

RING LOKAL

SKRIPSI

Diajukan untuk Memenuhi Salah Satu Syarat
Memperoleh Gelar Sarjana Pendidikan
Program Studi Pendidikan Matematika



Oleh:

FRANSISCA ANGGAR CAHYANTI

NIM: 021414004

**PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA
JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
UNIVERSITAS SANATA DHARMA
YOGYAKARTA**

2006

SKRIPSI

RING LOKAL

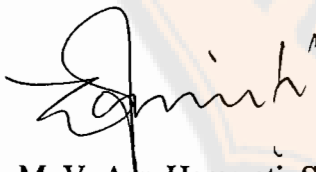
Oleh:

FRANSISCA ANGGAR CAHYANTI

NIM: 021414004

Telah disetujui oleh:

Pembimbing,



M. V. Any Herawati, S. Si., M. Si.

Tanggal: 18 September 2006

SKRIPSI

RING LOKAL

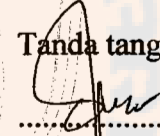
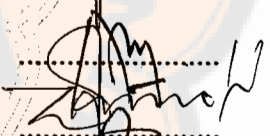
Dipersiapkan dan ditulis oleh:

FRANSISCA ANGGAR CAHYANTI

NIM: 021414004

Telah dipertahankan di depan Panitia Penguji
pada tanggal 26 September 2006
dan dinyatakan memenuhi syarat

Susunan Panitia Penguji

	Nama Lengkap	Tanda tangan
Ketua	: Drs. Severinus Domi, M. Si.	
Sekretaris	: M. Andy Rudhito, S. Pd., M. Si.	
Anggota	: M. V. Any Herawati, S. Si., M. Si.	
Anggota	: Drs. A. Mardjono	
Anggota	: M. Andy Rudhito, S. Pd., M. Si.	

Yogyakarta, 26 September 2006

Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan

Dekan,



Drs. T. Sarkim, M. Ed., Ph. D.

HALAMAN PERSEMBAHAN

"Ia membuat segala sesuatu indah pada waktunya"

(Pengkhotbah 3:11)

"Mintalah, maka akan diberikan kepadamu; carilah, maka kamu akan mendapat; ketoklah, maka pintu akan dibukakan bagimu"

(Matius 7:7)

Dengan segenap ketulusan hatiku, kupersembahkan skripsi ini buat:

*Yesus Kristus, Bunda Maria & Santo Yosef
Santo Yudas Tadeus & Malaikat pelindungku
Ayahandaku Bpk. R. Suranto & Ibundaku Ibu Th. Sri Astuti yang tercinta
Dede'ku Valentina Dian Juwitawati yang terkasih
Eyang Kakung (Alm) & Eyang Putri Surosiyogo yang aku banggakan
Kakandaku Mas Agung Saputra yang tersayang
Teman-teman P. Mat'02
Almamaterku USD*

PERNYATAAN KEASLIAN KARYA

Saya menyatakan dengan sesungguhnya bahwa skripsi yang saya tulis ini tidak memuat karya atau bagian karya orang lain, kecuali yang telah disebutkan dalam kutipan dan daftar pustaka, sebagaimana layaknya karya ilmiah.

Yogyakarta, 26 September 2006

Penulis,



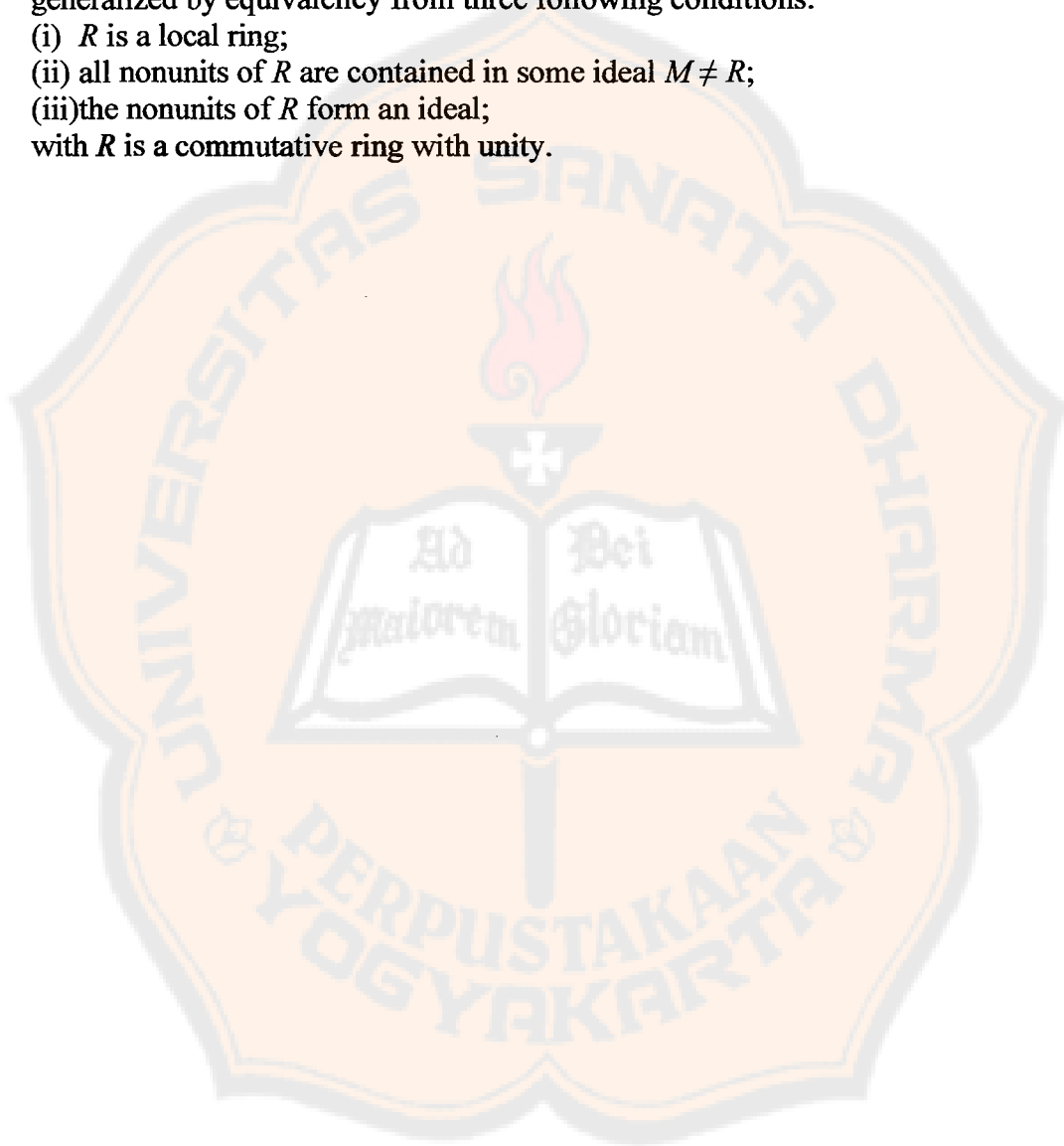
Fransisca Anggar Cahyanti



ABSTRACT

A local ring is defined as a commutative ring with unity which has a unique maximal ideal. This thesis will prove that the definition of a local ring can be generalized by equivalency from three following conditions:

- (i) R is a local ring;
 - (ii) all nonunits of R are contained in some ideal $M \neq R$;
 - (iii) the nonunits of R form an ideal;
- with R is a commutative ring with unity.



KATA PENGANTAR

Pujian penuh syukur kehadiran Allah Bapa di Surga yang telah melimpahi rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi dengan judul "*Ring Lokal*".

Selama penyusunan skripsi ini, banyak kesulitan dan hambatan yang penulis alami. Namun karena kuasa-Nya dan karena bantuan dari berbagai pihak, akhirnya semua kesulitan dan hambatan tersebut dapat teratasi. Oleh karena itu, sudah selayaknya penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Ibu M. V. Any Herawati, S. Si., M. Si., selaku Dosen Pembimbing yang telah berkenan memberikan pengarahan, meluangkan waktu, tenaga, dan penuh kesabaran telah membimbing penulis dalam penyusunan skripsi ini.
2. Bapak M. Andy Rudhito, S. Pd., M. Si., selaku Ketua Program Studi Pendidikan Matematika dan Dosen Penguji yang telah memberikan saran serta masukan bagi penulis dalam menyelesaikan skripsi ini.
3. Bapak Drs. A. Mardjono, selaku Dosen Penguji yang telah memberikan saran serta masukan bagi penulis dalam menyelesaikan skripsi ini.
4. Ibu D. Novi Handayani, S. Pd., selaku Dosen Pembimbing Akademik yang telah memberikan bimbingan selama studi.
5. Bapak dan Ibu Dosen PMIPA dan MIPA yang telah membantu dan membimbing penulis selama belajar di USD.
6. Bapak Sunarjo dan Bapak Sugeng, selaku staf sekretariat JPMIPA atas keramahan dan kerjasamanya dalam melayani kepentingan mahasiswa.

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

7. Staf Perpustakaan USD dan UGM atas pelayanan dan fasilitas yang telah diberikan.
8. Ayahandaku dan Ibundaku tercinta untuk segala perhatian, kesempatan, dan dorongan yang diberikan baik secara materiil maupun spiritual.
9. Dede'ku Valentina Dian Juwitawati yang terkasih untuk segala doa dan dukungan, gambar religius, serta bahasa Inggrisnya.
10. Eyang Kakung (Alm) dan Eyang Putri yang telah mendoakan penulis setiap saat.
11. Kakandaku Mas Agung Saputra yang tersayang atas segala doa, cinta, semangat, dan perhatian yang telah diberikan selama ini.
12. Segenap keluarga yang telah memberikan dukungan dan doa kepada penulis selama penyusunan skripsi ini.
13. Bapak Manto yang telah meluangkan waktu dan tenaganya untuk mendampingi penulis.
14. Sahabatku Itut atas keceriaan dan kesusahan yang telah kita alami bersama selama ini.
15. Temanku Joyo atas bantuannya menyelesaikan PowerPoint.
16. Temanku Yesi atas Alkitab dan bahasa Inggrisnya.
17. Teman-teman P. Mat'02: Rm. Ansi, Joyo, Rius, Gugun, Bambang, Budi, Opih (ex), Rohmat (ex), Sr. Tunik, Sr. Fidelis, Sr. Christela, Sr. Theresiana (ex), Itut, Asti, Yesi, Indri, Sri, Yogi, Dian, Aprilia, Natalia, Lian, Esthi, Yosi, Shanti, Eni, Estri, Pepy, Dias, Dewi, Devi, Ika, Yose, Nita, Sita, Vero, Puri, Yusta, Novi, Dikta, Arsin, dan Ririk atas kebersamaan selama kuliah.

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

18. Semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu per satu, yang telah memberikan dukungan dan doa selama perjalanan studi dan proses penyusunan skripsi.

Penulis menyadari bahwa penyusunan skripsi ini masih jauh dari sempurna dan banyak kekurangan, untuk itu penulis dengan senang hati menerima kritik dan saran dalam bentuk apapun demi kesempurnaan skripsi ini. Akhir kata, semoga skripsi ini bermanfaat bagi pembaca.

Yogyakarta, 26 September 2006

Penulis,

Fransisca Anggar Cahyanti



DAFTAR ISI

	Halaman
HALAMAN JUDUL	i
HALAMAN PERSETUJUAN PEMBIMBING	ii
HALAMAN PENGESAHAN	iii
HALAMAN PERSEMBAHAN	iv
PERNYATAAN KEASLIAN KARYA	v
ABSTRAK	vi
<i>ABSTRACT</i>	vii
KATA PENGANTAR	viii
DAFTAR ISI	xi
BAB I PENDAHULUAN	
A. Latar Belakang Masalah	1
B. Perumusan Masalah	2
C. Tujuan Penulisan	2
D. Manfaat Penulisan	3
E. Materi Prasyarat	3
F. Metode Penulisan	3
G. Sistematika Penulisan	4
BAB II LANDASAN TEORI	
A. Ring	5
B. Daerah Integral dan Lapangan	11

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

C. Ideal	15
D. Homomorfisma ring	19
BAB III RING LOKAL	
A. Ideal Maksimal	21
B. Ring Lokal	29
C. Ring Semilokal	49
BAB IV KESIMPULAN	51
DAFTAR PUSTAKA	53



BAB I

PENDAHULUAN

A. Latar Belakang Masalah

Aljabar merupakan salah satu materi penting dalam matematika dan sudah kita pelajari sejak kita duduk di sekolah dasar sampai sekolah menengah, bahkan sampai di bangku kuliah. Salah satu struktur aljabar yang dipelajari di bangku kuliah adalah struktur aljabar abstrak. Di dalam struktur aljabar abstrak, penulis sudah mempelajari konsep grup. Namun penulis ingin mengembangkan pengetahuan tentang struktur aljabar abstrak yang sudah penulis pelajari waktu duduk di bangku kuliah, sehingga penulis ingin mempelajari konsep ring.

Ring dengan dua operasi di dalamnya, yang biasanya dinyatakan dengan operasi penjumlahan dan perkalian, adalah himpunan sedemikian sehingga terhadap operasi penjumlahan merupakan suatu grup Abel dan terhadap operasi perkalian berlaku sifat asosiatif dan memenuhi hukum distributif. Ada macam-macam ring, misalnya ring komutatif, ring komutatif dengan elemen satuan, daerah integral, lapangan, dan ring lokal serta ring semilokal. Ada juga suatu hubungan yang menghubungkan macam-macam ring yaitu ring komutatif, ring komutatif dengan elemen satuan, ring lokal, dan ring semilokal.

Dalam tulisan ini, penulis akan membahas tentang ring lokal yaitu suatu ring komutatif dengan elemen satuan yang mempunyai sebuah ideal maksimal

tunggal dan ring semilokal yaitu ring komutatif dengan elemen satuan yang mempunyai sejumlah hingga ideal maksimal, serta penulis akan membahas tentang teorema-teorema yang ada dalam ring lokal. Selain itu penulis juga akan membahas hubungan antara ring komutatif, ring komutatif dengan elemen satuan, ring lokal, dan ring semilokal.

B. Perumusan Masalah

Pokok permasalahan yang akan dibahas dalam penulisan ini dapat dirumuskan sebagai berikut:

1. Apa contoh-contoh dari ring lokal dan ring semilokal serta yang bukan merupakan ring lokal dan ring semilokal?
2. Teorema-teorema apa saja yang berlaku dalam konsep ring lokal?
3. Bagaimana hubungan antara ring komutatif, ring komutatif dengan elemen satuan, ring lokal, dan ring semilokal?

C. Tujuan Penulisan

Tujuan dari penulisan ini adalah untuk memahami pengertian dari ring lokal dan ring semilokal melalui contoh-contoh dari ring lokal dan ring semilokal serta yang bukan merupakan ring lokal dan ring semilokal, mengetahui teorema-teorema yang berlaku dalam konsep ring lokal, serta mengetahui hubungan antara ring komutatif, ring komutatif dengan elemen satuan, ring lokal, dan ring semilokal.

D. Manfaat Penulisan

Manfaat dari penulisan ini adalah untuk menambah pengetahuan penulis tentang salah satu konsep dari struktur aljabar abstrak yaitu konsep ring, terutama tentang konsep ring lokal dan ring semilokal, serta untuk lebih mendalami materi aljabar yang akan penulis terapkan dalam pembelajaran matematika di sekolah.

Penulisan ini juga bermanfaat bagi para pembaca khususnya mahasiswa setingkat S1 yang ingin memperdalam konsep ini pula. Tulisan ini dapat digunakan sebagai salah satu acuan dasar untuk membantu pemahaman konsep-konsep aljabar yang lebih lanjut.

E. Materi Prasyarat

Materi prasyarat yang akan dibahas dalam tulisan ini meliputi grup, ring, daerah integral dan lapangan, ideal serta homomorfisma ring. Untuk mempersempit penulisan, penulis tidak membahas materi grup. Namun dalam penulisan ini penulis menggunakan konsep-konsep yang ada di dalam grup dan penulis mengasumsikan bahwa pembaca telah mempelajari sebelumnya.

F. Metode Penulisan

Metode yang digunakan dalam penulisan ini adalah metode studi pustaka, sehingga dalam penulisan ini belum ditemukan hal-hal yang baru.

G. Sistematika Penulisan

BAB I PENDAHULUAN

- A. Latar Belakang Masalah
- B. Perumusan Masalah
- C. Tujuan Penulisan
- D. Manfaat Penulisan
- E. Materi Prasyarat
- F. Metode Penulisan
- G. Sistematika Penulisan

BAB II LANDASAN TEORI

- A. Ring
- B. Daerah Integral dan Lapangan
- C. Ideal
- D. Homomorfisma Ring

BAB III RING LOKAL

- A. Ideal Maksimal
- B. Ring Lokal
- C. Ring Semilokal

BAB IV KESIMPULAN

BAB II

LANDASAN TEORI

Dalam bab ini akan dibahas beberapa konsep dasar yang penting untuk mendasari pembahasan tentang Ring Lokal dan Ring Semilokal. Pembahasan dibagi menjadi empat bagian/subbab. Subbab pertama membahas tentang konsep ring, subbab kedua membahas tentang daerah integral dan lapangan, subbab ketiga membahas tentang ideal, dan subbab keempat membahas tentang homomorfisma ring.

A. Ring

Jika G adalah suatu himpunan tidak kosong, operasi biner dalam G merupakan suatu fungsi $G \times G \rightarrow G$. Ada beberapa notasi yang biasa digunakan untuk menyatakan bayangan dari (a, b) terhadap operasi biner, yaitu: $a + b$ (notasi penjumlahan), $a \cdot b$ (notasi perkalian), $a * b$, dan lain-lain. Notasi yang akan digunakan oleh penulis dalam tulisan ini adalah notasi penjumlahan dan perkalian.

Definisi 2.1.1

Suatu himpunan tidak kosong R disebut *ring* bila di dalam R didefinisikan dua operasi yang diberi nama penjumlahan (+) dan perkalian (.) sedemikian sehingga aksioma-aksioma berikut dipenuhi:

1. $(R, +)$ merupakan grup Abel, yaitu:

a. $(\forall a, b \in R) a + b \in R.$

b. $(\forall a, b, c \in R) (a + b) + c = a + (b + c).$

c. $(\exists 0 \in R) (\forall a \in R) 0 + a = a + 0 = a.$ (0 disebut elemen identitas ring R)

d. $(\forall a \in R) (\exists -a \in R) a + (-a) = (-a) + a = 0.$ ($-a$ disebut invers aditif dari a)

e. $(\forall a, b \in R) a + b = b + a.$

2. R bersifat tertutup terhadap perkalian

$(\forall a, b \in R) a \cdot b \in R.$

3. Perkalian di R bersifat asosiatif

$(\forall a, b, c \in R) a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c.$

4. Berlaku hukum distributif operasi perkalian terhadap operasi penjumlahan

$(\forall a, b, c \in R) a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ dan $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c.$

Selanjutnya ring R sering pula ditulis dengan $(R, +, \cdot).$

Sebelum menuju pada pembahasan yang lebih jauh, terlebih dahulu diberikan beberapa kesepakatan di bawah ini:

a. Jika $(R, +, \cdot)$ adalah ring dan $a, b \in R$ maka $a \cdot b$ akan ditulis sebagai $ab.$

b. Jika $(R, +, \cdot)$ adalah ring dan $a, b \in R$ maka $a + (-b)$ dapat juga ditulis sebagai $a - b.$

Sehingga, jika $(R, +, \cdot)$ adalah ring dan $a, b, c \in R$ maka $ab + c$ berarti $(a \cdot b) + c$, $ab + ac$ berarti $(a \cdot b) + (a \cdot c)$, dan $ab - ac$ berarti $(a \cdot b) + (- (a \cdot c))$.

Contoh 2.1.1:

- Himpunan semua bilangan bulat $\mathbb{Z}$, himpunan semua bilangan rasional $\mathbb{Q}$, himpunan semua bilangan real $\mathbb{R}$, dan himpunan semua bilangan kompleks $\mathbb{C}$ merupakan ring terhadap operasi penjumlahan dan perkalian bilangan dan ditulis berturut-turut sebagai ring $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, dan $(\mathbb{C}, +, \cdot)$.
- Misal $M(2, \mathbb{Z}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z} \right\}$. Himpunan $M(2, \mathbb{Z})$ merupakan ring terhadap operasi penjumlahan dan perkalian matriks-matriks.
- Himpunan semua bilangan bulat modulo n ($\mathbb{Z}_n$) merupakan ring terhadap operasi penjumlahan ($\oplus$) dan perkalian ($\otimes$) bilangan bulat modulo n .

Teorema 2.1.1

Jika $(R, +, \cdot)$ merupakan ring, maka untuk setiap $a, b \in R$ berlaku:

- $0a = a0 = 0$.
- $a(-b) = (-a)b = -(ab)$.

Bukti:

$$(i) \quad 0a = (0 + 0)a$$

$$= 0a + 0a, \text{ padahal } 0a = 0a + 0 \text{ sehingga } 0a + 0a = 0a + 0.$$

Dengan menggunakan Hukum Kanselasi didapat $0a = 0$.

$$a0 = a(0 + 0)$$

$$= a0 + a0, \text{ padahal } a0 = a0 + 0 \text{ sehingga } a0 + a0 = a0 + 0.$$

Dengan menggunakan Hukum Kanselasi didapat $a0 = 0$.

$$(ii) \quad a(-b) + ab = a(-b + b) = a0 = 0 \text{ (menurut (i))}.$$

$$\text{Jadi } a(-b) = -(ab).$$

$$(-a)b + ab = (-a + a)b = 0b = 0 \text{ (menurut (i))}.$$

$$\text{Jadi } (-a)b = -(ab). \quad \blacksquare$$

Definisi 2.1.2

Suatu ring $(R, +, \cdot)$ disebut *ring komutatif* jika untuk setiap a dan b dalam R berlaku $ab = ba$.

Contoh 2.1.2:

Ring $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, dan $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ merupakan ring komutatif.

Definisi 2.1.3

Jika $(R, +, \cdot)$ adalah ring, maka $(R, +, \cdot)$ disebut *ring dengan elemen satuan* jika $(\exists 1 \in R) (\forall a \in R) 1a = a1 = a$.

Definisi 2.1.4

Jika $(R, +, \cdot)$ adalah ring komutatif dan memuat elemen satuan, maka $(R, +, \cdot)$ disebut *ring komutatif dengan elemen satuan*.

Contoh 2.1.3:

- a. Ring $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, dan $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ merupakan ring komutatif dengan elemen satuan.
- b. Himpunan semua bilangan genap terhadap operasi penjumlahan dan perkalian pada bilangan bulat merupakan ring komutatif tanpa elemen satuan.

Definisi 2.1.5

Jika $(R, +, \cdot)$ ring dan $S \subseteq R$ maka S disebut *subring* dari R bila S merupakan ring dengan operasi penjumlahan dan perkalian di R .

Contoh 2.1.4:

- a. Ring himpunan semua bilangan genap $(\mathbb{E}, +, \cdot)$ merupakan subring dari ring himpunan semua bilangan bulat $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$.
- b. Ring himpunan semua bilangan bulat $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ merupakan subring dari ring himpunan semua bilangan rasional $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$.

Teorema 2.1.2

Diketahui $(R, +, \cdot)$ ring dan $S \subseteq R$, maka S merupakan subring dari ring R jika dan hanya jika:

- (1) $S \neq \emptyset$.
- (2) $(\forall a, b \in S) (a + b \in S) \wedge (ab \in S)$.
- (3) $(\forall a \in S) -a \in S$.

Bukti:

$(\Rightarrow)$

Diketahui $(R, +, \cdot)$ ring dan S subring dari ring R , sehingga menurut Definisi 2.1.5, $(S, +, \cdot)$ juga merupakan ring.

Karena S ring, maka $S \neq \emptyset$ karena ada sekurang-kurangnya elemen identitas $0 \in S$.

Sifat (2) dan (3) jelas dipenuhi karena $(S, +, \cdot)$ ring.

$(\Leftarrow)$

Diketahui $(R, +, \cdot)$ ring dan $S \subseteq R$, dan berlaku:

- (1) $S \neq \emptyset$.
- (2) $(\forall a, b \in S) (a + b \in S) \wedge (ab \in S)$.
- (3) $(\forall a \in S) -a \in S$.

Ambil sebarang $a \in S$ maka menurut sifat (3) $-a \in S$.

Dengan menggunakan sifat (2) didapat $a + (-a) = 0 \in S$.

Jadi S memuat elemen identitas 0.

Karena diketahui $S \subseteq R$ dan $(R, +, \cdot)$ ring, maka sifat komutatif (terhadap operasi penjumlahan), sifat asosiatif (operasi penjumlahan dan perkalian), dan sifat distributif operasi perkalian terhadap penjumlahan juga dipenuhi di S . Terbukti bahwa $(S, +, \cdot)$ merupakan ring.

Jadi menurut Definisi 2.1.5, $(S, +, \cdot)$ merupakan subring dari ring R . ■

Contoh 2.1.5:

Misal $N = \left\{ \begin{bmatrix} u & v \\ 0 & w \end{bmatrix} \mid u, v, w \in \mathbb{Z} \right\}$. Maka N adalah himpunan bagian dari ring $(M(2, \mathbb{Z}), +, \cdot)$ dan $(N, +, \cdot)$ merupakan subring dari $(M(2, \mathbb{Z}), +, \cdot)$.

B. Daerah Integral dan Lapangan

Dalam pembahasan ini akan dibahas mengenai definisi daerah integral dan lapangan serta contoh-contohnya. Namun, sebelumnya akan dibahas terlebih dahulu pengertian pembagi nol.

Definisi 2.2.1

Jika R ring komutatif, maka $a \in R, a \neq 0$ disebut *pembagi nol* jika ada $b \in R, b \neq 0$ sedemikian sehingga $ab = 0$.

Contoh 2.2.1:

Pada $\mathbb{Z}_8$, $[2]$ dan $[4]$ merupakan pembagi nol karena $[2] \otimes [4] = [0]$.

Definisi 2.2.2

Suatu ring komutatif R dengan elemen satuan 1 disebut *daerah integral* jika R tidak memuat pembagi nol.

Contoh 2.2.2:

- Ring $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, dan $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ merupakan daerah integral.
- Ring himpunan semua bilangan genap $(\mathbb{E}, +, \cdot)$ bukan merupakan daerah integral karena tidak memuat elemen satuan.
- $\mathbb{Z}_8$ bukan merupakan daerah integral karena $\mathbb{Z}_8$ memuat pembagi nol.

Definisi 2.2.3

Jika $(R, +, \cdot)$ adalah ring komutatif dengan elemen satuan, maka $b \in R$ disebut *unit* jika $(\exists c \in R) bc = cb = 1$.

Untuk selanjutnya c disebut *invers multiplikatif* dari b dan ditulis b^{-1} .

Definisi 2.2.4

Jika $(F, +, \cdot)$ adalah ring komutatif dengan elemen satuan, maka F disebut *lapangan* jika setiap elemen tidak nol di F mempunyai invers multiplikatif di F , atau $(\forall a \in F - \{0\}) (\exists a^{-1} \in F - \{0\}) aa^{-1} = a^{-1}a = 1$.

Contoh 2.2.3:

- Ring $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, dan $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ merupakan lapangan.

- b. Ring himpunan semua bilangan bulat $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ bukan merupakan lapangan karena ada elemen di $\mathbb{Z} - \{0\}$ yang tidak mempunyai invers multiplikatif.
- c. $\mathbb{Z}_8$ bukan merupakan lapangan karena $[4]$ tidak mempunyai invers multiplikatif.

Teorema 2.2.1

Setiap lapangan adalah daerah integral.

Bukti:

Diketahui $(F, +, \cdot)$ adalah lapangan.

Akan ditunjukkan bahwa $(F, +, \cdot)$ tidak memuat pembagi nol.

Ambil sebarang $a, b \in F$ sedemikian sehingga $a \neq 0$ dan $b \neq 0$.

Diketahui $a \neq 0, b \neq 0$.

Andaikan:

$$ab = 0$$

$$a^{-1}(ab) = a^{-1}0$$

$$(a^{-1}a)b = a^{-1}0$$

$$b = 0$$

Kontradiksi, jadi pengandaian bahwa $ab = 0$ harus diingkari sehingga $ab \neq 0$.

Berarti $(\forall a, b \in F) a \neq 0 \wedge b \neq 0 \Rightarrow ab \neq 0$.

Jadi F tidak memuat pembagi nol.

Terbukti bahwa $(F, +, \cdot)$ adalah daerah integral. ■

Teorema 2.2.2

Setiap daerah integral berhingga adalah lapangan.

Bukti:

Misalkan D adalah daerah integral yang berhingga.

Ambil sebarang $a \in D, a \neq 0$.

Didefinisikan pemetaan $f: D \rightarrow D$ dengan aturan $f(x) = ax$, untuk setiap $x \in D$.

Ambil sebarang $x, y \in D$ sedemikian sehingga $f(x) = f(y)$ maka

$$ax = ay$$

$$ax - ay = 0$$

$$a(x - y) = 0$$

Karena $a \in D, a \neq 0$, dan D adalah daerah integral, maka

$$x - y = 0$$

$$x = y.$$

Jadi f pemetaan injektif.

Andaikan f tidak surjektif, maka $f(D) \subset D$.

Karena diketahui D himpunan berhingga, maka $|f(D)| < |D|$, padahal sudah dibuktikan bahwa f injektif sehingga berlaku $|f(D)| = |D|$.

Kontradiksi, jadi pengandaian bahwa f tidak surjektif harus diingkari.

Terbukti bahwa f pemetaan surjektif.

Karena D daerah integral, maka $1 \in D$ dan karena f surjektif, maka ada $x \in D$ sehingga $ax = 1$.

Ini berarti a mempunyai invers multiplikatif yaitu $x \in D$.

Sehingga $(\forall a \in D, a \neq 0) (\exists x \in D) ax = 1$ atau setiap elemen tidak nol mempunyai invers multiplikatif.

Jadi terbukti bahwa D adalah lapangan. ■

Teorema 2.2.3

Jika n adalah bilangan prima, maka $\mathbb{Z}_n$ adalah lapangan.

Bukti:

$$\begin{aligned} n \text{ prima} &\Leftrightarrow (\forall a, b \in \mathbb{Z}) ab = n \Rightarrow a = n \vee b = n. \\ &\Leftrightarrow (\forall [a], [b] \in \mathbb{Z}_n) [ab] = [n] \Rightarrow [a] = [n] \vee [b] = [n]. \\ &\Leftrightarrow (\forall [a], [b] \in \mathbb{Z}_n) [ab] = [0] \Rightarrow [a] = [0] \vee [b] = [0]. \\ &\Leftrightarrow \mathbb{Z}_n \text{ daerah integral.} \end{aligned}$$

Selain itu $\mathbb{Z}_n$ berhingga, jadi $\mathbb{Z}_n$ adalah lapangan (menurut Teorema 2.2.2). ■

C. Ideal

Dalam pembahasan ini akan dibahas mengenai definisi ideal serta contoh-contohnya.

Definisi 2.3.1

Jika I subring dari ring R dan dipenuhi $(\forall a \in I) (\forall r \in R) ar \in I$, maka I disebut *ideal kanan* dari ring R , sedangkan jika berlaku $(\forall a \in I) (\forall r \in R) ra \in I$, maka I disebut *ideal kiri* dari ring R .

Jika I subring dari ring R , maka I disebut *ideal* jika $(\forall a \in I) (\forall r \in R)$
 $ar \in I \wedge ra \in I$.

Definisi 2.3.2

Jika I merupakan ideal dalam ring $(R, +, \cdot)$, maka I disebut *ideal sejati* atau *ideal nontrivial* jika $I \neq R$ dan $I \neq \{0\}$.

Contoh 2.3.1:

- Setiap ring R mempunyai dua ideal trivial yaitu $\{0\}$ dan R sendiri.
- $\mathbb{Z}$ bukan merupakan ideal dari $\mathbb{Q}$ karena $4 \in \mathbb{Z}$, $-\frac{1}{5} \in \mathbb{Q}$ tetapi

$$4\left(-\frac{1}{5}\right) = -\frac{4}{5} \notin \mathbb{Z}.$$

- $\mathbb{Q}$ bukan ideal dari $\mathbb{R}$.
- Misal $L = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mid x, y \in \mathbb{Z} \right\}$. Maka L adalah ideal kanan tetapi bukan ideal kiri dari $M(2, \mathbb{Z})$.

Teorema 2.3.1

Diketahui R ring komutatif dengan elemen satuan 1 dan $a \in R$, maka $\langle a \rangle = \{ar \mid r \in R\}$ merupakan ideal dalam ring R .

Bukti:

- i. Perhatikan bahwa $0 \in R$.

Karena $a0 = 0$ untuk sebarang $a \in R$, maka $0 \in \langle a \rangle$.

Jadi $\langle a \rangle \neq \emptyset$.

- ii. Ambil sebarang $x, y \in \langle a \rangle$, maka ada $r, s \in R$ sehingga $x = ar$ dan $y = as$.

$$\begin{aligned} x + y &= ar + as \\ &= a(r + s) \\ &= at, t = r + s \in R. \end{aligned}$$

Jadi $x + y \in \langle a \rangle$.

- iii. Ambil sebarang $x \in \langle a \rangle$, maka ada $r \in R$ sehingga $x = ar$.

Karena $r \in R$ dan $(R, +)$ grup, maka ada $-r \in R$ sehingga

$$\begin{aligned} a(-r) &= -(ar) \\ &= -x \in \langle a \rangle. \end{aligned}$$

- iv. Ambil sebarang $r \in R$ dan sebarang $x \in \langle a \rangle$.

Karena $x \in \langle a \rangle$, maka ada $s \in R$ sedemikian sehingga $x = as$, sehingga

$$\begin{aligned} rx &= r(as) \\ &= (ra)s \\ &= a(rs) \\ &= at, t = rs \in R. \end{aligned}$$

Jadi $rx \in \langle a \rangle$.

$$\begin{aligned} xr &= (as)r \\ &= a(sr) \end{aligned}$$

$$= au, u = sr \in R.$$

Jadi $xr \in \langle a \rangle$.

Jadi terbukti bahwa $\langle a \rangle = \{ar \mid r \in R\}$ merupakan ideal dalam ring R . ■

Definisi 2.3.3

Diketahui R ring komutatif dengan elemen satuan 1 dan $a \in R$, maka $\langle a \rangle = \{ar \mid r \in R\}$ dikatakan *ideal utama* yang dibangkitkan oleh a .

Elemen a disebut *pembangkit* atau *generator* dari ideal $\langle a \rangle$.

Contoh 2.3.2:

$\langle 5 \rangle = \{5n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ adalah ideal utama dalam $\mathbb{Z}$ yang dibangkitkan oleh 5.

Definisi 2.3.4

Ideal I dalam ring komutatif R disebut *ideal prima* jika $I \neq R$ dan $(\forall a, b \in R)$
 $ab \in I \Rightarrow a \in I \vee b \in I$.

Contoh 2.3.3:

Diketahui $\mathbb{Z}_8$ adalah ring komutatif terhadap operasi penjumlahan dan perkalian di $\mathbb{Z}_8$. Dalam ring $\mathbb{Z}_8$, ideal prima yang dapat dibentuk adalah $\{[0], [2], [4], [6]\}$.

D. Homomorfisma Ring

Dalam pembahasan ini akan dibahas mengenai homomorfisma dari ring secara umum serta contoh-contohnya.

Definisi 2.4.1

Jika $(R, +, \cdot)$ dan $(S, \oplus, \otimes)$ ring, maka pemetaan $\theta: R \rightarrow S$ disebut *homomorfisma ring* jika dipenuhi:

$$\begin{aligned}\theta(a + b) &= \theta(a) \oplus \theta(b), \text{ dan} \\ \theta(ab) &= \theta(a) \otimes \theta(b), \forall a, b \in R.\end{aligned}$$

Contoh 2.4.1:

- a. Pemetaan $\alpha: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_n$ dengan aturan $\alpha(a) = [a]$, untuk setiap $a \in \mathbb{Z}$ adalah homomorfisma ring karena dipenuhi α pemetaan yang well-defined dan berlaku bahwa:

$$\begin{aligned}\alpha(a + b) &= [a + b] \\ &= [a] \oplus [b] \\ &= \alpha(a) \oplus \alpha(b)\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}\alpha(ab) &= [ab] \\ &= [a] \otimes [b] \\ &= \alpha(a) \otimes \alpha(b), \forall a, b \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

b. Jika $H = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$ dan pemetaan $\beta: H \rightarrow \mathbb{R}$ didefinisikan

dengan aturan $\beta \left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \right) = c$, untuk setiap $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \in H$, maka β adalah

suatu homomorfisma ring.

Jika $\chi: R \rightarrow S$ homomorfisma dan χ pemetaan yang surjektif, maka χ dikatakan *epimorfisma* dan S dikatakan *bayangan homomorfis R*.

Jika $\chi: R \rightarrow S$ homomorfisma dan χ pemetaan yang injektif, maka χ dikatakan *monomorfisma*.

Jika $\chi: R \rightarrow S$ homomorfisma dan χ pemetaan yang bijektif, maka χ dikatakan *isomorfisma* dan S dikatakan *bayangan isomorfis R*.

BAB III

RING LOKAL

Dalam bab sebelumnya telah dibahas materi yang memprasyarati pembahasan materi pokok dari tulisan ini. Sekarang, dalam bab tiga ini akan dibahas materi utama dari tulisan ini yaitu ring lokal. Namun, sebelumnya akan dibahas terlebih dahulu tentang ideal maksimal.

A. Ideal Maksimal

Pada pembahasan ini akan diperoleh kenyataan bahwa ideal maksimal dalam suatu ring komutatif dengan elemen satuan selalu ada. Lebih jauh lagi, ideal maksimal tersebut tidak selalu tunggal dan pasti saling beririsan dikarenakan elemen identitas selalu termuat di dalamnya.

Definisi 3.1.1

Suatu ideal M dalam suatu ring R disebut *ideal maksimal* jika $M \neq R$ dan untuk setiap ideal N sedemikian sehingga $M \subseteq N \subseteq R$, maka $N = M$ atau $N = R$.

Contoh 3.1.1:

- $\langle 3 \rangle = \{3n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ adalah ideal maksimal dalam $\mathbb{Z}$.
- $\langle 4 \rangle = \{4n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ bukan ideal maksimal dalam $\mathbb{Z}$, karena ada ideal lain dalam $\mathbb{Z}$ yaitu $\langle 2 \rangle = \{2n \mid n \in \mathbb{Z}\}$, sedemikian sehingga $\langle 4 \rangle \subset \langle 2 \rangle \subset \mathbb{Z}$.

Lemma 3.1.1

Jika $(R, +, \cdot)$ adalah ring komutatif dengan elemen satuan dan M merupakan ideal dalam R sedemikian sehingga $1 \in M$, maka $M = R$.

Bukti:

Karena M merupakan ideal dalam R , maka $M \subseteq R$. (1)

Ambil sebarang $x \in R$.

Karena $1 \in M$ dan M ideal dalam R , maka $1x = x \in M$.

Sehingga $R \subseteq M$. (2)

Dari (1) dan (2) dapat disimpulkan bahwa $M = R$.

Jadi terbukti bahwa jika $1 \in M$ maka $M = R$. ■

Berikut ini akan diberikan suatu bentuk lemma yaitu Lemma Zorn yang selanjutnya akan sangat berguna sebagai dasar untuk membuktikan teorema dalam ideal maksimal. Untuk membuktikan lemma ini, diperlukan pemahaman konsep-konsep yang relatif jauh menyimpang dari pembahasan topik ini. Dengan pertimbangan di atas, maka penulis membatasi pembahasan ini untuk tidak menyertakan bukti dari lemma ini. Namun, sebelumnya akan dibahas terlebih dahulu beberapa definisi yang mendasari Lemma Zorn.

Definisi 3.1.2

Sebuah *himpunan terurut parsial* adalah sebuah himpunan tidak nol A bersama-sama dengan relasi urutan parsial " $\preceq$ " pada $A \times A$, yaitu relasi yang bersifat:

- a. refleksif : $a \preceq a$
- b. transitif : $a \preceq b$ dan $b \preceq c$ maka $a \preceq c$
- c. antisimetris : $a \preceq b$ dan $b \preceq a$ maka $a = b$

untuk semua $a, b, c \in A$.

Definisi 3.1.3

Andaikan $(A, \preceq)$ adalah himpunan terurut parsial. Elemen-elemen $a, b \in A$ dikatakan *dapat dibandingkan* jika $a \preceq b$ atau $b \preceq a$.

Definisi 3.1.4

Sebuah himpunan terurut parsial A dikatakan *terurut linear* jika setiap dua elemen di A dapat dibandingkan.

Definisi 3.1.5

Andaikan $(A, \preceq)$ adalah himpunan terurut parsial. Sebuah elemen $a \in A$ adalah *maksimal* di A jika untuk setiap $c \in A$, $c \preceq a$; dengan kata lain, untuk semua $c \in A$, jika $a \preceq c$ maka $a = c$.

Definisi 3.1.6

Sebuah *batas atas* dari sebuah himpunan bagian tidak kosong B dari himpunan terurut parsial $(A, \preceq)$ adalah sebuah elemen $d \in A$ sedemikian sehingga $b \preceq d$ untuk setiap $b \in B$.

Definisi 3.1.7

Sebuah himpunan bagian tidak kosong B dari himpunan terurut parsial $(A, \preceq)$ yang terurut linear oleh “ $\preceq$ ” disebut *rantai*.

Lemma Zorn

Jika A adalah himpunan terurut parsial dan $A \neq \emptyset$ sedemikian sehingga setiap rantai di dalam A mempunyai batas atas di A , maka A memuat elemen maksimal.

Teorema 3.1.1

Jika R adalah ring komutatif dengan elemen satuan, maka setiap ideal dalam R (kecuali R sendiri) termuat dalam ideal maksimal dalam R .

Bukti:

Misalkan A adalah ideal dalam R sedemikian sehingga $A \neq R$ dan dibentuk $\mathfrak{I} = \{B \mid A \subseteq B, B \text{ ideal dalam } R \text{ sedemikian sehingga } B \neq R\}$.

Akan dibuktikan terlebih dahulu bahwa $\mathfrak{I}$ adalah himpunan terurut parsial dengan relasi “ $\subseteq$ ”.

Karena $A \subseteq A$ maka $A \in \mathfrak{I}$.

Jadi $\mathfrak{I} \neq \emptyset$.

a. Ambil sebarang $B \in \mathfrak{I}$.

Sehingga berlaku $B \subseteq B$.

Jadi $\mathfrak{I}$ bersifat refleksif terhadap relasi " $\subseteq$ ".

b. Ambil sebarang $B, C, D \in \mathfrak{I}$.

Sehingga berlaku jika $B \subseteq C$ dan $C \subseteq D$ maka $B \subseteq D$.

Jadi $\mathfrak{I}$ bersifat transitif terhadap relasi " $\subseteq$ ".

c. Ambil sebarang $B, C \in \mathfrak{I}$.

Sehingga berlaku jika $B \subseteq C$ dan $C \subseteq B$ maka $B = C$.

Jadi $\mathfrak{I}$ bersifat antisimetris terhadap relasi " $\subseteq$ ".

Jadi terbukti bahwa $\mathfrak{I}$ adalah himpunan terurut parsial dengan relasi " $\subseteq$ ".

Dengan menggunakan hipotesa Lemma Zorn, kita harus menunjukkan bahwa setiap rantai dari ideal dalam $\mathfrak{I}$ mempunyai batas atas di $\mathfrak{I}$.

Misalkan $\mathcal{C} = \{B_i \mid i \in I\}$ merupakan rantai di $\mathfrak{I}$, dengan I adalah himpunan indeks.

Dinyatakan $C = \bigcup_{i \in I} B_i$.

Sekarang kita akan membuktikan terlebih dahulu bahwa C adalah ideal dalam R .

Ambil sebarang $a, b \in C$.

Ini berarti $a \in B_i$ dan $b \in B_j$ untuk suatu $i, j \in I$.



Karena C adalah rantai, maka $B_i \subseteq B_j$ atau $B_j \subseteq B_i$.

1. Kasus $B_i \subseteq B_j$.

Karena $a \in B_i$ dan $B_i \subseteq B_j$, maka $a \in B_j$.

Sehingga $a, b \in B_j$.

Diketahui B_j adalah ideal dalam R , maka $a - b \in B_j \subseteq C$ dan untuk setiap

$r \in R, ra \in B_j \subseteq C$.

Jadi $a - b \in C$ dan $ra \in C$ untuk setiap $a, b \in C$ dan $r \in R$.

2. Kasus $B_j \subseteq B_i$.

Karena $b \in B_j$ dan $B_j \subseteq B_i$, maka $b \in B_i$.

Sehingga $a, b \in B_i$.

Dengan cara yang sama dengan 1 diperoleh $a - b \in C$ dan $ra \in C$ untuk

setiap $a, b \in C$ dan $r \in R$.

Dari 1 dan 2 dapat disimpulkan bahwa C adalah ideal dalam R .

Di lain pihak, karena $A \subseteq B_i$, untuk setiap $i \in I$ maka $A \subseteq \bigcup_{i \in I} B_i = C$.

Karena $B_i \neq R$ untuk setiap $i \in I$ dan B_i merupakan ideal untuk setiap $i \in I$, maka $1 \notin B_i$ untuk setiap $i \in I$ (perhatikan Lemma 3.1.1).

Sehingga $1 \notin \bigcup_{i \in I} B_i = C$ dengan 1 adalah elemen satuan dalam R .

Jadi $C \neq R$ dan akibatnya $C \in \mathfrak{I}$.

Sehingga dapat disimpulkan bahwa $C = \bigcup_{i \in I} B_i$ adalah batas atas dari rantai C .

Berarti hipotesa Lemma Zorn dipenuhi dan akibatnya $\mathfrak{I}$ memuat elemen maksimal M .

Tetapi elemen maksimal dari $\mathfrak{I}$ adalah ideal maksimal di R yang memuat A . ■

Akibat 3.1.1

Jika R adalah ring komutatif dengan elemen satuan dan M adalah ideal maksimal dalam R , maka $a \in M$ jika dan hanya jika a bukan suatu unit.

Bukti:

($\Rightarrow$)

Diketahui $a \in M$.

Andaikan a adalah unit, maka ada $r \in R$ sehingga $ar = 1$.

Karena $a \in M$ dan M adalah ideal dalam R , maka $ar = 1 \in M$.

Menurut Lemma 3.1.1, maka $M = R$.

Terjadi kontradiksi dengan pernyataan bahwa M adalah ideal maksimal.

Jadi, jika $a \in M$ maka a bukan suatu unit.

($\Leftarrow$)

Diketahui a bukan suatu unit, berarti $ar \neq 1$ untuk setiap $r \in R$.

Perhatikan bahwa menurut Teorema 2.3.1, $\langle a \rangle = \{ar \mid r \in R\}$ merupakan ideal dalam R .

Jelas bahwa $\langle a \rangle \subset R$.

Karena ada $1 \in R$ sehingga $1 \neq ar$, untuk setiap $r \in R$, maka $1 \notin \langle a \rangle$.

Sehingga $\langle a \rangle \neq R$.

Menurut Teorema 3.1.1, dapat ditemukan suatu ideal maksimal M dalam R sedemikian sehingga $\langle a \rangle \subseteq M$.

Di lain pihak, $a = a1 \in \langle a \rangle$ dengan 1 elemen R .

Karena $a \in \langle a \rangle$ dan $\langle a \rangle \subseteq M$, maka $a \in M$.

Jadi, jika a bukan suatu unit maka $a \in M$.

Dengan demikian terbukti bahwa $a \in M$ jika dan hanya jika a bukan suatu unit. ■

Akibat 3.1.2

Jika R adalah ring komutatif dengan elemen satuan, maka ideal maksimal dalam R selalu ada.

Bukti:

Perhatikan bahwa $\{0\}$ adalah suatu ideal dalam R sedemikian sehingga $\{0\} \neq R$.

Menurut Teorema 3.1.1, dapat ditemukan suatu ideal maksimal M dalam R sedemikian sehingga $\{0\} \subseteq M$.

Jadi terbukti bahwa ideal maksimal dalam R selalu ada. ■

B. Ring Lokal

Dalam subbab ini akan dibahas mengenai ring lokal yang merupakan materi utama dari tulisan ini. Namun, kita mulai subbab ini dengan beberapa definisi dan teorema yang nantinya mendasari definisi ring lokal.

Definisi 3.2.1

Andaikan A adalah ring komutatif. Sebuah himpunan bagian tidak kosong S dari A dikatakan *multiplikatif* jika setiap hasil kali berhingga dari elemen-elemen dari S termasuk pada S .

Contoh 3.2.1:

Jika A adalah ring komutatif.

Untuk setiap $a \in A$, himpunan dari a^n , di mana $n \in \mathbb{N}$, adalah himpunan bagian yang multiplikatif dari A .

Teorema 3.2.1

Jika A adalah ring komutatif dan P adalah sebuah ideal dari A , maka $S = A - P$ adalah himpunan bagian yang multiplikatif dari A jika dan hanya jika P adalah sebuah ideal prima.

Bukti:

$(\Rightarrow)$

Diketahui A adalah ring komutatif, P adalah sebuah ideal dari A , dan $S = A - P$ adalah himpunan bagian yang multiplikatif dari A .

Karena $S = A - P$ adalah himpunan bagian yang multiplikatif dari A , maka untuk setiap $x, y \in S$ mengakibatkan $xy \in S$.

Dengan kata lain, jika $x \notin P$ dan $y \notin P$ maka $xy \notin P$.

Jadi, jika $S = A - P$ adalah himpunan bagian yang multiplikatif dari A maka P adalah sebuah ideal prima dari A .

$(\Leftarrow)$

Diketahui A adalah ring komutatif dan P adalah sebuah ideal prima dari A .

Karena P adalah sebuah ideal prima dari A , maka $P \neq A$ dan $(\forall x, y \in A)$
 $xy \in P \Rightarrow x \in P \vee y \in P$.

Dengan kata lain, jika $x \notin P$ dan $y \notin P$ maka $xy \notin P$.

Berarti $xy \in S$ untuk setiap $x, y \in S$ dengan $S = A - P$.

Jadi, jika P adalah sebuah ideal prima dari A maka $S = A - P$ adalah himpunan bagian yang multiplikatif dari A .

Dengan demikian terbukti bahwa $S = A - P$ adalah himpunan bagian yang multiplikatif dari A jika dan hanya jika P adalah sebuah ideal prima dari A . ■

Untuk setiap himpunan bagian tidak kosong S dari sebuah ring komutatif A , ada himpunan bagian-himpunan bagian dari A yang multiplikatif yang memuat S , untuk contoh A sendiri.

Definisi 3.2.2

Andaikan S adalah himpunan bagian tidak kosong dari sebuah ring komutatif A . Irisan dari semua himpunan bagian yang multiplikatif dari A yang memuat S dikatakan *dibangun oleh S* .

Sebagai akibatnya, himpunan yang dibangun oleh S tersebut terdiri dari semua hasil kali berhingga dari elemen-elemen dari S .

Definisi 3.2.3

Suatu relasi " $\sim$ " di dalam himpunan tidak kosong A disebut *relasi ekuivalensi* jika relasi tersebut memenuhi:

- Sifat refleksif yakni $(\forall a \in A) a \sim a$.
- Sifat simetris yakni $(\forall a, b \in A)$ jika $a \sim b$ maka $b \sim a$.
- Sifat transitif yakni $(\forall a, b, c \in A)$ jika $a \sim b$ dan $b \sim c$ maka $a \sim c$.

Definisi 3.2.4

Jika " $\sim$ " adalah relasi ekuivalensi pada himpunan tidak kosong A , maka $[a] = \{b \in A \mid b \sim a\}$ disebut *kelas ekuivalensi yang memuat a* .

Definisi 3.2.5

Misal A adalah himpunan tidak kosong. R adalah relasi ekuivalensi pada A . Maka himpunan kelas-kelas ekuivalensi yang dihasilkan oleh R disebut *himpunan kuosien* dari A .

Teorema 3.2.2

Andaikan A adalah ring komutatif dengan elemen satuan, S adalah himpunan bagian tidak kosong dari A , dan $\bar{S}$ adalah himpunan bagian dari A yang multiplikatif yang dibangun oleh S . Di $A \times \bar{S} = \{(a, s) \mid a \in A, s \in \bar{S}\}$ didefinisikan relasi “ $\sim$ ” dengan $(a, s) \sim (a', s')$ bila ada $t \in \bar{S}$ sedemikian sehingga $t(s'a - sa') = 0$, maka relasi “ $\sim$ ” tersebut merupakan relasi ekuivalensi.

Bukti:

Akan dibuktikan bahwa relasi “ $\sim$ ” adalah relasi ekuivalensi pada $A \times \bar{S}$.

- a. Jika sebarang $(a, s) \in A \times \bar{S}$, maka $(a, s) \sim (a, s)$ karena untuk setiap

$r \in \bar{S}$ sedemikian sehingga

$$\begin{aligned} r(sa - sa) &= rsa - rsa \\ &= 0. \end{aligned}$$

Jadi relasi tersebut merupakan relasi yang bersifat refleksif.

- b. Ambil sebarang $(a, s), (a', s') \in A \times \bar{S}$.

Jika $(a, s) \sim (a', s')$ maka ada $t \in \bar{S}$ sedemikian sehingga

$$t(s'a - sa') = 0$$

$$t(-(sa' - s'a)) = 0$$

$$-t(sa' - s'a) = 0, \text{ untuk suatu } -t \in \bar{S}.$$

Sehingga $(a', s') \sim (a, s)$.

Jadi relasi tersebut merupakan relasi yang bersifat simetris.

c. Ambil sebarang $(a, s), (a', s'), (a'', s'') \in A \times \bar{S}$.

Jika $(a, s) \sim (a', s')$ dan $(a', s') \sim (a'', s'')$ maka ada $t, u \in \bar{S}$ sedemikian

sehingga $t(s'a - sa') = 0$ dan $u(s''a' - s'a'') = 0$, sehingga

$$tu[s''s'(s'a - sa') + s's(s''a' - s'a'')] = 0$$

$$tu[(s''s's'a - s''s'sa') + (s''s'sa' - s's'sa'')] = 0$$

$$tu(s''s's'a - s's'sa'') = 0$$

$$tus's'(s''a - sa'') = 0,$$

untuk suatu $tus's' \in \bar{S}$.

Sehingga $(a, s) \sim (a'', s'')$.

Jadi relasi tersebut merupakan relasi yang bersifat transitif.

Jadi terbukti bahwa relasi “ $\sim$ ” adalah relasi ekuivalensi pada $A \times \bar{S}$. ■

Teorema 3.2.3

Andaikan A adalah ring komutatif dengan elemen satuan, S adalah himpunan bagian tidak kosong dari A , dan $\bar{S}$ adalah himpunan bagian dari A yang multiplikatif yang dibangun oleh S . Misal $A[S^{-1}]$ adalah himpunan kuosien dari $A \times \bar{S}$ terhadap relasi ekuivalensi “ $\sim$ ” yang didefinisikan dengan

$(a, s) \sim (a', s')$ bila ada $t \in \bar{S}$ sedemikian sehingga $t(s'a - sa') = 0$. Misal $\frac{a}{s}$

adalah notasi kelas ekuivalensi yang memuat (a, s) . Bila pada $A[S^{-1}]$ didefinisikan 2 operasi yaitu operasi penjumlahan dan perkalian sebagai berikut:

$$\frac{a}{s} + \frac{b}{t} = \frac{ta + sb}{st},$$

$$\frac{a}{s} \frac{b}{t} = \frac{ab}{st}$$

untuk $a, b \in A, s, t \in \bar{S}$, maka $A[S^{-1}]$ adalah ring komutatif dengan elemen satuan.

Bukti:

Akan dibuktikan bahwa $A[S^{-1}]$ adalah ring komutatif dengan elemen satuan.

1. Akan dibuktikan bahwa $A[S^{-1}]$ merupakan grup Abel.

a. Ambil sebarang $\frac{a}{s}, \frac{b}{t}, \frac{c}{u} \in A[S^{-1}]$.

$$\frac{a}{s} + \left(\frac{b}{t} + \frac{c}{u} \right) = \frac{a}{s} + \frac{ub + tc}{tu} \quad (\text{definisi penjumlahan})$$

$$= \frac{tua + (sub + stc)}{stu} \quad (\text{definisi penjumlahan})$$

$$= \frac{(tua + sub) + stc}{stu} \quad (\text{sifat asosiatif})$$

penjumlahan pada A)

$$= \frac{ta + sb}{st} + \frac{c}{u} \quad (\text{definisi penjumlahan})$$

$$= \left(\frac{a}{s} + \frac{b}{t} \right) + \frac{c}{u} \quad (\text{definisi penjumlahan})$$

Maka operasi penjumlahan di $A[S^{-1}]$ bersifat assosiatif.

b. Jika 0 merupakan elemen identitas terhadap operasi penjumlahan

dalam A , maka $\frac{0}{1}$ merupakan elemen identitas terhadap operasi

penjumlahan dalam $A[S^{-1}]$ karena jika $\frac{0}{1} \in A[S^{-1}]$ maka:

$$\begin{aligned} \frac{0}{1} + \frac{a}{s} &= \frac{s0 + 1a}{1s} \\ &= \frac{a}{s} \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} \frac{a}{s} + \frac{0}{1} &= \frac{1a + s0}{1s} \\ &= \frac{a}{s} \end{aligned}$$

c. Invers dari $\frac{a}{s}$ terhadap operasi penjumlahan dalam $A[S^{-1}]$ adalah $\frac{-a}{s}$

karena:

$$\begin{aligned} \frac{-a}{s} + \frac{a}{s} &= \frac{(-as) + as}{s^2} \\ &= \frac{0}{s^2} \\ &= \frac{0}{1} \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}\frac{a}{s} + \frac{-a}{s} &= \frac{as + (-as)}{s^2} \\ &= \frac{0}{s^2} \\ &= \frac{0}{1}\end{aligned}$$

Akan ditunjukkan bahwa $(0, s^2) \sim (0, 1)$ sehingga $\frac{0}{s^2} = \frac{0}{1}$.

Perhatikan bahwa untuk setiap $t \in \bar{S}$ berlaku

$$\begin{aligned}t((1)(0) - s^2 0) &= t(0 - 0) \\ &= t0 - t0 \\ &= 0.\end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa $(0, s^2) \sim (0, 1)$ yang mengakibatkan $\frac{0}{s^2} = \frac{0}{1}$.

d. Karena A Abel, maka didapat:

$$\begin{aligned}\frac{a}{s} + \frac{b}{t} &= \frac{ta + sb}{st} \\ &= \frac{sb + ta}{st} \\ &= \frac{b}{t} + \frac{a}{s}.\end{aligned}$$

Maka $A[S^{-1}]$ berlaku sifat komutatif.

Jadi $A[S^{-1}]$ merupakan grup Abel.

2. Sekarang akan ditunjukkan bahwa pada $A [S^{-1}]$ berlaku pula sifat asosiatif terhadap perkalian dan juga sifat distributif perkalian terhadap penjumlahan.

Jika diambil sebarang $\frac{a}{s}, \frac{b}{t}, \frac{c}{u} \in A [S^{-1}]$, maka:

$$\left(\frac{a}{s} \frac{b}{t} \right) \frac{c}{u} = \frac{ab}{st} \frac{c}{u} \quad (\text{definisi perkalian})$$

$$= \frac{(ab)c}{(st)u} \quad (\text{definisi perkalian})$$

$$= \frac{a(bc)}{s(tu)} \quad (\text{sifat asosiatif}$$

perkalian pada A)

$$= \frac{a}{s} \frac{bc}{tu} \quad (\text{definisi perkalian})$$

$$= \frac{a}{s} \left(\frac{b}{t} \frac{c}{u} \right) \quad (\text{definisi perkalian})$$

dan

$$\frac{a}{s} \left(\frac{b}{t} + \frac{c}{u} \right) = \frac{a}{s} \frac{ub + tc}{tu} \quad (\text{definisi penjumlahan})$$

$$= \frac{a(ub + tc)}{s(tu)} \quad (\text{definisi perkalian})$$

$$= \frac{uab + tac}{stu} \quad (\text{sifat distributif pada } A)$$

$$= \frac{ab}{st} + \frac{ac}{su} \quad (\text{definisi penjumlahan})$$

$$= \left(\frac{a}{s} \frac{b}{t} \right) + \left(\frac{a}{s} \frac{c}{u} \right) \quad (\text{definisi perkalian})$$

Dengan cara yang sama dapat ditunjukkan bahwa pada $A [S^{-1}]$ berlaku distributif kanan.

Maka dalam $A [S^{-1}]$ berlaku sifat assosiatif perkalian dan hukum distributif.

Jadi $A [S^{-1}]$ merupakan suatu ring.

3. Akan ditunjukkan bahwa $A [S^{-1}]$ merupakan suatu ring komutatif.

Jika diambil sebarang $\frac{a}{s}, \frac{b}{t} \in A [S^{-1}]$, maka:

$$\begin{aligned} \frac{a}{s} \frac{b}{t} &= \frac{ab}{st} && \text{(definisi perkalian)} \\ &= \frac{ba}{ts} && \text{(sifat komutatif pada } A) \\ &= \frac{b}{t} \frac{a}{s} && \text{(definisi perkalian)} \end{aligned}$$

Jadi $A [S^{-1}]$ merupakan suatu ring komutatif.

4. Akan ditunjukkan bahwa $A [S^{-1}]$ merupakan suatu ring komutatif dengan elemen satuan.

Jika diambil sebarang $\frac{a}{s} \in A [S^{-1}]$, maka ada $\frac{1}{1} \in A [S^{-1}]$ sehingga:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1} \frac{a}{s} &= \frac{a}{s} \frac{1}{1} \\ &= \frac{a}{s} \end{aligned}$$

Jadi $A [S^{-1}]$ merupakan suatu ring komutatif dengan elemen satuan. ■

Definisi 3.2.6

Ring $A[S^{-1}]$ yang dimaksud dalam Teorema 3.2.3 disebut *ring fraksi dari A* yang didefinisikan oleh S .

Untuk selanjutnya ring fraksi $A[S^{-1}]$ ditulis juga dengan $S^{-1}A$. Bila S adalah komplemen dari ideal prima P dari A , ditulis $A_P = S^{-1}A$.

Sekarang kita akan mendefinisikan ring lokal.

Definisi 3.2.7

Suatu ring komutatif A dengan elemen satuan disebut *ring lokal* jika A mempunyai sebuah ideal maksimal tunggal.

Catatan:

Dari Teorema 3.1.1 berarti setiap ideal dalam sebuah ring dengan elemen satuan termuat dalam suatu ideal maksimal, ideal maksimal tunggal dari sebuah ring lokal A harus memuat setiap ideal dari A (kecuali A sendiri).

Lemma 3.2.1

Jika $(F, +, \cdot)$ adalah lapangan, maka ideal dalam F hanyalah $\{0\}$ atau F sendiri.

Bukti:

Misalkan I adalah ideal dalam F dan diandaikan $I \neq \{0\}$.

Sehingga harus dibuktikan bahwa $I = F$.

Diketahui F merupakan lapangan, berarti $(\forall a \neq 0 \in F) (\exists a^{-1} \in F) aa^{-1} = 1$.

Ambil sebarang $a \in I$.

Karena I ideal dalam F maka $a \in F$.

Sehingga berlaku $aa^{-1} = 1$, untuk suatu $a^{-1} \in F$.

Di lain pihak, karena I ideal dalam F , maka untuk $a \in I$ dan $a^{-1} \in F$ berlaku $aa^{-1} = 1 \in I$.

Maka menurut Lemma 3.1.1, $F = I$.

Jadi ideal dalam F hanyalah $\{0\}$ atau F sendiri. ■

Teorema 3.2.4

Setiap lapangan merupakan ring lokal.

Bukti:

Diketahui $(F, +, \cdot)$ adalah lapangan.

Menurut Lemma 3.2.1, ideal dalam F hanyalah $\{0\}$ atau F sendiri.

Karena tidak ada ideal N dalam F sedemikian sehingga $\{0\} \subset N \subset F$, maka $\{0\}$ merupakan ideal maksimal dalam F .

Sehingga ideal maksimal dalam F hanya tunggal yaitu $\{0\}$.

Karena ideal maksimal dalam F hanya tunggal, maka menurut Definisi 3.2.7,

F merupakan ring lokal. ■

Contoh 3.2.2

- a. Diketahui $\mathbb{Z}_8$ adalah ring komutatif dengan elemen satuan terhadap operasi penjumlahan dan perkalian di $\mathbb{Z}_8$. Dalam ring $\mathbb{Z}_8$, ideal maksimal yang dapat dibentuk adalah $\{[0], [2], [4], [6]\}$. Karena ideal maksimal dalam ring $\mathbb{Z}_8$ hanya tunggal, maka menurut Definisi 3.2.7, ring $\mathbb{Z}_8$ merupakan ring lokal, tetapi bukan lapangan.
- b. Diketahui $\mathbb{Z}_{10}$ adalah ring komutatif dengan elemen satuan terhadap operasi penjumlahan dan perkalian di $\mathbb{Z}_{10}$. Dalam ring $\mathbb{Z}_{10}$, ideal-ideal maksimal yang dapat dibentuk adalah $\{[0], [2], [4], [6], [8]\}$ dan $\{[0], [5]\}$. Karena dalam ring $\mathbb{Z}_{10}$ mempunyai dua ideal maksimal, maka ring $\mathbb{Z}_{10}$ bukan merupakan ring lokal.

Teorema 3.2.5

Setiap daerah integral berhingga merupakan ring lokal.

Bukti:

Misalkan D adalah daerah integral yang berhingga.

Menurut Teorema 2.2.2 dan Teorema 3.2.4, D merupakan ring lokal.

Jadi terbukti bahwa setiap daerah integral berhingga merupakan ring lokal. ■

Teorema 3.2.6

Jika n adalah bilangan prima, maka $\mathbb{Z}_n$ merupakan ring lokal.

Bukti:

Menurut Teorema 2.2.3 dan Teorema 3.2.5, $\mathbb{Z}_n$ merupakan ring lokal.

Jadi terbukti bahwa jika n adalah bilangan prima, maka $\mathbb{Z}_n$ merupakan ring lokal. ■

Teorema 3.2.7

Andaikan A adalah ring komutatif dengan elemen satuan, P adalah sebuah ideal prima dari A , S adalah komplemen dari ideal prima P dari A , dan $\bar{S}$ adalah himpunan bagian dari A yang multiplikatif yang dibangun oleh S . Maka ring A_P merupakan ring lokal dengan ideal maksimal dari A_P adalah ideal

$$M = \left\{ \frac{a}{s} \mid a \in P, s \in \bar{S} \right\}.$$

Bukti:

Andaikan A adalah ring komutatif dengan elemen satuan, P adalah sebuah ideal prima dari A , S adalah komplemen dari ideal prima P dari A , $\bar{S}$ adalah himpunan bagian dari A yang multiplikatif yang dibangun oleh S , dan $A \times \bar{S} = \{(a, s) \mid a \in A, s \in \bar{S}\}$.

Misal $(a, s), (b, t) \in A \times \bar{S}$.

$$(a, s) \sim (b, t) \Leftrightarrow \exists u \in \bar{S}, u(ta - sb) = 0.$$

Menurut Teorema 3.2.2, relasi “ $\sim$ ” adalah relasi ekuivalensi.

$$\frac{a}{s} = \{(b, t) \in A \times \bar{S} \mid (b, t) \sim (a, s)\}.$$

$$A_P = \left\{ \frac{a}{s} \mid a \in A, s \in \bar{S} \right\}.$$

Dengan operasi yang didefinisikan:

$$\frac{a}{s} + \frac{b}{t} = \frac{ta + sb}{st},$$

$$\frac{a}{s} \cdot \frac{b}{t} = \frac{ab}{st}$$

$(A_P, +, \cdot)$ adalah ring komutatif dengan elemen satuan menurut Teorema 3.2.3.

Akan ditunjukkan bahwa $M = \left\{ \frac{a}{s} \mid a \in P, s \in \bar{S} \right\}$ merupakan ideal maksimal dari A_P .

$$1. \quad \forall \frac{a}{s} \in A_P, \text{ dan } \frac{b}{t} \in M.$$

$$\frac{a}{s} \cdot \frac{b}{t} = \frac{ab}{st}.$$

Karena P ideal, maka $ab \in P$ dan $st \in \bar{S}$.

$$\text{Jadi } \frac{ab}{st} \in M.$$

Berarti M merupakan ideal dari A_P .

$$2. \quad \text{Misalkan } I \text{ adalah ideal dari } A_P \text{ dengan } M \subseteq I \subseteq A_P.$$

Andaikan $I \neq M$.

Berarti ada $x \in I, x \notin M$.

Maka $x = \frac{a}{s}$ dengan $a \notin P, s \in \bar{S}$, ini berarti $a, s \in \bar{S}$.

$$\text{Diambil } y = \frac{s}{a} \in A_P.$$

$$\begin{aligned} \text{Maka } xy &= \frac{a}{s} \frac{s}{a} \\ &= \frac{as}{sa} \\ &= \frac{1}{1} \in I. \end{aligned}$$

Karena I memuat elemen satuan $\frac{1}{1}$, maka menurut Lemma 3.1.1, $I = A_P$.

Jadi M merupakan ideal maksimal dari A_P .

Akan ditunjukkan bahwa A_P merupakan ring lokal.

Misalkan I ideal maksimal dari A_P .

Andaikan ada $x \in I$ dengan $x \notin M$, seperti cara 2, maka $I = A_P$.

Kontradiksi, karena I ideal maksimal.

Jadi $x \in I$ maka $x \in M$ yang berarti $I \subseteq M$.

Karena I ideal maksimal dengan $M \neq A_P$, maka $I = M$.

Jadi ideal maksimal dari A_P adalah tunggal.

Sehingga terbukti bahwa A_P merupakan ring lokal. ■

Sebagai akibatnya, andaikan A adalah ring komutatif dengan elemen satuan dan P adalah sebuah ideal prima dari A . Ring A_P disebut *ring lokal dari A pada P* , atau *ring lokal dari P* .

Contoh 3.2.3:

Diketahui $A = \mathbb{Z}_6$ adalah ring komutatif dengan elemen satuan terhadap operasi penjumlahan dan perkalian di $\mathbb{Z}_6$. Dalam ring $\mathbb{Z}_6$, ideal prima yang

dapat dibentuk adalah ideal $P = \{[0], [3]\}$. Komplemen dari ideal prima P dari $\mathbb{Z}_6$ adalah $S = \{[1], [2], [4], [5]\}$. Himpunan bagian dari $\mathbb{Z}_6$ yang multiplikatif yang dibangun oleh S adalah $\bar{S} = \{[1], [2], [4], [5]\} = S$.

Maka ring

$$A_P = \left\{ \frac{[0]}{[1]}, \frac{[1]}{[1]}, \frac{[2]}{[1]}, \frac{[3]}{[1]}, \frac{[4]}{[1]}, \frac{[5]}{[1]}, \frac{[1]}{[2]}, \frac{[3]}{[2]}, \frac{[5]}{[2]}, \frac{[1]}{[4]}, \frac{[3]}{[4]}, \frac{[5]}{[4]}, \frac{[1]}{[5]}, \frac{[2]}{[5]}, \frac{[3]}{[5]}, \frac{[4]}{[5]} \right\}$$

merupakan ring lokal dengan ideal maksimal dari A_P adalah ideal

$$M = \left\{ \frac{[0]}{[1]}, \frac{[3]}{[1]}, \frac{[3]}{[2]}, \frac{[3]}{[4]}, \frac{[3]}{[5]} \right\}.$$

Teorema 3.2.8

Jika R adalah sebuah ring komutatif dengan elemen satuan, maka kondisi berikut adalah ekuivalen.

- (i) R adalah sebuah ring lokal;
- (ii) semua elemen nonunit dari R termuat dalam suatu ideal $M \neq R$;
- (iii) elemen-elemen nonunit dari R membentuk sebuah ideal.

Bukti:

Untuk membuktikan bahwa kondisi (i), (ii), dan (iii) adalah ekuivalen, cukup dibuktikan $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (i)$.

(i) $\Rightarrow$ (ii) Jika $a \in R$ adalah sebuah nonunit, maka menurut pernyataan dalam bukti dari Akibat 3.1.1, $\langle a \rangle \neq R$. Oleh karena itu, menurut catatan

setelah Definisi 3.2.7, $\langle a \rangle$ termuat dalam ideal maksimal tunggal dari R .

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Jika semua elemen nonunit dari R termuat dalam suatu ideal $M \neq R$, maka dengan jelas dapat dilihat bahwa elemen-elemen nonunit dari R membentuk sebuah ideal.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Jika elemen-elemen nonunit dari R membentuk sebuah ideal, maka ideal yang dibentuk tersebut adalah sebuah ideal maksimal dari R (menurut Akibat 3.1.1). Jadi, jika elemen-elemen nonunit dari R membentuk sebuah ideal, maka R adalah sebuah ring lokal. ■

Teorema 3.2.9

Jika R dan S adalah ring, f adalah epimorfisma ring dari R ke S , dan I adalah ideal dalam R , maka $f(I) = \{f(a) \mid a \in I\}$ merupakan ideal dalam S .

Bukti:

Diketahui f adalah epimorfisma ring dari R ke S dan I adalah ideal dalam R .

Karena I adalah ideal dalam R , maka $0 \in I$, sehingga $f(0) \in f(I)$.

Karena f homomorfisma ring dari R ke S , maka $f(0) = 0' \in f(I)$.

Jadi $f(I) \neq \emptyset$.

Ambil sebarang $x, y \in f(I)$, maka ada $a, b \in I$ sedemikian sehingga $x = f(a)$ dan $y = f(b)$, sehingga

$$\begin{aligned} x \oplus (-y) &= f(a) \oplus (-f(b)) \\ &= f(a) \oplus f(-b) \end{aligned}$$

$$= f(a + (-b))$$

$$= f(a - b) \in f(I) \text{ sebab } a - b \in I.$$

Jadi $(\forall x, y \in f(I)) x \oplus (-y) \in f(I)$.

Ambil sebarang $r \in S$ dan $x \in f(I)$.

Karena f merupakan fungsi surjektif dari R ke S , maka ada $a \in R$ sehingga

$r = f(a)$, dan karena $x \in f(I)$, maka ada $b \in I$ sehingga $x = f(b)$.

Selanjutnya

$$r \otimes x = f(a) \otimes f(b)$$

$$= f(ab) \in f(I) \text{ sebab } ab \in I$$

dan

$$x \otimes r = f(b) \otimes f(a)$$

$$= f(ba) \in f(I) \text{ sebab } ba \in I.$$

Jadi $(\forall x \in f(I)) (\forall r \in S) r \otimes x \in f(I) \wedge x \otimes r \in f(I)$.

Jadi $f(I)$ merupakan ideal dalam S . ■

Teorema 3.2.10

Setiap bayangan homomorfis tidak nol dari sebuah ring lokal adalah lokal.

Bukti:

Andaikan R adalah ring lokal dengan ideal maksimal tunggal dari R yaitu ideal M dan R' adalah ring.

Misal pemetaan $\Phi: R \rightarrow R'$ adalah suatu epimorfisma ring.

Akan dibuktikan bahwa $\Phi(R)$ merupakan ring lokal.

1. Akan ditunjukkan bahwa $\Phi(M)$ merupakan ideal.

Menurut Teorema 3.2.9, $\Phi(M)$ merupakan ideal dari $\Phi(R)$.

2. Akan ditunjukkan bahwa $\Phi(M)$ merupakan ideal maksimal.

Misalkan N' adalah ideal dari $\Phi(R)$ dengan $\Phi(M) \subseteq N' \subseteq R'$.

Andaikan $N' \neq \Phi(M)$.

Berarti ada $x \in N', x \notin \Phi(M)$.

Maka $x = f(a)$ dengan $a \notin M$.

Diambil $y = f(a^{-1}) \in R'$.

Maka $xy = f(a)f(a^{-1}) = f(aa^{-1}) = f(1) \in N'$.

Karena N' memuat elemen satuan, maka menurut Lemma 3.1.1, $N' = R'$.

Jadi $\Phi(M)$ merupakan ideal maksimal dari $\Phi(R)$.

3. Akan ditunjukkan bahwa $\Phi(M)$ merupakan ideal maksimal tunggal.

Misalkan N' ideal maksimal dari $\Phi(R)$.

Andaikan ada $x \in N'$ dengan $x \notin \Phi(M)$, seperti cara 2, maka $N' = R'$.

Kontradiksi, karena N' ideal maksimal.

Jadi $x \in N'$ maka $x \in \Phi(M)$ yang berarti $N' \subseteq \Phi(M)$.

Karena N' ideal maksimal dengan $\Phi(M) \neq \Phi(R)$, maka $N' = \Phi(M)$.

Jadi ideal maksimal dari $\Phi(R)$ adalah tunggal.

Sehingga dari 1, 2, dan 3 terbukti bahwa $\Phi(R)$ merupakan ring lokal. ■

C. Ring Semilokal

Dalam pembahasan ini akan dibahas mengenai definisi ring semilokal serta contoh-contohnya.

Definisi 3.3.1

Sebuah ring komutatif A dengan elemen satuan disebut *ring semilokal* jika A mempunyai sejumlah hingga ideal maksimal.

Catatan:

- i. Karena setiap ring lokal hanya mempunyai ideal maksimal tunggal (dapat juga dikatakan berhingga), maka setiap ring lokal adalah ring semilokal.
- ii. Karena setiap lapangan merupakan ring lokal, maka setiap lapangan juga merupakan ring semilokal.

Contoh 3.3.1:

- a. Diketahui $\mathbb{Z}_{10}$ adalah ring komutatif dengan elemen satuan terhadap operasi penjumlahan dan perkalian di $\mathbb{Z}_{10}$. Dalam ring $\mathbb{Z}_{10}$, ideal-ideal maksimal yang dapat dibentuk adalah $\{[0], [2], [4], [6], [8]\}$ dan $\{[0], [5]\}$. Karena dalam ring $\mathbb{Z}_{10}$ hanya mempunyai dua ideal maksimal (dapat juga dikatakan berhingga), maka ring $\mathbb{Z}_{10}$ merupakan ring semilokal, tetapi bukan ring lokal.

- b. Diketahui ring $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ merupakan ring komutatif dengan elemen satuan. Karena dalam ring $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ mempunyai ideal maksimal tak hingga banyak, maka ring $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ bukan merupakan ring semilokal.

Sekarang kita akan mengetahui hubungan antara ring lokal dan ring semilokal dengan macam-macam ring lainnya.

Andaikan:

A adalah himpunan semua ring lokal.

B adalah himpunan semua ring semilokal.

C adalah himpunan semua ring komutatif dengan elemen satuan.

D adalah himpunan semua ring komutatif.

Maka hubungan antara A , B , C , dan D adalah sebagai berikut:

$$A \subset B \subset C \subset D.$$



BAB IV

KESIMPULAN

Berdasarkan uraian yang telah dijelaskan pada bab-bab sebelumnya, dapat ditarik kesimpulan sebagai berikut:

1. Dari definisinya bahwa ring lokal adalah ring komutatif dengan elemen satuan yang mempunyai sebuah ideal maksimal tunggal dan ring semilokal adalah ring komutatif dengan elemen satuan yang mempunyai sejumlah hingga ideal maksimal, berarti setiap ring lokal merupakan ring semilokal.
2. Setiap lapangan merupakan ring lokal dan juga merupakan ring semilokal.
3. Andaikan A adalah ring komutatif dengan elemen satuan, P adalah sebuah ideal prima dari A , S adalah komplemen dari ideal prima P dari A , dan $\bar{S}$ adalah himpunan bagian dari A yang multiplikatif yang dibangun oleh S . Maka ring A_P merupakan ring lokal dengan ideal maksimal dari A_P adalah ideal
$$M = \left\{ \frac{a}{s} \mid a \in P, s \in \bar{S} \right\}.$$
4. Jika R adalah sebuah ring komutatif dengan elemen satuan, maka kondisi berikut adalah ekuivalen.
 - (i) R adalah sebuah ring lokal;
 - (ii) semua elemen nonunit dari R termuat dalam suatu ideal $M \neq R$;
 - (iii) elemen-elemen nonunit dari R membentuk sebuah ideal.
5. Setiap bayangan homomorfis tidak nol dari sebuah ring lokal adalah lokal.

6. Andaikan A adalah himpunan semua ring lokal, B adalah himpunan semua ring semilokal, C adalah himpunan semua ring komutatif dengan elemen satuan, D adalah himpunan semua ring komutatif, maka hubungan antara A , B , C , dan D adalah sebagai berikut:

$$A \subset B \subset C \subset D.$$



DAFTAR PUSTAKA

- Bourbaki, N. 1972. *Commutative Algebra*. Hermann: Addison-Wesley Publishing Company.
- Fraleigh, J. B. 1989. *A First Course in Abstract Algebra*. New York: Addison-Wesley Publishing Company.
- Hungerford, T. W. 1974. *Algebra*. New York: Springer-Verlag.
- Lang, S. 1965. *Algebra*. New York: Addison-Wesley Publishing Company, Inc.
- Matsumura, H. 1986. *Commutative Ring Theory*. New York: Cambridge University Press.