ABSTRAK

Pada skripsi ini masalah yang akan dibahas adalah ukuran pada sembarang subhimpunan dalam $\mathbb{R}$ karena pada umumnya orang hanya mengenal ukuran pada interval yaitu panjang interval. Ukuran yang kita bicarakan adalah ukuran Lebesgue. Pada dasarnya ukuran Lebesgue didefinisikan dengan menggunakan ukuran untuk interval yaitu panjang interval.

Sebelum mempelajari ukuran Lebesgue lebih dulu dibahas ukuran luar Lebesgue. Untuk setiap $A \subset \mathbb{R}$ maka ukuran luar Lebesgue dari A adalah $m^*A = \inf \sum l(I_n)$, di mana $\{I_n\}$ adalah keluarga terbilang interval terbuka yang menyelimuti A; yaitu $A \subset \cup I_n$. Untuk sembarang himpunan $A, B \subset \mathbb{R}$ berlaku:

1. $m^*A \geq 0$;
2. $m^*\phi = 0$;
3. $m^*A \leq m^*B$ jika $A \subset B$;
4. $m^*\{x\} = 0$ untuk sembarang $x \in \mathbb{R}$.

Ukuran luar Lebesgue terdefinisikan untuk semua subhimpunan dari garis real $\mathbb{R}$ tetapi tidak mempunyai sifat terjumlah terbilang. Dalam skripsi ini dicari keluarga subhimpunan dari $\mathbb{R}$ sehingga dalam keluarga himpunan ini ukuran luar Lebesgue menjadi bersifat terjumlah terbilang, yang selanjutnya dinamakan ukuran Lebesgue. Jadi ukuran Lebesgue adalah ukuran luar Lebesgue yang didefinisikan relatif terhadap keluarga subhimpunan ini, yang ternyata suatu aljabar-σ. Himpunan E dalam aljabar-σ ini dikatakan terukur Lebesgue, yakni bila untuk setiap himpunan $A \subset \mathbb{R}$ maka $m^*A = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c)$.

Fungsi f dikatakan terukur Lebesgue jika daerah definisinya suatu himpunan terukur Lebesgue dan untuk setiap $\alpha \in \mathbb{R}$ berlaku $\{x: f(x) > \alpha\}$ terukur.

Pada umumnya subhimpunan dari $\mathbb{R}$ dan fungsi bernilai real yang kita hadapi adalah terukur Lebesgue. Dalam skripsi ini dibuktikan asas Littlewood bahwa setiap himpunan hampir merupakan gabungan berhingga dari interval-interval; setiap fungsi hampir kontinu; dan setiap barisan fungsi yang konvergen hampir konvergen seragam.

ABSTRACT

In this thesis, the problem to be discussed is the measure of any subsets in $\mathbb{R}$ since generally people merely know the measure on interval that is the length of interval. The measure being discussed is the Lebesgue measure. Basically, Lebesgue measure is defined by using the measure for interval namely the length of interval.

Before studying the Lebesgue measure, Lebesgue outer measure will be discussed first. For each set $A \subset \mathbb{R}$, the Lebesgue outer measure of A is $m^*A = \inf \sum l(I_n)$, in which $\{I_n\}$ is the countably collections of open intervals that covered A; such that $A \subset \cup I_n$. For any set $A, B \subset \mathbb{R}$ we have:

1. $m^*A \geq 0$.
2. $m^*(\phi) = 0$.
3. $m^*A \leq m^*B$ if $A \subset B$.
4. $m^*\{x\} = 0$ for any $x \in \mathbb{R}$.

The Lebesgue outer measure is defined for all subsets from real line $\mathbb{R}$ but it is not countably additive. In this thesis, collection of subsets of $\mathbb{R}$ in order that in this collection of sets the Lebesgue outer measure has countable additive, which is then called Lebesgue measure. Therefore, Lebesgue measure is Lebesgue outer measure that is defined relative toward the collection of subsets, which in fact is an σ-algebra. A set E in this σ-algebra is said to be Lebesgue measurable if for each set A we have $m^*A = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c)$.

A function f is said to be Lebesgue measurable if its domain is Lebesgue measurable sets and for each real number $\alpha \in \mathbb{R}$ the set $\{x: f(x) > \alpha\}$ is measurable.

Generally, subsets of $\mathbb{R}$ and real-valued function that we meet is Lebesgue measurable. In this thesis, the Littlewood's principles is being proved that is every set is nearly finite union of intervals, every function is nearly continuous, and every convergent sequence of function is nearly uniformly convergent.