TRANSFORMASI-Z DAN PENGGUNAANNYA UNTUK MENYELESAIKAN PERSAMAAN BEDA LINEAR KOEFISIEN KONSTAN ORDE-1 DAN ORDE-2

SKRIPSI

Diajukan untuk Memenuhi Salah Satu Syarat
Memperoleh Gelar Sarjana Pendidikan
Program Studi Pendidikan Matematika

Oleh:

Lingnawati D.S.
NIM : 011414047

PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA
JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
UNIVERSITAS SANATA DHARMA
YOGYAKARTA
2006

SKRIPSI

TRANSFORMASI-Z DAN PENGGUNAANNYA UNTUK MENYELESAIKAN PERSAMAAN BEDA LINEAR KOEFISIEN KONSTAN ORDE-1 DAN ORDE-2

Oleh:

Lingnawati D.S.
NIM : 011414047

Telah disetujui oleh :

Pembimbing I

Y.G. Hartono, S.Si., M.Sc.

Tanggal : 20 Maret 2006

SKRIPSI

TRANSFORMASI-Z DAN PENGGUNAANNYA UNTUK MENYELESAIKAN PERSAMAAN BEDA LINEAR KOEFISIEN KONSTAN ORDE-1 DAN ORDE-2

Dipersiapkan dan ditulis oleh:
Lingnawati D.S.
NIM : 011414047

Telah dipertahankan di depan Panitia Penguji
pada tanggal **27 Maret 2006**
dan dinyatakan memenuhi syarat

Susunan Panitia Penguji

		Nama lengkap	Tanda Tangan
Ketua	:	Drs. Severinus Domi, M.Si.	
Sekretaris	:	M. Andy Rudhito, S.Pd., M.Si.	
Anggota	:	Y.G. Hartono, S.Si., M.Sc.	
Anggota	:	Drs. St. Susento, M.Si.	
Anggota	:	M. Andy Rudhito, S.Pd., M.Si.	

Yogyakarta, 27 Maret 2006
Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan
Universitas Sanata Dharma
Dekan,

Drs. Tarsisius Sarkim, M.Ed., Ph.D.

Sekalipun aku berjalan dalam lembah kekelaman,
aku tidak takut bahaya, sebab Engkau besertaku;
gada-Mu dan tongkat-Mu, itulah yang menghibur aku.
Mazmur 23:4

TUHAN telah memberikan POTENSI dalam hidupmu,
bukan sekedar untuk Mengikuti Sejarah,
namun untuk MEMBUAT SEBUAH SEJARAH.
The History Maker

Jika kita BERPIKIR kita BISA,
maka kita BISA.
Jika kita BERPIKIR kita TIDAK BISA,
maka kita TIDAK BISA.
Henry Ford

I wouldn't take one step without You
I could never go on
I wouldn't live one day without You
I don't have the strength
To make it on my own

When I'm standing in the dark
I still believe.....
Someone's watching over me

Presented to
My Lord, My Savior, My Everything "Jesus Christ"
Orang Tuaku yang terbaik Papa dan Mama
My Lovely Brothers Ko' Aming dan IyonG

PERNYATAAN KEASLIAN KARYA

Saya menyatakan dengan sesungguhnya bahwa skripsi yang saya tulis ini tidak memuat karya atau bagian karya orang lain, kecuali yang telah disebutkan dalam kutipan dan daftar pustaka, sebagaimana layaknya karya ilmiah.

Yogyakarta, 27 Maret 2006

Penulis

Lingnawati D.S.

ABSTRAK

TRANSFORMASI-Z DAN PENGGUNAANNYA UNTUK MENYELESAIKAN PERSAMAAN BEDA LINEAR KOEFISIEN KONSTAN ORDE-1 DAN ORDE-2

Penulisan skripsi ini bertujuan untuk memahami kegunaan transformasi-Z untuk menyelesaikan persamaan beda linear orde-1 dan orde-2 dengan koefisien konstan yang memenuhi nilai awal yang diberikan. Metode yang dipakai dalam penulisan skripsi adalah metode studi pustaka.

Ada beberapa metode yang dapat digunakan untuk menentukan penyelesaian suatu persamaan beda. Salah satunya adalah metode transformasi-Z. Transformasi-Z dari suatu fungsi diskret $y(k)$ didefinisikan sebagai $\mathrm{Y}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} y(k)\, z^{-k}$ untuk $k \geq 0$. Jika $y(k)$ dikenai transformasi-Z, akan dihasilkan suatu fungsi $\mathrm{Y}(z)$. Sebaliknya, jika $\mathrm{Y}(z)$ dikenai invers transformasi-Z, maka akan dihasilkan $y(k)$.

Dengan menggunakan metode transformasi-Z, dapat dihasilkan suatu penyelesaian khusus secara langsung dari suatu persamaan beda tanpa perlu mencari penyelesaian umumnya dan penyelesaian tersebut memenuhi nilai awal yang diberikan. Dengan menggunakan metode transformasi-Z, persamaan beda linear dengan koefisien konstan dapat diselesaikan dengan langkah-langkah yang cukup mudah.

ABSTRACT

Z-TRANSFORM AND ITS APLICATION FOR SOLVING DIFFERENCE LINEAR EQUATION CONSTANT COEFFICIENT FIRST ORDER AND SECOND ORDER

The purpose of this paper is to understand the function of Z-transform to solve difference linear equation initial order and second order with constant coefficients that fulfil first value given. The writing of this paper is prepared by literature study method.

There are several methods that can be used to decide the solution of difference equation. One of them is Z-transform. Z-transform from the discrete function $y(k)$ is defined as $\mathrm{Y}(z)=\sum_{k=0}^{\infty} y(k)\, z^{-k}$ for $k \geq 0$. If $y(k)$ is Z-transform, then will resulted the function $\mathrm{Y}(z)$. Vice versa, if $\mathrm{Y}(z)$ is invers Z-transform, then will resulted $y(k)$.

Using Z-transform method, then can be resulted particular solution directly from difference equation without searching for general solution and that solution fulfil initial value given. By using Z-transform, difference linear equation with constant coefficients can be solved with steps that easy enough.

KATA PENGANTAR

Puji dan syukur kepada Tuhan Yang Maha Esa atas berkat dan rahmat-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan penulisan dan penyusunan skripsi ini.

Skripsi ini ditulis untuk memenuhi salah satu syarat dalam memperoleh gelar Sarjana Pendidikan, Program Studi Pendidikan Matematika, Jurusan Pendidikan Matematika dan IPA, Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Universitas Sanata Dharma, Yogyakarta.

Dalam proses penulisan dan penyusunan skripsi ini, penulis menyadari bahwa tanpa bantuan dari berbagai pihak yang telah memberikan sumbangan pikiran, waktu, semangat dan tenaga, skripsi ini tidak akan tersusun dengan baik. Oleh karena itu pada kesempatan ini penulis menyampaikan ucapan terima kasih yang tak terhingga kepada :

1. Bapak Y.G. Hartono, M. Si., selaku dosen pembimbing yang telah membimbing dan memberikan saran kepada penulis selama proses penulisan skripsi ini.
2. Bapak M. Andy Rudhito, S. Pd., M. Si., selaku Kaprodi Pendidikan Matematika.
3. Bapak Drs. Th. Sugiharto, M.T. dan Ibu Wanty Widjaja, S.Pd., M. Ed., selaku Dosen Pembimbing Akademik, Bapak Drs. St. Susento, M.Si., atas bantuannya kepada penulis dalam proses penulisan skripsi ini dan Sr. Yuni, atas bimbingan dan nasehat-nasehatnya.

4. Bapak Drs. St. Susento, M.Si., selaku dosen penguji yang telah memberikan saran kepada penulis demi perbaikan skripsi ini.
5. Bapak M. Andy Rudhito, S. Pd., M. Si., selaku dosen penguji yang telah memberikan saran kepada penulis demi perbaikan skripsi ini.
6. Bapak Sugeng dan Bapak Narjo yang telah membantu memperlancar studi penulis di Universitas Sanata Dharma.
7. Bapak dan Ibu Dosen yang telah mendidik dan membagi pengetahuan dan pengalaman kepada penulis selama kuliah.
8. Bapak dan Ibu Karyawan UPT Perpustakaan Paingan.
9. Papa Edi dan Mama Lan sebagai orang tua terbaik bagi penulis atas cinta kasih, doa dan dorongan yang luar biasa untuk terus berjuang dan tidak pernah menyerah.
10. Ko Aming dan Iyong atas kebersamaan yang membuat penulis mengerti arti saudara. Keponakanku tersayang: Valdi dan Yadi, kepolosan kalian banyak memberikan pengalaman baru bagiku. *I love you all.*
11. Keluarga Arman Cendana atas dukungannya selama ini kepada penulis.
12. Sahabat terbaik dan teman seperjuanganku: Neng, Vetti, Ayu, Mae, DeFfi, Ncep, Krisna. Kalian yang terus berdiri bagiku saat aku terpuruk sekalipun. Kehadiran kalian membuat hidupku penuh warna.
13. Personil *GKPB Fajar Keagungan Cirebon*: C'Trisye, C'Yulisa, C'Lena, Yunita, C'Yeni, C'Maria, Ko Halim. Kalian yang membuka sejarah baru dalam hidupku. JLU n ILU too.

14. Anak-anak *Lion of Judah* (Roy, K'Esta, Neng, Vetti, Ayoe, Chika, Elvie, Aniez, Gita, Henny, Dina, Ani, Sabeth, Ncep, Donald, Erma, Yuli, Welly, Adhi, Dokman, 4-ever, Rico, M Andun, Jeffy,), anak-anak *Eagle Star* (K'Musa, Mae, K'Jef, Ana, Agus, Vivin, Shella, Christian, Sunggul, Marten, Juni), *center Rise Up, Mercy, House of Joy* dan *Jemaat GBI Generasi Baru Yogyakarta* atas kasih, persaudaraan, doa, pengajaran, canda tawa, pengertian dan gesekan yang terjadi sehingga membuat penulis dewasa dalam Tuhan.
15. Adik-adikku tersayang: Chika, Elvie, Aniez, Gita, Henny, Sabeth, Ani, Andi, Donald, Ade, Purnomo, Yandy, Safat, Ridho atas dukungan dan kebaikan kalian semua.
16. Sahabat yang selalu menemani hari-hariku di JP MIPA: Erny S. Terimakasih atas doa, dukungan, kebersamaan, canda tawa serta duka yang kita lalui bersama. Irene dan Atik atas pengertian, kebaikan dan dukungannya. ("Star has 5 ends, Square has 4 ends, Triangle has 3 ends, Line has 2 ends, Life has 1 ends, but I hope, our friendship has no end").
17. Sobat-sobat yang selalu mendukungku: Sr. Fidelis, Rm. Ansi, Iel_unesa, Tedy_itb.
18. Teman-teman P Mat: Tina, Anik, Ira, Sita, Tita, Uud, Nina, Eko, Markus, Jajang, Agung, Rm. Renso, Erni L, Lusi, Yanti, Wanti, Nana, Rere, Mondang, M. Pakem dan teman-teman lainnya atas kerjasama, kebersamaan dan kekompakkannya.
19. Ibu Domesia Novi Handayani, S. Pd. selaku pembimbing HMJ PMIPA, teman-teman pengurus HMJ PMIPA, pengurus BEM FKIP periode 2002-

2003, atas dukungan, kerjasama, suka duka yang kita lalui bersama dalam menjalankan program HMJ yang "*seabrek*" (sorry kalo aku belum bisa jadi ketua yang terbaik bagi kalian....).

20. Mbah Guru tercinta dan cah-cah KKN: Mbare, De Ias, Teh Neni, Susan, Mba Ume, Gembong, Don^2, Handi. Saat-saat yang kita lalui bersama akan selalu kukenang......
21. Teman-teman kos *Valent House*: Chika, Neng, Aniez, Nophe, Nesa, Nia, Siska_Ardhi, Ema, Acied, Tista, Vivi, Julle, Mba Ambar, Lili, Ch!L1 & Zamo Jr. (kura-kura kesayanganku). *I'll always remember you all.*
22. Semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu.

Dalam kesempatan ini, tak lupa penulis memohon maaf kepada semua pihak atas kekurangan dan kesalahan yang mungkin dilakukan penulis. Oleh karena itu dengan rendah hati penulis mengharapkan masukan dan saran yang membangun. Akhir kata, penulis berharap semoga skripsi ini bermanfaat bagi setiap pembaca.

Yogyakarta, 27 Maret 2006

Penulis

DAFTAR ISI

BAB I

PENDAHULUAN

A. Latar Belakang Masalah

Salah satu topik dalam matematika yang biasa digunakan dalam penyusunan model untuk masalah dalam dunia nyata, yaitu masalah-masalah yang mengandung laju perubahan adalah persamaan diferensial. Akan tetapi dalam beberapa kasus, misalnya perhitungan pendapatan nasional, sensus penduduk, bunga Bank (yang akan dijelaskan pada Bab 3) di mana fungsi yang terlibat adalah fungsi diskret maka persamaan diferensial kurang tepat jika digunakan untuk menyusun model tersebut. Untuk itu digunakanlah persamaan beda di dalam penyusunan modelnya.

Dalam menentukan penyelesaian khusus persamaan beda, kita dihadapkan pada nilai awal yang harus dipenuhi. Untuk mencari penyelesaian umum persamaan beda linear non homogen orde-1 dan orde-2, terlebih dahulu harus dicari penyelesaian umum persamaan beda linear homogen yang bersesuaian dengan persamaan beda linear non homogen tersebut. Kemudian, dicari sebarang penyelesaian dari persamaan beda linear non homogen. Penyelesaian umum persamaan beda linear non homogen adalah gabungan dari penyelesaian umum persamaan beda linear homogen yang bersesuain tersebut dengan sebarang penyelesaian dari persamaan beda linear non homogen. Ada beberapa metode yang digunakan untuk mencari sebarang penyelesaian dari persamaan beda linear non homogen, misalnya, metode koefisien tak tentu dan metode variasi parameter. Ada suatu metode yang memberikan kemudahan didalam menentukan penyelesaian persamaan beda linear homogen dan non homogen dengan koefisien konstan. Metode tersebut adalah metode transformasi-Z. Metode transformasi-Z memberikan langkah-langkah penyelesaian yang cukup mudah dan akan diperoleh penyelesaian umum suatu persamaan beda secara langsung tanpa harus mencari sebarang penyelesaian non homogennya. Tetapi dalam skripsi ini tidak dibahas kelemahan dan kelebihan transformasi-Z. Transformasi-Z dalam hal ini hanya memberikan alternatif lain cara penyelesaian persamaan beda.

Karena alasan itulah penulis tertarik untuk mengkaji lebih jauh tentang bagaimana transformasi-Z dapat membantu dalam mencari penyelesaian persamaan beda linear homogen dan non homogen orde-1 dan orde-2 dengan koefisien konstan.

B. Rumusan Masalah

Masalah-masalah yang akan dibahas dalam penulisan ini adalah:

a. Apakah yang dimaksud dengan persamaan beda linear homogen dan non homogen dan bagaimana cara menyelesaikannya?

   1. Apakah yang dimaksud persamaan beda linear homogen dan non homogen orde-1 dengan koefisien konstan dan bagaimana cara menyelesaikannya?

2. Apakah yang dimaksud persamaan beda linear homogen dan non homogen orde-2 dengan koefisien konstan dan bagaimana cara menyelesaikannya?

b. Apakah yang dimaksud transformasi-Z?

1. Apa definisi dan konvergensi transformasi-Z?
2. Sifat-sifat apakah yang dimiliki transformasi-Z?
3. Metode apa yang digunakan dalam mencari invers transformasi-Z?

c. Bagaimana penggunaan metode transformasi-Z dalam menyelesaikan persamaan beda linear homogen dan non homogen orde-1 dan orde-2 dengan koefisien konstan?

C. Tujuan Penulisan

Secara umum, penulisan ini bertujuan untuk memahami persamaan beda linear homogen dan non homogen orde-1 dan orde-2 dengan koefisien konstan dan penyelesainnya. Juga untuk mempelajari konvergensi, invers, sifat-sifat transformasi-Z dan penggunaannya dalam menyelesaikan persamaan beda linear homogen dan non homogen orde-1 dan orde-2 dengan koefisien konstan. Tujuan skripsi ini hanya memberikan alternatif lain atau penyelesaian lain dari persamaan beda hingga. Persamaan beda hingga yang biasanya diselesaikan menggunakan koefisien taktentu bisa juga diselesaikan dengan transformasi-Z. Oleh karena itu, dalam skripsi ini dibahas metode pembagian panjang dan metode pecahan parsial.

D. Manfaat Penulisan

Manfaat dari penulisan ini adalah :

a. Semakin memahami persamaan beda secara teoritik.

b. Semakin memahami transformasi-Z secara teoritik.

c. Semakin memahami kegunaan Transformasi-Z dalam menyelesaikan persamaan beda linear homogen dan non homogen orde-1 dan orde-2 dengan koefisien konstan.

E. Batasan Masalah

Dalam penulisan ini, permasalahan yang akan dibahas dibatasi pada masalah persamaan beda linear homogen dan non homogen orde-1 dan orde-2 dengan koefisien konstan. Metode penyelesaian untuk persamaan beda linear non homogen dengan koefisien konstan dibatasi pada metode koefisien tak tentu. Sedangkan metode invers transformasi-Z juga dibatasi pada metode pembagian panjang dan metode pecahan parsial.

F. Metode Penulisan

Metode yang akan digunakan dalam penulisan ini adalah metode studi pustaka.

G. Sistematika Penulisan

BAB I. PENDAHULUAN

A. Latar Belakang Masalah

BAB II

LANDASAN TEORI

A. BARISAN

Definisi 2.1

Suatu barisan (atau barisan tak hingga) adalah suatu fungsi yang daerah asalnya adalah himpunan bilangan bulat positif.

Untuk menulis suatu barisan digunakan notasi $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$.

Contoh 2.1

Tulislah lima suku pertama dari barisan $\{2^n\}_{n=1}^{+\infty}$!

Jawab:

Substitusikan nilai $n = 1, 2, 3, 4, 5$ ke dalam $\{2^n\}_{n=1}^{+\infty}$, menghasilkan

$$2^1,\ 2^2,\ 2^3,\ 2^4,\ 2^5 \text{ atau}$$

$$2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32 \qquad \square$$

Definisi 2.2

Suatu barisan $\{a_n\}$ disebut konvergen menuju L atau mempunyai limit L dan ditulis sebagai

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = L$$

apabila untuk tiap bilangan positif ε, ada bilangan bulat positif N sehingga

$$n \geq N \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon$$

Suatu barisan yang tidak mempunyai limit disebut divergen.

Contoh 2.2

Apakah barisan $\left\{\dfrac{n}{2n+1}\right\}_{n=1}^{+\infty}$ konvergen, jika demikian berapakah limitnya?

Jawab:

$$a_n = \frac{n}{2n+1}$$

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{2n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2+(1/n)}$$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to+\infty} 1}{\lim\limits_{n\to+\infty} (2+(1/n))} = \frac{1}{2}$$

Maka $\left\{\dfrac{n}{2n+1}\right\}_{n=1}^{+\infty}$ konvergen ke $\dfrac{1}{2}$. $\square$

Contoh 2.3

Apakah barisan $\left\{(-1)^{n+1}\dfrac{n}{2n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ konvergen, jika demikian berapakah limitnya?

Jawab:

Dari contoh 2.2 diperoleh bahwa $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2}$. Dan karena $(-1)^{n+1}$ nilainya berganti-ganti antara +1 dan -1 maka hasilkali $(-1)^{n+1} \frac{n}{2n+1}$ juga nilainya berubah-ubah tandanya positif dan negatif sesuai dengan n genap positif dan n ganjil negatif yaitu berarti mendekati $+\frac{1}{2}$ dan $-\frac{1}{2}$. Jadi $\left\{(-1)^{n+1} \frac{n}{2n+1}\right\}$ tidak mempunyai limit dan barisan tersebut divergen. □

B. Deret

Dalam sub bab ini, akan dibahas jumlah

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots$$

yang memuat tak hingga banyak suku.

Definisi 2.3

Suatu deret tak hingga ditulis sebagai

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots \qquad (2.1)$$

atau dengan notasi sigma ditulis sebagai $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$, dengan u_1, u_2, u_3, ... disebut suku-suku deret. Secara informal, bentuk $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ menyatakan jumlah dari suku-suku u_1, u_2, u_3, ...

Untuk memperoleh jumlah ini kita lakukan langkah-langkah berikut.

Andaikan S_n menyatakan jumlah n suku pertama dari deret. Dengan demikian,

$$S_1 = u_1$$

$$S_2 = u_1 + u_2$$

$$S_3 = u_1 + u_2 + u_3$$

....

$$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$$

Bilangan S_n disebut jumlah bagian ke-n dari deret dan barisan $\{S_n\}_{n=1}^{+\infty}$ disebut barisan jumlah bagian.

Contoh 2.4

Pada deret tak hingga

$$\frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \frac{3}{10^4} + \cdots$$

jumlah parsialnya adalah:

$$S_1 = \frac{3}{10}$$

$$S_2 = \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} = \frac{33}{100}$$

$$S_3 = \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} = \frac{333}{1000}$$

$$S_4 = \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \frac{3}{10^4} = \frac{3333}{10000}$$

jika n naik, maka jumlah parsial $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n$ memuat makin banyak suku deret. Jadi, jika $n \to +\infty$, S_n mendekati suatu limit yaitu $\frac{1}{3}$ maka limit ini adalah jumlah semua suku deret itu. $\square$

Definisi 2.4

$\{ S_n \}$ adalah barisan jumlah bagian deret $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$. Jika barisan $\{ S_n \}$ konvergen ke limit S, maka deret itu disebut konvergen dan S disebut jumlah deret, yang ditulis

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} u_k \tag{2.2}$$

Jika barisan jumlah bagian dari deret adalah divergen, maka deret disebut divergen. Suatu deret yang divergen tak mempunyai jumlah.

Contoh 2.5

Tentukan apakah deret

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + ...$$

konvergen atau divergen. Jika konvergen, tentukan jumlahnya!

Jawab:

Jumlah parsialnya adalah

$$S_1 = 1$$

$$S_2 = 1 - 1 = 0$$

$$S_3 = 1 - 1 + 1 = 1$$

$$S_4 = 1 - 1 + 1 - 1 = 0$$

dan seterusnya. Jadi barisan jumlah bagian adalah

$$1, 0, 1, 0, \ldots$$

Karena barisan ini divergen, maka deretnya juga divergen dan akibatnya tidak mempunyai jumlah. $\square$

Salah satu deret yang penting yang akan digunakan di dalam bab 4 adalah deret geometri. Di bawah ini akan diuraikan deret geometri, dan kekonvergenannya.

Secara umum bentuk deret geometri adalah

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^{k-1} + \ldots \quad , (a \neq 0)$$

di mana setiap suku diperoleh dengan mengalikan suku di depannya dengan konstanta r dengan $r \in \Re$. Pengganda r disebut rasio untuk deret.

Contoh 2.6

Beberapa contoh deret geometri adalah:

$$1 + 2 + 4 + 8 + \ldots + 2^{k-1} + \ldots \qquad a = 1, \; r = 2$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \ldots + (-1)^{k+1}\frac{1}{2^k} + \ldots \qquad a = \frac{1}{2}, \; r = -\frac{1}{2} \quad \square$$

Teorema 2.1

Suatu deret geometri

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^{k-1} + \ldots \quad , (a \neq 0) \tag{2.3}$$

konvergen jika $|r| < 1$ dan divergen jika $|r| \geq 1$.

Jika deret konvergen, jumlah deret itu adalah

$$\frac{a}{1-r} = a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{k-1} + \ldots \tag{2.4}$$

Bukti:

- Andaikan $|r| = 1$.

~ Jika $r = 1$, maka deret itu adalah

$$a + a + a + \ldots + a + \ldots$$

sehingga jumlah parsial ke-n adalah $S_n = na$ dan $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty} n\,a = \pm\infty$ (tanda bergantung pada apakah tanda dari a positif atau negatif). Jadi deret ini divergen.

~ Jika $r = -1$, deretnya adalah

$$a - a + a - a + \ldots$$

Jadi barisan jumlah bagian adalah

$$a, 0, a, 0, \ldots$$

barisan di atas adalah divergen.

- Andaikan $|r| \neq 1$

Jumlah parsial ke-n dari deret adalah

$$S_n = a + a\,r + a\,r^2 + \ldots + a\,r^{n-1} \tag{2.5}$$

Gandakan kedua ruas dengan r, didapat

$$r\,S_n = a\,r + a\,r^2 + a\,r^3 + \ldots + a\,r^n \tag{2.6}$$

dan kurangkan (2.5) oleh (2.6) di dapat

$$S_n - r\,S_n = a - a\,r^n$$

$$(1-r)\,S_n = a - a\,r^n$$

$$S_n = \frac{a - a\,r^n}{1-r}, \qquad \text{karena } r \neq 1$$

$$S_n = \frac{a}{1-r} - \frac{a\,r^n}{1-r} \tag{2.7}$$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{a}{1-r} - \lim_{n\to+\infty} \frac{a\,r^n}{1-r}$$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{a}{1-r} - \frac{a}{1-r} \lim_{n\to+\infty} r^n \tag{2.8}$$

~ Jika $|\,r\,| < 1$, maka $\lim\limits_{n\to+\infty} r^n = 0$, sehingga dari persamaan (2.8) diperoleh

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{a}{1-r}$$

maka barisan $\{\,S_n\,\}$ konvergen.

~ Jika $|\,r\,| > 1$, maka $r > 1$ atau $r < -1$.

Dalam kasus $r > 1$, maka $\lim\limits_{n\to+\infty} r^n = \infty$ sehingga persamaan (2.8) tidak dapat ditentukan nilainya, sehingga $\{\,S_n\,\}$ divergen.

Dalam kasus $r < -1$, maka r^n berosilasi antara bernilai positif dan negatif, jadi $\{\,S_n\,\}$ divergen. ∎

Contoh 2.7

Tentukan apakah deret

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots \tag{2.9}$$

konvergen atau divergen. Jika konvergen, tentukan jumlahnya!

Jawab:

$$S_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n}$$

Deret (2.9) adalah deret geometri dan karena $r = \frac{1}{2} < 1$, maka deret (2.9) konvergen. Jumlahnya adalah

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-r} = \frac{1/2}{1-(1/2)} = 1$$

□

BAB III

Persamaan Beda

A. Pendahuluan

Salah satu topik dalam matematika yang biasa digunakan dalam penyusunan model untuk masalah dalam dunia nyata, yaitu masalah-masalah yang mengandung laju perubahan adalah persamaan diferensial. Akan tetapi dalam beberapa kasus, misalnya perhitungan pendapatan nasional, sensus penduduk, bunga Bank, di mana fungsi yang terlibat didefinisikan pada himpunan bilangan bulat, maka persamaan diferensial kurang tepat jika digunakan untuk menyusun model tersebut. Untuk itu digunakanlah persamaan beda di dalam penyusunan modelnya. Di bawah ini akan diberikan beberapa contoh untuk menjelaskan uraian di atas.

Contoh 3.1

Dimisalkan, uang yang ditabung di Bank pada awal periode adalah Rp. 1000.000,00 dengan bunga majemuk (p) selama satu tahun sebesar 6%.

Jumlah tabungan pada tahun pertama dapat dihitung seperti di bawah ini yaitu

$$1000.000 + (0.06)1000.000 = 1.060.000$$

Jumlah tabungan pada tahun kedua yaitu

$$1.060.000 + (0.06)1060.000 = 1.123.600$$

Jumlah tabungan pada tahun ketiga yaitu

$$1.123.600 + (0.06)1.123.600 = 1.191.016$$

Secara umum, jumlah tabungan pada saat tahun ke-k untuk bunga majemuk dapat ditulis dalam bentuk

$$y(k) = y(k-1) + \frac{p}{100} y(k-1) + r(k)$$

$$= \left(1 + \frac{p}{100}\right) y(k-1) + r(k) \qquad (3.1)$$

dengan $y(k)$ adalah jumlah tabungan pada tahun ke-k, $y(k-1)$ adalah uang tabungan pada waktu perhitungan sebelumnya, p adalah persen bunga yang dibayarkan Bank dalam jangka waktu k, dan $r(k)$ adalah jumlah uang yang ditabungkan atau yang diambil pada saat k. Fungsi $y(k)$ pada persamaan (3.1) didefinisikan untuk $k = 0,1,2,\ldots$. Jika tidak ada uang yang ditabung atau ditarik, maka $r(k) = 0$ dan persamaan (3.1) dapat ditulis sebagai

$$y(k) = a\ y(k-1) \qquad (3.2)$$

dengan $a = \left((1+p)/100\right)$.

Persamaan (3.1) dan (3.2) adalah suatu persamaan beda. $\square$

Contoh 3.2

Seseorang membeli rumah dengan harga Rp.800.000.000,00 dan akan diangsur selama 20 tahun. Pembayaran setiap bulan sebesar Rp.8.800.000,00 dengan bunga setiap bulan sebesar 1%. Jumlah sisa hutang setiap bulan dapat ditulis sebagai berikut:

Dimisalkan $y(1)$ adalah jumlah sisa hutang pada bulan ke-1 yaitu

$$y(1) = 800.000.000 + 0.01(800.000.000) - 8.800.000 = 799.200.000$$

$y(2)$ adalah jumlah sisa hutang pada bulan ke-2 yaitu

$$y(2) = 799.200.000 + 0.01(799.200.000) - 8.800.000 = 798.392.000$$

$y(3)$ adalah jumlah sisa hutang pada bulan ke-3 yaitu

$$y(3) = 798.392.000 + 0.01(798.392.000) - 8.800.000 = 797.575.920$$

$$\vdots$$

Maka jumlah sisa hutang pada bulan ke-k dapat ditulis

$$y(k) = y(k-1) + 0.01y(k-1) - 8.800.000 \tag{3.3}$$

di mana $y(k)$ adalah jumlah sisa hutang pada bulan ke-k, $y(k-1)$ menggambarkan jumlah sisa hutang pada bulan sebelumnya.

Persamaan (3.3) merupakan suatu bentuk persamaan beda. □

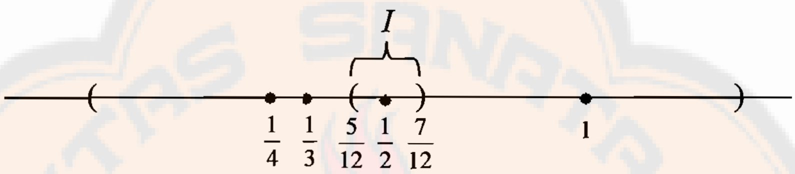
Di bawah ini akan dibahas tentang persamaan beda linear dengan lebih seksama.

Definisi 3.1

Misalkan diambil himpunan semesta berupa himpunan semua bilangan real $\Re$. Diberikan himpunan $E \subset \Re$. Titik $p \in E$ dinamakan titik terasing himpunan E jika terdapat suatu selang terbuka I yang memuat p sehingga $I \cap E = \{p\}$.

Contoh 3.3

Diberikan himpunan $E=\left\{\frac{1}{4},\frac{1}{3},\frac{1}{2},1\right\}$ dan titik $p=\frac{1}{2}\in E$. Terdapat selang terbuka $I=\left(\frac{5}{12},\frac{7}{12}\right)$ yang memuat p seperti yang diperlihatkan pada gambar di bawah ini,



$$I\cap E=\left\{\frac{1}{2}\right\}=\{p\}$$

Jadi berdasarkan definisi 3.1, titik $p=\frac{1}{2}$ merupakan titik terasing. $\square$

Definisi 3.2

Himpunan $E\subset\Re$ dinamakan himpunan diskret jika semua anggota E adalah titik terasing.

Contoh 3.4

Berdasarkan contoh 3.3, dengan cara yang sama, dapat ditunjukkan bahwa titik $\frac{1}{4},\frac{1}{3},1$ juga merupakan titik terasing. Sehingga, himpunan $E=\left\{\frac{1}{4},\frac{1}{3},\frac{1}{2},1\right\}$ merupakan himpunan diskret. $\square$

Definisi 3.3

Fungsi f dikatakan diskret jika daerah asal fungsi merupakan himpunan diskret.

Contoh 3.5

Fungsi $f(k)=\frac{1}{k}$, untuk $k=1,2,\ldots$ merupakan fungsi diskret karena daerah asal fungsi merupakan himpunan diskret. $\square$

Definisi 3.4

Misalkan y suatu fungsi diskret dalam variabel k dan h suatu konstanta positif sedemikian sehingga $y(k+h)$ ada, maka $\Delta\, y(k)$ adalah beda pertama dari fungsi y didefinisikan dengan

$$\Delta\, y(k)=y(k+h)-y(k) \qquad (3.4)$$

Simbol Δ dinotasikan sebagai operator beda, sedangkan h disebut interval beda.

Contoh 3.6

Jika diberikan fungsi $y(k)=k$, maka tentukan beda pertamanya!

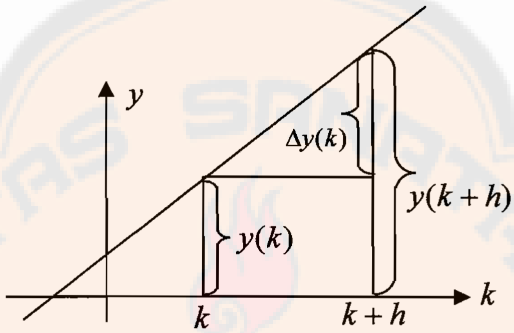
Jawab:

Dengan menggunakan (3.4) diperoleh

$$\Delta y(k)=\Delta k=y(k+h)-y(k)=(k+h)-k=h. \qquad \square$$

Dari gambar 3.1 terlihat perpindahan k ke $k+h$ dan nilai y berubah dari $y(k)$ ke $y(k+h)$.

Beda pertama dari y diinterpretasikan sebagai fungsi y yang mengalami pertambahan atau perubahan dalam k yaitu sama dengan pertambahan h.



gambar 3.1

Definisi 3.5

Andaikan diberikan suatu fungsi diskret y dan beda pertama yang ditulis $\Delta\, y(k)$, maka beda kedua dari y dinotasikan dengan $\Delta^2\, y(k)$, yang merupakan beda dari beda pertama dari y, ditulis:

$$\Delta^2\, y(k) = \Delta(\Delta\, y(k)) = \Delta y(k+h) - \Delta y(k) \qquad (3.5)$$

Beda ketiga dari y dinotasikan dengan $\Delta^3\, y(k)$ yang merupakan beda dari beda kedua dari y, ditulis:

$$\Delta^3\, y(k) = \Delta(\Delta^2\, y(k))$$

Secara umum, beda ke-n dari y, dinotasikan dengan $\Delta^n\, y(k)$ yang merupakan beda dari beda ke-$(n-1)$ dari y, ditulis:

$$\Delta^n\, y(k) = \Delta\left(\Delta^{n-1} y(k)\right), \qquad n = 2,3,4,\ldots \qquad (3.6)$$

Sedangkan untuk $n=1$, dibuat perjanjian $\Delta^1\ y(k)$ ditulis sebagai $\Delta\ y(k)$. Satu lagi perjanjian untuk $n=1$, jika $\Delta\ y(k)=\Delta\left(\Delta^0 y(k)\right)$, maka $\Delta^0 y(k)=y(k)$, yang berarti Δ^0 adalah operator identitas yang jika dikenakan pada fungsi y maka tidak mengalami perubahan yaitu tetap 1.

Contoh 3.7

Andaikan diberikan fungsi y dengan $y(k)=k^3$, maka tentukan beda pertamanya!

Jawab:

Dengan menggunakan persamaan (3.4) diperoleh

$$\Delta y(k)=\Delta k^3=y(k+h)-y(k)=(k+h)^3-k^3$$

Dengan menggunakan teorema binomial, $(k+h)^3$ dijabarkan menjadi $(k+h)^3=k^3+3k^2h+3kh^2+h^3$, sehingga

$$\begin{aligned}\Delta k^3 &= k^3+3k^2h+3kh^2+h^3-k^3\\ &= 3k^2h+3kh^2+h^3\end{aligned}$$ $\square$

Berdasarkan contoh 3.7, dengan membandingkan fungsi $y(k)$ dan $\Delta y(k)$, terlihat bahwa pangkat dari k pada $\Delta\ y(k)$ berkurang 1. Fungsi y adalah fungsi kubik dalam k (karena pangkat tertinggi dari k adalah 3), sedangkan Δy adalah fungsi kuadrat dalam k (karena pangkat tertinggi dari k adalah 2).

Sekarang akan dicari nilai fungsi dari $\Delta^2 y(k)$, yaitu

$$\begin{aligned}\Delta^2 y(k) &= \Delta y(k+h) - \Delta y(k)\\ &= \left[3(k+h)^2 h + 3(k+h)h^2 + h^3\right] - \left[3k^2 h + 3kh^2 + h^3\right]\\ &= 3k^2 h + 6kh^2 + 3h^3 + 3kh^2 + 3h^3 + h^3 - 3k^2 - 3kh^2 - h^3\\ &= 6kh^2 + 6h^3\end{aligned}$$

Operator Δ digunakan untuk menurunkan derajat dari suatu fungsi, sehingga $\Delta^2 y(k)$ merupakan fungsi linear dalam k (sebab pangkat tertinggi dari k adalah 1).

Untuk $\Delta^3 y(k)$ diperoleh

$$\begin{aligned}\Delta^3 y(k) &= \Delta^2 y(k+h) - \Delta^2 y(k)\\ &= [6(k+h)h^2 + 6h^3] - [6kh^2 + 6h^3]\\ &= 6kh^2 + 6h^3 + 6h^3 - 6kh^2 - 6h^3\\ &= 6h^3\end{aligned}$$

dengan demikian,

$$\begin{aligned}\Delta^4 y(k) &= \Delta^3 y(k+h) - \Delta^3 y(k)\\ &= 6h^3 - 6h^3\\ &= 0\end{aligned}$$

Untuk selanjutnya, beda yang lebih tinggi darinya bernilai 0. Contoh di atas dapat diringkas dalam tabel 3.1:

Tabel 3.1

$y(k)$	$\Delta y(k)$	$\Delta^2 y(k)$	$\Delta^3 y(k)$	$\Delta^n y(k)$, $n \geq 4$
1	0	0	0	0
k	h	0	0	0
k^2	$2kh + h^2$	$2h^2$	0	0
k^3	$3k^2h + 3kh^2 + h^3$	$6kh^2 + 6h^3$	$6h^3$	0

Definisi 3.6

Persamaan yang memuat nilai dari fungsi diskret y dan satu atau lebih beda $(\Delta y, \Delta^2 y, \Delta^3 y, \ldots)$ untuk setiap nilai k dari sebarang himpunan E (E merupakan himpunan diskret) disebut persamaan beda pada himpunan E, dan ditulis

$$f[k, y(k), y(k+1), y(k+2), \ldots, y(k+n)] = 0 \tag{3.7}$$

dengan $y(k)$ adalah fungsi diskret y dengan variabel k.

Definisi 3.7

Orde persamaan beda adalah tingkat dari fungsi y yang memiliki variabel tertinggi pada persamaan tersebut. Sedangkan derajat dari persamaan beda adalah pangkat fungsi y yang memiliki variabel yang tertinggi pada persamaan beda tersebut.

Contoh 3.8

a. $y(k+1)+2y(k)=0$ adalah persamaan beda orde 1, derajat 1.

b. $[y(k+2)]^2-5y(k+1)+2y(k)=8$ adalah persamaan beda orde 2, derajat 2.

c. $[y(k+3)]^2+3y(k+2)-3y(k)=k+1$ adalah persamaan beda orde 3, derajat 2. $\square$

B. Persamaan Beda Linear (PBL)

Definisi 3.8

Suatu persamaan beda pada himpunan E adalah linear orde-n jika dapat ditulis dalam bentuk

$$b_n(k)\ y(k+n)+b_{n-1}(k)\ y(k+n-1)+\ldots+b_1(k)\ y(k+1)$$
$$+b_0(k)\ y(k)=\delta(k) \qquad (3.8)$$

dengan $b_0, b_1, \ldots, b_{(n-1)}, b_n$ dan δ masing-masing merupakan fungsi dari k (tetapi bukan dari $y(k)$) yang didefinisikan untuk setiap nilai k dalam suatu himpunan E, dengan b_0 dan b_n keduanya tidak sama dengan nol.

Contoh 3.9

a. $y(k+1)+2y(k)=0$, dengan $b_0(k)=2$, $b_1(k)=1$, $\delta(k)=0$.

b. $k\ y(k+2)+2y(k+1)-6y(k)=0$, dengan $b_0(k)=-6$, $b_1(k)=2$, $b_2(k)=k$, $\delta(k)=0$.

c. $4^k\ y(k+3) - 3k\ y(k+2) + 2k\ y(k+1) - y(k) = 1$, dengan $b_0(k) = -1$, $b_1(k) = 2k$, $b_2(k) = -3k$, $b_3(k) = 4^k$, $\delta(k) = 1$. □

Definisi 3.9

Fungsi y merupakan penyelesaian dari persamaan beda pada himpunan E jika fungsi y memenuhi persamaan beda tersebut.

Contoh 3.10

Perlihatkan bahwa

$$y(k) = 1 - (2/k), \qquad k = 1,2,3,... \tag{3.9}$$

merupakan penyelesaian dari persamaan beda orde-1:

$$(k+1)\ y(k+1) + k\ y(k) = 2k - 3, \qquad k = 1,2,3,... \tag{3.10}$$

Jawab:

Untuk memperlihatkannya, substitusikan y ke dalam persamaan (3.10), diperoleh

$$(k+1)\ [1 - (2/k+1)] + k[1 - (2/k)] = 2k - 3$$

$$(k+1) - 2 + k - 2 = 2k - 3$$

Dapat dilihat bahwa persamaan (3.9) memenuhi persamaan beda (3.10). □

Definisi 3.10

Suatu penyelesaian persamaan beda dikatakan penyelesaian umum jika penyelesaian tersebut memuat sebarang konstanta c.

Contoh 3.11

Penyelesaian persamaan $y(k+1)-2y(k)=0$, $k=0,1,2,\ldots$ adalah $y(k)=2^k$. Jika $y(k)=2^k$ dikalikan dengan sebarang konstanta yaitu c, diperoleh

$$y(k)=c\,2^k, \qquad k=0,1,2,\ldots \tag{3.11}$$

Persamaan (3.11) adalah penyelesaian dari persamaan $y(k+1)-2y(k)=0$, karena

$$y(k+1)-2y(k)=c\;2^{k+1}-2\;c\;2^k=c(2^{k+1}-2^{k+1})=0$$

Fungsi y dalam persamaan (3.11), dengan sebarang konstanta c, merupakan penyelesaian umum dari persamaan beda $y(k+1)-2y(k)=0$. $\square$

Definisi 3.11

Suatu penyelesaian persamaan beda yang diperoleh dari penyelesaian umum dengan menentukan nilai untuk satu atau beberapa konstanta sebarang c disebut penyelesaian partikular.

Contoh 3.12

Diketahui persamaan beda yaitu

$$y(k+1)-2y(k)=0 \quad , k=0,1,2,\ldots$$

dan diberikan fungsi y yaitu

$$y(k) = 2^k\,, \quad y(k) = 3\,2^k\,, \quad y(k) = 4\,2^k\,, \quad y(k) = (1/5)\,2^k \qquad (3.12)$$

Ternyata persamaan (3.12) memenuhi persamaan beda $y(k+1) - 2y(k) = 0$. Oleh karena itu, fungsi y yang diberikan dalam persamaan (3.12) disebut penyelesaian partikular dari persamaan beda $y(k+1) - 2y(k) = 0$. □

Suatu penyelesaian persamaan beda dikatakan penyelesaian partikular yang memenuhi nilai awal jika penyelesaian tersebut juga memenuhi nilai awal itu.

Contoh 3.13

Perlihatkan bahwa

$$y(k) = 3\,2^k \quad , \; k = 0,1,2,... \qquad (3.13)$$

merupakan penyelesaian dari persamaan beda:

$$y(k+1) - 2y(k) = 0 \quad , \; k = 0,1,2,... \qquad (3.14)$$

dengan nilai awal $y(0) = 3$.

Jawab:

Substitusikan (3.13) ke dalam (3.14), diperoleh

$$3\,2^{k+1} - 2\,3\,2^k = 3\,2^{k+1} - 3\,2^{k+1} = 0$$

dari hasil di atas, dapat dilihat bahwa (3.13) merupakan penyelesaian dari (3.14) dengan nilai awal $y(0) = 3$. □

Definisi 3.12

Persamaan Beda dikatakan linear orde ke-n dengan koefisien konstan, jika mempunyai bentuk

$$b_n\ y(k+n)+b_{n-1}\ y(k+n-1)+...+b_1\ y(k+1)+b_0\ y(k)=\delta(k),$$

$$k=0,1,2,... \qquad (3.15)$$

dengan $b_0, b_1, ..., b_n$ merupakan konstanta dan δ sebarang fungsi dari k tapi tidak perlu konstan, di mana $b_n \neq 0$.

Contoh 3.14

a. $2\,y(k+1)-y(k)=6$, merupakan PBL dengan koefisien konstan orde-1.

b. $3\,y(k+2)+2y(k+1)+y(k)=3^k$, merupakan PBL dengan koefisien konstan orde-2.

c. $y(k+3)-y(k)=k$, merupakan PBL dengan koefisien konstan orde-3.

d. $4^k\ y(k+3)-3k\ y(k+2)+2k\ y(k+1)-y(k)=1$, merupakan PBL dengan koefisien tidak konstan orde-3. $\square$

Persamaan (3.15) dapat dibagi dengan b_n, karena $b_n \neq 0$ sehingga diperoleh bentuk,

$$y(k+n)+a_{n-1}\ y(k+n-1)+...+a_1\ y(k+1)+a_0\ y(k)=r(k) \qquad (3.16)$$

dengan $a_{n-1}={}^{b_{n-1}}\!/\!_{b_n}$, $a_1={}^{b_1}\!/\!_{b_n}$, $a_0={}^{b_0}\!/\!_{b_n}$, $r(k)={}^{\delta(k)}\!/\!_{b_n}$.

Persamaan (3.16) disebut persamaan beda linear baku orde-n dengan koefisien konstan.

Contoh 3.15

Berdasarkan contoh 3.14, maka persamaan beda linear bakunya yaitu

a. $y(k+1)-\frac{1}{2}y(k)=3$

b. $y(k+2)+\frac{2}{3}y(k+1)+\frac{1}{3}y(k)=3^{k-1}$

c. $y(k+3)-y(k)=k$ $\square$

Definisi 3.13

Persamaan Beda linear orde-n dengan koefisien konstan dikatakan homogen (PBLH) jika ruas kanan dari persamaan (3.16) sama dengan nol, yang berarti,

$$y(k+n)+a_{n-1}\ y(k+n-1)+...+a_1\ y(k+1)+a_0\ y(k)=0 \qquad (3.17)$$

sedangkan persamaan (3.16) adalah persamaan beda linear non homogen (PBLNH) orde-n dengan koefisien konstan (atau disebut juga persamaan lengkap) jika $r(k)\neq 0$.

Contoh 3.16

a. $y(k+1)-\frac{1}{2}y(k)=0$ (PBLH orde-1)

b. $y(k+2)+\frac{2}{3}y(k+1)+\frac{1}{3}y(k)=3^{k-1}$ (PBLNH orde-2)

c. $y(k+3)-y(k)=k$ (PBLNH orde-3) □

C. Persamaan Beda Linear Orde-1 dengan Koefisien Konstan

Definisi 3.14

Persamaan beda dikatakan linear orde-1 dengan koefisien konstan jika mempunyai bentuk,

$$b_1\ y(k+1)+b_0\ y(k)=\delta(k),\quad k=0,1,2,... \qquad (3.18)$$

dengan b_1 adalah konstanta yang tidak nol. Persamaan (3.18) dapat dibagi oleh b_1 karena $b_1 \neq 0$, sehingga diperoleh bentuk

$$y(k+1)=-\frac{b_0}{b_1}y(k)+\frac{\delta(k)}{b_1}$$

$$y(k+1)=a_0\ y(k)+r(k) \qquad (3.19)$$

dengan $a_0=-\dfrac{b_0}{b_1}$, $r(k)=\dfrac{\delta(k)}{b_1}$.

Contoh 3.17

a. $y(k+1)-3y(k)=8$ (PBL orde-1)

b. $y(k+1)-y(k)=2^k$ (PBL orde-1) □

a. Persamaan Beda Linear Homogen Orde-1 dengan Koefisien Konstan

Definisi 3.15

Persamaan beda linear orde-1 dengan koefisien konstan dikatakan homogen jika mempunyai bentuk

$$y(k+1) = a_0 \; y(k), \qquad k = 0,1,2,... \qquad (3.20)$$

dengan a_0 adalah konstanta sebarang ($a_0 \neq 0$).

Contoh 3.18

$y(k+1) - y(k) = 0$ (PBLH orde-1) $\square$

Di bawah ini akan dijelaskan tentang penyelesaian persamaan beda linear homogen orde-1 dengan koefisien konstan.

Teorema 3.1

Persamaan beda linear homogen orde-1 dengan koefisien konstan ditulis sebagai

$$y(k+1) = a_0 \; y(k), \quad k = 0,1,2,...$$

mempunyai penyelesaian umum

$$y(k) = \begin{cases} (a_0)^k \, y(0) & \text{, jika } a_0 \neq 1 \\ y(0) & \text{, jika } a_0 = 1 \end{cases} \quad , k = 0,1,2,... \qquad (3.21)$$

Bukti:

Jika diberikan nilai awal yaitu $y(0)$ pada persamaan (3.20), maka

untuk $k = 0$ diperoleh

$$y(1) = a_0 \; y(0)$$

untuk $k = 1$, diperoleh

$$y(2) = a_0\ y(1) = a_0\ [a_0\ y(0)] = (a_0)^2\ y(0) \tag{3.22}$$

untuk $k = 2$, diperoleh

$$y(3) = a_0\ y(2) = a_0\ [(a_0)^2\ y(0)] = (a_0)^3\ y(0) \tag{3.23}$$

demikian seterusnya, sehingga akhirnya diperoleh

$$y(k) = (a_0)^k\ y(0) \qquad , \ k = 1,2,... \tag{3.24}$$

maka di dapat

$$y(k) = \begin{cases} (a_0)^k\ y(0) & \text{, jika } a_0 \neq 1 \\ y(0) & \text{, jika } a_0 = 1 \end{cases} \quad , k = 0,1,2,...$$

Selanjutnya jika $y(k)$ disubstitusikan ke dalam persamaan (3.20) ternyata $y(k)$ memenuhi persamaan (3.20). Jadi persamaan (3.21) adalah penyelesaian umum dari persamaan beda (3.20). ■

Contoh 3.19

Cari penyelesaian persamaan beda jika diberikan

$$y(k+1) - 3\ y(k) = 0, \qquad k = 0,1,2,...$$

dengan nilai awal $y(0) = 5$!

Jawab:

Dari soal diketahui bahwa $a_0 = 3$, maka penyelesaian umumnya adalah

$$y(k) = (3)^k\ 5 = 5\ (3)^k \qquad , \ k = 0,1,2,...$$

Jadi $y(k) = 5\ (3)^k$ adalah penyelesaian dari persamaan beda yang diberikan dan memenuhi nilai awal $y(0) = 5$. □

Di bawah ini akan dijelaskan tentang teorema ketunggalan dari suatu penyelesaian persamaan beda.

Teorema 3.2

Fungsi diskret y pada persamaan (3.21) merupakan satu-satunya penyelesaian dari persamaan beda (3.20) dengan nilai awal $y(0)$.

Bukti:

Andaikan $z(k)$ adalah penyelesaian lain dari persamaan beda (3.20) yaitu $z(k) \neq y(k)$ dengan nilai awal $y(0)$ yang berarti $z(0) = y_0 = y(0)$.

Dengan menggunakan induksi matematika,

(i) Untuk $a_0 \neq 1$

1) Akan dibuktikan $z(k)$ benar untuk $k = 0$.

$$z(0) = z_0 = y_0$$

Jadi $z(k)$ benar untuk $k = 0$.

2) Akan dibuktikan pula bahwa jika $z(k)$ benar untuk $k = n$ maka $z(k)$ juga benar untuk $k = n+1$.

Misalkan $z(k)$ benar untuk $k = n$, maka

$$z(n) = (a_0)^n\, z(0) = (a_0)^n\, y(0)$$

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa $z(k)$ juga benar untuk $k = n+1$. Jadi harus dibuktikan

$$z(n+1) = (a_0)^{n+1}\, z(0) = (a_0)^{n+1}\, y(0)$$

Untuk membuktikannya, akan ditunjukkan bahwa $z(n+1)$ memenuhi persamaan beda (3.20), yang berarti $z(n+1) = a_0 \; z(n)$, diperoleh

$$(a_0)^{n+1} \; y(0) = a_0 \left[(a_0)^n \; y(0)\right] = a_0 \; z(n), \quad \text{untuk} \quad k = 0,1,2,...$$

Terbukti bahwa $z(k)$ juga benar untuk $k = n+1$.

Dari (1) dan (2), menurut Aksioma Induksi Matematika, $z(k)$ merupakan penyelesaian persamaan beda (3.20) untuk $k = 0,1,2,...$

(ii) Untuk $a_0 = 1$, nilai $z(k) = z(0) = y(0) = y_0$ untuk nilai setiap nilai k.

Dari (i) dan (ii) dapat dilihat bahwa $z(k) = y(k)$ sehingga pengandaian di atas salah. Jadi $y(k)$ pada persamaan (3.21) merupakan satu-satunya penyelesaian persamaan beda (3.20) dengan nilai awal $y(0)$. ■

Teorema 3.3

Jika fungsi y yang diberikan pada persamaan (3.21) adalah penyelesaian dari persamaan beda (3.20), maka terdapat suatu konstanta c dengan

$$y(k) = \begin{cases} c\,(a_0)^k & \text{, jika } a_0 \neq 1 \\ c & \text{, jika } a_0 = 1 \end{cases} \tag{3.25}$$

Bukti:

Dengan menyamakan konstanta c dengan nilai awal $y(0)$ dan dengan memakai teorema 3.1, maka persamaan (3.25) dapat dibuktikan. Jadi persamaan (3.25) merupakan penyelesaian persamaan beda (3.20) di mana terdapat satu penyelesaian untuk masing-masing nilai konstanta c. ■

Contoh 3.20

Cari penyelesaian persamaan beda jika diberikan

$$y(k+1) = 2\ y(k), \qquad k = 0,1,2,...$$

dengan nilai awal $y(0) = 8$!

Jawab:

Dengan memakai persamaan (3.25), dengan $a_0 = 2$, diperoleh

$$y(k) = c\ 2^k \qquad , k = 0,1,2,...$$

karena $y(0) = 8$, dan dengan mengambil $k = 0$, diperoleh

$$y(0) = c\ 2^0$$

$$8 = c$$

$$c = 8$$

sehingga penyelesaiannya menjadi

$$y(k) = 8\ 2^k = 2^3\ 2^k = 2^{k+3} \qquad , k = 0,1,2,...$$

Jadi $y(k) = 2^{k+3}$ adalah penyelesaian tunggal dari persamaan beda yang diberikan dan memenuhi nilai awal $y(0) = 8$. □

b. Persamaan Beda Linear Non Homogen Orde-1 dengan Koefisien Konstan

Definisi 3.16

Persamaan beda linear non homogen orde-1 dengan koefisien konstan mempunyai bentuk umum

$$y(k+1) = a_0\, y(k) + r(k) \tag{3.26}$$

di mana a_0 adalah konstanta sebarang ($a_0 \neq 0$ dan $r(k) \neq 0$).

Contoh 3.21

a. $y(k+1) - 2\, y(k) = 5$ adalah persamaan beda linear non homogen orde-1 dengan $a_0 = 2$, $r(k) = 5$. □

b. $y(k+1) - 2\, y(k) = k+1$ adalah persamaan beda linear non homogen orde-1 dengan $a_0 = 2$, $r(k) = k+1$. □

Di bawah ini akan dijelaskan tentang penyelesaian persamaan beda linear non homogen orde-1 dengan koefisien konstan.

Ada dua kasus untuk persamaan beda linear non homogen orde-1 dengan koefisien konstan, yaitu

1. Fungsi r pada ruas kanan persamaan (3.26) merupakan sebarang fungsi dalam k, ditulis

$$y(k+1) = a_0\, y(k) + r(k)$$

Teorema 3.4

Persamaan beda linear non homogen orde-1 dengan koefisien konstan yang memiliki bentuk

$$y(k+1) = a_0\ y(k) + r(k) \tag{3.27}$$

dengan r merupakan sebarang fungsi dalam k, mempunyai penyelesaian umum

$$y(k) = (a_0)^k\ y(0) + \sum_{n=0}^{k-1} (a_0)^{k-n-1}\ r(n) \tag{3.28}$$

Bukti:

Untuk menemukan penyelesaian umum persamaan (3.27), akan dijelaskan seperti di bawah ini.

untuk $k = 0$, dari persamaan (3.27) diperoleh

$$y(1) = a_0\ y(0) + r(0)$$

untuk $k = 1$, diperoleh

$$y(2) = a_0\ y(1) + r(1) = a_0\ [a_0\ y(0) + r(0)] + r(1)$$

$$= (a_0)^2\ y(0) + a_0\ r(0) + r(1)$$

untuk $k = 2$, diperoleh

$$y(3) = a_0\ y(2) + r(2) = a_0\ \lfloor (a_0)^2\ y(0) + a_0\ r(0) + r(1) \rfloor + r(2)$$

$$= (a_0)^3\ y(0) + (a_0)^2\ r(0) + a_0\ r(1) + r(2)$$

demikian seterusnya sehingga diperoleh

$$y(k) = (a_0)^k\ y(0) + (a_0)^{k-1}\ r(0) + (a_0)^{k-2}\ r(1)$$

$$+(a_0)^{k-3}\, r(2)+\ldots+r(k-1) \qquad (3.29)$$

$$y(k)=(a_0)^k\, y(0)+\sum_{n=0}^{k-1}(a_0)^{k-n-1}\, r(n)$$

Selanjutnya jika $y(k)$ disubstitusikan ke dalam persamaan (3.27) ternyata $y(k)$ memenuhi persamaan (3.27). Jadi persamaan (3.29) adalah penyelesaian umum dari persamaan beda (3.27). ■

Contoh 3.22

Andaikan diberikan persamaan beda

$$y(k+1)-2\, y(k)=k+1 \qquad (3.30)$$

Jika diberikan $y(0)=4$, maka tentukan penyelesaian umumnya!

Jawab:

Persamaan (3.30) merupakan persamaan beda linear non homogen orde-1 dengan $a_0=2$ dan $r(k)=k+1$. Dengan menggunakan persamaan (3.28), penyelesaian umumnya adalah

$$y(k)=(a_0)^k\, y(0)+\sum_{n=0}^{k-1}(a_0)^{k-n-1}\, r(n)$$

$$y(k)=2^k\, 4+\sum_{n=0}^{k-1}(2)^{k-n-1}\,(n+1)$$

$$=4\, 2^k+2^k\sum_{n=0}^{k-1}2^{-n-1}\,(n+1)$$

$$=4\, 2^k+2^k\left[1\, 2^{-1}+2\, 2^{-2}+3\, 2^{-3}+\ldots+k\, 2^{-k}\right]$$

$$= 4\ 2^k + 2^k \left[1\left(\frac{1}{2}\right) + 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \ldots + k\left(\frac{1}{2}\right)^k \right] \tag{3.31}$$

Berdasarkan tabel jumlahan berhingga pada lembar lampiran, didapat bahwa jumlah $1\left(\frac{1}{2}\right) + 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \ldots + k\left(\frac{1}{2}\right)^k = \sum_{n=1}^{k} n\ a^n$ adalah $\frac{(a-1)\,(k+1)\,a^{k+1} - a^{k+2} + a}{(a-1)^2}$. Sehingga persamaan (3.31) menjadi

$$y(k) = 4\ 2^k + 2^k \left[\frac{\left(\frac{1}{2} - 1\right)(k-1+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1+1} - \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1+2} + \frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{2} - 1\right)^2} \right]$$

$$= 4\ 2^k + 2^k \left[-4\,k\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} - 4\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} + 2 \right]$$

$$= 4\ 2^k - 4\,k\ 2^{-2} - 4\,(1/2) + 4\ 2^{k-1}$$

$$= 4\ 2^k - k - 2 + 2\ 2^k = 6\ 2^k - k - 2 \qquad \square$$

2. **Fungsi r pada ruas kanan persamaan (3.26) merupakan suatu konstanta sebarang, ditulis**

$$y(k+1) = a_0\ y(k) + b$$

Teorema 3.5

Persamaan beda linear non homogen orde-1 dengan koefisien konstan yang memiliki bentuk

$$y(k+1) = a_0\ y(k) + b \tag{3.32}$$

dengan b merupakan konstanta sebarang, mempunyai penyelesaian umum

$$y(k) = \begin{cases} (a_0)^k\ y(0) + b\left[\dfrac{(a_0)^k - 1}{a_0 - 1}\right] & \text{, jika } a_0 \neq 1 \\ y(0) + b\,k & \text{, jika } a_0 = 1 \end{cases} \tag{3.33}$$

Bukti:

Dengan menggunakan persamaan (3.28) dan jika diberikan $r(n) = b$ maka diperoleh

$$y(k) = (a_0)^k\ y(0) + \sum_{n=0}^{k-1} (a_0)^{k-n-1}\ b$$

$$y(k) = (a_0)^k\ y(0) + b\sum_{n=0}^{k-1} (a_0)^{k-n-1} \tag{3.34}$$

Jumlahan kedua pada ruas kanan persamaan (3.34) yaitu

$$\sum_{n=0}^{k-1} (a_0)^{k-n-1} = (a_0)^{k-1} + (a_0)^{k-2} + (a_0)^{k-3} + \ldots + (a_0)^0 \tag{3.35}$$

$(a_0)^{k-1} + (a_0)^{k-2} + (a_0)^{k-3} + \ldots + (a_0)^0$ merupakan suatu deret geometri dengan $a = (a_0)^{k-1}$ dan $r = (1/a_0)$. Maka jumlahan persamaan (3.35) yaitu

$$(a_0)^{k-1} + (a_0)^{k-2} + (a_0)^{k-3} + \ldots + (a_0)^0 = \begin{cases} \dfrac{(a_0)^k - 1}{a_0 - 1} & \text{, } jika\ a_0 \neq 1 \\ k & \text{, } jika\ a_0 = 1 \end{cases}$$

maka persamaan (3.34) dapat ditulis menjadi

$$y(k) = \begin{cases} (a_0)^k\ y(0) + b\left[\dfrac{(a_0)^k - 1}{a_0 - 1}\right] & \text{, jika } a_0 \neq 1 \\ y(0) + b\,k & \text{, jika } a_0 = 1 \end{cases}$$

Selanjutnya jika $y(k)$ disubstitusikan ke dalam persamaan (3.32) ternyata $y(k)$ memenuhi persamaan (3.32). Jadi persamaan (3.33) adalah penyelesaian umum dari persamaan beda (3.32). ■

Contoh 3.23

Diberikan persamaan beda

$$y(k+1) = 2\,y(k) + 1, \qquad k = 0,1,2,... \tag{3.36}$$

Jika diberikan nilai awal $y(0) = 5$, maka carilah penyelesaian umumnya!

Jawab:

Menggunakan persamaan (3.33), dengan $a_0 = 2$, $b = 1$ dan $y(0) = 5$, diperoleh

$$y(k) = 5\;2^k + 1\frac{2^k - 1}{2-1}$$

Jadi $y(k) = 5\;2^k + 1\dfrac{2^k - 1}{2-1}$ adalah penyelesaian dari persamaan (3.36) yang memenuhi syarat awal $y(0) = 5$. □

D. Persamaan Beda Linear Orde-2 dengan Koefisien Konstan

Definisi 3.17

Persamaan beda linear orde-2 dengan koefisien konstan mempunyai bentuk umum

$$b_2\ y(k+2)+b_1\ y(k+1)+b_0\ y(k)=\delta(k) \qquad (3.37)$$

dengan b_0, b_1, b_2 adalah konstanta-konstanta sebarang ($b_0 \neq 0,\ b_2 \neq 0,$) dan δ merupakan fungsi dari k (tetapi bukan dari $y(k)$). Karena $b_2 \neq 0$, maka persamaan (3.37) dapat dibagi dengan b_2, sehingga diperoleh bentuk

$$y(k+2)+a_1\ y(k+1)+a_0\ y(k)=r(k) \qquad (3.38)$$

dengan $a_1 = {}^{b_1}\!/_{b_2}$, $a_0 = {}^{b_0}\!/_{b_2}$, $r(k) = {}^{\delta(k)}\!/_{b_2}$.

Contoh 3.24

a. $y(k+2)+5\ y(k+1)+2\ y(k)=k+1$, merupakan persamaan beda linear non homogen orde-2 dengan koefisien konstan. □

b. $y(k+2)+4\ y(k)=0$, merupakan persamaan beda linear homogen orde-2 dengan koefisien konstan. □

Di bawah ini akan dijelaskan tentang teorema ketunggalan persamaan beda linear orde-2 dengan koefisien konstan.

Teorema 3.6 (Eksistensi dan Ketunggalan)

Jika pada persamaan beda linear orde-2 dengan koefisien konstan

$$y(k+2)+a_1\ y(k+1)+a_0\ y(k)=r(k)$$

diberikan nilai awal yaitu

$$y(t_0)=y_0 \text{ dan } y(t_0+1)=y_1$$

dengan a_1, a_0 adalah suatu konstanta, maka ada tepat satu penyelesaian yaitu $y = \phi(k)$.

Bukti:

Bukti teorema 3.6 berada di luar jangkauan skripsi ini, karena itu tidak dibahas dalam skripsi ini. ■

a. Persamaan Beda Linear Homogen Orde-2 dengan Koefisien Konstan

Definisi 3.18

Persamaan beda linear homogen orde-2 dengan koefisien konstan mempunyai bentuk umum

$$y(k+2) + a_1\, y(k+1) + a_0\, y(k) = 0 \tag{3.39}$$

dengan $a_1 = {}^{b_1}\!/_{b_2}$, $a_0 = {}^{b_0}\!/_{b_2}$ dan $a_0 \neq 0$.

Contoh 3.25

$y(k+2) - 3\,y(k+1) + 2\,y(k) = 0$ (PBLH orde-2) □

Definisi 3.19

Fungsi-fungsi y_1, y_2 disebut bergantung linear jika terdapat konstanta-konstanta k_1, k_2 yang tidak seluruhnya nol sedemikian hingga

$$k_1\, y_1(k) + k_2\, y_2(k) = 0 \tag{3.40}$$

sebaliknya, jika konstanta-konstanta k_1, k_2 pada persamaan (3.40) adalah nol maka fungsi-fungsi y_1, y_2 adalah bebas linear.

Teorema berikut ini menyatakan karakteristik dari suatu penyelesaian persamaan beda.

Teorema 3.7

Bila fungsi-fungsi y_1, y_2 adalah penyelesaian-penyelesaian persamaan (3.39) yang bergantung linear maka

$$W(t_0) = \begin{vmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y_1(t_0+1) & y_2(t_0+1) \end{vmatrix} = 0$$

untuk setiap $t_0 \in E \subset \Re$.

Bukti:

Andaikan penyelesaian-penyelesaian y_1, y_2 bergantung linear, ini berarti terdapat konstanta-konstanta k_1, k_2 yang tidak seluruhnya nol sedemikian hingga (3.40) benar. Andaikan diambil sebarang nilai k, sebut t_0, kemudian dengan mensubstitusikannya ke dalam persamaan (3.40), diperoleh

$$\left.\begin{aligned} k_1\, y_1(t_0) + k_2\, y_2(t_0) = 0 \\ k_1\, y_1(t_0+1) + k_2\, y_2(t_0+1) = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (3.41)$$

Persamaan linear (3.41) dapat ditulis dalam bentuk matriks sebagai berikut:

$$Y\ k = 0$$

dengan

$$Y = \begin{pmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y_1(t_0+1) & y_2(t_0+1) \end{pmatrix}$$

$$k = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} \neq 0, \qquad 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

jika det $(Y) \neq 0$, didapat

$$Y^{-1}(Y\ k) = Y^{-1}\ 0$$

$$(Y^{-1}\ Y)\,k = Y^{-1}\ 0$$

$$I\ k = 0$$

$$k = 0$$

sehingga dapat disimpulkan

$$\det\ (Y) \neq 0 \Rightarrow k = 0 \tag{3.42}$$

kontra posisi dari (3.42) adalah

$$k \neq 0 \Rightarrow \det(Y) = 0 \tag{3.43}$$

Tetapi determinan koefisien-koefisien itu adalah $W(t_0)$, dengan t_0 sebarang nilai dalam E. Jadi $W(t_0) = 0$. ■

Jadi berdasarkan kontraposisi dari teorema di atas, dapat disimpulkan bahwa jika $\exists\ t_0 \in E$, $W(t_0) \neq 0$ maka y_1, y_2 bebas linear.

Teorema 3. 8

Jika y_1 dan y_2 adalah dua penyelesaian persamaan (3.39), yaitu

$$y(k+2)+a_1\, y(k+1)+a_0\, y(k)=0$$

maka kombinasi linear $c_1\, y_1+c_2\, y_2$ adalah juga suatu penyelesaian untuk setiap nilai konstanta c_1 dan c_2.

Bukti:

Untuk membuktikan teorema di atas, maka substitusikan

$$c_1\, y_1+c_2\, y_2 \tag{3.44}$$

ke dalam persamaan (3.39), diperoleh

$$y(k+2)+a_1\, y(k+1)+a_0\, y(k)=c_1\, y_1(k+2)+c_2\, y_2(k+2)+$$

$$a_1\,[c_1\, y_1(k+1)+c_2\, y_2(k+1)]+a_0\,[c_1\, y_1(k)+c_2\, y_2(k)] \tag{3.45}$$

ruas kanan persamaan (3.45) disederhanakan bentuknya menjadi,

$$c_1[y_1(k+2)+a_1\, y_1(k+1)+a_0\, y_1(k)]+c_2[y_2(k+2)+a_1\, y_2(k+1)+a_0\, y_2(k)]$$

$$=c_1\, 0+c_2\, 0=0$$

Terbukti bahwa $c_1\, y_1+c_2\, y_2$ juga memenuhi persamaan (3.39). ■

Contoh 3.26

Perlihatkan bahwa persamaan beda

$$y(k+2)-4\, y(k+1)+4\, y(k)=0 \quad , \quad k=0,1,2,... \tag{3.46}$$

mempunyai penyelesaian,

$$y_1=2^k, \qquad y_2=k\, 2^k \quad , \quad k=0,1,2,... \tag{3.47}$$

maka $y(k) = 2^k\,(c_1 + c_2\,k)$, $k = 0,1,2,\ldots$ juga merupakan penyelesaian (3.46) untuk sebarang konstanta c_1, c_2.

Jawab:

Substitusikan $y_1 = 2^k$ ke dalam persamaan (3.47), diperoleh

$$2^{k+2} - 4\;2^{k+1} + 4\;2^k = 2^2\;2^k - 4\;2\;2^k + 4\;2^k$$

$$= 4\;2^k - 2\;4\;2^k + 4\;2^k = 0$$

Ternyata $y_1 = 2^k$ memenuhi persamaan (3.47). Sekarang akan diperlihatkan bahwa $y_2 = k\;2^k$ juga memenuhi persamaan (3.47).

$$(k+2)\;2^{k+2} - 4\;(k+1)\;2^{k+1} + 4\;k\;2^k$$

$$= 2^2\,(k+2)\;2^k - 2\;4\;(k+1)\;2^k + 4\;k\;2^k$$

$$= (4k+8)\;2^k - (8k+8)\;2^k + 4k\;2^k$$

$$= 4k\;2^k + 8\;2^k - 8k\;2^k - 8\;2^k + 4k\;2^k = 0$$

Ternyata $y_2 = k\;2^k$ juga memenuhi persamaan (3.47), sehingga berdasarkan teorema 3.8, $y(k) = 2^k\,(c_1 + c_2\;k)$ juga memenuhi persamaan (3.47). □

Teorema 3.9

Dimisalkan y_1 dan y_2 adalah dua penyelesaian persamaan (3.39) dan Wronskiannya

$$W = y_1(t_0)\;\;y_2(t_0+1) - y_1(t_0+1)\;\;y_2(t_0)$$

adalah tidak nol pada titik t_0 di mana nilai awalnya yaitu

$$y(t_0) = y_0, \qquad y(t_0+1) = y_1, \tag{3.48}$$

Maka ada suatu pilihan konstanta c_1 dan c_2 dimana $c_1\, y_1 + c_2\, y_2$ memenuhi persamaan (3.39) dan nilai awal (3.48).

Bukti:

Semua penyelesaian persamaan (3.39) termasuk didalam persamaan (3.44), tetapi mungkin ada penyelesaian lain dengan bentuk berbeda. Karena itu, konstanta c_1 dan c_2 akan diuji apakah termasuk di dalam persamaan (3.44). c_1 dan c_2 dipilih sedemikian sehingga memenuhi nilai awal yaitu

$$y(t_0) = y_0 \quad \text{dan} \quad y(t_0+1) = y_1$$

Nilai awal ini mengharuskan c_1 dan c_2 memenuhi persamaan yaitu

$$\left.\begin{aligned} c_1\, y_1(t_0) + c_2\, y_2(t_0) &= y_0 \\ c_1\, y_1(t_0+1) + c_2\, y_2(t_0+1) &= y_1 \end{aligned}\right\} \tag{3.49}$$

Dari persamaan (3.49), diperoleh c_1 dan c_2, yaitu

$$\left.\begin{aligned} c_1 &= \frac{y_0\, y_2(t_0+1) - y_1\, y_2(t_0)}{y_1(t_0)\, y_2(t_0+1) - y_1(t_0+1)\, y_2(t_0)} \\ c_2 &= \frac{-\,y_0\, y_1(t_0+1) + y_1\, y_1(t_0)}{y_1(t_0)\, y_2(t_0+1) - y_1(t_0+1)\, y_2(t_0)} \end{aligned}\right\} \tag{3.50}$$

Persamaan (3.50) dapat juga ditulis dalam bentuk determinan

$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} y_0 & y_2(t_0) \\ y_1 & y_2(t_0+1) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y_1(t_0+1) & y_2(t_0+1) \end{vmatrix}} \qquad c_2 = \frac{\begin{vmatrix} y_1(t_0) & y_0 \\ y_1(t_0+1) & y_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y_1(t_0+1) & y_2(t_0+1) \end{vmatrix}} \tag{3.51}$$

Dengan nilai c_1 dan c_2 di atas, persamaan (3.44) memenuhi nilai awal (3.48) seperti halnya persamaan (3.39).

Persamaan (3.50) dan (3.51) adalah benar asalkan penyebutnya tidak nol. Karena penyebut dari c_1 dan c_2 sama, determinannya adalah

$$W = \begin{vmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y_1(t_0+1) & y_2(t_0+1) \end{vmatrix} = y_1(t_0)\ y_2(t_0+1) - y_1(t_0+1)\ y_2(t_0) \tag{3.52}$$

Determinan W disebut determinan Wronskian, atau secara sederhana hanya disebut Wronskian, dari penyelesaian y_1 dan y_2. Kadang-kadang digunakan notasi $W(y_1,\ y_2)(t_0)$ untuk mewakili bentuk ruas kanan persamaan (3.52), dengan demikian menekankan bahwa Wronskian bergantung pada fungsi y_1 dan y_2, dan dievaluasi di titik t_0.

Teorema 3.10

Jika y_1 dan y_2 adalah dua penyelesaian persamaan (3.39) dan jika ada sutu titik t_0 di mana Wronskian dari y_1 dan y_2 tidak nol, maka terdapat

$$y(k) = c_1\ y_1(k) + c_2\ y_2(k)$$

dengan sebarang c_1 dan c_2 akan memuat semua penyelesaian dari persamaan (3.39).

Bukti:

Dimisalkan ϕ adalah penyelesaian persamaan (3.39). Untuk membuktikan teorema di atas, harus ditunjukkan bahwa ϕ termasuk dalam kombinasi linear $c_1 y_1 + c_2 y_2$, yaitu, untuk beberapa pilihan konstanta c_1 dan c_2, kombinasi linearnya adalah sama dengan ϕ. Dimisalkan t_0 adalah suatu titik di mana Wronskian dari y_1 dan y_2 tidak nol. Maka mengevaluasi ϕ dan ϕ_1 pada titik ini dan memasukkan nilai y_0 dan y_1 secara berturut-turut, diperoleh

$$y_0 = \phi(t_0), \qquad y_1 = \phi(t_0 + 1)$$

Selanjutnya, dengan mempertimbangkan nilai awal

$$y(k+2) + a_1\, y(k+1) + a_0\, y(k) = 0, \;\; y(t_0) = y_0, \;\; y(t_0 + 1) = y_1 \tag{3.53}$$

Fungsi ϕ adalah pasti suatu penyelesaian dari nilai awal ini. Dengan kata lain, karena $W(y_1,\ y_2)(t_0)$ tidak nol, hal ini mungkin (dengan teorema 3.9) untuk memilih c_1 dan c_2 sedemikian sehingga $c_1\, y_1(k) + c_2\, y_2(k)$ adalah juga suatu penyelesaian nilai awal (3.53). Nilai c_1 dan c_2 sudah diberikan pada persamaan (3.50) atau (3.51). Teorema 3.6 mengatakan bahwa dua penyelesaian dengan nilai awal yang sama adalah fungsi yang sama; maka, untuk pilihan c_1 dan c_2 yang sesuai,

$$\phi(k) = c_1\ y_1(k) + c_2\ y_2(k),$$

dan oleh karena itu ϕ termasuk dalam $c_1\, y_1 + c_2\, y_2$. Akhirnya, ϕ adalah penyelesaian persamaan (3.39), yang berarti bahwa setiap penyelesaian persamaan ini adalah di dalam $c_1\, y_1 + c_2\, y_2$. ■

Teorema 3.10 mengatakan bahwa, selama Wronskian dari y_1 dan y_2 tidak nol, kombinasi linear $c_1\, y_1 + c_2\, y_2$ mencakup semua penyelesaian persamaan (3.39). Maka

$$y(k) = c_1\, y_1(k) + c_2\, y_2(k)$$

adalah penyelesaian umum persamaan (3.39) dengan c_1 dan c_2 adalah konstanta. Penyelesaian y_1 dan y_2, dengan Wronskiannya tidak nol, dikatakan suatu bentuk himpunan dasar penyelesaian persamaan (3.39).

Teorema 3.10 dapat ditulis kembali sebagai: untuk menemukan penyelesaian umum $y(k)$ dari persamaan (3.39), hanya perlu ditemukan dua penyelesaian yaitu y_1 dan y_2 di mana Wronskiannya tidak nol. Dengan kata lain, y_1 dan y_2 harus bebas linear (menurut teorema 3.7).

Di bawah ini akan dijelaskan tentang penyelesaian persamaan beda linear homogen orde-2 dengan koefisien konstan.

Untuk mencari penyelesaian umum persamaan beda linear homogen orde-2, dimisalkan bahwa himpunan dasar penyelesaian persamaan (3.39) adalah

$$y(k) = m^k \tag{3.54}$$

dengan m konstanta sebarang, $m \neq 0$. Sebab jika $m = 0$, maka $y(k) = 0$. Kemudian persamaan (3.54) disubstitusikan ke dalam persamaan (3.39), diperoleh

$$m^{k+2} + a_1 \ m^{k+1} + a_0 \ m^k = 0$$

$$m^k (m^2 + a_1 m + a_0) = 0$$

$$m^2 + a_1 m + a_0 = 0 \qquad (3.55)$$

persamaan (3.55) merupakan persamaan bantu (atau persamaan karakteristik) dari persamaan beda (3.39).

Jika m adalah suatu bilangan yang memenuhi persamaan bantu (m disebut akar dari persamaan itu), maka persamaan (3.54) adalah salah satu bentuk himpunan dasar penyelesaian persamaan (3.39). Ternyata persamaan bantu (3.55) merupakan persamaan aljabar bentuk kuadrat, sehingga mempunyai 2 akar, sebut m_1 dan m_2 yang keduanya tidak sama dengan nol, sebab pada persamaan (3.39) terdapat suatu syarat yaitu $a_0 \neq 0$. Maka diperoleh penyelesain umum persamaan (3.39) yaitu

$$y_1(k) = (m_1)^k \quad \text{dan} \quad y_2(k) = (m_2)^k \qquad (3.56)$$

Penyelesaian persamaan bantu di atas adalah akar-akar dari persamaan kuadrat.

Diperoleh 3 kasus yang menyangkut akar-akar tersebut yaitu:

1) Akar-akar m_1 dan m_2 merupakan bilangan real yang tidak sama

2) Akar-akar m_1 dan m_2 merupakan bilangan real yang sama

3) Akar-akar m_1 dan m_2 merupakan bilangan kompleks

Di bawah ini akan dibicarakan per kasus secara lebih terinci.

1) Akar-akarnya Real dan Tidak Sama

Andaikan diberikan suatu bentuk himpunan dasar dalam persamaan (3.55) yaitu $y_1(k)=(m_1)^k$ dan $y_2(k)=(m_2)^k$. Kemudian dihitung determinannya dengan mengambil $k=0$ dan $k=1$, diperoleh

$$\begin{vmatrix} y_1(0) & y_2(0) \\ y_1(1) & y_2(1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ m_1 & m_2 \end{vmatrix} = m_2 - m_1 \neq 0$$

sebab $m_1 \neq m_2$. Jadi menurut teorema 3.10, penyelesaian umum persamaan beda homogen (3.39) adalah

$$Y(k) = c_1\,(m_1)^k + c_2\,(m_2)^k$$

Contoh 3.27

Tentukan penyelesaian persamaan beda

$$y(k+2) - 6\,y(k+1) + 8\,y(k) = 0 \qquad (3.57)$$

yang memenuhi nilai awal $y(0)=0$ dan $y(1)=2$.

Jawab:

Persamaan (3.57) mempunyai persamaan bantu $m^2 - 6m + 8 = 0$.

Kemudian akar-akar persamaannya dihitung menggunakan pemfaktoran, diperoleh

$$m_1 = 2 \quad \text{dan} \quad m_2 = 4$$

ternyata akar-akarnya real dan tidak sama.

Jadi penyelesaian umumnya adalah

$$Y(k) = 2^k c_1 + 4^k c_2$$

Bila $k = 0$ maka $y(0) = 0$, terdapat $c_1 + c_2 = 0$

Bila $k = 1$ maka $y(1) = 2$, terdapat $2c_1 + 4c_2 = 2$

Dari kedua persamaan ini, di dapat $c_1 = -1$ dan $c_2 = 1$.

Jadi penyelesaian partikular dari (3.57) dengan nilai awal $y(0) = 0$ dan $y(1) = 2$ adalah

$$Y(k) = 4^k - 2^k \qquad \square$$

2) Akar-akarnya Real dan Sama

Andaikan bentuk himpunan dasar penyelesaian adalah persamaan (3.56) yaitu $y_1(k) = (m_1)^k$ dan $y_2(k) = (m_2)^k$, kemudian dengan menghitung determinannya, dihasilkan nol, karena $m_1 = m_2$. Oleh karena itu $y_1(k) = (m_1)^k$, dan

$$y_2(k) = k\,(m_1)^k \tag{3.58}$$

Untuk membuktikan jika $m_1 = m_2$, maka persamaan (3.58) juga harus merupakan penyelesaiannya. Substitusikan persamaan (3.58) ke dalam persamaan beda (3.39), diperoleh

$$y_2(k+2) + a_1\ y_2(k+1) + a_0\ y_2(k)$$

$$= (k+2)\,(m_1)^{k+2} + a_1(k+1)\,(m_1)^{k+1} + a_0\ k\,(m_1)^k$$

$$= k\,(m_1)^k\ [(m_1)^2 + a_1\ m_1 + a_0] + (m_1)^{k+1}\ (2m_1 + a_1)$$

$$= k\,(m_1)^k\ 0 + (m_1)^{k+1}\ 0 = 0 \qquad (3.59)$$

Maka persamaan (3.59) juga merupakan suatu penyelesaian dari persamaan beda. Kemudian dihitung determinannya dengan mengambil $k = 0$ dan $k = 1$, diperoleh,

$$\begin{vmatrix} y_1(0) & y_2(0) \\ y_1(1) & y_2(1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ m_1 & m_1 \end{vmatrix} = m_1 \neq 0$$

sebab tidak ada akar dari persamaan bantu yang sama dengan nol.

Jadi, dengan akar-akar m_1 dan m_2 sama, penyelesaian umum persamaan (3.39) adalah

$$Y(k) = c_1\ (m_1)^k + c_2\ k\,(m_1)^k$$

atau

$$Y(k) = (c_1 + c_2\ k)\ (m_1)^k$$

Contoh 3.28

Tentukan penyelesaian persamaan beda

$$y(k+2) - 4\ y(k+1) + 4\ y(k) = 0 \qquad (3.60)$$

yang memenuhi nilai awal $y(0) = 1$ dan $y(1) = 3$.

Jawab:

Persamaan (3.60) mempunyai persamaan bantu $m^2 - 4m + 4 = 0$. Persamaan bantu tersebut kemudian diubah ke dalam bentuk baku menjadi

$$m^2 - 4m + 4 = 0$$

$$m_1 = m_2 = 2$$

diperoleh akar-akarnya real dan sama.

Penyelesaian umumnya adalah

$$Y(k) = (c_1 + c_2\, k)\, 2^k$$

Bila nilai awal di masukkan, maka diperoleh

Untuk $k = 0$ maka $y(0) = 1$, di dapat $c_1 = 1$

Untuk $k = 1$ maka $y(1) = 3$, di dapat $3 = (c_1 + c_2)\, 2$ sehingga $c_2 = \dfrac{1}{2}$.

Jadi penyelesaian partikular dari (3.60) yang memenuhi nilai awal adalah

$$Y(k) = 2^k (1 + \tfrac{1}{2}\, k) \quad \text{atau} \quad Y(k) = (k+2)\, 2^{k-1} \qquad \square$$

3) **Akar-akarnya Kompleks**

Perhatikan bahwa akar-akar kompleks dari persamaan kuadrat selalu terjadi dalam pasangan konjugat. Oleh karena itu, jika m_1 dan m_2 adalah akar-akar kompleks dari persamaan bantu, maka $m_1 \neq m_2$.

Sehingga berdasarkan kasus 1, dengan $y_1(k) = (m_1)^k$ dan $y_2(k) = (m_2)^k$, penyelesaian umumnya adalah

$$\mathrm{Y}(k) = c_1\,(m_1)^k + c_2\,(m_2)^k$$

dengan m_1 dan m_2 merupakan bilangan-bilangan kompleks, dan m_1 dan m_2 merupakan pasangan konjugat.

Untuk menentukan penyelesaian umum dengan nilai real, maka m_1 dan m_2 harus ditulis dalam bentuk polar, yaitu

$$m_1 = r\ (\cos\theta + i\ \sin\theta)\ \text{dan}\ m_2 = r\ (\cos\theta - i\ \sin\theta) \qquad (3.61)$$

dengan menggunakan teorema de Moivre, diperoleh

$$(m_1)^k = r^k\ (\cos\ k\theta + i\ \sin\ k\theta)\ \ \text{dan}\ \ (m_2)^k = r^k\ (\cos\ k\theta - i\ \sin\ k\theta)$$

sehingga diperoleh penyelesaian umumnya yaitu

$$\begin{aligned}
\mathrm{Y}(k) &= c_1\,(m_1)^k + c_2\,(m_2)^k \\
&= c_1 r^k(\cos\ k\theta + i\sin\ k\theta) + c_2 r^k(\cos\ k\theta - i\ \sin\ k\theta) \\
&= r^k[(c_1(\cos\ k\theta + i\ \sin\ k\theta) + c_2(\cos\ k\theta - i\ \sin\ k\theta)] \\
&= r^k[c_1\cos\ k\theta + c_1\,i\ \sin\ k\theta + c_2\cos\ k\theta - c_2\,i\ \sin\ k\theta] \\
&= r^k[(c_1 + c_2)\cos\ k\theta + (c_1 - c_2)\ i\ \sin\ k\theta] \\
&= r^k[C_1\cos\ k\theta + C_2\ \sin\ k\theta],
\end{aligned}$$

dengan $C_1 = c_1 + c_2$ dan $C_2 = (c_1 - c_2)\,i$.

Selanjutnya C_1 dan C_2 diperoleh dari nilai awal.

Contoh 3.29

Tentukan penyelesaian persamaan beda

$$y(k+2)+y(k)=0 \tag{3.62}$$

yang memenuhi nilai awal $y(0)=0$ dan $y(1)=1$.

Jawab:

Persamaan bantu dari $y(k+2)+y(k)=0$ adalah $m^2+1=0$. Akar-akarnya yaitu $m_1=i$ dan $m_2=-i$. Kemudian m_1 dan m_2 ditulis dalam bentuk polar, diperoleh $r=1$ dan $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ sehingga,

$$m_1=i=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2} \qquad \text{dan} \qquad m_2=-i=\cos\frac{\pi}{2}-i\sin\frac{\pi}{2}$$

Penyelesaian umumnya adalah

$$\mathrm{Y}(k)=r^k[C_1\cos k\theta\ +\ C_2\sin k\theta]$$

$$=\left[C_1\cos\frac{k\pi}{2}+C_2\sin\frac{k\pi}{2}\right] \tag{3.63}$$

Untuk mencari penyelesaian partikular dari persamaan (3.63) maka substitusikan nilai awal ke dalam persamaan (3.63), diperoleh

untuk $k=0$, diperoleh $0=C_1\cos 0+C_1\sin 0$, maka $C_1=0$,

untuk $k=1$, diperoleh $1=C_1\cos\dfrac{\pi}{2}+C_2\sin\dfrac{\pi}{2}$, maka $C_2=1$.

Jadi diperoleh penyelesaian partikularnya yaitu

$$\mathrm{Y}(k)=\sin\frac{k\pi}{2}$$

Jadi $Y(k) = \sin\frac{k\pi}{2}$ adalah penyelesaian partikular dari persamaan beda yang memenuhi nilai awal $y(0) = 0$ dan $y(1) = 1$. □

b. Persamaan Beda Linear Non Homogen Orde-2 dengan Koefisien Konstan

Definisi 3.20

Persamaan beda linear non homogen orde-2 dengan koefisien konstan mempunyai bentuk umum

$$y(k+2) + a_1\, y(k+1) + a_0\, y(k) = r(k) \tag{3.64}$$

di mana a_0, a_1 adalah konstanta-konstanta sebarang $(a_0 = r(k) \neq 0)$, sedangkan r adalah sebarang fungsi yang didefinisikan untuk $k = 0,1,2,...$

Contoh 3.30

$8\,y(k+2) - 6\,y(k+1) + y(k) = 5\,\sin\frac{k\pi}{2}$ adalah persamaan beda linear non homogen orde-2 dengan $a_1 = -\frac{3}{4}$, $a_0 = \frac{1}{8}$, $r(k) = \frac{5}{8}\,\sin\frac{k\pi}{2}$. □

Di bawah ini akan dijelaskan tentang teorema yang menyatakan karakteristik dari suatu penyelesaian persamaan beda linear non homogen orde-2 dengan koefisien konstan.

Teorema 3.11

Diberikan persamaan beda linear non homogen orde-2 dengan koefisien konstan yaitu

$$y(k+2)+a_1\, y(k+1)+a_0\, y(k)=r(k) \qquad (3.65)$$

Persamaan homogen yang bersesuaian dengan persamaan (3.65) adalah

$$y(k+2)+a_1\, y(k+1)+a_0\, y(k)=0 \qquad (3.66)$$

Jika Y_1 dan Y_2 adalah dua penyelesaian persamaan non homogen (3.65), maka beda dari Y_1 dan Y_2 adalah suatu penyelesaian persamaan homogen yang bersesuaian yaitu persamaan (3.66). Lebih jauh jika y_1 dan y_2 adalah suatu bentuk himpunan dasar penyelesaian persamaan (3.66), maka

$$\mathrm{Y}_1(k)-\mathrm{Y}_2(k)=c_1\, y_1(k)+c_2\, y_2(k) \qquad (3.67)$$

dengan c_1 dan c_2 sebarang konstanta.

Bukti:

Y_1 dan Y_2 memenuhi persamaan

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{Y}_1(k+2)+a_1\, \mathrm{Y}_1(k+1)+a_0\, \mathrm{Y}_1(k)=r(k) \\ \mathrm{Y}_2(k+2)+a_1\, \mathrm{Y}_2(k+1)+a_0\, \mathrm{Y}_2(k)=r(k) \end{aligned}\right\} \qquad (3.68)$$

maka

$$[\mathrm{Y}_1(k+2)+a_1\, \mathrm{Y}_1(k+1)+a_0\, \mathrm{Y}_1(k)]-[\mathrm{Y}_2(k+2)$$

$$+a_1\, \mathrm{Y}_2(k+1)+a_0\, \mathrm{Y}_2(k)]=r(k)-r(k)=0 \qquad (3.69)$$

$$\left(\mathrm{Y}_1(k+2)-\mathrm{Y}_2(k+2)\right)+a_1\left(\mathrm{Y}_1(k+1)-\mathrm{Y}_2(k+1)\right)+$$

$$a_0\left(\mathrm{Y}_1(k)-\mathrm{Y}_2(k)\right)=0 \qquad (3.70)$$

Persamaan (3.70) mengatakan bahwa $\mathrm{Y}_1-\mathrm{Y}_2$ adalah suatu penyelesaian persamaan (3.66). Oleh karena itu, berdasarkan teorema 3.10, semua penyelesaian persamaan (3.66) dapat ditulis sebagai kombinasi linear suatu bentuk himpunan dasar penyelesaian. ∎

Teorema 3.12

Penyelesaian umum non homogen (3.65) dapat ditulis dalam bentuk

$$y(k)=c_1\,y_1(k)+c_2\,y_2(k)+y^*(k) \qquad (3.71)$$

di mana y_1 dan y_2 adalah sutu bentuk himpunan dasar penyelesaian persamaan homogen yang bersesuaian (3.66), c_1 dan c_2 adalah sebarang konstanta dan $y^*(k)$ adalah sebarang penyelesaian persamaan non homogen (3.65).

Bukti:

Persamaan (3.67) dapat dipakai jika $\mathrm{Y}_1=y$ dan $\mathrm{Y}_2=y^*$ dengan y adalah penyelesaian umum persamaan (3.65) dan y^* adalah sebarang penyelesaian persamaan (3.65). Berdasarkan persamaan (3.67), persamaan (3.71) dapat ditulis

$$y(k)-y^*(k)=c_1\,y_1(k)+c_2\,y_2(k) \qquad (3.72)$$

$$y(k)=c_1\,y_1(k)+c_2\,y_2(k)+y^*(k)$$

Karena y adalah penyelesaian umum persamaan (3.65), bentuk pada ruas kanan persamaan (3.71) mencakup semua penyelesaian persamaan (3.65). ■

Di bawah ini akan dijelaskan tentang penyelesaian persamaan beda linear non homogen orde-2 dengan koefisien konstan.

Diberikan persamaan beda linear non homogen orde-2 dengan koefisien konstan, yaitu

$$y(k+2)+a_1\, y(k+1)+a_0\, y(k)=r(k) \qquad (3.73)$$

maka persamaan homogen yang bersesuaian adalah

$$y(k+2)+a_1\, y(k+1)+a_0\, y(k)=0 \qquad (3.74)$$

Untuk mencari penyelesaian umum persamaan (3.74) caranya sama seperti yang telah dijelaskan pada persamaan beda linear homogen orde-2 dengan koefisien konstan.

Salah satu cara yang akan dipakai untuk menemukan sebarang penyelesaian dari persamaan non homogen (3.73) yaitu $y^*(k)$ adalah metode koefisien tak tentu. Untuk menentukan $y^*(k)$, didasarkan pada pengandaian bahwa $y^*(k)$ mempunyai bentuk umum yang sama dengan sebarang fungsi r yang diberikan pada persamaan lengkap dan menentukan koefisien-koefisien pada $y^*(k)$ yang memenuhi persamaan beda yang diberikan. Proses perhitungan koefisien-koefisien pada $y^*(k)$ disebut metode koefisien tak tentu. Bentuk penyelesaian yang sama dengan sebarang fungsi r yang diberikan disebut penyelesaian percobaan.

Tabel 3.2 menunjukkan bentuk penyelesaian percobaan yang bentuknya sama dengan sebarang fungsi r.

Tabel 3.2

Fungsi $r(k)$	Penyelesaian percobaan
$P_n(k) = b_n\, k^n + b_{n-1}\, k^{n-1} + \ldots + b_1\, k + b_0$	$A_n\, k^n + A_{n-1}\, k^{n-1} + \ldots + A_1\, k + A_0$
a^k	$k^s\ A\ a^k$
$\sin\ \beta\ k$ atau $\cos\ \beta\ k$	$A_0 \cos\ \beta\ k\ +\ A_1 \sin\ \beta\ k$

Catatan: Dalam hal ini, s adalah bilangan bulat non negatif terkecil ($s = 0$, 1, atau 2).

Tabel 3.2 akan dijelaskan satu persatu sebagai berikut:

1. **Fungsi** $r(k) = P_n(k) = b_n\ k^n + b_{n-1}\ k^{n-1} + \ldots + b_1\ k + b_0$

   Diberikan persamaan beda linear non homogen orde-2 yaitu

$$y(k+2) + a_1\ y(k+1) + a_0\ y(k) = r(k)$$

   jika fungsi $r(k)$ yang diberikan adalah

$$r(k) = P_n(k) = b_n\, k^n + b_{n-1}\, k^{n-1} + \ldots + b_1\ k + b_0$$

   maka persamaan beda non homogen orde-2 menjadi

$$y(k+2) + a_1\ y(k+1) + a_0\ y(k) = b_n\ \ k^n + b_{n-1}\ \ k^{n-1} + \ldots + b_1\ k + b_0 \quad (3.75)$$

Untuk menemukan sebarang penyelesaian yaitu $y^*(k)$, diasumsikan bahwa

$$\left.\begin{aligned} y^*(k) &= A_n\,k^n + A_{n-1}\,k^{n-1} + \ldots + A_1\,k + A_0 \\ y^*(k+1) &= A_n\,(k+1)^n + A_{n-1}\,(k+1)^{n-1} + \ldots + A_1\,(k+1) + A_0 \\ y^*(k+2) &= A_n\,(k+2)^n + A_{n-1}\,(k+2)^{n-1} + \ldots + A_1\,(k+2) + A_0 \end{aligned}\right\} \quad (3.76)$$

Mensubstitusikan (3.76) ke dalam persamaan (3.75), didapatkan

$$y^*(k+2) + a_1\,y^*(k+1) + a_0\,y^*(k) = b_n\,k^n + b_{n-1}\,k^{n-1} + \ldots + b_1\,k + b_0$$

$$\lfloor A_n\,(k+2)^n + A_{n-1}\,(k+2)^{n-1} + \ldots + A_1\,(k+2) + A_0 \rfloor + a_1\,\lfloor A_n\,(k+1)^n + A_{n-1}\,(k+1)^{n-1} + \ldots + A_1\,(k+1) + A_0 \rfloor + a_0\,\lfloor A_n\,k^n + A_{n-1}\,k^{n-1} + \ldots + A_1\,k + A_0 \rfloor = b_n\,k^n + b_{n-1}\,k^{n-1} + \ldots + b_1\,k + b_0$$

$$\left[A_n \left(\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} k^{n-j}\,2^j \right) + A_{n-1} \left(\sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} k^{n-1-j}\,2^j \right) + \ldots + A_1\,(k+2) + A_0 \right] +$$
$$a_1 \left[A_n \left(\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} k^{n-j}\,1^j \right) + A_{n-1} \left(\sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} k^{n-1-j}\,1^j \right) + \ldots + A_1\,(k+1) + A_0 \right] +$$
$$a_0\,\lfloor A_n\,k^n + A_{n-1}\,k^{n-1} + \ldots + A_1\,k + A_0 \rfloor = b_n\,k^n + b_{n-1}\,k^{n-1} + \ldots + b_1\,k + b_0 \quad (3.77)$$

kemudian ruas kiri dan ruas kanan persamaan (3.77) disamakan koefisiennya, diperoleh

$$A_n + a_1\,A_n + a_0\,A_n = b_n \quad (3.78)$$

$$2\binom{n}{1} A_n + A_{n-1} \begin{bmatrix} n-1 \\ 0 \end{bmatrix} + a_1\,A_n \binom{n}{1} + a_1\,A_{n-1} \begin{bmatrix} n-1 \\ 0 \end{bmatrix} + a_0\,A_{n-1} = b_{n-1} \quad (3.79)$$

$$\vdots$$

$$2^{n-1}\begin{pmatrix} n \\ n-1 \end{pmatrix} A_n + 2^{n-2}\begin{pmatrix} n-1 \\ n-2 \end{pmatrix} A_{n-1} + A_1 + \begin{pmatrix} n \\ n-1 \end{pmatrix} a_1 A_n +$$

$$1^{n-2}\begin{pmatrix} n-1 \\ n-2 \end{pmatrix} a_1\, A_{n-1} + a_1\, A_1 + a_0\, A_1 = b_1$$

$$2^n\, A_n + A_{n-1}\, 2^{n-1} + \ldots + 2A_1 + A_0 + [a_1\, A_n + a_1\, A_{n-1} 1^{n-1} + \ldots + a_1\, A_1 + a_1\, A_0]$$

$$+ a_0\, A_0 = b_0 \qquad (3.80)$$

Dengan ketentuan bahwa $a_0 \neq 0$ dan $a_1 \neq 0$, dari persamaan (3.78) diperoleh

$$A_n = \frac{b_n}{a_1 + a_0 + 1}$$

A_{n-1}, ..., A_0 juga dapat ditemukan dengan mudah dengan menyelesaikan sistem persamaan di atas. $\blacksquare$

2. Fungsi $r(k)$ berupa a^k.

Diberikan persamaan beda linear non homogen orde-2 yaitu

$$y(k+2) + a_1\, y(k+1) + a_0\, y(k) = r(k) \qquad (3.81)$$

jika fungsi $r(k)$ yang diberikan adalah

$$r(k) = a^k$$

maka persamaan beda non homogen orde-2 menjadi

$$y(k+2) + a_1\, y(k+1) + a_0\, y(k) = a^k \qquad (3.82)$$

Untuk menemukan sebarang penyelesaian yaitu $y^*(k)$, diasumsikan bahwa

$$y^*(k) = A\ a^k$$

$$y^*(k+1) = A\ a^{(k+1)} = A\ a^k\ a$$

$$y^*(k+2) = A\ a^{(k+2)} = A\ a^k\ a^2$$

Mensubstitusikan $y^*(k)$, $y^*(k+1)$ dan $y^*(k+2)$ ke dalam persamaan (3.82), diperoleh

$$y^*(k+2) + a_1\ y^*(k+1) + a_0\ y^*(k) = a^k$$

$$A\ a^k (a^2 + a_1\ a + a_0) = a^k$$

$$A(a^2 + a_1\ a + a_0) = 1 \tag{3.83}$$

Jika $a^2 + a_1 a + a_0 \neq 0$, dari persamaan (3.83) diperoleh

$$A = \frac{1}{a^2 + a_1\ a + a_0} \tag{3.84}$$

Tetapi jika a merupakan penyelesaian homogen yang bersesuaian dengan persamaan (3.81), maka $a^2 + a_1\ a + a_0 = 0$, sehingga persamaan (3.83) menjadi

$$0 = 1$$

akibatnya A tidak dapat dicari, oleh karena itu, $y^*(k)$ harus diubah menjadi

$$y^*(k) = k\ A\ a^k$$

sehingga

$$y^*(k+1) = (k+1)\ A\ a^{k+1}$$

$$y^*(k+2) = (k+2)\ A\ a^{k+2}$$

Jika $y^*(k)$, $y^*(k+1)$, $y^*(k+2)$ yang baru disubstitusikan ke dalam persamaan (3.82), diperoleh

$$y^*(k+2)+a_1\, y^*(k+1)+a_0\, y^*(k)=a^k$$

$$(k+2)\ A\ a^{k+2}+a_1\left[(k+1)\ A\ a^{k+1}\right]+a_0\,[k\ A\ a^k]=a^k$$

$$a^2\ A\ k+2\,a^2\ A+a_1\ a\ A\ k+a_1\ a\ A+a_0\ A\ k=1$$

$$A\ \left[(a^2+a_1\ a+a_0)k+2a^2+a_1\ a\right]=1 \qquad (3.85)$$

Karena $a^2+a_1\,a+a_0=0$, tetapi $a_1\neq 0$, maka persamaan (3.85) menjadi

$$A\ \left[2\,a^2+a_1\ a\right]=1$$

sehingga A dapat dicari sebagai berikut

$$A=\frac{1}{2\,a^2+a_1\,a}$$

■

3. **Fungsi** $r(k)$ **berupa** $\cos\ \beta\ k$ atau $\sin\ \beta\ k$.

Diberikan persamaan beda linear non homogen orde-2 yaitu

$$y(k+2)+a_1\ y(k+1)+a_0\ y(k)=r(k) \qquad (3.86)$$

jika fungsi $r(k)$ yang diberikan adalah

$$r(k)=\cos\ \beta\ k \text{ atau } r(k)=\sin\ \beta\ k$$

maka persamaan beda non homogen orde-2 menjadi

$$y(k+2)+a_1\ y(k+1)+a_0\ y(k)=\cos\ \beta\ k \text{ atau}$$

$$y(k+2)+a_1\ y(k+1)+a_0\ y(k)=\sin\ \beta\ k$$

Dalam hal ini hanya akan dibahas

$$y(k+2)+a_1\ y(k+1)+a_0\ y(k)=\sin\ \beta\ k \tag{3.87}$$

Sedangkan untuk $r(k)=\cos\ \beta\ k$ dapat diturunkan dengan cara yang sama. Jika dipilih sebarang penyelesaian untuk persamaan (3.87) yaitu

$$y^*(k)=A_0\cos\ \beta\ k+A_1\sin\ \beta\ k$$

maka

$$\begin{aligned}
y^*(k+1) &= A_0[\cos\ \beta\ (k+1)]+A_1[\sin\ \beta\ (k+1)] \\
&= A_0[\cos\ (\beta\ k+\beta)]+A_1[\sin\ (\beta\ k+\beta)] \\
&= A_0\cos(\beta\ k)\cos(\beta)-A_0\sin(\beta\ k)\sin(\beta) \\
&\quad +A_1\sin(\beta\ k)\cos(\beta)+A_1\cos(\beta\ k)\sin(\beta)] \\
y^*(k+2) &= A_0[\cos\ \beta\ (k+2)]+A_0[\sin\ \beta\ (k+2)] \\
&= A_0[\cos\ (\beta\ k+2\beta)]+A_1[\sin\ (\beta\ k+2\beta)] \\
&= 2A_0\cos(\beta\ k)\cos(\beta)^2-A_0\cos(\beta\ k)-2A_0\sin(\beta\ k) \\
&\quad \sin(\beta)\cos(\beta)+2A_1\sin(\beta\ k)\cos(\beta)^2-A_1 \\
&\quad \sin(\beta\ k)+2A_1\cos(\beta\ k)\sin(\beta)\cos(\beta)
\end{aligned}$$

Jika $y^*(k)$, $y^*(k+1)$ dan $y^*(k+2)$ disubstitusikan ke dalam persamaan (3.87), diperoleh

$$y^*(k+2)+a_1\ y^*(k+1)+a_0\ y^*(k)=\sin\ \beta\ k$$

$$\begin{aligned}
&2A_0\cos(\beta\ k)\cos(\beta)^2-A_0\cos(\beta\ k)-2A_0\sin(\beta\ k)\sin(\beta)\cos(\beta) \\
&+2A_1\sin(\beta\ k)\cos(\beta)^2-A_1\sin(\beta\ k)+2A_1\cos(\beta\ k)\sin(\beta) \\
&\cos(\beta)+a_1[A_0\cos(\beta\ k)\cos(\beta)-A_0\sin(\beta\ k)\sin(\beta)+A_1
\end{aligned}$$

$$\sin(\beta k)\cos(\beta) + A_1 \cos(\beta k)\sin(\beta)] + a_0 [A_0 \cos \beta k$$
$$+ A_1 \sin \beta k] = \sin(\beta k)$$

$$[2A_0 \cos(\beta)^2 - A_0 + 2A_1 \sin(\beta)\cos(\beta) + a_1 A_0 \cos(\beta) + a_1$$
$$A_1 \sin(\beta) + a_0 A_0]\cos(\beta k) + [-2A_0 \sin(\beta)\cos(\beta)$$
$$+ 2A_1 \cos(\beta)^2 - A_1 - a_1 A_0 \sin(\beta) + a_1 A_1 \cos(\beta) +$$
$$a_0 A_1]\sin \beta k = \sin(\beta k) \quad (3.88)$$

Ruas kiri dan kanan persamaan (3.88) disamakan koefisiennya, diperoleh

$$2A_0 \cos(\beta)^2 - A_0 + 2A_1 \sin(\beta)\cos(\beta) + a_1 A_0 \cos(\beta) + a_1$$
$$A_1 \sin(\beta) + a_0 A_0 = 0 \quad (3.89)$$

$$-2A_0 \sin(\beta)\cos(\beta) + 2A_1 \cos(\beta)^2 - A_1 - a_1 A_0 \sin(\beta)$$
$$+ a_1 A_1 \cos(\beta) + a_0 A_1 = 1 \quad (3.90)$$

Dari persamaan (3.89) diperoleh

$$A_0 = -\frac{A_1(2\sin(\beta)\cos(\beta) + a_1 \sin(\beta))}{2\cos(\beta)^2 - 1 + a_1 \cos(\beta) + a_0} \quad (3.91)$$

Persamaan (3.91) dimasukkan ke dalam persamaan (3.90), diperoleh

$$-2\left[-\frac{A_1(2\sin(\beta)\cos(\beta) + a_1 \sin(\beta))}{2\cos(\beta)^2 - 1 + a_1 \cos(\beta) + a_0}\right]\sin(\beta)\cos(\beta) + 2A_1 \cos(\beta)^2 -$$
$$A_1 - a_1\left[-\frac{A_1(2\sin(\beta)\cos(\beta) + a_1 \sin(\beta))}{2\cos(\beta)^2 - 1 + a_1 \cos(\beta) + a_0}\right]\sin(\beta) + a_1 A_1 \cos(\beta)$$
$$+ a_0 A_1 \quad (3.92)$$

Menyederhanakan persamaan (3.92), diperoleh

$$A_1 = (2\cos(\beta)^2 - 1 + a_1 \cos(\beta) + a_0)/[4a_1 \sin(\beta)^2 \cos(\beta) + (a_1)^2 \sin(\beta)^2 + 4\sin(\beta)^2 \cos(\beta)^2 + 4a_0 \cos(\beta)^2 - 2a_0 + 2a_0 a_1 \cos(\beta) + (a_0)^2 + 4a_1 \cos(\beta)^3 - 2a_1 \cos(\beta) + (a_1)^2 \cos(\beta)^2 - 4\cos(\beta)^2 + 1 + 4\cos(\beta)^4] \quad (3.93)$$

Mensubstitusikan (3.93) ke dalam persamaan (3.91) diperoleh

$$A_0 = -(2\cos(\beta)^2 - 1 + a_1 \cos(\beta) + a_0)\ (2\sin(\beta)\cos(\beta) + a_1 \sin(\beta)) / \{[4a_1 \sin(\beta)^2 \cos(\beta) + (a_1)^2 \sin(\beta)^2 + 4\sin(\beta)^2 \cos(\beta)^2 + 4a_0 \cos(\beta)^2 - 2a_0 + 2a_0\, a_1 \cos(\beta) + (a_0)^2 + 4a_1 \cos(\beta)^3 - 2a_1 \cos(\beta) + (a_1)^2 \cos(\beta)^2 - 4\cos(\beta)^2 + 1 + 4\cos(\beta)^4]\ (2\cos(\beta)^2 - 1 + a_1 \cos(\beta) + a_0)\} \quad (3.94)$$

Jika fungsi non homogen sekaligus melibatkan $\cos\ \beta\ k$ dan $\sin\ \beta\ k$ maka kedua bentuk tersebut dapat dievaluasi secara bersama-sama, karena masing-masing memberikan bentuk yang sama untuk sebarang penyelesaian. Sebagai contoh, jika $r(k) = k\ \sin\ k + 2\ \cos\ k$, bentuk untuk $y^*(k)$ yaitu

$$y^*(k) = (A_1\ k + A_0)\sin\ k + (B_1\ k + B_0)\cos\ k$$

dengan ketentuan bahwa $\sin k$ dan $\cos k$ bukanlah penyelesaian persamaan homogen. ■

Tabel 3.2 yang terdiri dari fungsi polinomial, ekponensial dan trigonometri, dalam penggunaannya dapat dikombinasikan sesuai kebutuhan. Berikut ini diberikan beberapa contoh untuk memperjelas tabel 3.2.

Contoh 3.31

Andaikan diberikan persamaan beda

$$y(k+2)-5\,y(k+1)+6\,y(k)=2\,k-3 \tag{3.95}$$

Tentukan penyelesaian umumnya!

Jawab:

Persamaan homogen yang bersesuain dengan persamaan (3.95) adalah

$$y(k+2)-5\,y(k+1)+6\,y(k)=0$$

sehingga persamaan bantunya adalah

$$m^2-3m+2=0$$

$$(m-3)\,(m-2)=0$$

$$m_1=3 \quad \text{atau} \quad m_2=2$$

diperoleh akar-akarnya real dan tidak sama. Oleh karena itu penyelesaian umumnya adalah

$$Y(k)=c_1\,3^k+c_2\,2^k \tag{3.96}$$

Selanjutnya akan ditentukan sebarang penyelesaian dari persamaan (3.95). Karena $r(k)=2k-3$ maka penyelesaian percobaannya adalah

$$y^*(k)=A_0+A_1\,k \tag{3.97}$$

di mana koefisien A_0 dan A_1 belum ditentukan. Akan dicari nilai A_0 dan A_1. Andaikan persamaan (3.97) memenuhi persamaan (3.95), maka diperoleh

$$y^*(k+2)-5\ y^*(k+1)+6\ y^*(k)$$

$$= A_0 + A_1(k+2)-5\ [A_0 + A_1(k+1)]+6\ [A_0 + A_1 k]$$

$$2k-3 = A_0 + A_1\ k + 2A_1 - 5A_0 - 5A_1\ k - 5A_1 + 6A_0 + 6A_1\ k$$

$$= 2\ A_1\ k + 2\ A_0 - 3\ A_1 \qquad (3.98)$$

dengan menyamakan koefisien antara ruas kiri dan ruas kanan pada persamaan (3.98), diperoleh $A_0 = 0$ dan $A_1 = 1$, sehingga persamaan (3.97) menjadi $y^*(k) = k$. Maka penyelesaian umum persamaan (3.95) adalah

$$y(k) = c_1\ 3^k + c_2\ 2^k + k \qquad (3.99)$$

di mana c_1, c_2 adalah konstanta-konstanta sebarang.

Jika diberikan nilai awal yaitu $y(0)=1$ dan $y(1)=2$, dan disubstitusikan ke dalam persamaan (3.99), diperoleh

untuk $k=0$ maka $1 = c_1 + c_2$,

untuk $k=1$ maka $2 = 3\,c_1 + 2\,c_2 + 1$,

Dengan melakukan eliminasi, diperoleh $c_1 = -1$ dan $c_2 = 2$.

Sehingga penyelesaian partikularnya yang memenuhi nilai awal yaitu

$$y(k) = -3^k + 2\ 2^k + k = -3^k + 2^{k+1} + k \qquad \square$$

Contoh 3.32

Diberikan persamaan beda

$$y(k+2)-6\,y(k+1)+8\,y(k)=2^k \qquad (3.100)$$

jika diberikan nilai awal $y(0)=0$ dan $y(1)=2$, maka tentukan penyelesaian umumnya!

Jawab:

Persamaan homogen yang bersesuaian dengan persamaan (3.100) adalah

$$y(k+2)-6\,y(k+1)+8\,y(k)=0 \qquad (3.101)$$

sehingga persamaan bantunya adalah

$$m^2-6m+8=0$$

$$(m-2)(m-4)=0$$

$$m_1=2 \text{ atau } m_2=4$$

diperoleh akar-akarnya real dan tidak sama, sehingga penyelesaian umum (3.101) adalah

$$\mathrm{Y}(k)=2^k\,c_1+4^k\,c_2$$

Selanjutnya akan dicari sebarang penyelesaian dari persamaan (3.100). Karena $r(k)=2^k$ maka penyelesaian percobaannya adalah

$$y^*(k)=A\,2^k \qquad (3.102)$$

Untuk mencari nilai A, substitusikan persamaan (3.102) ke dalam persamamaan (3.100), diperoleh

$$y^*(k+2)-6y^*(k+1)+8y^*(k)=A\,2^{k+2}-6\,A\,2^{k+1}+8A\,2^k$$

$$2^k = A\ 2^{k+2} - 3A\ 2^{k+2} + 2A\ 2^{k+2}$$

$$2^k = 0 \tag{3.103}$$

Dari persamaan (3.103), A tidak dapat ditentukan karena $\mathrm{Y}(k)$ dan $y^*(k)$ bergantung linear. Maka dibuat penyelesaian percobaan yang baru yaitu

$$y^*(k) = A\ k\ 2^k \tag{3.104}$$

Untuk mencari nilai A, substitusikan persamaan (3.104) ke dalam persamaan (3.100), diperoleh

$$y^*(k+2) - 6\,y^*(k+1) + 8\,y^*(k) = A\ (k+2)\ 2^{k+2}$$
$$-6\ A\ (k+1)\ 2^{k+1} + 8A\ k\ 2^k$$

$$2^k = 4A\,k\,2^k + 8A\,2^k - 12A\,k\,2^k - 12A\,2^k + 8A\,k\,2^k$$

$$1 = -4A$$

$$A = -\frac{1}{4}$$

sehingga penyelesaian umum persamaan (3.100) adalah

$$y(k) = \mathrm{Y}(k) + y^*(k) = 2^k\ c_1 + 4^k\ c_2 - \frac{1}{4}k\,2^k$$

jika nilai awal dimasukkan, maka

untuk $k = 0$ diperoleh $0 = c_1 + c_2$

untuk $k = 1$ diperoleh $\dfrac{5}{2} = 2\,c_1 + 4\,c_2$

dengan menggunakan eliminasi, diperoleh $c_1 = -\frac{5}{4}$ dan $c_2 = \frac{5}{4}$. Maka $y(k) = \mathrm{Y}(k) + y^*(k) = \frac{5}{4}4^k - \frac{5}{4}2^k - \frac{1}{4}k\,2^k$ merupakan penyelesaian persamaan (3.100) yang memenuhi nilai awal $y(0) = 0$ dan $y(1) = 2$. □

Contoh 3.33

Diberikan persamaan beda

$$y(k+2) - 5\,y(k+1) + 6\,y(k) = \sin\,(\pi\;k) \tag{3.105}$$

Tentukan penyelesaian persamaan (3.105) yang memenuhi nilai awal $y(0) = 1$ dan $y(1) = 2$!

Jawab:

Persamaan homogen yang bersesuain dengan persamaan (3.105) sama dengan contoh 3.31 yaitu

$$y(k+2) - 5\,y(k+1) + 6\,y(k) = 0$$

sehingga penyelesaian umumnya adalah

$$Y(k) = c_1\,3^k + c_2\,2^k \tag{3.106}$$

Selanjutnya akan ditentukan sebarang penyelesaian dari persamaan (3.105). Karena $r(k) = \sin\,(\pi\;k)$ maka penyelesaian percobaannya adalah

$$y^*(k) = A_0 \cos\,\beta\,k + A_1 \sin\,\beta\,k \tag{3.107}$$

di mana koefisien A_0 dan A_1 belum ditentukan. Akan dicari nilai A_0 dan A_1. Dari persamaan (3.93) diperoleh

$$A_1 = (2\cos(\pi)^2 - 1 + (-5)\cos(\pi) + 6) / [4(-5)\sin(\pi)^2\cos(\pi) +$$
$$(-5)^2\sin(\pi)^2 + 4\sin(\pi)^2\cos(\pi)^2 + 4\ 6\cos(\pi)^2 - 2\ 6 + 2\ 6(-5)$$
$$\cos(\pi) + (6)^2 + 4(-5)\cos(\pi)^3 - 2(-5)\cos(\pi) + (-5)^2\cos(\pi)^2 -$$
$$4\cos(\pi)^2 + 1 + 4\cos(\pi)^4] = \frac{1}{12}$$

dan dari persamaan (3.94) diperoleh

$$A_0 = -(2\cos(\pi)^2 - 1 + (-5)\cos(\pi) + 6(2\sin(\pi)\cos(\pi) + (-5)\sin(\pi)) /$$
$$(4(-5)\sin(\pi)^2\cos(\pi) + (-5)^2\sin(\pi)^2 + 4\sin(\pi)^2\cos(\pi)^2 +$$
$$4\,6\cos(\pi)^2 - 2\,6 + 2\,6(-5)\cos(\pi) + 6^2 + 4(-5)\cos(\pi)^3$$
$$-2(-5)\cos(\pi) + (-5)^2\cos(\pi)^2 - 4\cos(\pi)^2 + 1 + 4\cos(\pi)^4)$$
$$(2\cos(\pi)^2 - 1 + (-5)\cos(\pi) + 6) = 0$$

Sehingga penyelesaian umum persamaan (3.105) menjadi

$$Y(k) = c_1\,3^k + c_2\,2^k + \frac{1}{12}\sin(\pi\ k) \tag{3.108}$$

Untuk mencari penyelesaian partikularnya, masukkan nilai awal yaitu $y(0) = 1$ dan $y(1) = 2$ ke dalam persamaan (3.108),

untuk $k = 0$ diperoleh $1 = c_1 + c_2$

untuk $k = 1$ diperoleh $2 = 3c_1 + 2c_2$

dengan menggunakan eliminasi, diperoleh $c_1 = 0$ dan $c_2 = 1$, sehingga penyelesaian partikularnya adalah

$$Y(k) = 2^k + \frac{1}{12}\sin(\pi\ k) \qquad \square$$

BAB IV

TRANSFORMASI-Z

A. Pendahuluan

Transformasi-Z adalah transformasi yang digunakan untuk memberikan kemudahan dalam memecahkan suatu persamaan beda. Transformasi-Z digunakan untuk memecahkan suatu persamaan beda sehingga menghasilkan suatu penyelesaian sebagai suatu fungsi dalam variabel z. Sebagai konsekuensinya, harus dimiliki suatu metode untuk mengubah transformasi dalam variabel z kembali ke fungsi diskret $y(k)$; invers transformasi-Z digunakan untuk tujuan ini.

Pada bab ini, akan dibahas definisi transformasi-Z langsung, sifat-sifat dasarnya, invers transformasi-Z dan penerapan transformasi-Z dalam menyelesaikan persamaan beda linear orde-1 dan orde-2 dengan koefisien konstan.

B. Definisi dan Konvergensi Transformasi-Z

Definisi 4.1

Transformasi-Z dari suatu fungsi diskret $y(k)$ didefinisikan sebagai

$$\mathrm{Z}\{y(k)\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y(k)\, z^{-k} \qquad (4.1)$$

$\mathrm{Z}\{y(k)\}$ ditulis sebagai $\mathrm{Y}(z)$. Penjabaran dari transformasi-Z ini menghasilkan

$$\mathrm{Y}(z) = \ldots + y(-2)\; z^{2} + y(-1)\; z + y(0) + y(1)\; z^{-1} + y(2)\; z^{-2} + \ldots$$

dengan z adalah bilangan kompleks yang ditulis sebagai $z = a + b\,i$, $a, b \in \Re$. Definisi (4.1) disebut transformasi-Z bernilai ganda, atau dua sisi.

Untuk menemukan suatu bentuk transformasi-Z yang akan digunakan pada bab ini, akan dilakukan modifikasi definisi (4.1). Pertama, nyatakan (4.1) sebagai

$$\mathrm{Y}(z) = \sum_{k=-\infty}^{-1} y(k)\; z^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} y(k)\; z^{-k} \qquad (4.2)$$

$y(k)$ didefinisikan nol untuk $k < 0$, sehingga suku pertama pada ruas kanan persamaan (4.2) adalah nol. Maka persamaan (4.2) akan menghasilkan transformasi-Z unilateral (bernilai tunggal), atau satu sisi, dan ditulis

$$\mathrm{Y}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} y(k)\; z^{-k} \qquad (4.3)$$

dengan $\mathrm{Y}(z)$ adalah transformasi-Z dari $y(k)$ yang bernilai tunggal. Transformasi ini biasanya hanya disebut transformasi-Z.

Jika $y(k)$ dikenai transformasi-Z (jika penjumlahan di dalam (4.3) ada), dengan menghitung (4.3) akan dihasilkan suatu fungsi $\mathrm{Y}(z)$. Sebaliknya, jika $\mathrm{Y}(z)$ dikenai invers transformasi-Z maka akan dihasilkan $y(k)$. Hubungan ini ditulis dengan

$$y(k) \underset{\mathrm{Z}^{-1}}{\overset{\mathrm{Z}}{\rightleftarrows}} \mathrm{Z}\{y(k)\} = \mathrm{Y}(z) \qquad (4.4)$$

Definisi 4.2

Daerah konvergensi dari $\mathrm{Y}(z)$ adalah himpunan bilangan kompleks z di mana jumlah $\sum\left|y(k)\ z^{-k}\right|$ ada, yakni, $\mathrm{Y}(z)$ memiliki nilai berhingga.

Contoh 4.1

Diberikan transformasi-Z, $\mathrm{Y}(z)=\dfrac{1}{1-a\ z^{-1}}$. $\mathrm{Y}(z)$ konvergen mutlak untuk $a\ z^{-1}<1$ atau $|z|>|a|$.

$\square$

Diberikan transformasi-Z dari suatu fungsi diskret y yaitu

$$\mathrm{Y}(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} y(k)\ z^{-k}$$

Adalah penting untuk mengetahui daerah konvergensi mutlak dari $\mathrm{Y}(z)$ dalam bidang-z kompleks. Yakni, ingin ditentukan nilai-nilai kompleks dari z sehingga $\sum\left|y(k)\ z^{-k}\right|$ memiliki suatu nilai berhingga.

Jika z dinyatakan dalam bentuk kutub (polar) sebagai

$$z=r\,e^{i\theta}=r\,[\cos\theta+i\sin\theta]$$

$$|z|=\left|r\ e^{i\theta}\right|=|r|\left|e^{i\theta}\right|=|r|\sqrt{\cos^2\theta+\sin^2\theta}=|r|$$

maka diperoleh

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left|y(k)\ z^{-k}\right|=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left|y(k)\ (r\,e^{j\theta})^{-k}\right|$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{-1}\left|y(k)\,r^{-k}\ e^{-jk\theta}\right|+\sum_{k=0}^{\infty}\left|y(k)\,r^{-k}\ e^{-jk\theta}\right|$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} |y(-m)|\ r^{m} + \sum_{k=0}^{\infty} |y(k)|\ r^{-k} \tag{4.5}$$

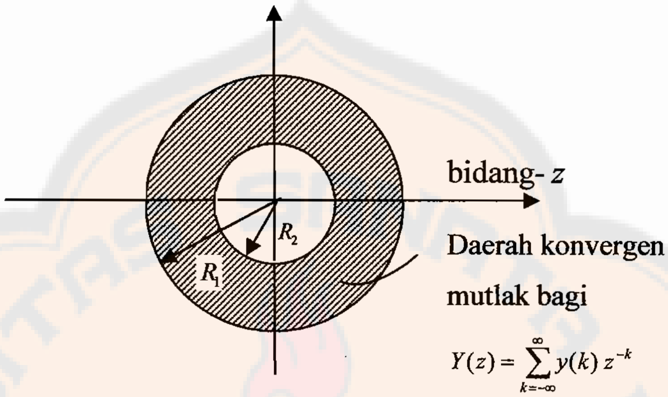
Agar jumlah tak berhingga $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| y(k)\ z^{-k} \right|$ hasilnya berhingga maka tiap-tiap jumlah dalam (4.5) haruslah berhingga. Kita dapat menjamin bahwa tiap-tiap jumlah ini berhingga, asalkan dapat ditemukan tiga buah bilangan positif M, R_1 dan R_2 sedemikian rupa sehingga $|y(-m)| \le M\ R_1^{(-m)}$ untuk $m \ge 1$ dan $|y(k)| \le M\ (R_2)^k$ untuk $k \ge 0$. Kemudian batas-batas ini disubstitusikan ke dalam (4.5) untuk memperoleh

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| y(k)\ z^{-k} \right| \le M \sum_{m=1}^{\infty} (R_1)^{(-m)}\ r^{m} + M \sum_{k=0}^{\infty} (R_2)^k\ r^{-k}$$

$$\le M \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R_1} \right)^{m} + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{R_2}{r} \right)^{k} \right\} \tag{4.6}$$

Deret $\sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R_1} \right)^{m}$ adalah bentuk deret geometri yang konvergen untuk $\frac{r}{R_1} < 1$ dan deret $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{R_2}{r} \right)^{k}$ adalah juga bentuk deret geometri yang konvergen untuk $\frac{R_2}{r} < 1$. $\mathrm{Y}(z)$ konvergen mutlak dalam daerah cincin $R_2 < |r| < R_1$, karena $|r| = |z|$ maka $\mathrm{Y}(z)$ konvergen mutlak untuk semua z dalam daerah cincin $R_2 < |z| < R_1$.

Daerah konvergensi ini diperlihatkan dalam gambar 4.1. Lingkaran bagian dalam membatasi suku-suku dalam pangkat-pangkat negatif dari z agar tidak mencapai titik asal. Lingkaran bagian luar membatasi suku-suku dalam pangkat-pangkat positif dari z agar tidak memiliki nilai-nilai $|z|$ yang besar.

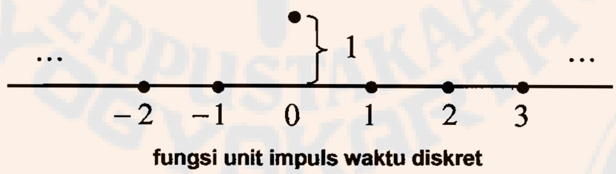


Gambar 4.1 Daerah konvergensi cincin $Y(z)$

Dibawah ini akan dijelaskan tentang fungsi unit impuls dan fungsi unit step yang akan banyak digunakan pada contoh-contoh selanjutnya.

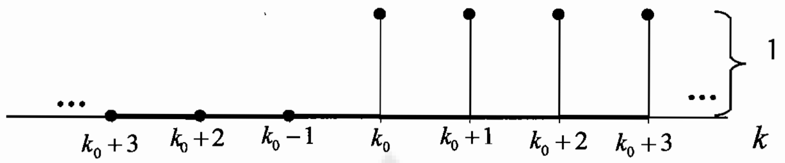
Fungsi unit impuls $\delta(k)$ didefinisikan sebagai

$$\delta(k) = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases} \tag{4.7}$$



Fungsi unit step $u(k-k_0)$ didefinisikan sebagai

$$u(k-k_0) = \begin{cases} 1, & k \geq k_0 \\ 0, & k < k_0 \end{cases} \tag{4.8}$$



fungsi unit step waktu diskret

Contoh 4.2

Fungsi unit impuls pada persamaan (4.7) memusat pada $k=0$. Karena $\delta(k)$ adalah nol untuk semua k kecuali $k=0$, maka transformasi-Znya adalah

$$Z\{\delta(k)\}=\sum_{k=0}^{\infty}\delta(k)\,z^{-k}=\delta(0)\,z^{-0}=1 \qquad (4.9)$$

dengan begitu, transformasi-Z dari unit impuls $\delta(k)$ adalah 1. Jumlahan pada persamaan (4.9) ada untuk setiap nilai z, maka daerah konvergensinya adalah himpunan semua bilangan kompleks.

Contoh 4.3

Fungsi unit step, pada persamaan (4.8) diperoleh pada saat $k_0=0$. Maka menurut definisi transformasi-Z, diperoleh

$$Z\{u(k)\}=U(z)=\sum_{k=0}^{\infty}u(k)\;z^{-k}=\sum_{k=0}^{\infty}(1)z^{-k}=1+z^{-1}+z^{-2}+\ldots \qquad (4.10)$$

Dengan mengingat deret geometri pada bab 2, yaitu

$$a+ar+ar^2+ar^3+\ldots+ar^{k-1}+\ldots \quad ,(a\neq 0) \qquad (4.11)$$

konvergen jika $|\,r\,|<1$ dan divergen jika $|\,r\,|\geq 1$.

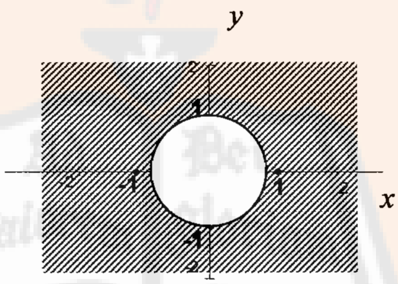
Jika deret konvergen, jumlah deret itu adalah

$$\frac{a}{1-r} = a + a\,r + a\,r^2 + ... + a\,r^{k-1} + ...$$

jika diberikan $a = 1$ dan $r = z^{-1}$ pada persamaan (4.11), maka persamaan (4.10) menghasilkan transformasi-Z dalam bentuk rumus yaitu

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}$$

Karenanya, transformasi-Z dari fungsi unit step hanya ada untuk $|z^{-1}| < 1$, dengan z berada di luar lingkaran unit (lingkaran dengan jari-jari 1). Daerah konvergen untuk contoh 4.3, digambarkan di bawah ini (daerah yang diarsir).



□

Contoh 4.4

Tentukan transformasi-Z dari fungsi $y(k) = k$

$$\mathrm{Z}\{k\} = \mathrm{Y}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} k\ z^{-k} = 0 + z^{-1} + 2z^{-2} + 3z^{-3} + ... \qquad (4.12)$$

Persamaan (4.12) dikalikan dengan $z-1$, diperoleh

$$(z-1)\mathrm{Y}(z) = (2z^{-1} + 3z^{-2} + 4z^{-3} + ...) - (z^{-1} + 2z^{-2} + 3z^{-3} + ...)$$

$$= z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + ... \qquad (4.13)$$

Ruas kanan pada persamaan (4.13) merupakan deret geometri dengan $a = z^{-1}$ dan $r = z^{-1}$, maka jumlahan $z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + ...$ adalah

$$S_k = \frac{a}{1-r} = \frac{z^{-1}}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}$$

Sehingga persamaan (4.13) dapat ditulis menjadi

$$(z-1)\mathrm{Y}(z) = \frac{z}{z-1}$$

$$\mathrm{Y}(z) = \frac{z}{(z-1)^2} \qquad \square$$

Contoh 4.5

Tentukan transformasi-Z jika diberikan suatu bilangan real atau kompleks yaitu a, dan diberikan fungsi diskret $y(k) = a^k\, u(k) = a^k$.

Jawab:

Transformasi-Z dari fungsi diskret $y(k)$ yaitu

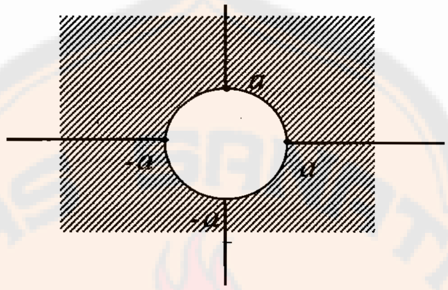
$$Z\{y(k)\} = \mathrm{Y}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k\, z^{-k}$$

$$= 1 + a\,z^{-1} + a^2\, z^{-2} + \ldots$$

Deret $1 + a\,z^{-1} + a^2\, z^{-2} + \ldots$ adalah deret geometri dengan $a = 1$ dan $r = a\,z^{-1}$, sehingga diperoleh

$$\mathrm{Y}(z) = \frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-a\,z^{-1}} = \frac{z}{z-a}$$

$\mathrm{Y}(z)$ konvergen untuk $|r| < 1$, yaitu $|r| = |a\,z^{-1}| < 1$ sehingga diperoleh $|z| > |a|$. Daerah konvergen untuk transformasi $\mathrm{Y}(z) = z/(z-a)$ yaitu himpunan semua bilangan kompleks $|z|>|a|$, seperti digambarkan di bawah ini (daerah yang diarsir).



Transformasi-Z dari beberapa fungsi elementer yang sudah dikerjakan pada contoh-contoh di atas dan juga transformasi-Z dari beberapa fungsi elementer lainnya dapat dilihat dalam ringkasan tabel yang ada pada lembar lampiran.

C. Sifat-Sifat Dasar Transformasi-Z

Selain menggunakan definisi transformasi-Z, diperlukan juga untuk mengetahui sifat-sifat dasar transformasi-Z yang akan digunakan untuk mempermudah dalam mencari transformasi-Z dari suatu fungsi yang diberikan. Sifat dasar transformasi-Z ini juga diperoleh dengan menggunakan definisi transformasi-Z.

Teorema 4.1 (Sifat Linear Transformasi-Z)

Transformasi-Z adalah suatu operasi linear. Jika diberikan

$$\mathrm{Y}(z) = \mathrm{Z}\{y(k)\} \text{ dan } V(z) = \mathrm{Z}\{v(k)\},$$

maka untuk setiap bilangan real atau kompleks a dan b, dihasilkan

$$\mathrm{Z}[a\,\{y(k)\} + b\,\{v(k)\}] = a\ \mathrm{Z}\{y(k)\} + b\ \mathrm{Z}\{v(k)\} = a\ \mathrm{Y}(z) + b\ V(z) \qquad (4.14)$$

Bukti:

Jika diberikan bilangan real a dan b,

$$Z[a\,\{y(k)\} + b\,\{v(k)\}] = \sum_{k=0}^{\infty}[a\,\{y(k)\} + b\,\{v(k)\}]\,z^{-k}$$

$$= a\sum_{k=0}^{\infty} y(k)\ z^{-k} + b\sum_{k=0}^{\infty} v(k)\ z^{-k}$$

$$= a\ \mathrm{Y}(z) + b\ V(z)$$ ■

Contoh 4.6

Diberikan $y(k) = u(k)$ dan $v(k) = a^k\ u(k)$ dengan $u(k)$ adalah fungsi unit step. Dengan menggunakan sifat linearitas, carilah transformasi-Znya jika diberikan $a \neq 1$!

Jawab:

Dari contoh 4.3 dan 4.5 diperoleh bahwa $\mathrm{Z}\{u(k)\} = \dfrac{z}{z-1}$ dan $\mathrm{Z}\{a^k\ u(k)\} = \dfrac{z}{z-a}$. Maka

$$\mathrm{Z}\{u(k) + a^k\ u(k)\} = \frac{z}{z-1} + \frac{z}{z-a} = \frac{2z^2 - (1+a)\,z}{(z-1)\,(z-a)} \qquad \text{(sifat linearitas)}$$ □

Teorema 4.2 (Sifat Pergeseran ke kanan $y(k)\,u(k)$ transformasi-Z)

Jika diberikan $\mathrm{Y}(z) = \mathrm{Z}\{y(k)\}$. $y(k-q)\ u(k-q)$ adalah fungsi diskret yang digeser q langkah ke kanan dari fungsi $y(k)\,u(k)$. Maka transformasi-Znya dinyatakan dengan

$$\mathrm{Z}\{y(k-q)\ u(k-q)\} = z^{-q}\ \mathrm{Y}(z) \tag{4.15}$$

dengan q suatu bilangan bulat positif.

Bukti:

Jika $u(k-q)$ ditulis dalam fungsi unit step menghasilkan

$$u(k-q) = \begin{cases} 1, & k \geq q \\ 0, & k < q \end{cases}$$

Transformasi-Z untuk $y(k-q)\ u(k-q)$ yaitu

$$\mathrm{Z}\{y(k-q)\ u(k-q)\} = \sum_{k=0}^{\infty} \{y(k-q)\ u(k-q)\}\ z^{-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{q-1} \{y(k-q)\ u(k-q)\}\ z^{-k} + \sum_{k=q}^{\infty} \{y(k-q)\ u(k-q)\}\ z^{-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{q-1} \{y(k-q)\,(0)\}\ z^{-k} + \sum_{k=q}^{\infty} \{y(k-q)\,(1)\}\ z^{-k}$$

$$= \sum_{k=q}^{\infty} y(k-q)\ z^{-k}$$

jika diberikan $\bar{k} = k-q$ maka $k = \bar{k}+q$,

saat $k = q$ maka $\bar{k} = 0$ dan saat $k \to \infty$ maka $\bar{k} \to \infty$, sehingga

$$\mathrm{Z}\{y(k-q)\} = \sum_{k=q}^{\infty} y(k-q)\, z^{-k} = \sum_{\bar{k}=0}^{\infty} y(\bar{k})\; z^{-(\bar{k}+q)}$$

$$= z^{-q} \sum_{\bar{k}=0}^{\infty} y(\bar{k})\; z^{-\bar{k}}$$

$$= z^{-q}\; \mathrm{Y}(z) \qquad \blacksquare$$

Contoh 4.7

Dengan menggunakan sifat pergeseran ke kanan, carilah transformasi-Z dari suatu fungsi $p(k)$ yang didefinisikan sebagai

$$p(k) = \begin{cases} 1, & \mathrm{k} = 0, 1, 2, \ldots, q\text{-}1 \\ 0, & \text{untuk } k \text{ yang lain} \end{cases}$$

dengan q adalah sebuah bilangan bulat positif.

Jawab:

Jika $p(k)$ ditulis dalam bentuk fungsi unit step maka diperoleh

$$p(k) = u(k) - u(k-q)$$

Dari contoh 4.3 didapat bahwa $\mathrm{Z}\{u(k)\} = U(z) = \dfrac{z}{z-1}$, maka

$$\mathrm{Z}\{u(k-q)\} = z^{-q}\; U(z) \qquad \text{(sifat pergeseran ke kanan } y(k).u(k)\text{)}$$

$$= z^{-q}\, \frac{z}{z-1} = \frac{z^{-q+1}}{z-1}$$

maka

$$\mathrm{Z}\{p(k)\} = \mathrm{Z}\{u(k) - u(k-q)\}$$

$$= \mathrm{Z}\{u(k)\} - \mathrm{Z}\{u(k-q)\} \qquad \text{(sifat linearitas)}$$

$$= \frac{z}{z-1} - \frac{z^{-q+1}}{z-1} = \frac{z\,(1-z^{-q})}{z-1} = \frac{z^{q}-1}{z^{q-1}\,(z-1)} \qquad \square$$

Teorema 4.3 (Sifat Pergeseran ke kanan $y(k)$)

Jika diberikan pasangan transformasi-Z yaitu $\mathrm{Y}(z) = \mathrm{Z}\{y(k)\}$, maka

$$\mathrm{Z}\{y(k-1)\} = z^{-1}\,\mathrm{Y}(z) + y(-1) \qquad (4.16)$$

$$\mathrm{Z}\{y(k-2)\} = z^{-2}\,\mathrm{Y}(z) + y(-2) + z^{-1}\,y(-1)$$

$$\vdots$$

$$\mathrm{Z}\{y(k-q)\} = z^{-q}\,\mathrm{Y}(z) + y(-q) + z^{-1}\,y(-q+1) + \cdots + z^{-q+1}\,y(-1)$$

dengan q suatu bilangan bulat positif.

Bukti:

- Akan dibuktikan untuk $y(k-1)$. Transformasi-Z untuk $y(k-1)$ yaitu

$$\mathrm{Z}\{y(k-1)\} = \sum_{k=0}^{\infty} y(k-1)\,z^{-k}$$

jika diberikan $\bar{k} = k-1$ maka $k = \bar{k}+1$ sehingga dihasilkan

$$\mathrm{Z}\{y(k-1)\} = \sum_{\bar{k}=-1}^{\infty} y(\bar{k})\,z^{-(\bar{k}+1)}$$

$$= \sum_{\bar{k}=0}^{\infty} y(\bar{k})\,z^{-(\bar{k}+1)} + y(-1)$$

$$= z^{-1}\sum_{\bar{k}=0}^{\infty} y(\bar{k})\,z^{-\bar{k}} + y(-1)$$

$$= z^{-1}\, Y(z) + y(-1)$$

- Sekarang akan dibuktikan untuk $y(k-2)$. Transformasi-Z untuk $y(k-2)$ yaitu

$$Z\{y(k-2)\} = \sum_{k=0}^{\infty} y(k-2)\; z^{-k}$$

jika diberikan $\bar{k} = k-2$ maka $k = \bar{k}+2$ sehingga dihasilkan

$$Z\{y(k-2)\} = \sum_{\bar{k}=-2}^{\infty} y(\bar{k})\; z^{-(\bar{k}+2)}$$

$$= \sum_{\bar{k}=-1}^{\infty} y(\bar{k})\; z^{-(\bar{k}+2)} + y(-2)$$

$$= \sum_{\bar{k}=0}^{\infty} y(\bar{k})\; z^{-(\bar{k}+2)} + y(-2) + z^{-1}\, y(-1)$$

$$= z^{-2} \sum_{\bar{k}=0}^{\infty} y(\bar{k})\; z^{-\bar{k}} + y(-2) + z^{-1}\, y(-1)$$

$$= z^{-2}\, Y(z) + y(-2) + z^{-1}\, y(-1)$$

Dengan cara yang sama, dapat dibuktikan bahwa transformasi-Z untuk $y(k-q)$ adalah

$$Z\{y(k-q)\} = z^{-q}\, Y(z) + y(-q) + z^{-1}\, y(-q+1) + \ldots + z^{-q+1}\, y(-1) \qquad \blacksquare$$

Contoh 4.8

Dengan menggunakan sifat pergeseran ke kanan, carilah transformasi-Z dari $u(k-1)$ yaitu suatu fungsi unit step $u(k)$ yang digeser satu langkah ke kanan!

Jawab:

Dengan mengingat fungsi unit step yang telah diberikan pada contoh 4.7, maka penyelesaian untuk $u(k-1)$ diberikan dengan

$$Z\{u(k-1)\} = z^{-1}\,U(z) + u(-1) \qquad \text{(sifat pergeseran ke kanan)}$$

$$= z^{-1}\frac{z}{z-1} + 0 = \frac{1}{z-1} \qquad \square$$

Teorema 4.4 (Sifat Pergeseran ke kiri transformasi-Z)

Jika diberikan transformasi-Z yaitu $\mathrm{Y}(z) = Z\{y(k)\}$, maka

$$Z\{y(k+1)\} = z\,\mathrm{Y}(z) - y(0)\,z \tag{4.17}$$

$$Z\{y(k+2)\} = z^2\,\mathrm{Y}(z) - y(0)\,z^2 - y(1)\,z$$

$$\vdots$$

$$Z\{y(k+q)\} = z^q\,\mathrm{Y}(z) - y(0)\,z^q - y(1)\,z^{q-1} - \ldots - y(q-1)\,z$$

dengan q suatu bilangan bulat positif.

Bukti:

- Akan dibuktikan untuk $y(k+1)$. Transformasi-Z untuk $y(k+1)$ yaitu

  $$Z\{y(k+1)\} = \sum_{k=0}^{\infty} y(k+1)\,z^{-k}$$

  jika diberikan $\bar{k} = k+1$ maka $k = \bar{k}-1$ sehingga transformasi-Z dari $y(k+1)$ yaitu

  $$Z\{y(k+1)\} = \sum_{\bar{k}=1}^{\infty} y(\bar{k})\,z^{-(\bar{k}-1)}$$

$$= \sum_{\bar{k}=0}^{\infty} y(\bar{k})\ z^{-(\bar{k}-1)} - y(0)\ z$$

$$= z \sum_{\bar{k}=0}^{\infty} y(\bar{k})\ z^{-\bar{k}} - y(0)\ z$$

$$= z \left[\sum_{\bar{k}=0}^{\infty} y(\bar{k})\ z^{-\bar{k}} - y(0) \right]$$

$$= z \left\{ \mathrm{Y}(z) - y(0) \right\}$$

- Sekarang akan dibuktikan untuk $y(k+2)$. Transformasi-Z untuk $y(k+2)$ yaitu

$$\mathrm{Z}\{y(k+2)\} = \sum_{k=0}^{\infty} y(k+2)\ z^{-k}$$

jika diberikan $\bar{k} = k+2$ maka $k = \bar{k}-2$ sehingga transformasi-Z dari $y(k+2)$ yaitu

$$\mathrm{Z}\{y(k+2)\} = \sum_{\bar{k}=2}^{\infty} y(\bar{k})\ z^{-(\bar{k}-2)}$$

$$= \sum_{\bar{k}=1}^{\infty} y(\bar{k})\ z^{-(\bar{k}-2)} - y(1)\ z$$

$$= \sum_{\bar{k}=0}^{\infty} y(\bar{k})\ z^{-(\bar{k}-2)} - y(1)\ z - y(0)\ z^2$$

$$= z^2 \sum_{\bar{k}=0}^{\infty} y(\bar{k})\ z^{-\bar{k}} - y(0)\ z^2 - y(1)\ z$$

$$= z^2\ \mathrm{Y}(z) - y(0)\ z^2 - y(1)\ z$$

Dengan cara yang sama, dapat dibuktikan bahwa transformasi-Z untuk $y(k+q)$ adalah

$$\mathrm{Z}\{y(k+q)\} = z^q\ \mathrm{Y}(z) - y(0)\ z^q - y(1)\ z^{q-1} - \ldots - y(q-1)\ z \qquad \blacksquare$$

Contoh 4.9

Dengan menggunakan sifat pergeseran ke kiri, carilah transformasi-Z dari suatu fungsi unit step $u(k)$ yang digeser ke kiri satu langkah!

Jawab:

Dengan mengingat fungsi unit step yang telah diberikan pada contoh 4.3, maka penyelesaian untuk $u(k+1)$ diberikan dengan

$$\mathrm{Z}\{u(k+1)\} = z\ U(z) - u(0)\ z \qquad \text{(sifat pergeseran ke kiri)}$$

$$= z\,\frac{z}{z-1} - 1\,z = \frac{z^2 - z\,(z-1)}{z-1} = \frac{z}{z-1}$$

Dari hasil diatas didapat bahwa $\mathrm{Z}\{u(k+1)\} = \mathrm{Z}\{u(k)\}$. Hasil ini diduga karena $u(k+1) = u(k)$ untuk $k = 0,1,2,\ldots$ $\square$

Teorema 4.5 (Sifat Perkalian dengan k dan k^2 transformasi-Z)

Jika diberikan transformasi-Z yaitu $\mathrm{Y}(z) = \mathrm{Z}\{y(k)\}$, maka

$$\mathrm{Z}\{k\ y(k)\} = -z\,\frac{d}{dz}\mathrm{Y}(z) \qquad (4.18)$$

dan

$$Z\{k^2\ y(k)\} = z\frac{d}{dz}\mathrm{Y}(z) + z^2\frac{d^2}{dz^2}\mathrm{Y}(z) \qquad (4.19)$$

Bukti:

- Untuk membuktikan (4.18), pertama-tama perlu diingat definisi transformasi-Z dari $y(k)$ yaitu

$$Z\{y(k)\} = \mathrm{Y}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} y(k)\ z^{-k}$$

Kedua ruas pada persamaan di atas diturunkan terhadap z yang akan menghasilkan

$$\frac{d}{dz}\mathrm{Y}(z) = \sum_{k=0}^{\infty}(-k)\ y(k)\ z^{-k-1}$$

$$= -z^{-1}\sum_{k=0}^{\infty} k\ y(k)\ z^{-k}$$

$$-z\frac{d}{dz}\mathrm{Y}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} k\ y(k)\ z^{-k}$$

Ruas kanan pada persamaan diatas adalah transformasi-Z dari $k\ y(k)$, maka (4.18) terbukti.

- Untuk membuktikan (4.19), kedua ruas pada persamaan diatas diturunkan terhadap z yang akan menghasilkan

$$\frac{d}{dz}\left(-z\frac{d}{dz}\mathrm{Y}(z)\right) = \sum_{k=0}^{\infty}(-k)\ k\ y(k)\ z^{-k-1}$$

$$(-1)\frac{d}{dz}\mathrm{Y}(z) + (-z)\frac{d^2}{dz^2}\mathrm{Y}(z) = -z^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}\left[k^2\ y(k)\right] z^{-k}$$

$$z \frac{d}{dz} \mathrm{Y}(z) + z^2 \frac{d^2}{dz^2} \mathrm{Y}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[k^2 \ y(k)\right] z^{-k}$$

Ruas kanan pada persamaan di atas adalah transformasi-Z dari $k^2\ y(k)$, maka (4.19) terbukti. $\blacksquare$

Contoh 4.10

Dengan menggunakan sifat di atas, tentukan transformasi-Z jika diberikan $y(k) = a^k\ u(k)$, dengan a adalah bilangan real atau bilangan kompleks yang tidak nol!

Jawab:

Dengan memperhatikan fungsi unit step pada contoh 4.7, didapat $y(k) = a^k\ u(k) = a^k$ untuk $k \geq 0$. Dan dengan mengingat $\mathrm{Z}\{a^k\} = \dfrac{z}{z-a}$; $|z| > |a|$, maka

$$\mathrm{Z}\{k\ \ y(k)\} = -z \frac{d}{dz} \mathrm{Y}(z) = -z \frac{d}{dz} \mathrm{Z}\{a^k\} \qquad \text{(sifat perkalian dengan } k\text{)}$$

$$= -z \frac{1\,(z-a) - z\,1}{(z-a)^2}$$

$$= -z \left[\frac{(z-a) - z}{(z-a)^2}\right] = \frac{a\,z}{(z-a)^2}$$

Jika $a = 1$, transformasi-Z bagi $k\ \ y(k)$ menjadi

$$\mathrm{Z}\,\{\,k\ u(k)\} = \frac{z}{(z-1)^2} \qquad \square$$

Contoh 4.11

Hitung transformasi-Z dari $k^2 \ a^k \ u(k)$!

Jawab:

Untuk menghitung $k^2 \ a^k \ u(k)$, langkah pertama, perlu diingat bahwa $y(k) = a^k \ u(k) = a^k$, dan $\mathrm{Z}\{a^k\} = \dfrac{z}{z-a}$. Maka

$$\frac{d^2}{dz^2} Y(z) = \frac{2\,a}{(z-a)^3}$$

dengan menggunakan contoh 4.10 didapatkan

$$\mathrm{Z}\{k^2 \ y(k)\} = \mathrm{Z}\{k^2 \ a^k\}$$

$$= z \frac{d}{dz} \mathrm{Y}(z) + z^2 \frac{d^2}{dz^2} \mathrm{Y}(z) \qquad \text{(sifat perkalian dengan } k^2\text{)}$$

$$= \frac{-a\,z}{(z-a)^2} + z^2 \frac{2\,a}{(z-a)^3}$$

$$= \frac{a\,z\,(z+a)}{(z-a)^3}$$

jika diberikan nilai $a = 1$ pada persamaan di atas, maka

$$\mathrm{Z}\{k^2 \ u(k)\} = \frac{z\,(z+1)}{(z-1)^3} \qquad \square$$

Teorema 4.6 (Sifat Perkalian dengan a^k transformasi-Z)

Jika diberikan transformasi-Z dari $y(k)$ yaitu $\mathrm{Y}(z) = \mathrm{Z}\{y(k)\}$ dan kemudian untuk setiap bilangan real atau bilangan kompleks tidak nol a, maka

$$Z\{a^k\ y(k)\} = Y\left(\frac{z}{a}\right) \tag{4.20}$$

Bukti:

Untuk membuktikan (4.20), perhatikan bahwa

$$Z\{a^k\ y(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} a^k\ y(k)\ z^{-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{a^{-k}}\ y(k)\ z^{-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} y(k) \left(\frac{z}{a}\right)^{-k} = Y\left(\frac{z}{a}\right) \qquad \blacksquare$$

Contoh 4.12

Hitung transformasi-Z dari $p(k) = u(k) - u(k-q)$ dengan $u(k)$ adalah fungsi unit step dan q adalah suatu bilangan bulat positif!

Jawab:

Dari contoh 4.7 diperoleh

$$Z\{p(k)\} = \frac{z\,(1 - z^{-q})}{z-1}$$

sehingga

$$Z\{a^k\ p(k)\} = \frac{(z/a)\,[1 - (z/a)^{-q}]}{(z/a) - 1} \qquad \text{(sifat perkalian dengan } a^k\text{)}$$

$$= \frac{z\,(1 - a^q\ z^{-q})}{z - a} \qquad \square$$

Teorema 4.7 (Sifat Penjumlahan transformasi-Z)

Diberikan $y(k)$ dengan $y(k)=0$ untuk $k=-1,-2,\ldots$, dan diberikan $v(k)$ yang menandakan penjumlahan $y(k)$, yang didefinisikan dengan

$$v(k)=\sum_{i=0}^{k} y(i) \tag{4.21}$$

maka

$$\mathrm{Z}\{v(k)\}=V(z)=\frac{z}{z-1}\mathrm{Y}(z) \tag{4.22}$$

Bukti:

Untuk mendapatkan bentuk transformasi-Z bagi $v(k)$, maka $v(k)$ dapat ditulis dalam bentuk

$$v(k)=\sum_{i=0}^{k-1} y(i)+y(k)$$

dan menggunakan persamaan (4.21), $v(k)$ dapat ditulis sebagai

$$v(k)=v(k-1)+y(k)$$

$$\mathrm{Z}\{v(k)\}=\mathrm{Z}\{v(k-1)]+y(k)\} \qquad (v(k) \text{ dikenai transformasi-Z})$$

$$=\mathrm{Z}\{v(k-1)\}+\mathrm{Z}\{y(k)\} \qquad \text{(sifat linearitas)}$$

$$=z^{-1}\ \mathrm{Z}\{v(k)\}+v(-1)+\mathrm{Z}\{y(k)\} \qquad \text{(sifat pergeseran ke kanan)}$$

$$=z^{-1}\ \mathrm{Z}\{v(k)\}+\mathrm{Z}\{y(k)\} \qquad (v(-1) \text{ didefinisikan nol})$$

$$\mathrm{Z}\{v(k)\}-z^{-1}\ \mathrm{Z}\{v(k)\}=\mathrm{Z}\{y(k)\}$$

$$\mathrm{Z}\{v(k)\}\left[1-z^{-1}\right]=\mathrm{Z}\{y(k)\}$$

$$\mathrm{Z}\{v(k)\} = \frac{1}{1-z^{-1}}\ \mathrm{Z}\{y(k)\}$$

$$= \frac{z}{z-1}\mathrm{Z}\{y(k)\}$$

$$\mathrm{Z}\{v(k)\} = V(z) = \frac{z}{z-1}\mathrm{Y}(z)$$ $\blacksquare$

Contoh 4.13

Dengan menggunakan sifat penjumlahan, carilah transformasi-Z untuk $v(k) = \sum_{i=0}^{k} u(i)$ dengan $u(i)$ adalah fungsi unit step!

Jawab:

Dengan menggunakan sifat di atas, diperoleh

$$v(k) = \sum_{i=0}^{k} u(i) = \sum_{i=0}^{k-1} u(i) + u(k)$$

$$= u(0) + u(1) + \ldots + u(k-1) + u(k)$$

$$= k\,1 + u(k) \qquad (u(0), u(1), \ldots, u(k-1) \text{ didefinisikan } 1)$$

$$= k\ u(k) + u(k) \qquad (1 \text{ adalah nilai } u(k) \text{ untuk } k \geq 0)$$

$$= (k+1)\ u(k)$$

$$\mathrm{Z}\{v(k)\} = \frac{z}{z-1}\mathrm{Y}(z) = \frac{z^2}{(z-1)^2} \qquad \text{(sifat penjumlahan)}$$

$\square$

Teorema 4.8 (Sifat Teorema Nilai Awal transformasi-Z)

Jika diberikan transformasi-Z dari fungsi diskret $y(k)$ yaitu $\mathrm{Y}(z) = \mathrm{Z}\{y(k)\}$, nilai awal $y(k)$ dapat dihitung dari

$$y(0) = \lim_{z\to\infty} \mathrm{Z}\{y(k)\} \tag{4.23}$$

$$y(1) = \lim_{z\to\infty}[z\ \mathrm{Z}\{y(k)\} - z\ y(0)]$$

$$\vdots$$

$$y(q) = \lim_{z\to\infty}[z^q\ \mathrm{Z}\{y(k)\} - z^q\ y(0) - z^{q-1}\ y(1) - \ldots - z\ y(q-1)]$$

Bukti:

- Akan dibuktikan untuk $y(0)$. Perlu diperhatikan bahwa

$$z^{-k} \to 0 \qquad \text{ketika } z \to \infty \text{ untuk semua } k \geq 1$$

dan

$$y(k).z^{-k} \to 0 \qquad \text{ketika } z \to \infty \text{ untuk semua } k \geq 1$$

Jika diberikan transformasi-Z dari suatu fungsi diskret $y(k)$ yaitu

$$\mathrm{Z}\{y(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} y(k)\ z^{-k}$$

Mengambil limit untuk $z \to \infty$ pada kedua ruas pada persamaan di atas menghasilkan

$$\lim_{z\to\infty} \mathrm{Z}\{y(k)\} = \lim_{z\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty} y(k)\ z^{-k}\right)$$

$$= \lim_{z\to\infty}\left\{y(0) + \sum_{k=1}^{\infty} y(k)\, z^{-k}\right\}$$

$$= \lim_{z\to\infty} y(0) + \lim_{z\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty} y(k)\, z^{-k}\right)$$

$$= y(0) + \lim_{z\to\infty}\left(y(1)\, z^{-1} + y(2)\, z^{-2} + \ldots\right)$$

$$= y(0) + \lim_{z\to\infty} y(1)\, z^{-1} + \lim_{z\to\infty} y(2)\, z^{-2} + \ldots$$

$$= y(0) + 0 + 0 + \ldots + 0 = y(0)$$

- Akan dibuktikan untuk $y(1)$.

  Perhatikan bahwa

$$z\ \mathrm{Z}\{y(k)\} - z\ y(0) = z\sum_{k=0}^{\infty} y(k)\ z^{-k} - z\ y(0)$$

  Mengambil limit untuk $z \to \infty$ pada kedua ruas pada persamaan di atas menghasilkan

$$\lim_{z\to\infty}\left[z\ \mathrm{Z}\{y(k)\} - z\ y(0)\right] = \lim_{z\to\infty}\left[z\sum_{k=0}^{\infty} y(k)\, z^{-k} - z\, y(0)\right]$$

$$= \lim_{z\to\infty}\left[\left(z\ y(0) + y(1) + y(2)\ z^{-1} + y(3)\ z^{-2}\right)\right] + \ldots - zy(0)$$

$$= \lim_{z\to\infty}\left(y(1) + y(2)\, z^{-1} + y(3)\, z^{-2} + \ldots\right)$$

$$= \lim_{z\to\infty} y(1) + \lim_{z\to\infty} y(2)\ z^{-1} + \lim_{z\to\infty} y(3)\ z^{-2} + \ldots$$

$$= y(1) + 0 + 0 + \ldots + 0 = y(1)$$

- Dengan cara yang sama, dapat dibuktikan bahwa untuk nilai $y(q)$, nilai awal diberikan sebagai

$$y(q) = \lim_{z\to\infty}\left[z^{q}\ \mathrm{Z}\{y(k)\} - z^{q}\ y(0) - z^{q-1}\ y(1) - \ldots - z\ y(q-1)\right] \qquad \blacksquare$$

Contoh 4.14

Cari $u(0)$ jika diberikan fungsi unit step $u(k)$!

Jawab:

Dengan memperhatikan contoh 4.3,

$$Z\{u(k)\} = \frac{z}{z-1}$$

maka

$$u(0) = \lim_{z\to\infty} \frac{z}{z-1} = \lim_{z\to\infty} \frac{1}{1-1/z} = 1. \qquad \text{(sifat nilai awal)}$$

$\square$

D. Invers Transformasi-Z

Seperti sudah dijelaskan di atas, transformasi-Z mengubah bentuk suatu fungsi diskret $y(k)$ ke dalam suatu persamaan aljabar yang ditulis sebagai $Z\{y(k)\}$. Sebaliknya, fungsi diskret $y(k)$ kemudian didapat dari $Z\{y(k)\}$ melalui suatu proses yang disebut invers transformasi-Z. Proses ini disimbolkan dengan

$$Z^{-1}\left[Z\{y(k)\}\right] = y(k)$$

Tiga metode dasar yang dapat dipakai untuk mendapatkan barisan $y(k)$ dari transformasi-Z, $Z\{y(k)\}$ yaitu: Pembalikan Integral Kompleks, Pembalikan dengan Pembagian Panjang (untuk k yang terbatas), dan Pembalikan dengan Pecahan Parsial (untuk $k \geq 0$). Bab ini hanya akan membahas Pembalikan dengan Pembagian Panjang (untuk k yang terbatas), dan Pembalikan dengan Perluasan Pecahan Parsial (untuk $k \geq 0$).

a. Pembalikan dengan Pembagian Panjang

Diberikan transformasi-Z dari fungsi diskret $y(k)$ yaitu $\mathrm{Y}(z) = \mathrm{Z}\{y(k)\}$. Dari persamaan (4.3), transformasi-Z dapat diperluas ke dalam suatu deret dalam z^{-1} sebagai berikut

$$\mathrm{Y}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} y(k)\ z^{-k} = y(0) + y(1)\ z^{-1} + \ldots$$

$$+ y(l)\ z^{-k} + \ldots + y(k)\ z^{k} + \ldots \qquad (4.24)$$

$\mathrm{Y}(z)$ ditulis dalam bentuk rasional yaitu $\mathrm{Y}(z) = B(z)/A(z)$ dengan polinom $B(z)$ dan $A(z)$ ditulis dalam pangkat z. Untuk menghitung invers trasnformasi-Z, sehingga dihasilkan fungsi $y(k)$, $\mathrm{Y}(z)$ dapat diperluas ke dalam suatu deret dalam z^{-1} dengan membagi $B(z)$ oleh $A(z)$. Nilai $y(k)$ kemudian dapat ditentukan dari koefisien perluasan deret tersebut. Hal ini digambarkan dengan

$$\mathrm{Y}(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = y(0) + y(1)\ z^{-1} + y(2)\ z^{-2} + \ldots$$

Nilai $y(0)$ tidak nol jika dan hanya jika derajat pembilang, $B(z)$, sama dengan derajat penyebut, $A(z)$. Jika derajat $B(z)$, lebih kecil 1 dari derajat $A(z)$, nilai $y(0)$ dan $y(1)$ adalah nol; jika derajat $B(z)$, lebih kecil 2 dari derajat $A(z)$, nilai $y(0)$ dan $y(1)$ dan $y(2)$ adalah nol, dan seterusnya.

Perluasan di atas tidak menghasilkan penyelesaian dalam bentuk rumus. Sebagai gantinya, dihasilkan suatu barisan bilangan, kecuali jika barisan adalah cukup sederhana untuk disimpulkan dalam bentuk rumus.

Contoh 4.15

Temukan $y(k)$ jika diberikan

$$Z\{y(k)\} = \frac{z^2 - 1}{z^3 + 2z + 4}$$

Jawab:

Membagi pembilang oleh penyebut menghasilkan

$$\begin{array}{r l}
 & z^{-1} + 0z^{-2} - 3z^{-3} - 4z^{-4} + \ldots \\
z^3 + 2z + 4 \,\big) & z^2 - 1 \\
 & z^2 + 2 \qquad + 4z^{-1} \\
\hline
 & -3 \qquad - 4z^{-1} \\
 & -3 \qquad\qquad - 6z^{-2} - 12z^{-3} \\
\hline
 & \qquad - 4z^{-1} + 6z^{-2} + 12z^{-3} \\
 & \qquad - 4z^{-1} \qquad - 8z^{-3} - 16z^{-4} \\
\hline
 & \qquad\qquad 6z^{-2} + 20z^{-3} + 16z^{-4} \\
 & \qquad\qquad \vdots
\end{array}$$

maka

$$Z\{y(k)\} = z^{-1} - 3z^{-3} - 4z^{-4} \ \ldots$$

Dari definisi transformasi-Z, didapat

$$Z\{y(k)\} = y(0) + y(1)\ z^{-1} + y(2)\ z^{-2} + \ldots$$

sehingga dihasilkan nilai untuk $y(k)$ yaitu:

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 1, \quad y(2) = 0, \quad y(3) = -3, \quad y(4) = -4, \quad \ldots$$

Dari hasil di atas, penyelesaian yang didapat hanya berupa barisan bilangan dan tidak menghasilkan penyelesaian dalam bentuk rumus. $\square$

b. Pembalikan dengan Pecahan Parsial

Menggunakan pembagian panjang yang sudah dijelaskan di atas, invers transformasi-Z dari $Z\{y(k)\}$ yaitu $y(k)$ dapat dihitung untuk bilangan bulat dengan nilai-nilai k yang terbatas. Jika $y(k)$ yang diinginkan adalah untuk $k \geq 0$, maka digunakan pecahan parsial yang akan dibahas seperti di bawah ini.

Diandaikan bahwa $Z\{y(k)\}$ diberikan dalam bentuk rasional yaitu $Z\{y(k)\} = Z\{b(k)\}/Z\{a(k)\}$. Jika derajat $Z\{b(k)\}$ sama dengan $Z\{a(k)\}$, pecahan parsial tidak dapat diterapkan secara langsung untuk $Z\{y(k)\}$. Membagi $Z\{b(k)\}$ oleh $Z\{a(k)\}$ menghasilkan:

$$Z\{y(k)\} = y(0) + \frac{Z\{r(k)\}}{Z\{a(k)\}}$$

dimana $y(0)$ adalah nilai awal $y(k)$ pada saat $k = 0$ dan $Z\{r(k)\}$ adalah suatu polinom dalam z dimana derajat $Z\{r(k)\}$ kurang dari derajat

$\mathrm{Z}\{a(k)\}$. Fungsi rasional $\mathrm{Z}\{r(k)\}/\mathrm{Z}\{a(k)\}$ kemudian dapat diperluas dengan pecahan parsial.

Pendekatan lain yang digunakan untuk membagi $\mathrm{Z}\{a(k)\}$ oleh $\mathrm{Z}\{b(k)\}$; yakni,

$$\frac{\mathrm{Z}\{y(k)\}}{z} = \frac{\mathrm{Z}\{b(k)\}}{z\,\mathrm{Z}\{a(k)\}}$$

Fungsi rasional $\mathrm{Z}\{y(k)\}/z$ dapat diperluas ke dalam pecahan parsial karena derajat $\mathrm{Z}\{b(k)\}$ kurang dari derajat $z\,\mathrm{Z}\{a(k)\}$ dalam kasus $\mathrm{Z}\{b(k)\}$ dan $\mathrm{Z}\{a(k)\}$ memiliki derajat yang sama. Setelah $\mathrm{Z}\{y(k)\}/z$ diperluas, hasilnya dikalikan dengan z untuk menghasilkan $y(k)$. Invers transformasi-Z, kemudian dapat dihitung langkah demi langkah yaitu dengan menyamakan penyebut antara ruas kanan dengan ruas kiri. Ada tiga kasus untuk dipertimbangkan

1) Akar Beda

Diberikan akar dari $\mathrm{Z}\{y(k)\} = \mathrm{Y}(z)$ yaitu $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_m$ yang semuanya berbeda dan tidak nol. Kemudian $\mathrm{Y}(z)/z$ dapat ditulis

$$\frac{\mathrm{Y}(z)}{z} = \frac{n_0}{z} + \frac{n_1}{z-a_1} + \frac{n_2}{z-a_2} + \ldots + \frac{n_m}{z-n_m} \tag{4.25}$$

dimana n_0 adalah bilangan real. Untuk mencari $n_0,\ n_1,\ n_2,\ \ldots,\ n_m$, kedua ruas pada persamaan (4.25) harus disamakan penyebutnya.

Setelah diperoleh n_0, n_1, n_2, ..., n_m, kemudian kedua ruas (4.25) dikalikan dengan z sehingga:

$$\mathrm{Y}(z) = n_0 + \frac{n_1\, z}{z - a_1} + \frac{n_2\, z}{z - a_2} + \ldots + \frac{n_m\, z}{z - a_m} \tag{4.26}$$

Kemudian invers transformasi-Z dari setiap suku dalam (4.26) di dapat dari tabel pasangan transformasi-Z yang terdapat pada lembar lampiran, diperoleh

$$y(k) = n_0\, \delta(k) + n_1\, (a_1)^k + n_2\, (a_2)^k + \ldots + n_m\, (a_m)^k,$$

$$k = 0, 1, 2, \ldots \tag{4.27}$$

Contoh 4.16

Dengan menggunakan metode pecahan parsial, selesaikan transformasi-Z di bawah ini!

$$\mathrm{Y}(z) = \frac{z\,(z-1)}{(z+1)\,(z+2)} \tag{4.28}$$

Jawab:

$$\mathrm{Y}(z) = \frac{z\,(z-1)}{(z+1)\,(z+2)}$$

$$\frac{\mathrm{Y}(z)}{z} = \frac{(z-1)}{(z+1)\,(z+2)} = \frac{n_1}{z+1} + \frac{n_2}{z+2}$$

Dengan menyamakan penyebut pada kedua ruas pada persamaan di atas, diperoleh

$$z - 1 = n_1\,(z+2) + n_2\,(z+1)$$

$$z-1=(n_1+n_2)\,z+(2\,n_1+n_2)$$

Membandingkan koefisien-koefisien antara ruas kiri dengan ruas kanan, diperoleh

$$\left.\begin{aligned} n_1+n_2&=1\\ 2\,n_1+n_2&=-1 \end{aligned}\right\} \tag{4.29}$$

Persamaan (4.29) kemudian di eliminasi, menghasilkan $n_1=-2$, $n_2=3$. Sehingga

$$\mathrm{Y}(z)=\frac{-2z}{z+1}+\frac{3z}{z+2}$$

Menggunakan tabel pasangan transformasi-Z yang terdapat pada lembar lampiran, diperoleh

$$y(k)=-2\,(-1)^k+3\,(-2)^k \qquad \square$$

2) Akar Berulang

Misalkan $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_m$ adalah akar-akar dari $\mathrm{Z}\{y(k)\}=\mathrm{Z}\{b(k)\}/\mathrm{Z}\{a(k)\}$ dan diasumsikan bahwa semua a_i tidak nol. Diandaikan bahwa akar a_1 diulang r kali dan bahwa akar lainnya $m-r$ adalah berbeda. Kemudian $\mathrm{Y}(z)/z$ dapat ditulis dalam pecahan parsial yaitu

$$\frac{\mathrm{Y}(z)}{z}=\frac{n_0}{z}+\frac{n_1}{z-a_1}+\frac{n_2}{(z-a_1)^2}+\ldots+\frac{n_r}{(z-a_1)^r}$$

$$+\frac{n_{r+1}}{z-a_{r+1}}+\ldots+\frac{n_m}{z-a_m} \tag{4.30}$$

Untuk mencari $n_0,\ n_1,\ n_2,\ ...,\ n_m$, kedua ruas pada persamaan (4.30) harus disamakan penyebutnya. Setelah diperoleh $n_0,\ n_1,\ n_2,\ ...,\ n_m$, dengan mengalikan kedua ruas persamaan (4.30) dengan z didapatkan

$$\mathrm{Y}(z) = n_0 + \frac{n_1\ z}{z-a_1} + \frac{n_2\ z}{(z-a_2)^2} + \ldots + \frac{n_r\ z}{(z-a_1)^r}$$

$$+ \frac{n_{r+1}\ z}{z-a_{r+1}} + \ldots + \frac{n_m\ z}{z-a_m} \qquad (4.31)$$

Invers transformasi-Z, $y(k)$ dapat dilihat dari tabel pasangan transformasi-Z yang terdapat pada lembar lampiran.

Contoh 4.17

Dengan menggunakan metode pecahan parsial, selesaikan transformasi-Z berikut ini

$$Y(z) = \frac{z\ (z-1)}{(z+2)^3\ (z+3)} \qquad (4.32)$$

Jawab:

$$Y(z) = \frac{z\ (z-1)}{(z+2)^3\ (z+3)}$$

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{(z-1)}{(z+2)^3\ (z+3)} = \frac{p}{z+3} + \frac{n_1}{(z+2)^3} + \frac{n_2}{(z+2)^2} + \frac{n_3}{(z+2)} \qquad (4.33)$$

dengan menyamakan penyebut antara ruas kiri dengan ruas kanan, diperoleh

$$z-1 = p(z+2)^3 + n_1(z+3) + n_2(z+2)(z+3) + n_3(z+2)^2(z+3) \qquad (4.34)$$

untuk mencari nilai p, n_1, n_2 dan n_3, substitusikan nilai-nilai z di bawah ini pada persamaan (4.34).

untuk $z = -3$, diperoleh

$$-4 = -p$$

$$p = 4$$

untuk $z = -2$, diperoleh

$$-3 = n_1$$

untuk $z = 0$, diperoleh

$$-1 = 4\ 8 + (-3)\ 3 + n_2\ 2\ 3 + n_3\ 4\ 3$$

$$-24 = 6\,n_2 + 12\,n_3 \qquad (4.35)$$

untuk $z = 1$, diperoleh

$$0 = 4\ 27 + (-3)\,4 + n_2\ 3\ 4 + n_3\ 9\ 4$$

$$-96 = 12\,n_2 + 36\,n_3 \qquad (4.36)$$

Persamaan (4.35) dan (4.36) diselesaikan dengan menggunakan eliminasi, sehingga diperoleh $n_2 = 4$ dan $n_3 = -4$

Persamaan (4.33) dapat ditulis menjadi

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{4}{z+3} + \frac{-3}{(z+2)^3} + \frac{4}{(z+2)^2} + \frac{-4}{(z+2)}$$

$$\mathrm{Y}(z) = \frac{-4z}{z+2} + \frac{4z}{(z+2)^2} - \frac{3z}{(z+2)^3} + \frac{4z}{z+3} \qquad (4.37)$$

Nilai $y(k)$ dari persamaan (4.37) dapat dilihat di tabel pasangan transformasi-Z pada lembar lampiran, dan didapatkan

$$y(k) = -4\,(-2)^k - 2\,k\,(-2)^k - \frac{3}{4}\,k\,(k-1)\,(-2)^k + 4\,(-3)^k$$

$$= \left(-\frac{3}{4}k^2 - \frac{11}{4}k - 4\right)(-2)^k + 4\,(-3)^k \qquad \square$$

3) Akar Kompleks

Jika dua atau lebih akar adalah kompleks, bentuk yang bersesuaian di dalam (4.27) akan kompleks. Bentuk seperti itu dapat dikombinasikan untuk menghasilkan suatu bentuk real. Untuk melihat ini, diandaikan bahwa akar $a_1 = c + i\,d$ adalah kompleks, sedemikan hingga $d \neq 0$. Kemudian salah satu akar $Z\{y(k)\}$ yang lain harus sama dengan konjugat kompleks $\bar{a}_1$ dari a_1. Diandaikan bahwa $a_2 = \bar{a}_1$; kemudian dalam (4.27) hal tersebut harus benar bahwa $n_2 = \bar{n}_1$. Karenanya bentuk kedua dan ketiga pada ruas kanan (4.27) adalah sama dengan

$$n_1\,(a_1)^k + \bar{n}_1\,(\bar{a}_1)^k \tag{4.38}$$

Persamaan (4.38) kemudian dapat ditulis menjadi

$$n_1\,(a_1)^k + \bar{n}_1\,(\bar{a}_1)^k = 2\,\mathrm{Re}\left(n_1\,(a_1)^k\right) \tag{4.39}$$

Kemudian n_1 dan a_1 harus diubah ke dalam bentuk polar sedemikian hingga dapat dihasilkan $2\mathrm{Re}\left(n_1\,(a_1)^k\right)$ yaitu

$$n_1\,(a_1)^k = \left(|\,n_1\,|\,cis(\arg n_1)\right)\left(r^k\ cis\ k\,\theta\right)$$

$$= |n_1| r^k \{cis(k\theta + \arg n_1)\}$$

$$= |n_1| r^k \cos(k\theta + \arg n_1) + i|n_1| r^k \sin(k\theta + \arg n_1)$$

$$2\,\mathrm{Re}\left(n_1 (a_1)^k\right) = 2|n_1| r^k \cos(k\theta + \arg n_1)$$

Sehingga invers transformasi-Z dari suatu persamaan beda dengan akar-akarnya kompleks adalah

$$y(k) = n_0\, \delta(k) + 2|n_1| r^k \cos(k\theta + \arg n_1) + n_3 (a_3)^k + \ldots + n_m (a_m)^m, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Contoh 4.18

Dengan menggunakan metode pecahan parsial, selesaikan transformasi-Z di bawah ini!

$$Y(z) = \frac{z^3}{(z^2 - 2z + 2)(z+1)} \tag{4.40}$$

Jawab:

$$Y(z) = \frac{z^3}{(z^2 - 2z + 2)(z+1)}$$

Menggunakan pecahan parsial, menghasilkan

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{z^2}{(z^2 - 2z + 2)(z+1)} = \frac{n_1}{[z-(1+i)]} + \frac{n_2}{[z-(1-i)]} + \frac{n_3}{(z+1)} \tag{4.41}$$

Untuk mencari n_1, n_2 dan n_3, maka persamaan (4.41) disamakan penyebutnya, diperoleh

$$z^2 = n_1 [z-(1-i)](z+1) + n_2 [z-(1+i)](z+1) + n_3 [z^2 - 2z + 2]$$

untuk $z = -1$, diperoleh

$$n_3 = \frac{1}{5}$$

untuk $z = 1 + i$, diperoleh

$$(1+i)^2 = 2\,i\,(1+i+1)\;n_1$$

$$n_1 = \frac{1}{2+i} = \frac{2}{5} - \frac{1}{5}i$$

untuk $z = 1 + i$, diperoleh

$$(1-i)^2 = -2\,i\,(1-i+1)\;n_2$$

$$n_2 = \frac{1}{2-i} = \frac{2}{5} + \frac{1}{5}i$$

sehingga persamaan (4.41) dapat ditulis

$$\mathrm{Y}(z) = \frac{1/5\,z}{z+1} + \frac{n_1\,z}{z-\lambda} + \frac{\bar{n}_1\,z}{z-\bar{\lambda}}$$

di mana $\lambda = 1 + i$, dan dengan memperhatikan tabel pasangan transformasi-Z yang terdapat pada lembar lampiran, diperoleh

$$y(k) = \frac{1}{5}(-1)^k + n_1\,\lambda^k + \bar{n}_1\,\bar{\lambda}^k$$

tetapi

$$n_1\,\lambda^k + \bar{n}_1\,\bar{\lambda}^k = 2\,\mathrm{Re}\,(n_1\,\lambda^k) = 2\,|\,n_1\,|\,(\sqrt{2})^k \cos\left(\frac{k\,\pi}{4} + \arg n_1\right)$$

di mana $|\,n_1\,| = \frac{1}{5}\sqrt{5}$ dan $\arg\,n_1 = \tan^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = -0.46$ radians. Maka

$$y(k) = \frac{1}{5}(-1)^k + \frac{2}{5}\sqrt{5}(\sqrt{2})^k \cos\left(\frac{k\pi}{4} - 0.46\right). \qquad \square$$

E. Penerapan Transformasi-Z untuk menyelesaikan persamaan beda

a. Persamaan Beda Linear Homogen orde-1 dengan koefisien konstan.

Diberikan persamaan beda linear homogen orde-1 dengan koefisien konstan yaitu

$$y(k+1) + a_0\, y(k) = 0, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

jika diberikan nilai awal $y(0) = y_0$, maka penyelesaian persamaan beda di atas dengan menggunakan transformasi-Z menghasilkan

$$Z\{y(k+1) + a_0\, y(k)\} = Z\{0\}$$

$$Z\{y(k+1)\} + a_0\, Z\{y(k)\} = 0$$

$$z\,Y(z) - y(0)\,z + a_0\,Y(z) = 0$$

$$Y(z)\left[z + a_0\right] - y_0\, z = 0$$

$$Y(z) = \frac{y_0\, z}{z + a_0} = y_0 \frac{z}{z + a_0} = y_0 \frac{z}{z - (-a_0)}$$

Berdasarkan tabel pasangan transformasi-Z pada lembar lampiran, diperoleh

$$y(k) = y_0\, (-a_0)^k$$

Contoh 4.19

Diberikan persamaan beda

$$y(k+1) - 3\, y(k) = 0 \qquad (4.42)$$

dengan nilai awal $y(0) = 5$. Dengan menggunakan transformasi-Z, selesaikan persamaan beda (4.42).

Jawab:

Persamaan (4.42) dikenai transformasi-Z, menghasilkan

$$\mathrm{Z}\{y(k+1)-3\,y(k)\}=\mathrm{Z}\{0\}$$

$$\mathrm{Z}\{y(k+1)\}-3\,\mathrm{Z}\{y(k)\}=\mathrm{Z}\{0\}$$

$$z\,\mathrm{Y}(z)-y(0)\,z-3\,\mathrm{Y}(z)=0$$

$$\mathrm{Y}(z)\,[z-3]-5\,z=0$$

$$\mathrm{Y}(z)=\frac{5\,z}{z-3}=5\,\frac{z}{z-3}$$

Berdasarkan tabel pasangan transformasi-Z pada lembar lampiran, diperoleh

$$y(k)=5\;3^k$$

Penyelesaian ini sesuai dengan penyelesaian pada contoh 3.19 Bab 3. □

b. Persamaan Beda Linear Non Homogen orde-1 dengan koefisien konstan.

Diberikan persamaan beda linear non homogen orde-1 dengan koefisien konstan yaitu

$$y(k+1)+a_0\,y(k)=r(k),\qquad k=0,1,2,\ldots$$

jika diberikan nilai awal $y(0)=y_0$, maka penyelesaian persamaan beda di atas dengan menggunakan transformasi-Z menghasilkan

$$\mathrm{Z}\{y(k+1)+a_0\,y(k)\}=Z\{r(k)\}$$

$$\mathrm{Z}\{y(k+1)\}+a_0\,\mathrm{Z}\{y(k)\}=Z\{r(k)\}$$

$$\left[z\,\mathrm{Y}(z) - y(0)\,z\right] + a_0\,\mathrm{Y}(z) = R(z)$$

$$\mathrm{Y}(z)\left[z + a_0\right] = R(z) + y_0\,z$$

$$\mathrm{Y}(z) = \frac{R(z)}{z + a_0} + \frac{y_0\,z}{z + a_0}$$

$y(k)$ diperoleh dari invers transformasi-Z yaitu

$$y(k) = \mathrm{Z}^{-1}\left\{\frac{R(z)}{z + a_0} + \frac{y_0\,z}{z + a_0}\right\}$$

Contoh 4.20

Diberikan persamaan beda

$$y(k+1) - 2\,y(k) = 1 \tag{4.43}$$

dengan nilai awal $y(0) = 5$. Dengan menggunakan transformasi-Z, selesaikan persamaan beda (4.43)!

Jawab:

Persamaan (4.43) dikenai transformasi-Z, menghasilkan

$$\mathrm{Z}\{y(k+1) - 2\,y(k)\} = \mathrm{Z}\{1\}$$

$$\mathrm{Z}\{y(k+1)\} - 2\,\mathrm{Z}\{y(k)\} = \mathrm{Z}\{1\}$$

$$z\,\mathrm{Z}\{y(k)\} - y(0)\,z - 2\,\mathrm{Z}\{y(k)\} = \frac{z}{z-1}$$

$$\mathrm{Y}(z)\,[z-2] = \frac{z}{z-1} + 5\,z = \frac{z + 5\,z\,(z-1)}{z-1}$$

$$\mathrm{Y}(z) = \frac{5\,z^2 - 4\,z}{(z-1)\,(z-2)}$$

$$\frac{\mathrm{Y}(z)}{z} = \frac{5z-4}{(z-1)(z-2)} = \frac{n_1}{z-1} + \frac{n_2}{z-2} \qquad (4.44)$$

Kedua ruas pada persamaan (4.44) disamakan penyebutnya, sehingga diperoleh

$$5z-4 = n_1(z-2) + n_2(z-1)$$

$$5z-4 = (n_1+n_2)z - 2n_1 - n_2 \qquad (4.45)$$

Membandingkan koefisien-koefisien antara ruas kiri dan ruas kanan pada persamaan (4.45), menghasilkan

$$n_1 + n_2 = 5$$

$$-2n_1 - n_2 = -4$$

Kemudian dengan menggunakan eliminasi, dihasilkan $n_1 = -1$ dan $n_2 = 6$. Sehingga persamaan (4.44) menjadi

$$\frac{\mathrm{Y}(z)}{z} = \frac{-1}{z-1} + \frac{6}{z-2}$$

$$\mathrm{Y}(z) = \frac{-z}{z-1} + \frac{6z}{z-2}$$

Berdasarkan tabel pasangan transformasi-Z pada lembar lampiran, diperoleh

$$y(k) = -(1)^k + 6(2)^k$$

Penyelesaian ini sesuai dengan penyelesaian pada contoh 3.23 Bab 3. □

c. Persamaan Beda Linear Homogen orde-2 dengan koefisien konstan.

Diberikan persamaan beda linear homogen orde-2 dengan koefisien konstan yaitu

$$y(k+2)+a_1\, y(k+1)+a_0\, y(k)=0, \qquad k=0,1,2,...$$

jika diberikan nilai awal $y(0)=y_0$ dan $y(1)=y_1$, maka penyelesaian persamaan beda di atas dengan menggunakan transformasi-Z menghasilkan

$$\mathrm{Z}\{y(k+2)+a_1\, y(k+1)+a_0\, y(k)\}=\mathrm{Z}\{0\}$$

$$\mathrm{Z}\{y(k+2)\}+a_1\,\mathrm{Z}\{y(k+1)\}+a_0\,\mathrm{Z}\{y(k)\}=\mathrm{Z}\{0\}$$

$$\left[z^2\,\mathrm{Z}\{y(k)\}-y(0)\,z^2-y(1)\,z\right]+a_1\left[z\,\mathrm{Z}\{y(k)\}-y(0)\,z\right]+a_0\,\mathrm{Z}\{y(k)\}=0$$

$$\mathrm{Z}\{y(k)\}\left[z^2+a_1\,z+a_0\right]=y_0\,z^2+(y_1+a_1\,y_0)\,z$$

$$\mathrm{Y}(z)=\frac{y_0\,z^2+(y_1+a_1\,y_0)\,z}{\left[z^2+a_1\,z+a_0\right]}$$

$y(k)$ diperoleh dari invers transformasi-Z yaitu

$$y(k)=\mathrm{Z}^{-1}\left\{\frac{y_0\,z^2+(y_1+a_1\,y_0)\,z}{\left[z^2+a_1\,z+a_0\right]}\right\} \qquad \square$$

Contoh 4.21 (akar-akarnya real dan tidak sama)

Diberikan persamaan beda

$$y(k+2)-6\,y(k+1)+8\,y(k)=0 \qquad (4.46)$$

dengan nilai awal $y(0)=0$ dan $y(1)=2$. Dengan menggunakan transformasi-Z, selesaikan persamaan beda (4.46)!

Jawab:

Persamaan (4.46) dikenai transformasi-Z, menghasilkan

$$Z\{y(k+2)-6\,y(k+1)+8\,y(k)\}=Z\{0\}$$

$$Z\{y(k+2)\}-6\,Z\{y(k+1)\}+8\,Z\{y(k)\}=0$$

$$z^2\,Z\{y(k)\}-y(0)\,z^2-y(1)\,z-6[zZ\{y(k)\}-y(0)z]+8\,Z\{y(k)\}=0$$

$$z^2\,Y(z)-2z-6z\,Y(z)+8\,Y(z)=0$$

$$Y(z)\,[z^2-6z+8]=2z$$

$$Y(z)=\frac{2z}{z^2-6z+8}$$

$$\frac{Y(z)}{z}=\frac{2}{(z-4)\,(z-2)}=\frac{n_1}{(z-4)}+\frac{n_2}{(z-2)} \tag{4.47}$$

Kedua ruas pada persamaan (4.47) disamakan penyebutnya, sehingga diperoleh

$$2=n_1\,(z-2)+n_2\,(z-4)$$

$$2=(n_1+n_2)\,z-2\,n_1-4\,n_2 \tag{4.48}$$

Membandingkan koefisien-koefisien antara ruas kiri dan ruas kanan pada persamaan (4.48), menghasilkan

$$n_1+n_2=0$$

$$-2n_1-4n_2=2$$

Kemudian dengan menggunakan eliminasi, dihasilkan $n_1=1$ dan $n_2=-1$.

Sehingga persamaan (4.47) menjadi

$$\frac{Y(z)}{z}=\frac{1}{(z-4)}+\frac{-1}{(z-2)}$$

$$\mathrm{Y}(z) = \frac{z}{z-4} - \frac{z}{z-2}$$

Berdasarkan tabel pasangan transformasi-Z pada lembar lampiran, diperoleh

$$y(k) = 4^k - 2^k$$

Penyelesaian ini sesuai dengan penyelesaian pada contoh 3.27 Bab 3. $\square$

Contoh 4.22 (akar-akarnya real dan sama)

Diberikan persamaan beda

$$y(k+2) - 4\,y(k+1) + 4\,y(k) = 0 \qquad (4.49)$$

dengan nilai awal $y(0) = 1$ dan $y(1) = 3$. Dengan menggunakan transformasi-Z, selesaikan persamaan beda (4.49)!

Jawab:

Persamaan (4.49) dikenai transformasi-Z, menghasilkan

$$\mathrm{Z}\{y(k+2) - 4\ y(k+1) + 4y(k)\} = \mathrm{Z}\{0\}$$

$$\mathrm{Z}\{y(k+2)\} - 4\ \mathrm{Z}\{y(k+1)\} + 4\ \mathrm{Z}\{y(k)\} = 0$$

$$z^2\ \mathrm{Z}\{y(k)\} - y(0)\,z^2 - y(1)\,z - 4\left[z\ \mathrm{Z}\{y(k)\} - y(0)\ z\right] + 4\,\mathrm{Z}\{y(k)\} = 0$$

$$z^2\ \mathrm{Y}(z) - z^2 - 3z - 4z\ \mathrm{Y}(z) + 4z + 4\ \mathrm{Y}(z) = 0$$

$$\mathrm{Y}(z)\left[z^2 - 4z + 4\right] = z^2 - z = z\,(z-1)$$

$$\mathrm{Y}(z) = \frac{z\,(z-1)}{z^2 - 4z + 4}$$

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{z-1}{(z-2)^2} = \frac{n_1}{(z-2)} + \frac{n_2}{(z-2)^2} \tag{4.50}$$

Kedua ruas pada persamaan (4.50) disamakan penyebutnya, sehingga diperoleh

$$z-1 = n_1\,(z-2) + n_2$$

$$z-1 = n_1\,z - 2\,n_1 + n_2 \tag{4.51}$$

Membandingkan koefisien-koefisien antara ruas kiri dan ruas kanan pada persamaan (4.51), dihasilkan

$$n_1 = 1$$

$$-2\,n_1 + n_2 = -1$$

Kemudian dengan menggunakan eliminasi, dihasilkan $n_1 = 1$ dan $n_2 = 1$. Sehingga persamaan (4.50) menjadi

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{1}{z-2} + \frac{1}{(z-2)^2}$$

$$Y(z) = \frac{z}{z-2} + \frac{z}{(z-2)^2} = \frac{z}{z-2} + \frac{1}{2}\frac{2z}{(z-2)^2}$$

Berdasarkan tabel pasangan transformasi-Z pada lembar lampiran, diperoleh

$$y(k) = 2^k + \frac{1}{2}k\;2^k = 2^k\left(1 + \frac{1}{2}k\right) = (k+2)\,2^{k-1}$$

Penyelesaian ini sesuai dengan penyelesaian pada contoh 3.28 Bab 3. $\square$

Contoh 4.23 (akar-akarnya kompleks)

Diberikan persamaan beda

$$y(k+2)+y(k)=0 \tag{4.52}$$

dengan nilai awal $y(0)=0$ dan $y(1)=1$. Dengan menggunakan transformasi-Z, selesaikan persamaan beda (4.52)!

Jawab:

Persamaan (4.52) dikenai transformasi-Z, menghasilkan

$$\mathrm{Z}\{y(k+2)+y(k)\}=\mathrm{Z}\{0\}$$

$$\mathrm{Z}\{y(k+2)\}+\mathrm{Z}\{y(k)\}=0$$

$$z^2\ \mathrm{Z}\{y(k)\}-y(0)\ z^2-y(1)\ z+\mathrm{Z}\{y(k)\}=0$$

$$z^2\ \mathrm{Y}(z)-z+\mathrm{Y}(z)=0$$

$$\mathrm{Y}(z)\left[z^2+1\right]=z$$

$$\frac{\mathrm{Y}(z)}{z}=\frac{1}{z^2+1}=\frac{n_1}{z+i}+\frac{n_2}{z-i} \tag{4.53}$$

Kedua ruas pada persamaan (4.53) disamakan penyebutnya, sehingga diperoleh

$$1=n_1\,(z-i)+n_2\,(z+i)$$

untuk $z=-i$ diperoleh $1=-2\,i\ n_1$ sehingga $n_1=\frac{1}{-2i}=\frac{1}{2}i$,

untuk $z=i$ diperoleh $1=2\,i\ n_2$ sehingga $n_2=\frac{1}{2i}=-\frac{1}{2}i$.

Maka persamaan (4.53) dapat ditulis

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{n_1}{z+i} + \frac{\bar{n}_1}{z-i}$$

$$Y(z) = \frac{n_1 \ z}{z+\lambda} + \frac{\bar{n}_1 \ z}{z+\bar{\lambda}}$$

dengan $n_1 = \frac{1}{2}i$ dan $\lambda = i$.

Berdasarkan tabel pasangan transformasi-Z pada lembar lampiran, diperoleh

$$y(k) = n_1\,(-\lambda)^n + \bar{n}_1\,(-\bar{\lambda})^n$$

Tetapi diketahui bahwa

$$n_1\,(-\lambda)^n + \bar{n}_1\,(-\bar{\lambda})^n = 2\,\mathrm{Re}\,\lfloor n_1\,(-\lambda)^n \rfloor = 2\,|\,n_1\,|\,r^k \cos\,(k\,\theta + \arg\,n_1)$$

Sebelum menghitung $2\mathrm{Re}\lfloor n_1\,(-\lambda)^n \rfloor$, perlu dicari $|\,n_1\,|$, $\arg n_1$, r, θ, yaitu

$$n_1 = \frac{1}{2}i, \qquad |\,n_1\,| = \sqrt{(1/2)^2} = 1/2, \qquad \arg n_1 = \theta = \tan^{-1}\frac{(1/2)}{0} = \frac{\pi}{2}$$

sedangkan

$$\lambda = i, \qquad r = \sqrt{1^2} = 1, \qquad \theta = \tan^{-1}\frac{(1/2)}{0} = \frac{\pi}{2}$$

Telah diketahui juga, menurut teorema De Moivre, bahwa

$$\lambda^{\,k} = cis\,\frac{k\pi}{2}$$

sehingga

$$y(k) = n_1\,(-\lambda)^n + \bar{n}_1\,(-\bar{\lambda})^n = 2\,\mathrm{Re}\,\lfloor n_1\,(-\lambda)^n \rfloor$$

$$= -2\,|\,n_1\,|\,r^k \cos\,(k\,\theta + \arg\,n_1)$$

$$= -2\left(\frac{1}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$$= -\cos\left(\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)$$

Untuk sebarang θ berlaku

$$\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin\theta$$

Jadi $y(k) = \sin\frac{k\pi}{2}$ adalah penyelesaian yang memenuhi nilai awal yang diberikan.

Penyelesaian ini sesuai dengan penyelesaian pada contoh 3.29 Bab 3. $\square$

d. Persamaan Beda Linear Non Homogen orde-2 dengan koefisien konstan

Diberikan persamaan beda linear non homogen orde-2 dengan koefisien konstan yaitu

$$y(k+2) + a_1\, y(k+1) + a_0\, y(k) = r(k), \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

jika diberikan nilai awal $y(0) = y_0$ dan $y(1) = y_1$, maka penyelesaian persamaan beda di atas dengan menggunakan transformasi-Z menghasilkan

$$\mathrm{Z}\{y(k+2) + a_1\, y(k+1) + a_0\, y(k)\} = \mathrm{Z}\{r(k)\}$$

$$\mathrm{Z}\{y(k+2)\} + a_1\, \mathrm{Z}\{y(k+1)\} + a_0\, \mathrm{Z}\{y(k)\} = \mathrm{Z}\{r(k)\}$$

$$\left[z^2\, \mathrm{Z}\{y(k)\} - y(0)\, z^2 - y(1)\, z\right] + a_1\left[z\, \mathrm{Z}\{y(k)\} - y(0)\, z\right] + a_0\, \mathrm{Z}\{y(k)\} = \mathrm{Z}\{r(k)\}$$

$$\mathrm{Z}\{y(k)\}\left[z^2 + a_1\, z + a_0\right] = y_0\, z^2 + (y_1 + a_1\, y_0)\, z + \mathrm{Z}\{r(k)\}$$

$$\mathrm{Y}(z) = \frac{y_0\, z^2 + (y_1 + a_1\, y_0)\, z + \mathrm{Z}\{r(k)\}}{\left[z^2 + a_1\, z + a_0\right]}$$

$y(k)$ diperoleh dari invers transformasi-Z dan ditulis

$$y(k) = \mathrm{Z}^{-1}\left\{\frac{y_0\, z^2 + (y_1 + a_1\, y_0) z + \mathrm{Z}\{r(k)\}}{\left[z^2 + a_1\, z + a_0\right]}\right\}$$

Contoh 4.24

Diberikan persamaan beda

$$y(k+2) - 6\, y(k+1) + 8\, y(k) = 2^k \tag{4.54}$$

dengan nilai awal $y(0) = 0$ dan $y(1) = 2$. Dengan menggunakan transformasi-Z, selesaikan persamaan beda (4.54)!

Jawab:

Persamaan (4.54) dikenai transformasi-Z, menghasilkan

$$\mathrm{Z}\{y(k+2) - 6\, y(k+1) + 8\, y(k)\} = \mathrm{Z}\{2^k\}$$

$$\mathrm{Z}\{y(k+2)\} - 6\, \mathrm{Z}\{y(k+1)\} + 8\, \mathrm{Z}\{y(k)\} = \frac{z}{z-2}$$

$$z^2\, \mathrm{Z}\{y(k)\} - y(0)\, z^2 - y(1)\, z - 6\left[z\, \mathrm{Z}\{y(k)\} - y(0)\, z\right] + 8\, \mathrm{Z}\{y(k)\} = \frac{z}{z-2}$$

$$\mathrm{Y}(z)\,[z^2 - 6z + 8] - 2z = \frac{z}{z-2}$$

$$\mathrm{Y}(z)\,[z^2 - 6z + 8] = \frac{2\, z^2 - 3\, z}{z-2}$$

$$\mathrm{Y}(z) = \frac{2\, z^2 - 3\, z}{(z-2)\,(z^2 - 6z + 8)} = \frac{2\, z^2 - 3\, z}{(z-4)\,(z-2)^2}$$

$$\frac{\mathrm{Y}(z)}{z}=\frac{2z-3}{(z-4)\,(z-2)^2}=\frac{n_1}{z-4}+\frac{n_2}{z-2}+\frac{n_3}{(z-2)^2} \tag{4.55}$$

Kedua ruas pada persamaan (4.55) disamakan penyebutnya, sehingga diperoleh

$$2\,z-3=n_1\,(z-2)^2+n_2\,(z-2)\,(z-4)+n_3\,(z-4) \tag{4.56}$$

jika diberikan $z=2$ ke dalam persamaan (4.56), diperoleh

$$1=-2n_3\,,\qquad n_3=-\frac{1}{2}$$

jika diberikan $z=4$, diperoleh

$$5=4n_1\,,\qquad n_1=\frac{5}{4}$$

jika diberikan $z=1$, diperoleh

$$-1=n_1+3\,n_2-3\,n_3\,,\qquad n_2=-\frac{5}{4}$$

Sehingga persamaan (4.55) menjadi

$$\frac{\mathrm{Y}(z)}{z}=\frac{(5/4)}{z-4}-\frac{(5/4)}{z-2}-\frac{(1/2)}{(z-2)^2}$$

$$\mathrm{Y}(z)=\frac{(5/4)\,z}{z-4}-\frac{(5/4)\,z}{z-2}-\frac{(1/2)\,z}{(z-2)^2}=\frac{(5/4)\,z}{z-4}-\frac{(5/4)\,z}{z-2}-\frac{(1/4)\,2\,z}{(z-2)^2}$$

Berdasarkan tabel pasangan transformasi-Z pada lembar lampiran, diperoleh

$$y(k)=(5/4)\,4^k-(5/4)\,2^k-(1/4)\,k\;2^k$$

Penyelesaian ini sesuai dengan penyelesaian pada contoh 3.32 Bab 3. $\square$

BAB V

PENUTUP

Dalam kehidupan nyata, banyak kasus yang tidak dapat dimodelkan dengan menggunakan persamaan diferensial, contohnya adalah menghitung pendapatan nasional, sensus penduduk, menghitung bunga bank (bunga tunggal dan majemuk) yang menggunakan fungsi diskret. Untuk kasus-kasus demikian, digunakan persamaan beda untuk memodelkannya.

Ada beberapa metode yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan beda linear non homogen orde-2 dengan koefisien konstan, antara lain metode koefisien taktentu dan variasi parameter. Tetapi dalam skripisi ini, hanya dibahas metode koefisien taktentu.

Metode lain yang juga dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan beda linear dengan koefisien konstan adalah transformasi-Z. Transformasi-Z menghasilkan penyelesaian sebagai suatu fungsi transformasi dalam variabel z. Kemudian invers transformasi-Z digunakan untuk mengembalikan fungsi transformasi dalam variabel z ke fungsi diskret $y(k)$. Dengan menggunakan definisi transformasi-Z, dapat dicari transformasi-Z dari beberapa fungsi elementer seperti yang dinyatakan pada lembar lampiran. Metode transformasi-Z dalam skripsi ini secara khusus digunakan untuk menyelesaikan persamaan beda linear koefisien konstan orde-1 dan orde-2. Berbeda dengan metode yang lain, misalnya metode koefisien tak tentu, metode transformasi-Z memberikan penyelesaian partikular secara langsung tanpa perlu mencari penyelesaian umumnya dan penyelesaian tersebut memenuhi nilai awal yang diberikan Dengan menggunakan metode transformasi-Z, persamaan beda linear dengan koefisien konstan dapat diselesaikan dengan langkah-langkah yang cukup mudah.

Berikut ini merupakan prosedur transformasi-Z dalam menyelesaikan persamaan beda linear orde-1 dan orde-2 dengan koefisien konstan:

1. Ambil transformasi-Z pada kedua ruas persamaan beda.
2. Gunakan sifat-sifat transformasi-Z dan masukkan nilai awal sehingga diperoleh persamaan aljabar dalam $\mathrm{Y}(z)$ dan z. $\mathrm{Y}(z)$ merupakan transformasi-Z dari persamaan beda yang diberikan.
3. $\mathrm{Y}(z)$ kemudian diselesaikan dengan menggunakan metode pembagian panjang atau metode pecahan parsial.
4. Tentukan invers transformasi-Z dengan menggunakan tabel pasangan transformasi-Z sehingga diperoleh fungsi diskret $y(k)$.

Tiga metode dasar yang dapat dipakai untuk mendapatkan fungsi diskret $y(k)$ dari transformasi-Z, $\mathrm{Z}\{y(k)\}$ yaitu: pembalikan integral kompleks, pembalikan dengan pembagian panjang (untuk k yang terbatas), dan pembalikan dengan pecahan parsial (untuk $k \geq 0$). Tetapi yang dibahas dalam skripsi ini hanya metode pembagian panjang dan metode pecahan parsial.

Tidak dibahasnya metode pembalikan integral kompleks menyebabkan tidak bisa dibandingkannya keefektifan antara penyelesaian persamaan beda linear non homogen koefisien konstan orde-2 dengan menggunakan metode koefisien taktentu dengan transformasi-Z. Lebih jauh, apabila metode pembalikan integral kompleks dibahas, dapat ditunjukkan bahwa transformasi-Z dapat digunakan untuk menyelesaiakan persamaan beda yang memuat fungsi $r(k)$ yang tidak diberikan pada tabel bentuk penyelesaian percobaan, sebagai contoh $r(k) = a^k / k!$ atau $r(k) = e^{-\varpi k}\, y(k)$, yang mana hal ini tidak dapat diselesaikan dengan menggunakan metode koefisien taktentu.

DAFTAR PUSTAKA

Boyce, E.W., DiPrima, C.R. (2001). *Elementary Differential Equations (7th edition)*. America: John Wiley and Sons, Inc.

DeFatta, J.D., Lucas, G.J., Hodgkiss, S.W., (1988). *Digital Signal Processing: A System Design Approach*. Singapore: John Wiley and Sons Pte. Ltd.

Gabel, A.R., Roberts, A.R., Wospakrik, J.H. (1988). *Sinyal dan Sistem Linear (3rd edition)*. Jakarta: PT Erlangga.

Harman, L.T., Dabney, B.J., Richert, J.N. (2000). *Advanced Engineering Mathematics with MATLAB (2nd edition)*. America: Brock/Cole.

Ifeachor, C.E., Jervis, W.B. (1993). *Digital Signal Processing*. England: Addison-Wesley Publishing Company.

Kamen, W.E, Heck, S.B. (1997). *Fundamentals of Signals and Systems using MATLAB*. New Jersey: Prentice-Hall, Inc.

Oppenheim, V.A., Schafer, W.R. (1989). *Discrete-Time Signal Processing*. New Jersey: Prentice-Hall, Inc.

Oppenheim, V.A., Willsky, S.A., Nawab, S.H. (1997). *Sinyal dan Sistem (2nd edition)*. Jakarta: PT Erlangga.

Phillips, L.C., Parr, M.J., Riskin, A.E. (2003). *Signals, Systems, and Transforms (3rd edition)*. America: Pearson Education, Inc.

Triyani, G. (1997). *Persamaan Diferensi.* Skripsi Jurusan Pendidikan Matematika (tidak dipublikasikan). Yogyakarta: Universitas Sanata Dharma.

Tutoyo, A. *Diktat Kuliah: Kalkulus IV*. Yogyakarta: Universitas Sanata Dharma.

Tabel Pasangan Transformasi-Z

No	$y(k)$ untuk $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$ $y(k) = 0$ untuk $k = -1, -2, -3, \ldots$	$Y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} y(k)\, z^{-k}$
1.	1	$z/(z-1)$
2.	a^k	$z/(z-a)$
3.	a^{k-1}	$1/(z-a)$
4.	k	$z/(z-1)^2$
5.	k^2	$z(z+1)/(z-1)^3$
6.	k^3	$z(z^2+4z+1)/(z-1)^4$
7.	k^n	$(-1)^n D^n \left(\frac{z}{z-1}\right);\ D = z\,\frac{d}{dz}$
8.	$k\, a^k$	$a\,z/(z-a)^2$
9.	$k^2\, a^k$	$a\,z(z+a)/(z-a)^3$
10.	$k^3\, a^k$	$a\,z(z^2+4\,a\,z+a^2)/(z-a)^4$
11.	$k^n\, a^k$	$(-1)^n D^n \left(\frac{z}{z-a}\right);\ D = z\,\frac{d}{dz}$
12.	$\sin\, k\varpi$	$z \sin\varpi/(z^2 - 2\,z\cos\varpi + 1)$
13.	$\cos\, k\varpi$	$z\,(z-\cos\varpi)/(z^2 - 2\,z\cos\varpi + 1)$
14.	$a^k \sin\, k\varpi$	$a\,z \sin(k\,\varpi)/(z^2 - 2\,a\,z\cos\varpi + a^2)$
15.	$a^k \cos\, k\varpi$	$z\,(z - a\cos\varpi)/(z^2 - 2\,a\,z\cos\varpi + a^2)$
16.	$\delta_0(k)$	1
17.	$\delta_m(k)$	z^{-m}
18.	$a^k\ /\ k!$	$e^{(a/z)}$
19.	$\cosh\, k\varpi$	$z\,(z-\cosh\varpi)/(z^2 - 2\,z\cosh\varpi + 1)$
20.	$\sinh\, k\varpi$	$z\sinh\varpi/(z^2 - 2\,z\cosh\varpi + 1)$
21.	$\frac{1}{k},\ k > 0$	$\ln\left(z/z-1\right)$
22.	$e^{-\varpi k}\, y(k)$	$Y\left(e^{\varpi} z\right)$
23.	$k^{(2)} = k(k-1)$	$2z/(z-1)^3$
24.	$k^{(3)} = k(k-1)(k-2)$	$3!\,z/(z-1)^4$
25.	$k^{(n)} = k(k-1)\ldots(k-n+1)$	$n!\,z/(z-1)^{n+1}$
26.	$y(k-n)$	$z^{-n}\ Y(z)$
27.	$y(k+n)$	$z^{-n}\ Y(z) - \sum_{r=0}^{n-1} y(r)\, z^{n-r}$

Tabel Jumlahan Berhingga

No	Jumlahan	Jumlahan Berhingga
1	$\sum_{n=1}^{k} n$	$\frac{k(k+1)}{2}$
2	$\sum_{n=1}^{k} n^2$	$\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$
3	$\sum_{n=1}^{k} n^3$	$\left[\frac{k(k+1)}{2}\right]^2$
4	$\sum_{n=1}^{k} n^4$	$\frac{k(6k^4+15k^3+10k^2-1)}{30}$
5	$\sum_{n=1}^{k} a^n$	$\begin{cases}(a^{k+1}-a)/(a-1) & \text{jika } a \neq 1 \\ k & \text{jika } a = 1\end{cases}$
6	$\sum_{n=1}^{k} n\,a^n,\ a \neq 1$	$\frac{(a-1)(k+1)a^{k+1}-a^{k+2}+a}{(a-1)^2}$