PROSES POISSON DALAM SISTEM ANTRIAN

Skripsi

Diajukan untuk Memenuhi Salah Satu Syarat
Memperoleh Gelar Sarjana Pendidikan
Program Studi Pendidikan Matematika

Oleh :

Catarina Ika Wahyuni
NIM. 021414050

PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA
JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
UNIVERSITAS SANATA DHARMA
YOGYAKARTA
2007

SKRIPSI

PROSES POISSON DALAM SISTEM ANTRIAN

Oleh

Catarina Ika Wahyuni

NIM. 021414050

Telah disetujui oleh

Pembimbing

(Hongki Julie)

Tanggal : 20 Desember 2006

SKRIPSI

PROSES POISSON DALAM SISTEM ANTRIAN

Dipersiapkan dan ditulis oleh :

Catarina Ika Wahyuni

NIM. 021414050

Telah dipertahankan di depan panitia penguji

Pada tanggal 18 Januari 2007

Dan dinyatakan memenuhi syarat

Susunan Panitia Penguji

	Nama lengkap	Tanda tangan
Ketua	: Drs. Severinus Domi, M.Si.	....
Sekretaris	: M. Andy Rudhito, S. Pd., M.Si.	....
Anggota	: Hongki Julie, S. Pd., M.Si.	....
Anggota	: Drs. Th. Sugiarto, M. T.	....
Anggota	: Drs. Al. Haryono	....

Yogyakarta, 18 januari 2007

Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan

Dekan,

Drs. T. Sarkim, M.Ed.,Ph.D.

iii

Tulisan kecil ini saya persembahkan kepada :

- Hati Kudus Yesus dan Bunda Maria yang telah memberkati saya sehingga dapat menyelesaikan skripsi ini.
- Ibu dan Ayah tercinta yang telah memberikan doa dan restunya demi terselesainya skripsi ini.
- Kakak dan Adik tersayang.
- M. Irfan A. yang telah memberi semangat untuk menyusun skripsi ini dan memberi arti hidup yang sebenarnya kepada saya.
- Sita, Puri, Dewi, Devi, Nita, Vero, dan Yose yang telah memberikan warna dalam hidup saya.
- Fitri yang selalu membantu saya, dan
- Semua mahasiswa Prodi Matematika dan fisika yang sudah menjadi teman saya.

PERNYATAAN KEASLIAN KARYA

Saya menyatakan dengan sesungguhnya bahwa skripsi yang saya buat ini tidak memuat karya atau bagian karya orang lain, kecuali yang telah disebutkan dalam kutipan dan daftar pustaka, sebagaimana layaknya karya ilmiah.

Yogyakarta, 18 januari 2007

Penulis,

Catarina Ika Wahyuni

ABSTRAK

Catarina Ika Wahyuni (2007). **Proses Poisson Dalam Sistem Antrian**. Skripsi Program S1 Pendidikan Matematika, JPMIPA FKIP Universitas Sanata Dharma Yogyakarta.

Tugas akhir ini membahas tentang proses Poisson dalam sistem antrian. Masalah yang dibahas dalam skripsi ini adalah ukuran kinerja dari sistem antrian yaitu rata-rata jumlah pelanggan dalam sistem dinotasikan L, rata-rata jumlah pelanggan menunggu dalam antrian dinotasikan L_Q, rata-rata waktu yang dihabiskan seorang pelanggan dalam sistem dinotasikan W, dan rata-rata waktu yang dihabiskan seorang pelanggan menunggu dalam antrian dinotasikan W_Q.

Sistem antrian adalah suatu sistem yang terdiri dari pelanggan, pelayan, dan pengaturan yang mengatur di dalamnya. Sistem antrian yang dibahas di sini adalah sistem antrian dengan kedatangan berdistribusi Poisson dan waktu pelayanan berdistribusi eksponensial. Terdapat lima model sistem antrian Poisson yang akan dibahas yaitu sistem antrian dengan pelayan tunggal dan kedatangan pelanggan tak terbatas , sistem antrian dengan pelayan tunggal dan N pelanggan yang diperbolehkan dalam sistem, sistem antrian dengan c pelayan dan kedatangan pelanggan tak terbatas, sistem antrian dengan c pelayan dan N pelanggan yang diperbolehkan dalam sistem, dan sistem antrian dengan pelayan tak terbatas dan kedatangan pelanggan tak terbatas.

Ukuran kinerja untuk sistem antrian dengan pelayan tunggal dan kedatangan pelanggan tak terbatas didapat L = $\frac{\lambda}{\mu-\lambda}$, L_Q = $\frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}$, W = $\frac{1}{\mu-\lambda}$, dan W_Q = $\frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}$. Ukuran kinerja untuk sistem antrian dengan pelayan tunggal dan N pelanggan yang diperbolehkan dalam sistem didapat L = $\frac{N}{2}$ untuk $\rho = 1$, L = $\frac{\rho[(1-(N+1)\rho^N+N\rho^{N+1})}{(1-\rho)(1-\rho^{N+1})}$ untuk ρ ? 1, L_Q = $\frac{N}{2}$ - $\rho(1 - P_N)$ untuk $\rho = 1$, L_Q = $\frac{\rho[(1-(N+1)\rho^N+N\rho^{N+1})}{(1-\rho)(1-\rho^{N+1})}$ - $\rho(1 - P_N)$ untuk ρ ? 1, W = $\frac{N}{2\lambda(1-P_N)}$ untuk $\rho = 1$, W = $\frac{[(1-(N+1)\rho^N+N\rho^{N+1})}{\mu(1-\rho)(1-\rho^{N+1})(1-P_N)}$ untuk ρ ? 1, W_Q = $\frac{\frac{N}{2}-\rho(1-P_N)}{\lambda(1-P_N)}$ untuk $\rho = 1$, dan W_Q = $\frac{1-(N+1)\rho^N+N\rho^{N+1}}{\mu(1-\rho)(1-\rho^{N+1})(1-P_N)}$ - $\frac{1}{\mu}$ untuk ρ ? 1. Ukuran kinerja untuk sistem antrian dengan c pelayan dan kedatangan pelanggan tak terbatas didapat L $=\rho\left[\frac{\rho^c p_0}{(c-1)!(c-\rho)^2}+1\right]$, L_Q = $\frac{\rho^{c+1}}{(c-1)!(c-\rho)^2}P_0$, W = $\frac{1}{\mu}\left[\frac{P_0\rho^c+(c-1)!(c-\rho)^2}{(c-1)!(c-\rho)^2}\right]$, dan W_Q = $\frac{\rho^c P_0}{\mu(c-1)!(c-\rho)^2}$. Ukuran kinerja untuk sistem antrian dengan c pelayan dan N

pelanggan yang diperbolehkan dalam sistem didapat L = $P_0 \dfrac{\rho^c (N-c)(N-c+1)}{2c!}$ + ρ (1 - P_N) untuk $\frac{\rho}{c}$ = 1, L = $\dfrac{P_0\rho^{c+1}}{(c-1)!(c-\rho)^2}\left[1-\left(\rho/c\right)^{N-c}-(N-c)\left(\rho/c\right)^{N-c}\left(1-\rho/c\right)\right]$ + ρ(1 - P_N) Untuk $\frac{\rho}{c}$?1, L_Q = $P_0 \dfrac{\rho^c (N-c)(N-c+1)}{2c!}$ untuk $\frac{\rho}{c}$ = 1, L_Q = $\dfrac{P_0\rho^{c+1}}{(c-1)!(c-\rho)^2}$ $\left[1-\left(\rho/c\right)^{N-c}-(N-c)\left(\rho/c\right)^{N-c}\left(1-\rho/c\right)\right]$ Untuk $\frac{\rho}{c}$? 1, W = $\dfrac{P_0\dfrac{\rho^c(N-c)(N-c+1)}{2c!}+\rho(1-P_N)}{\lambda(1-P_N)}$ untuk $\frac{\rho}{c}$ = 1, W = $\dfrac{\dfrac{P_0\rho^{c+1}}{(c-1)!(c-\rho)^2}\left[1-\left(\dfrac{\rho}{c}\right)^{N-c}-(N-c)\left(\dfrac{\rho}{c}\right)^{N-c}\left(1-\dfrac{\rho}{c}\right)\right]+\rho(1-P_N)}{\lambda(1-P_N)}$ Untuk $\frac{\rho}{c}$? 1, W_Q = $\dfrac{P_0\dfrac{\rho^c(N-c)(N-c+1)}{2c!}}{\lambda(1-P_N)}$ untuk $\frac{\rho}{c}$ = 1, W_Q = $\dfrac{\dfrac{P_0\rho^{c+1}}{(c-1)!(c-\rho)^2}\left[1-\left(\dfrac{\rho}{c}\right)^{N-c}-(N-c)\left(\dfrac{\rho}{c}\right)^{N-c}\left(1-\dfrac{\rho}{c}\right)\right]}{\lambda(1-P_N)}$ Untuk $\frac{\rho}{c}$? 1. Ukuran kinerja untuk sistem antrian dengan pelayan tak terbatas dan kedatangan pelanggan tak terbatas didapat L = $\frac{\lambda}{\mu}$, W = $\frac{1}{\mu}$, dan L_Q = W_Q = 0.

ABSTRACT

Catarina Ika Wahyuni (2007). **Poisson Process in Queueing System.** Paper-S1 Mathematics Education. JPMIPA. FKIP. Sanata Dharma university Yogyakarta.

This report discusses a Poisson process in queueing system. The problem will be discussed in this report is system-working measurement, which is the rates of customers noted as L, rates of customers waiting in the line noted as Lq, time rates finished by a customer noted as W, and time rates finished by a customer for waiting noted as Wq.

Queueing system is a system that contains of customers, servers, and regulations. The system in this study is Queue system with Poisson distributing arrival and exponential distributing service. There are five types of the Poisson queueing system to be discussed, they are queueing system with single server and infinite customers arrivals, queueing system with single server and N customers required by system, queueing system with c server and infinite customers arrivals, queueing system with c server and N customers required by system, queueing system with infinite server and infinite customers arrivals.

System-working for queueing system with single server and infinite customers arrivals is derived L = $\frac{\lambda}{\mu-\lambda}$, L_Q = $\frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}$, W = $\frac{1}{\mu-\lambda}$, dan W_Q = $\frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}$. System-working for queueing system with single server and N customers required by system is derived L = $\frac{N}{2}$ untuk ρ = 1 , L = $\frac{\rho[(1-(N+1)\rho^N+N\rho^{N+1})}{(1-\rho)(1-\rho^{N+1})}$ untuk ρ ? 1, L_Q = $\frac{N}{2}$ - $\rho(1 - P_N)$ untuk ρ = 1, L_Q = $\frac{\rho[(1-(N+1)\rho^N+N\rho^{N+1})}{(1-\rho)(1-\rho^{N+1})}$ - $\rho(1 - P_N)$ untuk ρ ? 1, W = $\frac{N}{2\lambda(1-P_N)}$ untuk ρ = 1, W = $\frac{[(1-(N+1)\rho^N+N\rho^{N+1})}{\mu(1-\rho)(1-\rho^{N+1})(1-P_N)}$ untuk ρ ? 1, W_Q = $\frac{\frac{N}{2}-\rho(1-P_N)}{\lambda(1-P_N)}$ untuk ρ = 1, dan W_Q = $\frac{1-(N+1)\rho^N+N\rho^{N+1}}{\mu(1-\rho)(1-\rho^{N+1})(1-P_N)}$ - $\frac{1}{\mu}$ untuk ρ ? 1. System-working for queueing system with c server and infinite customers arrivals is derived L = $\rho\left[\frac{\rho^c p_0}{(c-1)!(c-\rho)^2}+1\right]$, L_Q = $\frac{\rho^{c+1}}{(c-1)!(c-\rho)^2}P_0$, W = $\frac{1}{\mu}\left[\frac{P_0\rho^c+(c-1)!(c-\rho)^2}{(c-1)!(c-\rho)^2}\right]$, dan W_Q = $\frac{\rho^c P_0}{\mu(c-1)!(c-\rho)^2}$. System-working for queueing system with c server and N customers required by system is derived L = $P_0\,\frac{\rho^c(N-c)(N-c+1)}{2c!}$ + ρ $(1 - P_N)$ untuk $\frac{\rho}{c}$ = 1, L = $\frac{P_0\rho^{c+1}}{(c-1)!(c-\rho)^2}\left[1-\left(\rho/c\right)^{N-c}-(N-c)\left(\rho/c\right)^{N-c}\left(1-\rho/c\right)\right]$ + $\rho(1 - P_N)$ Untuk $\frac{\rho}{c}$? 1, L_Q = $P_0\,\frac{\rho^c(N-c)(N-c+1)}{2c!}$ untuk $\frac{\rho}{c}$ = 1, L_Q = $\frac{P_0\rho^{c+1}}{(c-1)!(c-\rho)^2}\left[1-\left(\rho/c\right)^{N-c}-(N-c)\left(\rho/c\right)^{N-c}\left(1-\rho/c\right)\right]$ Untuk $\frac{\rho}{c}$? 1, W =

$\dfrac{P_0 \dfrac{\rho^c (N-c)(N-c+1)}{2c!} + \rho(1-P_N)}{\lambda(1-P_N)}$ untuk $\dfrac{\rho}{c} = 1$, W = $\dfrac{\dfrac{P_0\rho^{c+1}}{(c-1)!(c-\rho)^2}\left[1-\left(\dfrac{\rho}{c}\right)^{N-c} - (N-c)\left(\dfrac{\rho}{c}\right)^{N-c}\left(1-\dfrac{\rho}{c}\right)\right]+\rho(1-P_N)}{\lambda(1-P_N)}$ Untuk $\dfrac{\rho}{c}$? 1, W_Q = $\dfrac{P_0 \dfrac{\rho^c (N-c)(N-c+1)}{2c!}}{\lambda(1-P_N)}$ untuk $\dfrac{\rho}{c} = 1$, W_Q = $\dfrac{\dfrac{P_0\rho^{c+1}}{(c-1)!(c-\rho)^2}\left[1-\left(\dfrac{\rho}{c}\right)^{N-c} - (N-c)\left(\dfrac{\rho}{c}\right)^{N-c}\left(1-\dfrac{\rho}{c}\right)\right]}{\lambda(1-P_N)}$ Untuk $\dfrac{\rho}{c}$? 1. System-working for queueing system with infinite server and infinite customers arrivals is derived L = $\dfrac{\lambda}{\mu}$, W = $\dfrac{1}{\mu}$, dan $L_Q = W_Q = 0$.

KATA PENGANTAR

Puji syukur penulis panjatkan kehadirat Tuhan Yang Maha Esa yang telah melimpahkan rahmatnya, sehingga penulis dapat menyelesaikan tugas menyusun skripsi ini.

Skripsi ini penulis ajukan kepada yang terhormat panitia penguji Skripsi, untuk melengkapi sebagai syarat untuk menempuh gelar sarjana pada jurusan pendidikan Matematika dan ilmu Pengetahuan Alam Universitas Sanata dharma Yogyakarta.

Penulis menyusun Skripsi ini untuk mengetahui tentang Rantai Markov dengan Indeks Parameter Kontinu dan Penerapannya dalam Sistem Antrian. Penulis menyadari bahwa Skripsi yang sederhana ini masih jauh dari sempurna. Hal ini dikarenakan keterbatasan tingkat kemampuan dan pengetahuan penulis. Maka dari itu Skripsi ini tidak mungkin dapat terselesaikan tanpa adanya dorongan, petunjuk, dan bimbingan dari semua pihak. Oleh karena itu, penulis mengucapkan banyak terima kasih kepada :

1. Bapak Marcellinus Andy Rudhito. S.Pd., M.Si. selaku ketua Program Studi Pendidikan Matematika.
2. Bapak Hongki Julie. selaku dosen Pembimbing Skripsi yang telah memberikan bimbingan, nasehat, dan saran-saran sehingga dapat tersusun skripsi ini.
3. Bapak Narjo dan Bapak Sugeng yang telah membantu saya untuk terselesainya skripsi ini.
4. Bapak dan Ibu dosen yang telah memberikan ilmu kepada penulis selama penulis kuliah di universitas sanata dharma ini.

5. Semua Mahasiswa pendidikan matematika atas semua pelajaran yang begitu berharga.

Kemudian atas segala bantuan dan pengorbanan yang telah penulis terima berupa apapun dari rekan-rekan semua, sekali lagi penulis mengucapkan terima kasih. Semoga amal rekan-rekan semua mendapat imbalan yang melimpah dari Tuhan Yang Maha Esa.

Penulis menyadari dan mengakui bahwa skripsi ini lebih dari sempurna, maka segala kritik dan saran yang bersifat membangun demi perbaikan dan kesempurnaan dari skripsi ini, penulis menerimanya dengan senang hati.

Yogyakarta,

Penulis

(Catarina Ika Wahyuni)

DAFTAR ISI

BAB 1

PENDAHULUAN

A. Latar Belakang Masalah

Fenomena antrian merupakan hal yang sering terjadi dalam kehidupan sehari-hari. Hal ini disebabkan oleh adanya perbedaan antara banyaknya pelanggan yang membutuhkan pelayanan dengan banyaknya sumber pelayanan itu sendiri. Sebuah sistem antrian adalah suatu kumpulan dari pelanggan, pelayan, dan aturan yang mengatur kedatangan para pelanggan dan pemrosesan masalahnya. Sebuah antrian terjadi jika pelanggan yang tiba di sebuah sistem pelayanan tidak bisa segera mendapatkan pelayanan karena pelanggan yang lain sedang dilayani. Pelanggan ini harus menunggu sampai pelanggan yang lain itu selesai dilayani, dengan menggunakan peraturan pelayanan yaitu pertama datang pertama dilayani. Dalam model-model antrian, kedatangan pelanggan dan waktu pelayanan diringkaskan dalam bentuk distribusi yang umumnya disebut distribusi kedatangan dan distribusi waktu pelayanan. Pada tulisan ini kedatangan pelanggan ke pusat pelayanan mengikuti proses Poisson dan waktu pelayanannya berdistribusi eksponensial. Kedatangan pelanggan ke pusat pelayanan dapat tak terbatas dan dapat terbatas, sedangkan sumber pemanggilannya pasti tak terbatas. Begitu juga dengan jumlah pelayannya bisa satu atau lebih dari satu atau tak terbatas dengan sistem pelayanan pararel.

Tujuan mempelajari sistem-sistem antrian ini adalah untuk menentukan ciri-ciri yang mengukur kinerja sebuah sistem. Yang termasuk ukuran kinerja sebuah sistem adalah rata-rata jumlah pelanggan dalam sistem dinotasikan L, rata-rata jumlah pelanggan menunggu dalam antrian dinotasikan L_Q, rata-rata waktu yang dihabiskan seorang pelanggan dalam sistem dinotasikan W, dan rata-rata waktu yang dihabiskan seorang pelanggan menunggu dalam antrian dinotasikan W_Q.

Dari perbedaan banyaknya pelayan dan banyaknya pelanggan maksimum dalam sistem antrian tersebut terdapat beberapa sistem antrian yaitu sistem antrian dengan pelayan tunggal dan kedatangan pelanggan tak terbatas yang dinotasikan (M/M/1) : (GD/∞/∞), sistem antrian dengan pelayan tunggal dan N pelanggan yang diperbolehkan dalam sistem yang dinotasikan (M/M/1) : (GD/N/∞), sistem antrian dengan c pelayan dan kedatangan pelanggan tak terbatas yang dinotasikan (M/M/c) : (GD/∞/∞), sistem antrian dengan c pelayan dan N pelanggan yang diperbolehkan dalam sistem yang dinotasikan (M/M/c) : (GD/N/∞), dan sistem antrian dengan pelayan tak terbatas dan kedatangan pelanggan tak terbatas yang dinotasikan (M/M/∞) : (GD/∞/∞).

B. Rumusan Masalah

1. Bagaimanakah ukuran kinerja sistem yaitu L, L_Q, W, dan W_Q dalam sistem antrian dengan pelayan tunggal dan kedatangan pelanggan tak terbatas ?

2. Bagaimanakah ukuran kinerja sistem yaitu L, L_Q, W, dan W_Q dalam sistem antrian dengan pelayan tunggal dan N pelanggan yang diperbolehkan dalam sistem ?
3. Bagaimanakah ukuran kinerja sistem yaitu L, L_Q, W, dan W_Q dalam sistem antrian dengan c pelayan dan kedatangan pelanggan tak terbatas ?
4. Bagaimanakah ukuran kinerja sistem yaitu L, L_Q, W, dan W_Q dalam sistem antrian dengan c pelayan dan N pelanggan yang diperbolehkan dalam sistem ?
5. Bagaimanakah ukuran kinerja sistem yaitu L, L_Q, W, dan W_Q dalam sistem antrian dengan pelayan tak terbatas dan kedatangan pelanggan tak terbatas ?

C. Tujuan Penulisan

1. Mengetahui ukuran kinerja sistem yaitu L, L_Q, W, dan W_Q dalam sistem antrian dengan pelayan tunggal dan kedatangan pelanggan tak terbatas ?
2. Mengetahui ukuran kinerja sistem yaitu L, L_Q, W, dan W_Q dalam sistem antrian dengan pelayan tunggal dan N pelanggan yang diperbolehkan dalam sistem ?
3. Mengetahui ukuran kinerja sistem yaitu L, L_Q, W, dan W_Q dalam sistem antrian dengan c pelayan dan kedatangan pelanggan tak terbatas ?

4. Mengetahui ukuran kinerja sistem yaitu L, L_Q, W, dan W_Q dalam sistem antrian dengan c pelayan dan N pelanggan yang diperbolehkan dalam sistem ?
5. Mengetahui ukuran kinerja sistem yaitu L, L_Q, W, dan W_Q dalam sistem antrian dengan pelayan tak terbatas dan kedatangan pelanggan tak terbatas ?

D. Manfaat Penulisan

Menambah wawasan kepada penulis tentang penerapan proses Poisson dalam sistem antrian.

E. Sistematika Penulisan

BAB I : PENDAHULUAN

Bab ini membahas tentang latar belakang masalah, rumusan masalah, tujuan penulisan, manfaat penulisan, sistematika penulisan, dan metode penulisan.

BAB II : DASAR – DASAR TEORI PELUANG

Bab ini membahas tentang teori penunjang yang digunakan dalam pembahasan, diantaranya peluang, peubah acak dan distribusi peluang, dan beberapa distribusi yang penting.

BAB III : RANTAI MARKOV DENGAN INDEKS PARAMETER KONTINU

Bab ini membahas juga tentang teori penunjang yang digunakan dalam pembahasan pada bab IV, yaitu tentang proses Markov, rantai Markov dengan indeks parameter kontinu, dan hubungan antara proses Poisson dengan rantai Markov dengan indeks parameter waktu kontinu.

BAB IV : SISTEM ANTRIAN POISSON

Bab ini membahas tentang beberapa macam sistem antrian Poisson.

BAB V : PENUTUP

Bab ini berisi kesimpulan yang diperoleh dari pembahasan masalah dan saran untuk pembaca.

F. Metode Penulisan

Penulisan skripsi ini bersumber dari studi literatur, dengan cara mempelajari buku – buku acuan sebagai sumber informasi.

BAB II

DASAR – DASAR TEORI PELUANG

A. Peluang

Definisi 1 (ruang sampel)

Himpunan semua hasil yang mungkin dari suatu percobaan statistika disebut ruang sampel dan dinyatakan dengan lambang *T* (Walpole, 1995 : 2).

Contoh 1 : Percobaan : Melempar dua buah dadu,

Maka ruang sampel dari percobaan ini adalah T = { (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)}

Tiap hasil dalam ruang sampel disebut anggota dari ruang sampel atau biasa disebut titik sampel.

Definisi 2 (kejadian)

Suatu kejadian adalah himpunan bagian dari ruang sampel (Walpole, 1995 : 5).

Contoh 2 : Percobaan melempar dua buah dadu,

A : Kejadian munculnya mata dadu genap pada dadu pertama, Maka A = { (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)}

Definisi 3 (peluang suatu kejadian)

Peluang suatu kejadian A adalah jumlah bobot semua titik sampel yang termasuk A, Maka

0 = P(A) = 1, P(ø) = 0, dan P(T) = 1 (Walpole, 1995 : 22).

Untuk menentukan peluang suatu kejadian A, semua bobot titik sampel dalam A dijumlahkan. Jumlah ini dinamakan peluang A dan dinyatakan dengan P(A).

Teorema 1

Bila suatu percobaan dapat menghasilkan N macam hasil yang berkemungkinan sama, dan bila tepat sebanyak n dari hasil berkaitan dengan kejadian A, maka peluang kejadian A adalah

$$P(A) = \frac{n}{N}$$

Bukti

Dari hasil percobaan didapatkan N macam hasil yang berkemungkinan sama, N menyatakan banyaknya titik sampel dan dari definisi diketahui bahwa P(T)=1.

Misalkan setiap titik sampel diberi bobot a, maka

$$\underbrace{a + a + \dots\dots\dots + a}_{N\,suku} = 1$$

$$aN = 1$$

$$a = \frac{1}{N}$$

Diketahui bahwa banyaknya titik sampel dari kejadian A adalah sebanyak n, dan bobot dari tiap titik sampel tersebut juga sebesar a = $\frac{1}{N}$.

Maka peluang kejadian A

$$P(A) = \underbrace{\frac{1}{N} + \frac{1}{N} + \dots + \frac{1}{N}}_{n\,suku} = n\,\frac{1}{N} = \frac{n}{N}$$

Definisi 4 (peluang bersyarat)

Peluang bersyarat B bila A diketahui, dinyatakan dengan P(B|A), didefinisikan sebagai berikut :

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \text{ bila } P(A) > 0 \text{ (Walpole, 1995 : 33).}$$

Suatu kejadian B bersyarat terhadap kejadian A, jika terjadinya B hanya dapat berlangsung setelah kejadian A berlangsung. Peluang terjadinya suatu kejadian B bila diketahui bahwa kejadian A telah terjadi disebut peluang bersyarat B bila A diketahui dan dinyatakan dengan P(B|A).

Contoh 3

Peluang suatu penerbangan reguler berangkat tepat pada waktunya adalah 0.83, peluang penerbangan itu mendarat tepat pada waktunya adalah 0.92, dan peluang penerbangan itu berangkat dan mendarat tepat pada waktunya adalah 0.78. Hitunglah peluang bahwa suatu pesawat pada penerbangan itu (a) mendarat pada waktunya bila diketahui pesawat itu berangkat pada waktunya, dan (b) berangkat pada waktunya bila diketahui pesawat itu mendarat pada waktunya.

Jawab.

Misal : A : Pesawat mendarat tepat pada waktunya

D : Pesawat berangkat pada waktunya, maka

$P(A) = 0{,}92$

$P(B) = 0{,}83$

$P(A \cap B) = 0{,}78$

(a) Peluang bahwa pesawat mendarat tepat pada waktunya bila diketahui bahwa pesawat tersebut berangkat pada waktunya adalah

$$P(A|D) = \frac{P(D \cap A)}{P(D)}$$

$$= \frac{0.78}{0.83} = 0.94$$

(b) Peluang bahwa pesawat berangkat tepat pada waktunya bila diketahui bahwa pesawat itu mendarat pada waktunya adalah

$$P(D|A) = \frac{P(D \cap A)}{P(A)}$$

$$= \frac{0.78}{0.92} = 0.85$$

B. Peubah Acak dan Distribusi Peluang

Definisi 5 (peubah acak)

Peubah acak ialah suatu fungsi yang mengkaitkan suatu bilangan real dengan setiap unsur dalam ruang sampel (Walpole, 1995 : 51).

Contoh 4

Dua bola diambil satu demi satu tanpa dikembalikan dari suatu kantung berisi 4 bola merah dan 3 bola hitam. Bila peubah acak Y menyatakan banyak bola merah yang terambil maka tentukan nilai y yang mungkin dari peubah acak Y.

Jawab.

Kejadian	y
MM	2
MH	1
HM	1
HH	0

Definisi 6 (ruang sampel diskret)

Jika suatu ruang sampel mengandung titik sampel yang berhingga banyaknya atau sederetan anggota yang banyaknya sebanyak bilangan bulat, maka ruang sampel itu disebut ruang sampel diskret (Walpole, 1995 : 52).

Definisi 7 (ruang sampel kontinu)

Bila ruang sampel mengandung titik sampel yang tak berhingga banyaknya dan banyaknya sebanyak titik pada sutu garis lurus, maka ruang sampel itu disebut ruang sampel kontinu (Walpole, 1995 : 53).

Definisi 8 (peubah acak diskret dan kontinu)

Suatu peubah acak disebut peubah acak diskret bila ruang sampelnya diskret. Peubah acak disebut peubah acak kontinu bila ruang sampelnya kontinu.

Definisi 9 (distibusi peluang)

Himpunan pasangan terurut (x,f(x)) merupakan suatu distribusi peluang peubah acak diskret X bila, untuk setiap kemungkinan hasil x

1. f(x) = 0
2. $\sum_{x} f(x) = 1$
3. P(X=x) = f(x) (Walpole, 1995 : 54).

Contoh 5

Bila 50% mobil yang dijual agen bermesin diesel, cari rumus distribusi peluang banyaknya mobil bermesin diesel bagi ke 4 mobil berikutnya yang dijual oleh agen tersebut.

Jawab.

Karena peluang menjual mobil bermesin diesel (D) adalah 0,5 maka kemungkinan 0,5 yang lain adalah peluang menjual mobil bermesin bensin (B). Misal : peubah acak X menyatakan banyaknya mobil bermesin diesel yang berhasil dijual , dan mobil yang dijual sebanyak 4.

Misal

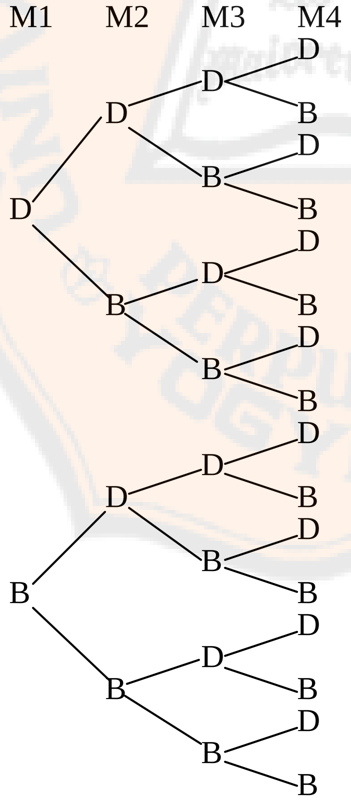
M1 = Mobil pertama yang dijual oleh agen

M2 = Mobil kedua yang dijual oleh agen

M3 = Mobil ketiga yang dijual oleh agen

M4 = Mobil keempat yang dijual oleh agen

Maka banyaknya titik sampel pada ruang sampel tersebut adalah



Ruang sampel	x
DDDD	4
DDDB	3
DDBD	3
DDBB	2
DBDD	3
DBDB	2
DBBD	2
DBBB	1
BDDD	3
BDDB	2
BDBD	2
BDBB	1
BBDD	2
BBDB	1
BBBD	1
BBBB	0

Banyaknya anggota ruang sampel T adalah 16, semua titik pada ruang sampel mempunyai peluang yang sama.

Kemungkinan nilai x dari X dan distribusi peluangnya diberikan

x	0	1	2	3	4
P(X=x)					

$f(2) = P(X=2) = \frac{6}{16}$ didapat dari $\frac{\binom{4}{2}}{16}$, dan cara ini juga digunakan untuk mendapatkan nilai f untuk x yang lain.

Secara umum, distribusi peluang f(x) = P(X = x) dirumuskan

$$f(x) = \frac{\binom{4}{x}}{16} \qquad \text{untuk } x = 0, 1, 2, 3, 4.$$

Definisi 10 (distribusi kumulatif)

Distribusi kumulatif F(x) suatu peubah acak diskret X dengan distribusi peluang f(x) dinyatakan oleh

F(x) = P(X = x) = $\sum_{t \le x} f(t)$ untuk $-\infty < x < \infty$ (Walpole, 1995 : 55).

Contoh 6

Tentukan distribusi kumulatif dari contoh 5 !

Jawab.

Dari contoh 5 diperoleh : f(0)=$\frac{1}{16}$, f(1) =$\frac{1}{4}$, f(2) = $\frac{3}{8}$, f(3) = $\frac{1}{4}$, dan f(4) = $\frac{1}{16}$, maka

F(0) = f(0)= $\frac{1}{16}$

F(1) = f(0) + f(1) = $\frac{5}{16}$

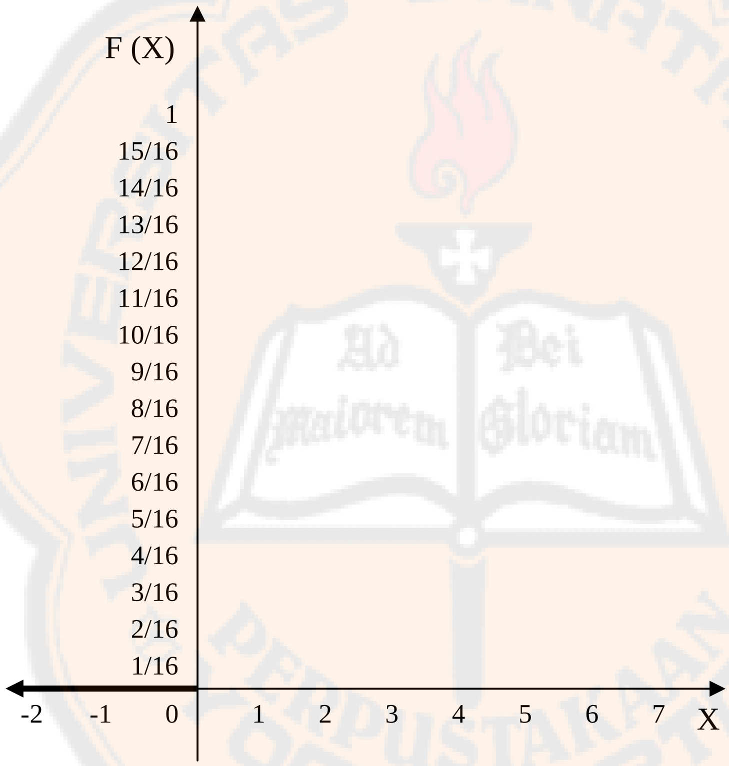
F(2) = f(0) + f(1) + f(2) = $\frac{11}{16}$

F(3) = f(0) + f(1) + f(2) + f(3) = $\frac{15}{16}$

F(4) = f(0) + f(1) + f(2) + f(3) + f(4) = 1

Sehingga

$$F(x) = \begin{cases} 0 & bila\, x < 0 \\ \dfrac{1}{16} & bila\, 0 \le x < 1 \\ \dfrac{5}{16} & bila\, 1 \le x < 2 \\ \dfrac{11}{16} & bila\, 2 \le x < 3 \\ \dfrac{15}{16} & bila\, 3 \le x < 4 \\ 1 & bila\, x \ge 4 \end{cases}$$



Jika himpunan semua nilai yang mungkin dari X tak berhingga banyaknya dan banyaknya sebanyak titik pada sepotong garis, maka fungsi dari nilai yang berbentuk bilangan dari peubah kontinu X ditulis f(x) dinamakan fungsi padat peluang dari X. Distribusi peluang kontinu tidak dapat disajikan dalam bentuk tabel. Karena peluang akan dinyatakan sebagai luas dan peluang merupakan bilangan positif maka fungsi padat haruslah seluruhnya terletak di atas sumbu x.

Definisi 11 (fungsi padat peluang)

Fungsi f adalah fungsi padat peluang peubah acak kontinu X, yang didefinisikan di atas himpunan semua bilangan real R, bila

1. f(x) = 0 untuk semua x $\in$ R.

2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

3. P (a < X < b) = $\int_{a}^{b} f(x)dx$ (Walpole, 1995 : 60).

Definisi 12 (distribusi kumulatif)

Distribusi kumulatif F(x) suatu peubah acak kontinu X dengan fungsi padat f dinyatakan oleh

F(x) = P(X = x) = $\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$ untuk $-\infty < x < \infty$ (Walpole, 1995 : 61).

Contoh 7

Suatu peubah acak kontinu X mempunyai fungsi padat f = ½, untuk 1 = x = 3. Hitunglah

a. P(2<X<2,5)

b. P(X=1,6)

c. F(x)

Jawab.

a. P(2<X<2,5) = $\int_{2}^{2,5} f(x)dx$

$$= \int_{2}^{2,5} \frac{1}{2} dx$$

$$= \frac{1}{2}x \Big|_{2}^{2,5}$$

$$= \frac{2,5}{2} - \frac{2}{2} = \frac{0,5}{2} = \frac{1}{4}$$

b. P(X=1,6) = $\int_{-\infty}^{1,6} f(x)\,dx$

$$= \int_{1}^{1,6} f(x)\,dx = \int_{1}^{1,6} \frac{1}{2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}x \Big|_{1}^{1,6} = \frac{1,6}{2} - \frac{1}{2} = \frac{0,6}{2} = 0,3$$

c. $F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x, & 1 \le x \le 3 \\ 1, & x \ge 3 \\ 0, & Untuk\ x\ yang\ lain \end{cases}$

Definisi 13 (nilai harapan atau rataan)

Misalkan X suatu peubah acak. Nilai harapan atau rataan dari peubah acak X adalah

μ = E(x) = $\sum_{x} xf(x)$, dengan f adalah fungsi distribusi peluang.

bila X peubah acak diskret, dan

μ = E(x) = $\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$, dengan f adalah fungsi padat peluang.

bila X peubah acak kontinu (Walpole, 1995 : 94).

Definisi 14 (variansi dan simpangan baku)

Misalkan X peubah acak dengan rataan μ. Variansi dari peubah acak diskrit X adalah

$\sigma^2 = E[(X-\mu)^2] = \sum_x (x-\mu)^2 f(x)$, dengan f adalah fungsi distribusi peluang.

Variansi dari peubah acak kontinu X adalah

$\sigma^2 = E[(X-\mu)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)dx$, dengan f adalah fungsi padat peluang.

Akar pangkat dua dari variansi peubah acak X, disebut simpangan baku X, dinotasikan dengan σ (Walpole, 1995 : 104).

Teorema 2

Variansi peubah acak X adalah

$\sigma^2 = E(X^2) - \mu^2$

Bukti.

Untuk peubah acak diskret X, maka

$\sigma^2 = \sum_x (x-\mu)^2 f(x) = \sum_x (x^2 - 2\mu x + \mu^2) f(x)$

$$= \sum_x x^2 f(x) - 2\mu \sum_x xf(x) + \mu^2 \sum_x f(x)$$

Karena $\mu = \sum_x xf(x)$ dan $\sum_x f(x) = 1$, maka

$$\sigma^2 = \sum_x x^2 f(x) - \mu^2 = E(X^2) - \mu^2$$

C. Beberapa Distribusi Yang Penting

1. Distribusi Poisson

Suatu percobaan Poisson atau biasa dikenal dengan sebutan proses Poisson memiliki sifat berikut :

a. Banyaknya hasil yang terjadi dalam suatu selang waktu atau daerah tertentu tidak terpengaruh oleh (bebas dari) apa yang terjadi pada selang waktu atau daerah lain yang terpisah. Dalam hubungan ini proses Poisson dikatakan tak punya ingatan.

b. Peluang terjadinya suatu hasil (tunggal) dalam selang waktu yang sangat pendek atau dalam daerah yang kecil sebanding dengan panjang selang waktu atau besarnya daerah dan tidak tergantung pada banyaknya hasil yang terjadi di luar selang waktu atau daerah tersebut.

c. Peluang terjadinya lebih dari satu hasil dalam selang waktu yang pendek atau daerah yang sempit itu dapat diabaikan. (Walpole, 1995 : 152).

Definisi 15 (distribusi Poisson)

Distribusi peluang dari peubah acak Poisson X, yang menyatakan banyaknya sukses yang terjadi dalam suatu selang waktu atau daerah tertentu dinyatakan dengan t, diberikan oleh

$$P(x;\ \lambda t) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^x}{x!} \qquad x = 0, 1, 2, \ldots$$

λt menyatakan rata-rata banyaknya sukses yang terjadi per satuan waktu atau daerah tersebut dan e = 2,71828… (Walpole, 1995 : 152).

Contoh 8

Disuatu simpang jalan rata-rata terjadi 3 kecelakaan tiap minggu. Berapakah peluang pada suatu minggu tertentu

a. Tepat 5 kecelakaan akan terjadi?
b. Kurang dari 3 kecelakaan akan terjadi ?
c. Paling sedikit 2 kecelakaan akan terjadi ?

Jawab.

a. Dengan menggunakan distribusi poisson untuk x = 5 dan $\lambda t = 3$, dari table L.2 diperoleh

$$P(5;3) = \frac{e^{-3}(3)^5}{5!} = \sum_{x=0}^{5} P(x;3) - \sum_{x=0}^{4} P(x;3)$$

$$= 0{,}9161 - 0{,}8163$$

$$= 0{,}1008$$

b. $P(X<3) = \sum_{x=0}^{2} P(x;3)$

$$= 0{,}4232$$

c. P(X=2) = 1 – P(X<2)

$= 1 - \sum_{x=0}^{1} P(x;3)$

= 1 – 0,1191

= 0,8009

Teorema 3

Rataan dan variansi distribusi Poisson P(x; λt) keduanya sama dengan λt (Walpole, 1995 : 153).

Bukti

Misal : $\mu = \lambda$t.

$$E(x) = \sum_{x=0}^{\infty} x \frac{e^{-\mu}\mu^{x}}{x!} = \sum_{x=1}^{\infty} x \frac{e^{-\mu}\mu^{x}}{x!}$$

$$= \mu \sum_{x=1}^{\infty} \frac{e^{-\mu}\mu^{x-1}}{(x-1)!}$$

Sekarang misalkanlah y = x-1 sehingga diperoleh

$$E(x) = \mu \sum_{y=0}^{\infty} \frac{e^{-\mu}\mu^{y}}{y!} = \mu,$$

Karena

$\sum_{y=0}^{\infty} \frac{e^{-\mu}\mu^{y}}{y!} = \sum_{y=0}^{\infty} P(y;\mu) = 1$, maka E(x) = $\mu = \lambda$t.

Mula-mula dicari

$$E[X(X-1)] = \sum_{x=0}^{\infty} x(x-1)\frac{e^{-\mu}\mu^{x}}{x!} = \sum_{x=2}^{\infty} x(x-1)\frac{e^{-\mu}\mu^{x}}{x!}$$

$$= \mu^{2} \sum_{x=2}^{\infty} \frac{e^{-\mu}\mu^{x-2}}{(x-2)!}$$

Masukkan y = x-2, maka diperoleh

$$E[X(X-1)] = \mu^2 \sum_{y=0}^{\infty} \frac{e^{-\mu}\mu^y}{y!} = \mu^2$$

Jadi,

$$\sigma^2 = E[X(X-1)] + \mu + \mu^2$$

$$= \mu^2 + \mu - \mu^2$$

$$= \mu$$

$$= \lambda t.$$

2. Distribusi Eksponensial

Suatu peubah acak kontinu X dikatakan menjadi distribusi eksponensial dengan parameter λ, $\lambda > 0$, jika mempunyai fungsi padat peluang =

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

dengan fungsi distribusi komulatifnya =

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)\, dy$$

$$= \int_{-\infty}^{0} f(y)\, dy + \int_{0}^{x} f(y)\, dy$$

$$= \int_{-\infty}^{0} 0\, dy + \int_{0}^{x} \lambda e^{-\lambda y}\, dy$$

$$= -e^{-\lambda y}\Big|_{0}^{x}$$

$$= -e^{-\lambda x} - (-1)$$

$$= 1 - e^{-\lambda x}$$

Jadi $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)\, dy = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$

Rataan dari distribusi eksponensial adalah =

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{0} xf(x)\, dx + \int_{0}^{\infty} xf(x)\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{0} x.0\, dx + \int_{0}^{\infty} \lambda x e^{-\lambda x}\, dx$$

$$= 0 + -x e^{-\lambda x} \Big|_{0}^{\infty} + \int_{0}^{\infty} e^{-\lambda x}\, dx$$

$$= \lim_{\alpha \to \infty} -x e^{-\lambda x} \Big|_{0}^{\alpha} + \lim_{\alpha \to \infty} \int_{0}^{\alpha} e^{-\lambda x}\, dx$$

$$= \lim_{\alpha \to \infty} -\alpha\, e^{-\lambda \alpha} + \lim_{\alpha \to \infty} 0$$

$$+ \lim_{\alpha \to \infty} \left(-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \Big|_{0}^{\alpha}\right)$$

$$= 0 + 0 - \frac{1}{\lambda}\left(\lim_{\alpha \to \infty} e^{-\lambda \alpha} - \lim_{\alpha \to \infty} 1\right)$$

$$= -\frac{1}{\lambda}(0 - 1) = \frac{1}{\lambda}$$

Variansi dari distribusi eksponensial adalah =

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\, dx - \frac{1}{\lambda^2}$$

$$= \int_{-\infty}^{0} x^2 f(x)\,dx + \int_{0}^{\infty} x^2 f(x)\,dx - \frac{1}{\lambda^2}$$

$$= \int_{-\infty}^{0} x^2\, 0\,dx + \int_{0}^{\infty} x^2 \lambda x e^{-\lambda x}\,dx - \frac{1}{\lambda^2}$$

$$= 0 - x^2 e^{-\lambda x} \Big|_0^{\infty} + \int_{0}^{\infty} e^{-\lambda x}\, 2x\,dx - \frac{1}{\lambda^2}$$

$$= \lim_{\alpha \to \infty} - x^2 e^{-\lambda x} \Big|_0^{\alpha} + 2\,(-\frac{x}{\lambda} e^{-\lambda x} \Big|_0^{\infty} + \frac{1}{\lambda} \int_{0}^{\infty} e^{-\lambda x}\,dx\,) - \frac{1}{\lambda^2}$$

$$= 0 + 2\,(\lim_{\alpha \to \infty} -\frac{x}{\lambda} e^{-\lambda x} \Big|_0^{\alpha} + \frac{1}{\lambda}(-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \Big|_0^{\infty})) - \frac{1}{\lambda^2}$$

$$= 2\,(0 - \frac{1}{\lambda^2} e^{-\lambda x} \Big|_0^{\infty}) - \frac{1}{\lambda^2}$$

$$= -\frac{2}{\lambda^2}(\lim_{\alpha \to \infty} e^{-\lambda x} \Big|_0^{\alpha}) - \frac{1}{\lambda^2}$$

$$= -\frac{2}{\lambda^2}\,(0 - 1) - \frac{1}{\lambda^2}$$

$$= \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

BAB III

RANTAI MARKOV

DENGAN INDEK PARAMETER KONTINU

A. Proses Markov

Definisi 1 (Proses stokastik)

Proses stokastik adalah himpunan dari peubah acak {X (t), t $\in$ T}, dengan t adalah anggota himpunan indeks parameter T dan X (t) adalah peubah acak. Indeks t sering diinterpretasikan sebagai waktu dan keadaan dari proses pada waktu t adalah X (t). Saat T adalah himpunan indeks parameter diskret maka proses stokastik disebut sebagai proses stokastik dengan indeks parameter diskret. Jika T adalah himpunan indeks parameter kontinu maka proses stokastik disebut sebagai proses stokastik dengan indeks parameter kontinu (Ross, 1996 : 41).

Definisi 2 (memoryless)

Suatu peubah acak X dikatakan tidak punya ingatan atau memoryless jika $P(X > s + t \mid X > t) = P(X > s)$ untuk semua s, t = 0, atau $P(X>s + t) = P(X>s)$ $P(X>t)$ atau $F(s + t) = F(s)\, F(t)$(Ross, 1996 : 35).

Definisi 3 (Proses menghitung)

Suatu proses stokastik {N(t), t=0} dikatakan sebagai proses menghitung jika N(t) menunjukkan banyaknya kejadian yang terjadi sampai dengan waktu t. Sebuah proses menghitung harus memenuhi beberapa syarat berikut ini :

(i) Nilai N(t) = 0.

(ii) Nilai N(t) adalah bulat

(iii) Jika s < t maka N(s) = N(t).

(iv) Untuk s < t, N(t) – N(s) menyatakan banyaknya kejadian yang terjadi dalam interval (s,t] (Ross, 1996 : 59).

Definisi 4 (kenaikan bebas)

Suatu proses menghitung dikatakan mempunyai kenaikan bebas jika banyaknya kejadian yang terjadi dalam interval waktu yang saling terpisah adalah saling bebas (Ross, 1996 : 59).

Definisi 5 (kenaikan stasioner)

Sebuah proses menghitung dikatakan mempunyai kenaikan stasioner jika distribusi dari banyaknya kejadian yang terjadi dalam interval waktu tertentu hanya tergantung pada panjang interval waktu tersebut. Dengan kata lain, sebuah proses menghitung mempunyai kenaikan stasioner jika banyaknya kejadian yang terjadi dalam interval waktu (t_1 + s, t_2 + s] (yaitu N(t_2 + s) - N(t_1 + s)) mempunyai distribusi yang sama dari banyaknya kejadian yang terjadi dalam interval waktu (t_1, t_2] (yaitu N(t_2) – N(t_1)) untuk semua $t_1 < t_2$, dan s>0 (Ross, 1996 : 59).

Contoh 1

Misalkan banyaknya kejadian sampai waktu t_1 adalah 5 dan banyaknya kejadian sampai waktu t_2 adalah 10, maka banyaknya kejadian yang terjadi dalam interval waktu $(t_1, t_2]$ adalah 10 – 5 = 5. Jika pada selang waktu s terdapat 6 kejadian, maka pada waktu t_1 + s terdapat 5 + 6 = 11 kejadian dan pada waktu t_2 + s terdapat 10 + 6 = 16 kejadian. Sehingga dapat dihitung banyaknya kejadian yang terjadi dalam interval waktu (t_1 + s, t_2 + s] adalah 16 – 11 = 5.

Dapat dilihat bahwa banyaknya kejadian yang terjadi dalam interval waktu (t_1 + s, t_2 + s] (yaitu N(t_2 + s) - N(t_1 + s)) mempunyai distribusi yang sama dari banyaknya kejadian yang terjadi dalam interval waktu $(t_1, t_2]$ (yaitu N(t_2) – N(t_1))

Definisi 6 (Proses Poisson)

Proses menghitung {N(t), t=0} dikatakan sebagai proses Poisson dengan parameter λ, untuk $\lambda > 0$, jika :

(i) Nilai N(0) = 0

(ii) Mempunyai kenaikan bebas

(iii) Banyaknya kejadian dalam interval waktu t berdistribusi Poisson dengan parameter λt. Atau dengan kata lain untuk semua s, t = 0

$$P(N(t+s) - N(s) = n) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!}, \quad n = 0, 1, \ldots \quad \text{(Ross, 1996 : 59).}$$

Definisi 7 (o(h))

Fungsi f dikatakan sebagai o(h) jika $\lim_{h \to 0} \frac{f(h)}{h} = 0$ (Ross, 1996 : 60).

Definisi 8 (Proses Poisson)

Proses menghitung {N(t), t=0} dikatakan sebagai proses Poisson dengan parameter λ, $\lambda > 0$, jika :

(i) Nilai N(0) = 0

(ii) Mempunyai kenaikan stasioner dan kenaikan bebas

(iii) P(N(h) = 1) = λ h + o(h)

(iv) P(N(h) = 2) = o(h) (Ross, 1996 : 60).

Teorema 1

Definisi 6 dan 8 adalah ekivalen.

Bukti (Lihat Ross, 1996 : 61).

Definisi 9 (waktu antar kedatangan)

Misal : { X_n , n = 1} adalah proses Poisson, dan misalkan X_1 menyatakan waktu sampai terjadi kejadian pertama. Selanjutnya , untuk n > 1, misalkan X_n menyatakan waktu antara kejadian ke-(n-1) dan kejadian ke-n, maka barisan { X_n , n = 1}disebut barisan waktu antar kedatangan (Ross, 1996 : 64).

Kejadian { X_1 > t} bisa terjadi bila dan hanya bila tidak ada kejadian dari proses Poisson yang terjadi pada interval [0,t], dengan demikian

$$P(X_1 > t) = P(N(t) = 0) = e^{-\lambda t}$$

Karena P(X_1 > t) = $e^{-\lambda t}$ dan $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)$ = 1, maka P(X_1 < t) = $F_{X_1}(t)$ = 1 - $e^{-\lambda t}$.

Perhatikan bahwa $F_{X_1}(t)$ adalah distribusi kumulatif dari suatu peubah acak X_1 yang berdistribusi eksponensial. Jadi, X_1 berdistribusi eksponensial dengan parameter λ.

Perhatikan bahwa, P(X_2 > t| X_1 = s) = P(0 kejadian dalam (s,s+t] | X_1 =s)

= P(0 kejadian dalam (s,s+t])

= $e^{-\lambda t}$, maka

dapat disimpulkan bahwa X_2 adalah peubah acak yang berdistribusi eksponensial dengan parameter λ dan X_2 bebas terhadap X_1 karena waktu antar kedatangan mempunyai kenaikan bebas.

Dengan jalan yang sama dapat ditunjukkan bahwa X_1, X_2, X_3, …. , X_n, …. adalah barisan peubah acak yang berdistribusi eksponensial dengan parameter λ. Jadi peubah-peubah acak X_1, X_2, X_3, …. , X_n, ….Merupakan peubah-peubah acak yang saling bebas dan berdistribusi eksponensial dengan parameter λ.

B. Rantai Markov dengan indeks parameter kontinu

Definisi 10 (rantai Markov dengan indeks parameter diskrit)

Misal (X_n, n = 0, 1,…) adalah proses stokastik yang mempunyai ruang keadaan berupa himpunan bilangan atau terbilang, X_n = i menyatakan pada waktu n proses tersebut berada di keadaan i, dan mempunyai sifat untuk setiap keadaan i_0, i_1, … , i_{n-1}, i_n, dan j untuk setiap n = 0 berlaku

P(X_{n+1} = j | $X_0 = i_0$, $X_1 = i_1$, X_{n-1} = i_{n-1} , …. X_n = i)

= P(X_{n+1} = j | X_n = i), maka proses ini disebut Rantai Markov dengan indeks parameter diskrit. Selanjutnya P(X_{n+1} = j | X_n = i) dinotasikan dengan P_{ij} (Ross, 1996 : 163).

Definisi 11 (peluang transisi stasioner)

Peluang bersyarat P(X_{n+1} = j | X_n = i) dinotasikan dengan P_{ij} yang biasa disebut peluang transisi adalah peluang bahwa rantai Markov berpindah dari keadaan i pada waktu n ke keadaan j pada waktu n+1. Jika peluang transisi rantai Markov ini mempunyai nilai yang sama untuk setiap n maka dikatakan bahwa rantai Markov mempunyai peluang transisi stasioner. (www.google.com)

Berdasarkan sifat – sifat ruang keadaan dan indeks parameter proses Markov dapat dikelompokkan sebagai berikut :

		Ruang keadaan	
		Diskret	Kontinu
Indeks parameter	Diskret	Rantai Markov dengan indeks parameter diskret	Proses Markov dengan indeks parameter diskret
	Kontinu	Rantai Markov dengan indeks parameter kontinu	Proses Markov dengan indeks parameter kontinu

Definisi 12 (matrik transisi)

Jika sebuah rantai Markov memiliki *k* keadaan yang mungkin, yaitu 1, 2, ….., *k*, maka peluang bahwa sistem itu berada pada keadaan j pada sebarang pengamatan sesudah sistem itu berada pada keadaan i pada pengamatan sebelumnya dinotasikan dengan P_{ij} dan disebut peluang transisi dari keadaan i ke keadaan j.

Matrik P = [P_{ij}] disebut matrik transisi dari rantai Markov (Howard, 1988 : 72).

Misalnya, dalam rantai Markov dengan tiga keadaan, matrik transisi mempunyai bentuk

$$\begin{array}{cc} \text{Keadaan sebelumnya} & \\ \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} & \\ \begin{bmatrix} P_{11} & P_{21} & P_{31} \\ P_{12} & P_{22} & P_{32} \\ P_{13} & P_{23} & P_{33} \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \ \text{Keadaan baru} \end{array}$$

Jika P = [P_{ij}] adalah matrik transisi dari rantai Markov dengan *k* keadaan, maka untuk setiap j harus memenuhi :

$$P_{1j} + P_{2j} + \ldots + P_{kj} = 1 , \qquad j = 1,2, \ldots, k.$$

Contoh 2

Sebuah persewaan mobil memiliki tiga lokasi persewaan, yang kita tandai sebagai lokasi 1, 2, 3. Seorang pelanggan dapat menyewa mobil dari salah satu dari ketiga lokasi dan dapat mengembalikan mobil tersebut ke salah satu diantara ketiga lokasi. Pimpinan perusahaan mendapatkan bahwa para pelanggan mengembalikan mobil-mobil tersebut ke berbagai lokasi menurut peluang sebagai berikut :

Disewa dari lokasi

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 0,8 & 0,1 & 0,1 \\ 0,3 & 0,2 & 0,5 \\ 0,2 & 0,6 & 0,2 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \end{array} \qquad \text{Dikembalikan ke lokasi}$$

Matrik ini adalah matrik transisi dari sistem yang ditinjau sebagai sebuah rantai Markov karena jumlah peluang setiap baris dari matrik tersebut sama dengan 1. Yaitu : (0.8 + 0,1 + 0,1 = 1), (0,3 + 0,2 + 0,5 = 1), (0,2 + 0,6 + 0,2 = 1).

Definisi 13 (rantai Markov dengan Indeks Parameter Kontinu)

Misalkan $\{X(t),\ t=0\}$ adalah suatu proses stokastik dengan indeks parameter kontinu dan nilai-nilai dari X(t) adalah berhingga dan berada dalam himpunan bilangan bulat non negatif maka $\{X(t),\ t = 0\}$adalah rantai Markov dengan indeks parameter kontinu jika untuk semua s, t = 0 dan i, j, x(u) adalah bilangan bulat non negatif dimana $0 \le u \le s$, berlaku :

$$P\ (\ X(t + s) = j \mid X(s) = i,\ X(u) = x(u),\ 0 \le u \le s\ )$$

= P(X(t + s) = j | X(s) = i)(Ross, 1996 : 231).

Dengan kata lain rantai Markov dengan indeks parameter kontinu adalah suatu proses stokastik yang mempunyai sifat Markovian dengan distribusi bersyarat dari keadaan yang akan datang X(t + s) bila diketahui keadaan sekarang X(s) dan keadaan sebelumnya X(u), 0 ≤ u ≤ s hanya bergantung terhadap keadaan saat ini X(s) dan tidak bergantung terhadap keadaan yang lalu X(u). Jika P (X(t + s) = j | X(s) =i) adalah bebas terhadap s, maka rantai Markov waktu kontinu mempunyai peluang transisi stasioner. Dalam bahasan ini semua rantai Markov waktu kontinu dianggap mempunyai peluang transisi stasioner.

Misal : suatu rantai Markov dengan indeks parameter kontinu masuk ke keadaan i pada sembarang waktu 0, dan proses tidak meninggalkan keadaan i (tidak terjadi transisi) selama s satuan waktu. Berapa peluang bahwa proses tidak meninggalkan keadaan i selama t waktu ke depan ? Untuk menjawab pertanyaan ini, perhatikan kedudukan proses saat berada dalam keadaan i pada waktu s. berdasarkan sifat Markovian dipenuhi bahwa peluang proses meninggalkan keadaan i selama interval waktu [s, s + t] adalah peluang tidak bersyarat proses berada dalam keadaan i untuk sekurang–kurangnya t satuan waktu. Jika τ_i menyatakan lamanya waktu proses berada dalam keadaan i sebelum membuat transisi menuju keadaan yang berbeda maka :

$$P(\tau_i > s + t \mid \tau_i > s) = P(\tau_i > t)$$

Untuk semua s, t = 0, peubah acak τ_i bersifat memoryless.

Sifat – sifat suatu proses stokastik pada setiap waktu ia masuk keadaan i adalah :

1. Lama waktu suatu proses berada dalam keadaan i sebelum ia membuat transisi menuju keadaan yang berbeda berdistribusi eksponensial, misal dengan parameter λ_i
2. Saat proses meninggalkan state i kemudian masuk dalam keadaan j dengan peluang P_{ij}. Peluang transisi P_{ij} memenuhi suatu kondisi

$$\sum_{i \neq j} P_{ij} = 1$$

C. **Hubungan antara Proses Poisson dengan Rantai Markov dengan Indeks parameter kontinu**

Lema 1 :

Misal : τ_i menyatakan lamanya waktu proses berada dalam keadaan i sebelum membuat transisi menuju keadaan yang berbeda, maka $P(\tau_i > s+t \mid \tau_i > s) = P(\tau_i > t)$, $s, t \geq 0$ dan peubah acak τ_i memoryless dan berdistribusi eksponensial dengan parameter λ.

Bukti :

$$P(\tau_i > s+t \mid \tau_i > s) = \frac{P(\tau_i > s+t \mid \tau_i > s)}{P(\tau_i > s)}$$

$$= \frac{P(\tau_i > s+t)}{P(\tau_i > s)}$$

$$= \frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda s}}$$

$$= e^{-\lambda t} = P(\tau_i > t)$$

Jadi, τ_i memoryless dan berdistribusi eksponensial dengan parameter λ.

Lema diatas memberikan jalan untuk mengkonstruksi Rantai Markov dengan indeks parameter waktu kontinu. Suatu proses stokastik $\{X(t), t \geq 0\}$ merupakan Rantai Markov dengan indeks parameter waktu kontinu bila untuk setiap transisi ke keadaan i mempunyai sifat sebagai berikut :

1. Lama waktu proses berada dalam keadaan i sebelum membuat transisi menuju keadaan yang berbeda berdistribusi eksponensial, misal dengan parameter λ_i.
2. Saat proses meninggalkan keadaan i kemudian masuk ke keadaan j dengan peluang P_{ij}. Peluang transisi P_{ij} memenuhi suatu kondisi

$$\sum_{i \neq j} P_{ij} = 1$$

Rantai Markov dengan indeks parameter waktu kontinu adalah suatu proses stokastik yang bergerak atau bertransisi dari suatu keadan ke keadaan yang lain sesuai dengan rantai Markov dengan indeks parameter waktu diskrit. Tetapi lamanya waktu yang dibutuhkan untuk setiap keadaan bertransisi ke keadaan lain berdistribusi eksponensial. Perlu diingat bahwa lamanya waktu yang dibutuhkan proses tinggal di keadaan i dan ke keadaan berikutnya merupakan peubah acak yang saling bebas.

Pada rantai Markov dengan indeks parameter waktu kontinu, waktu berada di suatu keadaan i sebut τ_i, sebelum bertransisi ke keadaan lainnya adalah peubah acak yang berdistribusi eksponensial dan memoryles. Hal ini analog dengan waktu antar kedatangan pada proses Poisson yang juga berdistribusi eksponensial. Analogi ini disebabkan karena terjadinya transisi dari suatu keadaan ke keadaan lainnya dalam Rantai Markov dengan indeks parameter waktu kontinu merupakan suatu kejadian dalam proses Poisson.

Dengan demikian, model Markov yang dibangun berdasarkan Rantai Markov dengan indeks parameter waktu kontinu merupakan gabungan dari beberapa proses Poisson. Artinya untuk setiap pasangan keadaan yang bertransisi dalam selang waktu t atau panjang t dalam model Markov merupakan proses Poisson dengan parameter tertentu.

BAB IV

SISTEM ANTRIAN POISSON

Antrian dengan gabungan kedatangan dan kepergian dalam tulisan ini dibatasi pada jalur antrian di mana para pelanggan dilayani oleh c pelayan yang pararel sehingga c pelanggan dapat dilayani secara bersamaan. Notasi yang sesuai untuk meringkaskan karakteristik dari antrian pararel ditetapkan dengan format sebagai berikut :

$$(a/b/c) : (d/e/f)$$

Keterangan :

a = distribusi kedatangan

b = distribusi waktu pelayanan (atau keberangkatan)

c = jumlah pelayan pararel ($c = 1, 2, \ldots, \infty$)

d = peraturan pelayanan

e = jumlah maksimum yang diijinkan dalam sistem (dalam antrian + dalam pelayanan)

f = ukuran sumber pemanggilan

notasi baku tersebut mengganti simbol a dan b untuk kedatangan dan keberangkatan sebagai berikut :

M = Markov atau kedatangan pelanggan mengikuti sebuah proses Poisson.

GD = peraturan pelayanan.

Contoh 1

$(M/M/7) : (GD/N/\infty)$

Notasi di atas memiliki kedatangan Poisson, waktu pelayanan eksponensial, dan 7 pelayanan pararel. GD berarti peraturan pelayanan dimana pada sistem antrian yang di bahas disini mengikuti peraturan pelayanan *first come, first served* (FCFS) yaitu pertama datang pertama dilayani. Pada sistem ini (antrian + pelayanan) hanya dapat menampung maksimum N pelanggan, dan sumber yang menghasilkan para pelanggan yang datang memiliki kapasitas tak hingga.

Setelah peluang untuk n pelanggan dalam sistem sudah ditentukan, dapat digunakan untuk menghitung ukuran – ukuran steady-state dari kinerja. Yang termasuk ukuran – ukuran steady-state dari kinerja adalah :

L = rata-rata jumlah pelanggan dalam sistem

L_Q = rata-rata jumlah pelanggan menunggu dalam antrian

W = rata-rata waktu yang dihabiskan seorang pelanggan dalam sistem

W_Q = rata-rata waktu yang dihabiskan seorang pelanggan menunggu dalam antrian

Definisi 1 (rata-rata jumlah pelanggan dalam sistem dan rata-rata jumlah pelanggan menunggu dalam antrian)

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} n\, p_n$$

$$L_Q = \sum_{n=c+1}^{N} (n-c)P_n \quad \text{(Hamdy, 1987 : 190).}$$

Definisi 2 (laju kedatangan rata-rata efektif)

$$\lambda_{eff} = \sum_{n=0}^{N} \lambda_n p_n \text{ (Hamdy, 1987 : 190).}$$

Definisi 3 (rata-rata waktu yang dihabiskan seorang pelanggan dalam sistem dan rata-rata waktu yang dihabiskan seorang pelanggan menunggu dalam antrian)

$$W = \frac{L}{\lambda_{eff}}$$

$$W_Q = \frac{L_Q}{\lambda_{eff}}$$

$$W = W_Q + \frac{1}{\mu} \text{ (Hamdy, 1987 : 190).}$$

Definisi 4 (rata-rata jumlah pelanggan dalam sistem)

$$L = L_Q + \frac{\lambda_{eff}}{\mu} \text{(Hamdy, 1987 : 191).}$$

Banyak perbedaan sistem-sistem dan struktur-struktur antrian yang terdapat dalam kehidupan sehari-hari. Perbedaan-perbedaan dalam jumlah antrian, fasilitas pelayanan, dan hubungan-hubungan yang terjadi dapat menghasilkan bentuk/susunan yang bervariasi. Beberapa sistem antrian akan dibahas di bawah ini.

A. Sistem antrian (M/M/1) : (GD/∞/∞)

Pada sistem antrian ini, diasumsikan pelanggan datang ke suatu fasilitas pelayanan dengan 1 pelayan, dimana kedatangan dan pelayanan membentuk proses Poisson dengan laju kedatangan λ dan laju pelayanan μ dengan disiplin antrian yang pertama datang pertama dilayani (FCFS). Dalam bahasan sebelumnya dapat disimpulkan bahwa jika laju kedatangan merupakan proses Poisson maka waktu antar kedatangan berdistribusi eksponensial.

Fungsi padat peluang dari waktu antar kedatangan X_n dan waktu pelayanan S_n untuk sistem antrian M/M/1 adalah :

$$f(x_n) = \lambda e^{-\lambda t}$$

$$f(s_n) = \mu e^{-\mu t}$$

Dengan $\frac{1}{\lambda}$ adalah rataan waktu antar kedatangan dan $\frac{1}{\mu}$ rataan waktu pelayanan.

Asumsi untuk kasus ini adalah waktu antar kedatangan dan waktu pelayanan saling independent. Karena itu diperoleh

P (terjadi satu kedatangan saja dalam selang waktu h yang sangat kecil) = λh + o(h)

P (terjadi lebih dari satu kedatangan dalam selang waktu h) = o(h)

P (sebuah pelayanan selesai dalam suatu selang waktu h) = μh + o(h)

P (lebih dari satu pelayanan selesai dalam selang waktu h bila pada sistem terdapat lebih dari satu pelanggan) = o(h)

Akibatnya

λ h = P(satu pelanggan datang)

μ h = P(satu pelanggan pergi)

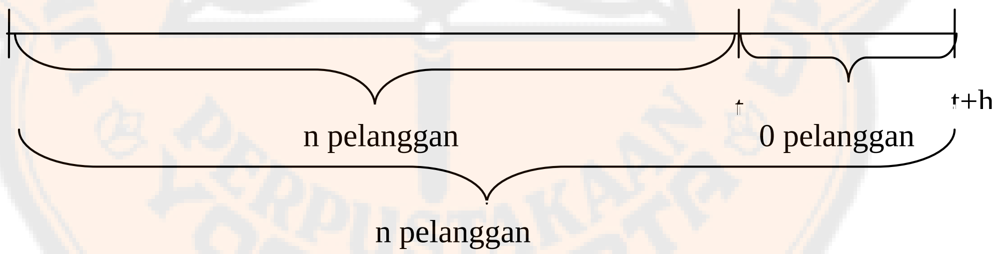
1 - λ h = P(tidak ada pelanggan yang datang)

1 - μ h = P(tidak ada pelanggan yang pergi)

Dalam sistem antrian $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ menunjukkan tingkat kesibukan pelayanan. Keadaan sistem adalah banyaknya pelanggan dalam sistem. Misal P_n *(t)* = P(ada n pelanggan dalam sistem pada waktu t), selanjutnya akan dihitung P_n *(t + h),* untuk $h \to 0$ atau P(ada n pelanggan pada waktu t+h), untuk $h \to 0$.

Kejadian-kejadian yang mungkin adalah :

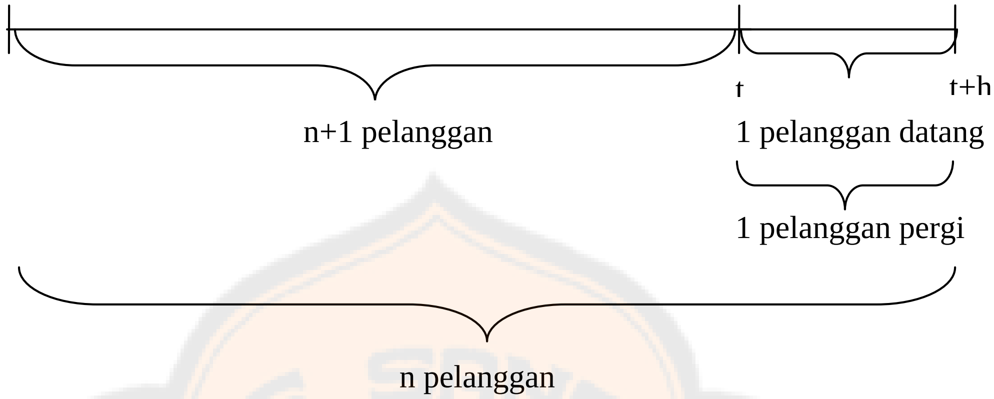
1). P_n *(t + h)* = P(n pelanggan dalam selang waktu t dan tidak ada pelanggan yang datang dan pergi dalam selang waktu (t, t + h])



$= P_n$ (t) [1 - λ h] [1 - μ h]

atau

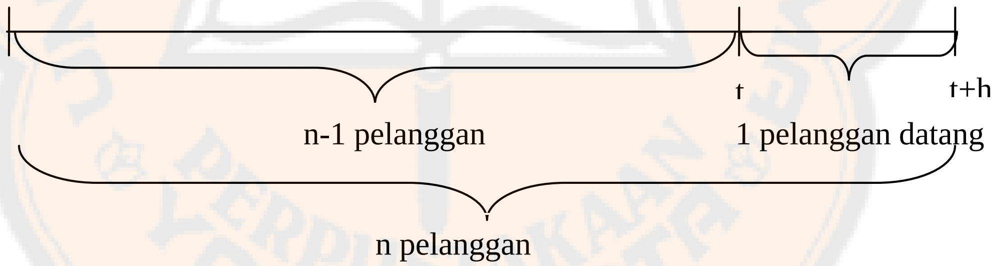
2). P_n *(t + h)* = P(n pelanggan dalam selang waktu t dan 1 pelanggan datang dan 1 pelanggan pergi dalam selang waktu (t, t + h])



$= P_n(t)[\lambda h][\mu h]$

atau

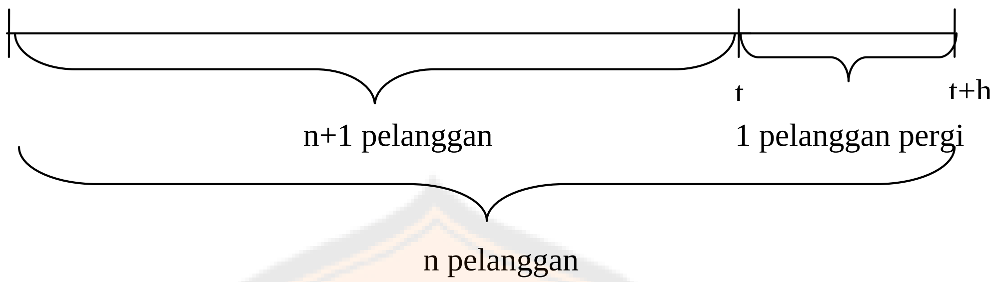
3). $P_n(t+h)$ = P(n-1 pelanggan dalam selang waktu t dan 1 pelanggan datang dalam selang waktu (t, t +h] dan tidak ada pelanggan yang pergi dalam selang waktu (t, t+h])



$= P_{n-1}(t)[\lambda h][1 - \mu h]$

atau

4). $P_n(t+h)$ = P(n+1 pelanggan dalam selang waktu t dan 1 pelanggan pergi dalam selang waktu (t, t+h] dan tidak ada pelanggan yang datang dalam selang waktu (t, t+h])



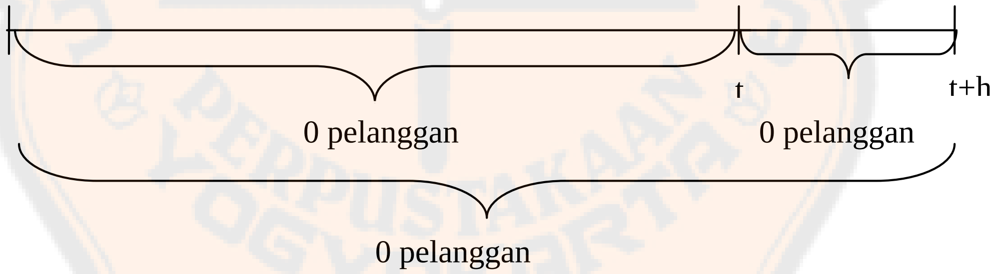
$= P_{n+1}(t)\,[1 - \lambda h]\,[\mu h]$

Maka

$P_n\ (t+h) = P_n\ (t)\,[1 - \lambda h]\,[1 - \mu h] + P_n\ (t)[\lambda h]\,[\mu h] + P_{n-1}(t)\,[\lambda h]\,[1 - \mu h] + P_{n+1}(t)\,[1 - \lambda h]\,[\mu h].$

Dengan jalan yang sama P_0 (t + h) dapat dicari dengan jalan sebagai berikut :

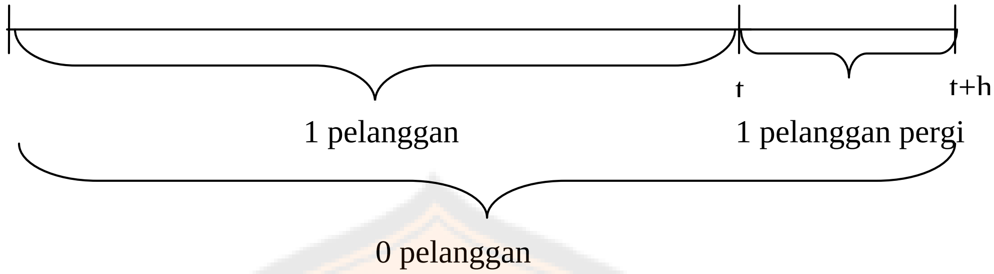
1). P_0 (t + h) = P(0 pelanggan dalam selang waktu t dan tidak ada pelanggan yang datang dalam selang waktu (t, t+h])



$= P_0(t)\,[1 - \lambda h]$

atau

2). P_0 (t + h) = P(1 pelanggan dalam selang waktu t dan tidak ada pelanggan yang datang dan 1 pelanggan yang pergi dalam selang waktu (t, t+h])



$= P_1$ (t) [1 - λ h] [μ h]

Maka

P_0 (t + h) = P_0 (t) [1 - λ h] + P_1 (t) [1 - λ h] [μ h]

P_n *(t + h)* = P_n (t) [1 - λ h] [1 - μ h] + P_n (t)[λ h] [μ h] + P_{n-1} (t) [λ h] [1 - μ h] + P_{n+1} (t) [1 - λ h] [μ h].

= P_n (t) (1 - μ h - λ h + λ μ h^2) + P_n (t) (λ μ h^2) + P_{n-1} (t) (λ h - λ μ h^2) + P_{n+1} (t) (μ h - λ μ h^2)

P_0 (t + h) = P_0 (t) [1 - λ h] + P_1 (t) [1 - λ h] [μ h]

= P_0 (t) [1 - λ h] + P_1 (t) (μ h - λ μ h^2)

Karena $h \to 0$ maka $h^2 \to 0$, sehingga persamaan di atas menjadi :

$$\left.\begin{aligned} \frac{P_n(t+h)-P_n(t)}{h} &= -(\lambda+\mu)P_n(t)+\lambda P_{n-1}(t)+\mu P_{n+1}(t) \\ \frac{P_0(t+h)-P_0(t)}{h} &= -\lambda P_0(t)+\mu P_1(t) \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

Karena h sangat kecil maka persamaan (1) dapat dianggap sebagai turunan:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dp_n(t)}{dt} &= -(\lambda+\mu)P_n(t)+\lambda P_{n-1}(t)+\mu P_{n+1}(t)\\ \frac{dp_0(t)}{dt} &= -\lambda P_0(t)+\mu P_1(t)\end{aligned}\right\}\text{..............................}(2)$$

Karena adanya asumsi kenaikan stasioner maka keadaan akan berubah permanen, tapi peluang banyaknya pelanggan dalam system akan menjadi konstan. Sehingga fungsi P_n (t) menjadi konstanta P_n, sehingga persamaan (2) menjadi :

$$\left.\begin{aligned}\mu P_{n+1}-(\lambda+\mu)P_n+\lambda P_{n-1}&=0\\ \mu P_1-\lambda P_0&=0\end{aligned}\right\}\text{..}(3)$$

Dengan membagi persamaan (3) dengan μ didapat :

$P_{n+1} = (1+\rho)\ P_n\ -\ \rho\ P_{n-1}$, ingat bahwa $\rho\ =\ \dfrac{\lambda}{\mu}$

dan

$P_1\ =\ \rho\ .P_0$

Dengan memasukkan P_1 dan P_0 kedalam persamaan untuk P_2 didapat :

$P_2\ = (1+\rho)P_1\ -\ \rho\ P_0 = (1+\rho)\ \rho\ P_0 -\ \rho\ P_0 =\ \rho^2\ P_0$

Dengan cara yang sama kita dapatkan rumus umum dari P_n :

$$P_n\ =\ \rho^n\ P_0\ =\ \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\ P_0\ \text{..}(4)$$

Nilai P_0 dapat dihitung dengan definisi bahwa jumlah peluang harus sama dengan 1 :

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n\ =\ 1$$

$$P_0 \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n = 1$$

$$P_0 \frac{1}{1-\rho} = 1$$

$$P_0 = 1 - \rho \quad \text{...(5)}$$

Dengan memasukkan persamaan (5) ke dalam persamaan (4) didapat rumus umum untuk P_n adalah sebagi berikut:

$$P_n = \rho^n (1-\rho) = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right) \quad \text{....................................(6)}$$

Persamaan di atas merupakan hasil yang sangat penting untuk mendapatkan karakteristik dari sistem M/M/1.Persamaan (6) betul –betul menunjukkan distribusi dari sebuah peubah acak diskret yaitu banyaknya pelanggan dalam sistem (peluang dari peubah acak yang mungkin). Selanjutnya akan dicari beberapa ukuran dasar yang penting dalam model antrian yaitu :

L = rata-rata jumlah pelanggan dalam sistem

L_Q = rata-rata jumlah pelanggan menunggu dalam antrian

W = rata-rata waktu yang dihabiskan seorang pelanggan dalam sistem

W_Q = rata-rata waktu yang dihabiskan seorang pelanggan menunggu dalam antrian

$$\text{L} = \sum_{n=0}^{\infty} nP_n = \sum_{n=0}^{\infty} n\, \rho^n (1-\rho)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} n(\rho^n - \rho^{n+1})$$

$$= 1(\rho - \rho^2) + 2(\rho^2 - \rho^3) + 3(\rho^3 - \rho^4) + \dots$$

$$= \rho + \rho^2 + \rho^3 + \rho^4 + \dots = \rho(1 + \rho + \rho^2 + \rho^3 + \dots)$$

$$= \frac{\rho}{1-\rho}$$

$$= \frac{\frac{\lambda}{\mu}}{1-\frac{\lambda}{\mu}}$$

$$= \frac{\lambda}{\mu-\lambda}$$

$$L_Q = \sum_{n=2}^{\infty}(n-1)P_n = \sum_{n=2}^{\infty} nP_n - \sum_{n=2}^{\infty} P_n$$

$$= (\mathrm{L} - P_1) - (1 - P_0 - P_1)$$

$$= \mathrm{L} - (1 - P_0)$$

$$= \frac{\rho}{1-\rho} - (1-(1-\rho))$$

$$= \frac{\rho}{1-\rho} - \rho$$

$$= \frac{\rho-\rho(1-\rho)}{1-\rho}$$

$$= \frac{\rho^2}{1-\rho}$$

$$= \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2}{1-\frac{\lambda}{\mu}}$$

$$= \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}$$

$$W = \frac{L}{\lambda} = \frac{\frac{\lambda}{\mu-\lambda}}{\lambda} = \frac{1}{\mu-\lambda}$$

$$W_Q = \frac{L_Q}{\lambda} = \frac{\frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}}{\lambda} = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}$$

Contoh 2

Tuan Irfan mempunyai sebuah restoran, restoran ini telah beroperasi sukses selama beberapa bulan. Dia sangat prihatin dengan panjangnya garis antrian pada jam-jam makan siang dan makan malam. Beberapa langganannya telah mengadu waktu tunggu yang berlebihan. Dia merasa bahwa suatu ketika dia akan kehilangan para pelanggannya. Dia meminta kepada kita untuk menganalisa sistem antriannya dengan menggunakan teori antrian. Jika diketahui tingkat kedatangan para langganan selama periode-periode puncak adalah 50 mobil per jam. Tingkat kedatangan mengikuti suatu distribusi Poisson. Waktu pelayanan rata-rata 1 menit dengan distribusi eksponensial. Berapa waktu menunggu rata-rata pelanggan dalam antrian?

Diketahui : Tingkat kedatangan para langganan selama periode-periode puncak yang dinotasikan λ adalah 50 mobil per jam jadi, λ = 50 mobil per jam. Waktu pelayanan rata-rata yang dinotasikan μ adalah 1 menit untuk satu mobil maka $\mu = \frac{60}{1}$ = 60 mobil per jam.

Ditanyakan : Waktu rata-rata pelanggan dalam antrian (W_Q)

Jawab.

Sistem antrian di atas termasuk dalam sistem antrian (M/M/1) : (GD/∞/∞) karena hanya ada satu pelayan dan kedatangan pelanggan ke restoran itu tidak dibatasi, sehingga dapat di hitung :

$$W_Q = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}$$

$$= \frac{50}{60(60-50)}$$

$$= \frac{50}{600} = 0{,}0833 \text{ jam atau 5 menit}$$

Waktu menunggu rata-rata pelanggan dalam antrian adalah 5 menit dan waktu menunggu ini dirasakan sangat lama oleh para pelanggannya.

Misalkan waktu pelayanan rata-rata bisa menjadi $\frac{3}{4}$ menit maka

$$\mu = \frac{60}{3/4} = 80 \text{ mobil per jam, sehingga dapat dihitung}$$

$$W_Q = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}$$

$$= \frac{50}{80(80-50)}$$

$$= \frac{50}{1800} = 0{,}0279 \text{ jam} = 1{,}67 \text{ menit}$$

Dapat dilihat bahwa waktu menunggu rata-rata pelanggan dalam antrian dapat menurun 3 menit lebih sehingga hal ini dapat menambah kenyamanan para pelanggan. Oleh karena itu Tuan Irfan harus memikirkan cara-cara untuk dapat mempercepat pelayanan di restorannya tersebut.

Contoh 3

Dalam sebuah sarana pembersihan mobil, informasi yang dikumpulkan menunjukkan bahwa mobil-mobil tiba sesuai dengan proses Poisson dengan laju kedatangan 4 mobil per jam. Waktu untuk mencuci antara mobil yang satu dengan mobil yang lain bervariasi tetapi mengikuti distribusi eksponensial dengan laju pelayanan 10 menit per mobil. Sarana tersebut tidak bisa menangani lebih dari satu mobil setiap saat. Dengan mengasumsikan bahwa sumber pemanggilan begitu besar dan tak terbatas, hitunglah rata-rata mobil menunggu dalam antrian.

Diketahui : Laju kedatangan mobil ke sarana pembersihan yang dinotasikan λ adalah 4 mobil per jam jadi, λ = 4 mobil per jam. Laju pelayanan yang dinotasikan μ adalah 10 menit per mobil sehingga $\mu = \frac{60}{10}$ = 6 mobil per jam.

Ditanyakan : Rata-rata mobil menunggu dalam antrian (L_Q).

Jawab.

Sistem antrian di atas termasuk dalam sistem antrian(M/M/1) : (GD/∞/∞) karena sarana tersebut tidak bisa menangani lebih dari satu mobil setiap saat dan diasumsikan bahwa sumber pemanggilan begitu besar dan tak terbatas.sehingga :

$$L_Q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}$$

$$= \frac{4^2}{6(6-4)} = \frac{16}{12}$$

$$= \frac{4}{3} = 1{,}33 \text{ mobil}$$

Dengan mengetahui rata-rata mobil menunggu dalam antrian pemilik sarana pembersihan mobil tersebut dapat menentukan luas tempat parkir sedemikian rupa sehingga memiliki peluang yang wajar bahwa sebuah mobil yang tiba akan memiliki tempat parkir.

B. Sistem antrian (M/M/1) : (GD/N/∞)

Perbedaan satu-satunya antara model ini dan model (M/M/1) : (GD/∞/∞) adalah bahwa jumlah pelanggan yang dijinkan dalam sistem adalah N (panjang antrian maksimum = N – 1).Dalam bentuk model yang digeneralisasi, situasi ini diterjemahkan menjadi

$$\lambda_n = \begin{cases} \lambda, & n = 0, 1, 2, \ldots, N-1 \\ 0 & n = N, N+1, \ldots\ldots. \end{cases}$$

$\mu_n = \mu$ untuk semua n = 0, 1, 2, 3, …

Dengan menganggap $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$ seperti pada sistem antrian sebelumnya

Untuk n > N , $P_n = \dfrac{\lambda_{N-1}\,\lambda_{N-2}\ldots\lambda_0}{\mu_N\,\mu_{N-1}\ldots\mu_1} P_0$

$$= \frac{\underbrace{\lambda.\lambda\ldots\lambda}_{N\,kali}}{\underbrace{\mu.\mu\ldots\mu}_{N\,kali}} P_0$$

$$P_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0 = \rho^n P_0$$

Untuk n = N, $P_n = \dfrac{0.0.....0}{\mu_N \mu_{N-1} ...\mu_1} P_0$

$= 0$

Jadi, $P_n = \begin{cases} \rho^n p_0, & n < N \\ 0, & n \geq N \end{cases}$

Nilai P_0 dapat ditentukan dari persamaan

$\sum_{n=0}^{N} P_n = 1$, yang menghasilkan $P_0(1 + \rho + \rho^2 + \rho^3 + ... + \rho^N) = 1$

Untuk ρ ? 1, $P_0(1 + \rho + \rho^2 + \rho^3 + ... + \rho^N) = 1$

$$P_0 \left(\frac{1-\rho^{N+1}}{1-\rho}\right) = 1$$

$$P_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}}$$

Untuk $\rho = 1$, $P_0(1 + \rho + \rho^2 + \rho^3 + ... + \rho^N) = 1$

$$P_0(1 + 1 + 1 + 1 + ... + 1) = 1$$

$$P_0(1 + N) = 1$$

$$P_0 = \frac{1}{N+1}$$

Rumus umum untuk P_n dapat diringkaskan sebagai berikut

$$P_n = \begin{cases} \dfrac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}} \rho^n, & \rho \neq 1 \\ \dfrac{1}{N+1}, & \rho = 1 \end{cases} \qquad n = 0, 1, 2, ... , N$$

Rumus untuk L didapat dari

$$L = E[n] = \sum_{n=0}^{N} n\, p_n$$

Untuk ρ ? 1

$$L = \sum_{n=0}^{N} n\, P_n = \sum_{n=0}^{N} n \frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}} \rho^n = \frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}} \sum_{n=0}^{N} n\, \rho^n$$

$$= \frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}}\ \rho \sum_{n=0}^{N} n\, \rho^{n-1} = \frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}}\ \rho\ \frac{d}{d\rho} \sum_{n=0}^{N} \rho^n$$

$$= \frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}}\ \rho\ \frac{d}{d\rho}\left[\frac{1-\rho^{N+1}}{1-\rho}\right]$$

$$= \frac{(1-\rho)\rho}{1-\rho^{N+1}} - \frac{(N+1)\rho^N (1-\rho) + (1-\rho^{N+1})}{(1-\rho)^2}$$

$$= \frac{\rho}{1-\rho^{N+1}} \left[-(N+1)\, \rho^N + \frac{1-\rho^{N+1}}{1-\rho}\right]$$

$$= \frac{-\rho(N+1)\rho^N}{1-\rho^{N+1}} + \frac{\rho}{1-\rho}$$

$$= \frac{-\rho(N+1)\rho^N (1-\rho) + \rho(1-\rho^{N+1})}{(1-\rho^{N+1})(1-\rho)}$$

$$= \frac{\rho[-(N+1)\rho^N (1-\rho) + (1-\rho^{N+1})]}{(1-\rho^{N+1})(1-\rho)}$$

$$= \frac{\rho[(1-\rho^{N+1}) - (N+1)(\rho^N - \rho^{N+1})}{(1-\rho)(1-\rho^{N+1})}$$

$$= \frac{\rho[(1-\rho^{N+1}) - (N\rho^N - N\,\rho^{N+1} + \rho^N - \rho^{N+1})}{(1-\rho)(1-\rho^{N+1})}$$

$$= \frac{\rho[(1 - N\rho^N - \rho^N + N\,\rho^{N+1})}{(1-\rho)(1-\rho^{N+1})}$$

$$= \frac{\rho[(1-(N+1)\rho^{N} + N\rho^{N+1})}{(1-\rho)(1-\rho^{N+1})}$$

Untuk $\rho = 1$

$$L = \sum_{n=0}^{N} n P_n = \sum_{n=0}^{N} n \frac{1}{N+1}$$

$$= \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^{N} n$$

$$= \frac{1}{N+1} \frac{N}{2} (N+1)$$

$$= \frac{N}{2}$$

$$\lambda_{eff} = \sum_{n=0}^{N} \lambda_n P_n = \lambda P_0 + \lambda P_1 + \ldots + \lambda P_{N-1} + 0 P_N$$

$$= \lambda (P_0 + P_1 + \ldots + P_{N-1})$$

$$= \lambda (1 - P_N)$$

$$L_Q = L - \frac{\lambda_{eff}}{\mu} = L - \frac{\lambda(1-P_N)}{\mu}$$

Untuk ρ ? 1

$$L_Q = \frac{\rho[(1-(N+1)\rho^{N} + N\rho^{N+1})}{(1-\rho)(1-\rho^{N+1})} - \frac{\lambda(1-P_N)}{\mu}$$

$$= \frac{\rho[(1-(N+1)\rho^{N} + N\rho^{N+1})}{(1-\rho)(1-\rho^{N+1})} - \rho(1 - P_N)$$

Untuk $\rho = 1$

$$L_Q = \frac{N}{2} - \frac{\lambda(1-P_N)}{\mu}$$

$$= \frac{N}{2} - \rho(1 - P_N)$$

$$W = \frac{L}{\lambda_{eff}}$$

Untuk ρ ? 1

$$W = \frac{\dfrac{\rho[1-(N+1)\rho^N + N\rho^{N+1}}{(1-\rho)(1-\rho^{N+1})}}{\lambda(1-P_N)}$$

$$= \frac{[(1-(N+1)\rho^N + N\rho^{N+1})}{\mu(1-\rho)(1-\rho^{N+1})(1-P_N)}$$

Untuk ρ = 1

$$W = \frac{\dfrac{N}{2}}{\lambda(1-P_N)} = \frac{N}{2\lambda(1-P_N)}$$

$$W_Q = \frac{L_Q}{\lambda_{eff}}$$

Untuk ρ ? 1

$$W_Q = \frac{\rho\left[\dfrac{(1-(N+1)\rho^N + N\rho^{N+1})}{(1-\rho)(1-\rho^{N+1})} - (1-P_N)\right]}{\lambda(1-P_N)}$$

$$= \frac{1-(N+1)\rho^N + N\rho^{N+1}}{\mu(1-\rho)(1-\rho^{N+1})(1-P_N)} - \frac{1}{\mu}$$

Untuk ρ = 1

$$W_Q = \frac{\dfrac{N}{2} - \rho(1-P_N)}{\lambda(1-P_N)}$$

Contoh 4

Sebuah salon potong rambut hanya dilayani oleh satu orang pemotong rambut. Pelanggan yang ingin memotong rambut, dilayani berdasarkan kedatangan mereka, yaitu pertama datang pertama dilayani. Salon tersebut hanya menyediakan 5 buah tempat duduk untuk para pelanggannya termasuk yang sedang dilayani. Jika tempat duduk sudah penuh maka pelanggan yang baru datang akan meninggalkan salon tersebut.

Kedatangan pelanggan ke salon potong rambut tersebut mengikuti sebuah proses Poisson dengan laju kedatangan 5 orang per jam. Karena pemotong rambut sudah ahli memotong laju pelayanan tiap satu orang 10 menit, dan mengikuti distribusi eksponensial. Pemilik salon tertarik untuk mengetahui rata-rata jumlah pelanggan dalam salon tersebut, dan rata-rata jumlah pelanggan menunggu dalam antrian.

Diketahui : c (Jumlah pemotong rambut) = 1, N (Batas pelanggan dalam salon) = 5, λ (Laju kedatangan pelanggan ke salon) = 5 orang per jam, μ (Laju pelayanan) = $\frac{60}{10}$ orang per jam = 6 orang per jam.

Ditanyakan : Rata-rata jumlah pelanggan dalam salon tersebut (L), rata-rata jumlah pelanggan menunggu dalam antrian (L_Q).

Jawab.

Sistem antrian di atas termasuk dalam sistem antrian (M/M/1) : (GD/5/∞) karena hanya ada satu pemotong rambut dan hanya tersedia 5 tempat duduk, sehingga jika tempat duduknya penuh maka pelanggan yang baru datang harus mencari salon lain. Oleh karena itu dapat dihitung :

$$L = \frac{\rho[(1-(N+1)\rho^{N} + N\rho^{N+1})}{(1-\rho)(1-\rho^{N+1})}$$

$$= \frac{\frac{5}{6}[(1-(5+1)\left(\frac{5}{6}\right)^{5} + 5\left(\frac{5}{6}\right)^{5+1})}{\left(1-\frac{5}{6}\right)\left(1-\left(\frac{5}{6}\right)^{5+1}\right)}$$

$$= \frac{\frac{5}{6}[(1-6\left(\frac{5}{6}\right)^{5} + 5\left(\frac{5}{6}\right)^{6})}{\left(1-\frac{5}{6}\right)\left(1-\left(\frac{5}{6}\right)^{6}\right)}$$

$$= \frac{0{,}219}{0{,}111} = 1{,}972 \text{ orang}$$

$$L_Q = \frac{\rho[(1-(N+1)\rho^{N} + N\rho^{N+1})}{(1-\rho)(1-\rho^{N+1})} - \rho(1 - P_N)$$

$$= 1{,}972 - \frac{5}{6}\left(1-P_5\right)$$

$$= 1{,}972 - \frac{5}{6}\left(1-\left(\left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{1-\frac{5}{6}}{1-\left(\frac{5}{6}\right)^{6}}\right)\right)\right)$$

$$= 1{,}972 - (0{,}833)\ (1- (0{,}401)\left(\frac{0{,}167}{0{,}665}\right)$$

$$= 1{,}972 - (0{,}833)\ (0{,}899)$$

$$= 1{,}972 - 0{,}749 = 1{,}223 \text{ orang}$$

Jika pemilik salon tersebut ingin menaikkan pendapatan, apakah pendapatannya akan bertambah jika dia menambah jumlah kursi di dalam salonnya menjadi 10 ?

Sistem antrian ini berubah menjadi sistem antrian (M/M/1) : (GD/10/∞), sehingga dapat dihitung

$$L = \frac{\rho[(1-(N+1)\rho^{N} + N\,\rho^{N+1})}{(1-\rho)\,(1-\rho^{N+1})}$$

$$= \frac{\frac{5}{6}[(1-(10+1)\left(\frac{5}{6}\right)^{10} + 10\left(\frac{5}{6}\right)^{10+1})}{\left(1-\frac{5}{6}\right)\left(1-\left(\frac{5}{6}\right)^{10+1}\right)}$$

$$= \frac{\frac{5}{6}[(1-11\left(\frac{5}{6}\right)^{10} + 10\left(\frac{5}{6}\right)^{11})}{\left(1-\frac{5}{6}\right)\left(1-\left(\frac{5}{6}\right)^{11}\right)}$$

$$= \frac{0{,}414}{0{,}144} = 3,\ 287 \text{ orang}$$

$$L_Q = \frac{\rho[(1-(N+1)\rho^{N} + N\,\rho^{N+1})}{(1-\rho)\,(1-\rho^{N+1})} - \rho\,(1 - P_N)$$

$$= (3,\ 287) - \frac{5}{6}\,(1-P_{10})$$

$$= (3,\ 287) - \frac{5}{6}\left(1-\left(\left(\frac{5}{6}\right)^{10}\left(\frac{1-\frac{5}{6}}{1-\left(\frac{5}{6}\right)^{11}}\right)\right)\right)$$

$$= (3,\ 287) - (0{,}833)\ (1- (0{,}765)\left(\frac{0{,}167}{0{,}865}\right))$$

= (3, 287) – (0,833) (0, 968)

= (3, 287) – 0, 801 = 2,486 orang

Dengan menambah jumlah kursi, rata-rata pelanggan dalam salon bertambah menjadi 2 kali lipat dan ini dapat menambah pendapatan pemilik salon . Tetapi rata-rata pelanggan dalam antrian juga menjadi 2 kali lipatnya. Sehingga pemilik salon juga harus memikirkan hal ini.

Contoh 5

Seorang dokter membuka praktek kesehatan di rumahnya sendiri. Masyarakat banyak yang berobat ke dokter itu. Kedatangan mereka untuk berobat mengikuti sebuah proses Poisson dengan laju kedatangan 5 orang per jam.Dokter tersebut hanya menyediakan 4 buah tempat duduk di ruang antri untuk pasien yang ingin berobat, di luar ruang pemeriksaan (orang yang mengantar pasien diabaikan). Jika tempat duduk penuh maka pasien yang baru datang akan mencari dokter lain. Lama pengobatan untuk satu orang rata-rata 5 menit. Dokter tersebut tertarik untuk rata-rata waktu yang dihabiskan pasien untuk berobat.

Diketahui : c (banyaknya dokter) = 1, N (batas jumlah pasien dalam rumah) = 5, λ (Laju kedatangan) = 5 orang per jam, Lama pengobatan satu orang rata-rata 5 menit. Sehingga, $\mu = \frac{60}{5} = 12$ orang per jam.

Ditanyakan : Rata-rata waktu yang dihabiskan pasien dalam antrian (W_Q).

Jawab.

Sistem antrian di atas termasuk dalam sistem antrian (M/M/1) : (GD/5/∞) karena hanya ada satu dokter dan hanya tersedia 5 tempat duduk termasuk di ruang pemeriksaan, sehingga didapat :

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{5}{12}$$

$$P_5 = \rho^n \left(\frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}}\right)$$

$$= (0{,}4167)^5 \left(\frac{1-(0{,}4167)}{1-(0{,}4167)^6}\right)$$

$$= (0{,}0126) \left(\frac{0{,}5833}{0{,}9948}\right) = (0{,}0126)(0{,}5864) = 0{,}007388$$

$$W_Q = \frac{1-(N+1)\rho^N + N\rho^{N+1}}{\mu(1-\rho)(1-\rho^{N+1})(1-P_N)} - \frac{1}{\mu}$$

$$= \frac{1-(6)\left(\frac{5}{12}\right)^5 + (5)\left(\frac{5}{12}\right)^6}{12\left(1-\left(\frac{5}{12}\right)\right)(1-\left(\frac{5}{12}\right)^6)(1-P_5)} - \frac{1}{12}$$

$$= \frac{1-(6)\left(\frac{3125}{248832}\right) + (5)\left(\frac{15625}{2985984}\right)}{12\left(1-\left(\frac{5}{12}\right)\right)(1-\left(\frac{15625}{2985984}\right))(1-0{,}007388)} - \frac{1}{12}$$

$$= \frac{1-(0{,}0754)+(0{,}0263)}{(12)(0{,}5833)(0{,}9948)(0{,}9926)} - \frac{1}{12}$$

$$= \frac{0{,}9509}{6{,}9161} - (0{,}083) = 0{,}138 - 0{,}083$$

$$= 0{,}055 \text{ jam} = 3{,}3 \text{ menit}$$

Misalkan dokter tersebut ingin menambah jumlah maksimum pasien dalam rumahnya menjadi 10. Apakah rata-rata waktu menunggu pasien dalam antrian mengalami penambahan yang tidak wajar ?

Sistem antrian diatas menjadi sistem antrian (M/M/1) : (GD/10/∞). Sehingga

$$P_{10} = \rho^n \left(\frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}}\right)$$

$$= (0{,}4167)^{10} \left(\frac{1-(0{,}4167)}{1-(0{,}4167)^{11}}\right)$$

$$= (0{,}000158) \left(\frac{0{,}5833}{0{,}9999}\right) = (0{,}000158)\ (0{,}5833) = 0{,}0000921$$

$$W_Q = \frac{1-(N+1)\rho^N + N\rho^{N+1}}{\mu(1-\rho)(1-\rho^{N+1})(1-P_N)} - \frac{1}{\mu}$$

$$= \frac{1-(11)\left(\frac{5}{12}\right)^{10} + (10)\left(\frac{5}{12}\right)^{11}}{12\left(1-\left(\frac{5}{12}\right)\right)(1-\left(\frac{5}{12}\right)^{11})(1-P_{10})} - \frac{1}{12}$$

$$= \frac{1-(11)\left(\frac{9765625}{61917364224}\right) + (10)\left(\frac{48828125}{743008370688}\right)}{12\left(1-\left(\frac{5}{12}\right)\right)(1-\left(\frac{48828125}{743008370688}\right))(1-0{,}0000921)} - \frac{1}{12}$$

$$= \frac{1-(0{,}00174)+(0{,}000657)}{(12)(0{,}5833)\,(0{,}9999)\,(0{,}9999)} - \frac{1}{12}$$

$$= \frac{0{,}9989}{6{,}9982} - (0{,}083) = 0{,}143 - 0{,}083$$

$$= 0{,}06 \text{ jam} = 3{,}6 \text{ menit}$$

Jika jumlah maksimum pasien di tambah menjadi 10. Maka, rata-rata waktu menunggu pasien dalam antrian tidak bertambah banyak, hanya bertambah 0,3 menit.

C. Sistem antrian (M/M/c) : (GD/∞/∞)

Dalam model antrian ini, para pelanggan datang dengan laju konstan λ dan maksimum c pelanggan dapat dilayani dalam waktu yang sama.Laju pelayanan per pelayan juga konstan dan sama dengan μ. Pengaruh dari penggunaan c pelayan yang pararel adalah mempercepat pelayanan dengan dilakukan beberapa pelayanan secara bersamaan. Jika sebuah sarana pelayanan memiliki c pelayan yang pararel dan diketahui bahwa μ adalah laju pelayanan per pelayan, maka dengan n sebagai jumlah pelanggan yang ada dalam system tersebut (dalam antrian + pelayanan), laju pelayanan dari keseluruhan sarana tersebut adalah nμ jika n = c dan c > μ jika n =c.Dalam bentuk model yang digeneralisasi, situasi ini diterjemahkan menjadi

$$\lambda_n = \lambda, \qquad n = 0$$

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu, & n \leq c \\ c\mu, & n > c \end{cases}$$

Untuk n = c

$$P_n = \frac{\lambda^n}{\mu(2\mu)(3\mu)\ldots(n\mu)} P_0$$

$$= \frac{\lambda^n}{(1.2.3....n)\mu^n} P_0$$

$$= \frac{\lambda^n}{n!\mu^n} P_0 = \frac{\rho^n P_0}{n!}$$

Untuk n > c

$$P_n = \frac{\lambda^n}{\mu(2\mu)(3\mu)\ldots(c-1)\mu(c\mu)\underbrace{(c\mu)\ldots.(c\mu)}_{(n-c)\,kali}} P_0$$

$$= \frac{\lambda^n}{1.2.3\ldots..(c-1).c.\underbrace{c\ldots.c}_{(n-c)\,kali}\ \underbrace{\mu.\mu\ldots.\mu}_{nkali}} P_0$$

$$= \frac{\lambda^n}{c!c^{n-c}\mu^n} P_0$$

Nilai p_0 dapat ditentukan dari

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1$$

$$\sum_{n=0}^{c-1} \frac{\lambda^n}{n!\mu^n} P_0 + \sum_{n=c}^{\infty} \frac{\lambda^n}{c!c^{n-c}\mu^n} P_0 = 1$$

$$P_0 \left[\sum_{n=0}^{c-1} \frac{\lambda^n}{n!\mu^n} + \sum_{n=c}^{\infty} \frac{\lambda^n}{c!c^{n-c}\mu^n}\right] = 1$$

$$P_0 = \left[\sum_{n=0}^{c-1} \frac{\rho^n}{n!} + \sum_{n=c}^{\infty} \frac{\rho^n}{c!c^{n-c}}\right]^{-1}$$

$$= \left[\sum_{n=0}^{c-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^c}{c!} \sum_{n=c}^{\infty} \left(\frac{\rho}{c}\right)^{n-c}\right]^{-1}$$

$$= \left[\sum_{n=0}^{c-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^c}{c!} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\rho}{c}\right)^{k}\right]^{-1} \quad \text{misal } k = n-c$$

$$P_0 = \left[\sum_{n=0}^{c-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^c}{c!}\left[\frac{1}{1-\rho/c}\right]\right]^{-1} \quad ; \ \frac{\rho}{c} < 1$$

$$P_0 = \left[\sum_{n=0}^{c-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^c}{c!(1-\rho/c)} \right]^{-1}$$

$$L_Q = \sum_{n=c}^{\infty} (n-c)P_n \quad \text{misal n-c = k}$$

$$L_Q = \sum_{k=0}^{\infty} kP_{k+c} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k\rho^{k+c}}{c^k c!} P_0$$

$$= P_0 \frac{\rho^c}{c!} \frac{\rho}{c} \sum_{k=0}^{\infty} k \left(\frac{\rho}{c} \right)^{k-1}$$

$$= \frac{P_0 \rho^{c+1}}{c!c} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{d(\rho/c)} \left[\left(\frac{\rho}{c} \right) \right]^k$$

$$= \frac{P_0 \rho^{c+1}}{c!c} \frac{d}{d(\rho/c)} \sum_{k=0}^{\infty} \left[\left(\frac{\rho}{c} \right) \right]^k$$

$$= \frac{P_0 \rho^{c+1}}{c!c} \frac{d}{d(\rho/c)} \frac{1}{\left(1-\rho/c\right)}$$

$$= \frac{P_0 \rho^{c+1}}{c!c} \left[\frac{\left(1-\rho/c\right).0-(1)(-1)}{\left(1-\rho/c\right)} \right]$$

$$= \frac{P_0 \rho^{c+1}}{c!c} \left[\frac{1}{\left(1-\rho/c\right)^2} \right]$$

$$= \frac{P_0 \rho^{c+1}}{c!c} \left[\frac{c^2}{(c-\rho)^2} \right]$$

$$L_Q = \frac{P_0 \ \rho^{c+1} c}{c!(c-\rho)^2} = \frac{P_0 \ \rho^{c+1}}{(c-1)!(c-\rho)^2}$$

$$L_Q = \frac{\rho^{c+1}}{(c-1)!(c-\rho)^2} P_0$$

$$L = L_Q + \rho$$

$$= \frac{\rho^{c+1}}{(c-1)!(c-\rho)^2} P_0 + \rho$$

$$= \rho \left[\frac{\rho^c p_0}{(c-1)!(c-\rho)^2} + 1 \right]$$

$$W_Q = \frac{L_Q}{\lambda}$$

$$= \frac{1}{\lambda} \frac{\rho^{c+1}}{(c-1)!(c-\rho)^2} P_0$$

$$= \frac{\rho^c P_0}{\mu(c-1)!(c-\rho)^2}$$

$$W = W_Q + \frac{1}{\mu}$$

$$= \frac{\rho^c P_0}{\mu(c-1)!(c-\rho)^2} + \frac{1}{\mu}$$

$$= \frac{1}{\mu} \left[\frac{P_0 \rho^c + (c-1)!(c-\rho)^2}{(c-1)!(c-\rho)^2} \right]$$

Contoh 6

Departemen kredit suatu bank mempekerjakan tiga orang karyawan tata usaha di kota Klaten untuk menangani “panggilan” yang masuk dari para pedagang. Pedagang harus membayar Rp 10.000,00 untuk satu kali otorisasi.

Waktu rata-rata yang dibutuhkan untuk menerima sebuah otorisasi adalah 0,5 menit bila tidak diperlukan waktu untuk menunggu. Tingkat pelayanan mengikuti distribusi eksponensial, karena kondisi-kondisi yang tidak biasa dapat menghasilkan baik waktu pelayanan yang relative lama atau pendek. Selama periode puncak 8 jam, kantor menerima total 1.750 panggilan (yaitu 218, 75 perjam). Tingkat kedatangan panggilan mengikuti distribusi Poisson. Hitunglah rata-rata jumlah pedagang dalam sistem dan rata-rata pendapatan yang diterima oleh bank selama periode puncak.

Diketahui : c (karyawan tata usaha yang menangani panggilan dari para pelanggan) = 3, waktu yang diperlukan satu otorisasi adalah 0,5 menit, λ (tingkat kedatangan panggilan) = 218,75 panggilan per jam.

Ditanyakan : Rata-rata jumlah pedagang dalam sistem (L) dan rata-rata pendapatan yang diterima oleh bank selama periode puncak.

Jawab.

Sistem antrian di atas termasuk dalam sistem antrian (M/M/3) : (GD/∞/∞) karena terdapat 3 orang orang karyawan di bank tersebut dan pedagang yang datang tak terbatas.

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{c-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^c}{c!\left(1 - \rho/c\right)}}$$

$$= \frac{1}{\sum_{n=0}^{2} \frac{(1{,}823)^n}{n!} + \frac{(1{,}823)^3}{3!\left(1 - {}^{1{,}823}\!/_{3}\right)}}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{0!} + \frac{1{,}823}{1!} + \frac{(1{,}823)^2}{2!} + 2{,}573}$$

$$= \frac{1}{1 + 1{,}823 + 1{,}662 + 2{,}573} = 0{,}142$$

$$L = \frac{\rho^{c+1}}{(c-1)!(c-\rho)^2} P_0 + \rho$$

$$= \frac{(1{,}823)^4}{(3-1)!(3-1{,}823)^2} (0{,}142) + (1{,}823)$$

= (3,985) (0,142) + (1,823)

= (0,565) + (1,823) = 2, 388 pedagang

Pendapatan yang diterima oleh bank dari selama periode puncak adalah

(8) (2,388) (Rp10.000,00) = Rp191.040,00

Contoh 7

Klinik opthomology sebuah rumah sakit menawarkan tes glukoma gratis setiap selasa sore. Ada tiga petugas opthomology. Sebuah tes glukoma membutuhkan rata-rata 20 menit, dan waktu sebenarnya ditemukan kurang lebih mendekati distribusi eksponensial. Pasien-pasien datang berdasarkan proses Poisson dengan laju kedatangan 6 pasien per jam dan pasien diambil berdasar FCFS. Perencana rumah sakit tertarik untuk mengetahui berapa banyak rata-rata orang menunggu dalam antrian, dan rata-rata waktu satu orang pasien habiskan di klinik.

Diketahui c (petugas opthomology) = 3, λ (laju kedatangan pasien ke klinik opthomology) = 6 pasien per jam, dan sebuah tes glukoma membutuhkan waktu 20 menit.

Ditanyakan : Rata-rata orang menunggu dalam antrian (L_Q), rata-rata waktu satu orang pasien habiskan di klinik (W).

Jawab.

Sistem antrian di atas termasuk dalam sistem antrian (M/M/3) : (GD/∞/∞) karena kedatangan pasien tidak dibatasi.

Sebuah tes glukoma membutuhkan waktu 20 menit. Jadi,

$$\mu = \frac{60}{20} = 3 \text{ pasien per jam}$$

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{c-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^c}{c!\left(1 - \rho/c\right)}}$$

$$= \frac{1}{\sum_{n=0}^{2} \frac{(2)^n}{n!} + \frac{(2)^3}{3!\left(1 - 2/3\right)}}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{0!} + \frac{2}{1!} + \frac{(2)^2}{2!} + 4}$$

$$= \frac{1}{1+2+2+4} = \frac{1}{9}$$

$$L_Q = \frac{\rho^{c+1}}{(c-1)!(c-\rho)^2} P_0$$

$$= \frac{2^4}{(3-1)!(3-2)^2} \left(\frac{1}{9}\right)$$

$$= \left(\frac{16}{2}\right)\left(\frac{1}{9}\right) = 0{,}889 \text{ pasien}$$

$$W = \frac{1}{\mu}\left[\frac{P_0\rho^c + (c-1)!(c-\rho)^2}{(c-1)!(c-\rho)^2}\right]$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{\left(\frac{1}{9}\right)2^3 + (3-1)!(3-2)^2}{(3-1)!(3-2)^2}\right]$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{\left(\frac{8}{9}\right)+2}{2}\right] = 0{,}482 \text{ jam} = 28{,}9 \text{ menit}$$

Misalkan petugas opthomology ditambah menjadi 6 orang bagaimana Rata-rata orang menunggu dalam antrian (L_Q) dan rata-rata waktu satu orang pasien habiskan di klinik (W) ?

Karena banyaknya petugas opthomology menjadi 6 orang maka sistem antrian di atas menjadi sistem antrian (M/M/6) : (GD/∞/∞). Sehingga, dapat dihitung

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{c-1}\frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^c}{c!\left(1-\rho/c\right)}}$$

$$= \frac{1}{\sum_{n=0}^{2} \frac{(2)^n}{n!} + \frac{(2)^6}{6!\left(1 - \frac{2}{6}\right)}}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{0!} + \frac{2}{1!} + \frac{(2)^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \frac{2^4}{4!} + \frac{2^5}{5!} + \frac{64}{480}}$$

$$= \frac{1}{5 + (1{,}333) + (0{,}667) + (0{,}267) + (0{,}133)} = \frac{1}{7{,}4} = 0{,}135$$

$$L_Q = \frac{\rho^{c+1}}{(c-1)!(c-\rho)^2} P_0$$

$$= \frac{2^7}{(6-1)!(6-2)^2} \ (0{,}135)$$

$$= \left(\frac{128}{1920}\right) \ (0{,}135)$$

$= (0{,}067)\ (0{,}135) = 0{,}0091$ pasien

$$W = \frac{1}{\mu} \left[\frac{P_0 \rho^c + (c-1)!(c-\rho)^2}{(c-1)!(c-\rho)^2} \right]$$

$$= \frac{1}{3} \left[\frac{(0{,}135)2^6 + (6-1)!(6-2)^2}{(6-1)!(6-2)^2} \right]$$

$$= \frac{1}{3} \left[\frac{(0{,}014) + 1920}{1920} \right] = 0{,}333 \text{ jam} = 20 \text{ menit}$$

Dengan menambah petugas opthomology menjadi 6 orang, rata-rata orang menunggu dalam antrian dan rata-rata waktu satu orang pasien habiskan di klinik menjadi turun.

D. Sistem antrian (M/M/c) : (GD/N/∞)

Perbedaan sistem antrian ini dengan sistem antrian (M/M/c) : (GD/∞/∞) adalah dalam hal banyaknya pelanggan yang memasuki sistem dibatasi sejumlah N dengan banyaknya antrian maksimum N – c. λ_n dan μ_n untuk system antrian ini diketahui sebagai berikut

$$\lambda_n = \begin{cases} \lambda, & 0 \le n < N \\ 0, & n \ge N \end{cases}$$

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu, & 0 \le n \le c \\ c\mu, & c \le n \le N \end{cases}$$

Untuk 0=n = c

$$P_n = \frac{\lambda^n}{\mu(2\mu)(3\mu)\ldots(n\mu)} P_0$$

$$= \frac{\lambda^n}{(1.2.3....n)\mu^n} p_0$$

$$= \frac{\lambda^n}{n!\mu^n} p_0 = \frac{\rho^n p_0}{n!}$$

Untuk c = n = N

$$P_n = \frac{\lambda^n}{\mu(2\mu)(3\mu)\ldots(c-1)\mu(c\mu)\underbrace{(c\mu)....(c\mu)}_{(n-c)\,kali}} P_0$$

$$= \frac{\lambda^n}{1.2.3.....(c-1).c.\underbrace{c....c}_{(n-c)\,kali}\underbrace{\mu.\mu....\mu}_{nkali}} P_0$$

$$= \frac{\lambda^n}{c!c^{n-c}\mu^n} P_0$$

$$p_n = \begin{cases} \dfrac{\rho^n}{n!} P_0, \ 0 \le n \le c \\ \dfrac{\rho^n}{c!c^{n-c}} P_0, \ c \le n \le N \end{cases}$$

Nilai p_0 dapat ditentukan dari $\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1$

Untuk $\dfrac{\rho}{c}$? 1

$$\sum_{n=0}^{c-1} \frac{\rho^n}{n!} P_0 + \sum_{n=c}^{N} \frac{\rho^n}{c!c^{n-c}} P_0 = 1$$

$$P_0 \left[\sum_{n=0}^{c-1} \frac{\rho^n}{n!} + \sum_{n=c}^{N} \frac{\rho^n}{c!c^{n-c}} \right] = 1$$

$$P_0 = \left[\sum_{n=0}^{c-1} \frac{\rho^n}{n!} + \sum_{n=c}^{N} \frac{\rho^n}{c!c^{n-c}} \right]^{-1}$$

$$= \left[\sum_{n=0}^{c-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^c}{c!} \sum_{n=c}^{N} \left(\frac{\rho}{c} \right)^{n-c} \right]^{-1}$$

$$= \left[\sum_{n=0}^{c-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^c}{c!} \sum_{j=0}^{N} \left(\frac{\rho}{c} \right)^{j} \right]^{-1} \quad \text{n-c = j}$$

$$= \left[\sum_{n=0}^{c-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^c}{c!} \frac{\left(1 - \rho/c\right)^{j+1}}{1 - \rho/c} \right]^{-1}$$

$$= \left[\sum_{n=0}^{c-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^c}{c!} \frac{1 - \left(\rho/c\right)^{N-c+1}}{1 - \rho/c} \right]^{-1}$$

Untuk $\dfrac{\rho}{c} = 1$

$$P_0 = \left[\sum_{n=0}^{c-1}\frac{\rho^n}{n!}+\frac{\rho^c}{c!}\sum_{j=0}^{N}\left(\frac{\rho}{c}\right)^j\right]^{-1}$$

$$\sum_{j=0}^{N}\left(\frac{\rho}{c}\right)^j = 1 + 1 + 1 + \ldots +1$$

$$= (N\text{-}c) + 1$$

Sehingga

$$P_0 = \left[\sum_{n=0}^{c-1}\frac{\rho^n}{n!}+\frac{\rho^c}{c!}(N-c+1)\right]^{-1}$$

Untuk $\frac{\rho}{c}$? 1

$$L_Q = \sum_{n=c+1}^{N}(n-c)P_n = \sum_{j=1}^{N-c} j\,P_{j+c} = P_0\sum_{j=1}^{N-c}\frac{j\,\rho^{j+c}}{c!\,c^j}$$

$$= \frac{P_0\,\rho^c}{c!}\sum_{j=1}^{N-c}\frac{j\,\rho^j}{c^j} = \frac{P_0\,\rho^{c+1}}{c!\,c}\sum_{j=1}^{N-c}\frac{j\,\rho^{j-1}}{c^{j-1}}$$

$$= \frac{P_0\,\rho^{c+1}}{c!\,c}\sum_{j=1}^{N-c}\frac{d}{d(\rho/c)}\left[\left(\rho/c\right)^j\right]$$

$$= \frac{P_0\,\rho^{c+1}}{c!\,c}\,\frac{d}{d(\rho/c)}\sum_{j=1}^{N-c}\left[\left(\rho/c\right)^j\right]$$

$$= \frac{P_0\,\rho^{c+1}}{c!\,c}\,\frac{d}{d(\rho/c)}\left[\frac{1-\left(\rho/c\right)^{N-c+1}}{1-\rho/c}\right]$$

$$= \frac{P_0\,\rho^{c+1}}{c!\,c}\;\frac{(1-\frac{\rho}{C})\left[(n-C+1)\left(\frac{\rho}{C}\right)^{n-C}\right]+\left(1-\left(\frac{\rho}{C}\right)^{n-C+1}\right)}{\left(1-\frac{\rho}{C}\right)^2}$$

$$= \frac{P_0\,\rho^{c+1}}{c!c}\left[\frac{-(n-C+1)\left(\frac{\rho}{C}\right)^{n-C}+(n-C+1)\left(\frac{\rho}{C}\right)^{n-C+1}+1-\left(\frac{\rho}{C}\right)^{n-C+1}}{\left(1-\frac{\rho}{C}\right)^2}\right]$$

$$= \frac{P_0\,\rho^{c+1}}{c!c}\left[\frac{1-\left(\frac{\rho}{C}\right)^{n-C}-N\left(\frac{\rho}{c}\right)^{N-c}+N\left(\frac{\rho}{c}\right)^{N-c}\left(\frac{\rho}{c}\right)-c\left(\frac{\rho}{c}\right)^{N-c}\left(\frac{\rho}{c}\right)+c\left(\frac{\rho}{c}\right)^{N-c}}{\left(1-\frac{\rho}{C}\right)^2}\right]$$

$$= \frac{P_0\,\rho^{c+1}}{c!c}\left[\frac{1-\left(\rho/c\right)^{N-c}-(N-c)\left(\rho/c\right)^{N-c}\left(1-\rho/c\right)}{\left(1-\frac{\rho}{c}\right)^2}\right]$$

$$= \frac{P_0\,\rho^{c+1}}{c!c}\;c^2\left[\frac{1-\left(\rho/c\right)^{N-c}-(N-c)\left(\rho/c\right)^{N-c}\left(1-\rho/c\right)}{(c-\rho)^2}\right]$$

$$= \frac{P_0\,\rho^{c+1}}{(c-1)!(c-\rho)^2}\left[1-\left(\rho/c\right)^{N-c}-(N-c)\left(\rho/c\right)^{N-c}\left(1-\rho/c\right)\right]$$

$$L_Q = \frac{P_0\,\rho^{c+1}}{(c-1)!(c-\rho)^2}\left[1-\left(\rho/c\right)^{N-c}-(N-c)\left(\rho/c\right)^{N-c}\left(1-\rho/c\right)\right]$$

Untuk $\frac{\rho}{c} = 1$

$$L_Q = \sum_{n=c+1}^{N}(n-c)P_n = \sum_{j=1}^{N-c} j\,P_{j+c} = P_0\sum_{j=1}^{N-c}\frac{j\,\rho^{j+c}}{c!c^j}$$

$$= \frac{P_0\,\rho^c}{c!}\sum_{j=1}^{N-c}\frac{j\,\rho^j}{c^j} = \frac{P_0\,\rho^c}{c!}\sum_{j=1}^{N-c} j\left(\rho/c\right)^j$$

$$= \frac{P_0\,\rho^c}{c!}\sum_{j=1}^{N-c} j$$

$$= \frac{P_0\,\rho^c}{c!}\left(\frac{N-c}{2}\right)(\text{N-c+1})$$

$$L_Q = P_0\,\frac{\rho^c\,(N-c)(N-c+1)}{2\,c!}$$

Untuk $\frac{\rho}{c}$? 1

$$\text{L} = L_Q + \frac{\lambda_{eff}}{\mu}$$

$$= \frac{P_0\,\rho^{c+1}}{(c-1)!(c-\rho)^2}\left[1-\left(\rho/c\right)^{N-c} - (N-c)\left(\rho/c\right)^{N-c}\left(1-\rho/c\right)\right] + \frac{\lambda(1-P_N)}{\mu}$$

$$= \frac{P_0\,\rho^{c+1}}{(c-1)!(c-\rho)^2}\left[1-\left(\rho/c\right)^{N-c} - (N-c)\left(\rho/c\right)^{N-c}\left(1-\rho/c\right)\right] + \rho\,(1-P_N)$$

Untuk $\frac{\rho}{c} = 1$

$$\text{L} = L_Q + \frac{\lambda_{eff}}{\mu}$$

$$= P_0\,\frac{\rho^c\,(N-c)(N-c+1)}{2\,c!} + \frac{\lambda(1-P_N)}{\mu}$$

$$= P_0\,\frac{\rho^c\,(N-c)(N-c+1)}{2\,c!} + \rho\,(1-P_N)$$

Untuk $\frac{\rho}{c}$? 1

$$\text{W} = \frac{L}{\lambda_{eff}}$$

$$= \frac{\frac{P_0\rho^{c+1}}{(c-1)!(c-\rho)^2}\left[1-\left(\frac{\rho}{c}\right)^{N-c} - (N-c)\left(\frac{\rho}{c}\right)^{N-c}\left(1-\frac{\rho}{c}\right)\right] + \rho(1-P_N)}{\lambda(1-P_N)}$$

Untuk $\frac{\rho}{c}$ = 1

W = $\frac{L}{\lambda_{eff}}$

$$= \frac{P_0 \frac{\rho^c (N-c)(N-c+1)}{2c!} + \rho(1-P_N)}{\lambda(1-P_N)}$$

Untuk $\frac{\rho}{c}$? 1

$$W_Q = \frac{L_Q}{\lambda_{eff}}$$

$$= \frac{\frac{P_0 \rho^{c+1}}{(c-1)!(c-\rho)^2}\left[1-\left(\frac{\rho}{c}\right)^{N-c} - (N-c)\left(\frac{\rho}{c}\right)^{N-c}\left(1-\frac{\rho}{c}\right)\right]}{\lambda(1-P_N)}$$

Untuk $\frac{\rho}{c}$ = 1

$$W_Q = \frac{L_Q}{\lambda_{eff}}$$

$$= \frac{P_0 \frac{\rho^c (N-c)(N-c+1)}{2c!}}{\lambda(1-P_N)}$$

Contoh 8

Sebuah stasion pemeriksaan mobil dengan tiga ruang pemeriksaan, dimana setiap ruang hanya untuk 1 mobil. Sangat masuk akal untuk menganggap bahwa mobil-mobil menunggu dalam suatu aturan bahwa ketika ruangan pemeriksaan kosong mobil paling depan dari antrian akan masuk. Stasion dapat menyediakan paling banyak 4 mobil yang dapat menunggu (7 di stasion).

Pola kedatangan adalah proses Poisson dengan laju kedatangan 1 mobil setiap menit.Waktu pelayanan adalah eksponensial dengan laju pelayanan 6 menit. Biaya untuk pemeriksaan sama untuk semua mobil yaitu sebesar Rp 12.000,00 (tidak termasuk biaya perbaikan). Stasion pemeriksaan mobil ini beroperasi selama 8 jam per hari. Kepala pengawas berharap untuk mengetahui angka rata-rata jumlah mobil dalam sistem dan pendapatan yang dia peroleh dari biaya pemeriksaan (tidak termasuk biaya perbaikan) per hari.

Diketahui : c (Jumlah ruang pemeriksaan) = 3, N (jumlah mobil yang boleh berada di stasion) = 7, λ (laju kedatangan mobil ke stasion pemeriksaan) = 1 mobil per menit, dan laju pelayanan 6 menit

Ditanyakan : rata-rata jumlah mobil dalam sistem (L) dan pendapatan yang dia peroleh dari biaya pemeriksaan (tidak termasuk biaya perbaikan) per hari.

Jawab.

Sistem antrian di atas termasuk dalam sistem antrian (M/M/3) : (GD/7/∞).

Dengan menggunakan waktu dasar menit di dapat

$$\mu = \frac{1}{6}$$

$$P_0 = \left[\sum_{n=0}^{c-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^c}{c!} \left(\frac{1 - \left(\frac{\rho}{c}\right)^{N-c+1}}{1 - \frac{\rho}{c}} \right) \right]^{-1}$$

$$= \frac{1}{\sum_{n=0}^{c-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^c}{c!}\left(\frac{1-\left(\frac{\rho}{c}\right)^{N-c+1}}{1-\frac{\rho}{c}} \right)}$$

$$= \frac{1}{\sum_{n=0}^{2} \frac{6^n}{n!} + \frac{6^3}{3!}\left(\frac{1-\left(\frac{6}{3}\right)^{7-3+1}}{1-\frac{6}{3}} \right)}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{1}+\frac{6}{1}+\frac{36}{2}+(36)(31)}$$

$$= \frac{1}{1+6+18+1116} = \frac{1}{1141} = 0{,}00088$$

$$P_7 = \frac{\lambda^n}{c!c^{n-c}\mu^n}\; P_0$$

$$= \frac{1^7}{3!3^{7-3}\left(\frac{1}{6}\right)^7}\;(0{,}00088)$$

$$= \frac{6^7}{(6)(81)}\;(0{,}00088)\; = (576)\,(0{,}00088) = 0{,}50688$$

$$L = \frac{P_0\,\rho^{c+1}}{(c-1)!(c-\rho)^2}\left[1-\left(\rho/c\right)^{N-c} - (N-c)\left(\rho/c\right)^{N-c}\left(1-\rho/c\right)\right] + \rho\;(1 - P_N)$$

$$= \frac{(0{,}00088)\,(6)^4}{(2!)\,(3-6)^2}\;\left[1-(2)^4-(4)\,(2)^4\,(-1)\right] + (6)(0{,}49312)$$

$$= (0{,}06336)\;(1 - 16 + 64) + 2{,}95872$$

$$= 3{,}10464 + 2{,}95872$$

= 6,06336 mobil

pendapatan yang dia peroleh dari biaya pemeriksaan (tidak termasuk biaya perbaikan) per hari adalah

(8) (60) (6,06336) (Rp 12.000,00) = Rp 34.924.953,00

Contoh 9

Sebuah kota kecil dilayani oleh sebuah perusahaan taksi. Perusahaan tersebut memiliki 4 buah taksi. Permintaan pelayanan rata-rata 12 orang per jam. Waktu rata-rata per perjalanan adalah 10 menit. Tibanya permintaan pelayanan mengikuti proses Poisson, sementara waktu perjalanan bersifat eksponensial. Untuk meringankan masalah waktu menunggu, kantor tersebut diperintahkan untuk tidak menerima calon penumpang baru setelah daftar penumpang yang menunggu mencapai 16 orang. Berapa rata-rata calon penumpang menunggu dalam antrian dan waktu yang dihabiskan calon penumpang menunggu dalam antrian?

Diketahui : c (jumlah taksi) = 4, N (banyaknya calon penumpang + 4 penumpang) = 16 + 4 = 20, λ (permintaan pelayanan) = 12 penumpang per jam, dan rata-rata setiap penumpang per perjalanan adalah 10 menit.

Ditanya : rata-rata calon penumpang menunggu dalam antrian (L_Q)dan waktu yang dihabiskan calon penumpang menunggu dalam antrian (W_Q)

Jawab.

Sistem antrian di atas termasuk dalam sistem antrian (M/M/4) : (GD/20/∞).

Dengan $\mu = \frac{60}{10} = 6$ orang per jam

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{12}{6} = 2$$

$$\frac{\rho}{c} = \frac{2}{4} = 0{,}5$$

$$P_0 = \left[\sum_{n=0}^{c-1}\frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^c}{c!}\left(\frac{1-\left(\frac{\rho}{c}\right)^{N-c+1}}{1-\frac{\rho}{c}}\right)\right]^{-1}$$

$$= \frac{1}{\sum_{n=0}^{c-1}\frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^c}{c!}\left(\frac{1-\left(\frac{\rho}{c}\right)^{N-c+1}}{1-\frac{\rho}{c}}\right)}$$

$$= \frac{1}{\sum_{n=0}^{3}\frac{2^n}{n!} + \frac{2^4}{4!}\left(\frac{1-(0{,}5)^{20-4+1}}{1-(0{,}5)}\right)}$$

$$= \frac{1}{1+2+2+\frac{8}{6}+\frac{16}{24}\left(\frac{0{,}999}{0{,}5}\right)}$$

$$= \frac{1}{1+2+2+1{,}333+(0{,}667)(1{,}999)}$$

$$= \frac{1}{8{,}999} = 0{,}111$$

$$P_{20} = \frac{\rho^{n}}{c!c^{n-c}}\ P_{0}$$

$$= \frac{2^{20}}{4!4^{16}}\ (0{,}111)$$

$$= \frac{1048576}{103079215104}\ (0{,}111) = 0{,}00000113$$

$$L_Q = \frac{P_0\,\rho^{c+1}}{(c-1)!(c-\rho)^2}\left[1-\left(\rho/c\right)^{N-c} - (N-c)\left(\rho/c\right)^{N-c}\left(1-\rho/c\right)\right]$$

$$= \frac{(0{,}111)\,2^{5}}{(4-1)!(4-2)^2}\ \left[1-(0{,}5)^{16} - (16)\,(0{,}5)^{16}\,(1-0{,}5)\right]$$

= (0,148) (1- 0,0000153 – 0,000122)

= (0,148) (0,999) = 0,1479 orang

$$W_Q = \frac{L_Q}{\lambda_{eff}}$$

$$= \frac{\dfrac{P_0\rho^{c+1}}{(c-1)!(c-\rho)^2}\left[1-\left(\dfrac{\rho}{c}\right)^{N-c} - (N-c)\left(\dfrac{\rho}{c}\right)^{N-c}\left(1-\dfrac{\rho}{c}\right)\right]}{\lambda(1-P_N)}$$

$$= \frac{0{,}1479}{12(1-0{,}00000113)}$$

$$= \frac{0{,}1479}{12(0{,}999)} = \frac{0{,}1479}{11{,}999} = 0{,}0123 \text{ jam}$$

Misalkan batas penumpang yang menunggu menjadi 6 maka N = 10. Sehingga didapat

$$P_0 = \left[\sum_{n=0}^{c-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^c}{c!} \left(\frac{1 - \left(\frac{\rho}{c} \right)^{N-c+1}}{1 - \frac{\rho}{c}} \right) \right]^{-1}$$

$$= \frac{1}{\sum_{n=0}^{c-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^c}{c!} \left(\frac{1 - \left(\frac{\rho}{c} \right)^{N-c+1}}{1 - \frac{\rho}{c}} \right)}$$

$$= \frac{1}{\sum_{n=0}^{3} \frac{2^n}{n!} + \frac{2^4}{4!} \left(\frac{1 - (0{,}5)^{10-4+1}}{1 - (0{,}5)} \right)}$$

$$= \frac{1}{1 + 2 + 2 + \frac{8}{6} + \frac{16}{24} \left(\frac{0{,}992}{0{,}5} \right)}$$

$$= \frac{1}{1 + 2 + 2 + 1{,}333 + (0{,}667)(1{,}984)}$$

$$= \frac{1}{7{,}656} = 0{,}131$$

$$P_{10} = \frac{\rho^n}{c!c^{n-c}} \; P_0$$

$$= \frac{2^{10}}{4!4^6} \; (0{,}131)$$

$$= \frac{1024}{98304} \; (0{,}131) = 0{,}00136$$

$$L_Q = \frac{P_0 \, \rho^{c+1}}{(c-1)!(c-\rho)^2} \left[1 - \left(\rho/c \right)^{N-c} - (N-c) \left(\rho/c \right)^{N-c} \left(1 - \rho/c \right) \right]$$

$$= \frac{(0{,}131)\,2^5}{(4-1)!(4-2)^2}\left[1-(0{,}5)^6-(6)(0{,}5)^6(1-0{,}5)\right]$$

= (0,148) (1- 0,015625 – 0,046875)

= (0,148) (0,938) = 0,138 orang

$$W_Q = \frac{L_Q}{\lambda_{eff}}$$

$$= \frac{\dfrac{P_0\rho^{c+1}}{(c-1)!(c-\rho)^2}\left[1-\left(\dfrac{\rho}{c}\right)^{N-c}-(N-c)\left(\dfrac{\rho}{c}\right)^{N-c}\left(1-\dfrac{\rho}{c}\right)\right]}{\lambda(1-P_N)}$$

$$= \frac{0{,}138}{12(1-0{,}00136)}$$

$$= \frac{0{,}138}{12(0{,}999)} = \frac{0{,}138}{11{,}983} = 0{,}0115 \text{ jam}$$

Keputusan perusahaan taksi itu untuk membatasi jumlah calon penumpang sebesar 16 bisa dibenarkan karena rata-rata penumpang menunggu dalam antrian dan waktu rata-rata penumpang menunggu dalam antrian tidak terpaut lama jika calon penumpangnya dibatasi kurang dari 16.

E. Sistem antrian (M/M/∞) : (GD/∞/∞)

Dalam model antrian ini, jumlah pelayan adalah tidak terbatas karena pelanggan juga menjadi pelayan. Ini terjadi biasanya pada sarana pelayanan swalayan. Dalam bentuk model yang digeneralisasi, situasi ini diterjemahkan menjadi

$\lambda_n = \lambda$, untuk semua n = 0

$\mu_n = n\,\mu$, untuk semua n = 0

sehingga dapat dihitung P_n sebagai berikut

$$P_n = \frac{\lambda^n}{\mu(2\mu)(3\mu)\ldots(n\mu)} P_0$$

$$= \frac{\lambda^n}{(1.2.3\ldots.n)\mu^n} P_0$$

$$= \frac{\lambda^n}{n!\,\mu^n} P_0 = \frac{\rho^n P_0}{n!}$$

Karena $\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1$ dapat dihitung nilai P_0 sebagai berikut

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho^n P_0}{n!} = 1$$

$$P_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho^n}{n!} = 1$$

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho^n}{n!}}$$

$$P_0 = \frac{1}{1+\rho+\frac{\rho^2}{2!}+\frac{\rho^3}{3!}+\ldots} = \frac{1}{e^{\rho}}$$

$$= e^{-\rho}$$

Sebagai hasil

$$P_n = \frac{e^{-\rho}\rho^n}{n!}$$

Yang merupakan distribusi Poisson dengan mean E{n) = ρ

Sehingga didapat

$L = E\{n\}$

$= \rho$

$= \dfrac{\lambda}{\mu}$

$W = \dfrac{L}{\lambda}$

$= \dfrac{\frac{\lambda}{\mu}}{\lambda}$

$= \dfrac{1}{\mu}$

$L_Q = W_Q = 0$

Contoh 10

Stasion televisi WDAC di sebuah kota metropolitan mempunyai keinginan untuk mengetahui rata-rata banyaknya penonton program acara sabtu sore dan rata-rata waktu yang dihabiskan penonton. Mereka menemukan dari beberapa penelitian bahwa penonton menyalakan televisi mereka pada saat program acara sabtu sore mengikuti sebuah proses Poisson dengan laju 100.000 orang per jam. Ada lima stasion utama di kota itu dan diasumsikan memberikan pilihan pada penonton secara acak. Dari penelitian juga ditunjukkan bahwa rata-rata penonton menyalakan tvnya adalah 90 menit dan itu mengikuti distribusi eksponensial.

Diketahui : $c = \infty$ karena penonton penjadi pelayan

$$\lambda = \frac{100.000}{5} = 20.000 \text{ penonton per jam}$$

Rata-rata penonton menyalakan tvnya adalah 90 menit

Ditanyakan : rata-rata jumlah penonton acara sabtu sore tersebut (L) dan rata-rata waktu yang dihabiskan penonton (W).

Jawab.

Sistem antrian di atas termasuk dalam sistem antrian (M/M/∞) : (GD/∞/∞) karena penonton penjadi pelayan dan tak berhingga jumlahnya sehingga di dapat :

$$\mu = \frac{60}{90} = \frac{2}{3} \text{ penoton per jam}$$

$$L = \frac{\lambda}{\mu}$$

$$= \frac{20.000}{2/3} = 30.000 \text{ orang}$$

$$W = \frac{1}{\mu}$$

$$= \frac{1}{2/3} = \frac{3}{2} \text{ jam} = 1{,}5 \text{ jam}$$

Contoh 11

Sebuah pusat swalayan ramai didatangi pembeli dengan laju kedatangan 50 orang per jam. Kedatangan pembeli berdasarkan proses Poisson. Rata-rata waktu yang dihabiskan pembeli untuk memilih barang yang akan dibeli adalah 45 menit, dan berdistribusi eksponensial. Hitunglah rata-rata pembeli pada swalayan itu dan waktu yang dihabiskan pembeli untuk memilih barang yang akan mereka beli.

Diketahui : $c = \infty$ karena pembeli penjadi pelayan

$\lambda = 50$ orang per jam

Waktu yang dihabiskan pembeli untuk memilih barang yang akan dibeli adalah 45 menit

Ditanyakan : rata-rata pembeli pada swalayan itu (L) dan waktu yang dihabiskan pembeli untuk memilih barang yang akan mereka beli (W).

Jawab.

Sistem antrian di atas termasuk dalam sistem antrian $(M/M/\infty) : (GD/\infty/\infty)$ karena pembeli penjadi pelayan dan tak berhingga jumlahnya, sehingga dapat di cari :

$$\mu = \frac{60}{45} = \frac{4}{3} \text{ orang per jam}$$

$$L = \frac{\lambda}{\mu}$$

$$= \frac{50}{4/3} = 37{,}5 \text{ orang}$$

$$W = \frac{1}{\mu}$$

$$= \frac{1}{4/3} = \frac{3}{4} \text{ jam}$$

BAB V

PENUTUP

A. Kesimpulan

1. Berdasarkan pembahasan pada bab IV dapat dibuktikan bahwa untuk sistem antrian dengan kedatangan Poisson dan untuk waktu pelayanan eksponensial diperoleh rumus untuk L, L_Q, W, dan W_Q untuk masing-masing model adalah sebagai berikut :

   (1) Sistem antrian (M/M/1) : (GD/∞/∞)

   $$L = \frac{\lambda}{\mu-\lambda}$$

   $$L_Q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}$$

   $$W = \frac{1}{\mu-\lambda}$$

   $$W_Q = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}$$

   (2) Sistem antrian (M/M/1) : (GD/N/∞)

   $L = \frac{N}{2}$ untuk ρ = 1 dan $L = \frac{\rho[(1-(N+1)\rho^N + N\rho^{N+1})}{(1-\rho)(1-\rho^{N+1})}$ untuk ρ ? 1

   $L_Q = \frac{N}{2} - \rho(1 - P_N)$ untuk ρ = 1 dan

   $L_Q = \frac{\rho[(1-(N+1)\rho^N + N\rho^{N+1})}{(1-\rho)(1-\rho^{N+1})} - \rho(1 - P_N)$ untuk ρ ? 1

$$W = \frac{N}{2\lambda(1-P_N)} \quad \text{untuk } \rho = 1 \text{ dan}$$

$$W = \frac{[(1-(N+1)\rho^N + N\rho^{N+1})}{\mu(1-\rho)(1-\rho^{N+1})(1-P_N)} \quad \text{untuk } \rho \ ?\ 1$$

$$W_Q = \frac{\frac{N}{2} - \rho(1-P_N)}{\lambda(1-P_N)} \quad \text{untuk } \rho = 1 \text{ dan}$$

$$W_Q = \frac{1-(N+1)\rho^N + N\rho^{N+1}}{\mu(1-\rho)(1-\rho^{N+1})(1-P_N)} - \frac{1}{\mu} \quad \text{untuk } \rho \ ?\ 1$$

(3) Sistem antrian (M/M/c) : (GD/∞/∞)

$$L = \rho\left[\frac{\rho^c p_0}{(c-1)!(c-\rho)^2} + 1\right]$$

$$L_Q = \frac{\rho^{c+1}}{(c-1)!(c-\rho)^2} P_0$$

$$W = \frac{1}{\mu}\left[\frac{P_0\rho^c + (c-1)!(c-\rho)^2}{(c-1)!(c-\rho)^2}\right]$$

$$W_Q = \frac{\rho^c P_0}{\mu(c-1)!(c-\rho)^2}$$

(4) Sistem antrian (M/M/c) : (GD/N/∞)

$$L = P_0 \frac{\rho^c (N-c)(N-c+1)}{2c!} + \rho\,(1 - P_N) \quad \text{untuk } \frac{\rho}{c} = 1$$

$$L = \frac{P_0\rho^{c+1}}{(c-1)!(c-\rho)^2}\left[1-\left(\rho/c\right)^{N-c} - (N-c)\left(\rho/c\right)^{N-c}\left(1-\rho/c\right)\right] + \rho\,(1 - P_N) \quad \text{Untuk } \frac{\rho}{c} \ ?\ 1$$

$$L_Q = P_0 \frac{\rho^c (N-c)(N-c+1)}{2c!} \quad \text{untuk } \frac{\rho}{c} = 1$$

$$L_Q = \frac{P_0 \rho^{c+1}}{(c-1)!(c-\rho)^2}\left[1-\left(\rho/c\right)^{N-c} - (N-c)\left(\rho/c\right)^{N-c}\left(1-\rho/c\right)\right] \text{ Untuk } \frac{\rho}{c} \text{ ? } 1$$

$$W = \frac{P_0 \dfrac{\rho^c (N-c)(N-c+1)}{2c!} + \rho(1-P_N)}{\lambda(1-P_N)} \quad \text{untuk } \frac{\rho}{c} = 1$$

$$W = \frac{\dfrac{P_0\rho^{c+1}}{(c-1)!(c-\rho)^2}\left[1-\left(\dfrac{\rho}{c}\right)^{N-c} - (N-c)\left(\dfrac{\rho}{c}\right)^{N-c}\left(1-\dfrac{\rho}{c}\right)\right] + \rho(1-P_N)}{\lambda(1-P_N)} \text{ Untuk } \frac{\rho}{c} \text{ ? } 1$$

$$W_Q = \frac{P_0 \dfrac{\rho^c (N-c)(N-c+1)}{2c!}}{\lambda(1-P_N)} \quad \text{untuk } \frac{\rho}{c} = 1$$

$$W_Q = \frac{\dfrac{P_0\rho^{c+1}}{(c-1)!(c-\rho)^2}\left[1-\left(\dfrac{\rho}{c}\right)^{N-c} - (N-c)\left(\dfrac{\rho}{c}\right)^{N-c}\left(1-\dfrac{\rho}{c}\right)\right]}{\lambda(1-P_N)} \text{ Untuk } \frac{\rho}{c} \text{ ? } 1$$

(5) Sistem antrian $(M/M/\infty) : (GD/\infty/\infty)$

$$L = \frac{\lambda}{\mu}$$

$$W = \frac{1}{\mu}$$

$$L_Q = W_Q = 0$$

2. Semakin besar L dan L_Q dengan W dan W_Q semakin kecil maka pusat pelayanan tersebut semakin bagus.

B. Saran

Bagi penulis yang hendak mengkaji tentang sistem antrian dapat mengambil tema tentang sistem antrian non Poisson.

DAFTAR PUSTAKA

Anton, H. 1987. *Elementary Linear Algebra with Applications*. Drexel University.

Continuous-time Markov chains. 16 Juli 2006. (www.gogle.com).

Goodman, R. 1988. *Introduction to Stochastic Models.* The Benyamin / comings publishing company. in California.

Julie, Hongki. 2005. *Distribusi Pewarisan Genom yang Identical by Descent Pada Kasus Dua Individu Bersaudara Kandung (Full SIBS) dan Dua Individu Bersaudara Tiri (Half SIBS).* Tesis. Institut Teknologi Bandung.

Proses Poisson. 30 Februari 2006. (www.gogle.com).

Ross, S.M. 1983. *Stochastic Proses*. University of California Berkeley.

Subagyo, P, dkk. 2002. *"Dasar-dasar operations research"*. BPFE-Yogyakarta : Yogyakarta.

Taha, Ha. 1997. *"Riset Operasi"*. Binarupa Aksara : Jakarta.

The M/M/1 queueing sistem. 30 Februari 2006. (www.gogle.com).

Walpole, Ronald E. 1995. *Ilmu Peluang dan Statistika Untuk Insinyur dan Ilmuwan*. ITB : Bandung.

TABEL A.3

Jumlah Peluang Poisson $\sum p(r; \mu)$

r	μ 0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
0	0.9048	0.8187	0.7408	0.6730	0.6065	0.5488	0.4966	0.4493	0.4066
1	0.9953	0.9825	0.9631	0.9384	0.9098	0.8781	0.8442	0.8088	0.7725
2	0.9998	0.9989	0.9964	0.9921	0.9856	0.9769	0.9659	0.9526	0.9371
3	1.0000	0.9999	0.9997	0.9992	0.9982	0.9966	0.9942	0.9909	0.9865
4		1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9996	0.9992	0.9986	0.9977
5				1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9997
6							1.0000	1.0000	1.0000

r	μ 1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0
0	0.3679	0.2231	0.1353	0.0821	0.0498	0.0302	0.0183	0.0111	0.0067
1	0.7358	0.5578	0.4060	0.2873	0.1991	0.1359	0.0916	0.0611	0.0404
2	0.9197	0.8088	0.6767	0.5438	0.4232	0.3208	0.2381	0.1736	0.1247
3	0.9810	0.9344	0.8571	0.7576	0.6472	0.5366	0.4335	0.3423	0.2650
4	0.9963	0.9814	0.9473	0.8912	0.8153	0.7254	0.6288	0.5321	0.4405
5	0.9994	0.9955	0.9834	0.9580	0.9161	0.8576	0.7851	0.7029	0.6160
6	0.9999	0.9991	0.9955	0.9858	0.9665	0.9347	0.8893	0.8311	0.7622
7	1.0000	0.9998	0.9989	0.9958	0.9881	0.9733	0.9489	0.9134	0.8666
8		1.0000	0.9998	0.9989	0.9962	0.9901	0.9786	0.9597	0.9319
9			1.0000	0.9997	0.9989	0.9967	0.9919	0.9829	0.9682
10				0.9999	0.9997	0.9990	0.9972	0.9933	0.9863
11				1.0000	0.9999	0.9997	0.9991	0.9976	0.9945
12					1.0000	0.9999	0.9997	0.9992	0.9980
13						1.0000	0.9999	0.9997	0.9993
14							1.0000	0.9999	0.9998
15								1.0000	0.9999
16									1.0000

*Dari E. C. Molina, *Poisson's* Exponential Limit, copyright 1942, Van Nostrand Reinhold Company, New York, dengan izin penerbit.