ABSTRAK

Tujuan dari penulisan skripsi ini dengan judul Persamaan Diferensial Bessel dan Penerapannya adalah mengetahui penyelesaian Persamaan Diferensial Bessel dengan metode deret kuasa dan mengetahui terapan Persamaan Diferensial Bessel dalam bidang fisika.

Metode yang dipakai dalam penulisan skripsi ini adalah metode studi pustaka yaitu mempelajari buku teks yang berkaitan dengan penyelesaian Persamaan Diferensial Bessel dengan metode deret kuasa.

Persamaan Diferensial Bessel merupakan bentuk khusus dari persamaan diferensial linear homogen orde kedua dengan koefisien variabel, dimana bentuk umum Persamaan Diferensial Bessel adalah $x^2 y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0$, dengan p adalah suatu konstanta sembarang, sehingga persamaan diferensial tersebut disebut dengan Persamaan Diferensial Bessel orde p.

Langkah-langkah menyelesaikan Persamaan Diferensial Bessel :

1. Menentukan akar persamaaan indicial
   Dengan metode Frobenius, jika x_0 adalah titik singular regular diperoleh penyelesaian deret kuasa berbentuk $y(x) = |x - x_o|^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_o)^n$, dengan r adalah akar dari persamaan indicial dari titik singular regular tersebut dan diperoleh r = p dan r = -p.
2. Menentukan relasi perulangan untuk r = p dan menentukan fungsi Bessel jenis pertama dengan orde p.
   Jika r = p, diperoleh $a_n = -\frac{a_{n-2}}{n(n+2p)}$, dengan $n \geq 2$ sehingga diperoleh $a_n = 0$ untuk n adalah bilangan bulat positif dan $a_{2n} = -\frac{(-1)^n}{2^{2n} n!(n+p)!}$.
   Karena p adalah bilangan bulat positif, maka diperoleh fungsi $J_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+p)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p}$ yang sering disebut dengan fungsi Bessel jenis pertama dengan orde p.
3. Menentukan relasi perulangan untuk r = -p dan menentukan fungsinya.
   Jika r = -p diperoleh $a_n = -\frac{a_{n-2}}{n(n-2p)}$, dengan $n \geq 2$ dan $n \neq 2p$, sehingga diperoleh $a_n = 0$ untuk n adalah bilangan bulat ganjil dan $a_{2n} = -\frac{(-1)^n}{2^{2n} n!(n-p)!}$. Jika kedua akarnya bukan bilangan bulat positif maka penyelesaiannya menjadi $J_{-p}(x)$, yaitu $J_{-p}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n-p)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n-p}$.

4. Menentukan penyelesaian kedua dari Persamaan Diferensial Bessel dengan kombinasi linear antara J_p dan y_p.

   Karena akar-akar persamaan indicialnya berbeda, maka penyelesaian kedua Persamaan Diferensial dapat dinyatakan menjadi $y_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n-p} + cJ_p(x)\ln x$, dengan c adalah kostanta dan $c \neq 0$.

   Penyelesaian kedua Persamaan Diferensial Bessel orde p merupakan kombinasi linear dari J_p dan y_p, maka kombinasi linear Persamaan Diferensial Bessel orde p dilambangkan dengan $Y_p(x)$ dan dinyatakan menjadi

$$Y_p(x) = \frac{2}{\pi}\left\{ J_n(x)\left[\ln\frac{x}{2} + \gamma\right] + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p}}{n!(p+n)!}\left(\sum_{k=1}^{n+p}\frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right) - \sum_{n=0}^{p-1}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n-p}\frac{(p-n-1)!}{n!}\right\}$$

   dengan n = p dan γ adalah kostanta Euler dan penyelesaian ini disebut Fungsi Bessel jenis kedua orde p.

5. Menentukan penyelesaian umum dari Persamaan Diferensial Bessel.

   Penyelesaian umum Persamaan Diferensial Bessel orde p adalah $y = c_1 J_p(x) + c_2 J_{-p}(x)$, dimana c_1 *dan* c_2 adalah konstanta sebarang.

Penerapan dari Persamaan Diferensial Bessel dapat ditemukan pada getaran yaitu pada getaran rantai yang digantung dan getaran membran lingkaran.

Abstract

The purpose of this graduating paper with title Bessel's Differential Equation and Application is to show how the power series method can be modified to obtain solution of Bessel's Differential Equation and to acknowledge the application in physics.

The method applied in this graduating paper is the library research which is focused on studying and researching text books relevant to the subject matter solution of Bessel's Differential Equation with power series method.

Bessel's Differential Equation is a special form of second order linear homogen differential equation with variable coefficient, where the general form Bessel's Differential Equation is $x^2y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0$, with p is arbitrary constant and is called Bessel's Differential Equation order – p.

The steps of the problem solving of Bessel's Differential Equation:

1. Determine the roots of the indicial equation
   By using Frobenius method, we observe that $x_0 = 0$ is a regular singular point, obtain solution of power series is $y(x) = |x - x_0|^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$, with r is the roots of the indicial equation and has $r = p$ and $r = -p$.
2. Determine recurrence relation to $r = p$ and Bessel function of the first kind of order p.
   If $r = p$, we obtain $a_n = -\frac{a_{n-2}}{n(n+2p)}$, with $n \geq 2$ and the known value $a_n = 0$ with n is positive integer, thus $a_{2n} = -\frac{(-1)^n}{2^{2n} n!(n+p)!}$. Because p is a positive integer obtain function $J_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+p)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p}$ is called Bessel Function of the first kind of order p.
3. Determine recurrence relation to $r = -p$ and function it.
   If $r = -p$, we obtain $a_n = -\frac{a_{n-2}}{n(n+2p)}$, with $n \geq 2$ and $n \neq 2p$ and we obtain $a_n = 0$ where n is an odd integer and $a_{2n} = -\frac{(-1)^n}{2^{2n} n!(n+p)!}$. If the roots is unequal an odd integer, has a solution $J_{-p}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+p)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n-p}$.
4. Determine the second solution of Bessel's Differential Equation with linear combination of $J_p \; dan \; y_p$.

Because the roots of indicial equation unequal the second solution of Bessel's Differential Equation has form $y_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n-p} + c\, J_p(x) \ln x$, where c is constant and $c \neq 0$. The second solution of Bessel's Differential Equation order p is linear combination of J_p *dan* y_p, we obtain $Y_p(x)$ and is assumed

$$Y_p(x) = \frac{2}{\pi}\left\{ J_n(x)\left[\ln\frac{x}{2} + \gamma\right] + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p}}{n!(n+p)!}\left(\sum_{k=1}^{n+p}\frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right) - \sum_{n=0}^{p-1}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n-1}\frac{(p-n-1)}{n}\right\}$$

where n = p and γ is a number called Euler's constant and the solution is called Bessel Function of the second kind of order p.

5. Determine the general solution of Bessel's Differential Equation
   The general solution of of Bessel's Differential Equation of order p is given by $y = c_1 J_p(x) + c_2 J_{-p}(x)$, where c_1 and c_2 is arbitrary constants.

Application of Bessel's Differential Equation arises in the oscilation of a hanging chain and the circular membrane.