$$E(\hat{Y}) = E_1E_2(\hat{Y}) = E_1\left[\frac{N\sum_{i=1}^{n} M_i E_2(\bar{y}_i)}{n}\right] = E_1\left[\frac{N\sum_{i=1}^{n} M_i \bar{Y}_i}{n}\right] = NE_1\left[\frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i}{n}\right] = N\hat{\bar{Y}} = Y$$

$E_2(\hat{Y})$ menyatakan nilai harapan yang mungkin pada tingkat 2 sehingga

$$V_1\left[E_2(\hat{Y})\right] = V_1\left[\left(N\,\hat{\bar{Y}}\right)\right] = N^2\left(\frac{N-n}{N}\right)\frac{S_1^2}{n}.$$

Sedangkan $V_2(\hat{Y}) = \frac{N^2}{n^2}\sum_{i=1}^{n} M_i^2\left(\frac{M_i - m_i}{M_i}\right)\frac{S_i^2}{m_i}$

maka $E_1\left[V_2\left(\hat{Y}\right)\right] = \frac{N}{n}\sum_{i=1}^{N} M_i^2\left(\frac{M_i - m_i}{M_i}\right)\frac{S_i^2}{m_i}$.

Menurut definisi $V\left(\hat{Y}\right) = V_1\left(E_2\left(\hat{Y}\right)\right) + E_1\left(V_2\left(\hat{Y}\right)\right)$

Sehingga $V\left(\hat{Y}\right) = N^2\left(\frac{N-n}{N}\right)\frac{S_1^2}{n} + \frac{N}{n}\sum_{i=1}^{N} M_i^2\left(\frac{M_i - m_i}{M_i}\right)\frac{S_i^2}{m_i}$. Penduga tak bias $V\left(\hat{Y}\right)$adalah $v\left(\hat{Y}\right)$, dengan $v\left(\hat{Y}\right) = N^2\left(\frac{N-n}{N}\right)\frac{s_1^2}{n} + \frac{N}{n}\sum_{i=1}^{n} M_i^2\left(\frac{M_i - m_i}{M_i}\right)\frac{s_i^2}{m_i}$.

Berdasarkan pendugaan nilai total populasi, yang didefinisikan $\hat{Y} = M\,\bar{\bar{y}}$. Maka penduga variansi dari total populasi adalah $v\left(\hat{Y}\right) = v\left(M\,\bar{\bar{y}}\right) = M^2 v\left(\bar{\bar{y}}\right)$ sehingga diperoleh $v\left(\bar{\bar{y}}\right) = \frac{v\left(\hat{Y}\right)}{M^2}$.

Jadi $v\left(\bar{\bar{y}}\right) = \left(\frac{N-n}{N}\right)\frac{N^2}{M^2}\frac{s_1^2}{n} + \frac{N}{M^2 n}\sum_{i=1}^{n} M_i^2\left(\frac{M_i - m_i}{M_i}\right)\frac{s_i^2}{m_i}$

$$v\left(\bar{\bar{y}}\right) = \left(\frac{N-n}{N}\right)\frac{1}{n\bar{M}^2}s_B^2 + \frac{1}{nN\bar{M}^2}\sum_{i=1}^{n} M_i^2\left(\frac{M_i - m_i}{M_i}\right)\frac{s_i^2}{m_i}$$

Untuk memberikan pemahaman dalam menggunakan rumus diatas, penulis memberikan contoh sebagai berikut :

Contoh 3.1.3

Penulis ingin menduga rata-rata luas wilayah desa pada seluruh desa di Propinsi D.I Yogyakarta berdasarkan Badan Pusat Statistik Propinsi D.I Yogyakarta tahun 2002. Data yang diperoleh, diketahui banyaknya desa di Propinsi D.I Yogyakarta adalah 438 desa yang terkelompokan dalam 78 kecamatan. Oleh karena kecamatan letaknya berjauhan satu sama lain secara geografis maka diputuskan untuk menggunakan kecamatan sebagai kelompok dan desa sebagai elemennya. Untuk memperoleh sampel penelitian penulis menggunakan metode penarikan sampel acak 2 tingkat. Pada tingkat pertama diambil secara acak 24 kecamatan sebagai sampel primer. Kemudian pada tingkat kedua diambil secara acak desa sebagai sampel sekunder dari setiap kelompok kecamatan yang terpilih, dengan banyaknya desa dalam masing-masing kecamatan berbeda-beda, kurang lebih sebanding dengan banyaknya desa dalam kecamatan. Dengan menggunakan Tabel 3.1.1 akan dibuat penduga rata-rata luas desa dan penduga variansi rata-rata luas desa.

Berikut adalah data sampel tingkat pertama dan tingkat kedua.

Kelompok	Kecamatan	Banyaknya Desa	
		M_i	m_i
1	Temon	15	7
2	Wates	8	4
3	Panjatan	11	5
4	Pangasih	7	3
5	Imogiri	8	4
6	Banguntapan	8	4
7	Sedayu	4	2
8	Kretek	5	2
9	Dlingo	6	3
10	Panggang	6	3
11	Rongkop	8	4
12	Ponjong	11	5
13	Karang mojo	9	4
14	Wonosari	14	7
15	Playen	13	6
16	Minggir	5	2
17	Godean	7	3
18	Gamping	5	2
19	Prambanan	6	3
20	Pakem	5	2
21	Matrijeron	3	1

Kelompok	Kecamatan	Banyaknya Desa	
		M_i	m_i
22	Umbulharjo	7	3
23	Kotagede	3	1
24	Tegalrejo	4	2

Tabel 3.1.1 Data Sampel Tingkat Pertama dan Tingkat Kedua

Data yang diperoleh dari contoh tersebut dapat dinotasikan sebagai berikut :

- N menyatakan banyaknya kelompok kecamatan di Propinsi D.I Yogyakarta sebagai populasi
- n menyatakan banyaknya kelompok kecamatan sebagai sampel
- M menyatakan banyaknya desa di Propinsi D.I Yogyakarta
- M_i menyatakan banyaknya desa pada kelompok kecamatan ke-i yang terpilih sebagai sampel primer dengan i = 1,2,3,…,n
- m_i menyatakan banyaknya desa pada kelompok kecamatan ke-i yang terpilih sebagai sampel sekunder dengan i = 1,2,3,…,n
- y_{ij} (dalam satuan km^2) menyatakan luas desa pada kelompok primer ke-i, i = 1,2,3,…,n dan kelompok sekunder ke-j, j = 1,2,3,.., m_i
- $\bar{y}_i$ (dalam satuan km^2)menyatakan rata-rata luas desa pada kelompok primer ke-i dengan $\bar{y}_i = \frac{\sum_{j=1}^{m_i} y_{ij}}{m_i}$

- $s^2_{2(i)}$ (dalam satuan km^2) menyatakan variansi antar elemen pada kelompok sekunder ke-i dengan $s^2_{2(i)} = \dfrac{\sum_{i=1}^{m_i}\left(y_{ij} - \bar{y}_i\right)^2}{m-1}$

sehingga diperoleh :

- N = 78 kecamatan
- n = 24 kecamtan
- M = 438 desa

Berikut data yang diperoleh melalui tabel 3.1.1 sebagai berikut :

n	Desa M_i	m_i	y_{ij} (km²)							$\bar{y}_i$ (km²)	s_i^2
1	15	7	3,65	3,59	1,51	1,39	2,80	2,23	1,33	2,36	1,02
2	8	4	7,22	2,50	4,82	3,41				4,49	4,23
3	11	5	6,24	2,83	1,12	3,79	5,92	3,98		3,98	4,57
4	7	3	6,28	5,34	12,78					8,13	16,41
5	8	4	22,75	6,32	3,24	15,39				11,93	78,68
6	8	4	3,75	0,67	3,90	8,33				4,16	9,93
7	4	2	11,21	6,37						8,79	11,71
8	5	2	4,70	2,39						3,55	2,67
9	6	3	12,85	9,16	7,76					9,92	6,91
10	6	3	11,35	16,30	25,83					17,83	54,17
11	8	4	9,04	5,18	10,60	13,49				9,58	11,99
12	11	5	13,15	7,92	4,63	9,12	11,43			9,25	12,38
13	9	4	3,68	5,31	6,91	12,81				7,18	15,84
14	14	7	3,96	5,26	5,15	4,15	3,32	3,50	6,84	4,60	0,45
15	13	6	20,35	16,26	4,01	2,37	3,44	13,11		9,92	79,39
16	5	2	3,45	6,56						5,01	4,84
17	7	3	5,19	3,32	3,02					3,84	1,38
18	5	2	4,00	3,49						3,75	0,13
19	6	3	6,55	8,39	7,09					7,34	0,89
20	5	2	6,36	5,52						5,94	0,35
21	3	1	0,85							0,85	0,00
22	7	3	1,38	0,78	0,66					0,94	0,15
23	3	1	1,25							1,25	0,00
24	4	2	0,82	0,70						0,76	0,01

Tabel 3.1.2 Perhitungan Sampel

Nilai-nilai pada tabel 3.1.2, diperoleh berdasarkan perhitungan sebagai berikut :

$$\bar{y}_i = \frac{\sum_{j=1}^{m_i} y_{ij}}{m_i}$$

$$\bar{y}_1 = \frac{\sum_{j=1}^{7} y_{ij}}{7} = \frac{3,65 + 3,59 + 1,51 + 1,39 + 2,80 + 2,23 + 1,33}{7} = 2,36$$

dan seterusnya

$$\bar{y}_{24} = \frac{\sum_{j=1}^{2} y_{ij}}{2} = \frac{0,82 + 0,70}{2} = 0,76$$

Selanjutnya untuk perhitungan variansi antar elemen dalam kelompok sekunder ke-i adalah $s_i^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{m_i} (y_{ij} - \bar{y}_i)^2}{m_i - 1}$

$$s_1^2 = \frac{\sum_{i=1}^{7} (y_{ij} - \bar{y}_i)^2}{7-1} = \frac{(3,65 - 2,36)^2 + \ldots + (1,33 - 2,36)}{6} = 1,02$$

dan seterusnya

$$s_{24}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{2} (y_{ij} - \bar{y}_i)^2}{2-1} = \frac{(0,82 - 0,76)^2 + \ldots + (0,70 - 0,76)^2}{10} = 0,01$$

1. Menghitung Penduga Rata-Rata Populasi

Berdasarkan notasi yang telah diberikan pada bagian 2, dapat dihitung penduga rata-rata populasinya yaitu :

$$\bar{\bar{y}} = \frac{N}{M} \frac{\sum_{i=1}^{24} M_i \bar{y}_i}{24} = \frac{78}{(438)24} \{15(2,36) + 8(4,49) + \ldots + 4(0,76)\} = 8,29$$

Jadi penduga rata-rata luas desa di Propinsi D.I Yogyakarta sebesar 8,29 km^2.

2. Menghitung Penduga Variansi Rata-Rata Populasi

Penduga variansi rata-rata populasi dapat dihitung menggunakan rumus :

$$v(\bar{\bar{y}}) = \left(\frac{N-n}{N}\right)\frac{1}{n\bar{M}^2}s_1^2 + \frac{1}{nN\bar{M}^2}\sum_{i=1}^{n} M_i^2\left(\frac{M_i - m_i}{M_i}\right)\frac{s_i^2}{m_i}$$

dimana $s_1{}^2$ merupakan variansi antar kelompok primer sebagai penduga dari $S_1{}^2$ dan $s_i{}^2$ merupakan variansi antar elemen sampel dalam kelompok sekunder ke-i sebagai penduga $S_i{}^2$.

$$s_1^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(M_i\bar{y}_i - \bar{M}\,\bar{\bar{y}})^2}{n-1} = \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n}(M_i\bar{y}_i)^2 - 2\bar{M}\,\bar{\bar{y}}\sum_{i=1}^{n}M_i\bar{y}_i + n(\bar{M}\,\bar{\bar{y}})^2\right]$$

Dengan langkah-langkah perhitungan sebagai berikut :

$$\bar{M} = \frac{M}{N} = \frac{438}{78} = 5{,}61.$$

$$\sum_{i=1}^{24}(M_i\bar{y}_i)^2 = (15(2{,}36))^2 + (8(4{,}49))^2 + \ldots(4(0{,}76))^2 = 101.406{,}7888$$

$$\sum_{i=1}^{24}(M_i\bar{y}_i) = ((15)(2{,}36)) + ((8)(4{,}49)) + \ldots + ((4)(0{,}76)) = 1116{,}85$$

$$s_1^2 = \frac{1}{23}\left[101.406{,}7888 - 2(5{,}61)(8{,}29)(1116{,}85) + 24((5{,}61)(8{,}29))^2\right] = 6121{,}092771$$

$$\sum_{i=1}^{24}M_i^2\left(\frac{M_i - m_i}{M_i}\right)\frac{s_i^2}{m_i} = \left[15^2\left(\frac{15-7}{15}\right)\frac{1{,}02}{7}\right] + \ldots + \left[4^2\left(\frac{4-2}{4}\right)\frac{0{,}01}{2}\right]$$

$$\sum_{i=1}^{24}M_i^2\left(\frac{M_i - m_i}{M_i}\right)\frac{s_i^2}{m_i} = 3114{,}512381$$

sehingga dapat dihitung variansi sampel $v(\bar{\bar{y}})$ sebagai penduga dari $V(\bar{\bar{y}})$. Jadi penduga variansi rata-rata populasi adalah

$$v(\bar{\bar{y}}) = \left(\frac{N-n}{N}\right)\frac{1}{n\bar{M}^2}s_1^2 + \frac{1}{nN\bar{M}^2}\sum_{i=1}^{n} M_i^2\left(\frac{M_i - m_i}{M_i}\right)\frac{s_i^2}{m_i}$$

$$v(\bar{\bar{y}}) = \left(\frac{78-24}{78}\right)\frac{1}{(24)(5{,}61)^2}(6121{,}092771) + \frac{1}{(24)(78)(5{,}61)^2}(3114{,}512381) = 5{,}67$$

$$s(\bar{\bar{y}}) = \sqrt{v(\bar{\bar{y}})} = \sqrt{5{,}67} = 2{,}38$$

Dengan menggunakan taraf kepercayaan 95% maka batas kesalahan penduga nilai rata-rata populasi $KS(\bar{\bar{y}})$ adalah

$$KS(\bar{\bar{y}}) = Z_{\alpha/2} \text{ x } 2s(\bar{\bar{y}}) = 1{,}96 \text{ x } 2(2{,}38) = 9{,}33$$

Dengan diketahuinya $KS(\bar{\bar{y}})$, maka dapat dibuat selang kepercayaan bagi rata-rata populasi dengan taraf kepecayaan 95% sebagai berikut :

$$P\left(\bar{\bar{y}} - KS(\bar{\bar{y}}) \le \bar{\bar{Y}} \le \bar{\bar{y}} + KS(\bar{\bar{y}})\right) = 1-\alpha$$
$$P\left(8{,}29 - 9{,}33 \le \bar{\bar{Y}} \le 8{,}29 + 9{,}33\right) = 1 - 0{,}05$$
$$P\left(1{,}04 \le \bar{\bar{Y}} \le 17{,}62\right) = 0{,}95$$

Berdasarkan berbagai perhitungan diatas, dapat diduga tentang luas wilayah desa di Propinsi D.I Yogyakarta, sebagai berikut :

- Rata-rata luas wilayah desa di Propinsi D.I Yogyakarta pada tahun 2002 adalah 8,29 km^2.
- Dengan menggunakan taraf kepercayaan 95% diyakini bahwa selang nilai antara 1,04 km^2 sampai 17,62 km^2 akan mencakup rata-rata luas wilayah desa.

5. Penduga Proporsi Pada PSA 2 Tingkat

Konsep proporsi sering dijumpai dalam kehidupan sehari-hari, misalnya ingin dibuat perkiraan proporsi bibit ikan yang mati dari seluruh tambak yang ada di Indonesia, proporsi anak SD di Jakarta yang pernah sakit gigi, proporsi mahasiswa PTS yang mengeluh biaya sekolah terlalu tinggi, dan lain sebagainya. Pada sub bab ini akan dibahas mengenai penduga proporsi (P) oleh $(\bar{p})$ dan dugaan variansi dari $V(P)$ yaitu $v(\bar{p})$.

Dalam banyak hal, populasi yang diteliti dapat digolongkan ke dalam dua kategori yaitu kategori yang memiliki suatu sifat tertentu dan kategori yang tidak memiliki sifat tertentu. Misalkan suatu populasi yang terdiri dari N kelompok dan sebanyak n kelompok sampel primer diambil secara acak. M_i menyatakan banyaknya elemen pada sampel primer ke-i, dan m_i menyatakan banyaknya elemen pada sampel sekunder ke-i. Jika elemen-elemen sampel dikelompokkan ke dalam dua kategori dan akan diperkirakan elemen yang terletak pada kategori pertama. Maka dapat dilakukan identifikasi sampel untuk setiap elemen sampel, jika elemen terletak dalam kategori yang dimaksud $y_{ij} = 1$ dan jika elemen berada pada kategori lainnya $y_{ij} = 0$. Dimisalkan bahwa setiap elemen dalam populasi terletak dalam salah satu dari dua kategori C atau C', dengan C sebagai kategori yang pertama. Notasinya sebagai berikut :

A = Jumlah elemen populasi dalam kategori C

a = Jumlah elemen sampel dalam kategori C

p_i = Proporsi masuknya elemen sampel dalam kategori C pada kelompok primer ke-i , dengan $p_i = \dfrac{a_i}{m_i}$

$\bar{p}$ = Proporsi masuknya elemen sampel dalam kategori C sebagai penduga proporsi populasi (P), dengan $\bar{p} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} p_i}{n}$

Teorema 3.1.5

Penduga tak bias $V(\bar{p})$ adalah

$$v(\bar{p}) = \frac{1-f_1}{n} s_1^{\,2} + \frac{f_1(1-f_2)}{mn} s_2^{\,2}$$

dimana $f_1 = \dfrac{n}{N}$, $f_2 = \dfrac{m}{M}$, dan

$$s_1^{\,2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(p_i - \bar{p})^2}{n-1}, \; s_2^{\,2} = \frac{m}{n(m-1)} \sum_{i=1}^{n} p_i q_i \text{ dengan } q_i = 1 - p_i$$

Bukti :

Berdasarkan rumus variansi sampel, diperoleh :

$$(n-1)s_1^{\,2} = \sum_{i=1}^{n}(p_i - \bar{p})^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i^{\,2} - n\bar{p}^2 \quad \text{.......................................3.1.31}$$

Rata-ratakan (3.1.31) pada penarikan sampel acak sederhana pada tahap kedua sehingga didapat

$$(n-1)E_2(s_1^2) = E_2\left(\sum_{i=1}^{n} p_i^2 - n\bar{p}^2\right)$$

$$(n-1)E_2(s_1^2) = E_2\left(\sum_{i=1}^{n} p_i^2\right) - nE_2(\bar{p}^2) \quad \text{.......................................3.1.32}$$

Dari (3.1.32) didapat

$$E_2\left(\sum_{i=1}^{n} p_i^2\right) = E_2\left\{\sum_{i=1}^{n} E(p_i|i)^2\right\} = E_2\left\{\sum_{i=1}^{n}\left\{P_i^2 + \left(\frac{1-f_2}{m}\right)S_{2i}^2\right\}\right\}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P_i^2 + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1-f_2}{m}\right)S_{2i}^2 \text{ ....3.1.33}$$

Menurut definisi variansi

$$V_2(\bar{p}) = E_2(\bar{p})^2 - [E_2(\bar{p})]^2$$

$$E_2(\bar{p})^2 = V_2(\bar{p}) + [E_2(\bar{p})]^2 = \frac{(1-f_2)}{n^2 m}\sum_{i=1}^{n} S_{2i}^2 + \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} P_i}{n}\right)^2 \text{ ....3.1.34}$$

oleh karena itu,

$$(n-1)E_2(s_1^2) = \sum_{i=1}^{n} P_i^2 + \sum_{i=1}^{n}\frac{(1-f_2)}{m}S_{2i}^2 - n\bar{P}_n^2 - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{(1-f_2)}{m}S_{2i}^2 \text{ ....3.1.35}$$

dimana $\bar{P}_n = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} P_i}{n}$. Maka,

$$(n-1)\,E_2(s_1^2) = \sum^{n}(P_i - \bar{P}_n)^2 + \frac{(n-1)(1-f_2)}{nm}\sum^{n} S_{2i}^2 \text{ ....3.1.36}$$

Bila (3.1.36) dikalikan dengan $\dfrac{(1-f_1)}{n(n-1)}$, diperoleh

$$\frac{(1-f_1)}{n}E_2(s_1^2) = \frac{(1-f_1)}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(P_i - \bar{P}_n)^2 + \frac{(1-f_1)(1-f_2)}{n^2 m}\sum_{i=1}^{n} S_{2i}^2 \text{ ......3.1.37}$$

Dari (3.1.37) rata-ratakan seluruh penarikan sampel acak sederhana tingkat 1

$$E_1E_2\frac{(1-f_1)}{n}\left(s_1{}^2\right)=\frac{(1-f_1)}{n}E_1\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(P_i-\bar{P}\right)}{(n-1)}\right)+\frac{(1-f_1)(1-f_2)}{nm}E_1\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}S_{2i}^2}{n}\right)$$

$$E_1E_2\frac{(1-f_1)}{n}\left(s_1{}^2\right)=\frac{(1-f_1)}{n}\frac{\sum_{i=1}^{N}\left(P_i-\bar{P}\right)}{(N-1)}+\frac{(1-f_1)(1-f_2)}{nm}\frac{\sum_{i=1}^{N}S_{2i}^2}{N}$$

$$E\frac{(1-f_1)}{n}s_1{}^2=\frac{(1-f_1)}{n}S_1{}^2+\frac{(1-f_1)(1-f_2)}{mn}S_2{}^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 3.1.38$$

Dengan mengalikan $\frac{n}{(1-f_1)}$ dari (3.1.38) didapat

$$E\left(s_1^2\right)=S_1^2+\frac{(1-f_2)}{m}S_2^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 3.1.39$$

karena $E_1E_2\left(s_2{}^2\right)=S_2{}^2$, maka penduga tidak bias dari $V(\bar{p})$ di dapat

$$E(v(\bar{p}))=E\left(\frac{1-f_1}{n}s_1{}^2+\frac{f_1(1-f_2)}{mn}s_2^2\right)$$

$$E(v(\bar{p}))=\frac{1-f_1}{n}E\left(s_1{}^2\right)+\frac{f_1(1-f_2)}{mn}E\left(s_2^2\right)$$

$$E(v(\bar{p}))=\frac{1-f_1}{n}\left(S_1^2+\frac{(1-f_2)}{m}S_2^2\right)+\frac{f_1(1-f_2)}{mn}S_2^2$$

$$E(v(\bar{p}))=\frac{1-f_1}{n}S_1^2+\frac{1-f_1}{n}\frac{(1-f_2)}{m}S_2^2+\frac{f_1(1-f_2)}{mn}S_2^2$$

$$E(v(\bar{p}))=\frac{1-f_1}{n}S_1^2+\frac{(1-f_2)}{m}S_2^2$$

$$E(v(\bar{p}))=V(\bar{p})$$

B. Penarikan Sampel Acak 3 Tingkat

Pada sub bab A telah dijelaskan mengenai PSA 2 tingkat dimana proses tersebut dapat disebut sebagai sub penarikan sampel, karena elemen dalam kelompok tidak diteliti semua, tetapi diambil sampelnya. Prose sub penarikan sampel dapat dilanjutkan dengan PSA 3 Tingkat. Pada PSA 3 tingkat, sampel diperoleh dari pengambilan masing-masing kelompok sampel sekunder dari PSA 2 tingkat secara acak.

Sebagai contoh, pada penelitian untuk memperkirakan produksi padi di kabupaten Bantul tahun 2002, desa merupakan kelompok wilayah yang mempunyai potensi untuk memproduksi padi. Dalam sebuah desa terdapat banyak lahan pertanian yang menghasilkan berbagai macam tanaman (misalnya padi, jagung, ketela dan lain sebagainya). Bila suatu lahan yang dapat menghasilkan padi terpilih maka hanya bagian-bagian tertentu dari lahan tersebut yang diambil untuk menentukan hasil per ha. Untuk memperoleh sampel penelitian maka dilakukan penarikan sampel secara bertingkat yaitu PSA 3 tingkat. Tingkat pertama dipilih kelompok desa kemudian tingkat kedua memilih lahan dari tiap kelompok desa, tingkat terakhir yang dilakukan adalah memilih lahan yang memproduksi padi. Lahan yang terpilih tersebut dijadikan sampel untuk penelitian.

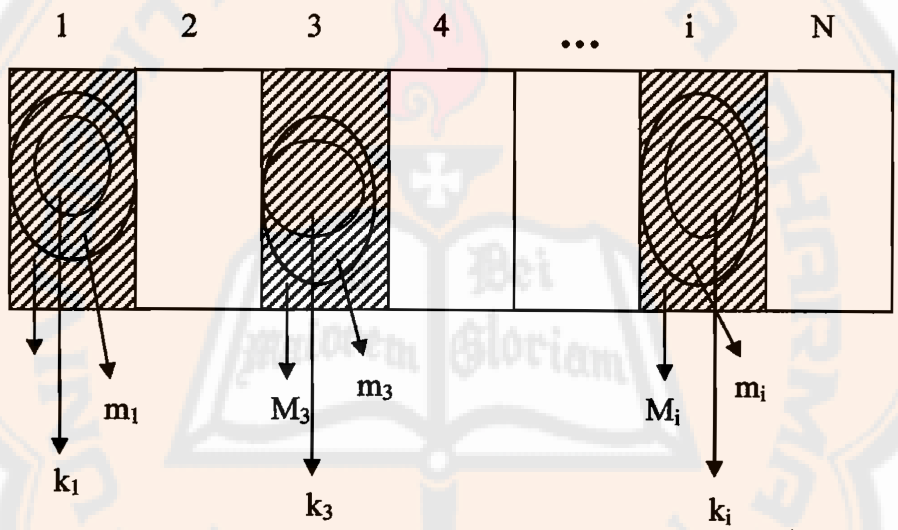
1. Prosedur Penarikan Sampel Acak 3 Tingkat

Berikut langkah-langkah penarikan sampel acak 3 tingkat :

1. Menentukan populasi yang jelas.
2. Populasi dibagi dalam N kelompok, dengan $M_{i;\ i} = 1,2,3,\ldots,N$ sebagai banyaknya elemen dalam masing-masing kelompok.
3. Mengambil n kelompok sampel secara acak dari N kelompok populasi yang tersedia.

4. Dari n kelompok diambil secara acak m kelompok dengan banyaknya elemen pada masing-masing kelompok diberi notasi $m_{i;}$ i = 1,2,3,…,n.
5. Dari m kelompok diambil secara acak k kelompok dengan banyaknya elemen pada masing-masing kelompok diberi notasi $k_{i;}$ i = 1,2,3,… m_i.
6. Melakukan pemeriksaan terhadap masing-masing elemen yang termasuk dalam kelompok sampel yang diambil pada tingkat ketiga.

Langkah-langkah diatas dapat digambarkan pada diagram di bawah ini :



Keterangan :

— Populasi terbagi menjadi N kelompok.

— Bagian yang diarsir merupakan kelompok sampel, dengan banyaknya elemen pada kelompok ke-i adalah M_i.

— Bagian yang terdapat dalam lingkaran adalah kelompok sampel

2. Notasi-Notasi Pada Penarikan Sampel Acak 3 Tingkat

Notasi-notasi yang digunakan pada PSA 3 tingkat antara lain sebagai berikut:

a. N = Banyaknya kelompok dalam populasi

b. n = Banyaknya kelompok yang dipilih dari N kelompok secara acak pada tahap pertama

c. M = Banyaknya kelompok yang dipilih dari n kelompok secara acak pada tahap kedua

d. K = Banyaknya kelompok yang dipilih dari M kelompok secara acak pada tahap ketiga

e. M_i = Banyaknya seluruh elemen dalam kelompok ke-i dengan i = 1,2,3,…,N

f. m_i = Banyaknya sampel elemen dari pengambilan pada tahap kedua dengan i = 1,2,3,…,n

i. k_i = Banyaknya sampel elemen dari pengambilan pada tahap ketiga dengan i = 1,2,3,…,n

g. M = Total elemen dalam populasi, $M = \sum_{i=1}^{N} M_i$

h. k = Total elemen dalam sampel, $k = \sum_{u=1}^{n} k_u$

i. $\overline{M}$ = Rata-rata banyaknya elemen per kelompok dalam populasi

$$\overline{M} = \frac{M}{N}$$

j. $\bar{k}$ = Rata-rata banyaknya elemen per kelompok dalam sampel

$$\bar{k} = \frac{k}{n}$$

k. y_{iju} = Nilai variabel yang diperoleh untuk kelompok ke-u tahap ketiga pada kelompok ke-j tahap kedua diambil dari kelompok ke-i, dengan i = 1,2,3,…,n , j = 1,2,3,…,m_i dan u = 1,2,3,…,k_i

l. $\bar{Y}_{ij}$ = Rata-rata kelompok ke-j dalam populasi, $\bar{Y}_{ij} = \frac{\sum_{u=1}^{K} y_{iju}}{K}$

m. $\bar{\bar{Y}}_i$ = Rata-rata kelompok ke-i dalam populasi, $\bar{\bar{Y}}_i = \frac{\sum_{j=1}^{M}\sum_{u=1}^{K} y_{iju}}{MK}$

n. $\bar{\bar{\bar{Y}}}$ = Rata-rata seluruh elemen dalam populasi, $\bar{\bar{\bar{Y}}} = \frac{\sum_{i=1}^{N} \bar{\bar{Y}}_i}{N}$

o. $\bar{y}_{ij}$ = Rata-rata kelompok ke-j sebagai penduga $\bar{Y}_{ij}$, $\bar{y}_{ij} = \frac{\sum_{u=1}^{k_i} y_{iju}}{k_i}$

p. $\bar{\bar{y}}_i$ = Rata-rata dari kelompok ke-i sebagai penduga $\bar{\bar{Y}}_i$, $\bar{\bar{y}}_i = \frac{\sum_{j=1}^{m_i} \bar{y}_{ij}}{m_i}$

q. $\bar{\bar{\bar{y}}}$ = Rata-rata sampel seluruhnya per kelompok sekunder sebagai penduga untuk rata-rata populasi, $\bar{\bar{\bar{y}}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \bar{\bar{y}}_i}{n}$

r. S_1^2 = Variansi antara kelompok pada populasi

$$S_1^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N}\left(\overline{\overline{Y}}_i - \overline{\overline{\overline{Y}}}\right)^2}{N-1}$$

s. S_3^2 = Variansi diantara elemen dalam kelompok tahap ketiga pada populasi, $S_3^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}\sum_{u=1}^{K}\left(y_{iju} - \overline{Y}_{ij}\right)^2}{NM(K-1)}$

t. S_2^2 = Variansi di antara rata-rata kelompok tahap kedua pada populasi

$$S_2^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}\left(\overline{Y}_{ij} - \overline{\overline{Y}}_i\right)^2}{N(M-1)}$$

u. $s_1^{\,2}$ = Variansi antar kelompok dalam sampel sebagai penduga S_1^2

$$s_1^{\,2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\overline{\overline{y}}_i - \overline{\overline{\overline{y}}}\right)^2}{n-1}$$

v. $s_2^{\,2}$ = Variansi di antara rata-rata kelompok tahap kedua pada sampel sebagai penduga S_2^2, $s_2^{\,2} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m_i}\left(\overline{y}_{ij} - \overline{\overline{y}}_i\right)^2}{n(m_i-1)}$

w. s_3^2 = Variansi diantara elemen dalam kelompok tahap ketiga pada sampel sebagai penduga S_3^2, $s_3^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m_i}\sum_{u=1}^{k_u}\left(y_{iju} - \overline{y}_{ij}\right)^2}{nm(k-1)}$

3. Penduga Rata-Rata Populasi Dan Variansinya Pada PSA 3 Tingkat

1) Penduga Rata-Rata Populasi

Penduga rata-rata populasi pada PSA 3 tingkat dengan ukuran kelompok yang sama diduga merupakan rata-rata sampel pada tingkat ketiga. Maka penduga rata-rata populasinya adalah : $\overline{\overline{\overline{y}}} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} \overline{\overline{y}}_i}{n}$

2) Penduga Variansi Populasi

Teorema 3.2.1

Jika penarikan sampel acak sederhana digunakan pada ketiga tingkat, rata-rata sampel $\overline{\overline{\overline{y}}}$ adalah suatu penduga tidak bias dari $\overline{\overline{\overline{Y}}}$, dengan variansi

$$V(\overline{\overline{\overline{y}}}) = \frac{1-f_1}{n} S_1^2 + \frac{1-f_2}{nm} S_2^2 + \frac{1-f_3}{nmk} S_3^2 \text{ ....3.1.40}$$

Dimana $f_1 = n/N$, $f_2 = m/M$, dan $f_3 = k/K$ adalah fraksi penarikan sampel pada tingkat ketiga.

Bukti

Akan ditunjukkan terlebih dahulu bahwa $\overline{\overline{\overline{y}}}$ adalah penduga tak bias dari $\overline{\overline{\overline{Y}}}$.

Dengan penarikan sampel acak sederhana pada tahap kedua diperoleh,

$$E_3(\overline{\overline{y}}) = E_3\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} \overline{\overline{y}}_{ij}}{n}\right) = \frac{\sum_{i=1}^{n} E_3(\overline{\overline{y}}_{ij})}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \overline{\overline{Y}}_{ij}}{n} \text{ ....3.1.41}$$

$$E(\overline{\overline{\overline{y}}}) = E_1\left[E_2\left[E_3(\overline{\overline{\overline{y}}})\right]\right] = E_1\left[E_2\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \overline{\overline{Y}}_{ij}\right)\right] = E_1\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \overline{\overline{Y}}_i\right] = \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \overline{\overline{Y}}_i\right) = \overline{\overline{\overline{Y}}}$$

karena PSA dilakukan secara 3 tingkat maka nilai variansinya merupakan gabungan antara variansi pada penarikan tingkat pertama, variansi pada tingkat kedua dan variansi pada penarikan tingkat ketiga, dengan $S_3^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}\sum_{u=1}^{K}(y_{iju} - \overline{Y}_{ij})^2}{NM(K-1)}$ merupakan variansi diantara elemen dalam kelompok pada tingkat ketiga, $S_2^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}\left(\overline{Y}_{ij} - \overline{\overline{Y}}_i\right)^2}{N(M-1)}$ merupakan variansi di antara rata-rata kelompok tingkat kedua dan $S_1^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N}\left(\overline{\overline{Y}}_i - \overline{\overline{\overline{Y}}}\right)^2}{N-1}$ merupakan variansi antara kelompok tingkat pertama pada populasi. Dari (3.1.9) untuk V($\overline{\overline{y}}$) menggunakan rumus sebagai berikut :

$$V\left(\overline{\overline{\overline{y}}}\right) = V_1\left\{E_2\left[E_3\left(\overline{\overline{\overline{y}}}\right)\right]\right\} + E_1\left\{V_2\left[E_3\left(\overline{\overline{\overline{y}}}\right)\right]\right\} + E_1\left\{E_2\left[V_3\left(\overline{\overline{\overline{y}}}\right)\right]\right\} \quad \ldots\ldots\ldots 3.1.42$$

Adapun langkah-langkah pembuktiannya sebagai berikut :

1. **Akan dibuktikan pada penarikan sampel acak tingkat 1 bahwa**

$$V_1\left\{E_2\left[E_3\left(\overline{\overline{\overline{y}}}\right)\right]\right\} = \left(\frac{N-n}{N}\right)\frac{S_1^2}{n}$$

Bukti

Dari (3.1.41) diapat $E_3\left(\overline{\overline{\overline{y}}}\right) = \frac{\sum_{i=1}^{n}\overline{\overline{Y}}_i}{n}$. dan suku pertama pada ruas kanan (3.1.40) adalah variansi dari rata-rata antar kelompok tingkat pertama untuk sebuah sampel acak sederhana satu tingkat berukuran n. Maka, dengan teorema (2.11.2) berlaku

$$n\left(\overline{\overline{Y}}_i-\overline{\overline{\overline{Y}}}\right)=\left(\overline{\overline{Y}}_1-\overline{\overline{\overline{Y}}}\right)+\left(\overline{\overline{Y}}_2-\overline{\overline{\overline{Y}}}\right)+\ldots+\left(\overline{\overline{Y}}_n-\overline{\overline{\overline{Y}}}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; 3.1.43$$

dengan menggunakan alasan yang sama pada (2.11.3) berlaku

$$E_1\left[\left(\overline{\overline{Y}}_1-\overline{\overline{\overline{Y}}}\right)^2+\ldots+\left(\overline{\overline{Y}}_n-\overline{\overline{\overline{Y}}}\right)^2\right]=\frac{n}{N}\left[\left(\overline{\overline{Y}}_1-\overline{\overline{\overline{Y}}}\right)^2+\ldots+\left(\overline{\overline{Y}}_N-\overline{\overline{\overline{Y}}}\right)^2\right] \ldots \; 3.1.44$$

dan juga bahwa

$$E_1\left[\left(\overline{\overline{Y}}_1-\overline{\overline{\overline{Y}}}\right)\left(\overline{\overline{Y}}_2-\overline{\overline{\overline{Y}}}\right)+\left(\overline{\overline{Y}}_1-\overline{\overline{\overline{Y}}}\right)\left(\overline{\overline{Y}}_3-\overline{\overline{\overline{Y}}}\right)+\ldots+\left(\overline{\overline{Y}}_{n-1}-\overline{\overline{\overline{Y}}}\right)\left(\overline{\overline{Y}}_n-\overline{\overline{\overline{Y}}}\right)\right]$$

$$=\frac{n(n-1)}{N(N-1)}\left[\left(\overline{\overline{Y}}_1-\overline{\overline{\overline{Y}}}\right)\left(\overline{\overline{Y}}_2-\overline{\overline{\overline{Y}}}\right)+\ldots+\left(\overline{\overline{Y}}_{N-1}-\overline{\overline{\overline{Y}}}\right)\left(\overline{\overline{Y}}_N-\overline{\overline{\overline{Y}}}\right)\right] \quad \ldots\ldots\ldots \; 3.1.45$$

Sekarang kuadratkan (3.1.43) akan diperoleh

$$n^2\left(\overline{\overline{Y}}_i-\overline{\overline{\overline{Y}}}\right)^2=\left(\left(\overline{\overline{Y}}_1-\overline{\overline{\overline{Y}}}\right)+\left(\overline{\overline{Y}}_2-\overline{\overline{\overline{Y}}}\right)+\ldots+\left(\overline{\overline{Y}}_n-\overline{\overline{\overline{Y}}}\right)\right)^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; 3.1.46$$

Dari (3.1.46) rata-ratakan seluruh sampel acak sederhana pada tingkat 1. Kemudian dengan menggunakan rumus (3.1.44) dan (3.1.45) diperoleh

$$n^2E_1\left(\overline{\overline{Y}}_i-\overline{\overline{\overline{Y}}}\right)^2=E_1\left(\left(\overline{\overline{Y}}_1-\overline{\overline{\overline{Y}}}\right)+\left(\overline{\overline{Y}}_2-\overline{\overline{\overline{Y}}}\right)+\ldots+\left(\overline{\overline{Y}}_n-\overline{\overline{\overline{Y}}}\right)\right)^2$$

$$n^2E_1\left(\overline{\overline{Y}}_i-\overline{\overline{\overline{Y}}}\right)^2=$$

$$\frac{n}{N}\left[\begin{array}{l}\left(\left(\overline{\overline{Y}}_1-\overline{\overline{\overline{Y}}}\right)^2+\ldots+\left(\overline{\overline{Y}}_N-\overline{\overline{\overline{Y}}}\right)^2\right)+\\ \dfrac{(n-1)}{N-1}\left(\left(\left(\overline{\overline{Y}}_1-\overline{\overline{\overline{Y}}}\right)+\ldots+\left(\overline{\overline{Y}}_N-\overline{\overline{\overline{Y}}}\right)\right)^2-\left(\left(\overline{\overline{Y}}_1-\overline{\overline{\overline{Y}}}\right)^2+\ldots+\left(\overline{\overline{Y}}_N-\overline{\overline{\overline{Y}}}\right)^2\right)\right)\end{array}\right]$$

$$n^2 E_1\left(\overline{\overline{Y}}_i - \overline{\overline{\overline{Y}}}\right)^2 = \frac{n}{N}\left[\begin{array}{l}\left(1-\frac{n-1}{N-1}\right)\left(\left(\overline{\overline{Y}}_1 - \overline{\overline{\overline{Y}}}\right)^2 + \ldots + \left(\overline{\overline{Y}}_N - \overline{\overline{\overline{Y}}}\right)^2\right) \\ + \frac{(n-1)}{N-1}\left(\left(\left(\overline{\overline{Y}}_1 - \overline{\overline{\overline{Y}}}\right) + \ldots + \left(\overline{\overline{Y}}_N - \overline{\overline{\overline{Y}}}\right)\right)^2\right)\end{array}\right]$$

Suku kedua dalam tanda kurung akan hilang karena jumlah dari $\overline{\overline{Y}}_i$ sama dengan $N\overline{\overline{\overline{Y}}}$. Setelah dibagi n^2 menjadi

$$E_1\left(\overline{\overline{Y}}_i - \overline{\overline{\overline{Y}}}\right)^2 = \frac{n}{Nn}\left(\frac{N-n}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\left(\overline{\overline{Y}}_i - \overline{\overline{\overline{Y}}}\right)^2\right)$$

$$E_1\left(\overline{\overline{Y}}_i - \overline{\overline{\overline{Y}}}\right)^2 = \left(\frac{N-n}{N}\right)\frac{S_1^{\ 2}}{n}$$

Dari definisi variansi $V_1\left\{E_2\left[E_3\left(\overline{\overline{\overline{y}}}\right)\right]\right\}$ didapat

$$V_1\left\{E_2\left[E_3\left(\overline{\overline{\overline{y}}}\right)\right]\right\} = E_1\left\{E_2\left[E_3\left(\overline{\overline{\overline{y}}}\right)\right]\right\}^2 - \left\{E_1\left[E_2\left(E_3\left(\overline{\overline{\overline{y}}}\right)\right)\right]\right\}^2 = E_1\left[\overline{\overline{Y}}_i\right] - \overline{\overline{\overline{Y}}} = E_1\left(\overline{\overline{Y}}_i - \overline{\overline{\overline{Y}}}\right)^2$$

$$V_1\left\{E_2\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}\overline{\overline{Y}}_i}{n}\right)\right\} = V_1\left(\overline{\overline{Y}}_i\right) = E_1\left(\overline{\overline{Y}}_i - \overline{\overline{\overline{Y}}}\right)$$

Sehingga dapat $V_1\left\{E_2\left[E_3\left(\overline{\overline{\overline{y}}}\right)\right]\right\} = \frac{N-n}{N}\frac{S_1^2}{n}$ 3.1.47

3. Akan dibuktikan pada penarikan sampel tingkat 2 bahwa

$$E_1\left\{V_2\left[E_3\left(\overline{\overline{\overline{y}}}\right)\right]\right\} = \left(\frac{M-m}{M}\right)\frac{S_2^{\ 2}}{mn}$$

Bukti

Untuk pembuktian diatas, terlebih dahulu harus dibuktikan bahwa $V_2\left[E_3\left(\overline{\overline{y}}\right)\right]=\frac{(M-m)}{Mn^2}\frac{\sum_{i=1}^{n}S_{2i}^{\;2}}{m}$. Dengan $E_3\left(\overline{\overline{y}}\right)=\frac{\sum_{i=1}^{n}\overline{\overline{Y}}_i}{n}$ dan penarikan sampel acak sederhana digunakan pada tingkat kedua, oleh karena itu dengan teorema (2.11.2) berlaku

$$m\left(\overline{Y}_{ij}-\overline{\overline{Y}}_i\right)=\left(\overline{Y}_{i1}-\overline{\overline{Y}}_i\right)+\left(\overline{Y}_{i2}-\overline{\overline{Y}}_i\right)+\ldots+\left(\overline{Y}_{im}-\overline{\overline{Y}}_i\right) \qquad 3.1.48$$

dengan menggunakan alasan yang sama pada (2.11.3) berlaku

$$E_2\left[\left(\overline{Y}_{i1}-\overline{\overline{Y}}_i\right)^2+\ldots+\left(\overline{Y}_{im}-\overline{\overline{Y}}_i\right)^2\right]=\frac{m}{M}\left[\left(\overline{Y}_{i1}-\overline{\overline{Y}}_i\right)^2+\ldots+\left(\overline{Y}_{iM}-\overline{\overline{Y}}_i\right)^2\right] \qquad 3.1.49$$

dan juga bahwa

$$E_2\left[\left(\overline{Y}_{i1}-\overline{\overline{Y}}_i\right)\left(\overline{Y}_{i2}-\overline{\overline{Y}}_i\right)+\left(\overline{Y}_{i1}-\overline{\overline{Y}}_i\right)\left(\overline{Y}_{i3}-\overline{\overline{Y}}_i\right)+\ldots+\left(\overline{Y}_{i(m-1)}-\overline{\overline{Y}}_i\right)\left(\overline{Y}_{im}-\overline{\overline{Y}}_i\right)\right]$$

$$=\frac{m(m-1)}{M(M-1)}\left[\left(\overline{Y}_{i1}-\overline{\overline{Y}}_i\right)\left(\overline{Y}_{i2}-\overline{\overline{Y}}_i\right)+\ldots+\left(\overline{Y}_{i(M-1)}-\overline{\overline{Y}}_i\right)\left(\overline{Y}_{iM}-\overline{\overline{Y}}_i\right)\right] \qquad 3.1.50$$

Sekarang kuadratkan (3.1.48) akan diperoleh

$$m^2\left(\overline{Y}_{ij}-\overline{\overline{Y}}_i\right)^2=\left(\left(\overline{Y}_{i1}-\overline{\overline{Y}}_i\right)+\left(\overline{Y}_{i2}-\overline{\overline{Y}}_i\right)+\ldots+\left(\overline{Y}_{im}-\overline{\overline{Y}}_i\right)\right)^2$$

Dari (3.1.48) rata-ratakan seluruh sampel acak sederhana pada tingkat 2. Kemudian dengan menggunakan rumus (3.1.49) dan (3.1.50) diperoleh

$$m^2E_2\left(\overline{Y}_{ij}-\overline{\overline{Y}}_i\right)^2=E_2\left(\left(\overline{Y}_{i1}-\overline{\overline{Y}}_i\right)+\left(\overline{Y}_{i2}-\overline{\overline{Y}}_i\right)+\ldots+\left(\overline{Y}_{im}-\overline{\overline{Y}}_i\right)\right)^2$$

$$m^2 E_2\left(\overline{Y}_{ij}-\overline{\overline{Y}}_i\right)^2=$$

$$\frac{m}{M}\left[\begin{array}{l}\left(\left(\overline{Y}_{i1}-\overline{\overline{Y}}_i\right)^2+\ldots+\left(\overline{Y}_{iM}-\overline{\overline{Y}}_i\right)^2\right)+\\ \frac{(m-1)}{M-1}\left(\left(\left(\overline{Y}_{i1}-\overline{\overline{Y}}_i\right)+\ldots+\left(\overline{Y}_{iM}-\overline{\overline{Y}}_i\right)\right)^2-\left(\left(\overline{Y}_{i1}-\overline{\overline{Y}}_i\right)^2+\ldots+\left(\overline{Y}_{iM}-\overline{\overline{Y}}_i\right)^2\right)\right)\end{array}\right]$$

$$m^2 E_2\left(\overline{Y}_{ij}-\overline{\overline{Y}}_i\right)^2=$$

$$\frac{m}{M}\left[\left(1-\frac{m-1}{M-1}\right)\left(\left(\overline{Y}_{i1}-\overline{\overline{Y}}_i\right)^2+\ldots+\left(\overline{Y}_{iM}-\overline{\overline{Y}}_i\right)^2\right)+\frac{(m-1)}{M-1}\left(\left(\left(\overline{Y}_{i1}-\overline{\overline{Y}}_i\right)+\ldots+\left(\overline{Y}_{iM}-\overline{\overline{Y}}_i\right)\right)^2\right)\right]$$

Suku kedua dalam tanda kurung akan hilang karena jumlah dari $\overline{Y}_{ij}$ sama dengan $M\overline{\overline{Y}}_i$. Setelah dibagi m^2 menjadi

$$E_2\left(\overline{Y}_{ij}-\overline{\overline{Y}}_i\right)^2=\frac{1}{Mm}\left(\frac{M-m}{M-1}\sum_{j=11}^{M}\left(\overline{Y}_{ij}-\overline{\overline{Y}}_i\right)^2\right)$$

$$E_2\left(\overline{Y}_{ij}-\overline{\overline{Y}}_i\right)^2=\frac{M-m}{Mm}S_{2i}^2$$

Menurut sifat dari variansi bahwa

$$V_2\left[E_3\left(\overline{\overline{y}}\right)\right]=V_2\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}\overline{\overline{Y}}_i}{n}\right)=E_2\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}\overline{\overline{Y}}_i}{n}-E_2\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}\overline{\overline{Y}}_i}{n}\right)\right)^2=E_2\left(\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\overline{\overline{Y}}_i-E_2\left(\sum_{i=1}^{n}\overline{\overline{Y}}_i\right)\right)\right)^2$$

$$=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}E_2\left(\overline{\overline{Y}}_i-E_2\left(\overline{\overline{Y}}_i\right)\right)^2=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}E_2\left(\overline{Y}_{ij}-\overline{\overline{Y}}_i\right)^2$$

$$V_2\left[E_3\left(\overline{\overline{y}}\right)\right]=V_2\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}\overline{\overline{Y}}_i}{n}\right)=\frac{1}{n^2}V_2\left(\sum_{i=1}^{n}\overline{\overline{Y}}_i\right)=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}V_2\left(\overline{\overline{Y}}_i\right)=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}E_2\left(\overline{Y}_{ij}-\overline{\overline{Y}}_i\right)$$

sehingga didapat $V_2\left[E_3\left(\overline{\overline{\overline{y}}}\right)\right] = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} E_2\left(\overline{Y}_{ij} - \overline{\overline{Y}}_i\right)^2$

$$V_2\left[E_3\left(\overline{\overline{\overline{y}}}\right)\right] = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{M-m}{Mm}\right)S_{2i}^2 = \frac{M-m}{Mmn^2}\sum_{i=1}^{n} S_{2i}^2$$

dimana $S_{2i}^2 = \frac{\sum_{j}^{M}\left(\overline{Y}_{ij} - \overline{\overline{Y}}_i\right)^2}{(M-1)}$ merupakan variansi antara kelompok pada tingkat kedua. Rata-ratakan seluruh sampel pada tahap pertama, $\frac{\sum_{i=1}^{n} {S_{2i}}^2}{N} = {S_2}^2$

oleh karena itu,

$$E_1\left\{V_2\left[E_3\left(\overline{\overline{\overline{y}}}\right)\right]\right\} = \left(\frac{M-m}{M}\right)\frac{{S_2}^2}{mn} \quad \text{.. 3.1.51}$$

4. Akan dibuktikan pada penarikan sampel tingkat 3 bahwa

$$E_1\left\{E_2\left[V_3\left(\overline{\overline{\overline{y}}}\right)\right]\right\} = \left(\frac{K-k}{K}\right)\frac{{S_3}^2}{nmk}$$

Bukti

Untuk pembuktian diatas, terlebih dahulu harus dibuktikan bahwa $V_2\left(\overline{\overline{\overline{y}}}\right) = \frac{(K-k)}{Kn^2}\frac{\sum_{i=1}^{n} {S_{3i}}^2}{k}$. Dengan $\overline{\overline{\overline{y}}} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\overline{\overline{y}}_i}{n}$ dan penarikan sampel acak sederhana digunakan pada tingkat ketiga, oleh karena itu dengan teorema (2.11.2) berlaku

$$k\left(y_{iju} - \overline{Y}_{ij}\right) = \left(y_{ij_1} - \overline{Y}_{ij}\right) + \left(y_{ij_2} - \overline{Y}_{ij}\right) + \ldots + \left(y_{ijk} - \overline{Y}_{ij}\right) \quad \text{.................. 3.1.52}$$

dengan menggunakan alasan yang sama pada (2.11.3) berlaku

$$E_3\left[(y_{ij1}-\overline{Y}_{ij})^2+\ldots+(y_{ijk}-\overline{Y}_{ij})^2\right]=\frac{k}{K}\left[(y_{ij1}-\overline{Y}_{ij})^2+\ldots+(y_{ijK}-\overline{Y}_{ij})^2\right] \quad 3.1.53$$

dan juga bahwa

$$E_3\left[(y_{ij1}-\overline{Y}_{ij})(y_{ij2}-\overline{Y}_{ij})+(y_{ij1}-\overline{Y}_{ij})(y_{ij3}-\overline{Y}_{ij})+\ldots+(y_{ij(k-1)}-\overline{Y}_{ij})(y_{ijk}-\overline{Y}_{ij})\right]$$

$$=\frac{k(k-1)}{K(K-1)}\left[(y_{ij1}-\overline{Y}_{ij})(y_{ij2}-\overline{Y}_{ij})+\ldots+(y_{ij(K-1)1}-\overline{Y}_{ij})(y_{K}-\overline{Y}_{ij})\right]\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 3.1.54$$

Sekarang kuadratkan (3.1.52) akan diperoleh

$$k^2(y_{iju}-\overline{Y}_{ij})^2=\left((y_{ij_1}-\overline{Y}_{ij})+(y_{ij_2}-\overline{Y}_{ij})+\ldots+(y_{ijk}-\overline{Y}_{ij})\right)^2$$

Dari (3.1.52) rata-ratakan seluruh sampel acak sederhana pada tingkat 3. Kemudian dengan menggunakan rumus (3.1.53) dan (3.1.54) diperoleh

$$k^2E_3(y_{iju}-\overline{Y}_{ij})^2=E_2\left((y_{ij_1}-\overline{Y}_{ij})+(y_{ij_2}-\overline{Y}_{ij})+\ldots+(y_{ijk}-\overline{Y}_{ij})\right)^2$$

$$k^2E_3(y_{iju}-\overline{Y}_{ij})^2=$$

$$\frac{k}{K}\left[\begin{array}{l}\left((y_{ij_1}-\overline{Y}_{ij})^2+\ldots+(y_{ijM}-\overline{Y}_{ij})^2\right)+\\ \frac{(m-1)}{M-1}\left(\left((y_{ij_1}-\overline{Y}_{ij})+\ldots+(y_{ijK}-\overline{Y}_{ij})\right)^2-\left((y_{ij_1}-\overline{Y}_{ij})^2+\ldots+(y_{ijK}-\overline{Y}_{ij})^2\right)\right)\end{array}\right]$$

$$k^2E_3(y_{iju}-\overline{Y}_{ij})^2=$$

$$\frac{k}{K}\left[\left(1-\frac{m-1}{M-1}\right)\left((y_{ij_1}-\overline{Y}_{ij})^2+\ldots+(y_{ijK}-\overline{Y}_{ij})^2\right)+\frac{(k-1)}{K-1}\left(\left((y_{ij_1}-\overline{Y}_{ij})+\ldots+(y_{ijK}-\overline{Y}_{ij})\right)^2\right)\right]$$

Suku kedua dalam tanda kurung akan hilang karena jumlah dari $y_{i\,ju}$ sama dengan $K\overline{Y}_{ij}$. Setelah dibagi k^2 menjadi

$$E_3(y_{iju}-\overline{Y}_{ij})^2=\frac{1}{Kk}\left(\frac{K-k}{K-1}\sum_{u=11}^{K}(y_{iju}-\overline{Y}_{ij})^2\right)$$

$$E_3\left(y_{iju} - \overline{Y}_{ij}\right)^2 = \frac{K-k}{Kk} S_{3i}^2$$

Menurut sifat dari variansi bahwa

$$V_3\left(\overline{\overline{y}}\right) = V_3\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} \overline{\overline{y}}_i}{n}\right) = E_3\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} \overline{\overline{y}}_i}{n} - E_3\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} \overline{\overline{y}}_i}{n}\right)\right)^2 = E_3\left(\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} \overline{\overline{y}}_i - E_3\left(\sum_{i=1}^{n} \overline{\overline{y}}_i\right)\right)\right)^2$$

$$= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} E_3\left(\overline{\overline{y}}_i - E_3\left(\overline{\overline{y}}_i\right)\right)^2 = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} E_3\left(y_{iju} - \overline{Y}_{ij}\right)^2$$

sehingga didapat $V_3\left(\overline{\overline{y}}\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} E_3\left(y_{iju} - \overline{Y}_{ij}\right)^2$

$$V_3\left(\overline{\overline{y}}\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{K-k}{Kk}\right) S_{3i}^2$$

$$V_3\left(\overline{\overline{y}}\right) = \frac{K-k}{Kkn^2}\sum_{i=1}^{n} S_{3i}^2$$

dimana $S_{3i}^2 = \dfrac{\sum_{u=1}^{K}\left(y_{iju} - \overline{Y}_{ij}\right)^2}{(K-1)}$ merupakan variansi diantara elemen dalam kelompok pada tingkat ketiga. Rata-ratakan seluruh sampel pada tahap pertama, $\dfrac{\sum_{i=1}^{n} S_{3i}{}^2}{N} = S_3{}^2$. Rata-ratakan seluruh sampel pada tingkat kedua oleh karena itu,

$$E_1\left\{E_2\left[V_3\left(\overline{\overline{y}}\right)\right]\right\} = \left(\frac{K-k}{K}\right)\frac{S_3{}^2}{nmk} \quad \text{3.1.55}$$

Dengan menjumlahkan (3.1.47), (3.1.51), dan (3.1.55) akan diperoleh

$$V\left(\overline{\overline{y}}\right) = \left(\frac{N-n}{N}\right)\frac{S_1{}^2}{n} + \left(\frac{M-m}{M}\right)\frac{S_2^2}{mn} + \left(\frac{K-k}{K}\right)\frac{S_3^2}{nmk}$$

Jika $f_1 = \frac{n}{N}$, $f_2 = \frac{m}{M}$ dan $f_3 = \frac{k}{K}$ merupakan fraksi penarikan sampel pada tingkat pertama, kedua dan ketiga, maka bentuk lain dari $V(\bar{\bar{y}})$ adalah :

$$V(\bar{\bar{\bar{y}}}) = \frac{1-f_1}{n} S_1^2 + \frac{1-f_2}{nm} S_2^2 + \frac{1-f_3}{nmk} S_3^2$$

Teorema 3.2.2

Penduga tidak bias $V(\bar{\bar{\bar{y}}})$ adalah

$$v(\bar{\bar{\bar{y}}}) = \frac{1-f_1}{n} s_1^2 + \frac{f_1(1-f_2)}{nm} s_2^2 + \frac{f_1 f_2 (1-f_3)}{nmk} s_3^2 \quad \text{.........................} \quad 3.1.56$$

dimana s_1^2, s_2^2, s_3^2 adalah penduga variansi sampel dari S_1^2, S_2^2, S_3^2

Bukti

1. Akan dibuktikan bahwa

$$E(s_1)^2 = S_1^2 + \frac{1-f_2}{m} S_2^2 + \frac{1-f_3}{mk} S_3^2$$

Bukti

Diketahui bahwa $$s_1{}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (\bar{\bar{y}}_i - \bar{\bar{\bar{y}}})^2}{n-1} \quad \text{...} 3.1.57$$

Berdasarkan rumus variansi sampel, diperoleh :

$$(n-1)s_1{}^2 = \sum_{i=1}^{n} (\bar{\bar{y}}_i - \bar{\bar{\bar{y}}})^2 = \sum_{i=1}^{n} \bar{\bar{y}}_i - n\bar{\bar{\bar{y}}}^2 \quad \text{...} 3.1.58$$

Rata-ratakan (3.1.58) pada penarikan sampel acak sederhana.

$$(n-1)E(s_1^2) = E\left(\sum_{i=1}^{n} \bar{\bar{y}}_i^2 - n\bar{\bar{\bar{y}}}^2 \right) \quad \text{...} 3.1.59$$

$$(n-1)E\left(s_1^2\right)=E\left(\sum_{i=1}^{n}\overline{y}_i^2\right)-nE\left(\overline{\overline{y}}^2\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 3.1.60$$

Dari (3.1. 60) didapat

$$E\left(\sum_{i=1}^{n}\overline{y}_i^2\right)=E\left\{\sum_{i=1}^{n}E\left(\overline{y}_i^2 \middle| i\right)\right\}=E\left\{\sum_{i=1}^{n}\left\{\overline{Y}_i^2+\left(\frac{1-f_2}{m}\right)S_{2i}^2+\left(\frac{1-f_3}{mk}\right)\frac{1}{M}\sum_{j=1}^{M}S_{3j}^2\right\}\right\}$$

$$=\frac{n}{N}\sum_{i=1}^{N}\overline{Y}_i^2+n\left(\frac{1-f_2}{m}\right)S_2^2+n\left(\frac{1-f_3}{mk}\right)S_3^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 3.1.61$$

Menurut definisi variansi

$$V\left(\overline{\overline{y}}\right)=E\left(\overline{\overline{y}}\right)^2-\left[E\left(\overline{\overline{y}}\right)\right]^2$$

$$E\left(\overline{\overline{y}}\right)^2=V\left(\overline{\overline{y}}\right)+\left[E\left(\overline{\overline{y}}\right)\right]^2=\frac{(1-f_1)}{n}S_1^2+\frac{(1-f_2)}{nm}S_2^2+\frac{(1-f_3)}{nmk}S_3^2+\overline{\overline{Y}}^2$$

$$nE\left(\overline{\overline{y}}^2\right)=(1-f_1)S_1^2+\frac{(1-f_2)}{m}S_2^2+\frac{(1-f_3)}{mk}S_3^2+n\overline{\overline{Y}}^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 3.1.62$$

Sehingga diperoleh

$$(n-1)E\left(s_1^2\right)=\frac{n}{N}\sum_{i=1}^{N}\overline{Y}_i^2+n\left(\frac{1-f_2}{m}\right)S_2^2+n\left(\frac{1-f_3}{mk}\right)S_3^2-$$

$$\left((1-f_1)S_1^2+\frac{(1-f_2)}{m}S_2^2+\frac{(1-f_3)}{mk}S_3^2+n\overline{\overline{Y}}^2\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 3.1.63$$

$$(n-1)E\left(s_1^2\right)=\frac{n}{N}\left(\sum_{i=1}^{N}\overline{Y}_i^2-N\overline{\overline{Y}}^2\right)+(n-1)\frac{(1-f_2)}{m}S_2^2$$

$$+(n-1)\frac{(1-f_3)}{mk}S_3^2-(1-f_1)S_1^2$$

$$(n-1)E(s_1^2)=\frac{n(N-1)}{N}\left(\frac{\sum_{i=1}^{N}\overline{\overline{Y}}_i^2-N\overline{\overline{\overline{Y}}}^2}{(N-1)}\right)+(n-1)\frac{(1-f_2)}{m}S_2^2$$

$$+(n-1)\frac{(1-f_3)}{mk}S_3^2-(1-f_1)S_1^2$$

$$(n-1)E(s_1^2)=\frac{n(N-1)}{N}S_1^2+(n-1)\frac{(1-f_2)}{m}S_2^2+(n-1)\frac{(1-f_3)}{mk}S_3^2-(1-f_1)S_1^2$$

$$(n-1)E(s_1^2)=S_1^2\left(\frac{n(N-1)-(N-n)}{N}\right)+(n-1)\frac{(1-f_2)}{m}S_2^2+(n-1)\frac{(1-f_3)}{mk}S_3^2$$

$$(n-1)E(s_1^2)=S_1^2(n-1)+(n-1)\frac{(1-f_2)}{m}S_2^2+(n-1)\frac{(1-f_3)}{mk}S_3^2 \quad ....3.1.64$$

Dari (3.1.64) kedua ruas dikalikan dengan $\frac{1}{(n-1)}$ didapat

$$E(s_1^2)=S_1^2+\frac{(1-f_2)}{m}S_2^2+\frac{(1-f_3)}{mk}S_3^2 \quad ....3.1.65$$

2. Akan dibuktikan bahwa

$$E(s_2^2)=S_2^2+\frac{1-f_3}{k}S_3^2$$

Bukti

$E(s_2^2)=E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}S_{2i}^2\right)$, akan dibuktikan telebih dahulu bahwa

$$E(s_{2i}^2)=S_{2i}^2+\frac{(1-f_3)}{k}\frac{\sum_{j=1}^{M}S_{3j}^2}{M}$$

Diketahui bahwa $s_{2i}^2=\dfrac{\sum_{j=1}^{m}(\overline{y}_{ij}-\overline{\overline{y}}_i)^2}{m-1}$ 3.1.66

Berdasarkan rumus variansi sampel, diperoleh :

$$(m-1)s_{2i}^2 = \sum_{j=1}^{m}(\bar{y}_{ij} - \bar{\bar{y}}_i)^2 = \sum_{j=1}^{m}\bar{y}_{ij}^2 - m\bar{\bar{y}}_i^{\,2} \quad \text{.......................................}3.1.67$$

Rata-ratakan (3.1.67) pada penarikan sampel acak sederhana.

$$(m-1)E(s_{2i}^2) = E\left(\sum_{j=1}^{m}\bar{y}_{ij}^2\right) - mE(\bar{\bar{y}}_i^2) \quad \text{..................................... } 3.1.69$$

Dari (3.1. 69) didapat

$$E\left(\sum_{j=1}^{m}\bar{y}_{ij}^2\right) = E\left\{\sum_{j=1}^{m}E(\bar{y}_{ij}^2|j)\right\} = E\left\{\sum_{i=1}^{n}\left\{\bar{Y}_{ij}^2 + \left(\frac{1-f_3}{k}\right)\frac{1}{M}\sum_{j=1}^{M}S_{3j}^2\right\}\right\}$$

$$= \frac{m}{M}\sum_{j=1}^{M}\bar{Y}_{ij}^2 + m\left(\frac{1-f_3}{k}\right)\frac{1}{M}\sum_{j=1}^{M}S_{3j}^2 \quad \text{................................... } 3.1.70$$

$$mE(\bar{\bar{y}}_i^2) = (1-f_2)S_{2i}^2 + \frac{(1-f_3)}{k}\frac{1}{M}\sum_{j=1}^{M}S_3^2 + m\bar{\bar{Y}}_i^{\,2} \quad \text{...................................}3.1.71$$

Sehingga diperoleh

$$(m-1)E(s_{2i}^2) = \frac{m}{M}\sum_{j=1}^{M}\bar{Y}_{ij}^2 + m\left(\frac{1-f_3}{k}\right)\frac{1}{M}\sum_{j=1}^{M}S_{3j}^2 -$$

$$(1-f_2)S_{2i}^2 + \frac{(1-f_3)}{k}\frac{1}{M}\sum_{j=1}^{M}S_3^2 + m\bar{\bar{Y}}_i^{\,2} \quad \text{.......................... } 3.1.72$$

$$(m-1)E(s_{2i}^2) = \frac{m}{M}\left(\sum_{j=1}^{M}\bar{Y}_{ij}^2 - M\bar{\bar{Y}}_i^2\right) - (1-f_2)S_{2i}^2 + (m-1)\frac{(1-f_3)}{k}\frac{1}{M}\sum_{j=1}^{M}S_{3j}^2$$

$$(m-1)E(s_{2i}^2) = \frac{m(M-1)}{M}\left(\frac{\sum_{j=1}^{M}\bar{Y}_{ij}^2 - M\bar{\bar{Y}}_i^2}{(M-1)}\right) - (1-f_2)S_{2i}^2$$

$$+ (m-1)\frac{(1-f_3)}{k}\frac{1}{M}\sum_{j=i}^{M}S_{3j}^2$$

$$(m-1)E\left(s_{2i}^2\right)=\frac{m(M-1)}{M}S_{2i}^2-(1-f_2)S_{2i}^2+(m-1)\frac{(1-f_3)}{k}\frac{1}{M}\sum_{j=i}^{M}S_{3j}^2$$

$$(m-1)E\left(s_{2i}^2\right)=S_{2i}^2\left(\frac{m(M-1)-(M-m)}{M}\right)+(m-1)\frac{(1-f_3)}{k}\frac{1}{M}\sum_{j=1}^{M}S_{3j}^2$$

$$(m-1)E\left(s_{2i}^2\right)=S_{2i}^2(m-1)+(m-1)\frac{(1-f_3)}{k}\frac{1}{M}\sum_{j=1}^{M}S_{3j}^2 \quad \text{.............................3.1.73}$$

Dari (3.1.73) kedua ruas dikalikan dengan $\dfrac{1}{(m-1)}$ didapat

$$E\left(s_{2i}^2\right)=S_{2i}^2+\frac{(1-f_3)}{k}\frac{1}{M}\sum_{j=1}^{M}S_{3j}^2 \quad \text{...3.1.74}$$

$$E\left(s_2^2\right)=E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}S_{2i}^2\right)=S_2^2+\frac{(1-f_3)}{k}S_3^2 \quad \text{..3.1.75}$$

3. Akan ditunjukkan bahwa

$$E\left(s_3^2\right)=S_3^2$$

Akan dibuktikan pada penarikan sampel acak pada tingkat 3.

$$s_3^2=\frac{\sum_{u=1}^{k}\left(y_{iju}-\bar{y}_{ij}\right)^2}{k-1}$$

$$(k-1)s^2=\sum_{u=1}^{k}\left(y_{iju}-\bar{y}_{ij}\right)^2 \quad (k-1)s^2=\sum_{u=1}^{k}y_{iju}^2-k\bar{y}_{ij}^{\,2} \quad \text{..............................3.1.76}$$

Menurut definisi variansi

$$V_3\left(\bar{\bar{\bar{y}}}\right)=E_3\left(\bar{\bar{\bar{y}}}^2\right)-\left[E_3\left(\bar{\bar{\bar{y}}}\right)\right]^2$$

$$E_3\left(\bar{\bar{\bar{y}}}^2\right)=V_3\left(\bar{\bar{\bar{y}}}\right)+\left[E_3\left(\bar{\bar{\bar{y}}}\right)\right]^2$$

$$E_3\left(\bar{\bar{\bar{y}}}^2\right)=V_3\left(\bar{\bar{\bar{y}}}\right)+\bar{Y}_{ij}^{\,2}$$

$$E_3\left(\overline{\overline{y}}^2\right)=\left(1-f_3\right)\frac{S_3^2}{n}+\overline{Y}_{ij}^{\,2}$$

Dengan alasan yang sama pada (2.11.3) maka berlaku

$$E_3\left(\sum_{u=1}^{k} y_{iju}\right)=\frac{k}{K}\sum_{u=1}^{K} y_{iju}$$

Pada (3.1.76) rata-ratakan seluruh penarikan sampel acak sederhana sehingga didapat

$$(k-1)E_3\left(s_3^2\right)=E_3\left(\sum_{u=1}^{k} y_{iju}\right)-kE_3\left(\overline{y}_{ij}^{\,2}\right)$$

$$(k-1)E_3\left(s_3^2\right)=\frac{k}{K}\sum_{u=1}^{K} y_{iju}-k\left(\left(1-f_3\right)\frac{S_3^2}{n}+\overline{Y}_{ij}^{\,2}\right)$$

$$(k-1)E_3\left(s_3^2\right)=\frac{k}{K}\left(\sum_{u=1}^{K} y_{iju}-k\overline{Y}_{ij}^{\,2}\right)-\left(1-f_3\right)S_3^2$$

$$(k-1)E_3\left(s_3^2\right)=\frac{k}{K}(K-1)S_3^2-\left(1-\frac{k}{K}\right)S_3^2$$

$(k-1)E_3\left(s_3^2\right)=(k-1)S_3^2$, setelah kedua ruas dibagi $(k-1)$ menjadi

$$E_3\left(s_3^2\right)=S_3^2$$

Dengan merata-ratakan penarikan sampel acak pada tingkat 1 dan tingkat 2 maka diperoleh

$$E_1\left\{E_2\left[E_3\left(s_3^2\right)\right]\right\}=S_3^2 \text{ ....3.1.77}$$

Dari (3.1.65), (3.1.75) dan (3.1.77), maka penduga tidak bias dari $V\left(\overline{\overline{y}}\right)$ di dapat

$$E\left(v\left(\bar{\bar{\bar{y}}}\right)\right)=E\left(\frac{1-f_1}{n}s_1{}^2+\frac{f_1(1-f_2)}{mn}s_2^2+\frac{f_1f_2(1-f_3)}{nmk}s_3^2\right)$$

$$E\left(v\left(\bar{\bar{\bar{y}}}\right)\right)=\frac{1-f_1}{n}E\left(s_1{}^2\right)+\frac{f_1(1-f_2)}{mn}E\left(s_2^2\right)+\frac{f_1f_2(1-f_3)}{nmk}E\left(s_3^2\right)$$

$$E\left(v\left(\bar{\bar{\bar{y}}}\right)\right)=\frac{1-f_1}{n}\left(S_1^2+\frac{(1-f_2)}{m}S_2^2+\frac{(1-f_3)}{mk}S_3^2\right)+\frac{f_1(1-f_2)}{mn}S_2^2\left(S_1^2+\frac{(1-f_2)}{m}S_2^2\right)$$

$$\frac{f_1f_2(1-f_3)}{nmk}\left(S_3^2\right)$$

$$E\left(v\left(\bar{\bar{\bar{y}}}\right)\right)=\frac{1-f_1}{n}S_1^2+\frac{(1-f_2)}{nm}S_2^2+\frac{(1-f_3)}{nmk}S_3^2$$

$$E\left(v\left(\bar{\bar{\bar{y}}}\right)\right)=V\left(\bar{\bar{\bar{y}}}\right)$$

Bab IV

Penerapan Penarikan Sampel Acak Bertingkat pada Metode *Quick Count*

Dalam bab IV ini akan dibahas pengertian mengenai metode *quick count* dan cara penarikan sampelnya dengan menggunakan penarikan sampel acak bertingkat.

A. Metode *Quick Count* (QC)

Quick count atau perhitungan cepat merupakan metode menghitung hasil pemilu dengan menggunakan sampel (Shobirin, 2004). Artinya perhitungan dilakukan terhadap hasil perhitungan dari sejumlah tempat pemungutan suara (TPS) terpilih yang direkam oleh ribuan relawan yang diterjunkan langsung ke lokasi pemilihan. Penentuan TPS sampel ditentukan secara acak. Shobirin juga menyatakan bahwa :

> Secara umum quick count ini dilakukan dengan tujuan untuk mengontrol dan mendorong dihasilkan pemilu yang jujur dan adil. Hasil perhitungan quick count menjadi pedoman, pegangan atau acuan masyarakat untuk mengontrol perhitungan yang dilakukan oleh Komisi pemilihan Umum (KPU). Untuk itu quick count dapat dipakai untuk memprediksi hasil pemilu secara cepat. Prediksi hasil ini diperlukan karena setelah masyarakat menggunakan hak pilihnya akan dengan sendirinya ingin memperoleh gembaran mengenai hasil secepat mungkin, siapa yang akan memenangkan pemilu tersebut.

Quick count sepenuhnya menggunakan prinsip-prinsip statistik. Oleh karena itu metode ini mengandalkan sampling, dengan standar deviasi tertentu, pada tingkat kepercayaan tertentu, misalnya 95% yang banyak digunakan untuk menggambarkan kenyataan yang sebenarnya. Hampir tidak ada perbedaan yang signifikan antara angka *quick count* dan angka resmi KPU. Untuk itulah *quick count* tidak digolongkan sebagai kelompok kegiatan peramalan, tetapi lebih dikategorikan sebagai kegiatan pemantauan pemilu. Estimasi *quick count* akan akurat apabila mengacu pada metodologi statistik dan penarikan sampel yang ketat, sampel yang ditarik secara benar akan memberikan landasan kuat untuk mewakili karakteristik populasi. Salah satu cara penarikan sampel yaitu dengan penarikan sampel acak bertingkat.

Pada Pemilu 2004 banyak pihak-pihak luar ikut berpartisipasi dalam penghitungan suara. Pihak-pihak tersebut adalah selain dari para calon, juga dari media massa, lembaga-lembaga independen, dan juga dari lembaga-lembaga dari luar negeri, misalnya dari Metro TV, LP3ES, NDI, Forum ITB 73 (Fortuga) dan astaga.com (dengan Pusat Tabulasi Nasioanl).

B. Penerapan PSA Bertingkat pada Metode Quick Count

Beberapa contoh lembaga survei yang menggunakan metode penarikan sampel acak bertingkat antara lain :

Contoh 4.2.1 Lembaga survei Indonesia mengadakan survei untuk mengetahui calon Presiden RI yang paling populer mengalahkan capres dari partai-partai besar seperti PDIP dan partai Golkar. Survei LSI menunjukkan, SBY secara konsisten mengalahkan Presiden Megawati Soekarnoputri. Data lapangan survey ini dikumpulkan dari tanggal 18-24 Maret 2004 dengan sampel yang diambil secara Nasional, termasuk Papua dan Aceh, dengan total responden sebanyak 2769 orang yang dipilih melalui metode *multistage random sampling*.

Contoh 4.2.2 Lembaga survei *Frontier Marketing & Research Consultant* mengadakan survei tentang pemilih pemula dalam pemilu 2004. Hasil survei di lima kota besar menunjukan pemilih pemula cenderung memilih partai-partai lama, konotasi partai lama menurut survei adalah partai yang meraih kursi di parlemen dan memiliki nama yang cukup akrab ditelinga. Survei menggunakan metodologi *multistage random sampling* yang dilaksanakan dari rumah ke rumah pada akhir 2002 sampai awal 2003. Pilihan responden secara acak, dengan komposisi jenis kelamin laki dan perempuan berimbang (50: 50) disetiap kota. Sedang usia responden dibagi dalam empat kelompok, yaitu usia 16-17 tahun (22%), 18-19 (26,1%), 20-21 tahun (24,3%), dan 22-24 tahun (26,8%).

Contoh 4.2.3 Hasil jajak pendapat Soegeng Sarjadi Syndicated (SSS) menyebutkan pasangan Mega-Hamzah kalah dari pasangan SBY-Kalla. Hasil poling yang digelar pada 14-26 Agustus di 17 propinsi (21 kota dan 19 kabupaten). Jajak pendapat tersebut menggunakan *multistage random sampling* dengan mengambil sampel secara acak dari 32 propinsi dan 440 kabupaten.

Dalam tulisan ini akan dilakukan simulasi penelitian yang dilakukan oleh Lembaga Penelitian, Pendidikan, Penerangan Ekonomi dan Sosial (LP3ES) dengan perhitungan *quick count* menggunakan metode penarikan sampel acak bertingkat. LP3ES menghasilkan *quick count* untuk pemilu presiden putaran kedua dengan melakukan pemantauan di 2000 TPS terpilih secara acak dari 564.000 TPS yang tesebar di 32 propinsi Indonesia. Diperoleh hasil akhir *quick count* pemilu LP3ES sebanyak 39,8% suara untuk pasangan Mega-Hasyim dan 60,2% suara untuk pasangan SBY-Kalla. Perbedaan hasil *quick count* LP3ES dengan perhitungan resmi Komisi Pemilhan Umum (KPU) berkisar 1,1%.

Dasar yang digunakan PL3ES dalam menggunakan metode penarikan sampel acak bertingkat untuk melakukan *quick count* adalah pertimbangan kondisi wilayah geografi, cepat, praktis dan relatife murah dibandingkan dengan perhitungan dari KPU. Unit penarikan sampel untuk QC adalah TPS (tempat pemungutan suara) yang dikelompokan menjadi 32 propinsi di Indonesia. Berikut ini akan diberikan simulasi *quick count* dengan metode penarikan sampel acak 2 tingkat.

Simulasi *Quick Count*

Akan diberikan simulasi untuk menunjukkan proses *Quick Count* pada pemilu presiden putaran kedua dengan menggunakan metode penarikan sampel acak bertingkat. Simulasi ini mempunyai kesamaan dengan LP3ES hanya pada proses pengambilan sampel secara acak bertingkat, lebih dikhususkan simulasi yang diberikan menggunakan metode penarikan sampel acak 2 tingkat. Data dikonstruksikan dengan mengandaikan ukuran populasi sebesar 10.000 TPS yang tersebar menjadi 32 kelompok propinsi, dengan jumlah TPS tiap kelompok berbeda. Keseluruhan populasi tersebut terbagi atas perolehan suara pasangan Mega-Hasyim sebanyak 39,8% dan pasangan SBY-Kalla sebesar 60,2% sesuai hasil akhir *quick count* pemilu dari LP3ES. Kode 1 diberikan untuk kemenangan SBY-KALLA di satu TPS dan kode 0 diberikan untuk kemenangan MEGA-

HASYIM di satu TPS (Data selengkapnya tidak dicetak, tetapi ringkasan data dapat dilihat pada lampiran). Tujuan dari simulasi ini adalah menghitung cepat hasil perolehan suara pemilu berdasarkan sampel yang diambil secara berturutan dari hari pertama sampai hari ketiga. Pada hari pertama di duga proporsi perolehan suara berdasarkan teori pendugaan proporsi pada bab III, dengan persamaan $\bar{p} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i}{n}$ di mana $\bar{p}$ adalah proporsi sampel sebagai penduga proporsi populasi. Hari berikutnya, hasil perolehan sampel hari pertama dan hari kedua ditambahkan dan kembali diduga proporsi perolehan suaranya. Perolehan suara hari ketiga merupakan penjumlahan keseluruhan perolehan sampel dari hari pertama, hari kedua dan hari ketiga selanjutnya penduga proporsi yang diperoleh merupakan penduga final dari proses simulasi *quick count*.

Pengambilan sampel acak dilakukan secara 2 tingkat. Tingkat pertama memilih kelompok propinsi kemudian tingkat kedua memilih TPS dari setiap kelompok propinsi yang terpilih. Untuk memperoleh sampel acak bertingkat digunakan software SPPS versi 12 dengan langkah-langkah penarikan sampel acak sebagai berikut:

- Tingkat pertama

  Dari 32 kelompok propinsi diambil 8 kelompok propinsi secara acak. Diambil 3 kelompok hari pertama, 3 kelompok hari kedua dan 2 kelompok hari ketiga.

Buka file yang akan ditarik sampel secara acak, kemudian pilih Data → *Select Cases* → *Random Sample of Cases* → *Sample Size* → Pengisian.

- Tingkat Kedua

Dari setiap kelompok propinsi terpilih diambil kurang lebih 25% TPS secara acak, sehingga akan memperoleh sampel yang akan digunakan untuk menduga proporsi populasi.

Setelah diperoleh sampel, pendugaan proporsi dengan SPSS melalui langkah-langkah *Analyze* →*Descriptive Statistics* → *Frequencies.*

Simulasi akan dilakukan sebanyak sepuluh kali untuk melihat konsistensi hasil pendugaan proporsi populasi pemilih. Perolehan hasil simulasi sebagai berikut :

Simulasi	**Perolehan Suara**		
	Hari I	**Hari II**	**Hari III**
1	0 = 38,9 % 1= 62,2 %	0 = 38,2 % 1= 61,8 %	0 = 40,9 % 1= 59,1 %
2	0 = 38,9 % 1= 62,2 %	0 = 38,2 % 1= 61,8 %	0 = 38,8% 1= 61,2 %
3	0 = 45,8% 1= 54,2 %	0 = 43,1 % 1=56,9 %	0 = 43,7 % 1= 56,3 %
4	0 = 32,8 % 1 = 67,2 %	0 = 34,4 % 1 =65,6 %	0 = 33,8 % 1 = 66,2 %

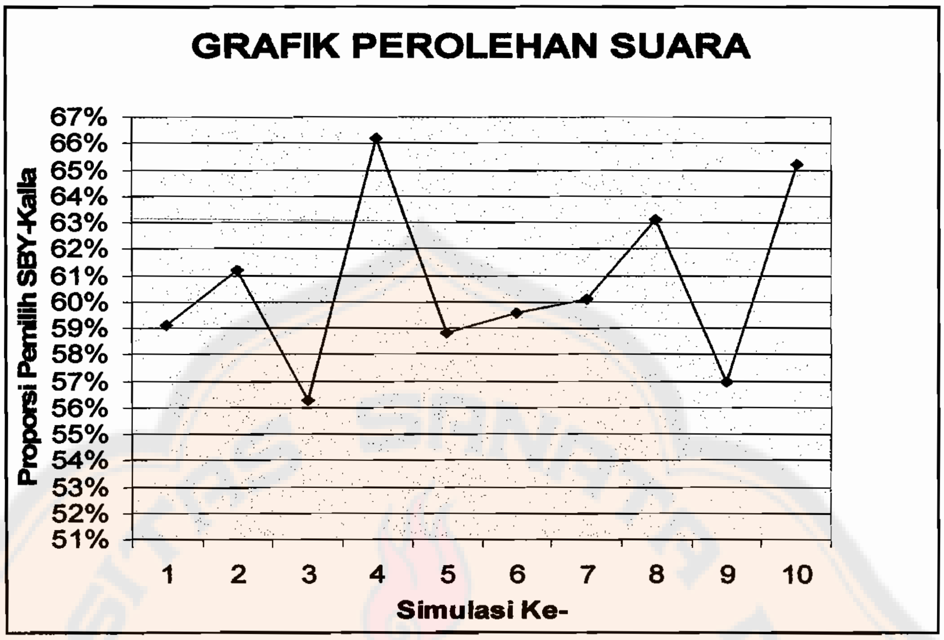
Simulasi	Perolehan Suara		
	Hari I	Hari II	Hari III
5	0 = 50,9 % 1= 49,1 %	0 = 45,3 % 1= 54,7 %	0 = 41,2 % 1= 58,8 %
6	0 = 38,3 % 1= 61,7 %	0 = 40,8 % 1= 59,2 %	0 = 40,4 % 1= 59,6 %
7	0 = 38,1 % 1= 61,9%	0 = 41,1 % 1= 58,9 %	0 = 39,9 % 1= 60,1 %
8	0 = 41,1 % 1= 58,9 %	0 = 36,5 % 1= 63,5 %	0 = 36,9 % 1= 63,1 %
9	0 = 42,6 % 1= 57,4 %	0 = 42,2 % 1= 57,8 %	0 = 43 % 1= 57 %
10	0 = 32 % 1= 68 %	0 = 31,1 % 1= 68,9 %	0 = 34,8% 1= 65,2 %

Tabel 4.2.1 Hasil Perolehan Suara Simulasi Quick Count

Analisis hasil simulasi menunjukkan bahwa :

Hasil perolehan suara SBY-Kalla

Secara grafik, penduga proporsi pemilih SBY-Kalla adalah sebagai berikut :



Dari hasil simulasi didapat rata-rata hasil perolehan suara adalah $\bar{y} = 60{,}66\,\%$ dengan standar deviasi sebesar $s(y) = 3{,}28\%$. Dengan menggunakan teori kesalahan sampling pada bab II diperoleh batas kesalahan penduga nilai rata-rata populasi $KS(\bar{\bar{y}})$ pada taraf kepercayaan 95% adalah

$$(1-\alpha) = 0.95$$
$$\alpha = 0{,}05$$
$$Z_{\frac{\alpha}{2}} = Z_{0{,}025} = 1{,}96$$

$$KS(\bar{\bar{y}}) = Z_{\alpha/2}\, s(\bar{\bar{y}}) = 1{,}96(3{,}28) = 6{,}42$$

Dengan diketahuinya batas kesalahan sampling nilai rata-rata populasi $KS(\bar{\bar{y}})$, maka dapat dibuat pendugaan selang bagi rata-rata populasi dengan taraf kepecayaan 95% sebagai berikut :

$$P\left(\bar{\bar{y}} - KS(\bar{\bar{y}}) \le \bar{\bar{Y}} \le \bar{\bar{y}} + KS(\bar{\bar{y}})\right) = 1-\alpha$$
$$P\left(60{,}66 - 6{,}42 \le \bar{\bar{Y}} \le 60{,}66 + 6{,}42\right) = 1 - 0{,}05$$
$$P\left(54{,}24 \le \bar{\bar{Y}} \le 67{,}08\right) = 0{,}95$$

Dari hasil di atas dapat dikatakan selang nilai antara 54,24% sampai 67,08% mencakup proporsi populasi yang sebenarnya dengan tingkat kepercayaan 95%.

Pada simulasi ke empat diperoleh hasil suara untuk pasangan SBY-Kalla sebesar 66,2 % dan pasangan Mega-Hasyim sebesar 33,8 %. Bandingkan dengan proporsi sebenarnya yaitu pasangan SBY-Kalla 60,2% dan pasangan Mega-Hasyim 39,8%. Nilai hasil simulasi yang berbeda tersebut terjadi karena proses acak. Perhatikan pada simulasi ke empat yang nilainya relatif jauh dari nilai-nilai yang lain, dalam statistika dikenal sebagai *out lier* atau pencilan. Dari simulasi QC diatas didapat kesalahan sampling sebesar 6,19%. Untuk mendapatkan kesalahan sampling yang lebih kecil maka akan dianalisis simulasi QC tanpa menyertakan data simulasi keempat atau membuang pencilan. Sehingga diperoleh :

Hasil perolehan suara SBY-Kalla

Dari sembilan kali hasil simulasi didapat rata-rata hasil perolehan suara adalah $\bar{y} = 60{,}04\,\%$ dengan standar deviasi sebesar $s(y) = 2{,}81\%$. Dengan menggunakan taraf kepercayaan 95% maka batas kesalahan penduga nilai rata-rata populasi $KS(\bar{\bar{y}})$ adalah

$$(1-\alpha) = 0.95$$
$$\alpha = 0{,}05$$
$$Z_{\frac{\alpha}{2}} = Z_{0,025} = 1{,}96$$

$$KS(\bar{\bar{y}}) = Z_{\alpha/2}\, s(\bar{\bar{y}}) = 1{,}96(2{,}81) = 5{,}50\%$$

Dengan diketahuinya batas kesalahan sampling nilai rata-rata populasi $KS(\bar{\bar{y}})$, maka dapat dibuat pendugaan selang bagi rata-rata populasi dengan taraf kepecayaan 95% sebagai berikut :

$$P\left(\bar{\bar{y}} - KS\left(\bar{\bar{y}}\right) \leq \bar{\bar{Y}} \leq \bar{\bar{y}} + KS\left(\bar{\bar{y}}\right)\right) = 1 - \alpha$$

$$P\left(60{,}04 - 5{,}50 \leq \bar{\bar{Y}} \leq 60{,}04 + 5{,}50\right) = 1 - 0{,}05$$

$$P\left(54{,}54 \leq \bar{\bar{Y}} \leq 65{,}54\right) = 0{,}95$$

Dari hasil diatas dapat dikatakan selang nilai antara 54,54% sampai 65,54% mencakup proporsi pemilih SBY-Kalla yang sebenarnya dengan tingkat kepercayaan 95%.

Dari analisis perolehan suara di atas, *Standar error* pendugaan proporsi populasi dengan simulasi ini adalah 5,5%. Menurut teorema limit pusat, *standar error* ini akan mengecil dengan semakin besarnya ukuran sampel atau semakin banyaknya simulasi.

BAB V

KESIMPULAN

Berdasarkan uraian-uraian pada bab-bab terdahulu, secara umum dapat disimpulkan :

Dasar yang melatar belakangi sehingga dirancang metode penarikan sampel acak bertingkat adalah berkaitan dengan prinsip efisiensi dalam penarikan sampel. Dengan menggunakan metode penarikan sampel acak bertingkat seorang peneliti tidak terlalu banyak menggunakan biaya, waktu dan tenaga yang banyak.

Secara garis besar langkah-langkah penarikan sampel acak bertingkat adalah menentukan tujuan penelitian yang pasti dan melakukan pengambilan sampel acak secara bertingkat pada setiap kelompok. Populasi yang sudah ditentukan dengan jelas oleh peneliti dibagi menjadi N kelompok, sehingga jumlah semua elemen dari tiap kelompok merupakan jumlah seluruh elemen populasi. Pada tingkat pertama mengambil secara acak n kelompok dari N kelompok dalam populasi. Tingkat selanjutnya mengambil sampel secara acak dari tiap kelompok terpilih. Sampel yang diobservasi adalah sampel yang terpilih pada tingkat terakhir.

Pada penarikan sampel acak bertingkat rata-rata populasi diduga dari rata-rata sampel tingkat akhir. Penduga variansi rata-rata populasi merupakan gabungan variansi rata-rata sampel setiap tingkatan. Salah satu contoh penerapan penarikan sampel acak bertingkat menunjukan bahwa dalam melakukan *quick count*, diperoleh hasil dengan tingkat akurasi tinggi pada pendugaan populasi dan *standar error* yang kecil.

Daftar Pustaka

Agung, I.G.N. (1992). *Metode Penelitian Sosial Pengertian dan Pemakaian Praktis*. PT Gramedia pustaka utama.

Anonim, *Sampling Theory of Surveys with Applications*.

Anonim,(2004). *SBY Unggul Poling Mega Menguat*. http//www.suara merdeka.com. Diakses pada 20 Nopember 2004.

Anonim,(2004). *Pemilu 2004 Menguji Pemilih Pemula*. http//www.pikiran rakyat.com /kiprah teropong suplemen pikiran rakyat edisi cetak.htm. Diakses pada 20 Nopember 2004.

Anonim, (2004). *SBY Capres Paling Populer*.http//www.gatra.com. Diakses pada 20 Nopember 2004.

Anonim,(2004).*Survei LSI: SBY-Kalla Tetap Unggul*. http//www.tempointeraktif.com. Diakses pada 20 Nopember 2004.

Barnett, Vic. (1974). *Elements Of Sampling Theory*. London: The English Universities Press Ltd.

Cochran, W.G. (1991). *Teknik Penarikan Sampel*. Jakarta: Penerbit Universitas Indonesia.

Cochran, W.G. (1997). *Sampling Techniques*. Canada: John Willey & Sons, Inc.

Catur Supatmono, FX. (2000). *Uji Hipotesis: Tinjauan Teoritis dan Aplikasinya pada Rata-Rata Populasi*, Skripsi, Fakultas Keguruan dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Sanata Dharma, Yogyakarta.

Debbie santoso, (2000). *Teknik Penarikan Sampel Acak Bekelompok dan Aplikasinya pada Pendugaan Parameter*, Skripsi, Fakultas Keguruan dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Sanata Dharma, Yogyakarta.

Kendall, S.M.G,w.r.Buckland. (1982). *A Dictionary of statistical terms*. John Willey & Sons, Inc.

Milton, J.S & Arnold Jesse, C. (1995). *Introduction to Probability and Statistics*. America.: McGraw-Hill.Inc.

Nasoetion, A.H. (1992). *Panduan Berpikir dan Meneliti secara Ilmiah Bagi Remaja*. Jakarta: PT Gramedia Widiasarana Indonesia.

Raj, D. (1968). *Sampling Theory*. America: McGraw-Hill, Inc.

Raj, D.(1972). *The Design of Sample Surveys* . America: McGraw-Hill,Inc.

Rohatgi, V.K. (1976). *An Introduction to Probability Theory and Mathematical Statistics*. New York: Wiley.

Supranto, J. (1992). *Sampling untuk Pemeriksaan*. Jakarta: Penerbit Universitas Indonesia.

Shobirin E, Nadj.(2004). *Metode "Quick Count" alat control pemilu*. http//www.pikiran rakyat.com. Diakses pada 20 Nopember 2004.

Walpole, R.E. (1992). *Pengantar Statistika*. Jakarta: PT Gramedia Pustaka Utama.

----------, (2002). *Daerah Istimewa Yogyakarta Dalam Angka 2002*. Yogyakarta: Biro Pusat Statistik.

http//www.kpu.go.id

http///www.LP3ES.or,id/

http://id.wikipedia.org/wiki/pemilu_2004

LAMPIRAN

Lampiran 1. Data Simulasi *Quick Count*

Statistics

		Klp_Prov	Data_TPS
N	Valid	10000	10000
	Missing	0	0

Frequency Table

Data_TPS

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	0	3980	39.8	39.8	39.8
	1	6020	60.2	60.2	100.0
	Total	10000	100.0	100.0	

Klp_Prov

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	1	250	2.5	2.5	2.5
	2	300	3.0	3.0	5.5
	3	150	1.5	1.5	7.0
	4	300	3.0	3.0	10.0
	5	700	7.0	7.0	17.0
	6	500	5.0	5.0	22.0
	7	300	3.0	3.0	25.0
	8	800	8.0	8.0	33.0
	9	450	4.5	4.5	37.5
	10	400	4.0	4.0	41.5
	11	400	4.0	4.0	45.5
	12	350	3.5	3.5	49.0
	13	150	1.5	1.5	50.5
	14	175	1.8	1.8	52.3
	15	250	2.5	2.5	54.8
	16	300	3.0	3.0	57.8
	17	300	3.0	3.0	60.8
	18	350	3.5	3.5	64.3
	19	300	3.0	3.0	67.3
	20	200	2.0	2.0	69.3
	21	200	2.0	2.0	71.3
	22	300	3.0	3.0	74.3
	23	400	4.0	4.0	78.3
	24	300	3.0	3.0	81.3
	25	500	5.0	5.0	86.3
	26	300	3.0	3.0	89.3
	27	250	2.5	2.5	91.8
	28	200	2.0	2.0	93.8
	29	125	1.3	1.3	95.0
	30	200	2.0	2.0	97.0
	31	200	2.0	2.0	99.0
	32	100	1.0	1.0	100.0
	Total	10000	100.0	100.0	

Lampiran 2. Hasil Simulasi dengan menggunakan SPSS V.12

Simulasi 1

Hari pertama

Statistics

		Klp_Prov	Data_TPS
N	Valid	238	238
	Missing	0	0

Frequency Table

Klp_Prov

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	11	100	42.0	42.0	42.0
	18	88	37.0	37.0	79.0
	28	50	21.0	21.0	100.0
	Total	238	100.0	100.0	

Data_TPS

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	0	90	37.8	37.8	37.8
	1	148	62.2	62.2	100.0
	Total	238	100.0	100.0	

Hari kedua

Statistics

		Klp_Prov	Data_TPS
N	Valid	401	401
	Missing	0	0

Frequency Table

Klp_Prov

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	1	63	15.7	15.7	15.7
	11	100	24.9	24.9	40.6
	18	88	21.9	21.9	62.6
	21	50	12.5	12.5	75.1
	28	50	12.5	12.5	87.5
	30	50	12.5	12.5	100.0
	Total	401	100.0	100.0	

Data_TPS

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	0	153	38.2	38.2	38.2
	1	248	61.8	61.8	100.0
	Total	401	100.0	100.0	

Hari ketiga

Statistics

		Klp_Prov	Data_TPS
N	Valid	626	626
	Missing	0	0

Frequency Table

Klp_Prov

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	1	63	10.1	10.1	10.1
	8	200	31.9	31.9	42.0
	11	100	16.0	16.0	58.0
	18	88	14.1	14.1	72.0
	21	50	8.0	8.0	80.0
	28	50	8.0	8.0	88.0
	30	50	8.0	8.0	96.0
	32	25	4.0	4.0	100.0
	Total	626	100.0	100.0	

Data_TPS

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	0	256	40.9	40.9	40.9
	1	370	59.1	59.1	100.0
	Total	626	100.0	100.0	

Simulasi 2

Hari pertama

Statistics

		Klp_Prov	Data_TPS
N	Valid	238	238
	Missing	0	0

Frequency Table

Klp_Prov

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	11	100	42.0	42.0	42.0
	18	88	37.0	37.0	79.0
	28	50	21.0	21.0	100.0
	Total	238	100.0	100.0	

Data_TPS

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	0	90	37.8	37.8	37.8
	1	148	62.2	62.2	100.0
	Total	238	100.0	100.0	

Hari Kedua

Statistics

		Klp_Prov	Data_TPS
N	Valid	401	401
	Missing	0	0

Frequency Table

Klp_Prov

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	1	63	15.7	15.7	15.7
	11	100	24.9	24.9	40.6
	18	88	21.9	21.9	62.6
	21	50	12.5	12.5	75.1
	28	50	12.5	12.5	87.5
	30	50	12.5	12.5	100.0
	Total	401	100.0	100.0	

Data_TPS

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	0	153	38.2	38.2	38.2
	1	248	61.8	61.8	100.0
	Total	401	100.0	100.0	

Hari Ketiga

Statistics

		Klp_Prov	Data_TPS
N	Valid	464	464
	Missing	0	0

Frequency Table

Klp_Prov

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	1	63	13.6	13.6	13.6
	3	38	8.2	8.2	21.8
	11	100	21.6	21.6	43.3
	18	88	19.0	19.0	62.3
	21	50	10.8	10.8	73.1
	28	50	10.8	10.8	83.8
	30	50	10.8	10.8	94.6
	32	25	5.4	5.4	100.0
	Total	464	100.0	100.0	

Data_TPS

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	0	180	38.8	38.8	38.8
	1	284	61.2	61.2	100.0
	Total	464	100.0	100.0	

Simulasi 3

Hari Pertama

Statistics

		Klp_Prov	Data_TPS
N	Valid	251	251
	Missing	0	0

Frequency Table

Klp_Prov

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	9	113	45.0	45.0	45.0
	12	88	35.1	35.1	80.1
	20	50	19.9	19.9	100.0
	Total	251	100.0	100.0	

Data_TPS

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	0	115	45.8	45.8	45.8
	1	136	54.2	54.2	100.0
	Total	251	100.0	100.0	

Hari Kedua

Statistics

		Klp_Prov	Data_TPS
N	Valid	489	489
	Missing	0	0

Frequency Table

Klp_Prov

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	9	113	23.1	23.1	23.1
	11	100	20.4	20.4	43.6
	12	88	18.0	18.0	61.6
	18	88	18.0	18.0	79.6
	20	50	10.2	10.2	89.8
	28	50	10.2	10.2	100.0
	Total	489	100.0	100.0	

Data_TPS

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	0	211	43.1	43.1	43.1
	1	278	56.9	56.9	100.0
	Total	489	100.0	100.0	

Hari Ketiga

Statistics

		Klp_Prov	Data_TPS
N	Valid	752	752
	Missing	0	0

Frequency Table

Klp_Prov

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	8	200	26.6	26.6	26.6
	9	113	15.0	15.0	41.6
	11	100	13.3	13.3	54.9
	12	88	11.7	11.7	66.6
	15	63	8.4	8.4	75.0
	18	88	11.7	11.7	86.7
	20	50	6.6	6.6	93.4
	28	50	6.6	6.6	100.0
	Total	752	100.0	100.0	

Data_TPS

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	0	329	43.8	43.8	43.8
	1	423	56.3	56.3	100.0
	Total	752	100.0	100.0	

Simulasi 4

Hari Pertama

Statistics

		Klp_Prov	Data_TPS
N	Valid	256	256
	Missing	448	448

Frequency Table

Klp_Prov

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	6	128	18.2	50.0	50.0
	21	46	6.5	18.0	68.0
	26	82	11.6	32.0	100.0
	Total	256	36.4	100.0	
Missing	System	448	63.6		
Total		704	100.0		

Data_TPS

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	0	84	11.9	32.8	32.8
	1	172	24.4	67.2	100.0
	Total	256	36.4	100.0	
Missing	System	448	63.6		
Total		704	100.0		

Hari Kedua

Statistics

		Klp_Prov	Data_TPS
N	Valid	500	500
	Missing	204	204

Frequency Table

Klp_Prov

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	6	128	18.2	25.6	25.6
	16	69	9.8	13.8	39.4
	21	46	6.5	9.2	48.6
	25	128	18.2	25.6	74.2
	26	76	10.8	15.2	89.4
	28	53	7.5	10.6	100.0
	Total	500	71.0	100.0	
Missing	System	204	29.0		
Total		704	100.0		

Data_TPS

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	0	172	24.4	34.4	34.4
	1	328	46.6	65.6	100.0
	Total	500	71.0	100.0	
Missing	System	204	29.0		
Total		704	100.0		

Hari Ketiga

Statistics

		Klp_Prov	Data_TPS
N	Valid	704	704
	Missing	0	0

Frequency Table

Klp_Prov

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	6	128	18.2	18.2	18.2
	12	93	13.2	13.2	31.4
	16	69	9.8	9.8	41.2
	21	46	6.5	6.5	47.7
	23	111	15.8	15.8	63.5
	25	128	18.2	18.2	81.7
	26	76	10.8	10.8	92.5
	28	53	7.5	7.5	100.0
	Total	704	100.0	100.0	

Data_TPS

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	0	238	33.8	33.8	33.8
	1	466	66.2	66.2	100.0
	Total	704	100.0	100.0	

Simulasi 5

Hari Pertama

Statistics

		Klp_PRov	Data_TPS
N	Valid	169	169
	Missing	0	0

Frequency Table

Klp_PRov

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	15	63	37.3	37.3	37.3
	17	75	44.4	44.4	81.7
	29	31	18.3	18.3	100.0
	Total	169	100.0	100.0	

Data_TPS

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	0	86	50.9	50.9	50.9
	1	83	49.1	49.1	100.0
	Total	169	100.0	100.0	

Hari Kedua

Statistics

		Klp_PRov	Data_TPS
N	Valid	307	307
	Missing	0	0

Frequency Table

Klp_PRov

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	1	63	20.5	20.5	20.5
	15	63	20.5	20.5	41.0
	17	75	24.4	24.4	65.5
	21	50	16.3	16.3	81.8
	29	31	10.1	10.1	91.9
	32	25	8.1	8.1	100.0
	Total	307	100.0	100.0	

Data_TPS

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	0	139	45.3	45.3	45.3
	1	168	54.7	54.7	100.0
	Total	307	100.0	100.0	

Hari Ketiga

Statistics

		Klp_PRov	DAta_TPS
N	Valid	507	507
	Missing	0	0

Frequency Table

Klp_PRov

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	1	63	12.4	12.4	12.4
	6	125	24.7	24.7	37.1
	15	63	12.4	12.4	49.5
	17	75	14.8	14.8	64.3
	21	50	9.9	9.9	74.2
	26	75	14.8	14.8	89.0
	29	31	6.1	6.1	95.1
	32	25	4.9	4.9	100.0
	Total	507	100.0	100.0	

DAta_TPS

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	0	209	41.2	41.2	41.2
	1	298	58.8	58.8	100.0
	Total	507	100.0	100.0	

Simulasi 6

Hari Pertama

Statistics

		Klp_Prov	Data_TPS
N	Valid	188	188
	Missing	0	0

Frequency Table

Klp_Prov

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	12	88	46.8	46.8	46.8
	28	50	26.6	26.6	73.4
	30	50	26.6	26.6	100.0
	Total	188	100.0	100.0	

Data_TPS

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	0	72	38.3	38.3	38.3
	1	116	61.7	61.7	100.0
	Total	188	100.0	100.0	

Hari Kedua

Statistics

		Klp_Prov	Data_TPS
N	Valid	551	551
	Missing	0	0

Frequency Table

Klp_Prov

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	5	175	31.8	31.8	31.8
	12	88	16.0	16.0	47.7
	25	126	22.9	22.9	70.6
	27	62	11.3	11.3	81.9
	28	50	9.1	9.1	90.9
	30	50	9.1	9.1	100.0
	Total	551	100.0	100.0	

Data_TPS

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	0	225	40.8	40.8	40.8
	1	326	59.2	59.2	100.0
	Total	551	100.0	100.0	

Hari Ketiga

Statistics

		Klp_Prov	Data_TPS
N	Valid	701	701
	Missing	0	0

Frequency Table

Data_TPS

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	0	283	40.4	40.4	40.4
	1	418	59.6	59.6	100.0
	Total	701	100.0	100.0	

Klp_Prov

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	5	175	25.0	25.0	25.0
	12	88	12.6	12.6	37.5
	19	75	10.7	10.7	48.2
	24	75	10.7	10.7	58.9
	25	126	18.0	18.0	76.9
	27	62	8.8	8.8	85.7
	28	50	7.1	7.1	92.9
	30	50	7.1	7.1	100.0
	Total	701	100.0	100.0	

Simulasi 7

Hari pertama

Statistics

		Klp_Prov	Data_TPS
N	Valid	176	176
	Missing	0	0

Frequency Table

Klp_Prov

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	1	63	35.8	35.8	35.8
	21	50	28.4	28.4	64.2
	27	63	35.8	35.8	100.0
	Total	176	100.0	100.0	

Data_TPS

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	0	67	38.1	38.1	38.1
	1	109	61.9	61.9	100.0
	Total	176	100.0	100.0	

Hari kedua

Statistics

		Klp_Prov	Data_TPS
N	Valid	401	401
	Missing	0	0

Frequency Table

Klp_Prov

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	1	63	15.7	15.7	15.7
	10	100	24.9	24.9	40.6
	17	75	18.7	18.7	59.4
	21	50	12.5	12.5	71.8
	27	63	15.7	15.7	87.5
	30	50	12.5	12.5	100.0
	Total	401	100.0	100.0	

Data_TPS

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	0	165	41.1	41.1	41.1
	1	236	58.9	58.9	100.0
	Total	401	100.0	100.0	

Hari ketiga

Statistics

		Klp_Prov	Data_TPS
N	Valid	539	539
	Missing	0	0

Frequency Table

Klp_Prov

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	1	63	11.7	11.7	11.7
	10	100	18.6	18.6	30.2
	11	100	18.6	18.6	48.8
	13	38	7.1	7.1	55.8
	17	75	13.9	13.9	69.8
	21	50	9.3	9.3	79.0
	27	63	11.7	11.7	90.7
	30	50	9.3	9.3	100.0
	Total	539	100.0	100.0	

Data_TPS

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	0	215	39.9	39.9	39.9
	1	324	60.1	60.1	100.0
	Total	539	100.0	100.0	

Simulasi 8

Hari Pertama

Statistics

		Klp_Prov	Data_TPS
N	Valid	275	275
	Missing	0	0

Frequency Table

Klp_Prov

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	7	75	27.3	27.3	27.3
	17	75	27.3	27.3	54.5
	25	125	45.5	45.5	100.0
	Total	275	100.0	100.0	

Data_TPS

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	0	113	41.1	41.1	41.1
	1	162	58.9	58.9	100.0
	Total	275	100.0	100.0	

Hari Kedua

Statistics

		Klp_Prov	Data_TPS
N	Valid	488	488
	Missing	0	0

Frequency Table

Klp_Prov

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	7	75	15.4	15.4	15.4
	17	75	15.4	15.4	30.7
	23	100	20.5	20.5	51.2
	25	125	25.6	25.6	76.8
	27	63	12.9	12.9	89.8
	28	50	10.2	10.2	100.0
	Total	488	100.0	100.0	

Data_TPS

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	0	178	36.5	36.5	36.5
	1	310	63.5	63.5	100.0
	Total	488	100.0	100.0	

Hari Ketiga

Statistics

		Klp_Prov	Data_TPS
N	Valid	601	601
	Missing	0	0

Frequency Table

Klp_Prov

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	7	75	12.5	12.5	12.5
	13	38	6.3	6.3	18.8
	16	75	12.5	12.5	31.3
	17	75	12.5	12.5	43.8
	23	100	16.6	16.6	60.4
	25	125	20.8	20.8	81.2
	27	63	10.5	10.5	91.7
	28	50	8.3	8.3	100.0
	Total	601	100.0	100.0	

Data_TPS

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	0	222	36.9	36.9	36.9
	1	379	63.1	63.1	100.0
	Total	601	100.0	100.0	

Simulasi 9

Hari pertama

Statistics

		Klp_Prov	Data_TPS
N	Valid	326	326
	Missing	0	0

Frequency Table

Klp_Prov

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	5	175	53.7	53.7	53.7
	18	88	27.0	27.0	80.7
	27	63	19.3	19.3	100.0
	Total	326	100.0	100.0	

Data_TPS

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	0	139	42.6	42.6	42.6
	1	187	57.4	57.4	100.0
	Total	326	100.0	100.0	

Hari Kedua

Statistics

		Klp_Prov	Data_TPS
N	Valid	526	526
	Missing	0	0

Frequency Table

Klp_Prov

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	4	75	14.3	14.3	14.3
	5	175	33.3	33.3	47.5
	7	75	14.3	14.3	61.8
	18	88	16.7	16.7	78.5
	27	63	12.0	12.0	90.5
	28	50	9.5	9.5	100.0
	Total	526	100.0	100.0	

Data_TPS

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	0	222	42.2	42.2	42.2
	1	304	57.8	57.8	100.0
	Total	526	100.0	100.0	

Hari Ketiga

Statistics

		Klp_Prov	Data_TPS
N	Valid	689	689
	Missing	0	0

Frequency Table

Klp_Prov

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	4	75	10.9	10.9	10.9
	5	175	25.4	25.4	36.3
	7	75	10.9	10.9	47.2
	9	113	16.4	16.4	63.6
	18	88	12.8	12.8	76.3
	27	63	9.1	9.1	85.5
	28	50	7.3	7.3	92.7
	31	50	7.3	7.3	100.0
	Total	689	100.0	100.0	

Data_TPS

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	0	296	43.0	43.0	43.0
	1	393	57.0	57.0	100.0
	Total	689	100.0	100.0	

Simulasi 10

Hari Pertama

Statistics

		Klp_Prov	Data_TPS
N	Valid	250	250
	Missing	0	0

Frequency Table

Klp_Prov

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	7	75	30.0	30.0	30.0
	11	100	40.0	40.0	70.0
	22	75	30.0	30.0	100.0
	Total	250	100.0	100.0	

Data_TPS

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	0	80	32.0	32.0	32.0
	1	170	68.0	68.0	100.0
	Total	250	100.0	100.0	

Hari Kedua

Statistics

		Klp_Prov	Data_TPS
N	Valid	425	425
	Missing	0	0

Frequency Table

Klp_Prov

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	7	75	17.6	17.6	17.6
	11	100	23.5	23.5	41.2
	19	75	17.6	17.6	58.8
	22	75	17.6	17.6	76.5
	28	50	11.8	11.8	88.2
	30	50	11.8	11.8	100.0
	Total	425	100.0	100.0	

Data_TPS

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	0	132	31.1	31.1	31.1
	1	293	68.9	68.9	100.0
	Total	425	100.0	100.0	

Hari Ketiga

Statistics

		Klp_Prov	Data_TPS
N	Valid	551	551
	Missing	0	0

Frequency Table

Klp_Prov

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	1	63	11.4	11.4	11.4
	7	75	13.6	13.6	25.0
	11	100	18.1	18.1	43.2
	19	75	13.6	13.6	56.8
	22	75	13.6	13.6	70.4
	27	63	11.4	11.4	81.9
	28	50	9.1	9.1	90.9
	30	50	9.1	9.1	100.0
	Total	551	100.0	100.0	

Data_TPS

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	0	192	34.8	34.8	34.8
	1	359	65.2	65.2	100.0
	Total	551	100.0	100.0	

Lampiaran 5. Perbandingan Perolehan Suara Hasil Pemilu Presiden 2004 Quick Count dengan KPU