TEOREMA CARATHEODORY PADA HIMPUNAN KONVEKS DALAM RUANG EUKLIDES DIMENSI – *n*

SKRIPSI

Diajukan Untuk Memenuhi Salah Satu Syarat

Memperoleh Gelar Sarjana Pendidikan

Program Studi Pendidikan Matematika

Disusun Oleh:

Yohanes Lesmono Wijoyo

NIM: 021414002

Program Studi Pendidikan Matematika

Jurusan Pendidikan Matematika Dan Ilmu Pengetahuan Alam

Fakultas Keguruan Dan Ilmu Pendidikan

Universitas Sanata Dharma

2007

SKRIPSI

TEOREMA CARATHEODORY PADA HIMPUNAN KONVEKS DALAM RUANG EUKLIDES DIMENSI – n

Oleh

Yohanes Lesmono Wijoyo

NIM: 021414002

Telah disetujui oleh:

Pembimbing

M. Andy Rudhito S.Pd., M.Si.

Tanggal, 20 Juni 2007

SKRIPSI

TEOREMA CARATHEODORY PADA HIMPUNAN KONVEKS DALAM RUANG EUKLIDES DIMENSI – *n*

Dipersiapkan dan ditulis oleh:
Yohanes Lesmono Wijoyo
NIM: 021414002

Telah dipertahankan di depan Panitia Penguji
pada hari rabu tanggal 27 Juni 2007
dan dinyatakan memenuhi syarat

Susunan Panitia Penguji

	Nama Lengkap	Tanda Tangan
Ketua	: Drs. Severinus Domi, M.Si.	....
Sekretaris	: M. Andy Rudhito, S.Pd., M.Si.	....
Anggota	: M. Andy Rudhito, S.Pd., M.Si.	....
Anggota	: Y. G. Hartono, S.Si., M.Sc.	....
Anggota	: Hongki Julie, S.Pd., M.Si.	....

Yogyakarta, 27 Juni 2007

Fakultas Keguruan Dan Ilmu Pendidikan
Universitas Sanata Dharma
Dekan

Drs. Tarsisius Sarkim, M.Ed., Ph.D.

MOTTO

Janganlah hendaknya kerajinanmu kendor,
biarlah rohmu menyala-nyala dan layanilah Tuhan.
(Roma 12:11)

Kupersembahkan karya ilmiah ini kepada

Tuhan yang kekal sebagai penunjuk jalan hidupku

Bapak (alm) dan ibuku yang mengharapkan kesuksesan bagi putra-putrinya

Mas Wawan, Mas Momon dan Dian yang tersayang

Serta semua orang yang telah berjasa dalam hidupku sampai saat ini

PERNYATAAN KEASLIAN KARYA

Saya menyatakan dengan sesungguhnya bahwa skripsi yang saya tulis ini tidak memuat karya atau bagian karya orang lain kecuali yang telah disebutkan dalam kutipan dan daftar pustaka sebagaimana layaknya karya ilmiah.

Yogyakarta, 27 Juni 2007

Penulis,

Y. Lesmono Wijoyo

ABSTRAK

TEOREMA CARATHEODORY PADA HIMPUNAN KONVEKS DALAM RUANG EUKLIDES DIMENSI – *n*

Tujuan dari penulisan skripsi ini adalah membahas i.) sifat-sifat dasar himpunan konveks dalam $\mathbb{R}^n$, dan ii.) konsep dari Teorema Caratheodory beserta konsep-konsep yang mendasarinya.

Metode yang akan digunakan dalam penulisan ini adalah metode studi pustaka, yaitu dengan mempelajari dan memahami beberapa bagian dari buku acuan yang digunakan.

Hasil dari penulisan ini yakni diperolehnya suatu Teorema Caratheodory yang mengatakan bahwa untuk sebarang $A \subset \mathbb{R}^n$ dan sebarang $\mathbf{x} \in$ co(A), co(A) adalah konveks hull himpunan A, maka ada n + 1 vektor-vektor $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{n+1} \in A$ dan vektor $\mathbf{p} \in \mathrm{P}_{n+1}$, sedemikian sehingga:

$$\mathbf{x} = p_1\mathbf{x}_1 + \ldots + p_{n+1}\mathbf{x}_{n+1}$$

di mana

$$P_{n+1} = \left\{ \mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_{n+1})^T \mid p_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n+1} p_i = 1 \right\}$$

ABSTRACT

CARATHEODORY'S THEOREM ON THE CONVEX SET IN *n*-DIMENSIONAL EUCLIDEAN SPACE

The aims of this thesis are to discuss i.) the basic concepts of convex set in $\mathbb{R}^n$, and ii.) concept of Caratheodory's Theorem and its base.

The method used in this thesis is literature study method, in which the researcher learn some parts of the books which were used as references.

The result of this study is Caratheodory's Theorem which stated that for any $A \subset \mathbb{R}^n$ and any $\mathbf{x} \in$ co(A), co(A) is convex hull of set A, then there exist $n+1$ vectors $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{n+1} \in A$ and vector $\mathbf{p} \in P_{n+1}$, such that

$$\mathbf{x} = p_1\mathbf{x}_1 + \ldots + p_{n+1}\mathbf{x}_{n+1}$$

where

$$P_{n+1} = \left\{ \mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_{n+1})^T \mid p_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n+1} p_i = 1 \right\}$$

KATA PENGANTAR

Puji syukur kepada Allah Bapa di surga atas rahmat dan karuniaNya sehingga penulis mampu menyelesaikan skripsi ini.

Dalam penulisan skripsi ini penulis banyak mengalami hambatan. Namun demikian banyak pihak yang telah turut serta membantu penulis menyelesaikan skripsi ini. Oleh karena itu dalam kesempatan ini penulis ingin mengucapkan banyak terima kasih khususnya kepada:

1. Tuhan yang kekal sebagai pemberi rahmat dan karunia bagi semua orang.
2. Bapak M. Andy Rudhito selaku Ketua Program Studi Pendidikan Matematika dan juga selaku dosen pembimbing penyusunan skripsi ini.
3. Bapak Y. G. Hartono, S.Si., M.Sc. dan Bapak Hongki Julie, S.Pd., M.Si. selaku dosen penguji.
4. Ibu Domesia Novi Handayani S.Pd. selaku dosen pembimbing akademik.
5. Bapak Nardjo dan Bapak Sugeng yang membantu bidang administrasi.
6. Ibuku, Mas Wawan, Mas Momon, dan Dian yang setia memberi semangat.
7. Teman-teman Pendidikan Matematika angkatan 2002.
8. Teman-teman satu jurusan Pendidikan MIPA.
9. Teman-teman kos: Mang Juhai, Agustinus, Dono, Dagdo, Nata, Kentrung, Budi, Andika, Niko, Krisna.
10. Semua pihak yang tidak dapat disebutkan satu per satu.

Dalam dunia pendidikan, setiap manusia dididik menjadi manusia yang dewasa susila. Untuk menuju ke kedewasaan yang bersusila ini manusia perlu belajar seumur hidupnya dari lingkungan sosial mereka.

Penulis sadar bahwa dalam segala hal yang dilakukan, baik perilaku maupun kata-kata, masih jauh dari sikap manusia yang dewasa susila. Oleh karena itu pada kesempatan ini penulis juga ingin menyampaikan permohonan maaf yang sebesar-besarnya kepada semua pihak atas segala tindakan dan tingkah laku yang kurang berkenan. Semoga Tuhan berkenan memandang niat baik kita. Amin.

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

BAB I

PENDAHULUAN

A. Latar Belakang

Pada umumnya, masalah-masalah optimisasi selalu berkaitan dengan memaksimumkan atau meminimumkan fungsi sasaran tanpa kendala atau dengan kendala. Salah satu cabang permasalahan optimisasi yang ada adalah masalah optimisasi konveks, yakni jika fungsi sasaran dan fungsi kendalanya bersifat konveks.

Untuk suatu himpunan *C*, *C* dikatakan konveks jika sebarang dua vektor $\mathbf{x}_1$ dan $\mathbf{x}_2 \in C$ maka segmen garis tertutup $[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2]$ juga termuat dalam *C*, dan suatu titik $\mathbf{x}$ dikatakan sebagai titik ekstrim himpunan konveks *C* jika dan hanya jika:

1. $\{\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x}_1 + \beta\mathbf{x}_2,\ \alpha > 0,\ \beta > 0,\ \alpha + \beta = 1,\ \mathbf{x}_i \in C\} \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2$.
2. Himpunan $C \setminus \{\mathbf{x}\}$ masih tetap konveks.
3. Tidak ada kombinasi konveks $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathbf{x}_i$ selain $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2 = \ldots = \mathbf{x}_k = \mathbf{x}$.

Untuk mengetahui syarat nomor 3 di atas, perlu dibahas mengenai konsep-konsep dasar dari kombinasi konveks pada himpunan konveks *C*.

Skripsi ini akan membahas mengenai sifat-sifat dasar himpunan konveks dalam ruang Euklides dimensi-*n*. Selanjutnya dari sifat-sifat dasar tersebut secara khusus akan diturunkan Teorema Caratheodory, yaitu teorema tentang kombinasi konveks dalam suatu himpunan konveks *C*.

B. Perumusan Masalah

Dari uraian tersebut, masalah yang akan dibahas dalam skripsi ini adalah

1. Bagaimanakah sifat-sifat dasar himpunan konveks dalam $\mathbb{R}^n$?
2. Bagaimanakah konsep dari Teorema Caratheodory beserta konsep-konsep yang mendasarinya?

C. Tujuan Penulisan

Tujuan dari penulisan skripsi ini adalah membahas:

1. Sifat-sifat dasar himpunan konveks dalam $\mathbb{R}^n$, dan
2. Konsep dari Teorema Caratheodory beserta konsep-konsep yang mendasarinya.

D. Manfaat Penulisan

Teorema Caratheodory dapat digunakan sebagai acuan untuk menunjukkan apakah suatu vektor dalam himpunan konveks dapat ditulis sebagai kombinasi konveks dari vektor-vektor yang lainnya atau tidak. Jika tidak maka vektor tersebut memenuhi salah satu kriteria sebagai titik ekstrim himpunan konveks.

E. Pembatasan Masalah

Pembahasan dalam skripsi ini hanya dibatasi pada himpunan konveks yang tidak kosong. Titik ekstrim himpunan konveks juga tidak dibahas di dalamnya.

F. Metode Penulisan

Metode yang akan digunakan dalam penulisan ini adalah metode studi pustaka, yaitu dengan mempelajari dan memahami beberapa bagian dari buku acuan yang digunakan.

G. Sistematika Penulisan

BAB I PENDAHULUAN

A. Latar Belakang

B. Perumusan Masalah

C. Tujuan Penulisan

D. Manfaat Penulisan

E. Pembatasan Masalah

F. Metode Penulisan

G. Sistematika Penulisan

H. Materi Prasyarat

BAB II LANDASAN TEORI

A. Vektor

B. Ruang Vektor

C. Subruang Vektor

D. Kombinasi Linear dan Kebebasan Linear

E. Basis

F. Perkalian Himpunan

G. Topologi Metrik Dimensi – n

H. Materi Prasyarat

Dalam skripsi ini, diasumsikan pembaca telah mengikuti perkuliahan Logika dan Teori Himpunan, Aljabar Matrik danVektor, Geometri Analitik Ruang, Baris dan Deret dan Kalkulus Peubah Banyak.

BAB II

LANDASAN TEORI

A. Vektor

Vektor dalam $\mathbb{R}^2$ dapat dinyatakan dengan matriks berordo 2×1, yaitu: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, dan dalam $\mathbb{R}^3$ dapat dinyatakan dengan matriks berordo 3×1, yaitu: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, dengan x_1, x_2, x_3 adalah bilangan-bilangan real.

Secara generalisasi, dapat didefinisikan $\mathbb{R}^n$ dengan cara aljabar, karena visualisasi geometris tidak dapat melebihi $\mathbb{R}^3$.

Definisi 2.A.1 Ruang Euklides Dimensi-*n*

Himpunan semua matriks berordo $n\times1$ dengan elemen-elemen bilangan real, disebut *ruang Euklides berdimensi–n*, dan dilambangkan dengan $\mathbb{R}^n$.

Elemen-elemen dalam $\mathbb{R}^n$ disebut sebagai vektor. Vektor $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$ merupakan matriks berordo $n\times1$. Selanjutnya vektor $\mathbf{x}$ ditulis sebagai $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$. Bilangan real x_i, $i = 1,2,...,n$ disebut komponen dari vektor $\mathbf{x}$. Elemen-elemen dalam $\mathbb{R}$ disebut sebagai skalar. ■

Definisi 2.A.2 Operasi Penjumlahan dan Perkalian Vektor dengan Skalar

Operasi penjumlahan dan *perkalian vektor* dengan skalar dalam $\mathbb{R}^n$ didefinisikan sebagai berikut: jika $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ dan $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)^T$ adalah vektor-vektor dalam $\mathbb{R}^n$ dan $\alpha \in \mathbb{R}$, maka

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)^T \quad \text{dan} \quad \alpha\mathbf{x} = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n)^T$$

Definisi 2.A.3 Operasi Pengurangan Vektor

Suatu vektor dalam $\mathbb{R}^n$ yang semua komponennya sama dengan nol disebut sebagai *vektor nol* dan dinotasikan dengan $\mathbf{0} = (0,0,\ldots,0)^T$.

Jika $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ sebarang vektor dalam $\mathbb{R}^n$, maka vektor $(-x_1, -x_2, \ldots, -x_n)^T$ disebut sebagai *negatif* (atau invers terhadap operasi penjumlahan) dari $\mathbf{x}$ dan dilambangkan dengan $-\mathbf{x}$.

Operasi pengurangan dalam $\mathbb{R}^n$ didefinisikan sebagai berikut:

Untuk semua $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ dan semua $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)^T$ dalam $\mathbb{R}^n$, berlaku:

$$\mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{x} + (-\mathbf{y})$$

$$\mathbf{x} - \mathbf{y} = (x_1 - y_1, x_2 - y_2, \ldots, x_n - y_n)^T$$

Teorema 2.A.1

Untuk setiap $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ dan skalar $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, berlaku:

a. $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ dan $\alpha\mathbf{x} \in \mathbb{R}$.

b. $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$.

c. $\mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z}$.

d. $\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x}$.

e. $\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{0}$.

f. $\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}$.

g. $(\alpha + \beta)\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{x}$.

h. $(\alpha\beta)\mathbf{x} = \alpha(\beta\mathbf{x})$.

i. $1\mathbf{x} = \mathbf{x}$.

Pembuktian dapat dilihat pada James Stewart, 1999: 826. ■

Definisi 2.A.4 Perkalian Skalar Dua Vektor

Perkalian skalar dua vektor **x** dan **y** dalam $\mathbb{R}^n$, dinotasikan dengan $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ dan didefinisikan sebagai: $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$

Definisi 2.A.5 Panjang Vektor

Panjang vektor **x** dalam $\mathbb{R}^n$, dinotasikan dengan $\|\mathbf{x}\|$ dan didefinisikan sebagai:

$$\|\mathbf{x}\| = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle^{1/2} = \left[\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} \right]^{1/2}$$

Teorema 2.A.2

Untuk setiap **x**, **y**, **z** $\in \mathbb{R}^n$ dan skalar $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, berlaku:

a. $\langle \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = \alpha\langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle + \beta\langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle$.

b. $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle$.

c. $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0$.

d. $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0$ *bila dan hanya bila* $\mathbf{x} = \mathbf{0}$

Bukti:

Ambil tiga elemen sebarang $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$, maka $x_i, y_i, z_i \in \mathbb{R}$ di mana $i = 1,2,\ldots,n$ berturut-turut adalah komponen dari **x**, **y**, **z**; dan ambil sebarang $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$; maka:

a.
$$\begin{aligned}
\langle \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle &= \sum_{i=1}^{n} (\alpha x_i + \beta y_i) z_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} (\alpha x_i z_i + \beta y_i z_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (\alpha x_i z_i) + \sum_{i=1}^{n} (\beta y_i z_i) \\
&= \alpha \left(\sum_{i=1}^{n} x_i z_i \right) + \beta \left(\sum_{i=1}^{n} y_i z_i \right) \\
&= \alpha\langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle + \beta\langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle.
\end{aligned}$$

b.
$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} y_i x_i$$

$$= \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle .$$

c. $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geq 0$.

d. $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0$ bhb $x_1^2 = x_2^2 = \ldots = x_n^2 = 0$

bhb $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$

bhb $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ∎

Definisi 2.A.6 Besar Sudut

θ adalah *besar sudut* antara vektor **x** dan vektor **y** yang tidak nol di mana $0 \leq \theta \leq \pi$.

Teorema 2.A.3

Jika θ adalah besar sudut antara vektor **x** dan vektor **y**, maka berlaku

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| \cos \theta$$

Pembuktian dapat dilihat pada James Stewart, 1999: 831.

Akibat 2.A.1

Jika θ adalah besar sudut antara dua vektor **x** dan **y** yang tidak nol maka

$$\cos \theta = \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|}$$

Akibat 2.A.2

Dua vektor **x** dan **y** dalam $\mathbb{R}^n$, dikatakan *saling tegak lurus* atau *ortogonal* jika $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$. ■

B. Ruang Vektor

Suatu vektor dengan komponen sebanyak *n* biasanya disebut sebagai vektor berdimensi *n*. Suatu koleksi (kumpulan) yang lengkap terdiri dari semua vektor yang berkomponen sebanyak *n* di mana hal-hal tentang *penjumlahan* dan *perkalian* masih tetap berlaku bagi vektor-vektor tersebut disebut ruang vektor.

Definisi 2.B Ruang Vektor

Misalkan *V* adalah himpunan di mana didefinisikan operasi-operasi penjumlahan dan perkalian dengan skalar. Dengan ini kita mengartikan bahwa untuk setiap pasang elemen-elemen **x** dan **y** di dalam *V*, kita dapat mengasosiasikannya dengan elemen **x** + **y** yang tunggal yang juga berada di *V*, dan dengan setiap elemen **x** di *V* dan setiap skalar α, kita dapat mengasosiasikannya dengan elemen $\alpha\mathbf{x}$ yang tunggal di dalam *V*. Himpunan *V* bersama-sama dengan operasi-operasi penjumlahan dan perkalian dengan skalar dikatakan membentuk suatu *ruang vektor* jika aksioma-aksioma berikut dipenuhi:

B.1. $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$ untuk setiap **x** dan **y** di *V*.

B.2. $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$ untuk setiap **x**, **y** dan **z** di *V*.

B.3. Terdapat elemen $\mathbf{0}$ di V sehingga $\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x}$ untuk setiap $\mathbf{x} \in V$.

B.4. Untuk setiap $\mathbf{x} \in V$, terdapat elemen $-\mathbf{x}$ di V sehingga $\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{0}$.

B.5. $\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}$ untuk setiap skalar α dan setiap $\mathbf{x}$ dan $\mathbf{y}$ di V.

B.6. $(\alpha + \beta)\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{x}$ untuk setiap skalar α dan β dan setiap $\mathbf{x} \in V$.

B.7. $(\alpha\beta)\mathbf{x} = \alpha(\beta\mathbf{x})$ untuk setiap skalar α dan β dan setiap $\mathbf{x} \in V$.

B.8. $1\mathbf{x} = \mathbf{x}$ untuk setiap $\mathbf{x} \in V$.

Elemen-elemen dalam V disebut *vektor*. Ruang vektor yang didefinisikan di atas sering juga disebut *ruang vektor real*, karena skalar yang digunakan adalah bilangan-bilangan real.

Teorema 2.B

Jika V adalah ruang vektor dan $\mathbf{x}$ adalah sebarang elemen dari V, maka:

a. $0\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

b. $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{0}$ berakibat $\mathbf{y} = -\mathbf{x}$ (artinya, *invers penjumlahan* dari $\mathbf{x}$ adalah tunggal).

c. $(-1)\mathbf{x} = -\mathbf{x}$.

Pembuktian dapat dilihat pada Steven J. Leon, 2001: 107. ■

C. Subruang Vektor

Suatu himpunan bagian W dari suatu ruang vektor V dikatakan suatu subruang dari V jika W adalah suatu ruang vektor yang tertutup terhadap operasi penjumlahan dan perkalian dengan skalar yang didefinisikan pada V.

Definisi 2.C.1 Subruang

Jika S adalah subhimpunan tak kosong dari suatu ruang vektor V, dan S memenuhi syarat-syarat berikut:

(i) $\alpha\mathbf{x} \in S$ jika $\mathbf{x} \in S$ untuk sebarang skalar α.

(ii) $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in S$ jika $\mathbf{x} \in S$ dan $\mathbf{y} \in S$

maka S disebut subruang dari V. ■

Definisi 2.C.2 Ruang Null

Andaikan A sebarang matriks m x n berelemen skalar. *Ruang null* dari A adalah himpunan semua penyelesaian untuk sistem A $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, dengan $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ dan dilambangkan dengan N(A). Jadi

$$N(A) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\,\mathbf{x} = \mathbf{0}\}.$$

Teorema 2.C

N(A) merupakan subruang dari $\mathbb{R}^n$.

Bukti:

(i) $N(A) \neq \varnothing$, karena sistem persamaan linear homogen (SPLH) punya penyelesaian yaitu $\mathbf{0}$, sehingga $\mathbf{0} \in N(A)$.

(ii) Ambil $\mathbf{x} \in N(A)$ dan $\alpha \in \mathbb{R}$, maka $A(\alpha\mathbf{x}) = \alpha(A\mathbf{x}) = \alpha\mathbf{0} = \mathbf{0}$.

Karena itu $\alpha\mathbf{x} \in N(A)$.

(iii) Jika $\mathbf{x}$ dan $\mathbf{y} \in N(A)$, maka $A(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = A\mathbf{x} + A\mathbf{y} = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$.

Sehingga $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in N(A)$.

Syarat-syarat dari subruang dipenuhi oleh N(*A*). Jadi terbukti bahwa N(*A*) merupakan subruang dari $\mathbb{R}^n$. ■

D. Kombinasi Linear dan Kebebasan Linear

Definisi 2.D.1 Kombinasi Linear

Misalkan $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n$ adalah vektor-vektor dalam suatu ruang vektor *V*. *Kombinasi linear* dari vektor-vektor $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n$ adalah

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + ... + \alpha_n \mathbf{v}_n$$

di mana $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$.

Himpunan semua kombinasi linear dari $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n$ disebut *rentang* dari $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n$, dan dilambangkan dengan $\text{Rentang}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n)$.

Teorema 2.D.1

Jika $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n$ adalah elemen-elemen dari suatu ruang vektor *V*, maka $\text{Rentang}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n)$ adalah subruang dari *V*.

Pembuktian dapat dilihat pada Steven J. Leon, 2001: 113. ■

Definisi 2.D.2 Himpunan Perentang

Himpunan $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n\}$ disebut *himpunan perentang* untuk *V* jika dan hanya jika setiap vektor dalam *V* dapat ditulis sebagai kombinasi linear dari $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n$.

Teorema 2.D.2

a. Jika $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ merentang pada suatu ruang vektor *V* dan salah satu dari vektor-vektor ini dapat ditulis sebagai kombinasi linear dari *n*-1 vektor yang lain, maka ke *n*-1 vektor itu juga merentang *V*.

b. Jika diberikan *n* vektor $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$, maka kita dapat menuliskan salah satu vektor sebagai kombinasi linear dari *n*-1 vektor yang lain jika dan hanya jika terdapat skalar-skalar $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ yang tidak semuanya sama dengan nol sedemikian sehingga:

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \ldots + \alpha_n \mathbf{v}_n = \mathbf{0}$$

Pembuktian dapat dilihat pada Steven J. Leon, 2001: 119. ■

Definisi 2.D.3 Bebas Linear

Vektor-vektor $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ dalam ruang vektor *V* disebut *bebas linear* jika

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \ldots + \alpha_n \mathbf{v}_n = \mathbf{0}$$

mengakibatkan semua skalar-skalar $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ harus sama dengan 0.

Definisi 2.D.4 Bergantung Linear

Vektor-vektor $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ dalam ruang vektor *V* disebut *bergantung linear* jika terdapat skalar-skalar $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ yang tidak semuanya nol sehingga

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \ldots + \alpha_n \mathbf{v}_n = \mathbf{0}$$ ■

E. Basis

Definisi 2.E Basis

Vektor-vektor $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n$ membentuk *basis* untuk ruang vektor *V* jika dan hanya jika:

(i) $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n$ bebas linear,

(ii) $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n$ merentang *V*.

Teorema 2.E

Jika $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n\}$ adalah himpunan yang merentang suatu ruang vektor *V*, maka himpunan dari *m* vektor di mana $m > n$ adalah bergantung linear.

Pembuktian dapat dilihat pada Steven J. Leon, 2001: 129.

Akibat 2.E

Jika $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n\}$ dan $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, ..., \mathbf{w}_m\}$ kedua-duanya adalah basis untuk suatu ruang vektor *V*, maka $n = m$.

Pembuktian dapat dilihat pada Steven J. Leon, 2001: 130. ■

F. Perkalian Himpunan

Misalkan $A_1, A_2, ..., A_m$ adalah himpunan-himpunan dengan $A_i \subseteq R^{n_i}$, di mana $i = 1,2,...,m$. Perkalian himpunan-himpunan yang dinotasikan dengan

$$\prod_{i=1}^{m} A_i \text{ atau } A_1 \times A_2 \times ... \times A_m$$

adalah himpunan A dalam $\mathbb{R}^{n_1+n_2+\ldots+n_m}$ yang beranggotakan semua vektor yang mungkin dalam $\mathbb{R}^{n_1+n_2+\ldots+n_m}$ yang diperoleh dengan mengambil n_1 komponen pertama dari vektor anggota A_1, kemudian n_2 komponen kedua dari vektor anggota A_2, kemudian n_3 komponen ketiga dari vektor anggota A_3, kemudian seterusnya hingga n_m komponen terakhir dari vektor anggota A_m. Dalam notasi himpunan ditulis sebagai berikut:

$$\prod_{i=1}^{m} A_i = \left\{\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1,\, \mathbf{x}_2,\, \ldots,\, \mathbf{x}_m)^T \mid \mathbf{x}_i \in A_i, \forall i = 1,\, 2,\, \ldots,\, m\right\}$$

Sebagai contoh, $\mathbb{R}^n$ dapat dianggap sebagai hasil perkalian himpunan dari $\mathbb{R}^1$ dengan dirinya sendiri sebanyak n kali.

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1 \ldots \times \mathbb{R}^1}_{n\ kali} \qquad \blacksquare$$

Jika $A_1 \subset \mathbb{R}^2$ berisi vektor-vektor pada keliling lingkaran dengan pusat di titik pusat dan berjari-jari 1, dan jika $A_2 = [0,1] \subset \mathbb{R}^1$, maka $A_1 \times A_2$ adalah himpunan dalam $\mathbb{R}^3$ yang berupa silinder dengan tinggi 1 dan alasnya berupa lingkaran dalam bidang (x_1, x_2) dengan pusat di titik pusat dan jari-jarinya sama degan 1. $\blacksquare$

Misalkan $\mathbb{X} = \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \times \ldots \times \mathbb{R}^{n_m}$. Untuk vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{X}$, $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_m)^T$ di mana $\mathbf{x}_i = (\mathbf{x}_{i1}, \mathbf{x}_{i2}, \ldots, \mathbf{x}_{in_i})^T$, $i = 1,2,\ldots,m$. Operasi penjumlahan dua vektor **x** dan **y** $\in \mathbb{X}$ dan perkalian vektor **x** $\in \mathbb{X}$ dengan skalar $\alpha \in \mathbb{R}$, didefinisikan sebagai:

$$(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = (\mathbf{x}_1+\mathbf{y}_1, \mathbf{x}_2+\mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{x}_m+\mathbf{y}_m)^T \quad \text{dan} \quad \alpha\mathbf{x} = (\alpha\mathbf{x}_1,\ \alpha\mathbf{x}_2,\ \ldots,\ \alpha\mathbf{x}_m)^T$$

dan misalkan $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_m$, maka $\mathbb{X}$ dapat diidentifikasi sebagai ruang vektor biasa $\mathbb{R}^n$. ■

G. Topologi Metrik Dimensi – *n*

Misalkan *V* adalah suatu himpunan. Suatu fungsi *d* yang memetakan bilangan real pada masing-masing pasangan vektor $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ dengan $\mathbf{x} \in V$ dan $\mathbf{y} \in V$ disebut sebagai *metrik* atau *fungsi jarak* pada *V* jika memenuhi syarat berikut:

$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0$, dengan $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ jika dan hanya jika $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ .... (1)

$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(\mathbf{y}, \mathbf{x})$, ... (2)

$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + d(\mathbf{z}, \mathbf{y})$ untuk semua $\mathbf{z} \in V$................................ (3)

Pertidaksamaan (3) disebut sebagai pertidaksamaan segitiga. ■

Definisi 2.G.1 Ruang Metrik

Suatu himpunan *V* yang dilengkapi dengan metrik *d* disebut sebagai *ruang metrik*.

Contoh dalam $\mathbb{R}^n$, fungsi *d* didefinisikan sebagai berikut:

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2\right)^{1/2}$$

Akan ditunjukkan fungsi d di atas merupakan metrik pada $\mathbb{R}^n$:

i. $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| \geq 0$.

Jika $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ maka $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(\mathbf{y}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{y}-\mathbf{y}\| = 0$.

Jika $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$, maka

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| &= 0 \\ \Leftrightarrow \quad \left(\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2\right)^{1/2} &= 0 \\ \Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2 &= 0 \end{aligned}$$

Karena $(x_i - y_i)^2 \geq 0$, maka $(x_i - y_i)^2 = 0,\ \forall i = 1, 2, \ldots, n$. Sehingga

$$\begin{aligned} x_i - y_i &= 0 \\ \Leftrightarrow \quad x_i &= y_i \\ \Leftrightarrow \quad \mathbf{x} &= \mathbf{y} \end{aligned}$$

ii. $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| = \|\mathbf{y}-\mathbf{x}\| = d(\mathbf{y}, \mathbf{x})$.

iii. Untuk semua $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$,

$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| = \|\mathbf{x}-\mathbf{z}+\mathbf{z}-\mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}-\mathbf{z}\| + \|\mathbf{z}-\mathbf{y}\| = d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + d(\mathbf{z}, \mathbf{y})$.

■

Definisi 2.G.2 Bola Terbuka dan Bola Tertutup

Suatu bola terbuka berpusat di $\mathbf{x}$ dengan jari-jari $r > 0$ dinotasikan oleh $B(\mathbf{x}, r)$ didefinisikan sebagai himpunan vektor-vektor $\mathbf{y}$ yang jarak dari $\mathbf{x}$

kuang dari r dan dituliskan sebagai:

$$B(\mathbf{x}, r) = \{\mathbf{y} \mid \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| < r\}$$

Bola tertutup $\overline{B(\mathbf{x}, r)}$ dengan pusat **x** dan jari-jari $r > 0$ didefinisikan sebagai:

$$\overline{B(\mathbf{x}, r)} = \{\mathbf{y} \mid \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| \leq r\}$$ ■

Definisi 2.G.3 Titik Interior

Misalkan $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Suatu titik **x** disebut sebagai *titik interior S* jika ada $r > 0$ sedemikian sehingga $B(\mathbf{x}, r) \subset S$.

Jika himpunan titik-titik interior S *tidak kosong*, maka kita sebut himpunan titik-titik interior ini sebagai *interior dari S* dan dinotasikan dengan int(*S*).

Himpunan *S* tidak harus memiliki titik interior. Perhatikan himpunan titik-titik pada bidang ($\mathbb{R}^2$) dengan bentuk $(x_1, 0)$ dengan $0 < x_1 < 1$. Interval $0 < x_1 < 1$ ini ada pada sumbu$-x_1$. Himpunan titik-titik pada $\mathbb{R}^2$ ini tidak memiliki titik interior. Tetapi jika kita perhatikan sebagai himpunan pada $\mathbb{R}^1$, maka semua titik tersebut adalah titik interior. ■

Suatu himpunan *S* dikatakan *terbuka* jika semua titik pada *S* adalah titik-titik interior. Definisi himpunan terbuka ini ekuivalen dengan definisi interior.

Definisi 2.G.4 Himpunan Terbuka

Himpunan *S* dikatakan *terbuka* jika setiap titik $\mathbf{x} \in S$, ada bilangan positif $r > 0$, yang bergantung pada **x**, sedemikian sehingga bola $B(\mathbf{x}, r)$ berada dalam *S*. ■

Definisi 2.G.5 Titik Limit

Titik **x** disebut sebagai *titik limit* himpunan *S* jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ ada titik $\mathbf{x}_\varepsilon \neq \mathbf{x}$ sedemikian sehingga $\mathbf{x}_\varepsilon \in S$ dan $\mathbf{x}_\varepsilon \in B(\mathbf{x}, \varepsilon)$. Titik $\mathbf{x}_\varepsilon$ secara umum bergantung pada ε.

Himpunan titik-titik limit dari himpunan *S* dinotasikan dengan S'.

Suatu himpunan tidak harus memiliki titik-titik limit dan suatu titik limit tidak harus menjadi anggota himpunan tersebut. Himpunan bilangan asli positif sebagai himpunan dalam $\mathbb{R}^1$ merupakan salah satu contoh himpunan yang tidak memiliki titik limit. Sedangkan contoh untuk suatu titik limit yang tidak harus menjadi anggota suatu himpunan, himpunan $S \equiv \left\{ x \mid x = \frac{1}{n}, n = 1, 2, 3, \ldots \right\}$ dalam $\mathbb{R}^1$. Nol adalah titik limit dari himpunan *S*, tetapi nol bukan anggota *S*. ■

Definisi 2.G.6 Pemampat Himpunan dan Himpunan Tertutup

Pemampat (*closure*) himpunan *S*, dinotasikan dengan $\overline{S}$ dan didefinisikan sebagai $\overline{S} = S \cup S'$ dengan S' adalah himpunan semua titik limit himpunan *S*.

Himpunan S disebut *tertutup* jika $S = \overline{S}$, yakni bahwa S beranggotakan semua titik limitnya. ■

Suatu himpunan tidak harus memenuhi kedua sifat, yakni terbuka atau tertutup. Perhatikan $B(\mathbf{0}, 1)$ dalam $\mathbb{R}^2$, yakni suatu daerah lingkaran berpusat di titik pusat dan berjari-jari 1. Secara intuitif, semua titik $\mathbf{x}$ dalam $\mathbb{R}^2$ dengan $\|\mathbf{x}\| = 1$ adalah titik-titik limit dari $B(\mathbf{0}, 1)$. Sekarang perhatikan himpunan

$$S = B(\mathbf{0},1) \cup \left\{ \mathbf{x} = (x_1, x_2)^T \mid \|\mathbf{x}\| = 1, x_1 \geq 0 \right\}$$

Titik $\mathbf{x}$ = $(x_1, x_2)^T$ dengan $\|\mathbf{x}\| = 1$ dan $x_1 \geq 0$ bukan titik interior S karena untuk titik $\mathbf{x}$ itu sendiri, tidak masalah seberapa kecil kita memilih $\varepsilon > 0$, lingkaran $B(\mathbf{x}, \varepsilon)$ tidak berada dalam S. Karena itu S tidak terbuka. Namun demikian S juga tidak tertutup, karena titik $\mathbf{x}$ = $(x_1, x_2)^T$ dengan $\|\mathbf{x}\| = 1$ dan $x_1 < 0$ adalah titik limit S tetapi tidak berada dalam S. ■

H. Barisan

Suatu barisan di $\mathbb{R}^n$ adalah suatu fungsi yang memberikan sebuah vektor $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$ di mana k adalah bilangan bulat positif. Barisan vektor $\mathbf{x}_k$ ini biasanya ditulis sebagai $\{\mathbf{x}_k\}_{k=1}^{\infty}$, atau secara umum cukup ditulis $\{\mathbf{x}_k\}$.

Sebarang barisan $\{\mathbf{x}_k\}$ dikatakan mempunyai *limit* $\mathbf{y}$ atau konvergen ke $\mathbf{y}$ jika untuk sebarang $\varepsilon > 0$ ada bilangan bulat positif $K(\varepsilon)$ sedemikian hingga $\mathbf{x}_k \in B(\mathbf{y}, \varepsilon)$ di mana $k > K(\varepsilon)$. Ini dituliskan sebagai:

$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{y} \text{ atau } \mathbf{x}_k \to \mathbf{y} \qquad \blacksquare$$

Barisan yang mempunyai limit disebut *konvergen*, dan barisan yang tidak mempunyai limit disebut *divergen*. ■

Teorema 2.H

Jika $\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{x}_0$, $\lim_{k\to\infty} \mathbf{y}_k = \mathbf{y}_0$, dan $\lim_{k\to\infty} \alpha_k = \alpha$ di mana $\{\alpha_k\}$ adalah barisan dari skalar-skalar, maka $\lim_{k\to\infty} (\mathbf{x}_k + \mathbf{y}_k) = \mathbf{x}_0 + \mathbf{y}_0$ dan $\lim_{k\to\infty} \alpha_k \mathbf{x}_k = \alpha \mathbf{x}_0$.

Bukti:

i. $\lim_{k\to\infty} (\mathbf{x}_k + \mathbf{y}_k) = \lim_{k\to\infty} \mathbf{x}_k + \lim_{k\to\infty} \mathbf{y}_k = \mathbf{x}_0 + \mathbf{y}_0$

ii. $\lim_{k\to\infty} \alpha_k \mathbf{x}_k = \lim_{k\to\infty} \alpha_k \cdot \lim_{k\to\infty} \mathbf{x}_k = \alpha \mathbf{x}_0$ ■

Berikut ini diberikan lema bagi titik sebagai titik limit dari suatu himpunan.

Lema 2.H

Titik $\mathbf{x}$ adalah titik limit himpunan S jika dan hanya jika ada barisan $\{\mathbf{x}_k\}$ dari titik-titik anggota S sedemikian sehingga untuk setiap k bilangan bulat positif, $\mathbf{x}_k \neq \mathbf{x}$ dan $\mathbf{x}_k \to \mathbf{x}$.

Bukti:

⇨ Misalkan $\mathbf{x}$ adalah titik limit *S*. Maka untuk setiap bilangan bulat *k* ada titik $\mathbf{x}_k \in S$ sedemikian sehingga $\mathbf{x}_k \neq \mathbf{x}$ dan $\mathbf{x}_k \in B\left(\mathbf{x}, \frac{1}{k}\right)$. Untuk setiap $\varepsilon > 0$, ada bilangan bulat positif $K(\varepsilon)$ yang memenuhi $\frac{1}{K(\varepsilon)} < \varepsilon$. Karena itu, untuk $k > K(\varepsilon)$, diperoleh $\frac{1}{k} < \varepsilon$ dan $B\left(\mathbf{x}, \frac{1}{k}\right) \subset B(\mathbf{x}, \varepsilon)$. Dengan demikian barisan $\{\mathbf{x}_k\}$ konvergen ke $\mathbf{x}$.

⇦ Misalkan ada barisan $\{\mathbf{x}_k\}$ dari titik-titik anggota *S* dengan $\mathbf{x}_k \neq \mathbf{x}$ dan $\mathbf{x}_k \to \mathbf{x}$. Untuk sebarang $\varepsilon > 0$ dan karena $\mathbf{x}_k \to \mathbf{x}$, ada bilangan bulat positif $K(\varepsilon)$ sedemikian hingga, untuk $k > K(\varepsilon)$, $\mathbf{x}_k \in B(\mathbf{x}, \varepsilon)$. Karena $\mathbf{x}_k \neq \mathbf{x}$ untuk semua *k*, berlaku bahwa $\mathbf{x}$ adalah titik limit *S*.

Akibat 2.H.1

Untuk sebarang $\{\mathbf{x}_k\}$ dalam *S* dan $\{\mathbf{x}_k\}$ konvergen ke $\mathbf{x}$, maka $\mathbf{x}$ harus anggota $\overline{S}$.

Bukti:

Untuk $\mathbf{x} \in S$, tidak ada yang perlu dibuktikan. Tetapi untuk $\mathbf{x} \notin S$, maka untuk setiap *k*, $\mathbf{x}_k \in S$, dan $\mathbf{x}_k \neq \mathbf{x}$. Dari lema 2.H berlaku bahwa $\mathbf{x}$ adalah titik limit *S*. Jadi $\mathbf{x} \in \overline{S}$.

Akibat 2.H.2

Misalkan S adalah himpunan dalam $\mathbb{R}^n$. Jika $\mathbf{x} \in \overline{S}$, maka ada barisan titik-titik $\{\mathbf{x}_k\}$ dalam S sedemikian hingga $\mathbf{x}_k \to \mathbf{x}$.

Bukti:

Untuk $\mathbf{x} \in \overline{S}$, maka $\mathbf{x} \in S$ atau S'. Jika $\mathbf{x} \in S'$ pernyatan akibat 2.H.2 berlaku dari lema 2.H. Jika $\mathbf{x} \in S$ dan $\mathbf{x} \notin S'$, dapat diambil $\mathbf{x}_k = \mathbf{x}$ untuk semua bilangan bulat positif *k*. ■

BAB III

TEOREMA CARATHEODORY

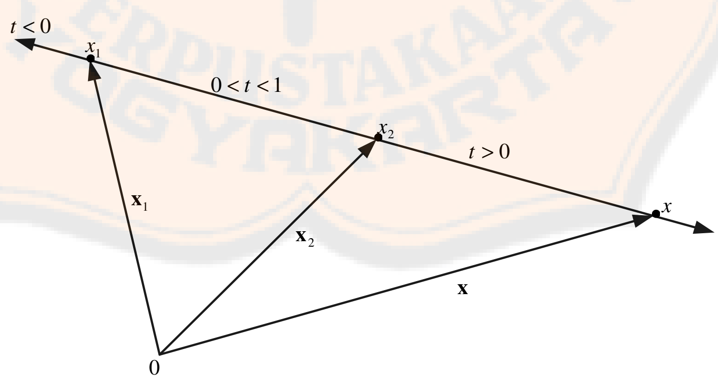
PADA HIMPUNAN KONVEKS DALAM $\mathbb{R}^n$

A. Persamaan Garis dan Persamaan Bidang Dalam $\mathbb{R}^n$

Dalam perkuliahan Geometri Analitik Ruang telah dibahas mengenai langkah-langkah penentuan suatu persamaan garis dan suatu persamaan bidang. Oleh karena itu, bentuk-bentuk persamaan garis dan persamaan bidang dalam pembahasan berikut ini tidak disertai langkah-langkahnya, karena diasumsikan pembaca telah mengikuti perkuliahan tersebut dan menguasai bagaimana persamaan garis dan persamaan bidang diperoleh.

Persamaan garis yang melalui dua vektor $\mathbf{x}_1$ dan $\mathbf{x}_2$ dalam $\mathbb{R}^2$ dan $\mathbb{R}^3$, dinyatakan dengan:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + t(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) \qquad -\infty < t < \infty \tag{1}$$



Gambar 3.A.1 Garis

Pada gambar 3.1, penggal garis yang berawal dari $\mathbf{x}_1$ dan berakhir di $\mathbf{x}_2$, berkorespondensi dengan nilai t, $0 \le t \le 1$ atau dalam interval $[0,1]$. Penggal garis tersebut kemudian disebut sebagai *segmen garis tertutup*. Sedangkan penggal garis yang berawal dari $\mathbf{x}_1$ dan berakhir di $\mathbf{x}_2$ tetapi tidak memuat $\mathbf{x}_1$ dan $\mathbf{x}_2$ berkorespondensi dengan nilai t, $0 < t < 1$ atau dalam interval $(0,1)$. Penggal garis tersebut kemudian disebut sebagai *segmen garis terbuka*.

Sinar garis positif berawal dari $\mathbf{x}_1$ atau dari $\mathbf{x}_2$, berkorespondensi dengan nilai $t \geq 0$, dan sinar garis negatif berawal dari $\mathbf{x}_1$ atau dari $\mathbf{x}_2$, berkorespondensi dengan nilai $t \leq 0$. Sinar garis yang demikian disebut sebagai *segmen garis setengah terbuka*.

Dalam $\mathbb{R}^n$, didefinisikan garis melalui dua vektor $\mathbf{x}_1$ dan $\mathbf{x}_2$ sebagai himpunan vektor-vektor yang memenuhi bentuk (1).

Definisi 3.A.1 Garis dalam $\mathbb{R}^n$

Garis dalam $\mathbb{R}^n$ melalui dua vektor $\mathbf{x}_1$ dan $\mathbf{x}_2$ didefinisikan sebagai himpunan vektor-vektor $\mathbf{x}$ sedemikian sehingga $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + t(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)$ di mana t adalah sebarang bilangan real. Dalam notasi himpunan ditulis sebagai:

$$\{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + t(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1), -\infty < t < \infty\}$$

Teorema 3.A.1

Garis dalam $\mathbb{R}^n$ melalui dua vektor $\mathbf{x}_1$ dan $\mathbf{x}_2$ dinyatakan dengan:

$$\{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} = \alpha\mathbf{x}_1 + \beta\mathbf{x}_2, \alpha + \beta = 1\}$$

Bukti:

Dari definisi 3.A.1, Garis dalam $\mathbb{R}^n$ melalui dua vektor $\mathbf{x}_1$ dan $\mathbf{x}_2$ didefinisikan oleh:

$$\{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + t(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1), -\infty < t < \infty\}$$

$$\Leftrightarrow \quad \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + t\mathbf{x}_2 - t\mathbf{x}_1, -\infty < t < \infty\}$$

$$\Leftrightarrow \quad \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} = \mathbf{x}_1 - t\mathbf{x}_1 + t\mathbf{x}_2, -\infty < t < \infty\}$$

$$\Leftrightarrow \quad \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} = (1-t)\mathbf{x}_1 + t\mathbf{x}_2, -\infty < t < \infty\}$$

Dengan mengambil $\alpha = (1-t)$ dan $\beta = t$ diperoleh:

$$\{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} = \alpha\mathbf{x}_1 + \beta\mathbf{x}_2, \alpha + \beta = 1\} \quad \blacksquare$$

Definisi 3.A.2 Segmen Garis Tertutup dalam $\mathbb{R}^n$

Segmen garis tertutup yang menghubungkan vektor $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^n$ dinotasikan dengan $[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2]$ dan didefinisikan sebagai:

$$[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2] = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} = (1-t)\mathbf{x}_1 + t\mathbf{x}_2, 0 \le t \le 1\}$$

Untuk $\alpha = (1-t)$, dan $\beta = t$, diperoleh:

$$[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2] = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} = \alpha\mathbf{x}_1 + \beta\mathbf{x}_2, \alpha \ge 0, \beta \ge 0, \alpha + \beta = 1\}$$

Definisi 3.A.3 Segmen Garis Terbuka dalam $\mathbb{R}^n$

Segmen garis terbuka yang menghubungkan vektor $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^n$ dinotasikan dengan $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ dan didefinisikan sebagai:

$$(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} = (1-t)\mathbf{x}_1 + t\mathbf{x}_2, 0 < t < 1\}$$

Untuk $\alpha = (1-t)$, dan $\beta = t$, diperoleh:

$$(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} = \alpha\mathbf{x}_1 + \beta\mathbf{x}_2, \alpha > 0, \beta > 0, \alpha + \beta = 1\} \qquad \blacksquare$$

Definisi 3.A.4 Segmen Garis Setengah Terbuka dalam $\mathbb{R}^n$

(i) Segmen garis setengah terbuka dalam $\mathbb{R}^n$ yang memuat vektor $\mathbf{x}_1$ tetapi tidak memuat vektor $\mathbf{x}_2$ dinotasikan dengan $[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ dan didefinisikan sebagai:

$$[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} = (1-t)\mathbf{x}_1 + t\mathbf{x}_2, 0 \le t < 1\}$$

Untuk $\alpha = (1-t)$, dan $\beta = t$, diperoleh:

$$[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} = \alpha\mathbf{x}_1 + \beta\mathbf{x}_2, \alpha > 0, \beta \ge 0, \alpha + \beta = 1\}$$

(ii) Segmen garis setengah terbuka dalam $\mathbb{R}^n$ yang memuat vektor $\mathbf{x}_2$ tetapi tidak memuat vektor $\mathbf{x}_1$ dinotasikan dengan $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2]$ dan didefinisikan sebagai:

$$(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2] = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} = (1-t)\mathbf{x}_1 + t\mathbf{x}_2, 0 < t \le 1\}$$

Untuk $\alpha = (1-t)$, dan $\beta = t$, diperoleh:

$$(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2] = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} = \alpha\mathbf{x}_1 + \beta\mathbf{x}_2, \alpha \ge 0, \beta > 0, \alpha + \beta = 1\}. \qquad \blacksquare$$

Lema 3.A

Untuk sembarang $\mathbf{y} \in (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} = \alpha\mathbf{x}_1 + \beta\mathbf{x}_2, \alpha > 0, \beta > 0, \alpha + \beta = 1\}$, berlaku:

$$\frac{\|\mathbf{y} - \mathbf{x}_1\|}{\|\mathbf{y} - \mathbf{x}_2\|} = \frac{\beta}{\alpha}$$

Bukti:

Ambil sebarang $\mathbf{y} \in (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$, maka $\mathbf{y} = \alpha\mathbf{x}_1 + \beta\mathbf{x}_2, \alpha > 0, \beta > 0, \alpha + \beta = 1$.

$$\begin{aligned}
& \mathbf{y} - \mathbf{x}_1 &=& \ \alpha\mathbf{x}_1 + \beta\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1 \\
\Leftrightarrow\ & \mathbf{y} - \mathbf{x}_1 &=& \ (\alpha - 1)\mathbf{x}_1 + \beta\mathbf{x}_2 \\
\Leftrightarrow\ & \mathbf{y} - \mathbf{x}_1 &=& \ \beta\mathbf{x}_2 - (1 - \alpha)\mathbf{x}_1 \\
\Leftrightarrow\ & \mathbf{y} - \mathbf{x}_1 &=& \ \beta\mathbf{x}_2 - \beta\mathbf{x}_1 \\
\Leftrightarrow\ & \mathbf{y} - \mathbf{x}_1 &=& \ \beta(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) \\
\Leftrightarrow\ & \|\mathbf{y} - \mathbf{x}_1\| &=& \ \|\beta(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)\| \\
\Leftrightarrow\ & \|\mathbf{y} - \mathbf{x}_1\| &=& \ \beta\,\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\| \qquad (2)
\end{aligned}$$

Dengan cara yang sama didapatkan:

$$\begin{aligned}
& \mathbf{y} - \mathbf{x}_2 &=& \ \alpha\mathbf{x}_1 + \beta\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_2 \\
\Leftrightarrow\ & \mathbf{y} - \mathbf{x}_2 &=& \ \alpha\mathbf{x}_1 + (\beta - 1)\mathbf{x}_2 \\
\Leftrightarrow\ & \mathbf{y} - \mathbf{x}_2 &=& \ \alpha\mathbf{x}_1 - (1 - \beta)\mathbf{x}_2 \\
\Leftrightarrow\ & \mathbf{y} - \mathbf{x}_2 &=& \ \alpha\mathbf{x}_1 - \alpha\mathbf{x}_2 \\
\Leftrightarrow\ & \mathbf{y} - \mathbf{x}_2 &=& \ \alpha(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \quad \|\mathbf{y}-\mathbf{x}_2\| = \|\alpha(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2)\|$$

$$\Leftrightarrow \quad \|\mathbf{y}-\mathbf{x}_2\| = \alpha\,\|\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2\| \tag{3}$$

Dari persamaan (2) dan persamaan (3) diperoleh:

$$\frac{\|\mathbf{y}-\mathbf{x}_1\|}{\|\mathbf{y}-\mathbf{x}_2\|} = \frac{\beta\,\|\mathbf{x}_2-\mathbf{x}_1\|}{\alpha\,\|\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2\|}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\|\mathbf{y}-\mathbf{x}_1\|}{\|\mathbf{y}-\mathbf{x}_2\|} = \frac{\beta}{\alpha}$$ ■

Dalam $\mathbb{R}^3$, bidang yang melalui titik $P_0(x_{01}, x_{02}, x_{03})$ dengan garis normal $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)^T$ berisi kumpulan dari titik-titik $P(x_1, x_2, x_3)$ sedemikian sehingga $\overrightarrow{P_0P}$ tegak lurus $\mathbf{a}$. Persamaan bidang ini dinyatakan dengan:

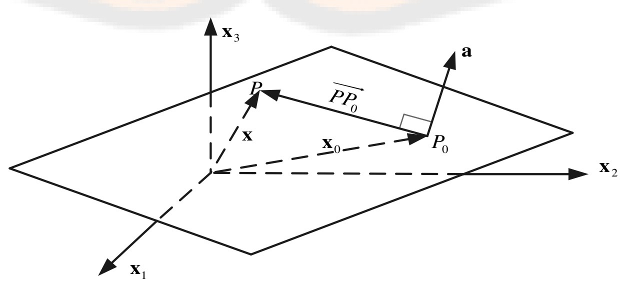
$$a_1(x_1 - x_{01}) + a_2(x_2 - x_{02}) + a_3(x_3 - x_{03}) = 0 \tag{4}$$

atau

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = \gamma$$

di mana $\gamma = a_1x_{01} + a_2x_{02} + a_3x_{03}$. (5)

Bentuk ini merupakan bentuk umum dari persamaan bidang dalam $\mathbb{R}^3$.



Gambar 3.A.2 Bidang

Dari definisi 2.A.4, maka notasi perkalian skalar persamaan bidang bentuk (4) dan (5) dapat ditulis sebagai:

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \rangle = 0 \text{ atau } \langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle = \gamma, \text{ di mana } \gamma = \langle \mathbf{a}, \mathbf{x}_0 \rangle \qquad (6)$$

Selanjutnya, setiap persamaan dalam bentuk (6) disebut sebagai persamaan bidang dalam $\mathbb{R}^3$ dengan garis normal $\mathbf{a}$.

Secara generalisasi, persamaan bidang dengan bentuk (6) dapat digunakan untuk mendefinisikan suatu *bidang hiper* (*hyperplane*) dalam $\mathbb{R}^n$.

Definisi 3.A.5 Bidang Hiper dalam $\mathbb{R}^n$

Andaikan $\mathbf{a}$ adalah suatu vektor dalam $\mathbb{R}^n$ dan α adalah suatu skalar. Sebuah *bidang hiper* dalam $\mathbb{R}^n$ dinotasikan dengan $H_{\mathbf{a}}^{\alpha}$ dan didefinisikan sebagai:

$$H_{\mathbf{a}}^{\alpha} = \{\mathbf{x} \mid \langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle = \alpha\}$$

Vektor $\mathbf{a}$ disebut sebagai *normal bidang hiper*.

Teorema 3.A.3

Persamaan bidang hiper $H_{\mathbf{a}}^{\alpha} = \{\mathbf{x} \mid \langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle = \alpha\}$ ekuivalen dengan:

$$\{\mathbf{x} \mid \langle \mathbf{a}, \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \rangle = 0\}$$

di mana $\mathbf{x}_0 \in H_{\mathbf{a}}^{\alpha}$ dan $\mathbf{a}$ adalah normalnya. Selanjutnya persamaan bidang hiper cukup ditulis dengan:

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \rangle = 0$$

Bukti:

Misalkan $\mathbf{x}_0$ memenuhi definisi bidang hiper dengan normal $\mathbf{a}$, maka $\langle \mathbf{a}, \mathbf{x}_0 \rangle = \alpha$. Jadi jika $\mathbf{x}$ adalah sebarang vektor lain yang memenuhi definisi tersebut, $\langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle = \alpha$. Dengan demikian:

$$
\begin{aligned}
& \langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{x}_0 \rangle \\
\Leftrightarrow\quad & \langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle - \langle \mathbf{a}, \mathbf{x}_0 \rangle = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & \sum_{i=1}^{n} a_i x_i - \sum_{i=1}^{n} a_i x_{0i} = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & \sum_{i=1}^{n} a_i (x_i - x_{0i}) = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & \langle \mathbf{a}, \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \rangle = 0
\end{aligned}
$$

Terbukti bahwa $\langle \mathbf{a}, \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \rangle = 0$ adalah persamaan bidang hiper dalam $\mathbb{R}^n$ yang melalui vektor $\mathbf{x}_0$ dengan normal $\mathbf{a}$.

Teorema ini juga mengatakan bahwa untuk sebarang dua vektor $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2 \in H_{\mathbf{a}}^{\alpha}$, maka $\mathbf{a}$ ortogonal terhadap $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$. ■

Contoh 3.A.1

Untuk mencari persamaan bidang hiper dalam $\mathbb{R}^4$ yang melalui titik $\mathrm{A}(1,1,1,1)$, $\mathrm{B}(2,0,1,0)$, $\mathrm{C}(0,2,0,1)$ dan $\mathrm{D}(1,1,-1,0)$, kita misalkan $\mathbf{p} = \overrightarrow{AB} = (1,-1,0,-1)^T$; $\mathbf{q} = \overrightarrow{BC} = (-2,2,-1,1)^T$; $\mathbf{r} = \overrightarrow{CD} = (1,-1,-1,-1)^T$.

Dari akibat 2.A.2, normal bidang hiper $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3, a_4)^T$ dapat dicari dengan menggunakan syarat sebagai berikut:

i.) $\mathbf{a} \perp \mathbf{p} \Leftrightarrow \langle \mathbf{a}, \mathbf{p} \rangle = 0 \Leftrightarrow (a_1, a_2, a_3, a_4) \cdot (1,-1,0,-1) = 0$

$$\Leftrightarrow a_1 - a_2 - a_4 = 0 \qquad (7)$$

ii.) $\mathbf{a} \perp \mathbf{q} \Leftrightarrow \langle \mathbf{a}, \mathbf{q} \rangle = 0 \Leftrightarrow (a_1, a_2, a_3, a_4) \cdot (-2,2,-1,1) = 0$

$$\Leftrightarrow -2a_1 + 2a_2 - a_3 + a_4 = 0 \qquad (8)$$

iii.) $\mathbf{a} \perp \mathbf{r} \Leftrightarrow \langle \mathbf{a}, \mathbf{r} \rangle = 0 \Leftrightarrow (a_1, a_2, a_3, a_4) \cdot (1,-1,-1,-1) = 0$

$$\Leftrightarrow a_1 - a_2 - a_3 - a_4 = 0 \qquad (9)$$

Dari sistem persamaan ini nilai-nilai skalar komponen vektor **a** diperoleh dengan cara eliminasi dan subsitusi.

Dari persamaan (7) dan (9) diperoleh:

$$\begin{cases} a_1 - a_2 \qquad - a_4 = 0 \\ a_1 - a_2 - a_3 - a_4 = 0 \; - \end{cases}$$
$$a_3 \qquad = 0$$

Subsitusi nilai $a_3 = 0$ ke persamaan (8) dan eliminasi dengan persamaan (7):

$$\begin{cases} -2a_1 + 2a_2 + a_4 = 0 \\ \quad a_1 - a_2 - a_4 = 0 \; + \end{cases}$$
$$-a_1 + a_2 \qquad = 0$$
$$a_1 = a_2$$

Subsitusi nilai $a_1 = a_2$ ke persamaan (7) diperoleh nilai $a_4 = 0$.

Jadi untuk sebarang skalar α di mana $a_1 = a_2 = \alpha$, normal $\mathbf{a} = (\alpha, \alpha, 0, 0)^T$. Dengan demikian, persamaan bidang hiper dalam $\mathbb{R}^4$ yang melalui titik A$(1,1,1,1)$ dengan normal $\mathbf{a} = (\alpha, \alpha, 0, 0)^T$ adalah:

$$\alpha(x_1 - 1) + \alpha(x_2 - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \alpha x_1 - \alpha + \alpha x_2 - \alpha = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \alpha(x_1 + x_2) = 2\alpha$$

■

Pada bidang hiper $H_{\mathbf{a}}^{\alpha}$, jika α = 0 dan **a** ≠ **0** maka bidang hiper ditulis dengan $H_{\mathbf{a}}^{0} = \{\mathbf{x} \mid \langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle = 0\}$ di mana **a** adalah normal bidang hiper $H_{\mathbf{a}}^{0}$. Untuk menunjukkan hal ini, perhatikan langkah-langkah berikut:

⇨ Dari definisi bidang hiper $H_{\mathbf{a}}^{\alpha}$, untuk semua $\mathbf{x} \in H_{\mathbf{a}}^{\alpha}$, **x** harus memenuhi $\langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle = \alpha$ dengan **a** adalah normal bidang hiper $H_{\mathbf{a}}^{\alpha}$. Ambil sebarang $\mathbf{x} \in H_{\mathbf{a}}^{0}$ di mana **a** adalah normal bidang hiper $H_{\mathbf{a}}^{0}$ dan 0 adalah skalar α. Maka **x** memenuhi $\langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle = \alpha$ di mana $\alpha = 0$. Jadi untuk semua $\mathbf{x} \in H_{\mathbf{a}}^{0}$, $\mathbf{x} \in \{\mathbf{x} \mid \langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle = 0\}$.

⇦ Ambil $\mathbf{x} \in \{\mathbf{x} \mid \langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle = 0\}$, maka **x** memenuhi $\langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle = 0$ di mana **a** adalah suatu vektor dalam $\mathbb{R}^n$ dan 0 adalah skalar. Dari definisi 3.A.5, dapat ditentukan suatu bidang hiper $H_{\mathbf{a}}^{0}$ di mana **a** adalah normal bidang hiper tersebut dan $\alpha = 0$. Jadi untuk setiap $\mathbf{x} \in \{\mathbf{x} \mid \langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle = 0\}$, $\mathbf{x} \in H_{\mathbf{a}}^{0}$. ■

Bidang hiper $H_{\mathbf{a}}^{0} = \{\mathbf{x} \mid \langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle = 0\}$ mempunyai persamaan dengan bentuk:

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{x}_i = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = 0$$

Dari bentuk ini disimpulkan bahwa bidang hiper $H_{\mathbf{a}}^{0}$ memenuhi definisi tentang ruang null. Berdasarkan teorema 2.C bahwa N(A) merupakan subruang dari $\mathbb{R}^{n}$ maka bidang hiper $H_{\mathbf{a}}^{0}$ juga merupakan subruang dari $\mathbb{R}^{n}$.

■

Teorema 3.A.4

Untuk sebarang $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^{n}$ dan skalar α ∈ ℝ, maka $H_{\mathbf{a}}^{\alpha} = H_{\mathbf{a}}^{0} + \mathbf{x}_0$ di mana $\mathbf{x}_0 \in H_{\mathbf{a}}^{\alpha}$.

Bukti:

⇨ Misalkan sebarang $\mathbf{x}, \mathbf{x}_0 \in H_{\mathbf{a}}^{\alpha}$, dan misalkan $\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$,

Untuk $\mathbf{x} \in H_{\mathbf{a}}^{\alpha} \Rightarrow \langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle = \alpha$, dan

Untuk $\mathbf{x}_0 \in H_{\mathbf{a}}^{\alpha} \Rightarrow \langle \mathbf{a}, \mathbf{x}_0 \rangle = \alpha$.

Selanjutnya diperoleh: $\langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{x}_0 \rangle$

$$\Leftrightarrow \quad \langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle - \langle \mathbf{a}, \mathbf{x}_0 \rangle = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \langle \mathbf{a}, \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \rangle = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \langle \mathbf{a}, \mathbf{u} \rangle = 0$$

sehingga $\mathbf{u} \in H_{\mathbf{a}}^{0}$ dengan $\mathbf{a}$ sebagai normal bidang hiper $H_{\mathbf{a}}^{0}$.

Karena $\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$ maka $\mathbf{x} = \mathbf{u} + \mathbf{x}_0$, dan karena $\mathbf{x} \in H_{\mathbf{a}}^{\alpha}$ dan $\mathbf{u} \in H_{\mathbf{a}}^{0}$, maka

$$H_{\mathbf{a}}^{\alpha} \subseteq H_{\mathbf{a}}^{0} + \mathbf{x}_0, \qquad \mathbf{x}_0 \in H_{\mathbf{a}}^{\alpha}$$

$\Leftarrow$ Ambil sebarang vektor $\mathbf{u} \in H_{\mathbf{a}}^{0}$, $\mathbf{x}_0 \in H_{\mathbf{a}}^{\alpha}$, dan misalkan $\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$,

Untuk $\mathbf{u} \in H_{\mathbf{a}}^{0} \quad \Rightarrow \quad \langle \mathbf{a}, \mathbf{u} \rangle = 0$, dan

Untuk $\mathbf{x}_0 \in H_{\mathbf{a}}^{\alpha} \Rightarrow \quad \langle \mathbf{a}, \mathbf{x}_0 \rangle = \alpha$

Selanjutnya diperoleh:

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{u} \rangle + \langle \mathbf{a}, \mathbf{x}_0 \rangle = 0 + \alpha$$

$$\Leftrightarrow \quad \langle \mathbf{a}, \mathbf{u} + \mathbf{x}_0 \rangle = \alpha$$

$$\Leftrightarrow \quad \langle \mathbf{a}, \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 + \mathbf{x}_0 \rangle = \alpha$$

$$\Leftrightarrow \quad \langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle = \alpha$$

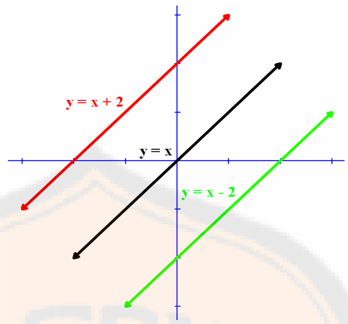
sehingga $\mathbf{x} \in H_{\mathbf{a}}^{\alpha}$ dengan $\mathbf{a}$ sebagai normal bidang hiper $H_{\mathbf{a}}^{\alpha}$. Karena $\mathbf{u} + \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}$, dan karena $\mathbf{u} \in H_{\mathbf{a}}^{0}$ dan $\mathbf{x} \in H_{\mathbf{a}}^{\alpha}$, maka

$$H_{\mathbf{a}}^{0} + \mathbf{x}_0 \subseteq H_{\mathbf{a}}^{\alpha}, \qquad \mathbf{x}_0 \in H_{\mathbf{a}}^{\alpha} \qquad \blacksquare$$

Contoh 3.A.2

Gambar dalam $\mathbb{R}^2$ dan $\mathbb{R}^3$ berikut mengilustrasikan teorema 3.A.4.

Dalam $\mathbb{R}^2$ bidang hiper berupa garis.

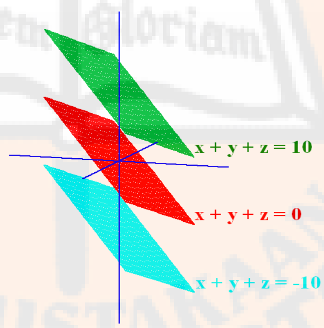


$y = x \quad \Leftrightarrow \quad H_{\mathbf{a}}^{0}, \quad \mathbf{a} = (1,-1)^T$

$y = x + 2 \quad \Leftrightarrow \quad H_{\mathbf{a}}^{2} = H_{\mathbf{a}}^{0} + (0,2)^T, \quad (0,2)^T \in H_{\mathbf{a}}^{2}$

$y = x - 2 \quad \Leftrightarrow \quad H_{\mathbf{a}}^{-2} = H_{\mathbf{a}}^{0} + (2,0)^T, \quad (2,0)^T \in H_{\mathbf{a}}^{-2}$

Dalam $\mathbb{R}^3$ bidang hiper berupa bidang.



$y + x + z = 0 \quad \Leftrightarrow \quad H_{\mathbf{a}}^{0}, \quad \mathbf{a} = (1,1,1)^T$

$y + x + z = 10 \quad \Leftrightarrow \quad H_{\mathbf{a}}^{10} = H_{\mathbf{a}}^{0} + (0,0,10)^T, \qquad (0,0,10)^T \in H_{\mathbf{a}}^{10}$

$y + x + z = -10 \quad \Leftrightarrow \quad H_{\mathbf{a}}^{-10} = H_{\mathbf{a}}^{0} + (0,0,-10)^T, \qquad (0,0,-10)^T \in H_{\mathbf{a}}^{10}$ ■

Definisi 3.A.6 Bidang Hiper Paralel

Dua bidang hiper $H_{\mathbf{a}}^{\alpha_1}$ dan $H_{\mathbf{a}}^{\alpha_2}$ dikatakan *paralel* jika normal dari kedua bidang hiper tersebut merupakan perkalian skalar antara satu dengan lainnya.

■

B. Sifat-sifat Himpunan Konveks Dalam $\mathbb{R}^n$

Suatu himpunan dikatakan konveks jika sebarang dua vektor $\mathbf{x}_1$ dan $\mathbf{x}_2$ anggota himpunan tersebut, garis yang menghubungkan kedua vektor itu juga termuat dalam himpunan yang dibicarakan.

Definisi 3.B.1 Konveks

Himpunan C $\subseteq \mathbb{R}^n$ dikatakan konveks jika untuk setiap pasangan vektor $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2 \in$ C, maka segmen garis

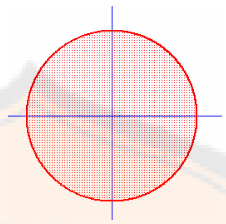
$$[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2] = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} = \alpha\mathbf{x}_1 + \beta\mathbf{x}_2, \alpha \geq 0, \beta \geq 0, \alpha + \beta = 1\}$$

termuat di C.

Contoh 3.B.1

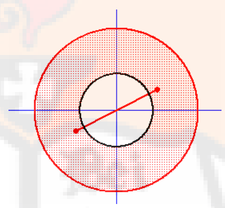
Dalam $\mathbb{R}^2$ gambar dari himpunan-himpunan berikut mengilustrasikan himpunan konveks dan himpunan bukan konveks:

(a) $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \le 1\}$



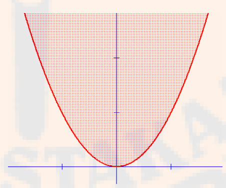
Konveks

(b) $\left\{(x, y) \mid \frac{1}{2} < x^2 + y^2 \le 1\right\}$



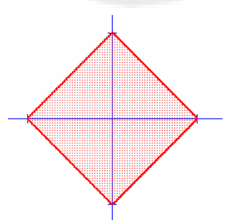
Bukan Konveks

(c) $\{(x, y) \mid y \ge x^2\}$



Konveks

(d) $\{(x, y) \mid |x| + |y| \le 1\}$



Konveks

(e) $\{(x, y) \mid y \geq 1/(1 + x^2)\}$

Bukan Konveks ■

Ruang-*n* ($\mathbb{R}^n$) adalah himpunan konveks. Walaupun sifat-sifat dari himpunan konveks "jelas secara geometris" dalam $\mathbb{R}^2$ dan $\mathbb{R}^3$, sifat-sifat ini perlu dibuktikan dalam $\mathbb{R}^n$.

Untuk membuktikan hal ini, ambil sebarang $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ dan skalar $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dari teorema 2.A.1.a, berlaku bahwa $\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Untuk $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$ di mana $\alpha + \beta = 1$, maka $\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}$ berupa segmen garis tertutup $[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$. Jadi $[\mathbf{x}, \mathbf{y}] \subseteq \mathbb{R}^n$. ■

Bidang hiper $H_{\mathbf{a}}^{\alpha} = \{\mathbf{x} \mid \langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle = \alpha\}$ adalah konveks. Sebagai bukti, ambil vektor **x** dan **y** $\in H_{\mathbf{a}}^{\alpha}$ di mana **a** adalah normal bidang hiper dan α adalah skalar. Vektor **x** memenuhi $\langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle = \alpha$ dan vektor **y** memenuhi $\langle \mathbf{a}, \mathbf{y} \rangle = \alpha$. Akan ditunjukkan bahwa $[\mathbf{x}, \mathbf{y}] \subseteq H_{\mathbf{a}}^{\alpha}$.

Ambil sebarang $\mathbf{k} \in [\mathbf{x}, \mathbf{y}]$, maka untuk $\lambda \geq 0, \mu \geq 0$ dan $\lambda + \mu = 1$ berlaku:

$$\mathbf{k} = \lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y}$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathbf{k} = \lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \mu(y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathbf{k} = (\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n) + (\mu y_1, \mu y_2, ..., \mu y_n)$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathbf{k} = (\lambda x_1 + \mu y_1,\ \lambda x_2 + \mu y_2,\ ...,\ \lambda x_n + \mu y_n)$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathbf{k} = (k_1, k_2, ..., k_n)$$

di mana $k_i = \lambda x_i + \mu y_i$ untuk i = 1, 2, ..., n. Vektor **k** memenuhi keanggotaan himpunan bidang hiper $H_{\mathbf{a}}^{\alpha}$ di mana **a** adalah normalnya yang ditunjukkan sebagai berikut:

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{k} \rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i k_i$$

$$\Leftrightarrow \quad \langle \mathbf{a}, \mathbf{k} \rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i (\lambda x_i + \mu y_i)$$

$$\Leftrightarrow \quad \langle \mathbf{a}, \mathbf{k} \rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i \lambda x_i + \sum_{i=1}^{n} a_i \mu y_i$$

$$\Leftrightarrow \quad \langle \mathbf{a}, \mathbf{k} \rangle = \lambda \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + \mu \sum_{i=1}^{n} a_i y_i$$

$$\Leftrightarrow \quad \langle \mathbf{a}, \mathbf{k} \rangle = \lambda \langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle + \mu \langle \mathbf{a}, \mathbf{y} \rangle$$

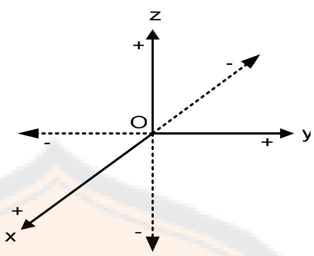
$$\Leftrightarrow \quad \langle \mathbf{a}, \mathbf{k} \rangle = \lambda \alpha + \mu \alpha$$

$$\Leftrightarrow \quad \langle \mathbf{a}, \mathbf{k} \rangle = (\lambda + \mu) \alpha$$

$$\Leftrightarrow \quad \langle \mathbf{a}, \mathbf{k} \rangle = \alpha$$

Jadi untuk setiap $\mathbf{k} \in [\mathbf{x}, \mathbf{y}]$, maka $\mathbf{k} \in H_{\mathbf{a}}^{\alpha}$. ■

Dalam $\mathbb{R}^3$ sebuah bidang menentukan dua ruang.



Gambar 3.B.1 Bidang Cartesius $\mathbb{R}^3$

Perhatikan bidang-zoy pada gambar 3.B.1. Bidang tersebut membagi ruang menjadi dua bagian, yakni ruang yang memuat absis positif dan ruang yang memuat absis negatif. Bidang-xoz juga membagi ruang menjadi dua bagian, yakni ruang yang memuat ordinat positif dan ruang yang memuat ordinat negatif. Sedangkan bidang-xoy membagi ruang menjadi ruang yang memuat aplikat positif dan ruang yang memuat aplikat negatif.

Ruang yang memuat absis, ordinat dan aplikat positif selanjutnya disebut sebagai *setengah ruang positif*, dan ruang yang memuat absis, ordinat dan aplikat negatif selanjutnya disebut sebagai *setengah ruang negatif*.

Dalam $\mathbb{R}^n$ didefinisikan setengah ruang positif dan negatif yang dipisahkan oleh bidang hiper $H_{\mathbf{a}}^{\alpha}$ dan dilambangkan dengan $H_{\mathbf{a}}^{\alpha+}$ dan $H_{\mathbf{a}}^{\alpha-}$.

Defini 3.B.2 Setengah Ruang dalam $\mathbb{R}^n$

Setengah ruang positif oleh $H_{\mathbf{a}}^{\alpha}$, dilambangkan dengan $H_{\mathbf{a}}^{\alpha+}$, didefinisikan sebagai $H_{\mathbf{a}}^{\alpha+} = \{\mathbf{x} \mid \langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle > \alpha\}$ dan setengah ruang negatif $H_{\mathbf{a}}^{\alpha-}$ didefinisikan sebagai $H_{\mathbf{a}}^{\alpha-} = \{\mathbf{x} \mid \langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle < \alpha\}$.

Definisi 3.B.3 Setengah Ruang Tertutup dalam $\mathbb{R}^n$

Setengah ruang positif tertutup, dilambangkan dengan $\overline{H}_{\mathbf{a}}^{\alpha+}$, didefinisikan sebagai *pemampat* dari $H_{\mathbf{a}}^{\alpha+}$. Setengah ruang negatif tertutup $\overline{H}_{\mathbf{a}}^{\alpha-}$ didefinisikan sebagai *pemampat* dari $H_{\mathbf{a}}^{\alpha-}$.

Teorema 3.B.1

Setengah ruang positif tertutup $\overline{H}_{\mathbf{a}}^{\alpha+} = \{\mathbf{x} \mid \langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle \geq \alpha\}$, dan

setengah ruang negatif tertutup $\overline{H}_{\mathbf{a}}^{\alpha-} = \{\mathbf{x} \mid \langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle \leq \alpha\}$.

Bukti:

Perhatikan himpunan $\overline{H}_{\mathbf{a}}^{\alpha+} = \{\mathbf{x} \mid \langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle \geq \alpha\}$. Berdasarkan definisi 2.G.6, maka akan ditunjukkan bahwa $\overline{H}_{\mathbf{a}}^{\alpha+}$ beranggotakan titik-titik limitnya.

i. Ambil $\mathbf{x} \in \{\mathbf{x} \mid \langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle > \alpha\}$ maka dari definisi 3.B.2, $\mathbf{x} \in H_{\mathbf{a}}^{\alpha+}$ di mana **a** adalah normal bidang hiper dan α adalah skalar. Akan ditunjukkan bahwa $\mathbf{x} \in H_{\mathbf{a}}^{\alpha+}$ adalah titik limit $\overline{H}_{\mathbf{a}}^{\alpha+}$.

   $\forall \varepsilon > 0$ yang diberikan, selalu $\exists \mathbf{y} \neq \mathbf{x}$, di mana $\mathbf{y} \in H_{\mathbf{a}}^{\alpha+}$ dan $\mathbf{y} \in B(\mathbf{x}, \varepsilon)$, sehingga $\mathbf{x} \in H_{\mathbf{a}}^{\alpha+}$ adalah titik limit $\overline{H}_{\mathbf{a}}^{\alpha+}$, yakni jika diambil $\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| < \varepsilon$.

ii. Ambil $\mathbf{x} \in \{\mathbf{x} \mid \langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle = \alpha\}$, maka dari definisi 3.A.5, $\mathbf{x} \in H_{\mathbf{a}}^{\alpha}$ di mana $\mathbf{a}$ adalah normal bidang hiper dan α adalah skalar. Akan ditunjukkan bahwa $\mathbf{x} \in H_{\mathbf{a}}^{\alpha}$ adalah titik limit $\overline{H}_{\mathbf{a}}^{\alpha+}$.

Untuk $\forall \varepsilon > 0$ dapat dibentuk vektor $\mathbf{y}_k \neq \mathbf{x}$ dengan $(\mathbf{y}_k - \mathbf{x}) = k\mathbf{a}$ di mana $k > 0$ dan $\|\mathbf{y}_k - \mathbf{x}\| < \frac{1}{k}\varepsilon$.

Karena vektor $(\mathbf{y}_k - \mathbf{x}) = k\mathbf{a}$ maka $\mathbf{y}_k \in H_{\mathbf{a}}^{\alpha+}$. Untuk menunjukkan hal ini, perhatikan perkalian skalar berikut:

$\langle \mathbf{a}, \mathbf{y}_k - \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{y}_k \rangle - \langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{y}_k \rangle - \alpha$ ....(1)

Sementara,

$\langle \mathbf{a}, \mathbf{y}_k - \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{a}, k\mathbf{a} \rangle = k\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle = k\|\mathbf{a}\|^2$ ....(2)

Dari (1) dan (2) diperoleh:

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{y}_k \rangle - \alpha = k\|\mathbf{a}\|^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \langle \mathbf{a}, \mathbf{y}_k \rangle = k\|\mathbf{a}\|^2 + \alpha$$

Karena $k > 0$ dan $\|\mathbf{a}\|^2 > 0$ maka $\langle \mathbf{a}, \mathbf{y}_k \rangle > \alpha$, sehingga $\mathbf{y}_k \in H_{\mathbf{a}}^{\alpha+}$.

Selanjutnya karena $\mathbf{y}_k \neq \mathbf{x}$ dan $\|\mathbf{y}_k - \mathbf{x}\| < \frac{1}{k}\varepsilon$ di mana $k > 0$ maka $\mathbf{y}_k \in B(\mathbf{x}, \varepsilon)$.

Jadi $\forall \varepsilon > 0$ terdapat $\mathbf{y} \neq \mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in H_{\mathbf{a}}^{\alpha+}$ dan $\mathbf{y} \in B(\mathbf{x}, \varepsilon)$, sehingga $\mathbf{x} \in H_{\mathbf{a}}^{\alpha}$ adalah titik limit $\overline{H}_{\mathbf{a}}^{\alpha+}$.

iii. Ambil $\mathbf{x} \notin \overline{H}_{\mathbf{a}}^{\alpha+}$ di mana $\mathbf{a}$ adalah normal bidang hiper dan α adalah skalar. Akan ditunjukkan bahwa $\mathbf{x}$ bukan titik limit $\overline{H}_{\mathbf{a}}^{\alpha+}$.

Untuk $\forall \mathbf{y} \in \overline{H}_{\mathbf{a}}^{\alpha+}$ jika diambil $\varepsilon = \min\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|$ maka $\forall \mathbf{z} \neq \mathbf{x}$, $\mathbf{z} \in B(\mathbf{x}, \varepsilon)$ tetapi $\mathbf{z} \notin \overline{H}_{\mathbf{a}}^{\alpha+}$. Jadi $\forall \mathbf{x} \notin \overline{H}_{\mathbf{a}}^{\alpha+}$, $\mathbf{x}$ bukan titik limit $\overline{H}_{\mathbf{a}}^{\alpha+}$.

Pembuktian secara analog juga berlaku bagi $\overline{H}_{\mathbf{a}}^{\alpha-} = \{\mathbf{x} \mid \langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle \leq \alpha\}$. ■

Setengah ruang bukan merupakan subruang dari $\mathbb{R}^n$. Untuk menunjukkan hal ini, ambil sebarang $\mathbf{x} \in H_{\mathbf{a}}^{\alpha+}$ maka $\mathbf{x}$ memenuhi $\langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle > \alpha$. Dari definisi 2.C.1, untuk skalar $\beta < 0$ berlaku:

$$\langle \mathbf{a}, \beta\mathbf{x} \rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i \beta x_i = \beta \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = \beta \langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle$$

Karena $\beta < 0$ dan $\langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle > \alpha$ maka $\langle \mathbf{a}, \beta\mathbf{x} \rangle < \alpha$ sehingga $\beta\mathbf{x} \notin H_{\mathbf{a}}^{\alpha+}$.

Karena $\overline{H}_{\mathbf{a}}^{\alpha+} = H_{\mathbf{a}}^{\alpha+} \cup H_{\mathbf{a}}^{\alpha}$ maka $H_{\mathbf{a}}^{\alpha+} \subseteq \overline{H}_{\mathbf{a}}^{\alpha+}$, dan karena $H_{\mathbf{a}}^{\alpha+}$ bukan merupakan subruang dari $\mathbb{R}^n$ maka $\overline{H}_{\mathbf{a}}^{\alpha+}$ juga bukan merupakan subruang dari $\mathbb{R}^n$.

Pernyataan yang sama juga berlaku bagi $H_{\mathbf{a}}^{\alpha-}$ dan $\overline{H}_{\mathbf{a}}^{\alpha-}$, yaitu bahwa $H_{\mathbf{a}}^{\alpha-}$ dan $\overline{H}_{\mathbf{a}}^{\alpha-}$ masing-masing bukan merupakan subruang dari $\mathbb{R}^n$. ■

Jika $\mathbf{x}_0 \in H_{\mathbf{a}}^{\alpha}$, maka $\langle \mathbf{a}, \mathbf{x}_0 \rangle = \alpha$. Dengan demikian, untuk $\mathbf{x} \in H_{\mathbf{a}}^{\alpha+}$, berlaku

$$
\begin{aligned}
&& \langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle &> \alpha \\
\Leftrightarrow && \langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle &> \langle \mathbf{a}, \mathbf{x}_0 \rangle \\
\Leftrightarrow && \langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle - \langle \mathbf{a}, \mathbf{x}_0 \rangle &> 0 \\
\Leftrightarrow && \langle \mathbf{a}, \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \rangle &> 0
\end{aligned}
$$

untuk semua $\mathbf{x} \in H_{\mathbf{a}}^{\alpha+}$.

Dari teorema 2.A.3, diperoleh $\langle \mathbf{a}, \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \rangle = \|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \cos\theta$. Karena $\langle \mathbf{a}, \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \rangle$ selalu positif sementara $\|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| > 0$ maka $\cos\theta > 0$. Jadi berdasarkan definisi 2.A.6, untuk sebarang vektor $\mathbf{x} \in H_{\mathbf{a}}^{\alpha+}$ berlaku bahwa besar sudut yang dibentuk antara $\mathbf{a}$ dan $\mathbf{x} - \mathbf{x}_0$ adalah antara 0 rad dan $\pi/2$ rad.

Sebaliknya, untuk sebarang vektor $\mathbf{x} \in H_{\mathbf{a}}^{\alpha-}$ berlaku bahwa besar sudut yang dibentuk antara $\mathbf{a}$ dan $\mathbf{x} - \mathbf{x}_0$ adalah antara $\pi/2$ rad dan π rad. ■

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $H_{\mathbf{a}}^{\alpha+}$ adalah himpunan konveks. Andaikan $\mathbf{x}_1$ dan $\mathbf{x}_2 \in H_{\mathbf{a}}^{\alpha+}$ maka akan ditunjukkan $[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2] \subseteq H_{\mathbf{a}}^{\alpha+}$. Misalkan $\mathbf{x} \in [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2]$. Maka ada skalar $\lambda \geq 0, \mu \geq 0$ dengan $\lambda + \mu = 1$ sehingga $\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}_1 + \mu \mathbf{x}_2$.

Karenanya,

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{a}, \lambda \mathbf{x}_1 + \mu \mathbf{x}_2 \rangle = \lambda \langle \mathbf{a}, \mathbf{x}_1 \rangle + \mu \langle \mathbf{a}, \mathbf{x}_2 \rangle > \lambda\alpha + \mu\alpha = (\lambda + \mu)\alpha = \alpha$$

Jadi untuk $\mathbf{x} \in [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2]$, berlaku bahwa $\mathbf{x} \in H_{\mathbf{a}}^{\alpha+}$.

Dengan cara yang analog dapat ditunjukkan bahwa $H_{\mathbf{a}}^{\alpha-}$, $\overline{H}_{\mathbf{a}}^{\alpha+}$ dan $\overline{H}_{\mathbf{a}}^{\alpha-}$ adalah himpunan-himpunan konveks. ■

Contoh 3.B.2

Ortan non negatif dalam $\mathbb{R}^n = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n),\ x_i \geq 0,\ i = 1,2,...,n\}$ adalah konveks. Untuk menunjukkan hal ini, ambil dua vektor **x** dan **y** anggota ortan non negatif dalam $\mathbb{R}^n$. Maka $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ dan $\mathbf{y} = (y_1, y_2, ..., y_n)$ di mana $x_i \geq 0$ dan $y_i \geq 0$ untuk $i = 1,2,...,n$. Akan ditunjukkan bahwa segmen garis $[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$ ada dalam ortan non negatif $\mathbb{R}^n$.

Ambil sebarang $\mathbf{k} \in [\mathbf{x}, \mathbf{y}]$, maka $\mathbf{k} = \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}$ di mana $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$ dan $\alpha + \beta = 1$. Untuk $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ dan $\mathbf{y} = (y_1, y_2, ..., y_n)$, diperoleh:

$$\mathbf{k} = \alpha(x_1, x_2, ..., x_n) + \beta(y_1, y_2, ..., y_n)$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathbf{k} = (\alpha x_1, \alpha x_2, ..., \alpha x_n) + (\beta y_1, \beta y_2, ..., \beta y_n)$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathbf{k} = (\alpha x_1 + \beta y_1,\ \alpha x_2 + \beta y_2,\ ...,\ \alpha x_n + \beta y_n)$$

Karena untuk setiap $x_i \geq 0$ dan $y_i \geq 0$ di mana $i = 1,2,...,n$ dan karena $\alpha \geq 0, \beta \geq 0, \alpha + \beta = 1$ maka $\alpha x_i + \beta y_i \geq 0$ sehingga $[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$ ada dalam ortan non negatif $\mathbb{R}^n$. ■

Contoh 3.B.3

Bola terbuka $B(\mathbf{0},r)=\{\mathbf{x}\mid\|\mathbf{x}\|<r\}$ adalah konveks. Pembuktiannya sebagai berikut. Ambil **a** dan **b** $\in B(\mathbf{0},r)$, maka $\|\mathbf{a}\|<r$ dan $\|\mathbf{b}\|<r$. Akan ditunjukkan bahwa $[\mathbf{a},\mathbf{b}]\subseteq B(\mathbf{0},r)$.

Ambil sebarang $\mathbf{k}\in[\mathbf{a},\mathbf{b}]$. Maka untuk $\alpha\geq 0,\beta\geq 0$ dan $\alpha+\beta=1$ berlaku $\mathbf{k}=\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}$. Diperoleh panjang vektor **k**:

$$\|\mathbf{k}\|=\|\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}\|\leq\|\alpha\mathbf{a}\|+\|\beta\mathbf{b}\|=\alpha\|\mathbf{a}\|+\beta\|\mathbf{b}\|$$

Karena $\|\mathbf{a}\|<r$ dan $\|\mathbf{b}\|<r$ maka $\|\mathbf{k}\|\leq\alpha\|\mathbf{a}\|+\beta\|\mathbf{b}\|<\alpha r+\beta r=(\alpha+\beta)r=r$.

Jadi untuk sebarang $\mathbf{k}\in[\mathbf{a},\mathbf{b}]$ maka $\mathbf{k}\in B(\mathbf{0},r)$. ■

Saat kita berbicara tentang himpunan konveks, maka kita asumsikan bahwa *himpunan konveks tidak kosong*.

Jika A dan B adalah sebarang dua himpunan dalam $\mathbb{R}^n$ dan jika λ dan μ adalah skalar-skalar, kita definisikan

$$\lambda A+\mu B=\{\mathbf{x}\mid\mathbf{x}=\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b},\mathbf{a}\in A,\mathbf{b}\in B\}$$

Lema 3.B.1

Jika A dan B adalah himpunan-himpunan konveks dalam $\mathbb{R}^n$ dan α dan μ adalah skalar-skalar, maka $\lambda A+\mu B$ adalah konveks.

Bukti:

Misalkan $\mathbf{x}_1$ dan $\mathbf{x}_2$ $\in$ $\lambda A + \mu B$ maka harus ditunjukkan bahwa $[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2]$ $\subseteq$ $\lambda A + \mu B$. Diketahui $\mathbf{x}_1 = \lambda \mathbf{a}_1 + \mu \mathbf{b}_1$ untuk sebarang $\mathbf{a}_1 \in A$ dan $\mathbf{b}_1 \in B$ dan $\mathbf{x}_2 = \lambda \mathbf{a}_2 + \mu \mathbf{b}_2$ untuk sebarang $\mathbf{a}_2 \in A$ dan $\mathbf{b}_2 \in B$. Ambil sebarang $\mathbf{x} \in [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2]$, maka ada skalar-skalar $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$ dengan $\alpha + \beta = 1$ sehingga $\mathbf{x} = \alpha \mathbf{x}_1 + \beta \mathbf{x}_2$. Karenanya,

$$
\begin{aligned}
& \mathbf{x} &&= \alpha \mathbf{x}_1 + \beta \mathbf{x}_2 \\
\Leftrightarrow\quad & \mathbf{x} &&= \alpha(\lambda \mathbf{a}_1 + \mu \mathbf{b}_1) + \beta(\lambda \mathbf{a}_2 + \mu \mathbf{b}_2) \\
\Leftrightarrow\quad & \mathbf{x} &&= \lambda(\alpha \mathbf{a}_1 + \beta \mathbf{a}_2) + \mu(\alpha \mathbf{b}_1 + \beta \mathbf{b}_2) \\
\Leftrightarrow\quad & \mathbf{x} &&= \lambda \mathbf{a}_3 + \mu \mathbf{b}_3
\end{aligned}
$$

di mana $\mathbf{a}_3 = (\alpha \mathbf{a}_1 + \beta \mathbf{a}_2)$ dan $\mathbf{b}_3 = (\alpha \mathbf{b}_1 + \beta \mathbf{b}_2)$.

Karena A konveks maka $\mathbf{a}_3 \in A$ dan karena B juga konveks maka $\mathbf{b}_3 \in B$. Jadi, $[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2] \subseteq \lambda A + \mu B$. ■

Lema 3.B.2

Himpunan $C \subseteq \mathbb{R}^n$ adalah konveks jika dan hanya jika $\lambda C + \mu C = (\lambda + \mu) C$ untuk semua $\lambda \geq 0$ dan $\mu \geq 0$.

Bukti:

⇨ Jika C konveks maka untuk semua $\lambda \geq 0$ dan $\mu \geq 0$:

$$\lambda C + \mu C = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} = \lambda \mathbf{c} + \mu \mathbf{c},\ \lambda \geq 0,\ \mu \geq 0,\ \mathbf{c} \in C\}$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda C + \mu C = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} = (\lambda + \mu)\mathbf{c},\ \alpha \geq 0,\ \mu \geq 0,\ \mathbf{c} \in C\}$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda C + \mu C = (\lambda + \mu)C$$

$\Leftarrow$ Ambil $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2 \in C$ di mana $\lambda C + \mu C = (\lambda + \mu)C$ dengan $\lambda \geq 0$ dan $\mu \geq 0$.

Akan ditunjukkan bahwa $[\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2] \subseteq C$.

Karena $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2 \in C$ maka berlaku $\lambda \mathbf{c}_1 + \mu \mathbf{c}_1 = (\lambda + \mu)\mathbf{c}_1$ dan $\lambda \mathbf{c}_2 + \mu \mathbf{c}_2 = (\lambda + \mu)\mathbf{c}_2$. Ambil $\mathbf{c} \in [\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2]$, maka untuk $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$ dengan $\alpha + \beta = 1$ berlaku $\mathbf{c} = \alpha \mathbf{c}_1 + \beta \mathbf{c}_2$. $\mathbf{c} \in C$ jika:

$$\lambda \mathbf{c} + \mu \mathbf{c} = \lambda(\alpha \mathbf{c}_1 + \beta \mathbf{c}_2) + \mu(\alpha \mathbf{c}_1 + \beta \mathbf{c}_2)$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda \mathbf{c} + \mu \mathbf{c} = \lambda\alpha \mathbf{c}_1 + \lambda\beta \mathbf{c}_2 + \mu\alpha \mathbf{c}_1 + \mu\beta \mathbf{c}_2$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda \mathbf{c} + \mu \mathbf{c} = (\lambda\alpha \mathbf{c}_1 + \mu\alpha \mathbf{c}_1) + (\lambda\beta \mathbf{c}_2 + \mu\beta \mathbf{c}_2)$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda \mathbf{c} + \mu \mathbf{c} = (\lambda + \mu)(\alpha \mathbf{c}_1) + (\lambda + \mu)(\beta \mathbf{c}_2)$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda \mathbf{c} + \mu \mathbf{c} = (\lambda + \mu)(\alpha \mathbf{c}_1 + \beta \mathbf{c}_2)$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda \mathbf{c} + \mu \mathbf{c} = (\lambda + \mu)\mathbf{c}$$

Sehingga $[\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2] \subseteq C$ di mana $\lambda \geq 0$ dan $\mu \geq 0$. ■

Lema 3.B.3

Misalkan $A_1 \subseteq \mathbb{R}^{n_1}$, $A_2 \subseteq \mathbb{R}^{n_2}$, ..., $A_k \subseteq \mathbb{R}^{n_k}$ dan misalkan A_1, A_2, …, A_k konveks.

Maka A_1 x A_2 x … x A_k adalah himpunan konveks dalam $\mathbb{R}^{n_1+n_2+\ldots+n_k}$.

Bukti:

Misalkan $\mathbb{A} = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_k$. Untuk sebarang vektor **x** dan **y** $\in \mathbb{A}$, $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k)$ dan $\mathbf{y} = (\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_k)$ di mana untuk i = 1, 2, ..., k, $\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i \in A_i$ dan masing-masing A_i konveks. Harus ditunjukkan bahwa $\forall \mathbf{p} \in [\mathbf{x}, \mathbf{y}] \Rightarrow \mathbf{p} \in \mathbb{A}$.

Untuk $\mathbf{p} \in [\mathbf{x}, \mathbf{y}]$, maka ada skalar $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$ dan $\alpha + \beta = 1$ sedemikian hingga $\mathbf{p} = \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}$. Karena $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k)$ dan $\mathbf{y} = (\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_k)$, diperoleh:

$$\mathbf{p} = \alpha(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k) + \beta(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_k)$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathbf{p} = (\alpha\mathbf{x}_1, \alpha\mathbf{x}_2, \ldots, \alpha\mathbf{x}_k) + (\beta\mathbf{y}_1, \beta\mathbf{y}_2, \ldots, \beta\mathbf{y}_k)$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathbf{p} = (\alpha\mathbf{x}_1 + \beta\mathbf{y}_1,\ \alpha\mathbf{x}_2 + \beta\mathbf{y}_2,\ \ldots,\ \alpha\mathbf{x}_k + \beta\mathbf{y}_k)$$

Karena $\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i \in A_i$ dan A_i konveks untuk $i = 1, 2, \ldots, k$, maka $\alpha\mathbf{x}_i + \beta\mathbf{y}_i \in A_i$. Jadi $\mathbf{p} \in \mathbb{A}$. ■

Lema 3.B.4

Jika A adalah konveks, maka pemampat $\overline{A}$ juga konveks.

Bukti:

Misalkan **x** dan $\mathbf{y} \in \overline{A}$, maka harus ditunjukkan bahwa $[\mathbf{x}, \mathbf{y}] \subseteq \overline{A}$. Ambil $\mathbf{z} \in [\mathbf{x}, \mathbf{y}]$, maka $\mathbf{z} = \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}$ untuk semua $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$ dan $\alpha + \beta = 1$. Dari akibat 2.H.2, ada barisan vektor $\{\mathbf{x}_k\}$ dan $\{\mathbf{y}_k\}$ di mana

$\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k \in A$ dan $k > 0$ sedemikian sehingga $\lim \mathbf{x}_k = \mathbf{x}$ dan $\lim \mathbf{y}_k = \mathbf{y}$. Karena A konveks, maka ada $\mathbf{z}_k = \alpha \mathbf{x}_k + \beta \mathbf{y}_k \in A$ untuk setiap k. Untuk $k \to \infty$ diperoleh

$$
\begin{aligned}
& \lim \mathbf{z}_k = \lim(\alpha \mathbf{x}_k + \beta \mathbf{y}_k) \\
\Leftrightarrow \quad & \lim \mathbf{z}_k = \lim \alpha \mathbf{x}_k + \lim \beta \mathbf{y}_k \\
\Leftrightarrow \quad & \lim \mathbf{z}_k = \alpha \lim \mathbf{x}_k + \beta \lim \mathbf{y}_k \\
\Leftrightarrow \quad & \lim \mathbf{z}_k = \alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y} \\
\Leftrightarrow \quad & \lim \mathbf{z}_k = \mathbf{z}
\end{aligned}
$$

Berdasarkan akibat 2.H.1 disimpulkan $\mathbf{z} \in \overline{A}$. Jadi $\overline{A}$ konveks. ■

Lema 3.B.5

Misalkan C himpunan konveks dengan int(C) ≠ Ø. Untuk sebarang $\mathbf{x}_1 \in$ int(C) dan $\mathbf{x}_2 \in \overline{\mathrm{C}}$, maka segmen garis $[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \subseteq \mathrm{int}(\mathrm{C})$.

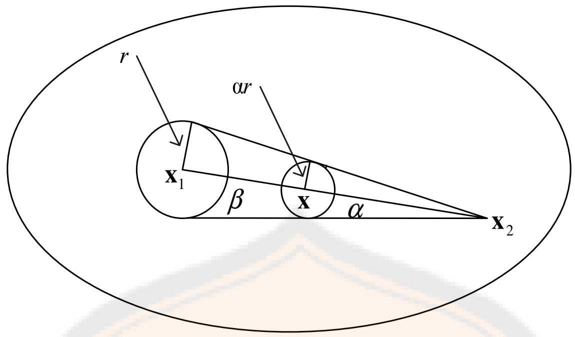
Bukti:

Dalam pembuktian ini akan ditinjau melalui dua kasus, yaitu:

i. Untuk $\mathbf{x}_1 \in$ int(C) dan $\mathbf{x}_2 \in$ C.

ii. Untuk $\mathbf{x}_1 \in$ int(C), $\mathbf{x}_2 \in \overline{C}$ dan $\mathbf{x}_2 \notin C$.

Untuk kasus i. asumsikan bahwa $\mathbf{x}_1 \in$ int(C) dan $\mathbf{x}_2 \in$ C. Gambar 3.B.2 berikut ini akan membantu kita mengabstraksikan pembuktian. Di dalam gambar diasumsikan bahwa $\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\| = 1$. 5



$$\frac{\alpha r}{\alpha} = \frac{r}{1}$$

Gambar 3.B.2 $\mathbf{x}_1 \in \text{int(C)}$ dan $\mathbf{x}_2 \in \text{C}$

Akan ditunjukkan bahwa untuk sebarang vektor $\mathbf{x} \in [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$, maka $\mathbf{x} \in \text{int}(C)$. Karena $\mathbf{x}_1 \in \text{int}(C)$, tinggal menunjukkan untuk $\mathbf{x} \in (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$, maka $\mathbf{x} \in \text{int}(C)$.

Untuk sebarang $\mathbf{x} \in (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$, maka $\mathbf{x} = \alpha \mathbf{x}_1 + \beta \mathbf{x}_2$ dengan $\alpha > 0, \beta > 0$ dan $\alpha + \beta = 1$. Karena $\mathbf{x}_1 \in \text{int}(C)$, maka ada lingkaran dengan jari-jari $r > 0$ berpusat di $\mathbf{x}_1$ yang seluruh anggota lingkarannya adalah anggota C. Dari $\mathbf{x}_2$ dibuat suatu garis singgung ke lingkaran yang berpusat di $\mathbf{x}_1$, dan dari $\mathbf{x}$ dibuat suatu garis yang tegak lurus $(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)$ sedemikian sehingga titik ujungnya tepat pada garis singgung, maka akan terbentuk segitiga yang sebangun sehingga panjang garis ini adalah αr. Karena $\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}\| = \alpha \|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\|$ dengan segitiga-segitiga yang sebangun, kita buat lingkaran baru dengan pusat di $\mathbf{x}$ dan jari-jari αr yang terletak dalam C. Ini akan menunjukkan bahwa $\mathbf{x} \in \text{int}(C)$.

Untuk $\mathbf{x}_1 \in \operatorname{int}(C)$, ada $r > 0$ sedemikian hingga $B(\mathbf{x}_1, r) \subset C$. Jika $\mathbf{x} \in (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$, maka $\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x}_1 + \beta\mathbf{x}_2$ dengan $\alpha > 0, \beta > 0$ dan $\alpha + \beta = 1$. Harus ditunjukkan bahwa $B(\mathbf{x}, \alpha r) \subset C$, sehingga $\mathbf{x} \in \operatorname{int}(C)$.

Untuk sebarang $\mathbf{y} \in B(\mathbf{x}, \alpha r)$ dan sebarang $\mathbf{z} = \mathbf{x}_1 + \dfrac{\mathbf{y} - \mathbf{x}}{\alpha}$, berlaku

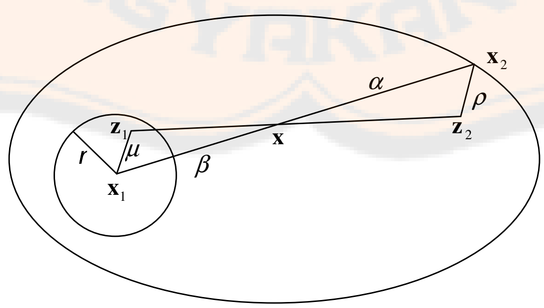
$\|\mathbf{z} - \mathbf{x}_1\| = \dfrac{\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|}{\alpha} < \dfrac{\alpha r}{\alpha} = r$, karena itu $\mathbf{z} \in B(\mathbf{x}_1, r)$ dan $\mathbf{z} \in C$.

Vektor $\mathbf{y}$ menjadi

$$
\begin{aligned}
& \mathbf{y} = \alpha(\mathbf{z} - \mathbf{x}_1) + \mathbf{x} \\
\Leftrightarrow\quad & \mathbf{y} = \alpha(\mathbf{z} - \mathbf{x}_1) + \alpha\mathbf{x}_1 + \beta\mathbf{x}_2 \\
\Leftrightarrow\quad & \mathbf{y} = \alpha\mathbf{z} + \beta\mathbf{x}_2
\end{aligned}
$$

Karena C konveks, $\mathbf{y} \in$ C sehingga $\mathbf{x} \in \operatorname{int}(C)$.

Sekarang untuk kasus ii. ambil $\mathbf{x}_1 \in$ int(C), $\mathbf{x}_2 \in \overline{C}$ dan $\mathbf{x}_2 \notin C$. Perhatikan gambar 3.B.3. Pada gambar ini juga diasumsikan bahwa $\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\| = 1$.



$\dfrac{\rho}{\alpha} = \dfrac{\mu}{\beta} < \dfrac{r}{\beta}$

Gambar 3.B.3 $\mathbf{x}_1 \in$ int(C), $\mathbf{x}_2 \in \overline{C}$ dan $\mathbf{x}_2 \notin C$

Karena $\mathbf{x}_1 \in \operatorname{int}(C)$, ada $r > 0$ sedemikian hingga $B(\mathbf{x}_1, r) \subset C$. Untuk membuktikan lema 3.B.5, harus ditunjukkan bahwa jika $\mathbf{x} \in (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$, maka $\mathbf{x} \in \operatorname{int}(C)$.

Jika $\mathbf{x} \in (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$, ada $\alpha > 0, \beta > 0, \alpha + \beta = 1$ sehingga $\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x}_1 + \beta\mathbf{x}_2$, dan berdasarkan lema 3.A, $\dfrac{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_2\|} = \dfrac{\beta}{\alpha}$. Karena $\mathbf{x}_2 \in \overline{C}$ maka berdasarkan definisi 2.G.6, $\mathbf{x}_2$ adalah titik limit C dan karena $\mathbf{x}_2 \notin C$ maka dari definisi 2.G.5, ada $\mathbf{z}_2 \in C$ sedemikian sehingga $\|\mathbf{z}_2 - \mathbf{x}_2\| < r\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)$.

Didefinsikan $\mathbf{z}_1 = \mathbf{x}_1 - \dfrac{\beta}{\alpha}(\mathbf{z}_2 - \mathbf{x}_2)$ dan diperoleh:

$$
\begin{aligned}
& \|\mathbf{z}_1 - \mathbf{x}_1\| &=& \left|-\frac{\beta}{\alpha}\right|\|\mathbf{z}_2 - \mathbf{x}_2\| \\
\Leftrightarrow\quad & \|\mathbf{z}_1 - \mathbf{x}_1\| &<& \left|-\frac{\beta}{\alpha}\right|\left(r\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\right) \\
\Leftrightarrow\quad & \|\mathbf{z}_1 - \mathbf{x}_1\| &<& r
\end{aligned}
$$

sehingga $\mathbf{z}_1 \in \operatorname{int}(C)$.

Untuk vektor **x**,

$$
\begin{aligned}
& \mathbf{x} &=& \alpha\mathbf{x}_1 + \beta\mathbf{x}_2 \\
\Leftrightarrow\quad & \mathbf{x} &=& \alpha\left(\mathbf{z}_1 + \frac{\beta}{\alpha}(\mathbf{z}_2 - \mathbf{x}_2)\right) + \beta\mathbf{x}_2 \\
\Leftrightarrow\quad & \mathbf{x} &=& \alpha\mathbf{z}_1 + \beta\mathbf{z}_2 - \beta\mathbf{x}_2 + \beta\mathbf{x}_2 \\
\Leftrightarrow\quad & \mathbf{x} &=& \alpha\mathbf{z}_1 + \beta\mathbf{z}_2
\end{aligned}
$$

Karena $\mathbf{z}_1 \in \operatorname{int}(C)$ dan $\mathbf{z}_2 \in C$, maka dari kasus i. $\mathbf{x} \in \operatorname{int}(C)$. ■

Akibat 3.B.1

Jika C konveks maka int(C) konveks.

Bukti:

Ambil $\mathbf{x}_1$ dan $\mathbf{x}_2 \in \operatorname{int}(\mathrm{C})$. Akan ditunjukkan bahwa $[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2] \in \operatorname{int}(\mathrm{C})$. Karena $\mathbf{x}_1$ dan $\mathbf{x}_2 \in \operatorname{int}(\mathrm{C})$, cukup ditunjukkan bahwa $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \in \operatorname{int}(\mathrm{C})$. Berdasarkan pembuktian lema 3.B.5 kasus i. halaman 52, telah ditunjukkan bahwa $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \in \operatorname{int}(\mathrm{C})$.

Akibat 3.B.2

Untuk sebarang C konveks dan $\operatorname{int}(C) \neq \phi$,

i.) $\overline{\operatorname{int}(\mathrm{C})} = \overline{\mathrm{C}}$

ii.) $\operatorname{int}(\mathrm{C}) = \operatorname{int}(\overline{\mathrm{C}})$.

Bukti i.):

⇨ Untuk sebarang himpunan C, int(C) $\subseteq$ C, berlaku bahwa $\overline{\operatorname{int}(\mathrm{C})} \subseteq \overline{\mathrm{C}}$.

⇦ Untuk sebarang $\mathbf{x} \in \overline{\mathrm{C}}$ maka untuk sebarang $\mathbf{y} \in$ int(C), segmen garis $[\mathbf{y}, \mathbf{x}) \subseteq$ int(C). Karena itu $\mathbf{x} \in \overline{\operatorname{int}(\mathrm{C})}$, sehingga $\overline{\mathrm{C}} \subseteq \overline{\operatorname{int}(\mathrm{C})}$.

Bukti ii.):

⇨ Karena untuk sebarang himpunan C, C $\subseteq \overline{\mathrm{C}}$, berlaku bahwa int(C) $\subseteq$ $\operatorname{int}(\overline{C})$.

⇦ Untuk sebarang $\mathbf{x} \in \operatorname{int}(\overline{\mathrm{C}})$ maka dari definisi 2.G.3 ada $r > 0$ sedemikian hingga B($\mathbf{x}$, r) $\subset \overline{\mathrm{C}}$. Sekarang untuk sebarang $\mathbf{y} \in$ int(C) ada segmen garis $[\mathbf{y}, \mathbf{z})$ yaitu perpanjangan dari segmen garis $[\mathbf{y}, \mathbf{x}]$ yang panjangnya dari $\mathbf{y}$ kurang dari r melewati $\mathbf{x}$. Dari lema 3.b.5 $\mathbf{z} \in \overline{\mathrm{C}}$, dan karena $\mathbf{y} \in$ int(C), diperoleh $[\mathbf{y}, \mathbf{z}) \in$ int(C). Secara khusus, $\mathbf{x} \in$ int(C). ■

C. Teorema Caratheodory

Pada sub bab ini, akan dibahas mengenai konsep-konsep yang mendasari Teorema Caratheodory.

Lema 3.C.1

Misalkan $\{C_\alpha\}$ adalah keluarga dari himpunan-himpunan konveks sedemikian sehingga $C = \bigcap_\alpha C_\alpha$ tidak kosong, maka C konveks.

Bukti:

Untuk sebarang $\mathbf{x}_1$ dan $\mathbf{x}_2 \in C$, maka untuk sebarang bilangan bulat i, vektor-vektor $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in C_i$. Karena untuk sebarang i himpunan C_i konveks maka $[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2] \subseteq C_i$. Dengan demikian $[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2] \subseteq C$. Jadi C konveks. ■

Untuk setiap bilangan bulat positif n, didefinisikan

$$P_n = \left\{ \mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n)^T \mid p_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n} p_i = 1 \right\}$$

Jika $n = 1$, P_1 adalah titik 1. Jika $n = 2$, P_2 adalah segmen garis tertutup yang menghubungkan $(0,1)$ dan $(1,0)$. Jika $n = 3$, P_3 adalah segitiga tertutup dengan titik-titik sudut $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, dan $(0,0,1)$. Mudah dipahami bahwa, untuk setiap n, P_n adalah himpunan konveks tertutup. ■

Definisi 3.C.1 Kombinasi Konveks

Vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ adalah *kombinasi konveks* dari vektor-vektor $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k$ jika ada $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_k) \in P_k$ sedemikian hingga $\mathbf{x} = p_1\mathbf{x}_1 + p_2\mathbf{x}_2 + \ldots + p_k\mathbf{x}_k$.

Lema 3.C.2

Himpunan C $\subseteq \mathbb{R}^n$ adalah konveks jika dan hanya jika setiap kombinasi konveks dari vektor-vektor anggota C juga ada di dalam C.

Bukti:

⇨ Jika C konveks, maka akan ditunjukkan bahwa setiap kombinasi konveks dari vektor-vektor anggota C juga ada di dalam C. Dalam pembuktian pernyataan ini, digunakan metode induksi matematika.

Untuk k = 1, jelas benar karena kombinasi konveksnya adalah vektor itu sendiri.

Andaikan benar untuk k vektor, yakni bahwa

$$\mathbf{x} = l_1\mathbf{x}_1 + l_2\mathbf{x}_2 + \ldots + l_k\mathbf{x}_k \in \mathrm{C} \text{ dengan } \boldsymbol{l} = (l_1, \ldots, l_k) \in P_k$$

Akan ditunjukkan benar untuk k + 1 vektor, yakni bahwa

$$\mathbf{x} = p_1\mathbf{x}_1 + \ldots + p_k\mathbf{x}_k + p_{k+1}\mathbf{x}_{k+1} \in \mathrm{C} \text{ dengan } \mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_k, p_{k+1}) \in P_{k+1}$$

Jika $p_{k+1} = 1$, maka dari syarat $p_i \geq 0$ dan $\sum_{i=1}^{k+1} p_i = 1$, berakibat bahwa $p_1 = \ldots = p_k = 0$, sehingga kombinasi konveksnya adalah vektor itu sendiri.

Jika $p_{k+1} < 1$, maka dari syarat $p_i \geq 0$ dan $\sum_{i=1}^{k+1} p_i = 1$, berakibat bahwa $\sum_{i=1}^{k} p_i > 0$ sehingga kombinasi konveksnya ditulis sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
& \mathbf{x} = p_1\mathbf{x}_1 + p_2\mathbf{x}_2 + \ldots + p_k\mathbf{x}_k + p_{k+1}\mathbf{x}_{k+1} \\
\Leftrightarrow \quad & \mathbf{x} = (p_1\mathbf{x}_1 + p_2\mathbf{x}_2 \ldots + p_k\mathbf{x}_k) + p_{k+1}\mathbf{x}_{k+1} \\
\Leftrightarrow \quad & \mathbf{x} = \frac{\sum_{i=1}^{k} p_i}{\sum_{i=1}^{k} p_i}(p_1\mathbf{x}_1 + p_2\mathbf{x}_2 \ldots + p_k\mathbf{x}_k) + p_{k+1}\mathbf{x}_{k+1} \\
\Leftrightarrow \quad & \mathbf{x} = \sum_{i=1}^{k} p_i \left(\frac{p_1}{\sum_{i=1}^{k} p_i}\mathbf{x}_1 + \frac{p_2}{\sum_{i=1}^{k} p_i}\mathbf{x}_2 \ldots + \frac{p_k}{\sum_{i=1}^{k} p_i}\mathbf{x}_k \right) + p_{k+1}\mathbf{x}_{k+1} \qquad (1)
\end{aligned}$$

Perhatikan bentuk dalam tanda kurung pada persamaan (1).

Misalkan $\mathbf{q} = \left(\frac{p_1}{\sum_{i=1}^{k} p_i}, \frac{p_2}{\sum_{i=1}^{k} p_i}, \ldots, \frac{p_k}{\sum_{i=1}^{k} p_i} \right)$ dengan $\sum_{i=1}^{k} p_i > 0$. Maka

$$\sum_{i=1}^{k} q_i = \frac{p_1}{\sum_{i=1}^{k} p_i} + \frac{p_2}{\sum_{i=1}^{k} p_i} + \ldots + \frac{p_k}{\sum_{i=1}^{k} p_i}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{k} q_i = \frac{p_1 + p_2 + \ldots + p_k}{\sum_{i=1}^{k} p_i}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{k} q_i = \frac{\sum_{i=1}^{k} p_i}{\sum_{i=1}^{k} p_i}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{k} q_i = 1$$

Sehingga bentuk dalam tanda kurung pada persamaan (1) adalah bentuk kombinasi konveks dari *k* vektor anggota C. Karena itu, **x** dapat dipandang sebagai kombinasi konveks dari dua vektor anggota C, dan karena C konveks, maka $\mathbf{x} \in C$.

⇦ Jika untuk setiap kombinasi konveks dari vektor-vektor anggota C ada dalam C, maka harus ditunjukkan bahwa C konveks.

Ambil $\mathbf{x}_1$ dan $\mathbf{x}_2 \in C$. Akan ditunjukkan $[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2] \subseteq C$.

Misalkan $\mathbf{x} \in [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2]$, maka $\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x}_1 + \beta\mathbf{x}_2$ dengan $\alpha \geq 0, \beta \geq 0, \alpha + \beta = 1$.

Nampak bahwa α dan β memenuhi definisi P_k sehingga **x** merupakan suatu kombinasi konveks dari $\mathbf{x}_1$ dan $\mathbf{x}_2$. Jadi $[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2] \subseteq C$. ■

Untuk sebarang himpunan *A*, misalkan K(*A*) menotasikan himpunan semua kombinasi konveks dari vektor-vektor anggota *A*, maka menurut lema

3.C.2, K(A) adalah konveks dengan memandang K(A) sebagai C. Lebih jelasnya bahwa:

$$A \subseteq \mathrm{K}(A) \qquad (2)$$ ■

Definisi 3.C.2 Konveks Hull

Andaikan $A \subseteq \mathbb{R}^n$ dan $\{\mathrm{C}_i \mid C_i \text{ konveks}, A \subseteq C_i, \forall i \in I\}$ yaitu keluarga himpunan konveks yang memuat A.

Konveks hull dari himpunan A yang dinotasikan oleh co(A), adalah irisan dari himpunan-himpunan konveks yang memuat A dan ditulis sebagai:

$$\mathrm{co}(A) = \bigcap_{i \in I} \mathrm{C}_i$$ ■

Andaikan $A \subseteq \mathbb{R}^n$ dan $A \neq \phi$. Berdasarkan halaman 40, karena $\mathbb{R}^n$ konveks maka $\mathrm{co}(A) \neq \phi$, dan berdasarkan lema 3.C.1, karena irisan himpunan konveks adalah konveks, maka co(A) konveks. Juga berdasarkan definisi 3.C.2, karena $\mathrm{co}(A) = \bigcap_{i \in I} \mathrm{C}_i$ maka $\mathrm{co}(A) \subseteq \mathrm{C}_i$ untuk sebarang himpunan konveks C_i yang memuat A, sehingga berlaku bahwa co(A) adalah himpunan konveks terkecil yang memuat A. ■

Teorema 3.C.1

Konveks hull dari sebuah himpunan A adalah himpunan semua kombinasi konveks dari vektor-vektor anggota A, karena itu co(A) = K(A).

Bukti:

⇨ Misalkan $\{C_i\}$ menotasikan keluarga himpunan konveks sebanyak i yang memuat A. Karena $A \subset \text{co}(A)$ dan $\text{co}(A) = \bigcap_{i \in I} C_i$ sedangkan menurut bentuk (2) halaman 61, $A \subseteq K(A)$ dimana $K(A)$ adalah himpunan kombinasi konveks dari k vektor anggota A, maka $\text{co}(A) \subseteq K(A)$.

⇦ $A \subseteq C_i$ untuk setiap bilangan bulat positif i dan dari lema 3.C.2 berlaku bahwa untuk setiap i, semua kombinasi konveks dari vektor-vektor dalam A, juga anggota C_i. Karena itu untuk sebarang i, $K(A) \subseteq C_i$. Sehingga $K(A) \subseteq \bigcap_{i \in I} C_i = \text{co}(A)$.

Akibat 3.C

Himpunan A konveks jika dan hanya jika $A = \text{co}(A)$

Bukti:

⇨ Akan ditunjukkan bahwa jika A konveks maka $A = \text{co}(A)$.

i. Karena $\text{co}(A) = K(A)$ dan dari bentuk (2) halaman 61, yakni $A \subseteq K(A)$, maka berlaku $A \subseteq \text{co}(A)$.

ii. Karena A konveks, maka menurut lema 3.C.2, $K(A) \subseteq A$, sehingga karena $K(A) = \text{co}(A)$ berlaku bahwa $\text{co}(A) \subseteq A$.

⇦ Akan ditunjukkan bahwa jika A = co(A) maka A konveks.

Karena A = co(A) = K(A), maka A adalah himpunan semua kombinasi konveks dari vektor-vektor anggota A. Dari lema 3.C.2 berlaku bahwa A konveks. ■

Teorema 3.C.2 (*TEOREMA CARATHEODORY*)

Untuk sebarang $A \subset \mathbb{R}^n$ dan sebarang $\mathbf{x} \in$ co(A), maka ada n + 1 vektor-vektor $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{n+1} \in A$ dan vektor $\mathbf{p} \in \mathrm{P}_{n+1}$, sedemikian sehingga:

$$\mathbf{x} = p_1\mathbf{x}_1 + \ldots + p_{n+1}\mathbf{x}_{n+1}$$

Bukti:

Jika $\mathbf{x} \in$ co(A), maka dari teorema 3.C.1,

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{m} q_i\mathbf{x}_i \qquad \mathbf{x}_i \in A \qquad i = 1,\ldots,m \qquad \mathbf{q} = (q_1,\ldots,q_m) \in P_m \tag{3}$$

untuk sebarang bilangan bulat positif m dan sebarang $\mathbf{q} \in P_m$.

Jika persamaan dalam bentuk (3) $m \le n+1$, maka teorema ini telah dibuktikan dalam pembuktian lema 3.C.2, halaman 58.

Jika persamaan dalam bentuk (3) $m > n+1$, maka kita selalu dapat menyatakan $\mathbf{x}$ sebagai kombinasi konveks dari paling banyak $m-1$ vektor-vektor anggota A. Cara seperti ini dapat diulang sampai dengan hasil yang diinginkan, yaitu $\mathbf{x}$ sebagai kombinasi konveks dari $n+1$ vektor.

Andaikan persamaan dalam bentuk (3) $m > n+1$. Untuk $m-1 > n$, maka vektor-vektor anggota $\mathbb{R}^n$ adalah $(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_m), (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_m), \ldots, (\mathbf{x}_{m-1} - \mathbf{x}_m)$.

Karena $m > n+1$, maka menurut teorema 2.E, $m-1$ vektor tersebut adalah bergantung linear. Sehingga menurut definisi 2.D.4, terdapat skalar-skalar $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_{m-1}$ yang tidak semuanya nol sedemikian sehingga,

$$\mathbf{0} = \lambda_1(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_m) + \lambda_2(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_m) + ... + \lambda_{m-1}(\mathbf{x}_{m-1} - \mathbf{x}_m)$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathbf{0} = \lambda_1\mathbf{x}_1 + \lambda_2\mathbf{x}_2 + ... + \lambda_{m-1}\mathbf{x}_{m-1} - (\lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_{m-1})\mathbf{x}_m$$

Misalkan $\lambda_m = -(\lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_{m-1})$, diperoleh

$$\mathbf{0} = \lambda_1\mathbf{x}_1 + \lambda_2\mathbf{x}_2 + ... + \lambda_{m-1}\mathbf{x}_{m-1} + \lambda_m\mathbf{x}_m$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathbf{0} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \mathbf{x}_i \tag{4}$$

dan

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 0 \tag{5}$$

Dari persamaan (3) dan (4), untuk sebarang t berlaku bahwa

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{m} q_i\mathbf{x}_i - t \cdot \mathbf{0}$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathbf{x} = \sum_{i=1}^{m} q_i\mathbf{x}_i - t \cdot \sum_{i}^{m} \lambda_i\mathbf{x}_i$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathbf{x} = \sum_{i=1}^{m} q_i\mathbf{x}_i - \sum_{i}^{m} t\lambda_i\mathbf{x}_i$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathbf{x} = \sum_{i=1}^{m} (q_i - t\lambda_i)\mathbf{x}_i \tag{6}$$

Akan ditunjukkan bahwa ada nilai t sedemikian sehingga:

i. $(q_i - t\lambda_i) \geq 0$, dan

ii. $\sum_{i=1}^{m}(q_i - t\lambda_i) = 1$.

Untuk membuktikan pernyataan i., ambil $I = \{i \mid i = 1,\dots,m, \lambda_i > 0\}$. Dari pernyataan sebelumnya, karena terdapat skalar-skalar $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{m-1}$ yang tidak semuanya nol, dan juga dari persamaan (5) maka berlaku bahwa $I \neq \phi$.

Andaikan i_0 menotasikan sebuah indeks dalam *I* sedemikian sehingga

$$\frac{q_{i0}}{\lambda_{i0}} = \min\left\{i \in I \mid \frac{q_i}{\lambda_i}\right\}$$

di mana $q_i \geq 0$ dan $\lambda_i > 0$. Ambil $t = \dfrac{q_{i0}}{\lambda_{i0}}$, maka $t \geq 0$.

Untuk $i \in I$, maka berlaku:

$$(q_i - t\lambda_i) = \frac{\lambda_i}{\lambda_i}(q_i - t\lambda_i) = \lambda_i\left(\frac{q_i}{\lambda_i} - \frac{t\lambda_i}{\lambda_i}\right) = \lambda_i\left(\frac{q_i}{\lambda_i} - \frac{q_{i0}}{\lambda_{i0}}\right) \geq 0$$

dengan persamaan sama dengan nol terjadi jika $i = i_0$.

Untuk $i \notin I$, maka $\lambda_i \leq 0$ sehingga $(q_i - t\lambda_i) \geq 0$ dengan persamaan sama dengan nol terjadi jika $q_i = 0$ dan $t = 0$.

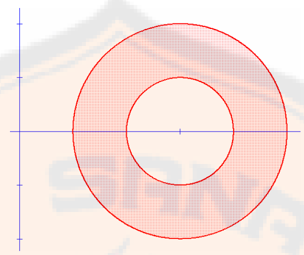
Pembuktian pernyataan ii. dilakukan dengan menggunakan persamaan bentuk (5), sehingg diperoleh:

$$\sum_{i=1}^{m}(q_i - t\lambda_i) = \sum_{i=1}^{m} q_i - \sum_{i=1}^{m} t\lambda_i = \sum_{i=1}^{m} q_i - t\sum_{i=1}^{m}\lambda_i = \sum_{i=1}^{m} q_i - 0 = 1 \qquad \blacksquare$$

Contoh 3.C.

Misalkan $A \subset \mathbb{R}^2$ di mana $A = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T \mid 1 \le (x_1 - 3)^2 + x_2^2 \le 4,\ x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$.

Daerah himpunan A ditunjukkan pada gambar berikut:



Daerah himpunan *A*

Jelas bahwa $\mathrm{co}(A) = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T \mid (x_1 - 3)^2 + x_2^2 \le 4,\ x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$.

Ambil $\mathbf{x} = \left(3, \frac{1}{2}\right)^T \in \mathrm{co}(A)$. Akan ditunjukkan bahwa ada $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3 \in A$ dan $\mathbf{p} \in P_3$ sedemikian sehingga:

$$\left(3, \frac{1}{2}\right)^T = p_1\mathbf{x}_1 + p_2\mathbf{x}_2 + p_3\mathbf{x}_3$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 1/2 \end{pmatrix} = p_1\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{pmatrix} + p_2\begin{pmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{pmatrix} + p_3\begin{pmatrix} x_{31} \\ x_{32} \end{pmatrix}$$

Ada banyak penyelesaian bagi SPL di atas, karena jumlah variabel lebih banyak dari pada jumlah persamaan linearnya. Oleh karena itu jika diambil $\mathbf{x}_1 = (1,0)^T$ dan $\mathbf{x}_2 = (5,0)^T \in A$, dan $\mathbf{p} = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)^T \in P_3$, maka berlaku:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} x_{31} \\ x_{32} \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 3 = \frac{1}{3} + \frac{5}{3} + \frac{1}{3}x_{31} \\ \frac{1}{2} = \frac{1}{3}x_{32} \end{cases}$$

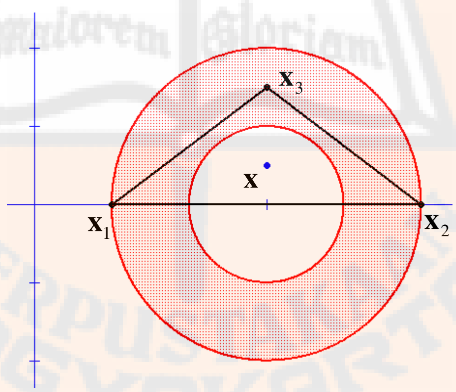
$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_{31} = 3 \\ x_{32} = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Jadi untuk $\mathbf{x} = \left(3, \frac{1}{2}\right)^T \in \text{co}(A)$, ada $\mathbf{x}_1 = (1,0)^T$, $\mathbf{x}_2 = (5,0)^T$, $\mathbf{x}_3 = \left(3, \frac{3}{2}\right)^T \in A$ dan

$\mathbf{p} = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)^T \in P_3$ sedemikian sehingga:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 \\ 3/2 \end{pmatrix}$$

Gambar:



Kombinasi konveks 3 vektor anggota A ■

BAB IV

KESIMPULAN

Berdasarkan hasil dari penulisan skripsi ini dapat disimpulkan beberapa hal berikut: untuk setiap bilangan bulat positif *n*, didefinisikan

$$P_n = \left\{ \mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n)^T \mid p_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n} p_i = 1 \right\}$$

Vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ adalah *kombinasi konveks* dari vektor-vektor $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k$ jika ada $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_k) \in P_k$ sedemikian hingga $\mathbf{x} = p_1\mathbf{x}_1 + p_2\mathbf{x}_2 + \ldots + p_k\mathbf{x}_k$. Selanjutnya himpunan $C \subseteq \mathbb{R}^n$ adalah konveks jika dan hanya jika setiap kombinasi konveks dari vektor-vektor anggota C juga ada di dalam C.

Untuk sebarang himpunan *A*, misalkan K(*A*) menotasikan himpunan semua kombinasi konveks dari *k* vektor anggota *A*, maka K(*A*) adalah konveks. Ini juga berakibat bahwa $A \subseteq \mathrm{K}(A)$.

Andaikan $A \subseteq \mathbb{R}^n$ dan $\{\mathrm{C}_i \mid C_i \text{ konveks}, A \subseteq C_i, \forall i \in I\}$ yaitu keluarga himpunan konveks yang memuat *A*. *Konveks hull* dari himpunan *A* yang dinotasikan oleh co(*A*), adalah irisan dari himpunan-himpunan konveks yang memuat *A* dan ditulis sebagai $\mathrm{co}(A) = \bigcap_{i \in I} \mathrm{C}_i$. Karena $\mathbb{R}^n$ konveks maka $\mathrm{co}(A) \neq \phi$, dan karena irisan himpunan konveks adalah konveks, maka co(*A*) konveks. Juga karena $\mathrm{co}(A) = \bigcap_{i \in I} \mathrm{C}_i$ berlaku bahwa co(*A*) adalah himpunan konveks terkecil yang memuat *A*.

Convex hull dari sebuah himpunan A adalah himpunan semua kombinasi konveks dari vektor-vektor anggota A, karena itu co(A) = K(A). Jadi himpunan A konveks jika dan hanya jika A = co(A).

Selanjutnya Teorema Caratheodory mengatakan: untuk sebarang $A \subset \mathbb{R}^n$ dan sebarang $\mathbf{x} \in$ co(A), maka ada n + 1 vektor-vektor $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{n+1} \in A$ dan vektor $\mathbf{p} \in \mathrm{P}_{n+1}$, sedemikian sehingga:

$$\mathbf{x} = p_1\mathbf{x}_1 + \ldots + p_{n+1}\mathbf{x}_{n+1}$$

DAFTAR PUSTAKA

Berkovitz, Leonard D. 2002. *Convexity and Optimization in* $\mathbb{R}^n$. New York: John Wiley & Sons, Inc.

Boyd, Stephen and Lieven Vandenberghe. 2004. *Convex Optimization*. Cambridge: United Kingdom at the University Press.

Bruckner, Andrew M. And Judith B. Bruckner. 1997. *Real Analysis*. New Jersey: Prentice-Hall, Inc.

Chong, Edwin K. P. and Stanislaw H. Zak. 1996. *An Introduction to Optimization*. New York: John Wiley & Sons, Inc.

Hiriart-Urruty, Jean-Baptiste and Claude Lemarechal. 1993. *Convex Analysis and Minimization Algorithms I*. Germany: Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

Leon, Steven J. 2001. *Ajlabar Linear Dan Aplikasinya*. Alih bahasa: Drs. Alit Bondan, M. Sc. dan Hendra Gunawan, Ph. D. Jakarta: Erlangga.

R. Soemantri. Bahan ajar mata kuliah Analisis Real II.

Stewart, James. 1999. *Calculus fourth edition*. USA: Brooks/Cole Publishing Company.

Stoll, Robert R. 1963. *Set Theory and Logic*. New Delhi: Ram Nagar.

Wade, William R. 1995. *An Introduction To Analysis*. New Jersey: Prentice-Hall, Inc.