APLIKASI PERSAMAAN DIFERENSIAL LINEAR ORDE KEDUA DALAM FISIKA

SKRIPSI

Diajukan untuk Memenuhi Salah Satu Syarat
Memperoleh Gelar Sarjana Pendidikan
Program Studi Pendidikan Matematika

Oleh :

Arsin
NIM : 021414045

PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA
JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
UNIVERSITAS SANATA DHARMA
YOGYAKARTA
2007

Skripsi

APLIKASI PERSAMAN DIFERENSIAL LINEAR ORDE KEDUA DALAM FISIKA

Oleh:

Arsin
NIM: 021414045

Telah disetujui oleh:

Pembimbing

Drs. Tutoyo, M.Sc.

Tanggal: 18 Desember 2006

SKRIPSI

APLIKASI PERSAMAAN DIFERENSIAL LINEAR ORDE KEDUA DALAM FISIKA

Dipersiapkan dan ditulis oleh:
Arsin
NIM : 021414045

Telah dipertahankan di depan Panitia Penguji Skripsi
Pada tanggal 11 Januari 2007
Dan dinyatakan memenuhi syarat

Susunan Panitia Penguji

	Nama Lengkap	Tanda tangan
Ketua	Drs. Severinus Domi, M.Si	....
Sekretaris	Andy Rudhito, S.Pd, M.Si	....
Anggota	Drs. A. Tutoyo, M.Sc	....
Anggota	Drs. A. Mardjono	....
Anggota	Hongki Julie, S.Pd, M.Si	....

Yogyakarta, 11 Januari 2007
Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan
Universitas Sanata Dharma
Dekan,

Drs. Tarsisius Sarkim, M.Ed.,Ph.D

iii

HALAMAN PERSEMBAHAN

Dengan penuh syukur kepada Tuhanku Allah SWT, skripsi ini ku persembahkan kepada:

- Ayah dan Ibu tercinta
- Kak Ficky dan Dik Kris yang aku sayangi
- Semua orang yang mengasihi aku

PERNYATAAN KEASLIAN KARYA

Saya menyatakan dengan sesungguhnya bahwa skripsi yang saya tulis ini tidak memuat karya atau bagian karya orang lain, kecuali yang telah disebutkan dalam kutipan dan daftar pustaka, sebagaimana layaknya karya ilmiah.

Yogyakarta, 2 Februari 2007

Penulis

Arsin

ABSTRAK

Tujuan penulisan karya ilmiah ini adalah untuk membuat model dan menyelesaikan persamaan diferensial linear orde kedua.

Metode yang digunakan dalam penulisan ini adalah metode studi pustaka. Sehingga dalam penulisan ini belum dapat ditemukan hal-hal baru.

Hasil dari penulisan skripsi ini adalah : 1) pemodelan dan penyelesaian model persamaan diferensial linear orde dua dalam getaran mekanik dan 2) pemodelan dan penyelesaian model persamaan diferensial linear orde dua dalam getaran elektrik.

Jenis getaran mekanik ada tiga yaitu getaran harmonis, osilasi paksa dan getaran teredam. Dengan mengasumsikan bahwa gaya yang bekerja pada titik pusat massa terletak pada satu garis lurus dan tidak ada gaya luar yang bekerja maka persamaan diferensial yang memodelkan getaran harmonis adalah $my'' + ky = 0$. Penyelesaian persamaan diferensial ini adalah $y = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t$. Jika pada getaran harmonis diberikan gaya $r(t)$ maka persamaan diferensial linearnya menjadi $my'' + ky = r(t)$ disebut persamaan getaran osilasi paksa. Penyelesaian persamaan diferensial ini adalah $y = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t + y_p$ di mana y_p adalah penyelesaian partikular. Jika pada getaran harmonis diberikan gaya peredam $F = -cy'$ maka persamaan diferensial linearnya menjadi $my'' + cy' + ky = 0$ disebut persamaan getaran teredam. Penyelesaian persamaan diferensial ini $y = c_1 e^{-\lambda t} + c_2 e^{\lambda t}$ di mana λ adalah penyelesaian persamaan karakteristik $m\lambda^2 + c\lambda + k = 0$

Jenis getaran elektrik misalnya getaran yang ditimbulkan dari rangkaian RLC paralel tanpa sumber dan getaran yang ditimbulkan dari rangkaian RLC seri dengan sumber. Persamaan diferensial RLC paralel tanpa sumber adalah $Cv'' + \frac{1}{R}v' + \frac{1}{L}v = 0$ Penyelesaian persamaan diferensial ini adalah $v(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t}$ di mana λ adalah penyelesaian persamaan karakteristik $C\lambda^2 + \frac{1}{R}\lambda + \frac{1}{L} = 0$ Persamaan diferensial RLC seri dengan sumber $E(t)$ adalah $Li'' + Ri' + \frac{1}{C}i = E(t)$. Penyelesaian persamaan diferensial ini adalah $i(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + i_p$ di mana λ adalah penyelesaian persamaan karakteristik $L\lambda^2 + R\lambda + \frac{1}{C} = 0$ dan y_p adalah penyelesaian partikular persamaan diferensial $Li'' + Ri' + \frac{1}{C}i = E(t)$

ABSTRACT

Aim of writing this scholarly paper is to making a model and solve linear of similarity differential second order.

Method that we use in this writing script is a method of book study. Thus, in this writing script has not found yet new things.

Result of writing this script are: 1) modeling and solution model of linear of similarity differential second order in mechanic vibration and 2) modeling and solution model of linear of similarity differential second order in electric vibration.

Mechanic vibration has 3 kinds that are harmonious vibration, compulsive oscillation, and hushed vibration. Assuming that the energy work on centre point of mass is located on one vertical line and no other energy out there been work, then similarity differential which modeling harmonious vibration is $my'' + ky = 0$. Solution of this similarity differential is $y = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t$. If on harmonious vibration, gave an energy as large as $r(t)$, then the linear of similarity differential become $my'' + ky = r(t)$, called similarity of compulsive oscillation vibration. Solution of this similarity differential is $y = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t + y_p$, where y_p is a particular solution. If on harmonious vibration gave a forse as large as $F = -cy'$, then similarity differential become $my'' + cy' + ky = 0$, called similarity of hushed vibration. Solution of this similarity differential is $y = c_1 e^{-\lambda t} + c_2 e^{\lambda t}$, where λ is a solution of similarity characteristic $m\lambda^2 + c\lambda + k = 0$.

Kind of electric vibration such as a vibration that emerge from combination of RLC parallel without source and a vibration that emerge from combination of RLC series with source. Similarity differential of RLC parallel without source is $Cv'' + \frac{1}{R} v' + \frac{1}{L} v = 0$. Solution of this similarity differential is $v(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t}$, where λ is a solution of similarity characteristic $C\lambda^2 + \frac{1}{R}\lambda + \frac{1}{L} = 0$. Similarity differential from RLC series with source $E(t)$ is $Li'' + Ri' + \frac{1}{C} i = E(t)$. Solution of this similarity differential is $i(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + i_p$, where λ is a solution of similarity characteristic $L\lambda^2 + R\lambda + \frac{1}{C} = 0$ and y_p is a particular solution of similarity differential $Li'' + Ri' + \frac{1}{C} i = E(t)$.

KATA PENGANTAR

Puji syukur kepada Tuhan Yang Maha Esa karena rahmat dan kasih-Nya maka penulis dapat menyelesaikan skripsi dengan judul “Aplikasi Persamaan Diferensial Linear Orde Dua dalam Fisika“.

Penulis menyadari bahwa tanpa bantuan dan dukungan dari berbagai pihak, maka penyusunan skripsi ini tidak akan pernah selesai. Oleh karena itu, dalam kesempatan yang baik ini, penulis ingin menyampaikan ucapan terima kasih kepada:

1. Bapak Drs. A. Tutoyo, M.Sc selaku dosen pembimbing skripsi yang telah memberikan arahan dan bimbingan dalam penyusunan skripsi ini,
2. Bapak Drs. A. Mardjono dan Bapak Hongki Julie S.Pd, M.Si selaku dosen penguji yang telah memberikan masukan dan saran kepada penulis dalam penyusunan skripsi ini,
3. Bapak Andi Rudhito, S.Pd, M.Si selaku kepala program studi pendidikan matematika,
4. Bapak dan Ibu dosen Universitas Sanata Dharma, terutama Ibu D. Novi H, S.Pd selaku dosen pembimbing angkatan,
5. Bapak Drs. Rohandi, M.Ed terima kasih atas bimbingan dan masukan yang telah diberikan,
6. Bapak Sunardjo dan Bapak Al. Sugeng Supriyono atas segala keramahannya dalam melayani mahasiswa-mahasiswi untuk kelancaran studi,

7. Bapak Suparno dan ibu Suwarni tercinta yang selama ini mendampingi, memberi dorongan, semangat, dan doa sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi,
8. Fickyana, Kriswanto dan semua saudaraku yang selalu memberikan semangat kepada penulis,
9. Christine yang telah memberikan fasilitas dalam penyusunan skripsi dan Gina yang telah membantu menterjemahkan abstrak,
10. Teman-teman terbaikku Christine, Sri Pawanti, Lusi, Andriana, Lina, yang memberikan perhatian, dukungan, semangat dan kritikan serta masukan kepada penulis,
11. Teman seangkatan program studi pendidikan matematika 2002 terutama Novi Indriani dan St. Christella, terima kasih atas perhatian dan kebersamaannya selama ini,
12. Semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu.

Penulis menyadari akan semua kekurangan yang termuat dalam skripsi ini. Oleh karena itu, penulis mengharapkan kritik dan saran guna menyempurnakan skripsi ini. Akhirnya penulis berharap semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi pembaca.

Penulis

Arsin

DAFTAR ISI

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Telah kita ketahui bahwa situasi dan fenomena dalam kehidupan sehari-hari di dunia ini dapat dilukiskan ke dalam bentuk matematika yang disebut *model matematika*. Salah satu topik dalam matematika yang banyak digunakan dalam penyusunan model matematika untuk masalah-masalah dalam kehidupan ini antara lain adalah dalam bentuk Persamaan Deferensial.

Persamaan Deferensial banyak memegang peranan penting untuk menyatakan peristiwa-peristiwa dalam dunia nyata misalnya dalam pertumbuhan dan peluruhan, yang dirumuskan secara matematika oleh:

$$\frac{dy}{dt} = ky \tag{1.6}$$

Persamaan Deferensial di atas melukiskan besaran-besaran yang sering dijumpai dalam kehidupan sehari-hari, misalnya pertumbuhan penduduk, arus listrik dalam kapasitor, dan peluruhan radio aktif, yang berubah dengan waktu sedemikian sehingga laju perubahan besaran berbanding langsung dengan besaran itu sendiri. y adalah besaran yang berubah dan t adalah waktu, maka peristiwa tersebut disajikan dengan Persamaan Deferensial (1.6), dimana k adalah konstanta pembanding. Contoh yang lain:

$$\frac{dP}{dt} = k(D - S) \tag{1.1}$$

Persamaan Deferensial ini merupakan Persamaan Deferensial orde pertama, yang sering kita jumpai dalam kehidupan nyata terutama dalam bidang Ekonomi. Persamaan Deferensial (1.1), menggambarkan sifat harga dari suatu produk tertentu, dimana laju waktu perubahan harga berbanding langsung dengan selisih permintaan dan penawaran. Andaikan P menyatakan harga produk pada saat *t*, *D* adalah permintaan untuk produk dan *S* adalah penawaran, maka peristiwa tersebut dapat dirumuskan menurut persamaan (1.1). Contoh yang lain yaitu:

$$a = \frac{dv}{dt} \tag{1.2}$$

Persamaan (1.2) diatas melukiskan percepatan ***a*** dari suatu benda atau partikel yang bergerak adalah laju perubahan kecepatan ***v*** terhadap waktu ***t***.

Dari beberapa uraian di atas dapat dilihat bahwa persamaan diferensial dan aplikasinya sangat penting untuk dipelajari. Materi tentang persamaan diferensial dapat kita pelajari dalam perkuliahan, tetapi untuk penerapannya sangat sedikit dibahas dalam kuliah. Oleh karena itu, penulis berminat untuk mengangkat judul aplikasi persamaan diferensial orde dua dalam fisika. Hasil penulisan ini diharapkan dapat menarik minat untuk mempelajari dan mengembangkan persamaan diferensial.

1.2 Perumusan masalah

Masalah yang akan dibahas dalam penulisan ini adalah penerapan persamaan deferensial dalam Fisika

1.3 Pembatasan Masalah

Masalah yang akan dibahas dalam penulisan ini dibatasi hanya pada penerapan persamaan deferensial linear orde kedua dalam getaran rangkaian listrik dan mekanika.

1.4 Tujuan Penulisan

Penulisan ini bertujuan untuk membentuk dan menyelesaikan pemodelan dalam bentuk persamaan deferensial linear orde kedua dalam fisika

1.5 Metode Penulisan

Metode yang akan digunakan dalam penulisan kali ini adalah metode studi pustaka. Sehingga dalam penulisan ini belum dapat ditemukan hal-hal baru.

1.6 Manfaat Penulisan

Bagi penulis, penulisan ini bertujuan untuk lebih mendalami Persamaan deferensial linear orde kedua dan penerapan persamaan deferensial linear orde kedua dalam Fisika.

Bagi bidang Ilmu yang bersangkutan, hasil penulisan ini diharapkan dapat memperjelas kegunaan dan penerapan persamaan deferensial linear orde kedua dalam kehidupan nyata terutama dalam ilmu Fisika, sehingga menarik minat untuk mempelajari dan mengembangkan ilmu yang bersangkutan. Dengan demikian, ilmu tersebut akan semakin bermanfaat bagi manusia dalam membantu menyelesaian masalah dalam kehidupannya.

1.7 Sistematika Penulisan

Sistematika dalam skripsi ini, akan ditulis dengan susunan sebagai berikut:

BAB I PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

1.2 Perumusan Masalah

1.3 Pembatasan Masalah

1.4 Tujuan Penulisan

1.5 Metode Penulisan

1.6 Manfaat Penulisan

1.7 Sistematika Penulisan

BAB II LANDASAN TEORI

2.1 Persamaan Diferensial Linear

2.2 Penyelesaian Umum Persamaan Diferensial Linear

2.2.1 Persamaan Diferensial Linear Homogen Orde Dua dengan Koefisian Konstan

2.2.2 Persamaan Diferensial Linear Non Homogen Orde Dua dengan Koefisien Konstan

2.3 Eksistensi dan Ketunggalan Soal Nilai Awal Persamaan Diferensial Linear

2.4 Hukum-hukum dalam Fisika

2.5 Rangkaian Sederhana

2.6 Pemodelan Matematika

BAB II

LANDASAN TEORI

2.1 Persamaan Deferensial Linear

Pada bagian ini akan dibahas tentang pengertian persamaan diferensial linear.

Berikut akan diberikan pengertian dari persamaan diferensial linear tingkat *n*

Definisi 2.1

Persamaan deferensial linear tingkat (orde) *n* dalam *y* adalah persamaan yang berbentuk

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)$$

(2.1)

fungsi-fungsi $f(x)$, $a_0(x)$, $a_1(x)$,..., $a_n(x)$ adalah fungsi dari x, bukan y, dimana $a_n(x) \neq 0$ dalam interval [a,b]

Suatu persamaan diferensial disebut linear jika syarat-syarat berikut dipenuhi:

- Fungsi yang belum diketahui dan derivatif-derivatifnya secara aljabar hanya berderajat satu
- Tidak ada hasil kali yang berkaitan dengan fungsi yang belum diketahui dan derivatif - derivatifnya atau dua atau lebih derivatif
- Tidak ada fungsi tansendental dari y, y', y'' dan seterusnya.

Contoh 2.1

Berikut ini diberikan contoh persamaan diferensial linear

$$y'' + y = \sin x$$

$$\frac{dy}{dx} - 2y = 9$$

pada persamaan (2.1), fungsi *f(x)* di ruas kanan disebut fungsi masukan(input) atau penggerak (driving). Apabila ruas kiri dari persamaan (2.1) sama dengan nol atau

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + ... + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \qquad (2.2)$$

maka persamaan (2.2) disebut persamaan deferensial linear homogen. Jika ruas kanan persamaan tidak sama dengan nol dan $a_n(x) \neq 0$ untuk semua x dalam [a,b] persamaan disebut persamaan diferensial linear non homogen. Jika $a_0(x)$, $a_1(x)$, $a_2(x)$,.. , $a_n(x)$, merupakan fungsi konstan, maka persamaannya disebut persamaan diferensial linear dengan koefisien konstan, dan jika koefisien fungsi itu berubah maka persamaannya disebut persamaan dengan koefisien variabel.

Contoh 2.2

Persamaan

$$y'' + 2y = 0$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{dy}{dx} + x^3y = 0$$

kedua contoh di atas adalah persamaan diferensial linear homogen, sedangkan kedua contoh berikut adalah persamaan diferensial linear non homogen

$y'' + y = \cos x$

$y'' + 2y + e^{x} = 0$

jika kita subtitusikan *n* = *2* pada persamaann (2.2), maka persamaan (2.2) menjadi

$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0, a_2(x) \neq 0$

(2.3)

karena $a_2(x) \neq 0$ maka persamaan diferensial (2.3) dapat kita tulis

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \qquad (2.4)$$

Persamaan deferensial (2.4) disebut bentuk baku persamaan deferensial linear homogen orde dua.

Contoh 2.3

1. $\frac{d^2i}{dt^2} - 2\frac{di}{dt} = 0$
2. $x^2y'' + y = 0$

contoh 2.3.1 merupakan persamaan deferensial linear homogen orde dua dengan koefisien konstan, sedangkan contoh 2.3.2 merupakan Persamaan deferensial homogen orde 2 dengan koefisien variabel.

2.2 Penyelesaian Persamaan Deferensial Linear Homogen

Persamaan diferensial linear dikelompokan menjadi dua yaitu persamaan diferensial linear homogen dan persamaan diferensial linear non homogen. Sebelum membahas penyelesaian persamaan diferensial linear berikut akan diberikan penjelasan tentang penyelesaian bebas linear.

Penyelesaian Bebas Linear

Definisi 2.2

Penyelesaian persamaan diferensial tingkat-n disebut mempunyai n konstanta dasar sebarang, jika penyelesaian itu secara aljabar tidak dapat disederhanakan menjadi bentuk yang memuat kurang dari n konstanta sebarang.

Definisi 2.3

1. *n* fungsi $y_1, y_2, ..., y_n$ disebut tak bebas linear pada interval [a,b] jika dapat ditentukan konstanta-konstanta $c_1, c_2, ..., c_n$ yang tidak semua nol sedemikian sehingga $c_1y_1 + c_2y_2 + ... + c_ny_n = 0$ (2.5)
2. jika relasi dalam persamaan (2.5) benar, hanya bila $c_1 = c_2 = ... = c_n = 0$, maka *n* fungsi $y_1, y_2, ..., y_n$ disebut bebas linear

Apabila dua fungsi tak bebas linear maka salah satunya sama dengan kelipatan dari yang lain, sebaliknya fungsi bebas linear maka tak mungkin menyatakan suatu fungsi sebagai kelipatan yang lain.

Misal ada dua fungsi $y_1(x)$ dan $y_2(x)$ yang tak bebas linear pada selang $a \leq x \leq b$, maka dapat diambil kesimpulan bahwa salah satu fungsinya merupakan kelipatan konstan dari fungsi yang lainnya. Andai, $y_1(x)$ merupakan kalipatan konstan dari $y_2(x)$, dapat ditulis

$$y_1(x) = k\, y_2(x) \tag{2.6}$$

atau

$$k = \frac{y_1(x)}{y_2(x)}$$

turunkan persamaan (2.6), menjadi

$$y_1'(x) = k y_2'(x) \tag{2.7}$$

atau

$$k = \frac{y_1'(x)}{y_2'(x)}$$

jadi $$\frac{y_1(x)}{y_2(x)} = \frac{y_1'(x)}{y_2'(x)}$$

atau

$$y_1(x)\, y_2'(x) = y_2(x) y_1'(x)$$

$$y_1(x)\, y_2'(x) - y_2(x) y_1'(x) = 0 \tag{2.8}$$

persamaan (2.8) dapat diubah dalam bentuk determinan yaitu

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = 0, \quad a \leq x \leq b \tag{2.9}$$

jadi dua fungsi tak bebas linear, dapat diubah dalam bentuk determinan seperti (2.9) yang nilai determinannya sama dengan nol.

Untuk tiga fungsi $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$ yang tak bebas linear pada interval [a,b], dengan jalan yang sama dapat ditentukan bahwa

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & y_3(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & y_3'(x) \\ y_1''(x) & y_2''(x) & y_3''(x) \end{vmatrix} = 0, a \le 0 \le b$$

Teorema 2.1

Andaikan koefisien-koefisien a_0, a_1, a_2,..., a_n adalah fungsi-fungsi kontinu dari x pada interval a ≤ x ≤ b dan y_1, y_2, y_3,..., y_n adalah penyelesaian-penyelesaian persamaan diferensial linear homogen

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \tag{2.2}$$

maka fungsi-fungsi y_1, y_2, y_3,..., y_n adalah bebas linear pada [a,b] jika dan hanya jika determinan

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \ldots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \ldots & y_n'(x) \\ y_1''(x) & y_2''(x) & \ldots & y_n''(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} \ne 0 \tag{2.10}$$

Bukti:

↔ jika $W(x) \neq 0$, fungsi harus bebas linear. Kita andaikan jika $W(x) \neq 0$, maka fungsi tidak bebas linear. Karena fungsi tidak bebas linear makadapat ditentukan sebarang konstanta $c_1, c_2, c_3,\ldots, c_n$ tidak semua nol, sehingga

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \ldots + c_n y_n(x) = 0$$

kita turunkan relasi n -1

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \ldots + c_n y_n(x) = 0$$

$$c_1 y_1'(x) + c_2 y_2'(x) + \ldots + c_n y_n'(x) = 0$$

$$\begin{array}{ccc} . & . & . \\ . & . & . \end{array}$$

$$c_1 y_1^{(n-1)}(x) + c_2 y_2^{(n-1)}(x) + \ldots + c_n y_n^{(n-1)}(x) = 0$$

jadi semua c memenuhi persamaan homogen, karena $c_1, c_2, c_3,\ldots, c_n$ tidak semua nol, maka determinan $W(x)$ harus nol untuk setiap x. Tetapi determinan $W(x)$ telah kita asumsikan tidak sama dengan nol. Berarti terjadi kontradiksi, maka fungsi harus bebas linear. *Bukti selesai*

Contoh 2.4

Fungsi-fungsi $y_1 = \sin 2x$ dan $y_2 = \cos 2x$ adalah penyelesaian persamaan tingkat dua $y'' + 4y = 0$. Perlihatkan bahwa mereka membentuk himpunan funggsi-fungsi bebas linear.

Penyelesaian

$$W(x) = \begin{vmatrix} \sin 2x & \cos 2x \\ 2\cos 2x & -2\sin 2x \end{vmatrix} = -2\sin^2 2x - 2\cos^2 2x = -2 \neq 0$$

Karena $W(x) \neq 0$ untuk semua x, maka fungsi-fungsi *sin 2x* dan *cos 2x* bebas linear.

Setelah membahas penyelesaian bebas linear, selanjutnya akan kita cari penyelesaian persamaan diferensial linear homogen. Akan diawali dengan devinisi kombinasi linear dari dua penyelesaian.

Definisi 2.4

Andaikan y_1 dan y_2 adalah penyelesaian basis persamaan deferensial (2.4) yang bebas linear dan c_1 serta c_2 adalah konstanta-konstanta sebarang, maka $c_1y_1 + c_2y_2$ disebut kombinasi linear dari dua penyelesaian.

Teorema 2.2

Jika y_1 dan y_2 adalah penyelesaian basis persamaan deferensial (2.4) yang bebas linear dan c_1 serta c_2 adalah konstanta-konstanta sebarang, maka kombinasi linear $c_1y_1 + c_2y_2$ juga penyelesaian persamaan diferensial (2.4).

Bukti

y_1 merupakan penyelesaian, maka berlaku $y_1'' + P(x)y_1' + Q(x)y_1 = 0$

dan

y_2 merupakan penyelesaian, maka berlaku $y_2'' + P(x)y_2' + Q(x)y_2 = 0$

akan dibuktikan bahwa $c_1y_1 + c_2y_2$ memenuhi

$$(c_1y_1 + c_2y_2)'' + P(x)(c_1y_1 + c_2y_2)' + Q(x)(c_1y_1 + c_2y_2) = 0$$

dengan linear derivatif maka

$$c_1y_1'' + P(x)c_1y_1' + Q(x)c_1y_1 + c_2y_2'' + P(x)c_2y_2' + Q(x)c_2y_2 = 0$$

karena $y_1'' + P(x)y_1' + Q(x)y_1 = 0$ dan $y_2'' + P(x)y_2' + Q(x)y_2 = 0$, maka $c_1y_1 + c_2y_2$ memenuhi

$$(c_1y_1 + c_2y_2)'' + P(x)(c_1y_1 + c_2y_2)' + Q(x)(c_1y_1 + c_2y_2) = 0$$

Bukti selesai

Teorema 2.3 Prinsip Superposisi

Jika $y_1, y_2, ..., y_r$ adalah penyelesaian dasar yang bebas linear dari PDLH

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + ... + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \qquad (2.2)$$

dan jika $c_1, c_2, ..., c_r$ adalah konstanta sebarang, maka kombinasi linear $y = c_1y_1 + c_2y_2 + ... + c_ry_r$, juga merupakan penyelesaian persamaan deferensial (2.2)

Bukti:

Kita buktikan untuk $r = 2$, karena y_1 dan y_2 adalah penyelesaian persamaan (2.2), maka kita tulis

$$a_n(x)y_1^{(n)} + a_{n-1}(x)y_1^{(n-1)} + ... + a_1(x)y_1' + a_0(x)y_1 = 0 \qquad (2.11)$$

dan

$$a_n(x)y_2^{(n)} + a_{n-1}(x)y_2^{(n-1)} + ... + a_1(x)y_2' + a_0(x)y_2 = 0 \qquad (2.12)$$

andaikan setiap suku persamaan (2.11) kita kalikan dengan c_1 dan setiap suku persamaan (2.12) kita kalikan dengan c_2, kemudian kita jumlahkan, hasilnya

$$a_n(x)\left[c_1 y_1^{(n)} + c_2 y_2^{(n)}\right] + \ldots + a_0(x)\left[c_1 y_1 + c_2 y_2\right] = 0 \qquad (2.13)$$

dengan sifat linearitas derivatif kita mempunyai

$$c_1 y_1^{(n)} + c_2 y_2^{(n)} = \left[c_1 y_1 + c_2 y_2\right]^{(n)}$$

jadi persamaan (2.13) adalah pernyataan bahwa $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ adalah penyelesaian persamaan (2.2)

Bukti selesai

Contoh 2.5

Misalkan fungsi $y_1 = e^x$ dan $y_2 = e^{-3x}$ adalah penyelesaian persamaan $y'' + 2y' - 3y = 0$. Tunjukkan bahwa kombinasi linear $y = c_1 e^x + c_2 e^{-3x}$ juga penyelesaian persamaan diferensial $y'' + 2y' - 3y = 0$

Penyelesaian

Untuk memperlihatkan bahwa kombinasi linear dari kedua fungsi tersebut adalah suatu penyelesaian, kita tunjukkan bahwa y_1 dan y_2 saling bebas dengan mencari wroskiannya

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} e^x & e^{-3x} \\ e^x & -3e^{-3x} \end{vmatrix} = -3e^{-2x} - e^{-2x} = -4e^{-2x} \neq 0$$

Karena $W(y_1,y_2) \neq 0$, maka y_1 dan y_2 saling bebas.

Kemudian kita mensubtitusikan $y = c_1e^x + c_2e^{-3x}$ ke dalam persamaan $y'' + 2y' - 3y = 0$, maka akan didapatkan

$$\frac{d^2}{dx^2}(c_1e^x + c_2e^{-3x}) + 2\frac{d}{dx}(c_1e^x + c_2e^{-3x}) - 3(c_1e^x + c_2e^{-3x})$$

$= c_1e^x + 9c_2e^{-3x} + 2\,c_1e^x - 6\,c_2e^{-3x} - 3\,c_1e^x - 3c_2e^{-3x} = 0.$

Ini memperllihatkan bahwa kombinasi linear tersebut adalah suatu penyelesaian.

Contoh 2.6

Fungsi $y = 2e^{-3x}$ dan $y_2 = 4e^{-3x}$ keduanya adalah penyelesaian persamaan $y'' + 6y' + 9y = 0$. Tunjukkan bahwa y = $2e^{-3x}$ + $4e^{-3x}$ bukan penyelesaian persamaan diferensial $y'' + 6y' + 9y = 0$.

Penyelesaian

Untuk memperlihatkan bahwa kombinasi linear dari kedua fungsi tersebut adalah suatu penyelesaian, kita tunjukkan bahwa y_1 dan y_2 saling bebas dengan mencari wroskiannya

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} 2e^{-3x} & 4e^{-3x} \\ -6e^{x} & -12e^{-3x} \end{vmatrix} = -24e^{-3x} + 24e^{-3x} = 0$$

Karena $W(y_1,y_2) = 0$, maka y_1 dan y_2 tak bebas linear.

Kemudian kita mensubtitusikan $y = 2e^{-3x} + 4e^{-3x}$ ke dalam persamaan $y'' + 2y' - 3y = 0$. maka akan didapatkan

$$\frac{d^2}{dx^2}(2e^{-3^x} + 4e^{-3x}) + \frac{d}{dx}(2e^{-3x} + 4e^{-3x}) - (2e^{x} + 4e^{-3x})$$

$= 18e^{-3x} + 3e^{-3x} - 6e^{-3x} - 12e^{-3x} - 2e^{-3x} - 4e^{-3x}$

$= -3e^{-3x} \neq 0$

jadi $y = 2e^{-3x} + 4e^{-3x}$ bukan penyelesaian persamaan diferensial $y'' + 2y' - 3y = 0$

Dari contoh 2.5 dan 2.6 dapat kita lihat bahwa kombinasi linear penyelesaian-penyelesaian basis akan menjadi penyelesaian persamaan diferensial jika penyelesaian-penyelesaian basisnya *bebas linear*.

Penurunan Tingkat

Teorema 2.4

Jika y_1 adalah penyelesaian Persamaan Deferensial linear homogen tingkat n

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \qquad (2.2)$$

maka subtitusi $y_2 = y_1 v$ diikuti subtitusi $w = v'$, menjadikan persamaan (2.2) menjadi Persamaan Deferensial tingkat *(n-1)*

Bukti:

Kita perlihatkan bukti untuk Persamaan Deferensial linear homogen tingkat dua, penjelasan untuk persamaan tingkat lebih lebih tinggi buktinya sejalan dengan bukti untuk persamaan tingkat dua.

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \qquad (2.3)$$

di mana a_0, a_1, dan a_2 kontinu dan $a_2(x) \neq 0$ untuk setiap x dalam suatu interval $a \leq x \leq b$. Andaikan y_1 adalah penyelesaian non trivial persamaan (2.3) dan

$y_2 = y_1 v$, di mana v adalah fungsi dari x yang akan ditentukan. Turunkan y_2 dua kali maka akan diperoleh

$$y_2' = y_1 v' + y_1' v$$

$$y_2'' = y_1 v'' + 2y_1' v' + y_1'' v$$

masukan y_2, y_2', y_2'', ke dalam persamaan (2.3) kita peroleh

$$a_2(x)(y_1v'' + 2y_1'v' + y_1''v) + a_1(x)(y_1v' + y_1'v) + a_0(x)(y_1v) = 0$$

$$a_2(x)y_1v'' + 2a_2(x)y_1'v' + a_2(x)y_1''v + a_1(x)y_1v' + a_1(x)y_1'v + a_0(x)y_1v = 0$$

dengan menulis persamaan ini dalam persamaan dalam *v*. Kita peroleh

$$a_2(x)y_1v'' + (2a_2(x)y_1' + a_1(x)y_1)v' + (a_2(x)y_1'' + a_1(x)y_1' + a_0(x)y_1)v = 0 \quad (2.14)$$

karena diketahui y_1 adalah penyelasaian persamaan (2.3), maka koefisien *v* adalah nol. Maka dari itu persamaan (2.14) menjadi

$$a_2(x)y_1v'' + (2a_2(x)y_1' + a_1(x)y_1)v' = 0$$

akirnya kita misalkan $w = v'$, maka dihasilkan Persamaan Deferensial linear homogen tingkat satu

$$a_2(x)y_1w' + (2a_2(x)y_1' + a_1(x)y_1)w = 0$$

yang memperlihatkan penurunan tingkat. Karena $y_2 = y_1v$ di mana *v* adalah fungsi dari *x*, maka ini memperlihatkan bahwa y_1 dan y_2 adalah penyelesaian-penyelesaian bebas linear. *Bukti selesai*

Penyelesaian Persamaan Deferensial tingkat dua dengan metode penurunan tingkat menghasilkan Persamaan Deferensial tingkat satu yang dapat diselesaikan dengan perhitungan faktor pengintegral.

Contoh 2.7

Perlihatkan bahwa fungsi $y_1 = e^{2x}$ adalah penyelesaian persamaan diferensial $y'' - 4y = 0$. Gunakan metode reduksi tingkat untuk menenntukan penyelesaian bebas linear yang kedua dan tulis penyelesaian umumnya

Penyelesaian

$\leftrightarrow$ Masukkan $y_1 = e^{2x}$, $y_1' = 2e^{2x}$, dan $y_1'' = 4e^{2x}$, dalam persamaan $y'' - 4y = 0$

di dapat $4e^{2x} - 4(e^{2x}) = 0$, yang memperlihatkan bahwa $y_1 = e^{2x}$ adalah penyelesaian

$\leftrightarrow$ penyelesaian kedua berbentuk $y_2 = ve^{2x}$

diperoleh dengan memasukkan $y_2 = ve^{2x}$, $y_2' = v'e^{2x} + 2ve^{2x}$ dan $y_2'' = v''e^{2x} + 4v'e^{2x} + 4ve^{2x}$ ke dalam persamaan diferensial yang diketahui.

Jadi

$v''e^{2x} + 4v'e^{2x} + 4ve^{2x} - 4(ve^{2x}) = 0$

dengan menjabarkan dan mengelompokkan suku-suku kita peroleh

$v'' + 4v' = 0$

misalkan $w = v'$ kita peroleh

$w' + 4w = 0$

dengan memisahkan variabel didapatkan

$$\frac{dw}{w} + 4\,dx = 0$$

kemudian kita integralkan didapat

$\ln w + 4x = \ln c$

$\ln w = \ln c - 4x$

$w = c\,e^{-4x}$

$w = v' = c\,e^{-4x}$

$v = -\frac{c}{4} e^{-4x}$, ambil $c = -4$

$v = e^{-4x}$

penyelesaian kedua adalah

$y_2 = v\, e^{2x} = e^{-4x} e^{2x} = e^{-2x}$

maka penyelesaian umum persamaan diferensial adalah

$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x}$

2.2.1 Penyelesaian Persamaan Deferensial Linear Homogen Orde Dua dengan Koefisien Konstan

Kita sekarang akan mempelajari tentang penyelesaian persamaan diferensial linear homogen orde dua dengan koefisien konstan. Berikut ini akan dibahas tentang persamaan diferensial linear homogen dengan koefisien konstan yang akan dimulai dengan definisi berikut.

Definisi 2.5

Persamaan diferensial linear homogen orde dua dengan koefisien konstan mempunyai bentuk baku:

$$y'' + ay' + by = 0 \tag{2.15}$$

dimana *a* dan *b* adalah konstanta.

Persamaan dengan koefifien konstan sedikit spesial tetapi sangat luar biasa dalam penerapan. Di dalam sub bab ini kita akan menghasilkan penyelesaian umum dari (2.15)

Untuk menentukan penyelesaian umum persamaan ini, kita harus memperhatikan bahwa setiap penyelesaian persamaan (2.15) adalah fungsi-fungsi yang memenuhi pesamaan diferensial. Meskipun ada banyak fungsi yang mempunyai sifat ini, suatu fungsi yang derivatifnya adalah kelipatan konstanta dengan dirinya sendiri, salah satunya yaitu fungsi $e^{\lambda x}$. Jadi jika $y = e^{\lambda x}$ maka derivatif - derivatifnya adalah $y' = \lambda e^{\lambda x}, y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$. Kita subtitusikan bentuk ini dalam persamaan (2.15), diperoleh

$$\lambda^2 e^{\lambda x} + a\lambda e^{\lambda x} + b e^{\lambda x} = 0$$

$$(\lambda^2 + a\lambda + b)e^{\lambda x} = 0$$

karena $e^{\lambda x}$ tidak pernah nol, maka persamaan ini dipenuhi untuk semua nilai λ pembuat nol. Ini berarti, persamaan (2.15) dapat diselesaikan dengan menentukan akar-akar persamaan

$$\mathrm{P}(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b = 0 \qquad (2.16)$$

Kedua akar persamaan tersebut adalah

$$\lambda_1 = \tfrac{1}{2}(-a + \sqrt{a^2 - 4b}) \text{ dan } \lambda_2 = \tfrac{1}{2}(-a - \sqrt{a^2 - 4b}) \qquad (2.17)$$

jika λ_1 adalah penyelesaian persamaan (2.16) maka $y = e^{\lambda_1 x}$ adalah penyelesaian persamaan (2.15). Persamaan (2.16) disebut sebagai *persamaan bantu atau persamaan karakteristik* dari persamaan diferensial (2.15).

Contoh 2.8

Persamaan bantu dari persamaan diferensial $y'' + 7y' - 9y = 0$ adalah

$$\lambda^2 + 7\lambda - 9 = 0$$

Untuk menyelesaikan persamaan (2.15), dapat diselesaikan dengan mencari akar-akar persamaan karakteristik (2.16). Karena *a* dan *b* dalam persamaan (2.17) adalah bilangan-bilangan nyata, maka persamaan (2.16) mempunyai 3 kemungkinan yaitu

Kasus I *(dua akar nyata yang berbeda)*

Kasus II *(dua akar nyata kembar)*

Kasus III *(dua akar kompleks sekawan)*

Tentang penyelesaian persamaan (2.16) akan dibahas oleh beberapa kasus berikut ini.

Kasus I

Kita misalkan akar-akar persamaan (2.16) adalah real dan berbeda. Kasus ini muncul bila diskriminan $a^2 - 4b$ persamaan (2.17) positif, dengan demikian akar-akar dalam persamaan (2.16) merupakan bilangan real yang tidak sama dengan nol.

Jadi persamaan karakteristik mempunyai dua akar real λ_1 dan λ_2, yang berbeda. Karena akar-akarnya λ_1 dan λ_2, maka penyelesaian persamaan (2.15) adalah

$y_1 = e^{\lambda_1 x}$ dan $y_2 = e^{\lambda_2 x}$

Untuk memperlihatkan kedua fungsi tersebut bebas linear, digunakan wroskian dari pasangan penyelesaian ini adalah

$$W(y_1, y_2)(x) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} \end{vmatrix} = (\lambda_1 - \lambda_2)e^{(\lambda_1 + \lambda_2)x}$$

Karena $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$, maka Wroskian tidak sama dengan nol untuk semua *x*. Jadi kedua fungsi tersebut, bebas linear.

Dapat disimpulkan bahwa jika persamaan karakteristik dari persamaan (2.15) mempunyai dua akar real yang berbeda yaitu λ_1 dan λ_2, maka penyelesaian umumnya adalah

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} \tag{2.18}$$

persamaan (2.18) merupakan penyelesaian umum persamaan (2.15) bila akar-akar persamaan bantunya merupakan akar real berbeda.

Contoh 2.9

Tentukan penyelesaian umum dari $y'' - 3y' + 2y = 0$ Persamaan karakteristiknya adalah $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 2)(\lambda - 1) = 0$. Akar-akar karakteristiknya adalah $\lambda_1 = 2$ dan $\lambda_2 = 1$. Jadi penyelesaian umumnya adalah

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^x$$

Contoh 2.10

Selesaikan persamaan $2y'' - y' - y = 0$

Penyelesaian

Tentukan dahulu persamaan karakteristiknya, yaitu

$P(\lambda) = 2\lambda^2 - \lambda - 1 = (2\lambda + 1)(\lambda - 1) = 0$ kemudian dapat ditentukan akar-akar karakteristiknya yaitu $\lambda_1 = -\frac{1}{2}$ dan $\lambda_2 = 1$

Penyelesaian umumnya adalah $y = c_1 e^{\frac{1}{2}x} + c_2 e^x$

Kasus II

Misalkan akar-akar persamaan (2.16) adalah real dan sama. Kasus ini muncul bila diskriminan $a^2 - 4b$ persamaan (2.17) bernilai nol atau

$b = \frac{a^2}{4}$. Dengan demikian persamaan (2.15) menjadi

$$y'' + ay' + \frac{a^2}{4}y = 0 \qquad (2.19)$$

dan persamaan (2.16) menjadi $\lambda^2 + a\lambda + \frac{a^2}{4} = 0$, yang mempunyai dua akar real yang sama $\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{a}{2}$

kita peroleh dua solusi $y_1 = e^{-\frac{a}{2}x}$ dan $y_2 = e^{-\frac{a}{2}x}$. Karena kedua penyelesaian tidak bebas linear, maka penyelesaian kedua tidak tepat. Sekarang kita akan mencari y_2 yang bebas linear terhadap y_1 .

Kita andaikan $y_2 = ve^{-\frac{a}{2}x}$, $v = v(x)$ maka

$$y_2' = v'e^{-\frac{a}{2}x} - \frac{a}{2}ve^{-\frac{a}{2}x}$$

$$y_2'' = v''e^{-\frac{a}{2}x} - av'e^{-\frac{a}{2}x} + \frac{a^2}{2}ve^{-\frac{a}{2}x}$$

kemudian subtitusikan y_2, y_2', y_2'' kedalam persamaan (2.15),

$$v''e^{-\frac{a}{2}x} - ave^{-\frac{a}{2}x} + \frac{a^2}{4}ve^{-\frac{a}{2}x} + av'e^{-\frac{a}{2}x} - \frac{a^2}{2}ve^{-\frac{a}{2}x} + \frac{a^2}{4}ve^{-\frac{a}{2}x} = 0$$

$$v''e^{-\frac{a}{2}x} = 0$$

$$v'' = 0$$

kita misalkan $w = v'$, maka

$w' = 0$

$\dfrac{dw}{dx} = 0 \rightarrow dw = 0$

selanjutnya kita integralkan kedua ruas, kita dapat $v' = w = c$

sehingga $v = cx + d$

kita ambil untuk $c = 1 \text{ dan } d = 0 \rightarrow v = x$

jadi penyelesaian kedua dari persamaan (2.15) adalah $y = xe^{-\frac{a}{2}x}$

jadi penyelesaian umum persamaan (2.15) adalah

$$y = c_1 e^{-\frac{a}{2}x} + c_2 x e^{-\frac{a}{2}x}$$

$$y = (c_1 + c_2 x) e^{-\frac{a}{2}x} \qquad (2.20)$$

persamaan (2.20) merupakan penyelesaian umum persamaan (2.15) bila akar-akar persamaan bantunya merupakan akar real dan sama. Hal ini berarti jika akarnya berulang n kali, maka penyelesaian memuat polinom berderajad $(n-1)$

Contoh 2.11

Selesaikan persamaan diferensial $y'' + 4y' + 4y = 0$

Penyelesaian

Persamaan bantu dari persamaan diferensial adalah $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$

atau $(\lambda + 2)(\lambda + 2) = 0$

Maka penyelesaian umum persamaan adalah

$$y = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x} = (c_1 + c_2 x) e^{-2x}$$

Kasus III

Misalkan akar-akar (2.15) adalah kompleks. Kasus ini muncul bila diskriminan

$a^2 - 4b$ pada persamaan (2.15) bertanda negatif.

Bila $a^2 - 4b < 0$, maka persamaan (2.16) menjadi

$\lambda_1 = -\frac{1}{2}a + i\omega$ dan $\lambda_2 = -\frac{1}{2}a - i\omega$ (dua bilangan kompleks sekawan)

dengan $\omega = \sqrt{b - \frac{1}{4}a^2}$

sekarang andaikan bahwa metode yang digunakan untuk akar-akar real yang berbeda dapat digunakan, maka penyelesaian umum adalah

$$y = c_3 e^{\left(-\frac{a}{2}+i\omega\right)x} + c_4 e^{\left(-\frac{a}{2}-i\omega\right)x}$$

$$y = c_3 e^{-\frac{a}{2}x} e^{i\omega x} + c_4 e^{-\frac{a}{2}x} e^{-i\omega x}$$

$$y = e^{-\frac{a}{2}x}(c_3 e^{i\omega x} + c_4 e^{-i\omega x}) \qquad (2.21)$$

untuk mengubah $e^{\left(-\frac{a}{2}+i\omega\right)x}$ dalam bentuk real kita gunakan definisi berikut ini

Definisi 2.6

Fungsi eksponen kompleks e^{ix} didefinisikan sebagai berikut

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

Dengan definisi 2.5, persamaan (2.21) dapat kita ubah menjadi

$$y = e^{-\frac{a}{2}x}\left(c_3(\cos\omega x + i\sin\omega x) + c_4(\cos\omega x - i\sin\omega x)\right)$$

$$y = e^{-\frac{a}{2}x}\left(c_3 \cos\omega x + c_3 i \sin\omega x + c_4 \cos\omega x - c_4 i \sin\omega x\right)$$

$$y = e^{-\frac{a}{2}x}\left((c_3 + c_4)\cos\omega x + (c_3 - c_4) i \sin\omega x\right)$$

dengan memisalkan $c_1 = c_3 + c_4$ dan $c_2 = (c_3 - c_4)i$, maka kita peroleh

$$y = e^{-\frac{a}{2}x}\left(c_1 \cos\omega x + c_2 i \sin\omega x\right) \tag{2.22}$$

persamaan (2.22) merupakan penyelesaian umum persamaan (2.15) bila akar-akar persamaan bantunya merupakan akar kompleks.

Contoh 2.12

Tentukan suatu penyelesaian umum dari persamaan $y'' - 2y' + 10y = 0$

Penyelesaian

Persamaan ciri dari $y'' - 2y' + 10y = 0$ adalah $\lambda^2 - 2\lambda + 10 = 0$

yang memiliki dua akar kompleks

$\lambda_1 = 1 + \sqrt{1-10} = 1 + 3i$ dan $\lambda_2 = 1 - 3i$

penyelesaian persamaannya yaitu

$y_1 = e^x \cos 3x$ dan $y_2 = e^x \sin 3x$

jadi solusi umumnya adalah

$$y = e^x\left(c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x\right)$$

2.2.2 Penyelesaian Persamaan Deferensial Linear NonHomogen Orde Dua dengan Koefisien Konstan

Pada sub bab sebelumnya telah kita bahas tentang persamaan diferensial linear homogen orde dua dan penyelesaiannya. Sekarang kita akan membahas tentang persamaan diferensial linear nonhomogen orde dua dan penyelesaianya.

Definisi 2.7

Persamaan diferensial linear non homogen orde dua dengan koefisien konstan adalah persamaan yang mempunyai bentuk

$$y'' + py' + qy = f(x) \tag{2.23}$$

di mana p dan q adalah konstan dan *f(x)* adalah fungsi yang kontinu pada interval $a \leq x \leq b$.

Definisi 2.8

Suatu fungsi y_p yang tidak memuat konstanta sebarang dan memenuhi persamaan (2.23) disebut *penyelesaian partikular dari persamaan.*

Contoh 2.13

Tunjukkan bahwa $y_p = 3e^x$ adalah penyelesaian khusus dari persamaan $y'' + 3y' + 2y = 18e^x$

Penyelesaian

Untuk menunjukkan tinggal mensubtitusikan $y_p'' = 3e^x$, $y_p' = 3e^x$ dan $y_p = 3e^x$

ke dalam persamaan $y'' + 3y' + 2y = 18e^x$ menghasilkan

$$3e^x + 3(e^x) + 2(3e^x) = 18e^x$$

Definisi 2.9

Bersesuaian dengan (2.23), adalah persamaan diferensial homogen

$$y'' + py' + qy = 0 \tag{2.24}$$

disebut *persamaan diferensial homogen yang terkait*

Definisi 2.10

Penyelesaian umum dari persamaan diferensial homogen yang terkait *(y_c)* disebut *penyelesaian komplementer*.

Teorema 2.5 : Prinsip Superposisi

Andaikan y_p merupakan penyelesaian partikular dari (2.23) dan andaikan y_c merupakan penyelesaian komplementer dari persamaan (2.24), maka penyelesaian umum (2.23) adalah

$$y = y_c + y_p \tag{2.25}$$

Bukti

y_p adalah penyelesaian khusus dari (2.23), maka $y_p'' + py_p' + qy_p = f(x)$ dan y_c adalah penyelesaian komplementer, maka $y = y_c + y_p$ adalah fungsi yang mempunyai dua konstanta sebarang. Akan dibuktikan bahwa $y = y_c + y_p$ merupakan penyelesaian persamaan (2.23)

Andaikan $y = y_c + y_p$ adalah penyelesaian persamaan diferensial (2.3) maka

$$(y_c + y_p)'' + p(y_c + y_p)' + q(y_c + y_p) = f(x)$$

$$(y_c'' + p\,y_c' + q\,y_c) + (y_p'' + p\,y_p' + q\,y_p) = f(x)$$

$0 + f(x) = f(x)$

$f(x) = f(x)$

Persamaan $y_c'' + p\,y_c' + q\,y_c = 0$, karena y_c adalah penyelesaian komplementer, persamaan $y_p'' + p\,y_p' + q\,y_p = f(x)$, karena y_p adalah penyelesaian pertikular dari persamaan diferensial linear nonhomogen. Maka dari itu fungsi $y_c + y_p$ adalah penyelesaian persamaan (2.23) dan karena penyelesaian itu memuat dua konstanta sebarang, maka penyelesaian itu juga merupakan penyelesaian umum persamaan diferensial (2.23) *Bukti selesai*

Contoh 2.14

Tunjukkan bahwa $y = \frac{1}{2}x^2$ adalah penyelesaian pertikular dari $y'' + 2y = x^2 + 1$, kemudian tentukan penyelesaian umum persamaan diferensial linenar non homogen $y'' + 2y = x^2 + 1$

Penyelesaian:

Untuk menunjukkan bahwa $y = \frac{1}{2}x^2$ adalah penyelesaian persamaan diferensial, subtitusikan $y = \frac{1}{2}x^2$ dan $y'' = 1$ ke dalam persamaan $y'' + 2y = x^2 + 1$, maka didapatkan $y'' + 2y = 1 + 2\left(\frac{1}{2}x^2\right) = x^2 + 1$

perhatikan persamaan homogen $y'' + 2y = 0$ dan akar-akar persamaan bantu $\lambda^2 + 2 = 0$ adalah $\lambda = i\sqrt{2}$ dan $\lambda = -i\sqrt{2}$. jadi penyelesaian umum persamaan homogen adalah

$$y_c = c_1 \cos\sqrt{2}x + c_2 \sin\sqrt{2}x$$

jadi penyelesaian umum persamaan diferensial linear non homogennya adalah

$$y = c_1 \cos\sqrt{2}x + c_2 \sin\sqrt{2}x + \frac{1}{2}x^2$$

Teorema 2.6

Andaikan y_{p_1} adalah penyelesaian partikular dari

$$y_p'' + p\,y_p' + q\,y_p = f_1(x)$$

$$y_{p_1}'' + p\,y_{p_1}' + q\,y_{p_1} = f_1(x) \tag{2.26}$$

dan y_{p_2} adalah penyelesaian partikular dari $y_p'' + p\,y_p' + q\,y_p = f_2(x)$

$$y_{p_2}'' + p\,y_{p_2}' + q\,y_{p_2} = f_2(x) \tag{2.27}$$

maka $y_{p_1} + y_{p_2}$ adalah penyelesaian partikular dari persamaan

$$y'' + p\,y' + q\,y = f_1(x) + f_2(x) \tag{2.28}$$

Bukti

Untuk menunjukkan bahwa $y = y_c + y_p$ adalah penyelesaian umum dari persamaan (2.28), kita subtitusikan $y = y_c + y_p$ ke dalam ruas kiri dari persamaan (2.28) dan sehingga akan sama dengan ruas kanan. Maka diperoleh

$$\left(y_{p_1} + y_{p_2}\right)'' + p\left(y_{p_1} + y_{p_2}\right)' + q\left(y_{p_1} + y_{p_2}\right) = f_1(x) + f_2(x)$$

$$\left(y''_{p_1} + p\,y'_{p_1} + q\,y_{p_1}\right) + \left(y''_{p_2} + p\,y'_{p_2} + q\,y_{p_2}\right) = f_1(x) + f_2(x)$$

$$f_1(x) + f_2(x) = f_1(x) + f_2(x)$$

bentuk $y''_{p_1} + p\,y'_{p_1} + q\,y_{p_1}$ sama dengan $f_1(x)$ karena y_{p_1} adalah penyelesaian partikular dari (2.26) dan bentuk $y''_{p_2} + p\,y'_{p_2} + q\,y_{p_2}$ sama dengan $f_2(x)$ karaena y_{p_2} adalah penyelesaian partikular dari (2.27)

Bukti selesai

Metode Koefisien Tak Tentu

Sekarang kita akan menentukan y_p persamaan diferensial non homogen yang didasarkan pada pengandaian bahwa y_p mempunyai bentuk umum yang sama dengan penyelesaian khusus dari fungsi penggerak dan kemudian menentukan koefisien-koefisien pada y_p yang memenuhi pesamaan diferensial. Proses perhitungan koefisien-koefisien y_p ini disebut metode koefisien tak tentu.

Definisi 2.11

Keluarga diferensial suatu fungsi adalah himpunan fungsi yang terdiri dari fungsi itu sendiri dan semua derivatif bebas linearnya, dimana koefisien-koefisien numerik dihapus dari keluarga diferensial.

Metode koefisien tak tentu hanya efektif untuk fungsi penggerak berupa fungsi-fungsi yang telah dicantumkan pada tabel di bawah ini. Andaikan fungsi penggeraknya mempunyai bentuk *tg x*, *sec x*, dan $x^{1/2}$ metode ini akan sulit digunakan, tetapi untuk fungsi seperti itu tidak akan dibahas di sini.

Daftar tabel fungsi *f(x)* dan bentuk keluarga diferensialnya

Fungsi	Keluarga diferensial
x^n (n bilangan bulat positif)	$\{1, x, ..., x^n\}$
e^{ax}	$\{e^{ax}\}$
sin bx atau *cos bx*	$\{\sin bx, \cos bx\}$
$x^n e^{ax}$	$\{e^{ax}, xe^{ax}, x^2e^{ax}, ..., x^ne^{ax}\}$
$e^{ax} \sin bx$ atau $e^{ax} \cos bx$	$\{e^{ax} \sin bx, e^{ax} \cos bx\}$

Arti penting konsep keluarga diferensial dalam penyelesaian persamaan diferensial linear non homogen adalah bahwa keluarga diferensial dapat diperlihatkan dengan syarat-syarat yang sesuai bentuk umum dari y_p terdiri dari kombinasi linear dari anggota-anggota keluarga diferensial dari fungsi penggerak.

Kita formalkan penulisan bentuk umum y_p adalah sebagai berikut

a. Bentuk umum y_p, kecuali untuk kasus yang dijelaskan pada *b*, terdiri dari kombinasi linear dari fungsi-fungsi keluarga diferensial dari fungsi penggerak.

b. Jika suatu suku dari y_p adalah duplikat dalam y_c, maka suku duplikat dalam y_p harus digandakan dengan *x* berpangkat bilangan bulat positif untuk membuat semua suku dalam $y_c + y_p$ fungsi-fungsi bebas linear.

Contoh 2.15

Diketahui $y'' - 4y = 5\sin 3x - 9e^{-2x}$, tulis bentuk umum y_p!

Penyelesaian

Penyelesaian persamaan diferensial homogen yang berkaitan adalah

$y_c = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x}$

keluarga diferensial dari sin 3x adalah {sin 3x, cos 3x} dan keluarga diferensial dari e^{-2x} adalah $\{e^{-2x}\}$ maka bentuk umum y_p adalah

$y_p = A \sin 3x + B \cos 3x + C e^{-2x}$

dengan membandingkan suku-suku dari y_p dengan y_c kita melihat bahwa Ce^{-2x} adalah suku dari y_c. Oleh karena itu kita gandakan suku ini dengan x, sehingga

$y_p = A \sin 3x + B \cos 3x + Cxe^{-2x}$

Fungsi A sin 3x dan B cos 3x tidak dikalikan dengan x karena bukan kelipatan konstan dari kedua suku y_c

Contoh 2.16

Tentukan penyelesaian umum persamaan diferensial $y'' + 4y = 3\cos x$

Penyelesaian

Penyelesaian persamaan diferensial homogen yang bersangkutan adalah

$y_c = c_1 \sin 2x + c_2 \cos 2x$

untuk menentukan penyelesaian khusus dari persamaan kita lihat bentuk dari

$f(x)$ = 3 cos x. Keluarga diferensial dari cos x adalah {cos x, sin x} sehingga kita andaikan bahwa bentuk umum y_p adalah

$y_p = A \sin x + B \cos x$

bentuk y_p ini sudah benar, karena suku-sukunya bukan fungsi-fungsi dalam y_c.

$$y_p = A\sin x + B\cos x$$

$$y_p'' = -A\sin x - B\cos x$$

Masukkan y_p dan y_p'' ke dalam persamaan diferensial, kita peroleh

$$(-A\sin x - B\cos x) + 4(A\sin x + \cos x) = 3\cos x$$

$$3A\sin x + 3B\cos x = 3\cos x$$

dengan menyamakan koefisien-koefisien sejenis kita dapatkan sitem persamaan

$$3A = 0, 3B = 3$$

yang mempunyai penyelesaian $A = 0$ dan $B = 1$, maka $y_p = \cos x$

sehingga penyelesaian umumnya adalah

$$y = y_c + y_p = c_1 \sin 2x + c_2 \cos 2x + \cos x$$

2.3 Eksistensi dan Ketunggalan Soal Nilai Awal Persamaan Diferensial Linear

Telah kita ketahui bahwa persamaan diferensial linear dapat mempunyai tak hingga banyak penyelesaian atau juga dapat tidak mempunyai penyelesaian, tetapi dengan syarat tertentu, pada persamaan diferensial linear itu mempunyai penyelesaian tunggal.

Dalam sub bab ini, kita akan membahas tentang teorema eksistensi dan ketunggalan untuk soal nilai awal persamaan diferensial linear. Teorema umum berikut ini untuk soal nilai awal linear tingkat 2

Teorema 2.7 Eksistensi dan Ketunggalan

Perhatikan persamaan diferensial linear orde 2

$$y'' + P(x)\,y' + Q(x)y = 0 \qquad (2.4)$$

jika *P(x)* dan *Q(x)* kontinu pada [a,b] dan andaikan x_0 adalah titik dalam [a,b], maka masalah nilai awal $y'' + P(x)\,y' + Q(x)y = 0$, $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = v_0$ mempunyai solusi tunggal *y(x)* pada interval tersebut

Teorema 2.7 tidak dibuktikan di dalam skripsi ini.

Contoh 2.17

Tentukan penyelesaian umum persamaan $y'' - y' = 0$ kemudian perlihatkan bahwa $y'' - y' = 0, y(0) = 1, y'(0) = 2$ mempunyai penyelesaian tunggal pada

$$-\infty < x < +\infty$$

Penyelesaian

Persamaan karakteristik dari $y'' - y' = 0$ adalah $\lambda^2 - \lambda = 0$ yang akar-akarnya adalah $\lambda = 0$ dan $\lambda = 1$, sehingga penyelesaian umumnya adalah

$$y = c_1 + c_2\,e^x$$

karena $y(0) = 1$ maka $c_1 + c_2 = 1$

$y' = c_2 e^x$

karena $y'(0) = 2$ maka $c_2 = 2$

kita dapatkan nilai $c_1 = 1$ dan $c_2 = 2$

sehingga penyelesaian khususnya yaitu $y = 2e^x - 1$

2.4 Hukum-hukum dalam Fisika

2.4.1 Hukum Hokke

Hukum Hokke berbunyi :

$F = -kx$

di mana F adalah gaya, k adalah konstanta yang bertanda positif, dan x adalah simpangan

2.4.2 Hukum Newton

Hukum Newton berbunyi :

$F = ma$

di mana F adalah gaya, m adalah massa beban, dan a adalah kecepatan

2.4.3 Hukum I Kirchhoff

Hukum I Kirchhoff berbunyi : Jumlah aljabar arus yang melewati sebuah simpul sama dengan nol

$\sum i = 0$

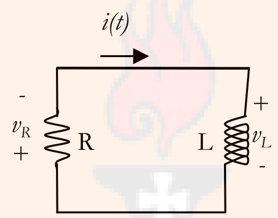
2.4.4 Hukum II Kirchhoff

Hukum II Kirchhoff berbunyi : Jumlah tegangan yang melewati sebuah lop sama dengan nol

$$\sum \varepsilon + \sum iR = 0$$

2.5 Rangkaian Sederhana

2.5.1 Rangkaian RL sederhana



Gambar 2.1

Bila sebuah resistor dan induktor dihubungkan seri, di mana hambatan Ohmnya tidak sama dengan nol, maka dengan referensi dari gambar (2.1) dan menurut hukum tegangan Kirchhoff kita peroleh persamaan

$$v_R + v_L = 0$$

$$Ri + L\frac{di}{dt} = 0$$

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = 0 \qquad (2.29)$$

persamaan (2.29) adalah persamaan diferensial linear homogen orde pertama di mana *i* adalah arus, *R* adalah tahanan ohm, v_R = beda potensial antara simpul atas dengan simpul bawah yang melalui tahanan *R* dan *L* adalah induktansi.

Untuk menyelesaikan (2.29), kita dapat menggunakan metode pemisahan variabel sehingga

$$\frac{di}{i} = -\frac{R}{L}dt$$

kemudian kita integralkan setiap ruas persamaan tersebut

$$\int \frac{di}{i} = \int -\frac{R}{L}\,dt$$

bila arus yang mengalir adalah I_0 pada saat $t = 0$ dan $i(t)$ pada waktu t, maka

$$\int_{I_0}^{i(t)} \frac{di}{i} = -\frac{R}{L}\int_0^t dt$$

$$\ln i(t) - \ln I_0 = -\frac{R}{L}t$$

$$\ln \frac{i(t)}{I_0} = -\frac{R}{L}t$$

$$\frac{i(t)}{I_0} = e^{-\frac{R}{L}t}$$

$$i(t) = I_0\, e^{-\frac{R}{L}t}$$

jadi arus yang mengalir dalam rangkaian pada saat t adalah

$$i(t) = I_0\, e^{-\frac{R}{L}t}$$

untuk $t \to \infty$ maka $e^{\frac{R}{L}t} \to \infty$ atau $e^{-\frac{R}{L}t} \to 0$ sehingga $i(t) \to 0$ berarti untuk waktu yang lama maka arus akan mendekati nol.

Contoh 2.18

Sebuah resistor yang mempunyai tahanan 10 ohm dirangkaikan seri seperti gambar (3.13) dengan induktor yang mempunyai induktansi 2 H. Tentukan bentuk arus dalam induktor pada saat *t*, jika *i* = 3 A pada saat *t* = 0

Penyelesaian

Persamaan diferensial yang sesuai dengan rangkaian adalah

$$10i + 2\frac{di}{dt} = 0$$

kita pisahkan variabel-variabelnya

$$10dt + 2\frac{di}{i} = 0$$

$$\frac{di}{i} = -5\,dt$$

$$\int_{i(0)}^{i(t)} \frac{di}{i} = \int_0^t -5dt$$

$$\ln i(t) - \ln i(0) = -5t$$

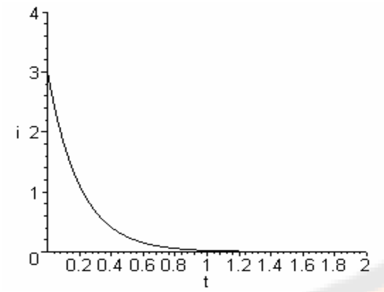
$$i(t) = i(0)\, e^{-5t}$$

karena i(0) = 3 A maka $i(t) = 3\, e^{-5t}$

jadi bentuk arus yang mengalir dalam induktor pada saat *t* adalah

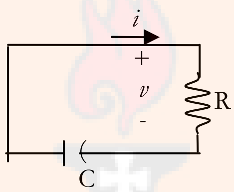
$$i(t) = 3\, e^{-5t}\, A$$

untuk t →∞ maka $e^{5t} \to \infty$ atau $e^{-5t} \to 0$ sehingga $i(t) \to 0$, ini berarti untuk waktu yang lama maka arus akan mendekati nol. hal ini dapat kita lihat dalam grafik gambar 3.14



Gambar 2.2

2.4.2 Rangkaian RC sederhana



Gambar 2.3

Bila sebuah resistor dan kapasitor dihubungkan paralel, di mana hambatan Ohmnya tidak sama dengan nol, maka dengan referensi dari gambar (2.3) dan menurut hukum arus Kirchhoff kita peroleh persamaan

$$i_C + i_R = 0$$

$$C\frac{dv}{dt} + \frac{v}{R} = 0$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{1}{RC}v = 0 \qquad (2.30)$$

persamaan (2.30) adalah persamaan diferensial linear homogen orde pertama di mana R adalah tahanan ohm, v adalah beda potensial antara simpul atas dengan simpul bawah yang melalui tahanan R dan C adalah kapasitansi.

Untuk menyelesaikan (2.30), kita dapat menggunakan metode pemisahan variabel sehingga

$$\frac{dv}{v} = -\frac{1}{RC}dt$$

kemudian kita integralkan setiap ruas persamaan tersebut

$$\int \frac{dv}{v} = \int -\frac{1}{RC}\, dt$$

bila tegangan yang mengalir adalah V_0 pada saat $t = 0$ dan $i(t)$ pada waktu t, maka

$$\int_{V_0}^{v(t)} \frac{dv}{v} = -\frac{1}{RC}\int_0^t dt$$

$$ln\ v(t) - ln\ V_0 = -\frac{1}{RC}t$$

$$ln\ \frac{v(t)}{V_0} = -\frac{1}{RC}t$$

$$\frac{v(t)}{V_0} = e^{-\frac{1}{RC}t}$$

$$v(t) = V_0\, e^{-\frac{1}{RC}t}$$

jadi tegangan dalam rangkaian pada saat t adalah

$$v(t) = V_0\, e^{-\frac{1}{RC}t}$$

untuk $t \to \infty$ maka $e^{\frac{1}{RC}t} \to \infty$ atau $e^{-\frac{1}{RC}t} \to 0$ sehingga $v(t) \to 0$, ini berarti untuk waktu yang lama maka arus akan mendekati nol.

Contoh 2.19

Sebuah resistor yang mempunyai tahanan 8 ohm dirangkaikan paralel dengan kapasitor yang mempunyai kapasitansi 2 F seperti gambar (3.15). Tentukan bentuk umum dari beda potensial dalam kapasitor pada saat *t*, jika *i* = 2 volt pada saat *t* = 0

Penyelesaian

Persamaan diferensial yang sesuai dengan rangkaian adalah

$$\frac{dv}{dt} + \frac{1}{2}v = 0$$

kita pisahkan variabel-variabelnya

$$\frac{dv}{v} + \frac{1}{2}dt = 0$$

$$\frac{dv}{v} = -\frac{1}{2}dt$$

$$\int_{v(0)}^{v(t)} \frac{dv}{v} = \int_0^t -\frac{1}{2}dt$$

$$\ln v(t) - \ln v(0) = -\frac{1}{2}t$$

$$v(t) = v(0)\, e^{-\frac{1}{2}t}$$

karena $v(0) = 2$ maka

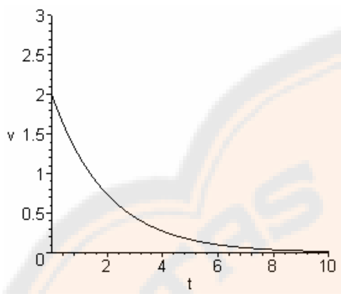
$$v(t) = 2\, e^{-\frac{1}{2}t}$$

jadi bentuk arus yang mengalir dalam induktor pada saat *t* adalah

$$v(t) = 2e^{-\frac{1}{2}t}\ volt$$

untuk $t \rightarrow \infty$ maka $e^{\frac{1}{2}t} \rightarrow \infty$ atau $e^{-\frac{1}{2}t} \rightarrow 0$ sehingga $v(t) \rightarrow 0$, ini berarti untuk waktu yang lama maka arus akan mendekati nol.

ini ditunjukan pada gambar 2.4



Gambar 2.4

2.6 Pemodelan Matematika

Model Matenatika adalah salah satu bentuk konsep dalam matematika untuk mempelajari fakta-fakta dalam kehidupan nyata (fanomena)

Beberapa prosedur dalam pembuatan model matematika:

a. Mengidentifikasi masalah

b. Membuat asumsi-asumsi, maksudnya yaitu mengurangi faktor-faktor yang ada yang dianggap kurang berpengaruh

c. Menteremahkan model

   Terdapat dua tahap penterjemahan model yaitu:

   - Penentuan variabel-variabel yang sesuai

     Kita harus memilih variabel-varibel yang sesuai untuk mewakili suatu kejadian dan kita harus mengerti arti dari simbol-simbol dalam pemodelan yang akan kita gunakan sehingga kita dapat memahami arti dari model itu

- Menentukan hubungan antara variabel-variabel yang sudah dipilih

  Jika dalam menentukan hubungan antara variabel-variabel, kita menemui masalah yang sangat kompleks sedemikian sehingga kita kesulitan untuk menemukan hubungan antara variabel-variabel maka kita harus membuat penyederhanaan tambahan. Dalam hal ini kita membutuhkan sub model.

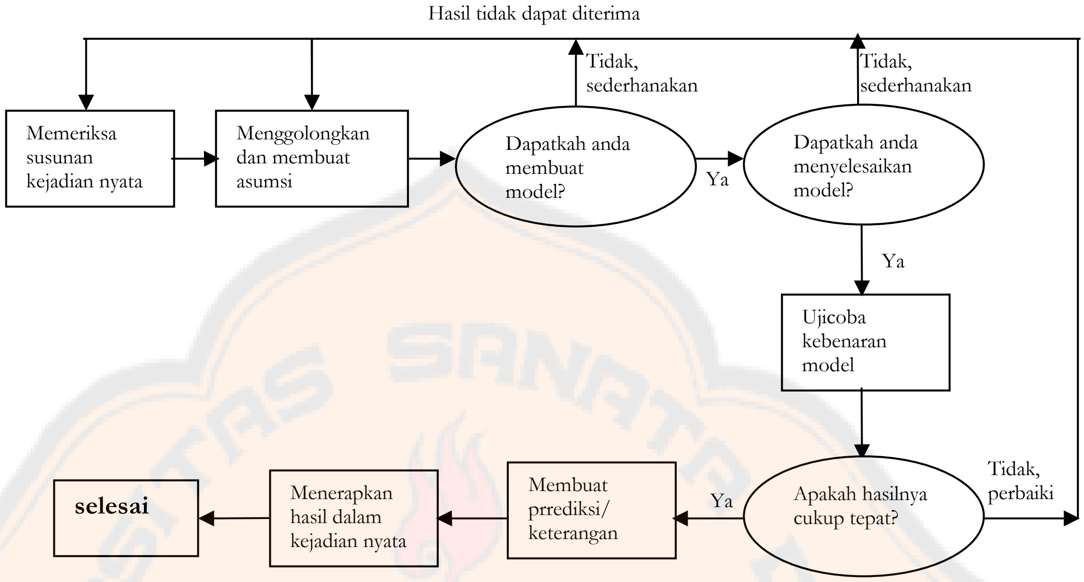
d. Membuktikan Kevalidan Model

   Sebelum menggunakan model, kita harus menguji kebenaran model dengan pertanyaan-pertanyaan

e. Menggunakan Model

f. Mempertahankan Model

Gambar 2.5 menjelaskan proses pemodelan sekaligus menunjukan grafik langkah-langkah pemodelan yang saling mempengaruhi. Gambar tersebut memperlihatkan bagaimana kita menganalisis kejadian nyata dan menggolongkannya. Selanjutnya kita golongkan variabel-variabel dan menyederhanakan asumsi-asumsi serta menghasilkan s ebuah model, kemudian kita uji coba kevalidan model dengan pertanyaan-pertanyaan atau dengan tes ketepatan. Jika hasilnya tepat, kita dapat menggunakan model itu dan mempertahankannya, jika tidak tepat, model tersebut tidak dapat digunakan.


Hasil tidak dapat diterima
Tidak, sederhanakan
Tidak, sederhanakan
Memeriksa susunan kejadian nyata
Menggolongkan dan membuat asumsi
Dapatkah anda membuat model?
Ya
Dapatkah anda menyelesaikan model?
Ya
Ujicoba kebenaran model
Tidak, perbaiki
Apakah hasilnya cukup tepat?
Ya
Membuat prrediksi/ keterangan
Menerapkan hasil dalam kejadian nyata
selesai

Gambar 2.5

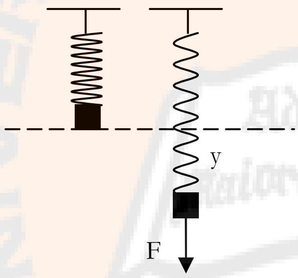
BAB III

APLIKASI PERSAMAAN DIFERENSIAL LINEAR ORDE KEDUA DALAM FISIKA

3.1 Aplikasi dalam Getaran

a) Getaran Tak Teredam

Sistem sederhana yang dapat digunakan untuk mempelajari gerakan getaran adalah pegas berbeban *m* seperti tampak pada gambar (3.1) kita andaikan berat pegas diabaikan.



Gb 3.1[a] Gb 3.1[b]

Gambar 3.1

Sebuah pegas berbeban diletakkan vertikal, beban berada pada titik kesetimbangan (gambar 3.1a). Pada titik ini beban masih dalam keadaan diam (belum bergerak). Untuk membuat beban bergerak, kita tarik beban sejauh *y* kemudian dilepaskan, sehingga beban bergerak berulang-ulang secara periodik (gambar 3.1b). Pada beban bekerja gaya F yang arahnya selalu menuju ke titik kesetimbangan dan besarnya sebanding dengan simpangan benda terhadap titik kesetimbangan., maka menurut Hukum Hooke berlaku:

F = -*ky*

dengan *k* = konstanta pegas (tingkat kekakuan pegas), *y* = simpangan, yaitu jarak dari titik kesetimbangan, F = gaya pemulih dan tanda negatif menunjukkan bahwa arah simpangan dalam gerak harmonik, selalu berlawanan dengan arah gaya.

Menurut Hukum Newton II, gaya tersebut besarnya sama dengan F = *ma*

Persamaan Deferensial yang memodelkan kejadian diatas adalah sebagai berikut:

$$ma = -ky$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -ky$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{k}{m}y = 0$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y = 0 \qquad (3.1)$$

dimana $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

jadi sistem massa pegas tak teredam dalam gambar (3.1), dilukiskan oleh persamaan diferensial linear homogen tingkat dua dengan koefisien konstan.

persamaan karakteristik dari (3.1) adalah $\lambda^2 + \omega^2 = 0$. Akar-akar persamaan karakteristiknya adalah $\lambda_1 = -\omega i$ dan $\lambda_2 = \omega i$, sedemikian sehingga penyelesaian persamaan (3.1) adalah

$$y(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t \qquad (3.2)$$

di mana $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ disebut frekuensi natural dari sistem. Frekuensi natural ini bergantung pada kekakuan pegas dan massa. Gerak yang mengikuti persamaan ini disebut osilasi selaras/harmonis. Dengan menerapkan rumus kosinus, maka persamaan (3.2) dapat ditulis sebagai berikut

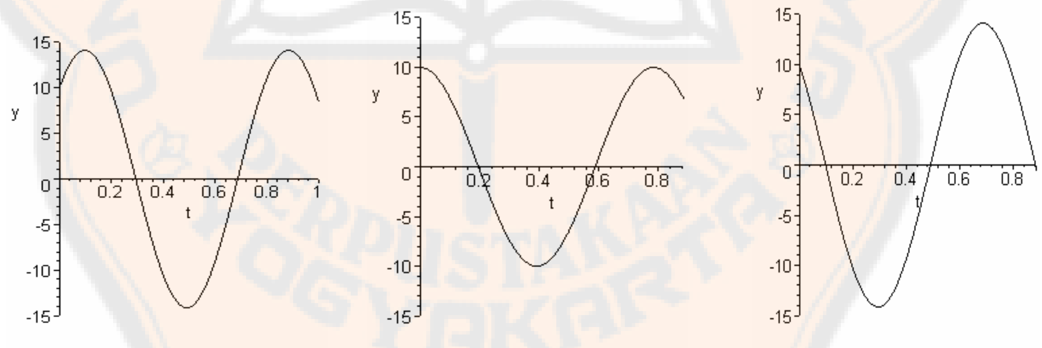
$y(t) = C\cos(\omega t - \delta)$

di mana C adalah amplitudo gerakan (A) yang nilainya = $\sqrt{c_1^{\;2} + c_2^{\;2}}$, tg δ = $\frac{c_2}{c_1}$,

periode $T = \frac{2\pi}{2\pi} T = \frac{2\pi}{\frac{2\pi}{T}} = \frac{2\pi}{\omega}$,

frekuensi $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$,

fase geser δ



kurva 1 kurva 2 kurva 3

Gambar 3.2

Perhatikan gambar (3.2) di atas.

Gambar (3.2) memperlihatkan grafik beberapa osilasi khusus untuk pergeseran awal positif dan beberapa kecepatan awal yang berbeda

Kurva 1 dalam gambar (3.2) adalah bentuk dari persamaan (3.2) dengan syarat awal yaitu pergeseran awal positif dan kecepatan awal positif. Pergeseran awal positif berarti

$t = 0 \rightarrow y(0) = c_1 \cos 0 + c_2 \sin 0 > 0 \rightarrow c_1 > 0$

Kecepatan awal positif berarti

$t = 0 \rightarrow \dot{y}(0) = -\omega c_1 \sin 0 + \omega c_2 \cos 0 > 0 \rightarrow \omega c_2 > 0 \rightarrow c_2 > 0$, karena $\omega > 0$

Jadi, kurva 1 dalam gambar (3.2) adalah bentuk dari persamaan (3.2) dimana $c_1 > 0$ dan $c_2 > 0$. Sehingga persamaan (3.2) menjadi

$y(t) = a \cos \omega t + b \sin \omega t$

(3.3)

di mana a, b adalah bilangan real positif.

Grafik $y(t) = a \cos \omega t + b \sin \omega t$ akan mencapai nilai ekstrim bila $\dot{y}(t) = 0$

$-\omega a \sin \omega t + \omega b \cos \omega t = 0$

$\omega a \sin \omega t = \omega b \cos \omega t$

$$\tan \omega t = \frac{b}{a}$$

$$t = \frac{\tan^{-1} \frac{b}{a}}{\omega}$$

$\tan^{-1}(\frac{b}{a})$ untuk t mempunyai 2 kemungkinan yaitu untuk $b > 0$ dan $a > 0$ maka

$\tan^{-1}(\frac{b}{a})$ di kuadran ke 1 atau untuk $b < 0$ dan $a < 0$ maka $\tan^{-1}(\frac{b}{a})$ di kuadran ke 3. Sehingga kita dapatkan dua titik kritis yaitu $t = \dfrac{\tan^{-1}\frac{b}{a}}{\omega}$ (di kuadran 1) dan $t = \dfrac{\tan^{-1}\frac{b}{a}}{\omega}$ (di kuadran 3).

Untuk mengetahui di mana terjadi nilai maksimum dan minimum, kita gunakan uji turunan ke dua. Bila $\ddot{y}(t) > 0$, maka terjadi minimum dan bila $\ddot{y}(t) < 0$, maka terjadi maksimum. Pendiferensialan kedua dari persamaan (3.3) adalah

$$\ddot{y}(t) = -\omega^2 a \cos \omega t - \omega^2 b \sin \omega t \tag{3.4}$$

subtitusikan $t = \dfrac{\tan^{-1}\frac{b}{a}}{\omega}$ (di kuadran 1) ke persamaan (3.4)

$$\ddot{y}\left(\frac{\tan^{-1} b/a}{\omega}\right) = -\omega^2 a \cos\left(\omega \frac{\tan^{-1} b/a}{\omega}\right) - \omega^2 b \sin\left(\omega \frac{\tan^{-1} b/a}{\omega}\right)$$

$$\ddot{y}\left(\frac{\tan^{-1}\frac{b}{a}}{\omega}\right) = -\omega^2 a \cos\left(\tan^{-1}\tfrac{b}{a}\right) - \omega^2 b \sin\left(\tan^{-1}\tfrac{b}{a}\right)$$

karena $t = \dfrac{\tan^{-1}\frac{b}{a}}{\omega}$ (di kuadran 1) bila dan hanya bila b > 0 dan a > 0, maka

$$\ddot{y}\left(\frac{\tan^{-1}\frac{b}{a}}{\omega}\right) = -\omega^2 a\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) - \omega^2 b\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) < 0$$

jadi di titik $t = \dfrac{\tan^{-1}\frac{b}{a}}{\omega}$ (di kuadran 1), terjadi nilai maksimum.

Kemudian, subtitusikan $t = \dfrac{\tan^{-1}\frac{b}{a}}{\omega}$ (di kuadran 3) ke persamaan (3.4)

$$\ddot{y}\left(\frac{\tan^{-1}\frac{b}{a}}{\omega}\right) = -\omega^2 a \cos\left(\omega \frac{\tan^{-1}\frac{b}{a}}{\omega}\right) - \omega^2 b \sin\left(\omega \frac{\tan^{-1}\frac{b}{a}}{\omega}\right)$$

$$\ddot{y}\left(\frac{\tan^{-1}\frac{b}{a}}{\omega}\right) = -\omega^2 a\cos\left(\tan^{-1}\tfrac{b}{a}\right) - \omega^2 b\sin\left(\tan^{-1}\tfrac{b}{a}\right)$$

karena $t = \frac{\tan^{-1}\frac{b}{a}}{\omega}$ (di kuadran 3) bila dan hanya bila b < 0 dan a < 0, maka

$$\ddot{y}\left(\frac{\tan^{-1}\frac{b}{a}}{\omega}\right) = -\omega^2 a\left(\frac{a}{\sqrt{(a)^2+(b)^2}}\right) - \omega^2 b\left(\frac{b}{\sqrt{(a)^2+(b)^2}}\right) > 0$$

jadi di titik $t = \frac{\tan^{-1}\frac{b}{a}}{\omega}$ (di kuadran 3), terjadi nilai minimum.

Kurva 2 dalam gambar (3.2) juga merupakan bentuk dari persamaan (3.2) untuk pergeseran awal positif dan kecepatan awal nol. Pergeseran awal positif berarti

$t = 0 \rightarrow y(0) = c_1\cos 0 + c_2\sin 0 > 0 \rightarrow c_1 > 0$

Kecepatan awal positif berarti

$t = 0 \rightarrow \dot{y}(0) = -\omega c_1\sin 0 + \omega c_2\cos 0 = 0 \rightarrow \omega c_2 = 0 \rightarrow c_2 = 0$, karena $\omega > 0$

Jadi, kurva 2 dalam gambar (3.2) adalah bentuk dari persamaan (3.2) dimana $c_1 > 0$ dan $c_2 = 0$. Sehingga persamaan (3.2) menjadi

$$y(t) = a\cos\omega t \tag{3.5}$$

di mana a adalah bilangan real positif.

Grafik $y(t) = a\cos\omega t$ akan mencapai nilai ekstrim bila $\dot{y}(t) = 0$

$-\omega a\sin\omega t = 0$

$\sin\omega t = 0$

$t = \frac{\sin^{-1} 0}{\omega}$

kita dapatkan tiga titik kritis $t = 0$, $t = \pi/\omega$, dan $t = 2\pi/\omega$

untuk mengetahui di mana terjadi nilai maksimum dan minimum, kita gunakan lagi uji turunan kedua. Pendiferensialan kedua dari persamaan (3.5) adalah

$$\ddot{y}(t) = -\omega^2 a \cos \omega t \qquad (3.6)$$

subtitusikan tiga titik kritis $t = 0$, $t = \pi/\omega$, dan $t = 2\pi/\omega$ ke persamaan (3.6)

$t = 0 \rightarrow \ddot{y}(t) = -\omega^2 a \cos 0 = -\omega^2 a(1) < 0$

$t = \pi/\omega \rightarrow \ddot{y}(\pi/\omega) = -\omega^2 a \cos \pi = -\omega^2 a(-1) > 0$

$t = 2\pi/\omega \rightarrow \ddot{y}(2\pi/\omega) = -\omega^2 a \cos 2\pi = -\omega^2 a(1) < 0$

dari uji turunan kedua di atas, dapat kita lihat bahwa di titik $t = 0$ dan $t = 2\pi/\omega$ terjadi maksimum dan di $t = \pi/\omega$ terjadi minimum.

Kurva 3 adalah bentuk dari persamaan (3.2) untuk pergeseran awal positif dan kecepatan awal negatif.

Pergeseran awal positif berarti

$t = 0 \rightarrow y(0) = c_1 \cos 0 + c_2 \sin 0 > 0 \rightarrow c_1 > 0$

Kecepatan awal positif berarti

$t = 0 \rightarrow \dot{y}(0) = -\omega c_1 \sin 0 + \omega c_2 \cos 0 < 0 \rightarrow \omega c_2 < 0 \rightarrow c_2 < 0$, karena $\omega > 0$

Jadi, kurva 3 dalam gambar (3.2) adalah bentuk dari persamaan (3.2) dimana $c_1 > 0$ dan $c_2 < 0$. Sehingga persamaan (3.2) menjadi

$$y(t) = a \cos \omega t + b \sin \omega t \qquad (3.7)$$

di mana a, b adalah bilangan real positif.

Grafik $y(t) = a \cos \omega t + b \sin \omega t$ akan mencapai nilai ekstrim bila $\dot{y}(t) = 0$

$-\omega a \sin \omega t - \omega b \cos \omega t = 0$

$-\omega a \sin \omega t = \omega b \cos \omega t$

$$\tan \omega t = \frac{b}{-a}$$

$$t = \frac{\tan^{-1}\left(\frac{b}{-a}\right)}{\omega}$$

$\tan^{-1}\left(\frac{b}{-a}\right)$ untuk t mempunyai 2 kemungkinan yaitu bila $b > 0$ dan $a > 0$ maka $\tan^{-1}\left(\frac{b}{-a}\right)$ di kuadran ke 2 atau untuk $b < 0$ dan $a < 0$ maka $\tan^{-1}\left(\frac{b}{-a}\right)$ di kuadran ke 4. Sehingga kita dapatkan dua titik kritis yaitu $t = \dfrac{\tan^{-1}\left(\frac{b}{-a}\right)}{\omega}$ (di kuadran 2) atau $t = \dfrac{\tan^{-1}\left(\frac{b}{-a}\right)}{\omega}$ (di kuadran 4)

Untuk mengetahui di mana terjadi nilai maksimum dan minimum, kita gunakan lagi uji turunan kedua. Pendiferensialan kedua dari persamaan (3.7) adalah

$$\ddot{y}(t) = -\omega^2 a \cos \omega t + \omega^2 b \sin \omega t \tag{3.8}$$

subtitusikan tiga titik kritis $t = \dfrac{\tan^{-1}\left(\frac{b}{-a}\right)}{\omega}$ (di kuadran 2) ke persamaan (3.8)

$$\ddot{y}\left(\frac{\tan^{-1}\left(\frac{b}{-a}\right)}{\omega}\right) = -\omega^2 a \cos\left(\omega \frac{\tan^{-1}\left(\frac{b}{-a}\right)}{\omega}\right) + \omega^2 b \sin\left(\omega \frac{\tan^{-1}\left(\frac{b}{-a}\right)}{\omega}\right)$$

$$\ddot{y}\left(\frac{\tan^{-1}\left(\frac{b}{-a}\right)}{\omega}\right) = -\omega^2 a \cos\left(\tan^{-1}\left(\tfrac{b}{-a}\right)\right) + \omega^2 b \sin\left(\tan^{-1}\left(\tfrac{b}{-a}\right)\right)$$

karena $t = \dfrac{\tan^{-1}\left(\frac{b}{-a}\right)}{\omega}$ (di kuadran 2) bila dan hanya bila b > 0 dan a > 0, maka

$$\ddot{y}\left(\frac{\tan^{-1}(b/-a)}{\omega}\right) = -\omega^2 a\left(\frac{-a}{\sqrt{(-a)^2 + b^2}}\right) + \omega^2 b\left(\frac{b}{\sqrt{(-a)^2 + b^2}}\right) > 0$$

jadi di $t = \dfrac{\tan^{-1}\left(\frac{b}{-a}\right)}{\omega}$ (di kuadran 2) terjadi minimum.

Kemudian, subtitusikan titik kritis $t = \dfrac{\tan^{-1}(\frac{b}{-a})}{\omega}$ (di kuadran 4), ke persamaan (3.8)

$$\ddot{y}\left(\frac{\tan^{-1}(\frac{b}{-a})}{\omega}\right) = -\omega^2\, a\cos\left(\omega\frac{\tan^{-1}(\frac{b}{-a})}{\omega}\right) + \omega^2\, b\sin\left(\omega\frac{\tan^{-1}(\frac{b}{-a})}{\omega}\right)$$

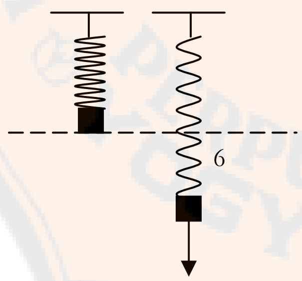
$$\ddot{y}\left(\frac{\tan^{-1}(\frac{b}{-a})}{\omega}\right) = -\omega^2\, a\cos\left(\tan^{-1}(\tfrac{b}{-a})\right) + \omega^2\, b\sin\left(\tan^{-1}(\tfrac{b}{-a})\right)$$

karena $t = \dfrac{\tan^{-1}(\frac{b}{-a})}{\omega}$ (di kuadran 4) bila dan hanya bila b < 0 dan a < 0, maka

$$\ddot{y}\left(\frac{\tan^{-1}(\frac{b}{-a})}{\omega}\right) = -\omega^2\, a\left(\frac{-a}{\sqrt{a^2+(-b)^2}}\right) + \omega^2\, b\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+(-b)^2}}\right) < 0$$

jadi di $t = \dfrac{\tan^{-1}(\frac{b}{-a})}{\omega}$ (di kuadran 4) terjadi maksimum.

Contoh 3.1



Gambar 3.3

Diketahui bahwa gaya 4 lb menarik sebuah pegas tertentu 3 inci. Setelah mencapai titik kesetimbangan, beban ditarik ke bawah 6 inci dan dilepas dengan kecepatan awal $\sqrt{2}$ ft/sec. Tentukan amplitudo, sudut fase, periode, frequensi hasil gerakan kemudian cari tentukan kapan terjadi maksimum atau minimum!

Penyelesaian

Untuk menentukan nilai k, kita gunakan hukum Hooke dengan

F = 4 lb dan $y = 3inci = \frac{1}{4}\,ft$

$$k = \frac{4}{\frac{1}{4}} = 16\,lb/\,ft$$

dengan g ≈ 32 ft/sec^2, kita dapat $m = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$, sehingga persamaan diferensial dari sistem ini adalah

$$\frac{1}{8}\frac{d^2y}{dt^2} + 16y = 0$$

atau

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 128y = 0$$

persamaan karakteristinya adalah $\lambda^2 + 128 = 0$ yang mempunyai akar-akar

$\lambda = \pm 8i\sqrt{2}$ oleh karena itu penyelesaian umumnya

$$y(t) = c_1\cos(8\sqrt{2}t) + c_2\sin(8\sqrt{2}t) \tag{3.9}$$

untuk menentukan penyelesaian khusus, perhatikan bahwa beban mula-mula diam, kemudian ditarik ke bawah sejauh 6 inci di bawah titik setimbang, sehingga

$y(0)$ = 6 inci = ½ ft

dan selanjutnya bila beban dilepaskan, kecepatan asalnya adalah $\sqrt{2}$

$$\dot{y}(0) = \sqrt{2}$$

dengan menggunakan kedua syarat kita peroleh

$c_1 = ½$

pendiferensialan kedua terhadap t dari persamaan (3.9) menghasilkan

$$\dot{y}(t) = -8\sqrt{2}c_1 \sin(8\sqrt{2}t) + 8\sqrt{2}c_2 \cos(8\sqrt{2}t)$$

karena $\dot{y}(0) = \sqrt{2}$ dan $\dot{y}(t) = -8\sqrt{2}c_1 \sin(8\sqrt{2}t) + 8\sqrt{2}c_2 \cos(8\sqrt{2}t)$ maka

$c_2 = 1/8$

penyelesaian yang dicari adalah

$$y = \tfrac{1}{2}\cos(8\sqrt{2}t) + \tfrac{1}{8}\sin(8\sqrt{2}t) \qquad (3.10)$$

$$A = C = \sqrt{c_1^{\,2} + c_2^{\,2}} = \sqrt{\left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{17}}{8} \text{ dan } tg\delta = \frac{c_2}{c_1} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}$$

Karena c_1 dan c_2 positif, maka δ ada di kuadran pertama dan δ = $\tan^{-1}\tfrac{1}{4}$ = 0,24 rad, sehingga

$$y(t) = \frac{\sqrt{17}}{8}\cos\left(8\sqrt{2}t - \delta\right)$$

persamaan ini memperlihatkan bahwa bahwa amplitudo osilasi adalah $\frac{\sqrt{17}}{8}$, periodenya adalah 2π/ω = 2π/8$\sqrt{2}$, frequensinya adalah 1/P = 8$\sqrt{2}$/2π dan sudut fasenya (δ) = arc tg $\tfrac{1}{4}$

Sekarang akan kita cari pada saat t barapa akan terjadi nilai maksimum atau minimum. Grafik $y = \tfrac{1}{2}\cos\left(8\sqrt{2}t\right) + \tfrac{1}{8}\sin\left(8\sqrt{2}t\right)$ akan mencapai nilai ekstrim bila

$$\dot{y}(t) = 0$$

$$-4\sqrt{2}\sin(8\sqrt{2}t) + 2\cos(8\sqrt{2}t) = 0$$

$$2\cos(8\sqrt{2}t) = 4\sqrt{2}\sin(8\sqrt{2}t)$$

$$\tan(8\sqrt{2}t) = \frac{1}{4}$$

$$t = \frac{\tan^{-1}\frac{1}{4}}{8\sqrt{2}}$$

$\tan^{-1}\left(\frac{1}{4}\right)$ untuk t berada di kuadran ke 1 karena 4 > 0 dan 1 > 0 atau t berada di kuadran ke 3 karena -4 < 0 dan -1< 0. Sehingga kita dapatkan dua titik kritis yaitu $t = \frac{\tan^{-1}\frac{1}{4}}{8\sqrt{2}}$ (di kuadran 1) dan $t = \frac{\tan^{-1}\left(\frac{-1}{-4}\right)}{8\sqrt{2}}$ (di kuadran 3).

Untuk mengetahui di mana terjadi nilai maksimum dan minimum, kita gunakan uji turunan kedua. Bila $\ddot{y}(t) > 0$, maka terjadi minimum dan bila $\ddot{y}(t) < 0$, maka terjadi maksimum. Pendiferensialan kedua dari persamaan (3.3) adalah

$$\ddot{y}(t) = -64\cos(8\sqrt{2}t) - 16\sin(8\sqrt{2}t)$$

(3.11)

subtitusikan $t = \frac{\tan^{-1}\frac{1}{4}}{8\sqrt{2}}$ ke persamaan (3.11)

$$\ddot{y}\left(\frac{\tan^{-1}\frac{1}{4}}{8\sqrt{2}}\right) = -64\cos\left(8\sqrt{2}\,\frac{\tan^{-1}\frac{1}{4}}{8\sqrt{2}}\right) - 16\sin\left(8\sqrt{2}\,\frac{\tan^{-1}\frac{1}{4}}{8\sqrt{2}}\right)$$

$$\ddot{y}\left(\frac{\tan^{-1}\frac{1}{4}}{8\sqrt{2}}\right) = -64\cos\left(\tan^{-1}\tfrac{1}{4}\right) - 16\sin\left(\tan^{-1}\tfrac{1}{4}\right)$$

$$\ddot{y}\left(\frac{\tan^{-1}\frac{1}{4}}{8\sqrt{2}}\right) = -64\left(\frac{4}{\sqrt{17}}\right) - 16\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)$$

$$\ddot{y}\left(\frac{\tan^{-1}\frac{1}{4}}{8\sqrt{2}}\right) = -\frac{256}{17}\sqrt{17} - \frac{16}{17}\sqrt{17} = -16\sqrt{17} < 0$$

jadi di titik $t = \frac{\tan^{-1}\frac{1}{4}}{8\sqrt{2}}$, terjadi nilai maksimum.

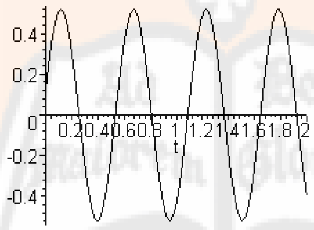
Kemudian subtitusikan $t = \dfrac{\tan^{-1}\left(\frac{-1}{-4}\right)}{8\sqrt{2}}$ ke persamaan (3.11)

$$\ddot{y}\left(\frac{\tan^{-1}\left(\frac{-1}{-4}\right)}{8\sqrt{2}}\right) = -64\cos\left(8\sqrt{2}\,\frac{\tan^{-1}\left(\frac{-1}{-4}\right)}{8\sqrt{2}}\right) - 16\sin\left(8\sqrt{2}\,\frac{\tan^{-1}\left(\frac{-1}{-4}\right)}{8\sqrt{2}}\right)$$

$$\ddot{y}\left(\frac{\tan^{-1}\left(\frac{-1}{-4}\right)}{8\sqrt{2}}\right) = -64\cos\left(\tan^{-1}\tfrac{-1}{-4}\right) - 16\sin\left(\tan^{-1}\tfrac{-1}{-4}\right)$$

$$\ddot{y}\left(\frac{\tan^{-1}\left(\frac{-1}{-4}\right)}{8\sqrt{2}}\right) = -64\left(\frac{-4}{\sqrt{17}}\right) - 16\left(\frac{-1}{\sqrt{17}}\right) = \frac{256}{17}\sqrt{17} + \frac{16}{17}\sqrt{17} = 16\sqrt{17} > 0$$

jadi di titik $t = \dfrac{\tan^{-1}\left(\frac{-1}{-4}\right)}{8\sqrt{2}}$, terjadi nilai minimum.



Gambar 3.4

b) Osilasi Paksa

Kita ingat bahwa persamaan (3.1) telah diperoleh melalui penyimakan terhadap gaya-gaya yang bekerja pada benda itu dengan menggunakan hukum kedua Newton. Sekarang akan dijelaskan padanan persamaan diferensial yang dapat diperoleh dari persamaan (3.1) dengan menambahkan gaya *r(t)*, sehingga menghasilkan

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y = r(t) \tag{3.12}$$

dimana $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$

r(t) disebut masukan (input) atau gaya penggerak dan solusinya disebut keluaran (output) atau respons sistem itu terhadap gaya penggerak tersebut. Gerak yang dihasilkannya tersebut disebut gerak paksa.

Yang menarik disini adalah fungsi masukan yang periodik. Kita akan membahas satu masukan sinusoidal, misalnya

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y = F_0 \sin \gamma t \qquad (3.13)$$

dimana $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$

solusi komplementer dari (3.13) adalah $y_c(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t$. Untuk menemukan solusi partikularnya, kita misalkan solusi partikular dari (3.13) adalah

$$y_p(t) = A\cos \gamma t + B\sin \gamma t \qquad (3.14)$$

pendiferensialan pertama dan kedua persamaan (3.14) adalah

$$\dot{y}_p(t) = -A\gamma \sin \gamma t + B\gamma \cos \gamma t$$

$$\ddot{y}_p(t) = -A\gamma^2 \cos \gamma t - B\gamma^2 \sin \gamma t$$

subtitusikan $y_p(t), \dot{y}_p(t)$ dan $\ddot{y}_p(t)$ ke persamaan (3.13)

$$\ddot{y}_p + \omega^2 y_p = A(\omega^2 - \gamma^2)\cos \gamma t + B(\omega^2 - \gamma^2)\sin \gamma t = F_0 \sin \gamma t$$

kita dapatkan $A = 0$ dan $B = \dfrac{F_0}{\omega^2 - \gamma^2}$ $(\gamma \neq \omega)$

maka $y_p(t) = \dfrac{F_0}{\omega^2 - \gamma^2} \sin \gamma t$

sehingga penyelesaian umum persamaan (3.13) adalah

$$y(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t + \frac{F_0}{\omega^2 - \gamma^2} \sin \gamma t$$

Contoh 3.2

Jika kejadian pada contoh (3.1) diberikan input sebesar 20 *sin* 4*t*, tulis penyelesaian umumnya!

Penyelesaian

Persamaan diferensial yang menggambarkan kejadian contoh (3.2) adalah

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 128y = 20 \sin 4t \qquad (3.15)$$

Penyelesaian komplementer dari (3.15) adalah

$$y_c(t) = \tfrac{1}{2}\cos(8\sqrt{2}t) + \tfrac{1}{8}\sin(8\sqrt{2}t)$$

Untuk menemukan solusi partikularnya, kita misalkan solusi partikular dari (3.15) adalah

$$y_p(t) = A\cos 4t + B\sin 4t$$

pendiferensialan pertama dan kedua y_p *(t)* adalah

$$\dot{y}_p(t) = -4A\sin 4t + 4B\cos 4t$$

$$\ddot{y}_p(t) = -16A\cos 4t - 16B\sin 4t$$

subtitusikan $y_p(t), \dot{y}_p(t)$ dan $\ddot{y}_p(t)$ ke persamaan (3.15)

$$\ddot{y}_p + 128y_p = A(128-16)\cos 4t + B(128-16)\sin 4t = 20 \sin 4t$$

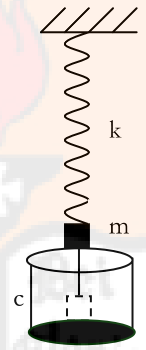
kita dapatkan $A = 0$ dan $B = \dfrac{20}{112}$

maka $y_p(t) = \dfrac{20}{112}\sin 4t$

jadi penyelesaian umum dari persamaan (3.15) adalah

$$y(t) = \tfrac{1}{2}\cos(8\sqrt{2}t) + \tfrac{1}{8}\sin(8\sqrt{2}t) + \frac{20}{112}\sin 4t$$

c) Getaran Teredam



Gambar 3.5

Jika kita hubungkan suatu massa yang digantungkan pada pegas dengan suatu peredam (gambar 3.5), maka kita harus memperhitungkan pengaruh redaman tersebut. Gaya peredam ini mempunyai arah yang berlawanan dengan gerak saat itu, dan kita asumsikan bahwa besar gaya peredam ini sebanding dengan kecepatan $\dot{y} = \dfrac{dy}{dt}$. Hampiran ini biasanya sudah baik, setidaknya untuk kecepatan rendah. Jadi gaya peredam berbentuk $F_1 = -c\dot{y}$, dimana c adalah *konstanta peredaman* yang nilainya positif.

Jadi gaya yang bekerja pada benda itu (menurut Hukum Hooke) adalah

$F + F_1 = -ky - c\dot{y}$

Berdasarkan Hukum Newton II:

$m\ddot{y} = -ky - c\dot{y}$

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = 0 \qquad (3.16)$$

dari persamaan (3.16), dapat kita lihat bahwa gerak sistem mekanis teredam ditentukan oleh persamaan diferensial linear orde kedua dengan koefisien konstan. persamaan karakteristik dari (3.16) adalah

$$\lambda^2 + \frac{c}{m}\lambda + \frac{k}{m} = 0$$

dengan akar-akarnya $\lambda_{1,2} = -\frac{c}{2m} \pm \frac{1}{2m}\sqrt{c^2 - 4mk}$

jika kita gunakan lambang

$$\alpha = \frac{c}{2m} \text{ dan } \beta = \frac{1}{2m}\sqrt{c^2 - 4mk}$$

maka

$$\lambda_1 = -\alpha + \beta \text{ dan } \lambda_2 = -\alpha - \beta$$

bentuk solusi bagi (3.16) akan bergantung pada peredamannya dan kita bedakan menjadi tiga kasus yang muncul dari nilai $\sqrt{c^2 - 4mk}$ yaitu

Kasus I, disebut ***peredaman lebih*** terjadi apabila $c^2 > 4mk$ di mana dua akar λ_1, λ_2 nyata dan berbeda

Kasus II, disebut ***peredaman kritis*** terjadi apabila $c^2 = 4mk$ di mana dua akar λ_1, λ_2 adalah dua akar kembar

Kasus III, disebut ***peredaman kurang*** terjadi apabila $c^2 < 4mk$ di mana dua akar λ_1, λ_2 adalah dua akar kompleks

Kasus I Peredaman Lebih (Overdamp)

Bila konstanta peredaman *c* cukup besar sehingga $c^2 > 4mk$, maka λ_1, λ_2 merupakan akar nyata yang berbeda. Dengan demikian, solusi umum bagi (3.16) adalah

$$y(t) = c_1 e^{-(\alpha+\beta)t} + c_2 e^{-(\alpha-\beta)t} \qquad (3.17)$$

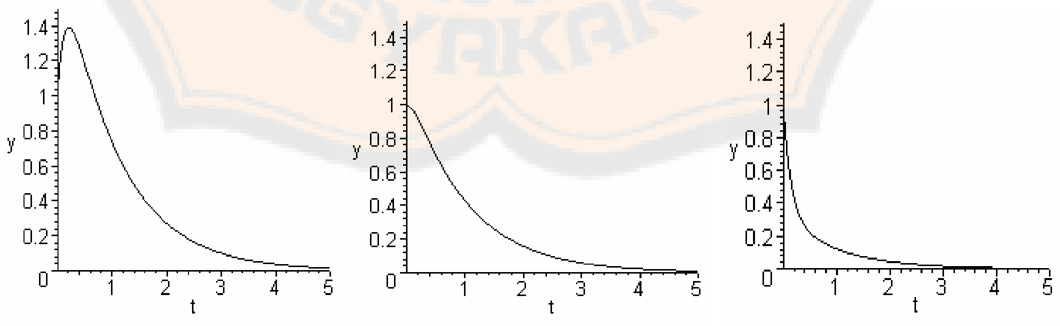
dalam kasus ini, benda itu tidak berosilasi. Ini dapat diperlihatkan bahwa untuk $t > 0$, kedua eksponen dalam (3.17) bernilai negatif sebab

$\alpha > 0, \beta > 0$ dan $\beta^2 = \alpha^2 - k/m < \alpha^2$

Dengan demikian, kedua suku dalam (3.17) mendekati nol jika t menuju tak hingga.

secara praktis, setelah waktu yang cukup lama massa itu akan berhenti pada posisi kesetimbangan statik, oleh karena itu sistem ini disebut *overdamped.*

gambar (3.7) memperlihatkan gerakan overdamped



kurva 1 kurva 2 kurva 3

Gambar 3.7

Perhatikan gambar (3.7)

Kurva 1 pada gambar (3.7) adalah bentuk dari persamaan (3.17) untuk pergeseran awal positif dan kecepatan awal positif.

Pergeseran awal positif berarti

$$y(0) = c_1 e^0 + c_2 e^0 > 0 \rightarrow c_1 + c_2 > 0$$

kecepatan awal positif berarti

$$\dot{y}(0) = -c_1(\alpha + \beta)e^0 - c_2(\alpha - \beta)e^0 > 0$$

$$\dot{y}(0) = -c_1\alpha - c_1\beta - c_2\alpha + c_2\beta > 0$$

$$\dot{y}(0) = -(c_1 + c_2)\alpha + (-c_1 + c_2)\beta > 0$$

$$\dot{y}(0) = (c_1 + c_2)\alpha > (-c_1 + c_2)\beta$$

$$\dot{y}(0) = \alpha > \frac{-c_1 + c_2}{c_1 + c_2}\beta$$

Kurva 2 pada gambar (3.7) adalah bentuk dari persamaan (3.17) untuk pergeseran awal positif dan kecepatan awal nol.

Pergeseran awal positif berarti

$$y(0) = c_1 e^0 + c_2 e^0 > 0 \rightarrow c_1 + c_2 > 0$$

kecepatan awal nol berarti

$$\dot{y}(0) = -c_1(\alpha + \beta)e^0 - c_2(\alpha - \beta)e^0 = 0$$

$$\dot{y}(0) = -c_1\alpha - c_1\beta - c_2\alpha + c_2\beta = 0$$

$$\dot{y}(0) = -(c_1 + c_2)\alpha + (-c_1 + c_2)\beta = 0$$

$$\dot{y}(0) = (c_1 + c_2)\alpha = (-c_1 + c_2)\beta$$

$$\dot{y}(0) = \alpha = \frac{-c_1 + c_2}{c_1 + c_2}\beta$$

Kurva 3 pada gambar (3.7) adalah bentuk dari persamaan (3.17) untuk pergeseran awal positif dan kecepatan awal negatif.

Pergeseran awal positif berarti

$$y(0) = c_1 e^0 + c_2 e^0 > 0 \rightarrow c_1 + c_2 > 0$$

kecepatan awal negatif berarti

$$\dot{y}(0) = -c_1(\alpha + \beta)e^0 - c_2(\alpha - \beta)e^0 < 0$$

$$\dot{y}(0) = -c_1\alpha - c_1\beta - c_2\alpha + c_2\beta < 0$$

$$\dot{y}(0) = -(c_1 + c_2)\alpha + (-c_1 + c_2)\beta < 0$$

$$\dot{y}(0) = (c_1 + c_2)\alpha < (-c_1 + c_2)\beta$$

$$\dot{y}(0) = \alpha < \frac{-c_1 + c_2}{c_1 + c_2}\beta$$

Contoh 3.3

Diketahui Sebuah beban 1 slug digantungkan pada pegas, kemudian ditarik 1 ft di bawah titik kesetimbangan dengan kecepatan awal ke bawah 1 ft/sec dan konstanta pegas tersebut adalah 4 lb/ft Gaya redam sama dengan lima kali kecepatan sesaat. Tentukan penyelesaian khusus dari persamaan gerakan!

Penyelesaian

Persamaan diferensial dari sistem di atas adalah

$$\ddot{y} + 5\dot{y} + 4y = 0, y(0) = 1, \dot{y}(0) = 1$$

persamaan bantunya adalah $\lambda^2 + 5\lambda + 4 = 0$ yang mempunyai akar-akar real yaitu

$\lambda_1 = -1$ dan $\lambda_2 = -4$

jadi penyelesaian umum sistem overdamp adalah

$y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-4t}$

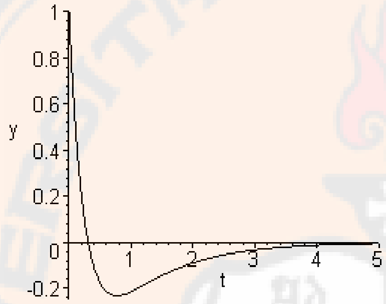
turunan fungsi *y(t)* adalah

$\dot{y}(t) = -c_1 e^{-t} - 4c_2 e^{-4t}$

dengan syarat awal $y(0) = 1$, $\dot{y}(0) = 1$, kita peroleh c_1 = 5/3 dan c_2 = -2/3

oleh karena itu, penyelesaian khususnya adalah

$y(t)$ = 5/3 e^{-t} - 2/3 e^{-4t}



Gambar 3.8

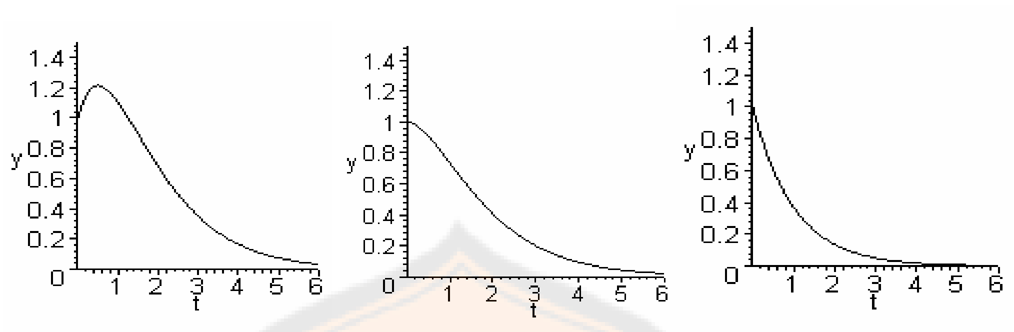
Kasus II Peredaman Kritis (Critically damp)

Jika $c^2 = 4mk$, maka β = 0, $\lambda_1 = \lambda_2 = -\alpha$, solusi umum bagi (3.16) adalah

$y(t) = (c_1 + c_2 t)e^{-\alpha t}$

(3.18)

Karena fungsi eksponensial tidak pernah nol, dan $c_1 + c_2t$ mempunyai maksimal satu nilai nol yang positif, maka gerak itu mempunyai paling banyak satu jalur melalui satu titik kesetimbangan. gambar (3.9) menunjukkan bentuk persamaan (3.18).



kurva 1 kurva 2 kurva 3

Gambar 3.9

Perhatikan gambar (3.9)

Kurva 1 pada gambar (3.9) adalah bentuk dari persamaan (3.18) untuk pergeseran awal positif dan kecepatan awal positif.

Pergeseran awal positif berarti

$y(0) = c_1 e^0 > 0 \rightarrow c_1 > 0$

Pendeferensialan pertama dari (3.18) adalah

$\dot{y}(t) = e^{-\alpha t}(-\alpha c_1 + c_2 - \alpha c_2 t)$

kecepatan awal positif berarti

$\dot{y}(0) = e^0(-\alpha c_1 + c_2) > 0$

$\dot{y}(0) = -\alpha c_1 + c_2 > 0$

$\dot{y}(0) = c_2 > \alpha c_1$

$\dot{y}(0) = c_2 > \dfrac{c}{2m} c_1$

Kurva 2 pada gambar (3.9) adalah bentuk dari persamaan (3.18) untuk pergeseran awal awal positif dan kecepatan awal nol.

Pergeseran awal positif berarti

$y(0) = c_1 e^0 > 0 \rightarrow c_1 > 0$

Pendeferensialan pertama dari (3.18) adalah

$\dot{y}(t) = e^{-\alpha t}(-\alpha c_1 + c_2 - \alpha c_2 t)$

kecepatan awal nol berarti

$\dot{y}(0) = e^0(-\alpha c_1 + c_2) = 0$

$\dot{y}(0) = -\alpha c_1 + c_2 = 0$

$\dot{y}(0) = c_2 = \alpha c_1$

$\dot{y}(0) = c_2 = \dfrac{c}{2m} c_1$

Kurva 3 pada gambar (3.9) adalah bentuk dari persamaan (3.18) untuk pergeseran awal positif dan kecepatan awal negatif.

Pergeseran awal positif berarti

$y(0) = c_1 e^0 > 0 \rightarrow c_1 > 0$

Pendeferensialan pertama dari (3.18) adalah

$\dot{y}(t) = e^{-\alpha t}(-\alpha c_1 + c_2 - \alpha c_2 t)$

kecepatan awal negatif berarti

$\dot{y}(0) = e^0(-\alpha c_1 + c_2) < 0$

$\dot{y}(0) = -\alpha c_1 + c_2 < 0$

$\dot{y}(0) = c_2 < \alpha c_1$

$\dot{y}(0) = c_2 < \dfrac{c}{2m} c_1$

Contoh 3.4

Diketahui konstanta pegas adalah 8 lb/ft. Sebuah beban 4 lb ditarik 0,5 ft di bawah titik kesetimbangan dan kemudian diberi kecepatan awal ke atas 5 ft/sec. Gaya redam sama dengan dua kali kecepatan sesaat. Tentukan penyelesaian khusus dari persamaan gerakan!

Penyelesaian

Persamaan diferensial yang bersesuaian dengan kejadian di atas adalah

$$\frac{4}{32}\ddot{y} + 2\dot{y} + 8y = 0$$

atau $\ddot{y} + 16\dot{y} + 64y = 0$

dengan syarat awal $y(0) = 0,5$ dan $\dot{y}(0) = -5$

persamaan bantunya adalah $\lambda^2 + 16\lambda + 64 = 0$ yang mempunyai akar kembar yaitu $\lambda = -8$. jadi penyelesaian umum sistem critically damped adalah

$y(t) = e^{-8t}\,(c_1 + c_2 t)$

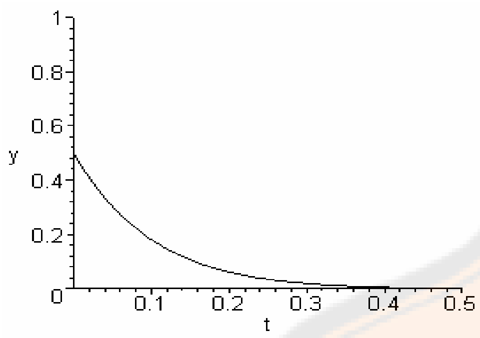
turunan fungsi $y(t)$ adalah

$y(t) = e^{-8t}\,(c_2 - 8c_1 - 8\,c_2 t)$

dengan syarat awal $y(0) = 0,5$ dan $\dot{y}\,(0) = -5$, kita peroleh $c_1 = ½$ dan $c_2 = -1$

oleh karena itu, penyelesaian khususnya adalah

$$y(t) = \left(\tfrac{1}{2} - t\right)e^{-8t}$$



Gambar 3.10

Kasus III Peredaman Kurang (Underdamp)

Jika konstanta peredaman c begitu kecilnya sehingga c^2 < 4mk, maka λ_1, λ_2 merupakan akar kompleks, misalnya

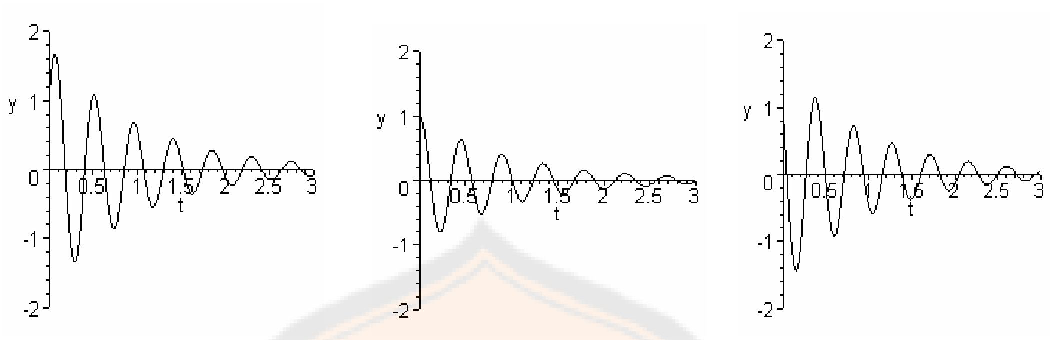
$$\beta = i\omega^* \text{ dengan } \omega^* = \frac{1}{2m}\sqrt{4mk - c^2} = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{c^2}{4m^2}} > 0 \qquad (3.19)$$

Dengan demikian, solusi umum bagi (3.16) adalah

$$y(t) = e^{-\alpha t}(c_1 \cos \omega^* t + c_2 \sin \omega^* t) = Ce^{-\alpha t} \cos(\omega^* t - \delta)) \qquad (3.20)$$

dalam hal ini $C^2 = c_1{}^2 + c_2{}^2$ dan $\tan \delta = \frac{c_1}{c_2}$

Solusi menggambarkan osilasi teredam. Karena $\cos(\omega^* t - \delta)$ terletak antara -1 dan 1, berarti kurva solusinya terletak antara kurva $y = Ce^{-\alpha t}$ dan kurva $y = -Ce^{-\alpha t}$, dalam gambar (3.11) menyinggung kedua kurva itu bila $(\omega^* t - \delta)$ merupakan kelipatan π



kurva 1 kurva 2 kurva 3

Gambar 3.11

Perhatikan gambar (3.11)

Kurva pada gambar (3.11) adalah bentuk dari persamaan (3.20) untuk pergeseran awal awal positif dan kecepatan awal yang berbeda-beda

Kurva 1 pada gambar (3.11) adalah bentuk dari persamaan (3.20) untuk pergeseran awal positif dan kecepatan awal positif

Pergeseran awal positif berarti

$$y(0) = e^{0}(c_1 \cos\ 0 + c_2 \sin\ 0) > 0 \ \rightarrow \ c_1 > 0$$

Pendeferensialan pertama dari (3.20) adalah

$$\dot{y}(t) = e^{-\alpha t} \cos \omega^* t\,(-\alpha c_1 + c_2\omega^*) + e^{-\alpha t} \sin \omega * t\,(-c_1\omega^* - c_2\alpha)$$

kecepatan awal positif berarti

$$\dot{y}(0) = e^{0} \cos 0\,(-\alpha c_1 + c_2\omega^*) + e^{0} \sin 0\,(-c_1\omega^* - c_2\alpha) > 0$$

$$\dot{y}(0) = -\alpha c_1 + c_2\omega^* > 0$$

$$\dot{y}(0) = c_2\omega^* > \alpha c_1$$

$$\dot{y}(0) = c_2 > \frac{\alpha}{\omega^*} c_1$$

karena $\alpha = \frac{c}{2m}$ dan $\omega^* = \frac{1}{2m}\sqrt{4mk - c^2}$ sehingga

$$\dot{y}(0) = c_2 > \frac{\frac{c}{2m}}{\frac{1}{2m}\sqrt{4mk - c^2}} c_1$$

$$\dot{y}(0) = c_2 > \frac{c}{\sqrt{4mk - c^2}} c_1$$

Dari persamaan (3.19) kita lihat bahwa semakin kecil c (>0), semakin besar ω^* dan semakin cepat osilasinya. Jika c mendekati nol, maka ω^* mendekati nilai

$\omega = \sqrt{k/m}$ pada osilasi selaras.

Contoh 3.5

Diketahui konstanta sebuah pegas adalah 25 lb/ft. Sebuah beban dengan massa 1 slug ditarik 1 ft di bawah titik kesetimbangan. Gaya redam sama dengan delapan kali kecepatan sesaat. Tentukan penyelesaian dari persamaan gerakan!

Penyelesaian

Persamaan diferensial dari sistem di atas adalah

$$\ddot{y} + 8\dot{y} + 25y = 0$$

persamaan karakteristiknya $\lambda^2 + 8\lambda + 25 = 0$ yang akar-akar persamaan karakteristiknya adalah $\lambda = -4 \pm 3i$

jadi penyelesaian umumnya adalah

$y(t) = e^{-4t}(c_1 \cos 3t + c_2 \sin 3t)$

turunan dari persamaan di atas

$$\dot{y}(t) = -4c_1 e^{-4t} \cos 3t - 3c_1 e^{-4t} \sin 3t - 4c_2 e^{-4t} \sin 3t + 3c_2 e^{-4t} \cos 3t$$

dengan syarat $y(0) = 1$ dan $\dot{y}(0) = 0$, kita dapatkan sistem

$$c_1 = 1, -4c_1 + 3c_2 = 0$$

dua solusi dari sistem persamaan di atas adalah $c_1 = 1$, $c_2 = 4/3$

penyelesaian khusus persamaan diferensial di atas adalah

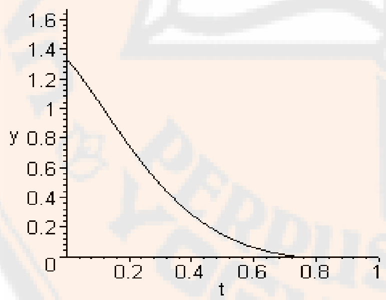
$y(t) = e^{-4t}$ (cos 3t + $4/3$ sin 3t)

A = $\sqrt{c_1^{\;2} + c_2^{\;2}}$ = 5/3 dan tan δ = 4/3

$y(t) = 5/3\ e^{-4t} \cos (3t - \delta)$

dengan δ = arc tg 4/3 = 53,1 rad

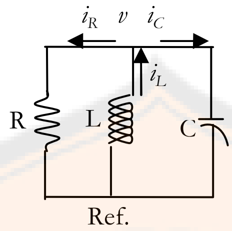
jadi pegas bergerak sesuai persamaan $y(t) = e^{-4t}$ (cos 3t + $4/3$ sin 3t) Ini berati bahwa dalam waktu t yang lama, maka pegas akan diam. Hal ini ditunjukkan dalam gambar 3.12



Gambar 3.12

3.2 Aplikasi dalam Rangkaian Listrik

a) Rangkaian Paralel Tanpa Sumber



Gambar 3.13

Bila sebuah resistor, induktor dan kapasitor dihubungkan paralel di mana resistor mempunyai tahanan ohm yang tak sama dengan nol dan dianggap energi dapat disimpan dalam kapasitor sehingga arus yang mengalir tidak sama dengan nol, maka jaringan yang dihasilkan dapat diperlihatkan mempunyai model rangkaian ekivalen seperti diperlihatkan dalam gambar (3.13).

Menurut hukum Ohm, arus yang mengalir dalam resistor adalah $i_R = \frac{v}{R}$, di mana i_R adalah arus, v adalah beda potensial antara simpul atas dan bawah melewati R, dan R adalah tahanan Ohm.

Menurut definisi arus dalam induktor, maka arus yang mengalir dalam induktor pada saat t adalah $i_L = \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v\,dt - i(t_0)$, di mana i_L adalah arus yang mengalir dalam induktor, v adalah beda potensial antara simpul atas dan bawah melewati L, $i(t_0)$ adalah arus dalam induktor pada saat t = 0 (tanda minus adalah akibat dari arah i yang dimisalkan) dan L adalah induktansi.

Kemudian menurut definisi arus dalam kapasitor, maka arus yang mengalir melalui kapasitor adalah $i_C = C\dfrac{dv}{dt}$, di mana i_C adalah arus yang melewati kapasitor, v adalah beda potensial antara simpul atas dan bawah melewati dan C adalah kapasitansi.

Dengan referensi dari gambar (3.13) dan dengan menerapkan hukum arus Kirchhoff, kita dapat menuliskan persamaannya yaitu

$$\frac{v}{R} + \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v\,dt - i(t_0) + C\frac{dv}{dt} = 0 \tag{3.21}$$

di mana v adalah beda potensial antara simpul atas dan bawah, R adalah tahanan Ohm, L adalah induktansi, $i(t_0)$ adalah arus dalam induktor pada saat t = 0 (tanda minus adalah akibat dari arah i yang dimisalkan), C adalah kapasitansi

Kita pecahkan persamaan (3.21) dengan syarat awal

$i(0^+) = I_0$

$v(0^+) = V_0$

$t = 0^+$ adalah waktu *setelah* terjadi perubahan arus pada saat $t = 0$

Jika (3.21) kita diferensialkan terhadap waktu (t), hasilnya adalah persamaan diferensial linear homogen orde kedua

$$C\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{1}{R}\frac{dv}{dt} + \frac{1}{L}v = 0 \tag{3.22}$$

persamaan karakteristik dari (3.22) adalah

$$C\lambda^2 + \frac{1}{R}\lambda + \frac{1}{L} = 0 \tag{3.23}$$

yang mempunyai 2 akar yaitu

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2RC} + \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \quad \text{dan} \quad \lambda_2 = -\frac{1}{2RC} - \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

atau

$$\lambda_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^{\,2}} \tag{3.24}$$

dan

$$\lambda_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^{\,2}} \tag{3.25}$$

di mana

$$\alpha = \frac{1}{2RC} \tag{3.26}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \tag{3.27}$$

persamaan (3.26) disebut *frekuensi radian resonan atau frekuensi resonan*, sedangkan persamaan (3.27) disebut *frekuensi neper atau koefisien peredam eksponensial*.

Nyatalah sekarang bahwa sifat respons tergantung pada magnitudo relatif α dan ω_0. Nilai di bawah akar dalam λ_1 dan λ_2 adalah riil bila $\alpha > \omega_0$, imaginier bila $\alpha < \omega_0$ dan nol bila $\alpha = \omega_0$ sedemikian sehingga RLC paralel tanpa sumber mempunyai 3 kemungkinan penyelesaian yaitu:

1) Rangkaian RLC Paralel Terlalu Redam

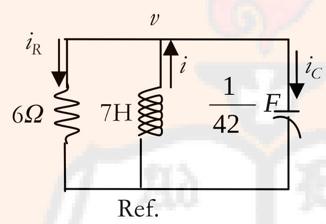
Kasus terlalu redam terjadi apabila $\alpha > \omega_0$ atau jika $LC > 4R^2C^2$, sedemikian sehingga λ_1 dan λ_2 akan riil negatif. Untuk memperlihatkan λ_1 dan λ_2 akan riil negatif, kita subtitusikan persamaan $\sqrt{\alpha^2 - \omega_0^{\,2}} < \alpha$, ke dalam persamaan

(3.24) dan (3.25). Karena λ_1 dan λ_2 riil negatif, maka penyelesaian persamaan diferensial (3.22) adalah

$$v(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t}$$

Contoh 3.6

Rangkaian RLC dipasang seperti pada gambar (3.14) dengan R = 6 Ω, L = 7 H, C = 1/42 F. Energi yang disimpan semula (dinyatakan dengan tegangan awal) melintasi rangkaian yaitu $v(0)$ = 0 dan arus induktor awal $i(0)$ = 10 A.



Gambar 3.14

Tentukan

a. frekuensi resonan dan frekuensi neper!

b. kapan terjadi tegangan maksimum dan berapa tegangan maksimumnya ?

Penyelesaian

a. frekuensi resonan (α) = $\dfrac{1}{2RC} = \dfrac{1}{2(6)(1/42)} = 3{,}5$

frekuensi neper (ω_0) = $\dfrac{1}{\sqrt{LC}} = \dfrac{1}{\sqrt{7(1/42)}} = \sqrt{6}$

b. persaman diferensial dari sistem di atas adalah

$$\frac{1}{42}\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{1}{6}\frac{dv}{dt} + \frac{1}{7}v = 0 \quad \text{atau}$$

$$\frac{d^2v}{dt^2} + 7\frac{dv}{dt} + 6v = 0 \tag{3.28}$$

Persamaan karakteristik dari persamaan (3.28) adalah $\lambda^2 + 7\lambda + 6 = 0$.

Akar-akar persamaan karakteristiknya adalah

$$\lambda_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 4(1)(6)}}{2} \rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-7 \pm 5}{2}$$

λ_1 = -1 dan λ_2 = -6

penyelesaian persamaan diferensial (3.28) adalah

$$v(t) = A_1 e^{-t} + A_2 e^{-6t}$$

diferensialkan terhadap *t*

$$\frac{dv}{dt} = -A_1 e^{-t} - 6A_2 e^{-6t}$$

dengan syarat awal $v(0) = 0$, maka

$$A_1 + A_2 = 0 \tag{3.29}$$

dan

$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{t=0} = -A_1 - 6A_2$$

karena $i_c = C\frac{dv}{dt}$, maka

$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{t=0} = \frac{i_c(0)}{C} = \frac{i(0) - i_R(0)}{C} = \frac{i(0)}{C} = 420 \ \ V/s$$

sehingga, kita dapatkan syarat kedua yaitu

$$-A_1 - 6A_2 = 420 \tag{3.30}$$

penyelesaian sistem persamaan (3.29) dan (3.30), memberikan amplitudo

A_1 = 84 dan A_2 = -84.

Penyelesaian umum persamaan diferensial (3.28) adalah

$$v(t) = 84(e^{-t} - e^{-6t}) \tag{3.31}$$

persamaan (3.31) disebut juga penyelesaian respon alami.

Selanjutnya, kita diferensialkan persamaan (3.31) terhadap t

$$\frac{dv}{dt} = 84(-e^{-t_m} + 6e^{-6t_m})$$

untuk menentukan waktu (t_m) di mana terjadi tegangan maksimum, kita hitung

$$\frac{dv}{dt} = 0$$

$$84(-e^{-t_m} + 6e^{-6t_m}) = 0$$

$$-e^{-t_m} + 6e^{-6t_m} = 0$$

$$6e^{-6t_m} = e^{-t_m}$$

$$6 = e^{-t_m}(e^{6t_m})$$

$$e^{5t_m} = 6$$

$$5t_m = \ln 6$$

$$t_m = 0{,}358 \text{ s}$$

subtitusi t_m = 0,358 s ke dalam persamaan (3.31), kita peroleh

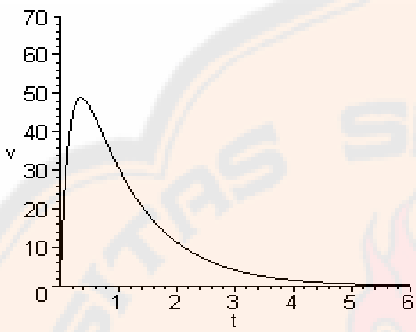
$$v(t_m) = 48{,}9 \text{ V}$$

Ini berarti bahwa tegangan maksimum pada rangkaian di atas terjadi pada saat

t = 0,358 sekon dengan tegangan maksimumnya sebesar v = 48,5 volt

Dapat kita lihat persamaan $v(t) = 84(e^{-t} - e^{-6t})$ untuk $t \to \infty$ maka $e^{-t} \to 0$ dan

$e^{-6t} \rightarrow 0$ sehingga $v(t) \rightarrow 0$. Jadi untuk $t \rightarrow \infty$, maka $v(t) = 84(e^{-t} - e^{-6t})$ akan terus naik sampai $v(t)$ maksimum (pada $t =$ 0,358 sekon), dan selanjutnya $v(t)$ akan terus turun mendekati nol. Hal ini dapat kita lihat dalam gambar 3.15



Gambar 3.15

2) Rangkaian RLC Paralel Redaman Kritis

Hal terlalu redam terjadi bila $\alpha > \omega_0$ atau jika $LC > 4R^2C^2$, sekarang kita atur harga elemen α dan ω_0 sedemikian sehingga $\alpha = \omega_0$. Inilah hal yang sangat khusus yang dinamai redaman kritis. Andaikan kita mencoba membuat RLC yang teredam kritis, maka kita melakukan tugas yang tidak mungkin, karena kita tidak akan pernah mendapat α persis sama dengan ω_0. Hasil dari usaha demikian adalah rangkaian yang terlalu redam atau yang kurang teredam yang akan dibahas dalam sub bab berikutnya. Namun, kita akan bahas rangkaian redaman kritis, karena rangkaian ini menunjukan suatu peralihan yang menarik antara terlalu redam dan kurang redam.

Kasus redaman kritis terjadi apabila $\alpha = \omega_0$ atau jika $LC = 4R^2C^2$, sedemikian sehingga λ_1 dan λ_2 merupakan dua akar kembar. Untuk memperlihatkan λ_1 dan λ_2 sama, kita subtitusikan persamaan $LC = 4R^2C^2$, ke dalam persamaan (3.24) dan (3.25) sedemikian sehingga kita dapatkan $\lambda_1 = \lambda_2 = -\alpha$. Oleh karena itu, maka penyelesaian persamaan diferensial (3.22) adalah

$$v(t) = (A_1 t + A_2)e^{-\alpha t}$$

Contoh 3.7

Rangkaian RLC dipasang seperti pada gambar (3.14) dengan R = $\frac{7}{2}\sqrt{6}$ Ω, L = 7 H, C = F. Energi yang disimpan semula (dinyatakan dengan tegangan awal) melintasi rangkaian yaitu $v(0) = 0$ dan arus induktor awal $i(0) = 10$ A.

Pertanyaan : kapan terjadi tegangan maksimum dan berapa tegangan maksimumnya ?

Penyelesaian

Persamaan diferensial yang bersesuaian dengan sistem di atas adalah

$$\frac{1}{42}\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{2}{7\sqrt{6}}\frac{dv}{dt} + \frac{1}{7}v = 0 \quad \text{atau}$$

$$\frac{d^2v}{dt^2} + 2\sqrt{6}\frac{dv}{dt} + 6v = 0 \qquad (3.32)$$

Persamaan karakteristiknya $\lambda^2 + 2\sqrt{6}\lambda + 6 = 0$ Akar-akar persamaan karakteristiknya adalah

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2\sqrt{6} \pm \sqrt{24 - 4(1)(6)}}{2} \rightarrow \lambda_{1,2} = -\sqrt{6}$$

$\lambda_1 = -\sqrt{6}$ dan $\lambda_2 = -\sqrt{6}$

penyelesaian persamaan diferensial (3.32) adalah

$$v(t) = A_1 t e^{-\sqrt{6}\,t} + A_2 e^{-\sqrt{6}\,t}$$

dengan syarat awal $v(0) = 0$, maka $A_2 = 0$

syarat awal kedua harus digunakan pada *dv/dt*, maka kita diferensialkan *v(t)* dengan mengganti $A_2 = 0$

$$\frac{dv}{dt} = A_1\, t\,(-\sqrt{6})\,e^{-\sqrt{6}\,t} + A_1 e^{-\sqrt{6}\,t}$$

pada saat $t = 0$, maka

$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{t=0} = A_1$$

karena $i_c = C\dfrac{dv}{dt}$, maka

$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{t=0} = \frac{i_c(0)}{C} = \frac{i(0) - i_R(0)}{C} = \frac{0/6}{1/42} - \frac{10}{1/42} = 420 = A_1$$

sehingga penyelesaian khusus persamaan diferensial atau penyelesaian respon alaminya adalah

$$v(t) = 420t\,e^{-\sqrt{6}\,t}$$

Selanjutnya, kita diferensialkan persamaan $v(t) = 420t\,e^{-\sqrt{6}\,t}$ terhadap t

$$\frac{dv}{dt} = 420\,e^{-\sqrt{6}\,t_m} + 420\,t_m(-\sqrt{6})\,e^{-\sqrt{6}\,t_m}$$

untuk menentukan waktu (t_m) di mana terjadi tegangan maksimum, kita hitung

$$\frac{dv}{dt} = 0$$

$$420\,e^{-\sqrt{6}\,t_m} + 420\,t_m(-\sqrt{6})\,e^{-\sqrt{6}\,t_m} = 0$$

$$420\,e^{-\sqrt{6}\,t_m}(1-\sqrt{6}\,t_m)=0$$

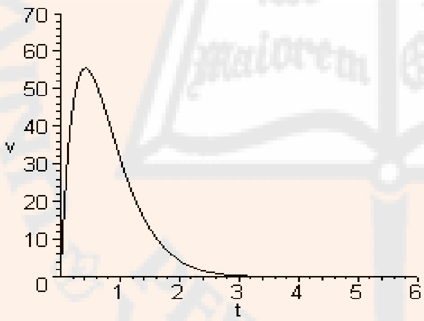
$$t_m = 0{,}408$$

subtitusi $t_m = 0{,}408$ s ke dalam persamaan $v(t)=420t\,e^{-\sqrt{6}\,t}$, kita peroleh

$v(t_m) = 63{,}1$ volt

Ini berarti bahwa tegangan maksimum pada rangkaian di atas terjadi pada saat $t = 0{,}408$ sekon dengan tegangan maksimumnya sebesar $v = 63{,}1$ volt

Dapat kita lihat persamaan $v(t)=420t\,e^{-\sqrt{6}\,t}$ untuk $t \to\infty$ maka $e^{-\sqrt{6}\,t} \to 0$ sehingga $v(t) \to 0$. Jadi untuk $t \to\infty$, maka $v(t)=420t\,e^{-\sqrt{6}\,t}$ akan terus naik sampai $v(t)$ maksimum (pada $t =$ 0,408 sekon), dan selanjutnya $v(t)$ akan terus turun mendekati nol. Hal ini dapat kita lihat dalam gambar 3.16



Gambar 3.16

3) Rangkaian RLC Paralel Kurang Redam

Misalkan kita naikan R pada peredaman kritis, maka koefisien α berkurang sedangkan ω_0 tetap konstan, α^2 menjadi lebih kecil dari ω_0^2, dan $\sqrt{\alpha^2-\omega_0^2}$ menjadi imajiner.

Kita mulai dengan bentuk eksponensial

$v(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t}$

di mana $\lambda_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0{}^2}$ dan $\alpha^2 - \omega_0{}^2 < 0$

sekarang kita ambil $\sqrt{\alpha^2 - \omega_0{}^2} = \sqrt{-1}\sqrt{\omega_0{}^2 - \alpha^2} = j\sqrt{\omega_0{}^2 - \alpha^2}$

di mana $j = \sqrt{-1}$

misalkan $\omega_d = \sqrt{\omega_0{}^2 - \alpha^2}$, maka

$$v(t) = e^{-\alpha t}(A_1 e^{j\varpi_d t} + A_2 e^{-j\varpi_d t}) \qquad (3.33)$$

dengan definisi 2.6, persamaan (3.33) menjadi

$v(t) = e^{-\alpha t}\left(A_1(\cos\ \omega_d t + i\, sim\ \omega_s\ t) + A_2(\cos\ \omega_d\ t - i \sin\ \omega_d\ t)\right)$

$v(t) = e^{-\alpha t}(B_1 \cos \omega_d t + B_2 \sin \omega_d t)$

di mana $B_1 = A_1 + A_2$ dan $B_2 = (A_1 + A_2)i$

jadi penyelesaian persamaan diferensial (3.22) adalah

$v(t) = e^{-\alpha t}(A_1 \cos \omega_d t + A_2 \sin \omega_d t)$

Contoh 3.8

Rangkaian RLC dipasang seperti pada gambar (3.14) dengan R = $\frac{21}{2}$ Ω, L = 7 H, C = 1/42 F. Energi yang disimpan semula (dinyatakan dengan tegangan awal) melintasi rangkaian yaitu $v(0) = 0$ dan arus induktor awal $i(0) = 10$ A.

Pertanyaan : kapan terjadi tegangan maksimum dan berapa tegangan maksimumnya ?

Penyelesaian

Persamaan diferensial yang bersesuaian dengan sistem di atas adalah

$$\frac{1}{42}\frac{d^2v}{dt^2}+\frac{21}{2}\frac{dv}{dt}+\frac{1}{7}v=0 \quad \text{atau}$$

$$\frac{d^2v}{dt^2}+4\frac{dv}{dt}+6v=0 \tag{3.34}$$

Persamaan karakteristik dari (3.34) adalah $\lambda^2 + 4\lambda + 6 = 0$.

Akar-akar persamaan karakteristiknya adalah

$$\lambda_{1,2}=\frac{-4\pm\sqrt{16-4(1)(6)}}{2} \rightarrow \lambda_{1,2}=\frac{-4\pm i\sqrt{8}}{2}$$

$\lambda_1 = -2-i\sqrt{2}$ dan $\lambda_2 = -2+i\sqrt{2}$

penyelesaian umum persamaan diferensial (3.34) adalah

$$v(t)=e^{-2t}(B_1\cos\sqrt{2}t+B_2\sin\sqrt{2}t)$$

dengan syarat awal $v(0) = 0$ dan $i(0) = 0$

$v(0) = 0$, maka $B_1 = 0$

sehingga $v(t)=e^{-2t}B_2\sin\sqrt{2}t$

diferensialkan terhadap t

$$i(t)=\frac{dv}{dt}=\sqrt{2}B_2e^{-2t}\cos\sqrt{2}t-2B_2e^{-2t}\sin\sqrt{2}t$$

pada saat $t = 0$, maka

$$i(0)=\left.\frac{dv}{dt}\right|_{t=0}=\sqrt{2}B_2$$

karena $i_c=C\dfrac{dv}{dt}$, maka

$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{t=0} = \frac{i_c(0)}{C} = \frac{10}{1/42} = 420 = \sqrt{2}\,B_2 \text{ atau } B_2 = 210\sqrt{2}$$

sehingga penyelesaian khusus persamaan diferensial (3.34) adalah

$$v(t) = 210\sqrt{2}\,e^{-2t}\sin\sqrt{2}t$$

Selanjutnya, kita diferensialkan persamaan $v(t) = 210\sqrt{2}\,e^{-2t}\sin\sqrt{2}t$ terhadap t

$$\frac{dv}{dt} = 210\sqrt{2}\left(-2e^{-2t_m}\sin\sqrt{2}t_m + \sqrt{2}\,e^{-2t_m}\cos\sqrt{2}\,t_m\right)$$

untuk menentukan waktu (t_m) di mana terjadi tegangan maksimum, kita hitung

$$\frac{dv}{dt} = 0$$

$$210\sqrt{2}\left(-2e^{-2t_m}\sin\sqrt{2}t_m + \sqrt{2}\,e^{-2t_m}\cos\sqrt{2}\,t_m\right) = 0$$

$$-2e^{-2t_m}\sin\sqrt{2}\,t_m + \sqrt{2}\,e^{-2t_m}\cos\sqrt{2}\,t_m = 0$$

$$-2\sin\sqrt{2}\,t_m + \sqrt{2}\cos\sqrt{2}\,t_m = 0$$

$$\frac{\sin\sqrt{2}\,t_m}{\cos\sqrt{2}\,t_m} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$\tan\sqrt{2}\,t_m = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$\sqrt{2}\,t_m = \tan^{-1}\frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$\sqrt{2}\,t_m = 0{,}615$$

$$t_m = 0{,}435$$

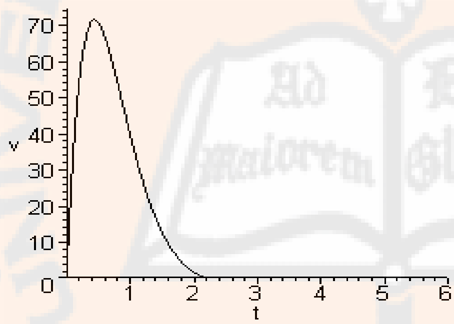
subtitusi $t_m = 0{,}435$ s ke dalam persamaan $v(t) = 210\sqrt{2}\,e^{-2t}\sin\sqrt{2}t$, kita peroleh

$v(t_m)$ = 71,8 volt

Ini berarti bahwa tegangan maksimum pada rangkaian di atas terjadi pada saat $t_m = 0{,}435$ sekon dengan tegangan maksimumnya sebesar v = 71,8 volt

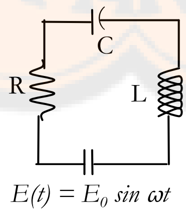
Dapat kita lihat, persamaan $v(t) = 210\sqrt{2}\,e^{-2t}\sin\sqrt{2}t$ untuk $t \rightarrow \infty$ maka

$e^{-2t} \rightarrow 0$ sehingga $v(t) \rightarrow 0$. Jadi untuk $t \rightarrow \infty$, maka $v(t) = 210\sqrt{2}\,e^{-2t}\sin\sqrt{2}t$ akan terus naik sampai $v(t)$ maksimum (pada $t_m = 0{,}435$ sekon), dan selanjutnya $v(t)$ akan terus turun mendekati nol. Hal ini dapat kita lihat dalam gambar 3.17



Gambar 3.17

d) Rangkaian RLC Seri dengan sumber



Gambar 3.18

Kita perhatikan rangkaian RLC dalam gambar 3.18, yang terdiri dari suatu resistor Ohm yang mempunyai resistansi R [Ohm], suatu induktor yang mempunyai induktansi L [henry], dan kapasitor C yang berkapasitansi C [farad] dihubungkan secara seri dengan suatu sumber gaya gerak listrik (elektromotif) $E(t)$ [volt], di mana t menyatakan waktu. Persamaan untuk arus $i(t)$ [ampere] pada rangkaian RLC tersebut diperoleh dengan meninjau tiga buah pengurangan tegangan.

$E_L = L\dfrac{di}{dt}$ (yang melalui induktor), di mana E_L adalah tegangan yang melewati L, L adalah induktansi, dan i adalah arus.

Menurut hukum Ohm, tegangan yang mengalir melewati resistor adalah

$E_R = Ri$, di mana E_R adalah tegangan yang melewati R, R adalah resistor, dan i adalah arus

$E_C = \dfrac{1}{C}\int i(t)dt$ (yang melalui kapasitor) dengan E_C adalah tegangan yang mengalir melewati kapasitor, C adalah kapasitor dan i adalah arus .

Jumlah ketiga tegangan ini sama dengan gaya gerak listrik $E(t)$. Ini merupakan hukum tegangan Kirchhoff. Untuk fungsi sinusidal $E(t) = E_0 \sin \omega t$ (E_0 konstan), hukum ini menghasilkan

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}\int i(t)\,dt = E(t) = E_0 \sin \omega t$$

Untuk mengeluarkan bentuk integral, kita mendeferensialkan terhadap t, menghasilkan

$$L\frac{d^2 i}{dt^2} + R\frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = E_0 \omega \cos \omega t$$

(3.35)

Persamaan diferensial linear homogen yang bersesuaian dengan persamaan diferensial (3.35) adalah

$$L\frac{d^2i}{dt^2}+R\frac{di}{dt}+\frac{1}{C}i=0 \tag{3.36}$$

Persamaan karakteristik dari (3.36) adalah

$$L\lambda^2+R\lambda+\frac{1}{C}=0$$

Akar-akar persamaan karakteristik adalah

$$\lambda_{1,2}=\frac{-R\pm\sqrt{R^2-4\frac{L}{C}}}{2L}=\frac{-R}{2L}\pm\frac{1}{2L}\sqrt{R^2-\frac{4L}{C}}$$

atau

$$\lambda_{1,2}=-\alpha\pm\beta$$

dengan

$$\alpha=\frac{R}{2L} \text{ dan } \beta=\frac{1}{2L}\sqrt{R^2-\frac{4L}{C}}$$

sehingga penyelesaian komplementer dari persamaan (3.35) adalah

$$i_c=c_1e^{\lambda_1 t}+c_2e^{\lambda_2 t}$$

Untuk memperoleh solusi khusus dari (3.35), kita misalkan bentuk i_p terlebih dahulu. Keluarga diferensial dari $E_0\omega \cos \omega t$ adalah $\{\cos \omega t, \sin \omega t\}$sehingga bentuk i_p adalah

$$i_p=a\cos\omega t+b\sin\omega t$$

Diferensialkan terhadap t

$$i_p'=-a\omega\sin\omega t+b\omega\cos\omega t$$

$$i_p'' = -a\omega^2 \cos\omega t - b\,\omega^2 \sin\omega t$$

Subtitusikan i_p , i_p' dan i_p'' ke persamaan (3.35)

$$Li'' + Ri' + \frac{1}{C} i = E_0 \omega \cos\omega t$$

$$L\left(-a\omega^2 \cos\omega t - b\omega^2 \sin\omega t\right) + R\left(-a\omega \sin\omega t + b\omega \cos\omega t\right)$$
$$+\frac{1}{C}\left(a\cos\omega t + b\sin\omega t\right) = E_0\omega\cos\omega t$$

$$-La\omega^2 \cos\omega t - Lb\omega^2 \sin\omega t - Ra\omega \sin\omega t + Rb\omega\cos\omega t + \frac{1}{C} a\cos\omega t$$
$$+\frac{1}{C} b\sin\omega t = E_0\omega\cos\omega t$$

$$\left(-La\omega^2 + Rb\omega + \frac{1}{C}a\right)\cos\omega t + \left(-Lb\omega^2 - Ra\omega + \frac{1}{C}b\right)\sin\omega t = E_0\omega\cos\omega t$$

kita dapatkan sistem persamaan yaitu:

$$-La\omega^2 + Rb\omega + \frac{1}{C}a = E_0\omega$$

$$-Lb\omega^2 - Ra\omega + \frac{1}{C}b = 0$$

kita bagi masing-masing dari persamaan di atas dengan ω

$$-La\omega + Rb + \frac{1}{C\omega}a = E_0 \tag{3.37}$$

$$-Lb\omega - Ra + \frac{1}{C\omega}b = 0 \tag{3.38}$$

kita selesaikan persamaan (3.38)

$$Lb\omega - \frac{1}{C\omega}b = -Ra$$

$$\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)b = -Ra$$

$b = \frac{-Ra}{S}$, di mana $S = L\omega - \frac{1}{C\omega}$ disebut *reaktansi* yaitu sifat suatu rangkaian yang memiliki induktansi atau kapasitansi

subtitusikan $b = \frac{-Ra}{S}$ dalam persamaan (3.37)

$$-La\omega + R\left(\frac{-Ra}{S}\right) + \frac{1}{C\omega}a = E_0$$

$$-La\omega - \frac{R^2 a}{S} + \frac{1}{C\omega}a = E_0$$

$$La\omega\frac{R^2 a}{S} - \frac{1}{C\omega}a = -E_0$$

$$\left(L\omega - \frac{1}{C\omega} + \frac{R^2}{S}\right)a = -E_0$$

$$\left(S + \frac{R^2}{S}\right)a = -E_0$$

$$a = \frac{-E_0 S}{S^2 + R^2} \tag{3.39}$$

kemudian subtitusi $a = \frac{-E_0 S}{S^2 + R^2}$ dalam $b = \frac{-Ra}{S}$

$$b = \frac{-R\left(\frac{-E_0 S}{S^2 + R^2}\right)}{S}$$

$$b = \frac{-R}{S}\left(\frac{-E_0 S}{S^2 + R^2}\right)$$

$$b = \frac{E_0 R}{S^2 + R^2} \tag{3.40}$$

dalam prakteknya $R \neq 0$ sehingga $S^2 + R^2$ tidak pernah nol.

Jadi penyelesaian partikular persamaan diferensial (3.35) adalah

$$i_p = a\cos\omega t + b\sin\omega t$$

$$i_p = \left(\frac{-E_0 S}{S^2 + R^2}\right)\cos\omega t + \left(\frac{E_0 R}{S^2 + R^2}\right)\sin\omega t$$

$$i_p = \frac{E_0}{\sqrt{S^2 + R^2}}\left\{\frac{-S}{\sqrt{S^2 + R^2}}\cos\omega t + \frac{R}{\sqrt{S^2 + R^2}}\sin\omega t\right\}$$

$$i_p = i_0\{-\sin\theta\,\cos\omega t + \cos\theta\sin\omega t\}$$

$$i_p = i_0\{\sin\omega t\cos\theta - \cos\omega t\sin\theta\}$$

$$i_p = i_0\sin(\omega t - \theta)$$

di mana $i_0 = \dfrac{E_0}{\sqrt{S^2 + R^2}}$, $\tan\theta = \dfrac{S}{R}$ dan $Z = \sqrt{S^2 + R^2}$ adalah *impedansi*

penyelesaian umum dari persamaan diferensial (3.35) adalah

$$i = i_c + i_p$$

$$i = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + i_0\sin(\omega t - \theta)$$

di mana

$$\lambda_{1,2} = \frac{-R}{2L} \pm \frac{1}{2L}\sqrt{R^2 - \frac{4L}{C}}$$

$i_0 = \dfrac{E_0}{\sqrt{S^2 + R^2}}$, $\tan\theta = \dfrac{S}{R}$ dan $\sqrt{S^2 + R^2}$ adalah *impedansi* yaitu besaran yang

mengukur perlawanan suatu rangkaian terhadap jalannya arus.

c_1, c_2 adalah konstanta yang dicari dengan syarat awal.

Contoh 3.9

Tentukan kuat arus *I(t)* dalam suatu RLC dengan R = 100 ohm, L = 0.1 hendry,

C = 9,9 x 10^{-2} farad, yang dihubungkan pada sebuah sumber yang bertegangan

$E(t) =$ 155 sin 377 t jika diasumsikan muatan dan kuat arusnya nol pada saat $t = 0$.

Penyelesaian

Persamaan diferensial yang menggambarkan rangkaian di atas adalah

$$0.1i'' + 100i' + 990i = 0 \qquad (3.41)$$

persamaan karakteristik dari (3.41) adalah

$$0.1\lambda^2 + 100\lambda + 990 = 0$$

akar-akar persamaan karakteristiknya adalah

$$\lambda_{1,2} = \frac{-100 \pm \sqrt{100^2 - 4(0.1)(990)}}{2(0.1)} = \frac{-100 \pm \sqrt{100^2 - 396}}{0.2} = \frac{-100 \pm 98}{0.2}$$

$\lambda_1 = -10$ dan $\lambda_2 = -990$

jadi penyelesaian komplementer persamaan (3.41) adalah

$$i_c = c_1 e^{-10t} + c_2 e^{-990t}$$

Selanjutnya kita akan mencari penyelesaian partikularnya.

Fungsi masukannya adalah $E(t)$ = 155 sin 377t maka keluarga diferensial dari $E(t)$ adalah { cos 377t, sin 377t } sehingga kita memisalkan

$i_p = a\cos 377t + b\sin 377t$

untuk mencari *a* dan *b*, kita subtitusikan

$S = L\omega - \dfrac{1}{C\omega} = (0.1)(377) - \dfrac{1}{(9.9x10^{-2})(377)} = 37.6$, E_0 = 155 dan R = 100

dalam *a* dan *b*

$$a = \frac{-E_0 S}{R^2 + S^2} = \frac{-(155)(37.6)}{100^2 + 37.6^2} = \frac{-5828}{11413.7} = -0.51$$

$$b = \frac{E_0 R}{R^2 + S^2} = \frac{(155)(100)}{100^2 + 37.6^2} = \frac{15500}{11413.7} = 1.36$$

sehingga penyelesaian partikular dari persamaan (3.41) adalah

i_p = -0.51 cos 377*t* + 1.36 sin 377*t*

jadi penyelesaian umum dari PDLNH (3.41) adalah

$$i(t) = c_1 e^{-10t} + c_2 e^{-990t} - 0.51\cos 377t + 1.36\sin 377t \qquad (3.42)$$

kita tentukan c_1 dan c_2 dari kondisi awal $Q(0) = 0$ dan $i(0) = 0$

menurut kondisi kedua

$$i\,(0) = c_1 + c_2 - 0.51 = 0 \qquad (3.43)$$

Untuk syarat pertama, kita pecahkan secara aljabar persamaan

$$Li' + Ri + \frac{1}{C}\int i(t)\,dt = E(t)$$

$$Li'(t) = E(t) - Ri(t) - \frac{1}{C}\int i(t)\,dt$$

$$i'(t) = \frac{1}{L}\left(E(t) - Ri(t) - \frac{1}{C}\int i(t)\,dt\right)$$

karena $\int i(t)\,dt = Q$, maka

$$i'(t) = \frac{1}{L}\left(E(t) - Ri(t) - \frac{1}{C}Q\right)$$

di sini $E(0) = 0$, $i(0) = 0$, dan $Q(0) = 0$ sehingga $i'(0) = 0$

dengan mendiferensialkan *i(t)* diperoleh

$$i'(t) = -10c_1e^{-10t} - 990c_2e^{-990t} - 192.27\sin 377t + 512.72\cos 377t$$

untuk $t = 0$

$$i(0) = -10c_1 - 990c_2 + 512.72 = 0 \qquad (3.44)$$

solusi bagi sistem (3.43) dan (3.44) adalah $c_1 = -0.01$ dan $c_2 = 0.52$

jadi solusi khusus dari PDLNH (3.41) adalah

$$i(t) = -0.01e^{-10t} + 0.52e^{-990t} - 0.51\cos 377t + 1.36\sin 377t$$

karena

$$i_0 = \frac{E_0}{\sqrt{R^2 + S^2}} = \frac{155}{\sqrt{100^2 + 37.6^2}} = \frac{155}{106.8} = 1.45$$

Dua suku pertama akan segera habis, dan kita dapat menuliskan arus dalam keadaan stabil dalam bentuk

$$i(t) = 1.45\{-0.35\cos 377t + 0.94\sin 377t\}$$

$$i(t) = 1.45\{-\sin 0.36\cos 377t + \cos 0.36\sin 377t\}$$

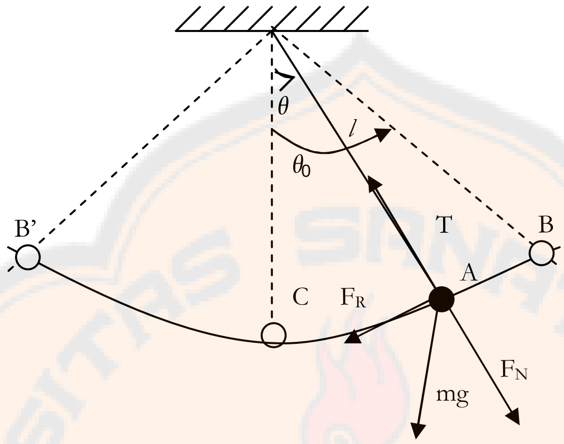
$$i(t) = 1.45\{\sin 377t\cos 0.36 - \cos 377t\sin 0.36\}$$

$$i(t) = 1.45\sin(377t - 0.36)$$

ini berarti bahwa *i(t)* maksimum terjadi jika $\sin(377t - 0.36) = 0$ sehingga *i(t)* maksimum sama dengan 1.45

3.3 Aplikasi dalam Mekanika

a) Bandul Sederhana



Gambar 3.19

Sebuah bandul sederhana didefinisikan sebagai sebuah partikel dengan massa *m* yang digantungkan dari titik O oleh tali yang panjangnya *l* dan massanya diabaikan (Gambar 3.19). Jika partikel ditarik ke samping ke posisi *B* sehingga tali membuat sudut θ_0 dengan garis vertikal OC, kemudian partikel dilepas, maka partikel akan berisolasi antara *B* dan posisi simetrik B'. Pertikel bergerak sepanjang busur sebuah lingkaran yang berjari-jari *l* = OA. Gaya-gaya yang bekerja pada partikel adalah gaya berat *mg* dan tegangan T sepanjang tali. Dari gambar 3.19, komponen tangensial dari gaya resultan adalah:

$F_R = -mg\sin\theta$

Dimana tanda minus muncul karena gaya berlawanan dengan simpangan.

Karena partikel bergerak sepanjang lingkaran berjari-jari *l*, maka jarak yang ditempuh bandul adalah $s = l\theta$, sehingga kecepatan bandul adalah $v = l\frac{d\theta}{dt}$ danpercepatan tengensial bandul yaitu $a = l\frac{dv}{dt} = l\frac{d^2\theta}{dt^2}$.

Menurut hukum Newton II

$$F = ma$$

$$F = ml\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

sehingga

$$ml\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg\sin\theta \text{ atau } \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$$

bila sudut θ cukup kecil dan amplitudo osilasi juga kecil, maka sin θ ~ θ. Jadi persamaan untuk gerak bandul itu adalah

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0 \tag{3.45}$$

persamaan karakteristik dari (3.45) adalah $\lambda^2 + \frac{g}{l} = 0$

akar-akar dari persamaan karakterstiknya adalah $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{\frac{g}{l}}$

penyelesaian persamaan (3.45) adalah

$$\theta(t) = c_1\cos\sqrt{\frac{g}{l}}t + c_2\sin\sqrt{\frac{g}{l}}t$$

jadi partikel atau bandul akan berisolasi menurut persamaan

$$\theta(t) = c_1\cos\sqrt{\frac{g}{l}}t + c_2\sin\sqrt{\frac{g}{l}}t \tag{3.46}$$

Dengan menerapkan rumus kosinus, maka persamaan (3.46) dapat ditulis sebagai berikut

$$y(t) = C\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t + \delta\right)$$

di mana C adalah amplitudo gerakan (A) yang nilainya = $\sqrt{c_1{}^2 + c_2{}^2}$, tg δ = $\frac{c_2}{c_1}$, periode $T = \frac{2\pi}{2\pi}T = \frac{2\pi}{\frac{2\pi}{T}} = \frac{2\pi}{\omega}$,

frekuensi $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$,

fase geser $\frac{\delta}{\sqrt{\frac{g}{l}}}$

Contoh 3.10

Sebuah bandul digantungkan pada tali yang panjangnya 6 inci (g = 32 ft/sec)

Tentukan θ pada saat *t* jika $\theta(0) = \frac{1}{4},\ \theta'(0) = 1$

Penyelesaian

$l = 6\ inci = 0.5\ ft$

Persamaan diferensial yang sesuai adalah

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{32}{0.5}\theta = 0$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + 64\theta = 0$$

persamaan karakteristiknya adalah $\lambda^2 + 64 = 0$

Akar-akar persamaan karakteristiknya adalah $\lambda_{1,2} = \pm\, 8i$

Penyelesaian persamaan diferensialnya adalah

$\theta(t) = c_1 \cos 8t + c_2 \sin 8t$

untuk mencari penyelesaian khususnya kita gunakan syarat awal.

$\theta(0) = \dfrac{1}{4}$, maka $c_1 = \dfrac{1}{4}$ sehingga $\theta(t) = \dfrac{1}{4}\cos 8t + c_2 \sin 8t$

untuk mencari c_2 kita gunakan syarat awal kedua $\theta'(0) = 1$

kita diferensialkan $\theta(t) = c_1 \cos 8t + c_2 \sin 8t$

$\theta'(t) = -8 \sin 8t + 8c_2 \cos 8t$

$\theta'(0) = 8c_2 \cos 0 = 1$ maka $c_2 = \dfrac{1}{8}$

sehingga penyelesaian khusus persamaan diferensialnya adalah

$$\theta(t) = \tfrac{1}{4}\cos 8t + \tfrac{1}{8}\sin 8t \tag{3.47}$$

$$\theta(t) = \frac{\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{8}\right)^2}}{\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{8}\right)^2}}\left(\tfrac{1}{4}\cos 8t + \tfrac{1}{8}\sin 8t\right)$$

$$\theta(t) = \frac{\sqrt{5}}{8}\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\sin 8t + \frac{2\sqrt{5}}{5}\cos 8t\right)$$

$$\theta(t) = \frac{\sqrt{5}}{8}\left(\sin\phi \sin 8t + \cos\phi \cos 8t\right)$$

di mana $tg\phi = -\dfrac{1}{2}$ atau $\phi \approx -0.46$ sehingga

$$\theta(t) = \frac{\sqrt{5}}{8}\cos\left(8t - 0.46\right)$$

ini berarti bahwa partikel atau bandul akan bergerak harmonis sesuai persamaan

$$\theta(t) = \frac{\sqrt{5}}{8}\cos\left(8t - 0.46\right)$$

persamaan $\theta(t) = \frac{\sqrt{5}}{8}\cos\left(8t - 0.46\right)$ menunjukkan bahwa bandul bergerak harmonis dengan amplitudo $\frac{\sqrt{5}}{8}$, periodenya adalah $\frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$, frekuensi $\frac{4}{\pi}$ dan sudut fasenya adalah $\phi \approx -0.46$

Sekarang akan kita cari pada saat *t* barapa akan terjadi nilai maksimum atau minimum. Grafik $\theta(t) = \frac{1}{4}\cos 8t + \frac{1}{8}\sin 8t$ akan mencapai nilai ekstrim bila $\theta'(t) = 0$

$$\theta'(t) = -2\sin 8t + \cos 8t = 0$$

$$2\sin 8t = \cos 8t$$

$$\tan(8t) = \tfrac{1}{2}$$

$$t = \frac{\tan^{-1}\frac{1}{2}}{8}$$

$\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ untuk *t* berada di kuadran ke 1 karena 1 > 0 dan 2 > 0 atau *t* berada di kuadran ke 3 karena -1 < 0 dan -2 < 0. Sehingga kita dapatkan dua titik kritis yaitu $t = \frac{\tan^{-1}\frac{1}{2}}{8}$ (di kuadran 1) dan $t = \frac{\tan^{-1}\left(\frac{-1}{-2}\right)}{8}$ (di kuadran 3).

Untuk mengetahui di mana terjadi nilai maksimum dan minimum, kita gunakan uji turunan kedua. Bila $\theta''(t) > 0$, maka terjadi minimum dan bila $\theta''(t) < 0$, maka terjadi maksimum. Pendiferensialan kedua dari persamaan (3.47) adalah

$$\theta''(t) = -16\cos(8t) - 8\sin(8t) \tag{3.48}$$

subtitusikan $t = \frac{\tan^{-1}\frac{1}{2}}{8}$ ke persamaan (3.48)

$$\theta''\left(\frac{\tan^{-1}\frac{1}{2}}{8}\right) = -16\cos\left(8\frac{\tan^{-1}\frac{1}{2}}{8}\right) - 8\sin\left(8\frac{\tan^{-1}\frac{1}{2}}{8}\right)$$

$$\theta''\left(\frac{\tan^{-1}\frac{1}{2}}{8}\right) = -16\cos\left(\tan^{-1}\tfrac{1}{2}\right) - 8\sin\left(\tan^{-1}\tfrac{1}{2}\right)$$

$$\theta''\left(\frac{\tan^{-1}\frac{1}{2}}{8}\right) = -16\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) - 8\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

$$\theta''\left(\frac{\tan^{-1}\frac{1}{2}}{8}\right) = -\frac{32}{5}\sqrt{5} - \frac{8}{5}\sqrt{5} = -8\sqrt{5} < 0$$

jadi di titik $t = \frac{\tan^{-1}\frac{1}{2}}{8}$, terjadi nilai maksimum.

Kemudian subtitusikan $t = \frac{\tan^{-1}\left(\frac{-1}{-2}\right)}{8}$ ke persamaan (3.48)

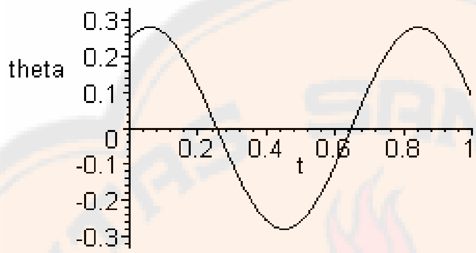
$$\theta''\left(\frac{\tan^{-1}\frac{-1}{-2}}{8}\right) = -16\cos\left(8\frac{\tan^{-1}\frac{-1}{-2}}{8}\right) - 8\sin\left(8\frac{\tan^{-1}\frac{-1}{-2}}{8}\right)$$

$$\theta''\left(\frac{\tan^{-1}\frac{-1}{-2}}{8}\right) = -16\cos\left(\tan^{-1}\tfrac{-1}{-2}\right) - 8\sin\left(\tan^{-1}\tfrac{-1}{-2}\right)$$

$$\theta''\left(\frac{\tan^{-1}\frac{-1}{-2}}{8}\right) = -16\left(\frac{-2}{\sqrt{5}}\right) - 8\left(\frac{-1}{\sqrt{5}}\right)$$

$$\theta''\left(\frac{\tan^{-1}\frac{-1}{-2}}{8}\right) = \frac{32}{5}\sqrt{5} + \frac{8}{5}\sqrt{5} = 8\sqrt{5} > 0$$

jadi di titik $t = \dfrac{\tan^{-1}\left(\frac{-1}{-2}\right)}{8}$, terjadi nilai minimum.



Gambar 3.20

BAB IV

PENUTUP

Dalam skripsi ini dibahas tentang aplikasi persamaan diferensial linear homogen orde kedua yang mempunyai bentuk

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0, a_2(x) \neq 0 \tag{4.1}$$

juga dibahas tentang persamaan diferensial linear nonhomogen orde kedua yang mempunyai bentuk

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x), a_2(x) \neq 0 \tag{4.2}$$

Penyelesaian pesamaan (4.1) dan (4.2) terdiri atas penyelesaian umum dan penyelesaian khusus. Penyelesaian umum persamaan (4.1) berbentuk $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ di mana c_1, c_2 adalah konstanta dan y_1, y_2 adalah penyelesaian bebas linear dari (4.1), sedangkan penyelesaian umum persamaan (4.2) berbentuk $y = y_c + y_p$ di mana y_c adalah penyelesaian komplementer dan y_p adalah penyelesaian partikular persamaan (4.2). Jika untuk konstanta c_1 dan c_2 pada penyelesaian umum diberikan nilai tertentu, maka relasi tertentu yang diperoleh disebut penyelesaian khusus.

Beberapa aplikasi persamaan diferensial linear orde kedua dalam fisika, diantaranya adalah getaran, rangkaian listrik dan mekanika.

Pembahasan tentang aplikasi persamaan diferensial linear dalam skripsi ini sebenarnya barulah pada permukaannya saja dan masih sangat dangkal. Banyak masalah-maslalah yang balum dapat dibahas oleh penulis karena keterbatasan pikiran, tenaga dan waktu yang dimiliki.

Hal-hal tentang aplikasi persamaan diferensial linear orde yang lebih tinggi dalam fisika atau pun penerapan yang lain yang lebih kompleks seperti daya kompleks tidak dijumpai dalam skripsi ini. Padahal persamaan diferensial linear merupakan cabang matematika yang sangat luas dan aplikasinya berkembang diberbagai ilmu pengetahuan terutama dalam ilmu fisika. Oleh karena itu, penulis menyarankan agar hal-hal tersaebut dapat diteliti lebih lanjut, mengingat pentingnya persamaan diferensial linear dalam menyelesaikan masalah-masalah dalam kehidupan nyata.