UKURAN PADA GARIS REAL

SKRIPSI

Diajukan untuk Memenuhi Salah Satu Syarat

Memperoleh Gelar Sarjana Pendidikan

Program Studi Pendidikan Matematika

Oleh:

Erny Sulistiyaningsih

NIM: 011414033

PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA

JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN

UNIVERSITAS SANATA DHARMA

YOGYAKARTA

2006

SKRIPSI

UKURAN PADA GARIS REAL

Oleh:

Erny Sulistiyaningsih

NIM: 011414033

Telah disetujui oleh:

Pembimbing

Prof. Drs. R. Soemantri

tanggal 16 Maret 2006

SKRIPSI

UKURAN PADA GARIS REAL

Dipersiapkan dan ditulis oleh:

Erny Sulistiyaningsih

NIM: 011414033

Telah dipertahankan di depan Panitia Penguji

pada tanggal 27 Maret 2006

dan dinyatakan memenuhi syarat

Susunan Panitia Penguji

	Nama Lengkap	Tanda tangan
Ketua	Drs. Severinus Domi, M.Si.	…………………………
Sekertaris	M. Andy Rudhito, S.Pd., M.Si.	…………………………
Anggota	Prof. Drs. R. Soemantri	…………………………
Anggota	Drs. St. Susento, M.Si.	…………………………
Anggota	M. Andy Rudhito, S.Pd., M.Si	…………………………

Yogyakarta, 27 Maret 2006
Fakultas Keguruan dan Ilmu pendidikan
Universitas Sanata Dharma
Dekan,

Drs. Tarsisius Sarkim M.Ed., Ph.D.

Ketika kesusahan menyerang, dan rasa takut menghadang
KasihNya menyertai kita, matanya mengawasi kita;
Dan ketika kita terguncang dan nyaris tergeletak,
Dia akan menguatkan, dan membuat kita menang. **~Anon~**

Buku-buku tulisan manusia hanyalah wewangian yang menguap,
Bagai bunga fana yang hancur oleh tangan manusia;
Tetapi melebihi semua buku, agung dan satu-satunya,
Kokoh bagai pohon, ada sebuah Buku yang bertahan.
~Frazee-Bower~

Salah satu tanda seorang pendidik yang hebat adalah kemampuan memimpin murid-murid menjelajah tempat-tempat baru yang bahkan belum pernah didatangi sang pendidik. **~Thomas Groome~**

Guru biasa memberitahukan. Guru baik menjelaskan. Guru ulung memeragakan. Guru hebat mengilhami. ~William Arthur Ward ~

Skripsi ini kupersembahkan untuk:

Tuhan Yesus Kristus dan Bunda Maria
Bapak dan Ibu tercinta
Kakakku terkasih Pita dan Andreas
Adekku terkasih Veri
Almamaterku

PERNYATAAN KEASLIAN KARYA

Saya menyatakan dengan sesungguhnya bahwa skripsi yang saya tulis ini tidak memuat karya atau bagian karya orang lain, kecuali yang telah disebutkan dalam kutipan dan daftar pustaka, sebagaimana layaknya karya ilmiah.

Yogyakarta, 27 Maret 2006

Penulis

Erny Sulistiyaningsih

ABSTRAK

Pada skripsi ini masalah yang akan dibahas adalah ukuran pada sembarang subhimpunan dalam $\mathbb{R}$ karena pada umumnya orang hanya mengenal ukuran pada interval yaitu panjang interval. Ukuran yang kita bicarakan adalah ukuran Lebesgue. Pada dasarnya ukuran Lebesgue didefinisikan dengan menggunakan ukuran untuk interval yaitu panjang interval.

Sebelum mempelajari ukuran Lebesgue lebih dulu dibahas ukuran luar Lebesgue. Untuk setiap $A \subset \mathbb{R}$ maka ukuran luar Lebesgue dari A adalah $m^*A = \inf \sum l(I_n)$, di mana $\{I_n\}$ adalah keluarga terbilang interval terbuka yang menyelimuti A; yaitu $A \subset \cup I_n$. Untuk sembarang himpunan $A, B \subset \mathbb{R}$ berlaku:

1. $m^*A \geq 0$;
2. $m^*\phi = 0$;
3. $m^*A \leq m^*B$ jika $A \subset B$;
4. $m^*\{x\} = 0$ untuk sembarang $x \in \mathbb{R}$.

Ukuran luar Lebesgue terdefinisikan untuk semua subhimpunan dari garis real $\mathbb{R}$ tetapi tidak mempunyai sifat terjumlah terbilang. Dalam skripsi ini dicari keluarga subhimpunan dari $\mathbb{R}$ sehingga dalam keluarga himpunan ini ukuran luar Lebesgue menjadi bersifat terjumlah terbilang, yang selanjutnya dinamakan ukuran Lebesgue. Jadi ukuran Lebesgue adalah ukuran luar Lebesgue yang didefinisikan relatif terhadap keluarga subhimpunan ini, yang ternyata suatu aljabar-σ. Himpunan E dalam aljabar-σ ini dikatakan terukur Lebesgue, yakni bila untuk setiap himpunan $A \subset \mathbb{R}$ maka $m^*A = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c)$.

Fungsi f dikatakan terukur Lebesgue jika daerah definisinya suatu himpunan terukur Lebesgue dan untuk setiap $\alpha \in \mathbb{R}$ berlaku $\{x: f(x) > \alpha\}$ terukur.

Pada umumnya subhimpunan dari $\mathbb{R}$ dan fungsi bernilai real yang kita hadapi adalah terukur Lebesgue. Dalam skripsi ini dibuktikan asas Littlewood bahwa setiap himpunan hampir merupakan gabungan berhingga dari interval-interval; setiap fungsi hampir kontinu; dan setiap barisan fungsi yang konvergen hampir konvergen seragam.

ABSTRACT

In this thesis, the problem to be discussed is the measure of any subsets in $\mathbb{R}$ since generally people merely know the measure on interval that is the length of interval. The measure being discussed is the Lebesgue measure. Basically, Lebesgue measure is defined by using the measure for interval namely the length of interval.

Before studying the Lebesgue measure, Lebesgue outer measure will be discussed first. For each set $A \subset \mathbb{R}$, the Lebesgue outer measure of A is $m^*A = \inf \sum l(I_n)$, in which $\{I_n\}$ is the countably collections of open intervals that covered A; such that $A \subset \cup I_n$. For any set $A, B \subset \mathbb{R}$ we have:

1. $m^*A \geq 0$.
2. $m^*(\phi) = 0$.
3. $m^*A \leq m^*B$ if $A \subset B$.
4. $m^*\{x\} = 0$ for any $x \in \mathbb{R}$.

The Lebesgue outer measure is defined for all subsets from real line $\mathbb{R}$ but it is not countably additive. In this thesis, collection of subsets of $\mathbb{R}$ in order that in this collection of sets the Lebesgue outer measure has countable additive, which is then called Lebesgue measure. Therefore, Lebesgue measure is Lebesgue outer measure that is defined relative toward the collection of subsets, which in fact is an σ-algebra. A set E in this σ-algebra is said to be Lebesgue measurable if for each set A we have $m^*A = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c)$.

A function f is said to be Lebesgue measurable if its domain is Lebesgue measurable sets and for each real number $\alpha \in \mathbb{R}$ the set $\{x: f(x) > \alpha\}$ is measurable.

Generally, subsets of $\mathbb{R}$ and real-valued function that we meet is Lebesgue measurable. In this thesis, the Littlewood's principles is being proved that is every set is nearly finite union of intervals, every function is nearly continuous, and every convergent sequence of function is nearly uniformly convergent.

KATA PENGANTAR

Puji Syukur dan terima kasih penulis persembahkan kepada Tuhan Yang Maha Esa atas berkat dan limpahan rahmat-Nya sehingga penulis dapat meyelesaikan skripsi yang berjudul "Ukuran Pada Garis Real".

Skripsi ini dimaksudkan untuk memenuhi salah satu syarat memperoleh gelar Sarjana Pendidikan pada Program Studi Pendidikan Matematika.

Pada kesempatan ini, penulis ingin mengucapkan terima kasih kepada pihak-pihak yang telah membantu menyelesaikan skripsi ini sehingga berjalan dengan baik dan lancar. Penulis mengucapkan terima kasih khususnya kepada:

1. Bapak Prof. Drs. R. Soemantri, selaku dosen pembimbing yang dengan sabar dan bijaksana membimbing penulis dalam menyelesaikan skripsi.
2. Bapak M. Andy Rudhito, S.Pd., M.Si., selaku ketua Program Studi Pendidikan Matematika dan selaku dosen penguji.
3. Bapak Drs. St. Susento, M.Si. selaku dosen penguji.
4. Bapak dan Ibu dosen Pendidikan Matematika yang telah membimbing, mendidik, dan penulis selama kuliah.
5. Bapak Sunardjo dan Bapak Sugeng atas keramahannya dalam melayani mahasiswa.
6. Bapak dan Ibu karyawan UPT perpustakan paingan.
7. Bapak dan Ibuku tercinta yang selalu memberikan semangat, membantuku dalam doa dan selalu memenuhi kebutuhan materiku.
8. Kakak-kakakku Pita dan Andreas juga adekku Veri atas dorongan dan doa kalian kepadaku. Aku menyayangi kalian.
9. Sahabatku Lingna atas semangat dan doa yang kamu berikan kepadaku. Terima kasih juga untuk persahabatan kita. Juga untuk Uud yang mau mendengarkan curhatku. Atik dan Irene untuk kerjasama kalian selama ini. Esti untuk persahabatan kita sejak SMP.
10. Teman-temanku PMat'01: Tina, Rere, Jajang, Eko, Agung, Markus, Ari Ndut, Anik, Nina terima kasih atas canda dan tawa kalian yang selalu menghiburku. Dan untuk teman-teman PMat'01 semuanya terima kasih.

11. Teman-teman PMat'00: Mbak Yuli, Mbak Budi, Mbak Ari, Mbak Kristin (tutor Adiktif), Mbak Jeki, Mas Denny (atas dukungan dan doanya), Mas Didik, Mas Tinus, Mas Dwi, Mas Firman terima kasih atas keramahan dan sikap baik kalian kepadaku. Juga untuk Mbak Sumiyati PMat'99.
12. Teman-teman PMat'02: Sr. Fidelis dan Rm. Ansi atas dukungan dan doanya.
13. Teman-teman KKN: Vani, Minuk, Triyani, Hemma, Gesta, Roy, Obed, dan Memet untuk kebersamaan kita selama kurang lebih sebulan.
14. Adek-adek kost atas: Tassa yang telah membantuku menterjemahkan, Lusi, Jo, Eli, Nita, Prapti, Enny terima kasih atas kekeluargaan kita, aku pasti akan selalu merindukan kalian. Untuk teman-teman kost bawah: Mbak Siska, Lenee, Priti (atas bantuannya memperbaiki komputer), Linda, Apri, dan adekku Lusi terima kasih atas kebersamaan kita.
15. Teman-teman tutor Gloria Edukasindo: Mbak Nana, Mbak Nining, Dani, Mas Adi, dan Ajeng. Untuk Cie Lenny yang telah membantuku menterjemahkan. Untuk teman-teman tutor semuanya terima kasih.
16. Semua pihak yang tidak bisa penulis sebutkan satu-persatu.

Penulis menyadari sepenuhnya bahwa skripsi ini masih jauh dari sempurna. Oleh karena itu, penulis mengharapkan kritik dan saran yang bersifat membangun demi kesempurnaan penulisan skripsi ini.

Pada akhirnya, penulis berharap agar laporan ini bermanfaat bagi seluruh pihak yang berkepentingan.

Penulis

DAFTAR ISI

Halaman

BAB I

PENDAHULUAN

A. LATAR BELAKANG

Himpunan adalah suatu konsep yang abstrak, yang hanya ada dalam pikiran kita. Kita tidak dapat mengamati himpunan dengan alat indera kita, tetapi kita dapat memahaminya dengan pikiran kita. Secara simbolik, himpunan dapat dipresentasikan dengan dua cara, yaitu:

1. Dengan cara daftar

   Himpunan dinyatakan dengan dua tanda kurung akolade yang diantaranya ditulis lambang atau nama dari anggota himpunan tersebut. Misalnya $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $\{1, 2, 3, \dots, 120\}$, $\{1, 2, 3, \dots\}$.

2. Dengan aturan pembentuk himpunan

   Kalau dengan cara daftar nama-nama anggota dituliskan di antara kurung akolade, maka dengan aturan pembentuk himpunan, lambang anggota sembarang dan aturan yang harus dipenuhi anggota himpunan yang dituliskan di antara tanda kurung akolade. Misalnya $\mathbb{N} = \{x \mid x$ bilangan asli$\}$, $\mathbb{R} = \{x \mid x$ bilangan real$\}$.

Pada pembahasan selanjutnya, huruf "$\mathbb{N}$" dipakai sebagai nama himpunan dari semua bilangan asli, "$\mathbb{R}$" sebagai nama himpunan dari semua bilangan real.

Di dalam garis real $\mathbb{R}$ terdapat beberapa tipe interval, yaitu interval tertutup, interval terbuka, interval terbuka-tertutup, dan interval tertutup-terbuka. Untuk sembarang a, $b \in \mathbb{R}$ berlaku bahwa panjang interval tertutup

$[a, b]$, interval terbuka (a, b), interval terbuka-tertutup $(a, b]$, dan interval tertutup-terbuka (a, b) adalah sama, yaitu $b - a$. Panjang interval adalah suatu ukuran untuk interval.

Pada umumnya orang hanya mengenal ukuran pada interval, yaitu panjang interval. Padahal subhimpunan dari garis real $\mathbb{R}$ tidak hanya berupa interval. Subhimpunan dari garis real $\mathbb{R}$ yang bukan berupa interval, misalnya himpunan terbuka dan himpunan tertutup.

Masalah yang akan dibahas pada skripsi ini adalah membuat ukuran pada sembarang subhimpunan dalam $\mathbb{R}$. Ukuran tersebut menjadi panjang interval apabila digunakan untuk mengukur panjang interval. Selain itu, akan dibahas juga mengenai fungsi terukur yang didefinisikan pada himpunan terukur. Untuk membuat ukuran tersebut diperlukan dasar yang baik tentang teori ukuran. Oleh karena itu, kita akan lebih jauh mempelajari tentang teori ukuran, yaitu teori ukuran pada garis real $\mathbb{R}$.

B. PEMBATASAN MASALAH

Dalam skripsi ini, permasalahan yang dibahas dibatasi pada masalah ukuran Lebesgue untuk himpunan-himpunan pada garis real $\mathbb{R}$.

C. PERUMUSAN MASALAH

Masalah-masalah yang akan dibahas dapat dirumuskan sebagai berikut:

- Apa yang dimaksud dengan aljabar himpunan, dan aljabar-σ?
- Bagaimana definisi ukuran luar Lebesgue?
- Bagaimana definisi himpunan terukur dan ukuran Lebesgue?

- Bagaimana definisi fungsi terukur?

D. TUJUAN PENULISAN

Adapun tujuan penulisan ini adalah untuk membuat ukuran pada himpunan-himpunan di dalam garis real sebagai perluasan dari panjang interval untuk ukuran interval.

E. METODE PENULISAN

Metode yang akan digunakan pada penulisan ini adalah metode studi pustaka.

F. SISTEMATIKA PENULISAN

BAB I. PENDAHULUAN

A. Latar Belakang Masalah

B. Pembatasan Masalah

C. Perumusan Masalah

D. Tujuan Penulisan

E. Metode Penulisan

F. Sistematika Penulisan

BAB II. TEORI PENDUKUNG

A. Himpunan Terbuka dan Himpunan Tertutup

B. Barisan Bilangan

C. Himpunan Cantor

D. Himpunan Kompak

BAB II

TEORI PENDUKUNG

Pada bab ini kita akan membahas tentang topologi pada garis real $\mathbb{R}$. Topologi (τ) pada garis real $\mathbb{R}$ adalah keluarga dari subhimpunan dari $\mathbb{R}$, yang dinamakan himpunan terbuka yang memenuhi syarat:

1. ϕ dan $\mathbb{R}$ anggota τ.
2. Gabungan berhingga atau tak hingga himpunan-himpunan anggota τ juga anggota τ.
3. Irisan berhingga dari anggota τ merupakan anggota τ.

Jadi dalam topologi pada garis real $\mathbb{R}$ kita mempelajari tentang himpunan-himpunan dalam $\mathbb{R}$.

Pembahasan topologi pada garis real $\mathbb{R}$ akan dibagi dalam lima subbab. Subbab yang pertama akan membahas tentang himpunan terbuka dan himpunan tertutup, subbab kedua membahas tentang barisan bilangan, subbab ketiga membahas tentang himpunan Cantor, subbab keempat membahas tentang himpunan Kompak, dan subbab kelima membahas tentang barisan fungsi. Pada seluruh pembahasan, $\mathbb{R}$ kita sepakati sebagai nama himpunan dari semua bilangan real, dan $\mathbb{N}$ sebagai nama himpunan dari semua bilangan asli.

A. Himpunan Terbuka dan Himpunan Tertutup

Diberikan himpunan $\mathbb{R}$ yang disebut himpunan semesta pembicaraan. Pada definisi berikut, himpunan yang dimaksud adalah himpunan bagian dari $\mathbb{R}$.

Definisi 2.1.

Kitar $N(p, r)$ adalah suatu interval terbuka dengan pusat p dan radius r.

Definisi 2.2.

Titik p dinamakan titik interior himpunan E jika terdapat $r > 0$ sehingga $N(p, r) \subset E$.

Definisi 2.3.

Himpunan G dikatakan terbuka dalam $\mathbb{R}$ jika semua anggotanya adalah titik interior G.

Definisi 2.4.

Suatu himpunan disebut dari jenis $\mathcal{G}_\delta$ jika himpunan itu merupakan irisan dari keluarga terbilang himpunan-himpunan terbuka.

Definisi 2.5.

Titik p dinamakan titik limit himpunan E, jika setiap kitar titik p memuat titik $q \in E$ dan $q \neq p$.

Definisi 2.6.

Himpunan F dikatakan tertutup dalam $\mathbb{R}$ jika semua titik limitnya anggota dari F.

Definisi 2.7.

Suatu himpunan disebut $\mathscr{F}_\sigma$ jika himpunan itu merupakan gabungan dari keluarga terbilang himpunan-himpunan tertutup.

Definisi 2.8.

Untuk $E \subset \mathbb{R}$, notasi E^c dimaksud $\{x \in \mathbb{R} \mid x \notin E\}$.

Teorema 2.1.

Himpunan $E \subset \mathbb{R}$ adalah terbuka jika dan hanya jika E^c tertutup. Jadi E tertutup jika dan hanya jika E^c terbuka.

Bukti:

$\Rightarrow$ Diketahui E terbuka.

Diandaikan p titik limit E^c. Jadi setiap kitar titik p memuat suatu $q \in E^c$ dan $q \neq p$. Dengan demikian setiap kitar dari p bukan subhimpunan E, jadi p bukan titik interior dari E. Karena E himpunan terbuka, maka p bukan anggota E. Jadi $p \in E^c$. Kita telah membuktikan pernyataan: "p = titik limit $E^c \Rightarrow p \in E^c$". Ini berarti E^c tertutup.

$\Leftarrow$ Diketahui E^c tertutup.

Diandaikan $p \in E$. Jadi $p \notin E^c$. Karena E^c tertutup, maka p bukan titik limit E^c. Maka terdapat $r > 0$ sehingga untuk semua x dengan $|x - p| < r$ berlaku $x \notin E^c$ atau $x \in E$. Jadi $N(p, r) \subset E$. Kita peroleh pernyataan:

"$p \in E \Rightarrow (\exists\, r > 0$ dan $N(p, r) \subset E)$". Jadi E terbuka.

Teorema 2.2.

(a) Gabungan dari sembarang keluarga (berhingga atau tak hingga) dari himpunan-himpunan terbuka dalam $\mathbb{R}$ adalah terbuka.

(b) Irisan dari keluarga berhingga himpunan-himpunan terbuka dalam $\mathbb{R}$ adalah terbuka.

Bukti:

(a). Diberikan A sembarang himpunan (berhingga atau tak hingga) dan keluarga himpunan terbuka $\{G_\alpha : \alpha \in A\}$. Akan dibuktikan himpunan $S = \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$ adalah terbuka. Diandaikan $p \in S$, maka $\exists \alpha_0$ dan $\alpha_0 \in A$ sehingga $p \in G_{\alpha_0}$ terbuka. Karena G_{α_0} terbuka, maka $\exists r > 0$ sehingga $N(p, r) \subset G_{\alpha_0} \subset S$. Jadi jika $p \in S$ maka p titik interior S. Terbukti S terbuka.

(b). Diberikan keluarga berhingga himpunan terbuka $\{G_1, G_2, \dots, G_n\}$. Akan dibuktikan $T = \bigcap_{j=1}^{n} G_j$ terbuka. Diandaikan $p \in T$, maka $p \in G_j$ untuk $j = 1, 2, \dots, n$. Karena G_j terbuka maka terdapat $r_j > 0$ sehingga $N(p, r_j) \subset G_j$ untuk semua $j = 1, 2, \dots, n$. Jika diambil $r = \min\{r_j : j = 1, 2, \dots, n\}$ maka $r > 0$ dan $N(p, r) \subset G_j$ untuk semua $j = 1, 2, \dots, n$. Jadi $N(p, r) \subset T$ dan p titik interior T. Terbukti T terbuka.

Teorema 2.3.

(a). Irisan dari sembarang keluarga (berhingga atau tak hingga) himpunan-himpunan tetutup dalam $\mathbb{R}$ adalah tertutup.

(b). Gabungan keluarga berhingga dari himpunan-himpunan tertutup dalam $\mathbb{R}$ adalah tertutup.

Bukti:

(a). Menurut Hukum De Morgan, untuk sembarang himpunan indeks A,

berlaku $\left(\bigcup_{\alpha\in A} E_\alpha\right)^c = \bigcap_{\alpha\in A}(E_\alpha)^c$ dan $\left(\bigcap_{\alpha\in A} E_\alpha\right)^c = \bigcup_{\alpha\in A}(E_\alpha)^c$

Jika F_α tertutup dalam $\mathbb{R}$ untuk $\forall\alpha\in A$, maka menurut teorema 2.1. himpunan $(F_\alpha)^c$ terbuka dalam $\mathbb{R}$. Menurut hukum De Morgan dan teorema 2.1. , diperoleh

$\bigcap_{\alpha\in A} F_\alpha = \left(\bigcup_{\alpha\in A}(F_\alpha)^c\right)^c$ adalah tertutup.

(b) Diberikan keluarga berhingga himpunan tertutup $\{F_1, F_2, \dots , F_n\}$.

Akan dibuktikan $W = \bigcup_{i=1}^n F_i$ tertutup. Jika F_i tertutup dalam $\mathbb{R}$ untuk i = 1, 2, … , n, maka menurut teorema 2.1. himpunan $(F_i)^c$ terbuka dalam $\mathbb{R}$. Menurut hukum De Morgan dan teorema 2.1. , diperoleh

$\bigcup_{i=1}^n F_i = \left(\bigcap_{i=1}^n (F_i)^c\right)^c$ adalah tertutup.

Teorema 2.4.

Jika G suatu himpunan terbuka dalam $\mathbb{R}$ maka G merupakan gabungan dari keluarga berhingga atau terbilang interval-interval terbuka yang saling asing.

Bukti:

Untuk setiap $x\in G$ dikawankan dengan interval terbuka $I_x \subset G$ dengan cara sebagai berikut:

Dimisalkan I_x gabungan semua interval terbuka $I_\alpha = (a_\alpha, b_\alpha)$, dengan $\alpha \in A$, sedemikian hingga $x \in I_x$ dan $I_x \subset G$. Jadi I_x adalah gabungan semua interval terbuka yang memuat x dan termuat dalam G. Akan dibuktikan bahwa I_x interval terbuka.

Dimisalkan $a = \inf\{a_\alpha : \alpha \in A\}$ dan $b = \sup\{b_\alpha : \alpha \in A\}$. Untuk $\forall \alpha \in A$, jika $\eta \leq a$ atau $\eta \geq b$ maka $\eta \notin (a_\alpha, b_\alpha)$, jadi $\eta \notin I_x$. Jika $a < \eta < b$ maka ada tiga kemungkinan, yakni $a < \eta < x$, $\eta = x$, $x < \eta < b$. Dalam keadaan yang pertama, karena $a = \inf\{a_\alpha : \alpha \in A\}$, terdapat suatu $\alpha \in A$ sehingga $a \leq a_\alpha < \eta < b_\alpha$, jadi $\eta \in (a_\alpha, b_\alpha)$ sehingga $\eta \in I_x$. Dengan cara yang sama, mengingat $b = \sup\{b_\alpha : \alpha \in A\}$, dapat ditunjukkan bahwa $\eta \in I_x$ jika $x < \eta < b$. Jelas bahwa $\eta \in I_x$ jika $\eta = x$. Jadi telah ditunjukkan bahwa $\eta \in I_x$ jika dan hanya jika $a < \eta < b$. Terbukti $I_x = (a, b)$ suatu interval terbuka.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa untuk $x \in G$ dan $y \in G$ maka $I_x = I_y$ atau $I_x \cap I_y = \phi$. Diandaikan $I_x \cap I_y \neq \phi$, maka $\exists \zeta$ sehingga $\zeta \in I_x \cap I_y$. Karena $I_x \cup I_y$ selang terbuka yang memuat x dan termuat dalam G, maka $(I_x \cup I_y) \subset I_x$, sebab I_x gabungan semua interval terbuka yang memuat x dan termuat dalam G; hal ini berakibat bahwa $I_x \cup I_y = I_x$. Dengan cara yang sama akan diperoleh $I_x \cup I_y = I_y$. Jadi jika $I_x \cap I_y \neq \phi$ maka $I_x = I_y$. Dengan demikian $I_x = I_y$ atau $I_x \cap I_y = \phi$. Jadi sudah dibuktikan bahwa $G = \bigcup_{x \in G} I_x$, yakni gabungan interval-interval terbuka yang saling asing.

Untuk setiap I_x dikawankan dengan tepat satu bilangan rasional $r_x \in I_x$. Karena dengan pengawanan secara ini interval-interval terbuka yang saling asing berkawankan dengan bilangan rasional yang berlainan, maka terdapat korespondensi satu-satu antara $\{I_x\}$ dan $\{r_x\}$. Dengan demikian keluarga $\{I_x\}$ ekuivalen dengan suatu subhimpunan dari himpunan semua bilangan rasional, maka keluarga $\{I_x\}$ dalam gabungan di atas berhingga atau terbilang.

Definisi 2.9.

Pemampat (*closure*) dari himpunan E yang dinotasikan dengan $\bar{E}$ adalah gabungan himpunan E dan E', dengan E' adalah himpunan semua titik limit dari himpunan E.

Teorema 2.5.

Jika E himpunan dalam $\mathbb{R}$, maka berlaku:

1. $p \in \bar{E}$ jika dan hanya jika setiap kitar dari p memuat paling sedikit satu titik $q \in E$.
2. $\bar{E}$ tertutup.
3. $\bar{E}$ himpunan tertutup terkecil yang memuat E.

Definisi 2.10.

Diberikan keluarga dari himpunan-himpunan tidak kosong $\mathcal{C}$. Maka dapat dibuat himpunan baru dengan mengambil tepat satu elemen dari masing-masing himpunan. Pernyataan ini dikenal dengan *Aksioma Pilih* yang secara matematis dapat dibuat pernyataan sebagai berikut: Misal $\mathcal{C}$ sembarang keluarga himpunan tak kosong. Maka ada fungsi F yang didefinisikan pada $\mathcal{C}$ yang menunjukkan untuk setiap himpunan $A \in \mathcal{C}$ elemen $F(A)$ dalam A.

B. Barisan Bilangan Real

Barisan bilangan real adalah suatu fungsi dari $\mathbb{N}$ ke dalam $\mathbb{R}$. Jadi fungsi $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ atau $f(n)$ dengan $n \in \mathbb{N}$ adalah barisan bilangan real. Biasanya $f(n)$ dinyatakan dengan s_n atau x_n yakni suatu huruf dengan indeks n, dan dinamakan elemen atau suku ke-n dari barisan. Barisan dengan s_n sebagai suku ke-n akan ditulis dengan $\langle s_n \rangle$.

Definisi 2.11.

Bilangan real l disebut limit dari barisan $\langle x_n \rangle$ jika untuk sembarang $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan $N \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga untuk semua $n \in \mathbb{N}$ dengan $n \geq N$ berlaku $|x_n - l| < \varepsilon$.

Definisi 2.12.

Barisan $\langle s_n \rangle$ dikatakan konvergen jika terdapat $s \in \mathbb{R}$ dengan sifat, untuk sembarang $\varepsilon > 0$ yang diberikan, terdapat $N \in \mathbb{N}$ sehingga untuk semua $n \in \mathbb{N}$ dengan $n \geq N$ berlaku $| s - s_n| < \varepsilon$.

Barisan $\langle s_n \rangle$ yang mempunyai limit s ini juga dikatakan konvergen ke limit s yang sering dinyatakan dengan $s_n \to s$.

Definisi 2.13.

Jika $<x_n>$ suatu barisan, maka limit superiornya didefinisikan sebagai berikut:

$\overline{\lim}\, x_n = \inf_n \sup_{k\geq n} x_k$.

Jadi bilangan real l adalah limit superior dari barisan $<x_n>$ jika dan hanya jika

(i) untuk sembarang $\varepsilon > 0$, $\exists n$ sedemikian hingga $x_k < l + \varepsilon$ untuk semua $k \geq n$

(ii) untuk sembarang $\varepsilon > 0$, dan untuk n yang diberikan, $\exists k \geq n$ sedemikian hingga $x_k > l - \varepsilon$.

Bilangan real diperluas ∞ adalah limit superior dari $<x_n>$ jika dan hanya jika, untuk sembarang Δ dan n, terdapat $k \geq n$ sedemikian hingga $x_k > \Delta$. Bilangan real diperluas $-\infty$ adalah limit superior dari $<x_n>$ jika dan hanya jika $-\infty = \lim x_n$.

Definisi 2.14.

Jika $<x_n>$ suatu barisan, maka limit inferior didefinisikan sebagai berikut:

$\underline{\lim}\, x_n = \sup_n \inf_{k\geq n} x_k$.

Kita juga perlu mengetahui bahwa $\overline{\lim} -x_n = -\underline{\lim}\, x_n$, dan $\underline{\lim}\, x_n \leq \overline{\lim}\, x_n$. Barisan $<x_n>$ konvergen ke bilangan real l jika dan hanya jika $l = \underline{\lim}\, x_n = \overline{\lim}\, x_n$. Jika $<x_n>$ dan $<y_n>$ adalah dua barisan, maka

$\underline{\lim}\, x_n + \underline{\lim}\, y_n \leq \underline{\lim}\, (x_n + y_n) \leq \overline{\lim}\, x_n + \underline{\lim}\, y_n \leq \overline{\lim}\, (x_n + y_n) \leq \overline{\lim}\, x_n + \overline{\lim}\, y_n$.

Teorema 2.6.

(i) Jika $<I_n>$ barisan selang tertutup dengan $I_n \supset I_{n+1}$ untuk $\forall n \in \mathbb{N}$ maka

$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \phi$.

(ii) Jika pada (i) diketahui juga bahwa $\lim_{n\to\infty} |I_n| = 0$ dengan $|I_n|$ panjang selang tertutup I_n maka $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ adalah himpunan satu elemen, yakni $\exists x \in \mathbb{R}$ sehingga $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{x\}$.

Bukti:

(i) Dimisalkan $I_n = [a_n, b_n]$. Tentu saja untuk $\forall n \in \mathbb{N}$ berlaku $a_n \leq b_n$. Karena diketahui $I_n \supset I_{n+1}$ untuk $\forall n \in \mathbb{N}$ maka $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n \leq a_{n+1} \leq \ldots$ dan $b_1 \geq b_2 \geq \ldots \geq b_n \geq b_{n+1} \geq \ldots$

Untuk $\forall p \in \mathbb{N}$ dan $\forall q \in \mathbb{N}$ berlaku $a_p \leq a_{p+q} \leq b_{p+q} \leq b_q$. Jadi untuk $\forall n \in \mathbb{N}$ dan sembarang q yang diberikan berlaku $a_n \leq b_q$. Dengan demikian semua b_q merupakan batas atas himpunan $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Maka $\exists x \in \mathbb{R}$ sehingga $x = \sup \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ dan $x \leq b_q$ untuk $\forall q \in \mathbb{N}$. Jadi untuk $\forall n \in \mathbb{N}$ berlaku $a_n \leq x \leq b_n$ atau $x \in I_n$ untuk $\forall n \in \mathbb{N}$. Kita telah membuktikan bahwa $\exists x \in \mathbb{R}$ dan $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$, yang berarti bahwa $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ tidak kosong.

(ii) Diketahui syarat tambahan $\lim_{n\to\infty} |I_n| = 0$. Jika diberi $\varepsilon > 0$, maka $\exists N \in \mathbb{N}$ sehingga $|I_N| < \varepsilon$. Diandaikan ada x dan y di dalam $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$. Maka $x \in I_N$ dan

$y \in I_N$ sehingga $|x - y| \leq \varepsilon$. Karena $\varepsilon > 0$ sembarang ini berarti $x = y$, jadi $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{x\}$ yakni himpunan satu elemen.

Definisi 2.15.

Diberikan fungsi $f: E \to \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}$ dan $c \in E$. Dikatakan bahwa f kontinu di c, jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ yang diberikan, dapat dicari $\delta > 0$, sehingga untuk semua $x \in E$ dan $|x - c| < \delta$ maka $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$.

Definisi 2.16.

Diberikan fungsi f dari $E \subset \mathbb{R}$ ke dalam $\mathbb{R}$ dan $D \subset E$. Fungsi f dikatakan kontinu pada D jika f kontinu pada setiap titik anggota D.

Definisi 2.17.

Diberikan himpunan $E \subset \mathbb{R}$ dan fungsi $f: E \to \mathbb{R}$. Fungsi f dikatakan kontinu seragam pada himpunan E, jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ yang diberikan terdapat $\delta > 0$ sehingga untuk semua x dan y di dalam E dengan $|x - y| < \delta$ maka $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

C. Himpunan Cantor

Pembahasan himpunan Cantor dibatasi pada selang tertutup [0, 1].

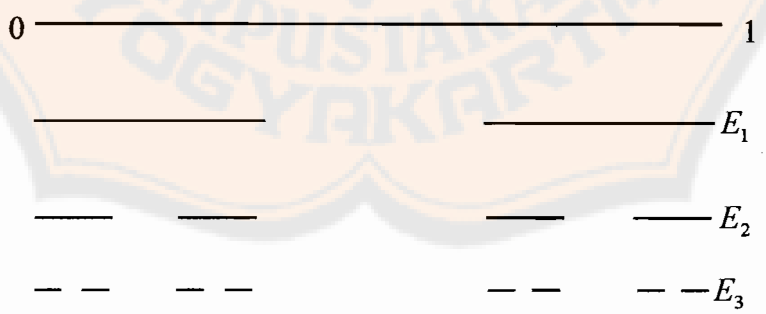
Apabila interval tertutup [0, 1] dihapuskan sepertiga selang terbuka tengahnya, $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, himpunan yang tertinggal kita namakan $E_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$. Kemudian masing-masing selang tertutup $[0, \frac{1}{3}]$ dan $[\frac{2}{3}, 1]$ dibuang selang terbuka tengahnya, dan himpunan yang tertinggal dinamakan $E_2 = [0,\frac{1}{3^2}] \cup [\frac{2}{3^2},\frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3},\frac{7}{3^2}] \cup [\frac{8}{3^2},1]$. Masing-masing selang tertutup dalam E_2 juga dihapus sepertiga selang terbuka tengahnya dan himpunan yang tertinggal dinamakan E_3 yang merupakan gabungan dari 2^3 selang tertutup yang masing-masing panjangnya $\frac{1}{3^3}$. Jika proses ini dikerjakan terus-menerus akan diperoleh barisan himpunan $\langle E_n \rangle$ dengan sifat untuk $\forall n \in \mathbb{N}$:

a. E_n tidak kosong,

b. $E_n \supset E_{n+1}$,

c. E_n terdiri atas 2^n selang tertutup yang masing-masing panjangnya 3^{-n}.

Proses di atas dapat digambarkan sebagai berikut:



Karena E_n merupakan gabungan berhingga banyak himpunan tertutup (2^n selang tertutup) maka menurut teorema 2.3.(b) E_n merupakan himpunan tertutup untuk $\forall n \in \mathbb{N}$.

Dibentuk himpunan Cantor $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$. Himpunan C merupakan himpunan titik yang tertinggal dalam proses penghapusan sepertiga selang terbuka tengah yang dilakukan terus-menerus sehingga menurut teorema 2.3.(a) C merupakan himpunan tertutup. Karena C adalah subhimpunan [0, 1], jadi himpunan Cantor adalah himpunan yang tertutup dan terbatas.

Sekarang akan diselidiki tentang "panjang" himpunan Cantor. Kita telah mengetahui bahwa panjang selang $[a, b]$, $[a, b)$, $(a, b]$, dan (a, b) adalah $b - a$. Panjang selang [0, 1] kita nyatakan dengan $l([0, 1]) = 1$, maka "panjang" himpunan Cantor adalah

$l(\mathrm{C}) = 1 - \frac{1}{3} - \frac{2}{3^2} - \frac{2^2}{3^3} - \frac{2^3}{3^4} - \ldots - \frac{2^n}{3^{n+1}} - \ldots = 0$. Jadi $l(\mathrm{C}) = 0$.

Teorema 2.7.

Himpunan Cantor merupakan himpunan tak terbilang.

Bukti:

Sifat tak terbilang dari himpunan Cantor dapat dibuktikan dengan menyajikan bilangan-bilangan anggota himpunan Cantor dalam sistem basis tiga. Setiap bilangan $x \in C$ disajikan dalam ekspansi sistem basis tiga yang tak berakhir. Sebagai contoh: $0 = 0{,}000\ldots$; $1 = 1{,}000\ldots$; $\frac{1}{3} = 0{,}1000\ldots = 0{,}0222\ldots$; $\frac{2}{3} = 0{,}2000\ldots = 0{,}1222\ldots$

Untuk $x \in \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, maka 0,1000 … $< x <$ 0,1222 …. Jadi untuk x dalam selang ini disajikan dengan angka 1 pada posisi pertama di belakang koma (dan sekurang-kurangnya satu tempat pada posisi yang lain ditempati oleh angka 1 atau 2). Untuk $x \in \left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$, maka 0,21000 … $< x <$ 0,22000…. Jadi dalam ekspansi ini x selalu mempunyai angka 1 di posisi kedua di belakang koma. Demikian seterusnya. Jadi semua ekspansi yang memuat angka 1 di posisi pertama, angka 1 di posisi kedua, dan seterusnya, adalah bilangan-bilangan yang terhapuskan dalam proses konstruksi himpunan Cantor.

Jadi setiap bilangan x dalam himpunan Cantor, dalam sistem basis tiga, disajikan secara tunggal dalam bentuk ekspansi tak berakhir yang hanya terdiri atas angka 0 atau 2.

Karena semua barisan dengan elemen 0 atau 2 adalah himpunan tak terbilang maka himpunan Cantor merupakan himpunan tak terbilang.

Sehingga himpunan Cantor dapat didefinisikan sebagai berikut:

Definisi 2.18.

Himpunan Cantor adalah himpunan yang tertutup dan terbatas, tak terbilang, dan "panjangnya" nol.

Contoh 2.1.

Selidikilah apakah bilangan $\frac{1}{4}$ anggota himpunan Cantor C atau tidak.

Penyelesaian:

Jika ditulis dalam sistem basis tiga yang tak berakhir, maka

$$\frac{1}{4} = 0{,}02020202\ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{9^n} = \frac{2}{9}\frac{1}{1-\frac{1}{9}}.$$

Karena dalam ekspansi ini tidak terdapat angka 1, maka $\frac{1}{4} \in C$.

D. Himpunan Kompak

Sebelum mendefinisikan himpunan kompak lebih dahulu diperkenalkan pengertian selimut terbuka suatu himpunan yang akan dibicarakan berikut ini.

Definisi 2.19.

Diberikan himpunan $E \subset \mathbb{R}$. Suatu selimut terbuka dari himpunan E adalah suatu keluarga $\mathcal{G} = \{G_\alpha \colon \alpha \in A\}$ dari himpunan-himpunan terbuka dalam $\mathbb{R}$ yang gabungannya memuat E; jadi $E \subset \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$.

Jika $\mathcal{H}$ subkeluarga dari $\mathcal{G}$ sehingga gabungan semua himpunan di dalam $\mathcal{H}$ juga memuat E, maka $\mathcal{H}$ dinamakan subselimut dari $\mathcal{G}$. Jika $\mathcal{H}$ subkeluarga berhingga dari $\mathcal{G}$, maka $\mathcal{H}$ dinamakan subselimut berhingga dari $\mathcal{G}$.

Contoh 2.2.

Diberikan himpunan $E = [1, \infty)$. Buatlah selimut terbuka untuk E.

Penyelesaian:

Selimut tebuka untuk himpunan E ada banyak sekali, di antaranya adalah sebagai berikut:

$\mathcal{G}_0 = \{(0, \infty)\}$;

$\mathcal{G}_1 = \{N(x, \varepsilon): x \in E\}$ dengan $\varepsilon > 0$ yang diberikan;

$\mathcal{G}_2 = \{r - 1, r + 1: r \in \mathbb{Q}$ dan $r > 0\}$; $\mathbb{Q}$ merupakan himpunan bilangan rasional.

$\mathcal{G}_3 = \{(n - 1, n + 1): n \in \mathbb{N}\}$,

$\mathcal{G}_4 = \{(0, n): \mathrm{n} \in \mathbb{N}\}$.

Dari penyelesaian contoh 2.2. tampak bahwa hanya $\mathcal{G}_0$ yang memuat subselimut berhingga.

Definisi 2.20.

Himpunan $K \subset \mathbb{R}$ dikatakan kompak jika setiap selimut terbuka untuk K mempunyai subselimut berhingga.

Jadi untuk membuktikan suatu himpunan K adalah kompak dengan menggunakan definisi, kita harus mulai dengan sembarang keluarga himpunan terbuka yang gabungannya memuat K, selanjutnya ditunjukkan bahwa dapat dipilih sejumlah berhingga keluarga itu yang gabungannya masih memuat K. Sedangkan untuk membuktikan bahwa himpunan E tidak kompak dengan cara mengkonstruksi suatu selimut terbuka untuk E yang tidak memuat subselimut berhingga.

Contoh 2.3.

Jika H himpunan berhingga dalam $\mathbb{R}$ maka H kompak.

Penyelesaian:

Dimisalkan $H = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ dan $\mathcal{G} = \{G_\alpha\colon \alpha \in A\}$ sembarang selimut terbuka untuk H. Karena $H \subset \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$, maka untuk setiap j $(1 \le j \le n)$, terdapat $\alpha \in A$, sehingga $x_j \in G_\alpha$. Untuk setiap j kita ambil satu α, namakan α_j, sehingga $x_j \in G_{\alpha_j}$. Maka $\{G_{\alpha_1}, G_{\alpha_2}, \ldots, G_{\alpha_n}\}$ subkeluarga berhingga dari $\mathcal{G}$ dan $H \subset \bigcup_{j=1}^{n} G_{\alpha_j}$. Terbukti H kompak.

Contoh 2.4.

Buktikan bahwa $E = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ tidak kompak.

Penyelesaian:

Akan dikonstruksi selimut terbuka $\mathcal{G}$ dari E yang tidak mempunyai subselimut berhingga. Kita usahakan setiap himpunan terbuka dalam $\mathcal{G}$ hanya memuat tepat satu elemen dari E. Selang terbuka $(\frac{1}{2}, 2)$ hanya memuat satu titik dari E, yakni 1. Selanjutnya untuk $\forall n$ dengan $n \ge 2$, dibuat selang terbuka $\left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n-1}\right)$ yang memuat tepat satu satu titik $\frac{1}{n}$ dari E. Dengan demikian keluarga $\mathcal{G} = \{G_n : n \in \mathbb{N}\}$ dengan $G_1 = (\frac{1}{2}, 2)$ dan $G_n = \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n-1}\right)$ untuk $n \geq 2$ adalah selimut terbuka untuk E.

Dari konstruksi di atas tampak bahwa jika satu himpunan, G_n misalnya dihapuskan dari $\mathcal{G}$ maka $\bigcup_{n \neq n} G_n$ tidak memuat E. Jelas bahwa $\mathcal{G}$ selimut terbuka untuk E tetapi tidak mempunyai subselimut berhingga untuk E. Jadi E tidak kompak.

Teorema 2.8.

Jika K suatu himpunan kompak dalam $\mathbb{R}$, maka K tertutup dan terbatas.

Bukti:

Untuk setiap $x \in K$ dibuat kitar $N(x, 1) = (x - 1, x + 1)$. Maka keluarga $\mathcal{G} = \{N(x, 1) : x \in K\}$ adalah suatu selimut terbuka dari K. Karena K kompak maka terdapat $x_1, x_2, \dots, x_n$ di dalam K sehingga $K \subset \bigcup_{j=1}^{n} N(x_j, 1)$. Jika $a = \min \{x_j : 1 \leq j \leq n\}$ dan $b = \text{maks } \{x_j : 1 \leq j \leq n\}$ maka K subhimpunan dari selang $[a - 1, b + 1]$. Jadi K terbatas.

Sekarang akan dibuktikan K tertutup dengan membuktikan bahwa K^c terbuka. Diandaikan $p \in K^c$, jadi $p \notin K$. Untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ himpunan $G_n = \{x : |x - p| > \frac{1}{n}\}$ adalah komplemen dari himpunan (interval) tertutup $[p - \frac{1}{n}, p + \frac{1}{n}]$, jadi

G_n terbuka. Karena $\mathbb{R} - \{p\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$ dan $p \notin K$, maka $K \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$. Karena K kompak, maka terdapat $G_1, G_2, \ldots, G_r$ sehingga $K \subset \bigcup_{j=1}^{r} G_j = G_r$.

Jadi $[p - \frac{1}{r}, p + \frac{1}{r}] = (G_r)^c$ dan karena $K \subset G_r$, maka $\mathrm{N}(p, \frac{1}{r}) \cap K = \phi$ sehingga $N(p, \frac{1}{r}) \subset K^c$.

Karena jika $p \in K^c$ maka p titik interior K^c, jadi K^c terbuka dan K tertutup.

Teorema 2.8. mengatakan bahwa himpunan yang tak tertutup atau tak terbatas pasti tidak kompak. Himpunan $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{N}$, $(-\infty, 1)$, dan $(1, \infty)$ tidak kompak sebab mereka tak terbatas. Himpunan $(1, 5)$, $[0, 7)$, $(0, 5]$ juga tidak kompak karena mereka tidak tertutup.

Teorema 2.9.

Jika K subhimpunan kompak dalam $\mathbb{R}$, dan F subhimpunan tertutup K, maka F kompak.

Bukti:

Dimisalkan $\mathcal{G} = \{G_\alpha \colon \alpha \in A\}$ sembarang selimut terbuka untuk F. Jika kepada $\mathcal{G}$ ditambahkan satu selimut terbuka untuk $G = F^c$ maka keluarga $\mathcal{H} = \mathcal{G} \cup \{G\}$ adalah suatu selimut terbuka untuk K, karena bagian himpunan K yang belum terselimuti oleh $\mathcal{G}$ akan tertutup oleh G.

Karena K kompak maka $\mathcal{H}$ harus memuat subselimut berhingga untuk K. Subselimut berhingga ini tentu saja harus memuat G. Jadi, terdapat $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ di dalam A, sehingga $\{G, G_{\alpha_1}, \dots, G_{\alpha_n}\}$ yakni subselimut berhingga dari $\mathcal{H}$, akan menyelimuti K. Karena $G = F^c$ saling asing dengan F, maka $\{G_{\alpha_1}, \dots, G_{\alpha_n}\}$ subkeluarga berhingga dari $\mathcal{G}$ dan merupakan selimut berhingga untuk F, dan terbuktilah teorema di atas.

Teorema 2.10.

Suatu interval tertutup dan terbatas $[a, b]$ adalah kompak.

Bukti:

Andaikan $[a, b]$ tidak kompak.

Jadi terdapat selimut terbuka $\mathcal{G}$ yang menyelimuti $[a, b]$ tetapi tidak memuat subselimut berhingga.

Interval tertutup $[a, b]$ dibagi menjadi dua bagian, yaitu $[a, c]$ dan $[c, b]$. Jadi ada paling sedikit satu dari $[a, c]$ dan $[c, b]$ tidak dapat diselimuti oleh subkeluarga berhingga dari $\mathcal{G}$. Interval yang tidak dapat diselimuti misalkan $[a_1, b_1]$. Interval $[a_1, b_1]$ dibagi menjadi dua bagian misalkan menjadi $[a_1, c_1]$ dan $[c_1, b_1]$. Demikian juga paling sedikit satu dari $[a_1, c_1]$ dan $[c_1, b_1]$ tidak dapat diselimuti oleh keluarga berhingga dari $\mathcal{G}$, misalkan $[a_2, b_2]$. Demikian seterusnya sehingga terbentuk barisan monoton turun yang semuanya tidak dapat diselimuti oleh subkeluarga berhingga dari $\mathcal{G}$. Menurut teorema 2.6. (ii)

$\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n] = \{x\}$ x pasti di dalam salah satu selimut misalkan G_{α_0}. G_{α_0} terbuka dan $x \in G_{\alpha_0}$ sehingga ada satu interval terbuka yang memuat x, misalkan $(x - r, x + r)$ dengan $r > 0$. Karena $x \in [a_n, b_n]$ sehingga ada n cukup besar dengan $[a_n, b_n] \subset (x - r, x + r) \subset G_{\alpha_0}$. Jadi ada $[a_n, b_n]$ yang dapat diselimuti oleh $\mathcal{G}$. Terjadi kontradiksi. Jadi $[a_n, b_n]$ kompak.

Teorema 2.11.

Jika K himpunan tertutup dan terbatas maka K kompak.

Bukti:

Diandaikan K tidak kompak, jadi terdapatlah suatu selimut terbuka $\mathcal{G}$ untuk K yang tidak mempunyai subselimut berhingga. Terdapat selang tertutup $I_0 = [-a, a]$ sehingga $K \subset [-a, a]$, karena K terbatas dalam $\mathbb{R}$. Maka paling sedikit satu dari dua selang tertutup $[-a, 0]$ dan $[0, a]$, irisannnya dengan K tidak termuat di dalam gabungan sejumlah berhingga dari himpunan-himpunan anggota $\mathcal{G}$, sebab jika tidak demikian, berarti $\mathcal{G}$ mempunyai subselimut berhingga untuk K. Selang yang mempunyai sifat ini, misalnya $[0, a]$, kita namakan I_1. Jadi $I_1 \cap K$ tidak termuat dalam gabungan sejumlah berhingga himpunan tersebut. Demikian juga paling sedikit satu di antara $[0, \frac{a}{2}]$ dan $[\frac{a}{2}, a]$, irisannya dengan K tidak termuat dalam gabungan sejumlah berhingga dari $\mathcal{G}$. Selang ini, misalnya $[\frac{a}{2}, a]$, kita namakan I_2, sehingga $I_2 \cap K$ tidak termuat dalam gabungan sejumlah berhingga himpunan anggota $\mathcal{G}$. Demikian seterusnya kita membentuk barisan selang tertutup $\langle I_n \rangle$ sedemikian hingga untuk $\forall n \in \mathbb{N}$ berlaku:

(i) $I_n \cap K$ tidak termuat dalam gabungan sejumlah berhingga himpunan-himpunan angota $\mathcal{G}$,

(ii) $I_n \supset I_{n-1}$,

(iii)panjang I_n, yakni $|I_n| = \dfrac{a}{2^{n-1}}$

Dengan demikian menurut teorema 2.6. (ii) $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{p\}$, karena lim $|I_n| = 0$.

Untuk sembarang $\varepsilon > 0$, maka ada m sehingga $\dfrac{a}{2^{m-1}} < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Titik $p \in I_m$, dan $|I_m| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, jadi jika $x \in I_m$ maka $|x - p| \leq \dfrac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$. Dengan demikian $I_m \subset N(p, \varepsilon)$, dan $N(p, \varepsilon)$ memuat tak hingga banyak titik anggota K. Jadi p adalah titik limit K. Karena K tertutup, maka $p \in K$. Jadi haruslah ada suatu himpunan terbuka $G \in \mathcal{G}$ dan $p \in G$. Karena G terbuka maka terdapat $\varepsilon > 0$ sehingga $(p - \varepsilon, p + \varepsilon) \subset G$. Dapat dicari m sehingga $|I_m| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Karena $p \in I_m$, maka $I_m \subset (p - \varepsilon, p + \varepsilon) \subset G$. Terdapat kontradiksi, karena menurut (i) $I_m \cap K$ tidak termuat dalam sejumlah berhingga gabungan himpunan-himpunan anggota $\mathcal{G}$.

Dari teorema 2.8. dan teorema 2.11. maka dapat disimpulkan bahwa himpunan $K \subset \mathbb{R}$ kompak jika dan hanya jika K tertutup dan terbatas.

Definisi 2.21.

Subhimpunan E dari $\mathbb{R}$ dikatakan mempunyai sifat Heine-Borel jika setiap selimut terbuka himpunan E mempunyai subselimut berhingga.

Jadi suatu himpunan adalah kompak jika dan hanya jika himpunan itu mempunyai sifat Heine-Borel.

Setelah mempelajari himpunan kompak, kita akan membahas sifat-sifat dari fungsi kontinu. Namun, sifat-sifat fungsi kontinu tidak dibuktikan.

Teorema 2.12.

Jika f fungsi kontinu dari K ke dalam $\mathbb{R}$, dan K subhimpunan kompak dalam $\mathbb{R}$, maka f kontinu seragam pada K dan $f(K)$ kompak dalam $\mathbb{R}$.

Teorema 2.13.

Jika f fungsi kontinu pada himpunan kompak $K \subset \mathbb{R}$ ke dalam $\mathbb{R}$, maka f memiliki minimum absolut m dan maksimum absolut M, yakni, terdapat $x_1 \in K$ dan $x_2 \in K$ sehingga $f(x_1) = m$ dan $f(x_2) = M$ dengan $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ untuk setiap $x \in K$.

Teorema 2.14.

Jika f fungsi yang didefinisikan dan kontinu pada interval (a, b) maka $f((a, b))$ juga interval.

Teorema 2.15.

Diberikan fungsi kontinu f pada himpunan tertutup $E \subset \mathbb{R}$. Maka terdapat fungsi g yang kontinu pada $\mathbb{R}$ sedemikian hingga $g(x) = f(x)$ untuk $x \in E$.

Fungsi g dinamakan perluasan fungsi kontinu pada $\mathbb{R}$.

E. Barisan Fungsi

Diberikan barisan fungsi $<f_n>$ yang didefinisikan pada himpunan $E \subset \mathbb{R}$. Jika untuk setiap $x \in E$ barisan fungsi $f_n(x)$ konvergen maka dikatakan bahwa barisan fungsi $<f_n>$ konvergen titik demi titik pada E, yang sering juga disingkat $<f_n>$ konvergen pada E. Jika barisan fungsi $<f_n>$ konvergen pada E maka barisan itu menentukan fungsi f sehingga $f_n(x) \to f(x)$ untuk setiap $x \in E$. Fungsi f ini dinamakan fungsi limit dari barisan fungsi $<f_n>$.

Pada pembahasan selanjutnya kata konvergen titik demi titik disingkat menjadi konvergen.

Definisi 2.22.

Barisan fungsi $<f_n>$ yang didefinisikan pada E dikatakan konvergen seragam ke f pada E jika, untuk sembarang $\varepsilon > 0$, terdapat N sedemikian hingga untuk semua $x \in E$ dan untuk semua $n \geq N$ maka $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Teorema 2.16.

Diberikan barisan fungsi $<f_n>$ yang konvergen seragam ke f pada E dan p titik limit E.

Jika $\lim\limits_{x \to p} f_n(x) = A_n$ untuk $n \in \mathbb{N}$,

maka barisan bilangan $\langle A_n \rangle$ konvergen, dan $\lim\limits_{x \to p} f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} A_n$.

Jadi, $\lim\limits_{x \to p} \lim\limits_{n \to \infty} f_n(x) = \lim\limits_{n \to \infty} \lim\limits_{x \to p} f_n(x)$.

Teorema 2.17.

Jika $\langle f_n \rangle$ barisan fungsi kontinu pada E, dan $f_n \to f$ seragam pada E, maka f kontinu pada E.

BAB III

UKURAN PADA GARIS REAL

Sebelum membicarakan ukuran pada garis real, lebih dulu dibahas konsep aljabar himpunan.

A. Aljabar Himpunan

Diberikan himpunan semesta X.

Definisi 3.1.

Keluarga tak kosong $\mathcal{A}$ dari subhimpunan dari X dinamakan *aljabar himpunan* jika dipenuhi:

1. Jika $A \in \mathcal{A}$ maka $A^c = (X - A) \in \mathcal{A}$
2. Jika A, $B \in \mathcal{A}$ maka $(A \cup B) \in \mathcal{A}$.

Dari definisi 3.1. maka setiap aljabar himpunan memuat ϕ dan X. Buktinya sebagai berikut:

Diberikan aljabar himpunan $\mathcal{A}$. Akan dibuktikan $\phi, X \in \mathcal{A}$.

$\mathcal{A}$ keluarga tak kosong dari subhimpunan dari X. Andaikan $A \in \mathcal{A}$ maka $A^c \in \mathcal{A}$. Jadi $A \cup A^c = X \in \mathcal{A}$. Karena $X \in \mathcal{A}$ maka $X^c = \phi \in \mathcal{A}$. Jadi $\phi, X \in \mathcal{A}$.

Dari definisi 3.1. diketahui bahwa $A \in \mathcal{A}$ dan $B \in \mathcal{A}$ maka $A^c \in \mathcal{A}$ dan $B^c \in \mathcal{A}$. Jadi $A^c \cup B^c \in \mathcal{A}$. Menurut hukum De Morgan $A^c \cup B^c = (A \cap B)^c$ maka $(A \cap B)^c \in \mathcal{A}$ dan $(A \cap B) \in \mathcal{A}$. Jadi aljabar himpunan $\mathcal{A}$ adalah keluarga subhimpunan dari X yang tertutup terhadap operasi komplemen dan operasi gabungan dan operasi irisan untuk setiap dua anggota dari $\mathcal{A}$. Dengan menggunakan prinsip induksi matematika, aljabar himpunan $\mathcal{A}$

dapat didefinisikan sebagai keluarga tak kosong subhimpunan dari X yang tertutup terhadap operasi komplemen dan operasi gabungan berhingga dan irisan berhingga.

Pada pembahasan selanjutnya aljabar himpunan disingkat aljabar.

Contoh 3.1.

Untuk $X = \{a, b, c\}$ buatlah aljabar $\mathcal{A}$ yang memuat $\{a\}$ dan $\{b\}$!

Penyelesaian:

$\mathcal{A} \supset \{\phi, X, \{a\}, \{b\}\}$. Untuk memenuhi sifat (1) dalam definisi 3.1., $\mathcal{A}$ harus memuat $\{c\}$, $\{b, c\}$ dan $\{a, c\}$. Untuk memenuhi sifat (2) dalam definisi 3.1. , $\mathcal{A}$ harus memuat $\{a, b\}$. Maka $\mathcal{A} = \{\phi, X, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$. Jadi $\mathcal{A}$ adalah himpunan dari semua himpunan bagian X.

Teorema 3.1.

Diberikan keluarga $\mathcal{C}$ dari subhimpunan dari X, ada aljabar $\mathcal{A}$ terkecil yang memuat $\mathcal{C}$; yaitu ada aljabar $\mathcal{A}$ yang memuat $\mathcal{C}$ dan sedemikian hingga jika $\mathcal{B}$ sembarang aljabar yang memuat $\mathcal{C}$, maka $\mathcal{B}$ memuat $\mathcal{A}$.

Bukti:

Diberikan keluarga $\mathcal{F}$ dari semua aljabar yang memuat $\mathcal{C}$. Diberikan $\mathcal{A} = \cap\{\mathcal{B} : \mathcal{B} \in \mathcal{F}\}$. Karena $\mathcal{C} \in \mathcal{A}$ akan dibuktikan bahwa $\mathcal{A}$ suatu aljabar. Andaikan $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{A}$ maka A dan B di dalam $\mathcal{B}$ untuk semua $\mathcal{B}$ dalam $\mathcal{F}$ sehingga $A \cup B \in \mathcal{B}$ dan $A^c \in \mathcal{B}$ untuk semua $\mathcal{B}$ di dalam $\mathcal{F}$. Jadi $A \cup B \in \mathcal{A}$

dan $A^c \in \mathcal{A}$. Dapat disimpulkan $\mathcal{A}$ adalah suatu aljabar. Jadi $\mathcal{A}$ aljabar terkecil yang memuat $\mathcal{C}$.

Teorema 3.2.

Diberikan aljabar $\mathcal{A}$ dan $<A_i>$ barisan himpunan dengan $A_i \in \mathcal{A}$. Maka terdapat $<B_i>$ dengan $B_i \in \mathcal{A}$ sehingga $B_n \cap B_m = \phi$ untuk $n \neq m$ dan $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$.

Bukti:

Karena teorema 3.2. berlaku jika $<A_i>$ barisan berhingga, maka diasumsikan $<A_i>$ merupakan barisan tak hingga. Himpunan $B_1 = A_1$, dan untuk setiap bilangan asli $n > 1$ didefinisikan

$$B_n = A_n - [A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}] = A_n \cap A_1^c \cap A_2^c \cap \ldots \cap A_{n-1}^c$$

Karena $\mathcal{A}$ adalah aljabar maka komplemen dan irisan himpunan dalam $\mathcal{A}$ juga dalam $\mathcal{A}$, sehingga $B_n \in \mathcal{A}$ untuk setiap n. Diberikan B_n dan B_m dua himpunan, dan misalkan $m < n$. Karena $B_n \subset A_n$ maka $B_m \subset A_m$, dan

$$\begin{aligned}(B_m \cap B_n) &\subset (A_m \cap B_n)\\ &= A_m \cap A_n \cap \ldots \cap A_m^c \cap \ldots \cap A_{n-1}^c\\ &= (A_m \cap A_m^c) \cap \ldots \cap A_{n-1}^c\\ &= \phi \cap \ldots \cap A_{n-1}^c = \phi.\end{aligned}$$

Karena $B_i \subset A_i$, maka $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$.

Diberikan $x \in \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$. Maka x harus merupakan anggota dari salah satu A_i.

Diberikan n nilai terkecil i sedemikian hingga $x \in A_i$. Maka $x \in B_n$, dan juga

$x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$. Maka $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \supset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

Jadi $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

Definisi 3.2.

Keluarga $\mathcal{A}$ dari himpunan bagian X disebut aljabar-σ jika $\mathcal{A}$ suatu aljabar dan jika $\langle A_n \rangle$ barisan himpunan dalam $\mathcal{A}$ maka $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$.

Definisi 3.3.

Keluarga $\mathcal{B}$ dari himpunan Borel adalah aljabar-σ terkecil yang memuat semua himpunan terbuka.

Akibat 3.3.1.

Keluarga Borel $\mathcal{B}$ adalah aljabar-σ terkecil yang memuat semua himpunan tertutup dan aljabar-σ terkecil yang memuat semua interval terbuka.

Bukti:

Diberikan B adalah himpunan semua aljabar-σ yang memuat semua himpunan terbuka dan $\mathcal{B}$ merupakan aljabar-σ terkecil yang memuat semua himpunan terbuka sehingga $\mathcal{B} = \cap\{\beta \colon \beta \in \mathrm{B}\}$. Diberikan F adalah himpunan semua aljabar-σ yang memuat semua himpunan tertutup dan $\mathcal{F}$ merupakan aljabar-σ terkecil yang memuat semua himpunan tertutup sehingga $\mathcal{F} = \cap\{\gamma : \gamma \in \mathrm{F}\}$. Dibuktikan $\mathcal{B} = \mathcal{F}$.

Andaikan keluarga G_n dari himpunan terbuka maka $G_n \in \beta$ untuk semua $\beta \in \mathrm{B}$. Karena β aljabar-σ maka $\cup G_n \in \beta$ dan $\cup G_n^c \in \beta$ untuk semua $\beta \in \mathrm{B}$. Jadi $\cup G_n^c \in \mathcal{B}$.

Dibentuk $G_n^c = F_n$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$, maka F_n merupakan kelurga dari himpunan tertutup. Oleh karena itu $F_n \in \gamma$ untuk semua $\gamma \in \mathrm{F}$. Karena γ aljabar-σ maka $\cup F_n \in \gamma$ dan $\cup F_n^c \in \gamma$ untuk semua $\gamma \in \mathrm{F}$. Jadi $\cup F_n^c \in \mathcal{F}$.

Karena untuk sembarang $F_n \in \mathcal{F}$ berlaku $F_n = G_n^c$ tertutup maka $\cup F_n = \cup G_n^c \in \mathcal{B}$. Maka $\cup F_n \in \mathcal{B}$. Jadi $\mathcal{F} \subset \mathcal{B}$

Karena untuk sembarang $G_n \in \mathcal{B}$ berlaku $G_n = F_n^c$ terbuka maka $\cup G_n = \cup F_n^c \in \mathcal{F}$. Maka $\cup G_n \in \mathcal{F}$. Jadi $\mathcal{B} \subset \mathcal{F}$. Terbukti bahwa $\mathcal{F} = \mathcal{B}$. Jadi Keluarga Borel $\mathcal{B}$ adalah aljabar-σ terkecil yang memuat semua himpunan tertutup

Menurut teorema 2.4. maka terbukti bahwa keluarga Borel $\mathcal{B}$ adalah aljabar-σ terkecil yang memuat semua interval terbuka.

B. Ukuran Pada Garis Real

Masalah yang akan dibahas adalah ukuran pada sembarang subhimpunan dalam $\mathbb{R}$. Ukuran tersebut menjadi panjang interval apabila digunakan untuk mengukur panjang interval.

Ukuran untuk $E \subset \mathbb{R}$ dinyatakan dengan mE, di mana m adalah fungsi himpunan dari setiap himpunan E pada keluarga himpunan $\mathcal{M}$ ke himpunan bilangan real yang diperluas dan non-negatif. Sehingga untuk suatu interval I maka $mI = l(I)$, dengan $l(I)$ adalah panjang interval I. Untuk sembarang $a, b \in \mathbb{R}$ maka $l((a, b)) = l([a, b]) = l((a, b]) = l([a, b)) = b - a$. Ukuran yang diinginkan mempunyai sifat:

1. mE didefinisikan untuk setiap himpunan bilangan real E; yaitu $\mathcal{M} = \wp(\mathbb{R})$; dengan $\wp(\mathbb{R})$ merupakan keluarga dari semua subhimpunan dari $\mathbb{R}$.
2. Untuk suatu interval I, $mI = l(I)$;
3. Jika $\langle E_n \rangle$ barisan himpunan yang saling asing (di mana m didefinisikan) maka $m(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} mE_n$;
4. m invarian terhadap translasi; yaitu, jika E suatu himpunan di mana m didefinisikan dan jika $E + y$ adalah himpunan $\{x + y : x \in E\}$, yang diperoleh dengan mengganti setiap titik E dengan titik $x + y$, maka $m(E + y) = mE$.

Tetapi tidak mungkin bisa dibuat fungsi himpunan m yang memenuhi empat sifat di atas, sehingga syarat pertama harus diperlemah dan m cukup didefinisikan pada keluarga $\mathcal{M}$ subhimpunan dari $\mathbb{R}$ yang mempunyai sifat aljabar-σ. *Ukuran m bersifat terjumlah terbilang* jika merupakan suatu fungsi bernilai real yang diperluas dan non-negatif yang didefinisikan pada aljabar-σ $\mathcal{M}$ dan $m\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \sum_{n=1}^{\infty} mE_n$ untuk setiap barisan himpunan yang saling asing $<E_n>$ dalam $\mathcal{M}$. Pembahasan selanjutnya adalah menciptakan suatu ukuran terjumlah terbilang yang invarian terhadap translasi dan mempunyai sifat $mI = l(I)$ untuk setiap interval I.

Teorema 3.3.

Diberikan m suatu ukuran terjumlah terbilang yang didefinisikan pada aljabar-σ $\mathcal{M}$, maka

1. Jika $A \subset \mathcal{M}$, $B \subset \mathcal{M}$ dengan $A \subset B$ maka $mA \leq mB$. Sifat ini disebut monoton.
2. Jika $<E_n>$ sembarang barisan himpunan dalam $\mathcal{M}$, maka $m(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} mE_n$. Sifat ini disebut subterjumlah terbilang.
3. Jika terdapat suatu himpunan A dalam $\mathcal{M}$ sedemikian hingga $mA < \infty$ maka $m\phi = 0$.

Bukti:

1. $A \subset B$ maka $B = A \cup (B - A)$

   $B = E_1 \cup E_2$ dengan $E_1 = A$ dan $E_2 = B - A$ dan $E_1 \cap E_2 = \phi$.

   Diketahui m ukuran terjumlah terbilang, maka $m\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \sum_{n=1}^{\infty} mE_n$ untuk himpunan E_n yang saling asing. Maka $mB = \sum mE_n = mA + m(B - A) + \sum_{n=3}^{\infty} mE_n$ dengan $E_n = \phi$, $\forall\, n \geq 3$. Jadi $mB \geq mA$.

2. Dengan menggunakan teorema 3.2. maka terdapat barisan himpunan yang saling asing $<B_i>$ dengan $B_i \in \mathcal{M}$ dan $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$.

   Misal $B_1 = E_1$; $B_2 = E_2 - E_1$; $B_3 = E_3 - E_2 - E_1$. Maka $B_n \subset E_n$ sehingga $mB_n \leq mE_n$.

   $B_n = E_n - E_1 - E_2 - \ldots - E_{n-1}$

   $m(\cup E_n) = m(\cup B_n) = \sum m(B_n) \leq \sum m(E_n)$.

   Jadi $m(\cup E_n) \leq \sum m(E_n)$.

3. Diberikan himpunan A dan $m(A) < \infty$.

   $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, $E_1 = A$, $E_n = \phi$ untuk $n \geq 2$, dan E barisan himpunan yang saling asing. Maka $m(A) = \sum_{n=1}^{\infty} m(E_n) = m(A) + \sum_{n=2}^{\infty} m\phi$.

   Jadi $\sum_{n=2}^{\infty} m\phi = 0$. Karena $mA < \infty$ dan $m \geq 0$ maka $m(\phi) = 0$.

1. Ukuran Luar Lebesgue

Definisi 3.4.

Untuk setiap $A \subset \mathbb{R}$ maka ukuran luar Lebesgue dari A adalah $m^*A = \inf \sum l(I_n)$, di mana $\{I_n\}$ adalah keluarga terbilang interval terbuka yang menyelimuti A; yaitu $A \subset \cup I_n$.

Pada pembahasan selanjutnya ukuran luar Lebesgue disingkat ukuran luar.

Teorema 3.4.

Untuk sembarang himpunan $A, B \subset \mathbb{R}$ berlaku:

1. $m^*A \geq 0$;
2. $m^*\phi = 0$;
3. $m^*A \leq m^*B$ jika $A \subset B$;
4. $m^*\{x\} = 0$ untuk sembarang $x \in \mathbb{R}$.

Bukti:

1. $m^*A \geq 0$.

   Karena panjang interval I_n selalu non negatif maka infimum dari semua jumlah panjang interval juga non negatif. Jadi $m^*A \geq 0$.

2. $m^*\phi = 0$.

   Ambil sembarang $\varepsilon > 0$ maka terdapat suatu interval terbuka I dengan $l(I) < \varepsilon$ dan I memuat ϕ. Jadi $\inf \sum l(I_n) \leq \varepsilon$.

   $\phi \subset I$ maka $l(I) < \varepsilon$.

   $m^*\phi = \inf \sum l(I_n) \leq \varepsilon$. Maka $m^*\phi < \varepsilon$ untuk $\forall \varepsilon > 0$.

   Jadi $m^*\phi = 0$.

3. $m^*A \leq m^*B$ jika $A \subset B$

   $m^*A = \inf \sum l(I_n)$ dan $m^*B = \inf \sum l(J_n)$.

   Bukti dengan kontradiksi.

   Andaikan $m^*B < m^*A$. Maka terdapat keluarga interval terbuka $<J_n>$ yang menutup B dan $m^*B \leq \sum l(J_n) \leq m^*A$. Tetapi $A \subset B$ maka

$A \subset \cup(J_n)$. Jadi tidak mungkin $\sum l(J_n) \leq m^*A = \inf \sum l(I_n)$ di mana $A \subset \sum l(I_n)$.

Jadi $m^*A \leq m^*B$.

4. $m^*\{x\} = 0$.

Ambil sembarang $\varepsilon > 0$ maka terdapat suatu interval terbuka I dengan $l(I) < \varepsilon$ dan $\{x\} \subset I$. Jadi $\inf \sum l(I_n) \leq \varepsilon$.

Maka $m^*\{x\} < \varepsilon$ untuk $\forall \varepsilon > 0$. Jadi $m\{x\} = 0$.

Teorema 3.5.

Ukuran luar interval sama dengan panjang interval.

Bukti:

a. Jika I sembarang interval tertutup, misalkan $[a, b]$. Karena interval terbuka $(a - \varepsilon, b + \varepsilon)$ memuat $[a, b]$ untuk setiap ε positif, maka $m^*[a, b] \leq l(a - \varepsilon, b + \varepsilon) = b - a + 2\varepsilon$. Karena $m^*[a, b] \leq b - a + 2\varepsilon$ untuk setiap ε positif, maka $m^*[a, b] \leq b - a$. Langkah selanjutnya yaitu membuktikan bahwa $m^*[a, b] \geq b - a$. Hal ini ekuivalen dengan menunjukkan bahwa jika $\{I_n\}$ adalah sembarang keluarga interval terbuka yang menyelimuti $[a, b]$, maka $\sum l(I_n) \geq b - a$.

   Menurut teorema Heine-Borel, sembarang keluarga interval terbuka yang menyelimuti $[a, b]$ memuat subkeluarga berhingga yang juga menyelimuti $[a, b]$, dan jumlah panjang subkeluarga berhingga tidak lebih besar dari jumlah panjang keluarga asal. Oleh karena itu $\sum l(I_n) \geq b - a$ cukup dibuktikan dengan keluarga berhingga $\{I_n\}$ yang menyelimuti $[a, b]$. Karena a termuat dalam $\cup I_n$, maka harus ada satu interval dari I_n yang memuat a. Misalkanlah interval (a_1, b_1). Jadi $a_1 < a < b_1$. Jika $b_1 < b$ maka $b_1 \in [a, b]$, dan karena $b_1 \notin (a_1, b_1)$, maka harus ada interval (a_2, b_2) dalam keluarga $\{I_n\}$ sedemikian hingga $b_1 \in (a_2, b_2)$; yaitu $a_2 < b_1 < b_2$. Hal ini terjadi terus menerus sampai pada interval tertentu (a_k, b_k) di mana $b \in (a_k, b_k)$. Maka

$$\begin{aligned}\sum l(I_n) &\geq \sum l(a_i, b_i)\\ &= (b_k - a_k) + (b_{k-1} - a_{k-1}) + \ldots + (b_1 - a_1)\\ &= b_k - (a_k - b_{k-1}) - (a_{k-1} - b_{k-2}) - \ldots - (a_2 - b_1) - a_1 > b_k - a_1,\end{aligned}$$

Karena $a_i < b_{i-1}$. Tetapi $b_k > b$ dan $a_1 < a$, maka $b_k - a_1 > b - a$, sehingga $\sum l(I_n) > (b - a)$. Maka $m^*[a, b] \geq b - a$. Jadi terbukti bahwa $m^*[a, b] = b - a$.

b. Jika I sembarang interval berhingga, maka diberikan $\varepsilon > 0$, ada interval tertutup $J \subset I$ sedemikian hingga $l(J) > l(I) - \varepsilon$. Karenanya

$$l(I) - \varepsilon < l(J) = m^*J \leq m^*I \leq m^*\bar{I} = l(\bar{I}) = l(I)$$

Lalu untuk setiap $\varepsilon > 0$,

$$l(I) - \varepsilon < m^*I \leq l(I). \text{ Jadi } m^*I = l(I).$$

c. Jika I interval tak hingga, maka diberikan sembarang bilangan real Δ, ada interval tertutup $J \subset I$ dengan $l(J) = \Delta$. Oleh karena itu, $m^*I \geq m^*J = l(J) = \Delta$. Karena $m^*I \geq \Delta$ untuk setiap Δ, maka $m^*I = \infty = l(I)$.

Teorema 3.6.

Diberikan $\{A_n\}$ keluarga terbilang himpunan bilangan real. Maka $m^*(\cup A_n) \leq \sum m^* A_n$.

Bukti:

Jika satu dari himpunan A_n mempunyai ukuran luar tak hingga, maka teorema 3.6. berlaku. Jika m^*A_n berhingga, maka diberikan $\varepsilon > 0$, ada keluarga terbilang interval terbuka $\{I_{n,i}\}_i$ sedemikian hingga $A_n \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_{n,i}$ dan $\sum_{i=1}^{\infty} l(I_{n,i}) < m^*A_n + 2^{-n}\varepsilon$. Sekarang keluarga $\{I_{n,i}\}_{n,i} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{I_{n,i}\}_i$ terbilang dan menyelimuti $\cup A_n$. Lalu

$$m^*(\cup A_n) \leq \sum_{n=1,\, i=1}^{\infty} l(I_{n,i}) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} l(I_{n,i}) < \sum_{n=1}^{\infty} (m^* A_n + \varepsilon 2^{-n})$$

$$= \sum m^*A_n + \varepsilon.$$

Karena ε sembarang bilangan positif, maka $m^*(\cup A_n) \leq \sum m^* A_n$.

Akibat 3.6.1.

Jika A terbilang maka $m^*A = 0$.

Bukti:

Misalkan $A = \{ x_1, x_2, \ldots , x_n, \ldots \}$

$A_1 = \{x_1\} \Rightarrow m^*(A_1) = 0$; $A_2 = \{x_2\} \Rightarrow m^*(A_2) = 0$; … ; $A_n = \{x_n\} \Rightarrow m^*(A_n) = 0$; …

$m^*(A) = m^*(A_1) + m^*(A_2) + \ldots + m^*(A_n) + \ldots = 0 + 0 + \ldots + 0 + \ldots = 0.$

Akibat 3.6.2.

Himpunan [0,1] tidak terbilang.

Bukti:

$m^*[0, 1] = \inf \sum l(I_n) \geq 1$. Jadi $m^*[0, 1] \geq 1$. Karena $m^*[0, 1] \neq 0$ maka [0, 1] tidak terbilang.

Teorema 3.7.

Diberikan sembarang himpunan A dan sembarang $\varepsilon > 0$, terdapat himpunan terbuka O sedemikian hingga $A \subset O$ dan $m^*O < m^*A + \varepsilon$. Terdapat $G \in \mathcal{G}_\delta$ sedemikian hingga $A \subset G$ dan $m^*A = m^*G$.

Bukti:

Diberikan $A \subset \mathbb{R}$ dan $\varepsilon > 0$, terdapatlah $\{I_n\}$ sehingga $\sum l(I_n) < m^*A + \varepsilon$.

Dibentuk himpunan $O = \cup\, I_n$ dan $A \subset \cup\, I_n$ maka $A \subset O$.

$m^*O = m^*(\cup\, I_n) \leq \sum m^*I_n = \sum l(I_n) < m^*A + \varepsilon$.

Jadi $m^*O < m^*A + \varepsilon$.

Diberikan $A \subset \mathbb{R}$ dan $\varepsilon > 0$, terdapatlah $G \in \mathcal{G}_\delta$ artinya G merupakan irisan terbilang dari himpunan-himpunan terbuka.

Untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ kita ambil $\varepsilon = \dfrac{1}{n}$. Terdapatlah himpunan terbuka U_n dan $A \subset U_n$ dan $m^*U_n \leq m^*A + \dfrac{1}{n}$.

Karena $A \subset U_n$ maka $m^*A \leq m^*U_n$.

Dibentuk $G = \cap\, U_n$;

$G \subset U_n$ untuk setiap n, maka $m^*G \leq m^*U_n \leq m^*A + \frac{1}{n}$ untuk setiap n.

Jadi $m^*G \leq m^*A$.

$A \subset U_n$ untuk setiap n dan $G = \cap U_n$. Akan dibuktikan $A \subset G$.

Jika $x \in A$ maka $x \in U_n$ untuk semua n. Jadi $x \in G$. Terbukti $A \subset G$. Maka $m^*A \leq m^*G$. Jadi $m^*A = m^*G$.

Teorema 3.8.

m^* invarian terhadap translasi.

Bukti:

$m^*A = \inf \sum l(I_n)$ dengan I_n adalah keluarga interval terbuka yang menyelimuti A. $m^*(A + x) = \inf \sum l(J_n)$ dengan J_n adalah keluarga interval terbuka yang menyelimuti $A + x$ sehingga $A + x = \{a + x; a \in A\}$ dan $I_n = J_n - x$, maka $l(I_n) = l(J_n)$. Setiap J_n selimut terbuka untuk $A + x$ maka $J_n - x = I_n$ akan menjadi selimut terbuka untuk A dan sebaliknya setiap I_n selimut terbuka untuk A maka $I_n + x = J_n$ akan menjadi selimut terbuka untuk $A + x$.

Jadi $\inf \sum l(I_n) = \inf \sum l(J_n)$.

Terbukti bahwa $m^*A = m^*(A + x)$.

Teorema 3.9.

Jika $m^*A = 0$ maka $m^*(A \cup B) = m^*B$.

Bukti:

Berdasarkan teorema 3.6. maka $m^*(A \cup B) \leq m^*A + m^*B = m^*B$. Jadi

$m^*(A \cup B) \leq m^*B$.

$B \subset A \cup B$ maka $m^*B \leq m^*(A \cup B)$.

Jadi $m^*(A \cup B) = m^*B$.

Contoh 3.2.

Diberikan A himpunan bilangan rasional antara 0 dan 1, dan diberikan $\{I_n\}$ keluarga berhingga interval terbuka yang menyelimuti A. Maka tunjukkan bahwa $\sum l(I_n) \geq 1$.

Penyelesaian:

$A = \{x \mid x = \text{rasional}, 0 < x < 1\}$ dan $\{I_1, I_2, \ldots, I_n\}$ adalah keluarga interval terbuka dan $A \subset \bigcup_{k=1}^{n} I_k$.

Diminta untuk membuktikan $\sum_{k=1}^{n} l(I_k) \geq 1$.

Suatu interval terbuka mempunyai *closure* berupa interval tertutup. Jadi $\bar{A}$ adalah $[0, 1]$. Demikian juga gabungan dari *closure* I_k atau ditulis $\bigcup_{k=1}^{n} \bar{I}_k$ adalah $\bigcup_{k=1}^{n} J_k$ dengan J_k merupakan $\bar{I}_k$. Oleh karena itu $\bar{A} \subset \bigcup_{k=1}^{n} \bar{I}_k = \bigcup_{k=1}^{n} J_k$. Jadi $[0, 1] \subset \bigcup_{k=1}^{n} J_k$. Maka $m^*[0, 1] \leq m^* \bigcup_{k=1}^{n} J_k \leq \sum_{k=1}^{n} l(J_k) = \sum_{k=1}^{n} l(I_k)$. Jadi $\sum_{k=1}^{n} l(I_k) \geq m^*[0, 1]$. Jadi $\sum_{k=1}^{n} l(I_k) \geq 1$.

2. Himpunan Terukur dan Ukuran Lebesgue

Definisi 3.5.

Himpunan E dinamakan terukur Lebesgue jika untuk setiap himpunan A maka $m^*A = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c)$.

Berdasarkan teorema 3.6. maka $m^*A \leq m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c)$, sehingga E dikatakan terukur jika dan hanya jika untuk setiap A maka $m^*A \geq m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c)$. Dari definisi 3.5. dapat disimpulkan bahwa keterukuran bersifat simetri sehingga jika E terukur maka E^c juga terukur.

Pada pembahasan selanjutnya himpunan terukur Lebesgue disingkat himpunan terukur.

Teorema 3.10.

Jika $m^*E = 0$ maka E terukur.

Bukti:

Diberikan A sembarang himpunan. Maka $A \cap E \subset E$ dan $m^*(A \cap E) \leq m^*E = 0$. Demikian juga $A \supset A \cap E^c$ sehingga

$m^*A \geq m^*(A \cap E^c) = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c)$. Jadi E terukur.

Teorema 3.11.

Jika E_1 dan E_2 terukur maka $E_1 \cup E_2$ juga terukur.

Bukti:

Diberikan A sembarang himpunan. Karena E_2 terukur, maka

$m^*(A \cap E_1^c) = m^*(A \cap E_1^c \cap E_2) + m^*(A \cap E_1^c \cap E_2^c)$, dan karena $A \cap (E_1 \cup E_2) = [A \cap E_1] \cup [A \cap E_2 \cap E_1^c]$, maka $m^*(A \cap [E_1 \cup E_2]) \leq m^*(A \cap E_1) + m^*(A \cap E_2 \cap E_1^c)$. Sehingga $m^*(A \cap [E_1 \cup E_2]) + m^*(A \cap E_1^c \cap E_2^c) \leq m^*(A \cap E_1) + m^*(A \cap E_2 \cap E_1^c) + m^*(A \cap E_1^c \cap E_2^c) = m^*(A \cap E_1) + m^*(A \cap E_1^c) = m^*A$, dengan sifat terukur dari E_1. Karena $(E_1 \cup E_2)^c = E_1^c \cap E_2^c$, hal ini menunjukkan bahwa $E_1 \cup E_2$ terukur.

Akibat 3.11.1

Keluarga $\mathcal{M}$ dari himpunan terukur adalah aljabar.

Bukti:

Jika E terukur maka E^c terukur. Ambil sembarang himpunan A maka $m^*A = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c) = m^*(A \cap (E^c)^c) + m^*(A \cap E^c) = m^*(A \cap E^c) + m^*(A \cap (E^c)^c)$. Jadi $m^*(A \cap E^c) + m^*(A \cap (E^c)^c) = m^*A$. Maka E^c terukur.

Menurut teorema 3.11. jika E_1 dan E_2 terukur maka $E_1 \cup E_2$ juga terukur. Jadi terbukti bahwa keluarga $\mathcal{M}$ dari himpunan terukur adalah aljabar.

Teorema 3.12.

Diberikan A sembarang himpunan, dan $E_1, \ldots , E_n$ barisan berhingga dari himpunan terukur yang saling asing. Maka

$$m^*\left(A \cap \left[\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right]\right) = \sum_{i=1}^{n} m^*(A \cap E_i).$$

Bukti:

Teorema 3.12. akan dibuktikan dengan induksi matematika pada n. Teorema 3.12. tersebut berlaku untuk $n = 1$ karena $m^*\left(A \cap \left[\bigcup_{i=1}^{1} E_i\right]\right) = \sum_{i=1}^{1} m^*(A \cap E_i)$. Andaikan teorema 3.12. benar untuk $n = k$ maka $m^*\left(A \cap \left[\bigcup_{i=1}^{k} E_i\right]\right) = \sum_{i=1}^{k} m^*(A \cap E_i)$. Dibuktikan teorema 3.12. benar untuk $n = k + 1$ maka $m^*\left(A \cap \left[\bigcup_{i=1}^{k+1} E_i\right]\right) = \sum_{i=1}^{k+1} m^*(A \cap E_i)$. Karena E_i adalah himpunan yang saling asing maka

$$A \cap \left[\bigcup_{i=1}^{k+1} E_i\right] \cap E_{k+1} = \left(\left(A \cap \bigcup_{i=1}^{k} E_i\right) \cup (A \cap E_{k+1})\right) \cap E_{k+1}$$

$$= \left(\left(A \cap \bigcup_{i=1}^{k} E_i\right) \cap E_{k+1}\right) \cup ((A \cap E_{k+1}) \cap E_{k+1}) = \phi \cup (A \cap E_{k+1})$$

$$= A \cap E_{k+1}.$$

Dan

$$A \cap \left[\bigcup_{i=1}^{k+1} E_i\right] \cap E_{k+1}^c = \left(\left(A \cap \bigcup_{i=1}^{k} E_i\right) \cup (A \cap E_{k+1})\right) \cap E_{k+1}^c$$

$$= \left(\left(A \cap \bigcup_{i=1}^{k} E_i\right) \cap E_{k+1}^c\right) \cup \left((A \cap E_{k+1}) \cap E_{k+1}^c\right) = \left(A \cap \bigcup_{i=1}^{k} E_i\right) \cup \phi$$

$$= \left(A \cap \bigcup_{i=1}^{k} E_i\right).$$

Karena sifat terukur dari E_{k+1} maka

$$m*\left(A \cap \left[\bigcup_{i=1}^{k+1} E_i\right]\right) = m*(A \cap E_{k+1}) + m*\left(A \cap \bigcup_{i=1}^{k} E_i\right).$$

$$= m*(A \cap E_{k+1}) + \sum_{i=1}^{k} m*(A \cap E_i) = \sum_{i=1}^{k+1} m*(A \cap E_i).$$

Jadi $m*\left(A \cap \left[\bigcup_{i=1}^{k+1} E_i\right]\right) = \sum_{i=1}^{k+1} m*(A \cap E_i)$.

Teorema 3.13.

Keluarga $\mathcal{M}$ dari himpunan terukur adalah aljabar-σ, yaitu, komplemen dari himpunan terukur adalah terukur dan gabungan (dan irisan) dari keluarga terbilang dari himpunan terukur adalah terukur. Selain itu, setiap himpunan dengan ukuran luar nol adalah terukur.

Bukti:

Karena $\mathcal{M}$ merupakan aljabar maka hanya perlu dibuktikan bahwa jika E gabungan terbilang keluarga himpunan terukur maka E terukur.

Berdasarkan teorema 3.2., E harus merupakan gabungan barisan $\langle E_n \rangle_{n=1}^{\infty}$ dari pasangan himpunan terukur yang saling asing. Diberikan

A sembarang himpunan, dan diberikan $F_n = \bigcup_{i=1}^{n} E_i$. Maka F_n terukur, dan $F_n^c \supset E^c$. Oleh karena itu

$m^*A = m^*(A \cap F_n) + m^*(A \cap F_n^c) \geq m^*(A \cap F_n) + m^*(A \cap E^c)$

Dengan teorema 3.12. berlaku $m^*(A \cap F_n) = \sum_{i=1}^{n} m^*(A \cap E_i)$.

Maka $m^*A \geq \sum_{i=1}^{n} m^*(A \cap E_i) + m^*(A \cap E^c)$

Karena pada sisi kiri dari pertidaksamaan tidak tergantung pada n, maka $m^*A \geq \sum_{i=1}^{\infty} m^*(A \cap E_i) + m^*(A \cap E^c) \geq m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c)$

Jadi $m^*A \geq m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c)$. Maka terbukti bahwa keluarga $\mathcal{M}$ dari himpunan terukur adalah aljabar-σ.

Teorema 3.14.

Interval (a, ∞) terukur.

Diberikan A sembarang himpunan, $A_1 = A \cap (a, \infty)$, $A_2 = A \cap (-\infty, a]$. Maka harus ditunjukkan bahwa $m^*A_1 + m^*A_2 \leq m^*A$. Jika $m^*A = \infty$ maka tidak perlu dibuktikan. Jika $m^*A < \infty$, maka diberikan $\varepsilon > 0$, terdapat keluarga terbilang $\{I_n\}$ dari interval terbuka yang menyelimuti A dan di mana $\sum_{n=1}^{\infty} l(I_n) \leq m^*A + \varepsilon$.

Diberikan $I_n^{'} = I_n \cap (a, \infty)$ dan $I_n^{"} = I_n \cap (-\infty, a]$. Maka $I_n^{'}$ dan $I_n^{"}$ interval (atau kosong) dan $l(I_n) = l(I_n^{'}) + l(I_n^{"}) = m^* I_n^{'} + m^* I_n^{"}$

Karena $A_1 \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n^{'}$, maka $m^*A_1 \le m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n^{'}\right) \le \sum_{n=1}^{\infty} m^* I_n^{'}$, dan karena $A_2 \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n^{'}$, maka $m^*A_2 \le m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n^{"}\right) \le \sum_{n=1}^{\infty} m^* I_n^{"}$. Jadi $m^*A_1 + m^*A_2 \le \sum_{n=1}^{\infty}(m^* I_n^{'} + m^* I_n^{"}) \le \sum_{n=1}^{\infty} l(I_n) \le m^*A + \varepsilon$. Tetapi ε merupakan sembarang bilangan positif, jadi $m^*A_1 + m^*A_2 \le m^*A$.

Teorema 3.15.

Setiap himpunan Borel terukur. Terutama setiap himpunan terbuka dan himpunan tertutup terukur.

Bukti:

Karena keluarga $\mathcal{M}$ dari himpunan terukur merupakan aljabar-σ, dan $(-\infty, a]$ terukur untuk setiap a karena $(-\infty, a] = (a, \infty)^c$. Karena $(-\infty, b)$ $= \bigcup_{n=1}^{\infty}(-\infty, b - 1/n]$, maka $(-\infty, b)$ terukur. Oleh karena itu setiap interval terbuka $(a, b) = (-\infty, b) \cap (a, \infty)$ terukur. Tetapi setiap himpunan terbuka adalah gabungan berhingga atau gabungan terbilang interval terbuka, maka himpunan terbuka pasti terukur. Jadi $\mathcal{M}$ merupakan aljabar-σ yang memuat himpunan terbuka dan oleh karena itu memuat keluarga himpunan Borel $\mathcal{B}$, karena $\mathcal{B}$ adalah aljabar-σ

terkecil yang memuat himpunan terbuka. Jadi keluarga Borel $\mathcal{B}$ terukur. Setiap himpunan tertutup juga terukur karena himpunan terbuka terukur.

Jika E himpunan terukur, kita mendefinisikan ukuran Lebesgue mE menjadi ukuran luar dari E. Maka m adalah fungsi himpunan yang diperoleh dengan membatasi fungsi himpunan m^* ke keluarga himpunan terukur $\mathcal{M}$. Dua sifat penting dari ukuran Lebesgue diringkas dengan teorema berikut:

Teorema 3.16.

Diberikan $<E_i>$ barisan himpunan terukur. Maka $m(\cup E_i) \leq \sum mE_i$. Jika himpunan E_i adalah pasangan yang saling asing, maka $m(\cup E_i) = \sum mE_i$.

Bukti:

Pertidaksamaan $m(\cup E_i) \leq \sum mE_i$ merupakan bentuk pernyataan baru dari subterjumlah terbilng m^* yang diberikan oleh teorema 3.6.

Untuk membuktikan $m(\cup E_i) = \sum mE_i$ adalah sebagai berikut:

Jika $<E_i>$ barisan berhingga dari himpunan terukur yang saling asing, maka menurut teorema 3.12. dengan $A = \mathbb{R}$ mengakibatkan $m\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} mE_i$. Jadi m merupakan terjumlah berhingga. Diberikan $<E_i>$ barisan tak hingga dari pasangan himpunan terukur yang saling asing. Maka $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \supset \bigcup_{i=1}^{n} E_i$ dan jadi

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \geq m\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} mE_i \ .$$

Karena sisi kiri pertidaksamaan tidak tergantung pada n, maka $m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \geq \sum_{i=1}^{\infty} mE_i$. Tetapi menurut sifat subterjumlah terbilang $m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} mE_i$, maka $m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} mE_i$.

Teorema 3.17.

Diberikan $<E_n>$ barisan turun tak hingga dari himpunan terukur, yaitu barisan dengan $E_{n+1} \subset E_n$ untuk setiap n. Diberikan mE_1 berhingga. Maka $m\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \lim_{n\to\infty} mE_n$.

Bukti:

Diberikan $E = \bigcap_{i=1}^{\infty} E_i$, dan diberikan $F_i = E_i - E_{i+1}$.

Maka $E_1 - E = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$, dan himpunan F adalah pasangan himpunan yang saling asing. Oleh karena itu

$$m(E_1 - E) = \sum_{i=1}^{\infty} mF_i = \sum_{i=1}^{\infty} m(E_i - E_{i+1}) .$$

Tetapi $mE_1 = mE + m(E_1 - E)$, dan $mE_i = mE_{i+1} + m(E_i - E_{i+1})$, karena $E \subset E_1$ dan $E_{i+1} \subset E_i$. Karena $mE_i \leq mE_1 < \infty$, maka $m(E_1 - E) = mE_1 - mE$ dan $m(E_i - mE_{i+1}) = mE_i - mE_{i+1}$.

$$\text{Jadi } mE_1 - mE = \sum_{i=1}^{\infty}(mE_i - mE_{i+1})$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(mE_i - mE_{i+1})$$

$$= \lim_{n\to\infty}(mE_1 - mE_n)$$

$$= mE_1 - \lim_{n\to\infty} mE_n.$$

Karena $mE_1 < \infty$, maka $mE = \lim_{n\to\infty} mE_n$.

Teorema 3.18.

Diberikan E suatu himpunan. Maka lima pernyataan berikut ekuivalen:

i. E terukur;

ii. Diberikan $\varepsilon > 0$, terdapatlah himpunan terbuka $O \supset E$ dengan $m^*(O - E) < \varepsilon$;

iii. Diberikan $\varepsilon > 0$, terdapatlah himpunan tertutup $F \subset E$ dengan $m^*(E - F) < \varepsilon$;

iv. Terdapatlah G dalam $\mathcal{G}_\delta$ dengan $E \subset G$, $m^*(G - E) = 0$;

v. Terdapatlah F dalam $\mathcal{F}_\sigma$ dengan $F \subset E$, $m^*(E - F) = 0$;

Jika m^*E berhingga, pernyataan di atas ekuivalen dengan

vi. Diberikan $\varepsilon > 0$, terdapatlah gabungan berhingga U dari interval terbuka yang saling asing sehingga $m^*(U \Delta E) < \varepsilon$.

Contoh 3.3.

Buktikan teorema 3.18. dengan cara:

a). Tunjukkan bahwa untuk $m^*E < \infty$, (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (vi) $\Rightarrow$ (ii)!

b). Gunakan (a) untuk menunjukkan bahwa untuk sembarang himpunan E, (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iv) $\Rightarrow$ (ii).

c). Gunakan (b) untuk menunjukkan bahwa (i) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (v) $\Rightarrow$ (i).

Penyelesaian:

a). $m^*E < \infty$.

(i) $\Rightarrow$ (ii)

Diketahui E terukur dan $m^*E < \infty$.

Menurut teorema 3.7. terdapat himpunan terbuka O yang memuat E dan $m^*O < m^*E + \varepsilon$.

O himpunan terbuka jadi O terukur. $O = (O - E) \cup E$.

Karena $m^* = m$, maka menurut teorema 3.12. $mO = m(O - E) + mE < mE + \varepsilon$. Maka $m(O - E) < \varepsilon$.

(ii) $\Rightarrow$ (vi)

Diberikan $E \subset \mathbb{R}$ dan $\varepsilon > 0$, maka menurut (ii) terdapat himpunan terbuka O sehingga $m^*(O - E) < \frac{\varepsilon}{2}$. O himpunan terbuka maka O

merupakan gabungan terbilang dari interval terbuka yang saling asing, sehingga $O = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$. Jadi $mO = \sum_{n=1}^{\infty} l(I_n)$.

Terdapat N sehingga $U = \bigcup_{n=1}^{N} I_n$ dan $\sum_{n=N+1}^{\infty} l(I_n) < \frac{\varepsilon}{2}$.

$U \Delta E = (U - E) \cup (E - U) \subset (O - E) \cup (O - U)$.

$m^*(U \Delta E) \leq m^*(O - E) + m^*(O - U) = \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{n=N+1}^{\infty} l(I_n) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$

Jadi $m^*(U \Delta E) < \varepsilon$.

(vi) $\Rightarrow$ (ii)

Diberikan $E \subset \mathbb{R}$ dan $\varepsilon > 0$

Menurut (vi) terdapat $V = \bigcup_{n=1}^{N} I_n$ dan I_n merupakan interval terbuka yang saling asing dan $m^*(V \Delta E) < \frac{\varepsilon}{3}$.

Menurut teorema 3.7. terdapat himpunan terbuka O sehingga $m^*O < m^*E + \frac{\varepsilon}{3}$.

Dibentuk $U = O \cap V = \bigcup_{n=1}^{N} (O \cap I_n)$.

Dapat dibuktikan bahwa untuk $\forall A, B, C \subset \mathbb{R}$ berlaku $(A \Delta B) \subset (A \Delta C) \cup (C \Delta B)$. Jadi $(O \Delta E) \subset (O \Delta U) \cup (U \Delta E)$ dan

$$m^*(O \Delta E) \leq m^*(O \Delta U) + m^*(U \Delta E) \tag{3.1}$$

Diketahui $O \Delta E = O - E$, karena $O \supset E$.

$U \subset V$ maka $U - E \subset V - E$ dan karena $E \subset O$ maka $E - U = E - V$.

Sehingga $U \Delta E \subset V \Delta E$ dan $m^*(U \Delta E) \leq m^*(V \Delta E) < \frac{\varepsilon}{3}$. Jadi $m^*(U \Delta E) < \frac{\varepsilon}{3}$. Tetapi $E \subset U \cup (U \Delta E)$ sehingga $m^*E \leq m^*U + m^*(U \Delta E) < m^*U + \frac{\varepsilon}{3}$. Jadi $m^*E - m^*U < \frac{\varepsilon}{3}$.

$m^*(O \Delta U) = m^*(O - U) = m^*O - m^*U < m^*E + \frac{\varepsilon}{3} - m^*U$.

Jadi $m^*(O \Delta U) < m^*E + \frac{\varepsilon}{3} - m^*U$.

Sehingga (3.1) menjadi $m^*(O \Delta E) \leq m^*(O \Delta U) + m^*(U \Delta E)$ $< m^*E + \frac{\varepsilon}{3} - m^*U + \frac{\varepsilon}{3} < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$. Jadi $m^*(O \Delta E) < \varepsilon$.

b). $m^*E = \infty$.

(i) $\Rightarrow$ (ii)

Misalkan $\mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$, di mana I_n interval terbatas dan saling asing. Jika $E_n = E \cap I_n$, maka $m^*E_n < \infty$ sehingga terdapat himpunan terbuka $O_n \supset E_n$ sedemikian hingga $m^*(O_n - E_n) < \frac{\varepsilon}{2^n}$. Tulis himpunan terbuka $O = \bigcup_{n=1}^{\infty} O_n$. Maka

$O - E = \bigcup_{n=1}^{\infty} O_n - \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty}(O_n - E_n)$. Sehingga $m^*(O - E) \leq$

$\sum_{n=1}^{\infty} m^*(O_n - E_n) < \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \varepsilon$. Jadi $m^*(O - E) < \varepsilon$.

(ii) $\Rightarrow$ (iv)

Untuk setiap n, diberikan himpunan terbuka $O_n \supset E$ dan $m^*(O_n - E)$ $< \frac{1}{n}$. Jika $G = \bigcap_{n=1}^{\infty} O_n$, G merupakan himpunan $\mathcal{G}_\delta$ maka $E \subset G$ dan

$m^*(G - E) \leq m^*(O_n - E) < \frac{1}{n}$ untuk setiap n. Jadi $m^*(G - E) = 0$.

(iv) $\Rightarrow$ (i)

Diberikan $E \subset \mathbb{R}$ dan terdapat $G \in \mathcal{G}_\delta$ dan $G \supset E$ dan $m^*(G - E) = 0$.

$E = G - (G - E)$, himpunan G terukur dan menurut teorema 3.10. maka $(G - E)$ terukur. Jadi E terukur.

c). (i) $\Rightarrow$ (iii)

Karena E terukur maka E^c terukur dan terdapatlah himpunan terbuka $O \supset E^c$ dan $m^*(O - E^c) < \varepsilon$. Tetapi $O - E^c = E - O^c$ dan $F = O^c$ sehingga $m^*(O - E^c) = m^*(E - F) < \varepsilon$. Jadi $m^*(E - F) < \varepsilon$.

(iii) $\Rightarrow$ (v)

Untuk setiap n, diberikan himpunan tertutup $F_n \subset E$ dan $m^*(E - F_n) <$ $\frac{1}{n}$. Jika $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, F merupakan himpunan $\mathcal{F}_\sigma$ maka $F \subset E$ dan

$m^*(E - F) \leq m^*(E - F_n) < \frac{1}{n}$ untuk setiap n. Jadi $m^*(E - F) = 0$.

(v) $\Rightarrow$ (i)

Diberikan $E \subset \mathbb{R}$ dan terdapat $F \in \mathcal{F}_\sigma$ dan $E \supset F$ dan $m^*(E - F) = 0$.

Karena $E = F \cup (E - F)$, himpunan F terukur dan menurut teorema 3.10. maka $(E - F)$ terukur. Jadi E terukur.

Contoh 3.4.

Tunjukkan bahwa jika E himpunan terukur, maka setiap translasi $E + y$ dari E juga terukur.

Penyelesaian:

Diberikan sembarang himpunan $A \subset \mathbb{R}$. Harus dibuktikan $m^*(A \cap (E + y)) \geq m^*(A \cap (E + y)) + m^*(A \cap (E + y)^c)$.

Ambil sembarang $x \in A \cap (E + y)$.

Maka $A \cap (E + y) = \{ x \mid x \in A \wedge x \in (E + y)\}$ (3.2)

$x \in (E + y) \Rightarrow$ terdapat $t \in E$ dan $x = t + y$ sehingga $(x \in A) \Rightarrow (x - y) \in (A - y)$. Maka (3.2) menjadi $A \cap (E + y) = \{ x \mid x \in A \wedge x \in (E + y)\} = \{x - y \mid x - y \in (A - y) \wedge x - y \in E\} = \{t \mid t = x - y \in (A - y) \wedge t \in E\} = (A - y) \cap E$.

Ambil sembarang $x \in A \cap (E + y)^c$.

Maka $A \cap (E + y)^c = \{x \mid x \in A \wedge x \notin (E + y)\}$ (3.3)

$x \in (E + y)^c \Rightarrow$ tidak terdapat $t \in E$ dan $x = t + y$ sehingga $(x \in A) \Rightarrow (x - y) \in (A - y)$.

Maka (3.3) menjadi $A \cap (E + y)^c = \{x \mid x \in A \wedge x \notin (E + y)\} = \{x - y \mid x - y \in (A + y) \wedge x - y \notin E\} = \{t \mid t = x - y \in (A - y) \wedge t \notin E\} = \{t \mid t \in (A - y) \wedge t \in E^c\} = (A - y) \cap E^c$.

Jadi $A \cap (E + y) = (A - y) \cap E$ dan $A \cap (E + y)^c = (A - y) \cap E^c$. Jadi $m^*(A \cap (E + y)) = m^*((A - y) \cap E)$ dan $m^*(A \cap (E + y)^c) = m^*((A - y) \cap E^c)$. Sehingga $m^*(A \cap (E + y)) + m^*(A \cap (E + y)^c) = m^*((A - y) \cap E) + m^*((A - y) \cap E^c)$. Karena E terukur, maka untuk himpunan $(A - y)$, $m^*((A - y) \cap E) + m^*((A - y) \cap E^c) = m^*(A - y)$. Karena m^* bersifat invarian terhadap translasi maka $m^*(A - y) = m^*A$. Jadi $E + y$ terukur.

Contoh 3.5.

Tunjukkan bahwa jika E_1 dan E_2 terukur, maka

$m(E_1 \cup E_2) + m(E_1 \cap E_2) = mE_1 + mE_2$.

Penyelesaian:

Jika salah satu dari mE_1 atau mE_2 tak hingga.

(a). Misalkan $mE_1 = \infty$ maka $m(E_1 \cup E_2) = \infty$. Sehingga $m(E_1 \cup E_2) + m(E_1 \cap E_2) = \infty + m(E_1 \cap E_2) = \infty$ dan $mE_1 + mE_2 = \infty + mE_2 = \infty$. Jadi $m(E_1 \cup E_2) + m(E_1 \cap E_2) = mE_1 + mE_2$.

(b). Jika $mE_1 < \infty$ dan $mE_2 < \infty$.

$E_1 \cup E_2 = E_1 \cup (E_2 \cap E_1^c)$

$m(E_1 \cup E_2) = mE_1 + m(E_2 \cap E_1^c)$

$E_2 = (E_2 \cap E_1^c) \cup (E_2 \cap E_1)$

$mE_2 = m(E_2 \cap E_1^c) + m(E_2 \cap E_1)$.

$m(E_2 \cap E_1^c) = mE_2 - m(E_2 \cap \mathrm{E}_1)$ sehingga $m(E_1 \cup E_2) = mE_1 + m(E_2 \cap E_1^c) = mE_1 + mE_2 - m(E_2 \cap mE_1)$.

Jadi $m(E_1 \cup E_2) + m(E_1 \cap E_2) = mE_1 + mE_2$.

Contoh 3.6.

Tunjukkan bahwa syarat $mE_1 < \infty$ diperlukan pada teorema 3.17. dengan memberikan barisan turun $<E_n>$ dari himpunan terukur dengan $\phi = \cap E_n$ dan $mE_n = \infty$ untuk setiap n.

Penyelesaian:

Dibentuk barisan E_n dengan $mE_n = \infty$ untuk $\forall n \in \mathbb{N}$ dan $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n = \phi$.

Misalkan $E_1 = [1, \infty)$; $E_2 = [2, \infty)$; ... ; $E_n = [n, \infty)$; .... Maka $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n = \cap E_1 \cap E_2 \cap \ldots \cap E_n \cap \ldots$. Diberikan $E = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$. Akan dibuktikan $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n = \phi$.

Andaikan $\exists x \in E$ maka $x \in E_n$ untuk $\forall n \in \mathbb{N}$. Menurut sifat Archimedes maka terdapat $N \in \mathbb{N}$ dan $N > x$ sehingga $x \notin E_N$.

Terdapat kontradiksi dengan $x \in E_n$ untuk $\forall n \in \mathbb{N}$, sehingga $E = \phi$ dan $mE = 0$. Maka $mE = m\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) = m\phi = 0$ dan $\lim_{n\to\infty} mE_n = \infty$. Sehingga $m\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) \neq \lim_{n\to\infty} mE_n$.

Jadi syarat $mE_n < \infty$ diperlukan pada teorema 3.17.

Contoh 3.7.

Diberikan $<E_i>$ barisan himpunan terukur yang saling asing dan sembarang himpunan $A \subset \mathbb{R}$. Maka barisan $m^*\left(A \cap \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} m^*(A \cap E_i)$.

Penyelesaian:

Berdasarkan teorema 3.12., maka $m^*\left(A \cap \left[\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right]\right) = \sum_{i=1}^{n} m^*(A \cap E_i)$.

Karena $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \supset \bigcup_{i=1}^{n} E_i$, maka $A \cap \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \supset A \cap \bigcup_{i=1}^{n} E_i$

Jadi $m^*\left(A \cap \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \geq m^*\left(A \cap \bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} m^*(A \cap E_i)$

Karena pada sisi kiri dari pertidaksamaan tidak tergantung pada n, maka $m^*\left(A \cap \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \geq \sum_{i=1}^{\infty} m^*(A \cap E_i)$

Berdasarkan teorema 3.6., maka $m^*\left(A \cap \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m^*(A \cap E_i)$.

Jadi $m^*\left(A\cap\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}m^*(A\cap E_i)$.

Contoh 3.8.

a). Tunjukkan bahwa himpunan Cantor terner mempunyai ukuran nol.

b). Diberikan F himpunan bagian dari [0, 1] dikonstruksi dengan cara yang sama dengan himpunan Cantor terner kecuali pada setiap interval dihilangkan sepanjang $\alpha 3^{-n}$ dengan $0 < \alpha < 1$ untuk setiap langkah ke-n. Maka F himpunan tertutup, F^c rapat dalam [0, 1] dan $mF = 1 - \alpha$. Sehingga himpunan F disebut himpunan Cantor rapat.

Penyelesaian:

a). $\mathcal{C} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$. Himpunan Cantor $P = \bigcap_{n=0}^{\infty}E_n$. Menurut konstruksi dari himpunan Cantor P maka P = $\bigcap_{n=0}^{\infty}E_n$; di mana $E_n = \bigcup_{n=0}^{\infty}2^n$ merupakan interval tertutup yang masing-masing panjangnya $\frac{1}{3^n}$ dan $E_n \supset E_{n+1}$.

Menurut teorema 3.17. $mP = \lim_{n\to\infty} mE_n$.

$mE_n = 2^n$ yang masing-masing panjangnya $\frac{1}{3^n}$. Maka $mE_n = \frac{2^n}{3^n}$.

Jadi $mP = \lim_{n\to\infty} mE_n = \lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{3^n} = 0$.

b). F merupakan himpunan yang dikonstruksi dengan cara yang sama dengan himpunan Cantor terner tetapi yang dihilangkan sebesar

$\frac{\alpha}{3^n}$. Jadi $E_1 = 1 - \frac{\alpha}{3}$; $E_2 = 1 - \frac{\alpha}{3} - \frac{2\alpha}{3^2}$; ... ; $E_n = 1 - \frac{\alpha}{3} - \frac{2\alpha}{3^2} - \ldots - \frac{2^n\alpha}{3^n}$. Secara umum $mE_n = 1 - \frac{\alpha}{3}\left[1+\frac{2}{3}+\frac{2^2}{3^2}+\ldots\right]$.

Menurut teorema 3.17. $mF = \lim_{n\to\infty} mE_n = 1-\frac{\alpha}{3}\left[\frac{1}{1-\frac{2}{3}}\right] = 1 - \alpha$.

Jadi $mF = 1 - \alpha$.

3. Himpunan Tak Terukur

Sebelum membicarakan himpunan tak terukur, akan dibahas lebih dulu konsep relasi ekuivalensi.

A. Relasi Ekuivalensi

Diberikan himpunan X.

Relasi R pada himpunan X adalah subhimpunan dari X x X. Jika $(x, y) \in X$ x X maka dikatakan x berelasi ke y, dan ditulis $(x, y) \in$ R.

Relasi ekuivalensi R pada himpunan X adalah relasi yang memenuhi sifat:

1. $(x, x) \in$ R.
2. $(x, y) \in \mathrm{R} \Rightarrow (y, x) \in$ R.
3. $(x, y) \in \mathrm{R} \wedge (y, z) \in \mathrm{R} \Rightarrow (x, z) \in$ R.

Jika (x, y) dinyatakan dengan $x \sim y$ maka ketiga sifat relasi ekuivalensi dapat dinyatakan sebagai berikut:

1. $x \sim x$.

2. $x \sim y \Rightarrow y \sim x$.

3. $x \sim y \wedge y \sim z \Rightarrow x \sim z$.

Didefinisikan $[x]$ adalah $\{t \in x \mid t \sim x\}$. Akan ditunjukkan jika $x \in X$ dan $y \in X$ maka $[x] = [y]$ atau $[x] \cap [y] = \phi$.

Andaikan $[x] \cap [y] \neq \phi$.

Jadi terdapat $z \in [x]$ dan $z \in [y]$.

Jika $t \in [x]$ maka $t \sim z$ (sifat 3)

Karena $z \in [y]$ dan $t \sim z$ maka $t \in [y]$. Jadi $[x] \subset [y]$.

Dengan cara yang sama dapat dibuktikan $[y] \subset [x]$. Jadi kesimpulannya bila $[x] \cap [y] \neq \phi$ maka $[x] = [y]$. Sehingga untuk setiap $x, y \in X$ maka $[x]$ dan $[y]$ saling asing atau identik.

Dengan demikian kita peroleh pernyataan berikut:

Oleh karena relasi ekuivalensi pada X tejadilah partisi pada X atas himpunan-himpunan yang saling asing. Himpunan itu disebut kelas ekuivalensi.

B. Himpunan Tak Terukur

Dalam subbab ini akan ditunjukkan adanya himpunan tak terukur. Jika x dan y adalah bilangan real dalam interval $[0, 1)$, maka kita mendefinisikan jumlahan modulo 1 dari x dan y menjadi $x + y$ jika $x + y < 1$, dan menjadi $x + y - 1$ jika $x + y \geq 1$. Jumlahan modulo 1 dari x dan y dilambangkan dengan $x \oplus y$. Maka $x \oplus y$ operasi yang bersifat komutatif dan asosiatif dari pasangan bilangan real dalam interval [0, 1) dengan bilangan real dalam interval [0, 1). Jika untuk setiap $x \in [0, 1)$ kita kawankan dengan sudut $2\pi x$, maka jumlahan modulo 1 berkorespondensi dengan jumlahan sudut. Jika E himpunan bagian dari [0, 1), kita mendefinisikan translasi modulo 1 dari himpunan E menjadi himpunan $E \oplus y = \{z: z = x \oplus y \text{ untuk suatu } x \in E\}$. Jika kita menganggap jumlahan modulo 1 sebagai jumlahan sudut, translasi modulo 1 dengan y berkorespondensi dengan rotasi sudut $2\pi y$. Teorema berikut menunjukkan bahwa ukuran Lebesgue invarian terhadap translasi modulo 1.

Teorema 3.19.

Diberikan $E \subset [0, 1)$ himpunan terukur. Maka untuk setiap $y \in [0, 1)$ himpunan $E \oplus y$ terukur dan $m(E \oplus y) = mE$.

Bukti:

Diberikan $E_1 = E \cap [0, 1 - y)$ dan $E_2 = E \cap [1 - y, 1)$. Maka E_1 dan E_2 merupakan hinpunan terukur yang saling asing dan gabungannya adalah E. Maka menurut teorema 3.16. $mE = mE_1 + mE_2$.

Berdasarkan definisi jumlahan modulo 1 dari x dan y maka $E_1 \oplus y = E_1 + y$. Jadi $E_1 \oplus y$ terukur dan $m(E_1 \oplus y) = mE_1$ karena m bersifat invarian terhadap translasi. Demikian juga $E_2 \oplus y = E_2 + (y - 1)$ jadi $E_2 \oplus y$ terukur dan $m(E_2 \oplus y) = mE_2$. Tetapi $E \oplus y =$

$(E_1 \oplus y) \cup (E_2 \oplus y)$ dan himpunan $(E_1 \oplus y)$ dengan himpunan $(E_2 \oplus y)$ merupakan himpunan yang saling asing. Oleh karena itu $E \oplus y$ terukur dan

$$m(E \oplus y) = m(E_1 \oplus y) + (E_2 \oplus y)$$
$$= mE_1 + mE_2 = mE.$$

Sekarang kita akan mendefinisikan himpunan tak terukur. Pada $[0, 1)$ didefinisikan relasi ekuivalensi. Untuk sembarang $x, y \in [0, 1)$, jika $x - y$ merupakan bilangan rasional maka kita katakan x dan y ekuivalen dan ditulis $x \sim y$. Dalam hal ini $x \sim y$ merupakan relasi ekuivalensi. Bukti:

1. $x \sim x = 0$. Karena 0 merupakan bilangan rasional maka $x \sim x$.
2. Jika $x - y$ bilangan rasional maka $y - x$ juga merupakan bilangan rasional. Sehingga $x \sim y \Rightarrow y \sim x$.
3. Jika $x - y$ bilangan rasional dan $y - z$ bilangan rasional maka $(x - y) + (y - z) = x - z$ juga bilangan rasional. Sehingga $x \sim y \wedge y \sim z \Rightarrow x \sim z$.

Jadi pada $[0, 1)$ didefinisikan relasi ekuivalensi.

Oleh karena itu $[0, 1)$ dibagi menjadi kelas-kelas ekuivalensi, yaitu kelas-kelas di mana untuk sembarang dua unsur dari satu kelas berselisihkan bilangan rasional dan untuk sembarang dua unsur dari dua kelas yang berbeda berselisihkan bilangan irrasional. Dengan *Aksioma Pilih* terdapat himpunan P yang memuat tepat satu unsur dari setiap kelas ekuivalensi. Diberikan $\langle r_i \rangle_{i=0}^{\infty}$ merupakan bilangan-bilangan rasional dalam interval [0, 1) dengan $r_0 = 0$, dan mendefinisikan $P_i = P \oplus r_i$ sehingga $P_0 = P$. Diberikan $x \in P_i \cap P_j$. Maka $x = p_i + r_i = p_j + r_j$ dengan p_i dan p_j di dalam P. Tetapi $p_i - p_j = r_j - r_i$ merupakan bilangan rasional sehingga $p_i \sim p_j$. Karena P mempunyai tepat satu unsur dari setiap kelas ekuivalensi, maka $i = j$. Hal ini mengakibatkan jika $i \neq j$, $P_i \cap P_j = \phi$ maka $<P_i>$ merupakan barisan himpunan yang saling asing. Di lain pihak, untuk setiap bilangan real x dalam interval [0, 1) pasti berada dalam suatu kelas ekuivalensi dan juga ekuivalen dengan suatu unsur dalam P. Tetapi jika x dan suatu unsur di P berselisihkan bilangan rasional r_i, maka $x \in P_i$. Jadi $\bigcup P_i = [0, 1)$. Karena setiap P_i merupakan translasi modulo 1 dari P maka setiap P_i terukur jika P terukur dan akan mempunyai ukuran yang sama. Tetapi jika kasusnya demikian

$$m[0,1) = \sum_{i=0}^{\infty} mP_i = \sum_{i=0}^{\infty} mP$$

Jika P terukur maka nilai mP sama dengan nol atau positif. Jika demikian maka $\sum_{i=0}^{\infty} mP$ sama dengan nol atau tak hingga. Terjadi kontradiksi sebab $m[0, 1) = 1$. Jadi P tak terukur.

Bukti di atas menggunakan kontradiksi dan sifat m yang digunakan hanyalah sifat invarian terhadap translasi dan sifat terjumlah terbilang. Sehingga argumen di atas memberikan bukti langsung dari teorema berikut:

Teorema 3.20.

Jika m ukuran yang bersifat terjumlah terbilang, dan invarian terhadap translasi dan didefinisikan pada aljabar-σ yang memuat P, maka $m[0, 1)$ nol atau tak hingga.

Contoh 3.9.

Tunjukkan bahwa jika E terukur dan $E \subset P$, maka $mE = 0$.

Penyelesaian:

Diberikan $E_i = E \oplus r_i$. Karena E terukur maka E_i juga terukur dan $mE_i = mE \oplus r_i = mE$.

Diketahui $E \subset P$ maka $E \oplus r_i \subset P \oplus r_i = P_i$. Jadi $E_i \subset P_i$.

Tetapi $\bigcup P_i = [0, 1)$ sehingga $E_i \subset P_i \Rightarrow \bigcup E_i \subset \bigcup P_i = [0, 1)$. Jadi $\bigcup E_i \subset [0, 1)$ dan $m\bigcup E_i \leq m[0, 1) = 1$. Karena $P_i \cap P_j = \phi$ maka $E_i \cap E_j = \phi$ sehingga menurut teorema 3.16. berlaku $m\bigcup E_i = \sum mE_i = \sum mE \leq 1$. Karena m selalu tak negatif sehingga jika $mE = 0$ maka $\sum mE = 0 \leq 1$dan jika $mE > 0$ maka $\sum mE = \infty > 1$.

Jadi $mE = 0$.

Contoh 3.10.

Buktikan bahwa, jika A sembarang himpunan dengan $m^*A > 0$, maka terdapat himpunan tak terukur $E \subset A$.

Penyelesaian:

Bukti dengan menggunakan kontradiksi.

Andaikan $A \subset (0, 1)$.

Misalkan $E \subset A$ maka $E \subset (0, 1)$ dan E terukur.

$A \subset (0, 1) \subset [0, 1) = \bigcup P_i$.

$A = \bigcup E_i$ di mana $E_i = A \cap P_i$ maka $E_i \subset A$. Jadi E_i terukur. Karena $A = \bigcup E_i$ maka $m^*A = m^*\bigcup E_i \leq \sum m^*E_i$. Karena E_i terukur dan $E_i \subset P_i$ maka $\bigcup E_i \subset \bigcup P_i = [0, 1)$. Jadi $m^*\left(\bigcup E_i\right) \leq \sum m^*E_i \leq 1$. Hal ini mungkin terjadi hanya jika $m^*E_i = 0$. Karena $A = \bigcup E_i$ maka $m^*A \leq \sum m^*E_i = 0$. Jadi $m^*A = 0$. Hal ini kontradiksi dengan $m^*A > 0$.

Andaikan $B \not\subset (0, 1)$.

Jika B tidak termuat dalam $(0, 1)$ maka dapat dicari $y \in \mathbb{R}$ sedemikian hingga $(B + y)$ memuat himpunan bagian yang berada di dalam $(0, 1)$. Maka menurut bukti sebelumnya terdapat himpunan tak terukur E dan E merupakan himpunan bagian dari himpunan bagian $(B + y)$ yang berada di dalam $(0, 1)$. Oleh karena itu $(E - y)$ merupakan himpunan tak terukur di dalam B.

Jadi terbukti bahwa jika A sembarang himpunan dengan $m^*A > 0$, maka terdapat himpunan tak terukur $E \subset A$.

Contoh 3.11.

Berilah sebuah contoh di mana $<E_i>$ merupakan barisan himpunan yang saling asing dan $m^*\left(\bigcup E_i\right) < \sum m^* E_i$.

Penyelesaian:

Hal ini hanya terjadi jika setiap himpunan di dalam gabungan himpunan tersebut tidak terukur karena jika semuanya terukur maka $m^*\left(\bigcup E_i\right) \leq \sum m^* E_i$.

Misalkan ambil himpunan tak terukur E_i di mana $\bigcup E_i = [0, 1)$. Karena E_i tak terukur maka $m^*E_i > 0$ sebab jika $m^*E_i = 0$ maka menurut teorema 3.10. E_i terukur. Padahal $E_i \cap E_j = \phi$ dan $\bigcup E_i =$ $[0, 1)$ maka $m^*\bigcup E_i = m^*[0, 1) = 1$. Tetapi $m^*E_i > 0$ sehingga $\sum m^*E_i = \infty$. Jadi terbukti bahwa $m^*\left(\bigcup E_i\right) < \sum m^* E_i$.

Contoh 3.12.

Berilah satu contoh barisan himpunan $<E_i>$ dengan $E_i \supset E_{i+1}$, $m^*E_i < \infty$, dan $m^*\left(\bigcap E_i\right) < \lim m^* E_i$.

Penyelesaian:

Hal ini terjadi jika barisan himpunan $<E_i>$ merupakan barisan himpunan tak terukur. Misalkan $E_1 = [0, 1) = \bigcup_{i=1}^{\infty} P_i$; $E_2 = \bigcup_{i=2}^{\infty} P_i$;

$E_3 = \bigcup_{i=3}^{\infty} P_i$; ...; $E_n = \bigcup_{i=n}^{\infty} P_i$; .... Misalkan $E = E_1 \cap E_2 \cap E_3 \ldots \cap E_n$

$\cap \ldots = \bigcap_{i=1}^{\infty} E_i$. Akan dibuktikan $E = \phi$.

Andaikan $\exists x \in E$ maka $x \in E_i$ untuk $\forall i \in \mathbb{N}$ dan misalkan $m > n$. Maka:

1. $x \in E_m = \bigcup_{i=m}^{\infty} P_i$ sehingga $\exists i = k \geq m$ sedemikian hingga $x \in P_k$

2. $x \in E_n = \bigcup_{i=n}^{\infty} P_i$ sehingga $\exists i = s \geq n$ sedemikian hingga $x \in P_s$

Tetapi $P_i \cap P_j = \phi$ jika $i \neq j$ maka pengandaian di atas salah. Jadi terbukti bahwa $E = \bigcap_{i=1}^{\infty} E_i = \phi$ sehingga $m^*E = 0$.

Karena $m^*E_i < \infty$ dan E_i merupakan himpunan tak terukur maka $\forall n \in \mathbb{N}$ berlaku $m^*(E_n) = m^* \bigcup_{i=n}^{\infty} P_i > m^*P > 0$. Sehingga $\forall n \in \mathbb{N}$ berlaku $m^*(E_n) > m^*(P) > 0$. Jadi $\lim m^*E_i > 0$. Jadi terbukti bahwa $m^*\left(\bigcap E_i\right) < \lim m^*E_i$.

4. Fungsi Terukur

Fungsi yang akan kita bahas pada subbab ini merupakan fungsi yang didefinisikan pada suatu himpunan terukur.

Teorema 3.21.

Diberikan f fungsi bernilai real yang diperluas. Maka pernyataan-pernyataan berikut ekuivalen:

i. untuk setiap bilangan real α himpunan $\{x: f(x) > \alpha\}$ terukur.

ii. untuk setiap bilangan real α himpunan $\{x: f(x) \geq \alpha\}$ terukur.

iii. untuk setiap bilangan real α himpunan $\{x: f(x) < \alpha\}$ terukur.

iv. untuk setiap bilangan real α himpunan $\{x: f(x) \leq \alpha\}$ terukur.

Pernyataan-pernyataan di atas mengakibatkan

v. untuk setiap bilangan real yang diperluas α himpunan $\{x: f(x) = \alpha\}$ terukur.

Bukti:

Dimisalkan daerah definisi f adalah D dan diberikan sembarang $\alpha \in \mathbb{R}$.

a. Akan dibuktikan (i)$\Rightarrow$(iv).

   Diketahui (i) di mana $\{x: f(x) > \alpha\}$ untuk setiap $\alpha \in \mathbb{R}$. Jadi $\{x: f(x) \leq \alpha\} = D - \{x: f(x) > \alpha\}$ terukur karena selisih dari dua himpunan terukur adalah terukur. Jadi (iv) terbukti.

b. Akan dibuktikan (iv)$\Rightarrow$(i)

   Diketahui (iv) di mana $\{x: f(x) \leq \alpha\}$ untuk setiap $\alpha \in \mathbb{R}$. Jadi $\{x: f(x) > \alpha\} = D - \{x: f(x) \leq \alpha\}$ terukur karena selisih dari dua himpunan terukur adalah terukur. Jadi (i) terbukti.

c. Akan dibuktikan (ii)$\Rightarrow$(iii)

Diketahui (ii) di mana $\{x: f(x) \geq \alpha\}$ untuk setiap $\alpha \in \mathbb{R}$. Jadi $\{x: f(x) < \alpha\} = D - \{x: f(x) \geq \alpha\}$ terukur karena selisih dari dua himpunan terukur adalah terukur. Jadi (iii) terbukti.

d. Akan dibuktikan (iii)$\Rightarrow$(ii)

Diketahui (iii) di mana $\{x: f(x) < \alpha\}$ untuk setiap $\alpha \in \mathbb{R}$. Jadi $\{x: f(x) \geq \alpha\} = D - \{x: f(x) < \alpha\}$ terukur karena selisih dari dua himpunan terukur adalah terukur. Jadi (ii) terbukti.

e. Akan dibuktikan (i)$\Rightarrow$(ii)

Diketahui (i) di mana $\{x: f(x) > \alpha\}$ untuk setiap $\alpha \in \mathbb{R}$. Jadi $\{x: f(x) \geq \alpha\} = \bigcap_{n=1}^{\infty}\{x : f(x) > \alpha - 1/n\}$, dan irisan dari barisan himpunan terukur adalah terukur. Jadi (ii) terbukti.

f. Akan dibuktikan (ii)$\Rightarrow$(i)

Diketahui (ii) di mana $\{x: f(x) \geq \alpha\}$ untuk setiap $\alpha \in \mathbb{R}$. Jadi $\{x: f(x) > \alpha\} = \bigcup_{n=1}^{\infty}\{x : f(x) \geq \alpha + 1/n\}$, dan gabungan barisan himpunan terukur adalah terukur. Jadi (i) terbukti.

Bukti di atas (a – f) menunjukkan bahwa empat pernyataan di atas ekuivalen.

g. Akan dibuktikan (v) benar.

Jika α bilangan real, $\{x: f(x) = \alpha\} = \{x: f(x) \geq \alpha\} \cap \{x: f(x) \leq \alpha\}$ dan irisan himpunan terukur adalah terukur. Jadi (v) terbukti.

Jika $\alpha = \infty$ maka $\{x: f(x) = \infty\} = \bigcap_{n=1}^{\infty}\{x : f(x) \geq n\}$ dan irisan barisan himpunan terukur adalah terukur maka (v) terbukti.

Jika $\alpha = -\infty$, maka $\{x: f(x) = -\infty\} = \bigcap_{n=1}^{\infty}\{x : f(x) \leq n\}$ dan irisan barisan himpunan terukur adalah terukur maka (v) terbukti.

Jadi terbukti bahwa (v) benar.

Definisi 3.6.

Fungsi bernilai real yang diperluas f dikatakan terukur (Lebesgue) jika daerah definisinya terukur dan jika memenuhi salah satu dari empat pernyataan pertama pada teorema 3.21.

Teorema 3.22.

Diberikan c konstanta dan f dan g dua fungsi bernilai real yang diperluas dan terukur yang didefinisikan pada daerah definisi yang sama. Maka fungsi $f + c$, cf, $f + g$, $g - f$, dan fg juga terukur.

Bukti:

a. Berdasarkan kondisi (iii) pada teorema 3.20. maka

   $\{x: f(x) + c < \alpha\} = \{x: f(x) < \alpha - c\}$. Jadi $f + c$ terukur jika f terukur.

b. Dengan cara yang sama pada pembuktian $f + c$, maka $\{x: cf(x) < \alpha\} = \{x: f(x) < \frac{\alpha}{c}\}$. Jadi cf terukur jika f terukur.

c. Jika $f(x) + g(x) < \alpha$, maka $f(x) < \alpha - g(x)$ dan menurut akibat aksioma Archimedes maka terdapatlah bilangan rasional r sedemikian hingga $f(x) < r < \alpha - g(x)$. Oleh karena itu $\{x: f(x) + g(x) < \alpha\} = \bigcup_r (\{x : f(x) < r\} \cap \{x : g(x) < \alpha - r\})$.

Karena bilangan rasional terbilang maka $\bigcup_r (\{x : f(x) < r\} \cap \{x: g(x) < \alpha - r\})$ terukur. Jadi $f + g$ terukur.

d. Karena $-g = (-1)g$ terukur jika g terukur, maka $f - g$ terukur.

e. Fungsi f^2 terukur, karena

$\{x: f^2(x) > \alpha\} = \{x: f(x) > \sqrt{\alpha}\} \cup \{x: f(x) < -\sqrt{\alpha}\}$ untuk $\alpha \geq 0$ dan $\{x: f^2(x) > \alpha\} = D$ jika $\alpha < 0$, di mana D merupakan daerah definisi dari f. Jadi $fg = \frac{1}{2}[(f + g)^2 - f^2 - g^2]$ terukur.

Teorema 3.23.

Diberikan $\langle f_n \rangle$ barisan fungsi terukur (dengan daerah definisi yang sama). Maka fungsi $\sup\{f_1,\ldots, f_n\}$, $\inf\{f_1,\ldots, f_n\}$, $\sup_n f_n, \inf_n f_n, \overline{\lim} f_n$, dan $\underline{\lim} f_n$ semuanya terukur.

Bukti:

Jika h didefinisikan sebagai $h(x) = \sup\{f_1(x), \ldots, f_n(x)\}$, maka $\{x: h(x) > \alpha\} = \bigcup_{i=1}^{n}\{x : f_i(x) > \alpha\}$. Karena f_i terukur maka h juga terukur. Dengan cara yang sama, jika g didefinisikan dengan $g(x) = \sup_n f_n$, maka $\{x: g(x) > \alpha\} = \bigcup_{n=1}^{\infty}\{x : f_n(x) > \alpha\}$. Karena f_n terukur maka g terukur. Jika p didefinisikan sebagai $p(x) = \inf\{f_1(x), \ldots, f_n(x)\}$, maka $\{x: p(x) < \alpha\} = \bigcup_{i=1}^{n}\{x : f_i(x) < \alpha\}$. Karena f_i terukur maka p juga terukur. Dengan cara yang sama, jika q didefinisikan dengan $q(x) = \inf_n f_n$, maka $\{x: q(x) < \alpha\} = \bigcup_{n=1}^{\infty}\{x : f_n(x) < \alpha\}$. Karena f_n terukur maka q terukur.

Karena $\overline{\lim} f_n = \inf_n \sup_{k \geq n} f_k$ maka $\overline{\lim} f_n$ terukur karena supremum barisan fungsi terbukti terukur dan infimum sembarang fungsi juga terukur. Demikian juga, $\underline{\lim} f_n$ juga terukur karena $\underline{\lim} f_n = \sup_n \inf_{k \geq n} f_k$.

Definisi 3.7.

Suatu sifat dikatakan berlaku hampir di mana-mana (atau disingkat *h.d*) jika himpunan titik-titik di mana sifat itu tidak berlaku adalah himpunan yang berukuran nol.

Maka secara khusus kita katakan $f = g$ *h.d* jika f dan g mempunyai daerah definisi yang sama dan $m\{x{:}f(x) \neq g(x)\} = 0$. Dengan cara yang sama, kita katakan bahwa f_n konvergen *h.d* ke g jika terdapat himpunan E berukuran nol sedemikian hingga $f_n(x)$ konvergen ke $g(x)$ untuk setiap titik $x \notin E$.

Teorema 3.24.

Jika f fungsi terukur dan $f = g$ *h.d*, maka g terukur.

Bukti:

Diberikan E himpunan $\{x{:}\ f(x) \neq g(x)\}$ dengan $mE = 0$. Sekarang $\{x{:}\ g(x) > \alpha\} = \{x{:} f(x) > \alpha\} \cup [\{x \in E{:}\ g(x) > \alpha\} - \{x \in E{:}\ g(x) \leq \alpha\}]$.

$\{x{:} f(x) > \alpha\}$ terukur karena f fungsi terukur, dan $\{x \in E{:}\ g(x) > \alpha\} - \{x \in E{:}\ g(x) \leq \alpha\}$ terukur karena merupakan himpunan bagian dari E dan $mE = 0$. Maka $\{x{:}\ g(x) > \alpha\}$ terukur untuk setiap α, jadi g terukur.

Definisi 3.8.

Fungsi himpunan φ bernilai real diperluas disebut fungsi sederhana (*simple function*) bila φ terukur dan jangkauannya suatu himpunan berhingga.

Definisi 3.9.

Suatu fungsi g bernilai real yang didefinisikan pada interval tertutup $[a, b]$ disebut fungsi tangga (*step function*) bila terdapat partisi $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ dari interval sedemikian hingga dalam setiap subinterval $I_k = (x_{k-1}, x_k)$ fungsi g konstan, yaitu $g(x) = a_k$ untuk $x \in I_k$ dan $k = 1, 2, \dots , n$.

Teorema 3.25.

Diberikan f fungsi terukur yang didefinisikan pada $[a, b]$, dan diasumsikan bahwa f bernilai $\pm\infty$ hanya pada himpunan berukuran nol. Maka diberikan $\varepsilon > 0$, kita dapat menemukan fungsi tangga g dan fungsi kontinu h sehingga

$|f - g| < \varepsilon$ dan $|f - h| < \varepsilon$.

Kecuali pada himpunan berukuran kurang dari ε, yaitu $m\{x: |f(x) - g(x)| \geq \varepsilon\} < \varepsilon$ dan $m\{x: |f(x) - h(x)| \geq \varepsilon\} < \varepsilon$.

Bukti:

Untuk membuktikan teorema 3.25. diperlukan empat lemma berikut:

Lemma 3.1.

Diberikan fungsi terukur f pada $[a, b]$ yang bernilai $\pm\infty$ hanya pada himpunan berukuran nol, dan diberikan $\varepsilon > 0$ maka terdapat M sehingga $|f| \leq$ M kecuali pada himpunan yang ukurannya kurang dari $\frac{\varepsilon}{3}$.

Bukti:

Untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ dibentuk himpunan $E_n = \{x: |f(x)| > n\}$, dan mudah dibuktikan bahwa E_n terukur, karena diketahui f terukur. Jika $x \in E_{n+1}$ jadi $|f(x)| > n + 1$ maka $|f(x)| > n$. Jadi $E_n \supset E_{n+1}$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$. Karena semua $E_n \subset [a, b]$, maka kita mempunyai barisan fungsi terukur $\langle E_n \rangle$ dengan $mE_1 < \infty$ dan $E_1 \supset E_2 \supset \ldots$, sehingga menurut teorema 3.17., diperoleh $mE = \lim\limits_{n \to \infty} mE_n$ dengan $E = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_n$. Akan tetapi, $E = \{x: |f(x)| > n$ untuk semua $n \in \mathbb{N}\} = \{x: f(x) = \pm\infty\}$. Karena diketahui $mE = 0$, jadi $\lim E_n = 0$. Jadi, pada $\varepsilon > 0$ yang ditentukan, terdapat $M \in \mathbb{N}$ sehingga $mE_M < \frac{\varepsilon}{3}$. Karena $E_M = \{x: |f(x)| > M$, jadi $\{x: |f(x)| \leq M = [a, b] - E_M$ yang berarti bahwa $|f(x)| \leq M$ kecuali pada E_M yaitu suatu himpunan yang berukuran kurang dari $\frac{\varepsilon}{3}$.

Lemma 3.2.

Diberikan fungsi terukur f pada $[a, b]$, $\varepsilon > 0$, dan M. Maka terdapat fungsi sederhana φ sehingga $|f(x) - \varphi(x)| < \varepsilon$ kecuali pada x di mana $|f(x)| > M$. Jika $m \leq \varphi \leq$ M maka φ dapat dipilih sehingga $m \leq \varphi \leq M$.

Bukti:

Ditinjau himpunan $A = \{x: |f(x)| \leq M\}$. Diambil bilangan bulat positif N sehingga $\varepsilon > \dfrac{1}{N}$. Jadi $A \subset [a, b]$ sehingga $f(A) \subset [-M, M]$.

Dibentuk $A_i = \{x: \dfrac{i}{N} \leq f(x) < \dfrac{i+1}{N},\ i = -MN, \ldots, MN-2\}$

$$A_{MN-1} = \left\{x : M - \frac{1}{N} \leq f(x) \leq M\right\}.$$

Jadi, $A = \bigcup_{i=-MN}^{MN-1} A_i$ dengan $A_1 \cap A_2 = \phi$ untuk $i \neq j$ dan A_i terukur.

Dibentuk fungsi φ yang didefinisikan pada A dengan $\varphi(x) = \dfrac{i}{N}$ untuk $x \in A_i$ dan $i = -MN, \ldots, MN-1$. Karena A terukur dan jangkauan φ berhingga, maka φ fungsi sederhana. Untuk $x \in A$, maka terdapat tepat satu i dengan $-MN \leq i \leq MN-1$ sehingga $x \in A_i$ dan $\varphi(x) = \dfrac{i}{N}$. Karena $\dfrac{i}{N} \leq f(x) < \dfrac{(i+1)}{N}$, maka berlaku $|f(x) - \varphi(x)| < \dfrac{1}{N} < \varepsilon$. Jika didefinisikan $\varphi(x) = M$ untuk $|f(x)| > M$, maka terdapat fungsi sederhana φ yang didefinisikan pada $[a, b]$ dengan $|f(x) - \varphi(x)| < \varepsilon$ kecuali untuk x di mana $|f(x)| > M$.

Lemma 3.3.

Diberikan fungsi sederhana φ pada interval $[a, b]$, maka terdapat fungsi tangga g pada $[a, b]$ sehingga $g(x) = \varphi(x)$ kecuali pada suatu himpunan berukuran kurang dari $\frac{\varepsilon}{3}$. Jika $m \leq \varphi \leq M$ dapat diplih g sehingga $m \leq g \leq M$.

Bukti:

Dimisalkan jangkauan φ adalah $\{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$ dan $\varphi(x) = c_i$ untuk $x \in A_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ dan $[a, b] = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, A_i terukur, $A_i \cap A_j = \phi$ jika $i \neq j$. Menurut teorema 3.18. (vi), untuk setiap i terdapat himpunan S_i gabungan berhingga selang terbuka dan $m^*(S_i \Delta A_i) = m(S_i \Delta A_i) < \frac{\varepsilon}{3n}$. S_i dapat dinyatakan $\bigcup_{k=1}^{k_i} I_{ik}$ gabungan berhingga dengan jumlah minimal selang terbuka yang saling asing, yang berarti bahwa jika dihilangkan satu selang I_{ik} dalam S_i, maka $m(S_i \Delta A_i) \geq \frac{\varepsilon}{3n}$.

$A_i = (A_i \cap S_i) \cup (A_i - S_i) \subset (A_i \cap S_i) \cup (S_i \Delta A_i)$.

$mA_i = m(A_i \cap S_i) + m(A_i - S_i) \leq m(A_i \cap S_i) + m(S_i \Delta A_i) < m(A_i \cap S_i) + \frac{\varepsilon}{3n}$. Jadi $m(A_i \cap S_i) > mA_i - \frac{\varepsilon}{3n}$.

$[a, b] = \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap S_i) \cup \bigcup_{i=1}^{n} (A_i - S_i) \subset \bigcup (A_i \cap S_i) \cup \bigcup (S_i \Delta A_i)$.

Jika $H = \bigcup_{i=1}^{n} (S_i \Delta A_i)$ maka $mH < \frac{\varepsilon}{3}$. Jika $x \in (A_i \cap S_i)$, maka $x \notin (S_i \Delta A_i)$. Diketahui bahwa nilai $\varphi(x) = c_i$ untuk $1 \leq i \leq n$. Karena S_i

$=\bigcup_{k=1}^{k_i} I_{ik}$, maka untuk setiap $x \in (A_i \cap I_{ik})$ untuk sembarang k dengan $1 \le k \le k_i$ dan $x \notin (S_i \Delta A_i)$ nilai $\varphi(x) = c_i$. Jadi, kecuali $x \in (A_i \Delta S_i)$ maka untuk semua $x \in I_{ik}$ $(1 \le k \le k_i)$ nilai $\varphi(x) = c_i$.

Karena $[a, b] = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ maka untuk $x \in [a, b]$ kecuali $x \in H$ dengan $mH < \varepsilon$, diperoleh fungsi tangga g sehingga $g(x) = \varphi(x)$.

Lemma 3.4.

Diberikan fungsi tangga g pada interval $[a, b]$, maka terdapat fungsi kontinu h sedemikian hingga $h(x) = g(x)$ kecuali pada suatu himpunan berukuran kurang dari $\frac{\varepsilon}{3}$. Jika $m \le g \le M$ maka h dapat dipilih sehingga $m \le g \le M$.

Bukti:

Fungsi tangga g pada $[a, b]$ adalah fungsi sehingga $g(x) = c_i$ untuk $x \in I_i$ dengan I_i suatu selang dalam keluarga berhingga $\{I_i, \dots, I_n\}$ dari selang-selang yang saling asing sehingga $[a, b] = \bigcup_{i=1}^{n} I_i$.

Selang I_i dimisalkan berujungkan a_i dan b_i dengan $a_i < b_i$ yang dapat diurutkan dalam urutan $I_1, I_2, \dots, I_n$ sedemikian hingga $a = a_1 < b_1 = a_2 < b_2 = a_3 < b_3 = \dots = a_n < b_n = b$.

Di setiap titik b_i dengan $i = 1, 2, \dots, (n-1)$ dibuat selang terbuka (p_i, q_i) yang memuat b_i dengan $p_i \in I_i$, $q_i \in I_{i+1}$, dan $q_i - p_i < \frac{\varepsilon}{(n-1)}$.

Dibentuk fungsi h pada $[a, b]$ sehingga $h(x) = c_1$ jika $a \leq x \leq p_1$, $h(x) = c_n$ jika $q_{n-1} \leq x \leq b$, $h(x) = c_i$ jika $q_i \leq x \leq p_{i+1}$, dan $h(x)$ $= \dfrac{c_{i+1} - c_i}{q_i - p_i}(x - p_i) + c_i$ jika $p_i < x < q_i$ untuk $i = 1, 2, \ldots, (n-1)$, jadi linear pada selang terbuka (p_i, q_i). Dengan mudah dimengerti bahwa h kontinu pada $[a, b]$ dan $h(x) = g(x)$ pada $[a, b]$ kecuali $x \in G = \bigcup_{i=1}^{n-1}(p_i, q_i)$ dan $m(G) < \varepsilon$.

Bukti teorema 3.25.

Diberikan f terukur pada $[a, b]$, $m\{x: |f(x)| = \infty\} = 0$, dan $\varepsilon > 0$.

Menurut lemma 3.1. terdapat $M > 0$ sehingga $|f(x)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$ untuk $x \in [a, b] - E$ dengan $E = \{x: |f(x)| > M\}$ dan $mE < \dfrac{\varepsilon}{3}$.

Menurut lemma 3.2. terdapat fungsi sederhana φ yang didefinisikan pada $[a, b]$ sehingga $|f(x) - \varphi(x)| < \varepsilon$ untuk $x \in [a, b] - E$.

Menurut lemma 3.3. terdapat fungsi tangga g yang didefinisikan pada $[a, b]$ sehingga $g(x) = \varphi(x)$ untuk $x \in [a, b] - F$ dengan $mF < \dfrac{\varepsilon}{3}$.

Jadi, menurut lemma 3.1. , 3.2. , dan 3.3. terdapat fungsi tangga g pada $[a, b]$ sehingga $|f(x) - \varphi(x)| = |f(x) - g(x)| < \varepsilon$ untuk $x \in [a, b] - (E \cup F)$ dengan $m(E \cup F) \leq mE + mF < \dfrac{\varepsilon}{3} + \dfrac{\varepsilon}{3} = \dfrac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon$.

Menurut lemma 3.4. terdapat fungsi kontinu h sehingga $h(x) = g(x)$ untuk $x \in [a, b] - G$ dengan $mG < \frac{\varepsilon}{3}$. Jadi untuk $x \in [a, b] - (E \cup F \cup G)$ berlaku $|f(x) - g(x)| = |f(x) - h(x)| < \varepsilon$ dengan $m(E \cup F \cup G) < \varepsilon$.

Tentu saja jika $m \leq f \leq M$ dapat dipilih $m \leq g \leq M$ dan $m \leq h \leq M$.

5. Tiga Asas Littlewood

Berbicara tentang teori fungsi variabel real, J.E. Littlewood mengatakan bahwa ada tiga asas yang secara mudahnya dapat diungkapkan sebagai berikut:

a. Setiap himpunan (terukur) hampir merupakan gabungan berhingga dari interval-interval.

   Asas ini muncul dalam pernyataan yang diberikan oleh teorema 3.17., karena teorema tersebut menunjukkan bahwa suatu himpunan terukur "hampir" merupakan gabungan dari interval-interval, kecuali pada himpunan yang berukuran kecil sekehendak kita. Jadi himpunan terukur dapat didekati oleh gabungan interval-interval dengan kedekatan yang sangat dekat sekehendak kita.

b. Setiap fungsi (terukur) hampir kontinu.

   Asas ini muncul dalam pernyataan yang diberikan oleh teorema 3.25., karena teorema tersebut menunjukan bahwa suatu fungsi terukur "hampir" merupakan fungsi kontinu, kecuali pada himpunan yang berukuran kecil sekehendak kita. Jadi fungsi terukur dapat didekati oleh fungsi kontinu dengan kedekatan yang sangat dekat sekehendak kita.

c. Setiap barisan fungsi (terukur) yang konvergen hampir konvergen seragam.

Asas ini muncul dalam pernyataan yang diberikan oleh teorema 3.26.

Teorema 3.26.

Diberikan E himpunan terukur dengan ukuran berhingga, dan $<f_n>$ suatu barisan fungsi terukur yang didefinisikan pada himpunan E. Diberikan f fungsi terukur bernilai real sedemikian hingga berlaku $f_n(x) \to f(x)$ pada E. Maka, diberikan $\varepsilon > 0$ dan $\delta > 0$, terdapatlah himpunan terukur $A \subset E$ dengan $mA < \delta$ dan terdapat bilangan bulat N sedemikian hingga untuk semua $x \notin A$ dan untuk semua $n \geq N$, maka

$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Bukti:

Diberikan $G_n = \{x \in E : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, dan himpunan $E_N = \bigcup_{n=N}^{\infty} G_n = \{x \in E : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon$ untuk suatu $n \geq N\}$.

Karena untuk setiap n fungsi f_n terukur, maka $f_n - f$ dan $|f_n - f|$ terukur. Jadi himpunan G_n terukur untuk setiap n dan demikian juga E_N untuk setiap N. Tampak bahwa $E_{N+1} \subset E_N$, dan $E_N \subset E$ untuk setiap $N \in \mathbb{N}$. Jadi, kita memperoleh barisan himpunan terukur $\langle E_N \rangle$ dengan:

$mE_1 \leq mE < \infty$,

$E_1 \supset E_2 \supset \ldots \supset E_N \supset E_{N+1} \supset \ldots$,

Jadi menurut teorema 3.17.

$$m\bigcap_{N=1}^{\infty} E_N = \lim_{N\to\infty} mE_N.$$

Karena $f_n(x) \to f(x)$ untuk setiap $x \in E$, maka jika diberikan $p \in E$ terdapat N_p sehingga untuk semua $n \geq N_p$ berlaku $|f_n(p) - f(p)| < \varepsilon$, sehingga $p \notin G_n$ untuk $n \geq N_p$ dan $p \notin E_{N_p}$. Jadi, untuk setiap $x \in E$ terdapat suatu N_x di mana $x \notin E_{N_x}$. Jadi, jika $x \in E$ maka x tidak mungkin dalam $\bigcap_{N=1}^{\infty} E_N$. Oleh karena $G_n \subset E$ untuk setiap n, maka $E_N \subset E$ untuk setiap N, sehingga $\bigcap_{N=1}^{\infty} E_N = \phi$, dan dengan teorema 3.17., $\lim_{N\to\infty} mE_N = m^*\phi = 0$.

Jadi jika diberikan $\delta > 0$, $\exists N$ sehingga $mE_N < \delta$, yaitu, $m\{x \in E: |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon$ untuk suatu $n \geq N\} < \delta$. Jika kita tulis A untuk himpunan E_N, maka $mA < \delta$ dan $A^c = \{x \in E: |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ untuk semua $n \geq N\}$.

Teorema 3.26. memenuhi asas ketiga Littlewood karena teorema tersebut menunjukkan bahwa suatu barisan fungsi terukur $<f_n>$ yang konvergen "hampir" konvergen seragam ke f pada E, kecuali pada himpunan yang berukuran kecil sekehendak kita; yaitu pada himpunan $E - A$ dengan $mA < \delta$ untuk sembarang $\delta > 0$ yang kita pilih.

Hipotesis teorema 3.26 yang menyatakan bahwa $f_n \to f$ pada E, dapat diperlemah menjadi $f_n \to f$ *h.d* pada E. Maksudnya, $<f_n>$ konvergen ke f pada E kecuali pada titik-titik dalam $B \subset E$ dengan $mB = 0$. Teorema 3.26. menjadi sebagai berikut:

Teorema 3.27.

Diberikan E himpunan terukur dengan ukuran berhingga, dan $<f_n>$ barisan fungsi terukur yang konvergen ke fungsi bernilai real f hampir di mana-mana pada E ($f_n \to f$ *h.d* pada E). Maka, jika diberikan $\varepsilon > 0$ dan $\delta > 0$, terdapatlah himpunan terukur $A \subset E$ dengan $mA < \delta$ dan terdapat bilangan bulat N sedemikian hingga untuk semua $x \notin A$ dan untuk semua $n \geq N$, maka

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Teorema 3.28.

Jika $<f_n>$ barisan fungsi terukur yang konvergen *h.d* ke f suatu fungsi bernilai real pada himpunan terukur E dengan $mE < \infty$, maka untuk sembarang $\eta > 0$, terdapatlah himpunan $A \subset E$ dengan $mA < \eta$ sedemikian hingga $f_n \to f$ pada $E - A$.

Teorema ini disebut teorema *Egoroff*.

Bukti:

Menurut teorema 3.27. untuk sembarang $\varepsilon > 0$ dan $\delta > 0$ terdapatlah himpunan terukur $A \subset E$ dengan $mA < \delta$ dan terdapatlah $N \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga untuk semua $x \notin A$ dan $n \geq N$,

$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Misalkan diberi $\varepsilon_n = \dfrac{1}{n}$ dan $\delta_n = 2^{-n}\eta$ dapat kita cari himpunan $A_n \subset E$ dengan $mA_n < 2^{-n}\eta$ dan $N_n \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga untuk semua $x \notin A_n$ dan $k \geq N_n$ berlaku

$$|f_k(x) - f(x)| < \frac{1}{n}.$$

Bila $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, maka dari sifat terjumlah terbilang pada m diperoleh, $mA = \sum_{n=1}^{\infty} mA_n < \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}\eta < \eta$. Untuk ε_n yang diberikan dapat dicari m sedemikian hingga $\dfrac{1}{m} < \varepsilon$. Bila $x \notin A_m$ untuk $k \geq N_m$ maka dipenuhi

$$|f_k(x) - f(x)| < \frac{1}{m} < \varepsilon.$$

Bila $x \notin A$ maka untuk semua $n \in \mathbb{N}$, $x \notin A_n$, jadi $x \notin A_m$, sehingga terdapat N_m sedemikian hingga berlaku $(\forall k \geq N_m)$, $|f_k(x) - f(x)| < \varepsilon$ yang berarti f_n konvergen seragam ke f.

Teorema 3.29.

Diberikan f fungsi terukur bernilai real pada interval $[a, b]$. Maka jika diberikan $\delta > 0$ terdapat fungsi kontinu φ pada $[a, b]$ sehingga $m\{x: f(x) \neq h(x)\} < \delta$.

Teorema ini disebut teorema *Lusin*.

Bukti:

Diberikan $\delta > 0$. Dalam hal ini $m\{x: x \in [a, b], f(x) = \pm\infty\} = 0$. Menurut teorema 3.25., untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ terdapat fungsi kontinu h_n pada $[a, b]$ sehingga $|h_n - f| < \frac{1}{n}$ kecuali pada $A_n \subset [a, b]$ dan $mA_n < \delta 2^{-n-1}$. Jika $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ maka $mA \leq \sum_{n=1}^{\infty} mA_n < \delta 2^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = \frac{\delta}{2}$.

Ditinjau barisan fungsi kontinu $\langle h_n \rangle$ pada $[a, b]$, maka untuk setiap $x \in [a, b] - A$ dan setiap $n \in \mathbb{N}$ berlaku $|h_n(x) - f(x)| < \frac{1}{n}$. Jadi $h_n \to f$ pada $[a, b] - A$. Menurut teorema Egoroff terdapat $B \subset ([a, b] - A)$ dengan $mB < \frac{\delta}{4}$ sehingga $h_n \to f$ seragam pada $[a, b] - (A \cup B)$. Jadi menurut teorema 2.6. $\langle h_n \rangle$ konvergen ke fungsi kontinu f pada $D = [a, b] - (A \cup B)$. Menurut teorema 3.18. terdapat himpunan tertutup

$F \subset D$ sehingga $m(D-F) < \frac{\delta}{4}$. Jika $E = [A \cup B \cup (D-F)]$ maka $mE < \delta$. Jadi fungsi f kontinu pada himpunan tertutup F. Menurut teorema 2.15. fungsi f yang kontinu pada himpunan tertutup F ini dapat diperluas sehingga menjadi fungsi φ kontinu pada $\mathbb{R}$ dengan $\varphi(x) = f(x)$ untuk $x \in F$ yang tentu saja kontinu pada $[a, b]$. Himpunan $\{x: \varphi(x) \neq f(x)\}$ adalah subhimpunan dari E dengan $mE < \delta$.

BAB IV

PENUTUP

Pada umumnya orang hanya mengenal ukuran pada interval yaitu panjang interval. Tetapi sesungguhnya masih banyak subhimpunan dari garis real yang bukan interval. Pada skripsi ini masalah yang dibahas adalah ukuran pada sembarang subhimpunan dalam $\mathbb{R}$. Ukuran tersebut menjadi panjang interval apabila digunakan untuk mengukur panjang interval. Ukuran yang kita bicarakan adalah ukuran Lebesgue. Pada dasarnya ukuran Lebesgue didefinisikan dengan menggunakan ukuran untuk interval yaitu panjang interval.

Sebelum mempelajari ukuran Lebesgue lebih dulu dibahas ukuran luar Lebesgue. Kelebihan dari ukuran luar Lebesgue adalah terdefinisikan untuk semua subhimpunan dari garis real $\mathbb{R}$ tetapi mempunyai kelemahan yaitu tidak mempunyai sifat terjumlah terbilang. Namun jika daerah definisi ukuran luar Lebesgue dikurangi akan diperoleh ukuran yang mempunyai sifat terjumlah terbilang sehingga kita peroleh ukuran Lebesgue. Tetapi sayangnya, tidak semua subhimpunan dalam $\mathbb{R}$ mempunyai ukuran Lebesgue. Meskipun demikian, keluarga himpunan-himpunan yang terukur Lebesgue sudah cukup luas dan keluarga himpunan tersebut mempunyai struktur matematika yang disebut aljabar-σ.

Fungsi f disebut terukur jika daerah definisinya himpunan terukur dan untuk setiap $\alpha \in \mathbb{R}$ berlaku $\{x: f(x) > \alpha\}$ terukur.

Menurut Littlewood, masalah yang dihadapi dalam analisis tidak begitu besar seperti yang dibayangkan. Boleh dikatakan hanya ada tiga asas, yaitu:

a. Setiap himpunan hampir merupakan gabungan berhingga dari interval-interval.

b. Setiap fungsi hampir kontinu.

c. Setiap barisan fungsi yang konvergen hampir konvergen seragam.

DAFTAR PUSTAKA

de Barra, G. 1981. *Measure Theory And Integration*. John Wiley & Sons. New York.

Marpaung, Y, Diktat: *Pengantar Teori Himpunan*. Yogyakarta.

Royden, H. L. 1968. *Real Analysis, Second Edition*. Mac Millan Publisihing Co., Inc. New York.

Soemantri, R, Diktat: *Analisis Real I*. Yogyakarta.

Soemantri, R, Diktat: *Analisis Real II*. Yogyakarta.

Soemantri, R, Diktat: *Analisis Real III*. Yogyakarta.