PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

TRANSFORM LAPLACE DAN PENERAPANNYA DALAM PENYELESAIAN MASALAH NILAI AWAL PERSAMAAN DIFERENSIAL LINEAR ORDE DUA DENGAN KOEFISIEN KONSTAN KHUSUSNYA PADA GETARAN PEGAS

Skripsi

Diajukan untuk Memenuhi Salah Satu Syarat
Memperoleh Gelar Sarjana Pendidikan
Program Studi Pendidikan Matematika

Oleh:

Marselina Kartika
NIM. 031414028

PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA
JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
UNIVERSITAS SANATA DHARMA
YOGYAKARTA
2007

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

SKRIPSI

TRANSFORM LAPLACE DAN PENERAPANNYA DALAM PENYELESAIAN MASALAH NILAI AWAL PERSAMAAN DIFERENSIAL LINEAR ORDE DUA DENGAN KOEFISIEN KONSTAN KHUSUSNYA PADA GETARAN PEGAS

Oleh:

Marselina Kartika
NIM. 031414028

Telah disetujui oleh:

Pembimbing,

Drs. A. Tutoyo, M.Sc.

Tanggal : 4 Oktober 2007

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

SKRIPSI

TRANSFORM LAPLACE DAN PENERAPANNYA DALAM PENYELESAIAN MASALAH NILAI AWAL PERSAMAAN DIFERENSIAL LINEAR ORDE DUA DENGAN KOEFISIEN KONSTAN KHUSUSNYA PADA GETARAN PEGAS

Dipersiapkan dan ditulis oleh:

Marselina Kartika
NIM. 031414028

Telah dipertahankan di depan Panitia Penguji
pada tanggal 2 November 2007
dan dinyatakan memenuhi syarat

Susunan Panitia Penguji

	Nama lengkap	Tanda tangan
Ketua	: Drs. Severinus Domi, M.Si.	....
Sekretaris	: Dr. St. Suwarsono	....
Anggota	: Drs. A. Tutoyo, M.Sc.	....
Anggota	: Dr. St. Suwarsono	....
Anggota	: Drs. Al. Haryono	....

Yogyakarta, 2 November 2007

Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan
Universitas Sanata Dharma
Dekan,

Drs. T. Sarkim, M.Ed., Ph.D.

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

HALAMAN PERSEMBAHAN

"…, berdirilah teguh, jangan goyah, dan giatlah selalu dalam pekerjaan Tuhan!

Sebab kamu tahu, bahwa dalam persekutuan dengan Tuhan

jerih payahmu tidak sia-sia."

(1 Korintus 15:58)

" Pengalaman membuat engkau mampu untuk mengenal sebuah kesalahan

bilamana engkau melakukannya lagi "

(Franklin P. Jones)

" Jangan sekali-kali putus asa, tapi jika engkau putus asa juga,

teruslah bekerja dalam keputusasaan itu "

(Edmund Barke)

Dengan penuh kasih aku persembahkan karya mungilku ini untuk :

Tuhan Yesus dan Bunda Maria

Papa, Mama, dan Adikku tersayang yang selalu menjadi penyemangatku

Segenap keluarga di Bangka dan di Jawa

Rekan-rekan mahasiswa/i PMAT '03 dan sahabat-sahabatku

Almamaterku, Universitas Sanata Dharma

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

PERNYATAAN KEASLIAN KARYA

Saya menyatakan dengan sesungguhnya bahwa skripsi yang saya tulis ini tidak memuat karya atau bagian orang lain, kecuali yang telah disebutkan dalam kutipan dan daftar pustaka, sebagaimana layaknya karya ilmiah.

Yogyakarta, 2 November 2007

Penulis,

Marselina Kartika

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

ABSTRAK

Ada berbagai metode yang dapat digunakan untuk menentukan penyelesaian masalah nilai awal dari suatu persamaan diferensial. Salah satunya adalah metode transform Laplace. Transform Laplace dari suatu fungsi $f(t)$ adalah fungsi $F(s)$ yang dinyatakan oleh $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$. Jika $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ maka $f(t)$ disebut invers transform Laplace dari $F(s)$ dan secara simbolis ditulis $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$.

Langkah-langkah untuk menyelesaikan masalah nilai awal persamaan diferensial linear orde dua dengan koefisien konstan yaitu dengan mengambil transform Laplace dari kedua ruas persamaan diferensial. Dengan menggunakan sifat linearitas transform Laplace, teorema transform Laplace dari turunan, dan kondisi awal yang diberikan akan diperoleh persamaan aljabar dalam *s*. Kemudian kita selesaikan persamaan aljabar tersebut. Selanjutnya untuk menentukan penyelesaian masalah nilai awal adalah dengan menggunakan invers transform Laplace.

Persamaan diferensial linear orde dua dengan koefisien konstan mempunyai penerapan pada getaran pegas. Dalam penerapan ini, untuk mendapatkan persamaan diferensial linear orde dua dengan koefisien konstan dari getaran pegas tersebut kita terapkan hukum Hooke dan hukum Newton II. Untuk menentukan persamaan perpindahan benda dari getaran pegas dapat digunakan metode transform Laplace dengan langkah-langkah yang sama seperti yang dikemukakan di atas.

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

ABSTRACT

There are some methods that can be used to determine the solution of the initial value problem of a differential equation. One of them is the Laplace transform method. Laplace transform of function $f(t)$ is function $F(s)$ stated by $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$. If $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ then $f(t)$ is called the inverse Laplace transform of $F(s)$ and symbolically it is written $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$.

Steps for solving the initial value problem of a second order linear differential equation with constant coefficients are obtained by taking the Laplace transform of both sides of the differential equation. By using the linear property of the Laplace transform, the theorem of the Laplace transform of derivatives and the initial condition that is given, we will get an algebraic equation in *s*. Then we solve the algebraic equation. Next, to determine the solution of the initial value problem we use the inverse Laplace transform.

Second order linear differential equation with constant coefficients have an application in spring vibration. In this application, in order to get a second order linear differential equation with constant coefficients of the spring vibration we apply the Hooke law and the second Newton law. To determine the equation for the object displacement in the spring vibration, we can use the Laplace transform method with the same steps as mentioned above.

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

KATA PENGANTAR

Puji dan syukur ke hadirat Allah Bapa di Surga karena penulis dapat menyelesaikan skripsi dengan judul "Transform Laplace dan Penerapannya dalam Penyelesaian Masalah Nilai Awal Persamaan Diferensial Linear Orde Dua dengan Koefisien Konstan Khususnya pada Getaran Pegas". Skripsi ini penulis susun untuk memenuhi salah satu syarat memperoleh gelar Sarjana Pendidikan pada Program Studi Pendidikan Matematika, Jurusan Pendidikan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan di Universitas Sanata Dharma Yogyakarta.

Selama penyusunan skripsi ini banyak kesulitan dan hambatan yang penulis alami. Namun dengan bantuan berbagai pihak semua kesulitan dan hambatan tersebut dapat teratasi. Untuk itu, dalam kesempatan ini penulis dengan tulus hati ingin mengucapkan terima kasih yang tak terhingga kepada :

1. Tuhan Yesus dan Bunda Maria yang selalu menjaga, melindungi, dan menuntun langkahku. Puji syukur atas segala berkat dan anugerah yang telah kuterima.
2. Bapak Drs. A. Tutoyo, M.Sc. selaku dosen pembimbing yang telah membimbing, mengarahkan dengan sabar, menyediakan waktu, dan memberikan masukan serta kritikan yang berharga kepada penulis selama proses penyusunan skripsi ini.
3. Bapak Dr. St. Suwarsono selaku Ketua Program Studi Pendidikan Matematika dan selaku dosen penguji yang telah banyak memberikan bantuan selama penulis

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

menempuh kuliah serta atas masukan dan kritikan yang bermanfaat untuk penyempurnaan skripsi ini.

4. Bapak Drs. Al. Haryono selaku Dosen Pembimbing Akademik angkatan 2003 dan selaku dosen penguji yang selalu membimbing dan memberikan kemudahan-kemudahan selama penulis menempuh kuliah serta atas masukan dan kritikan yang bermanfaat untuk penyempurnaan skripsi ini.
5. Segenap dosen JPMIPA, khususnya dosen-dosen Program Studi Pendidikan Matematika, Universitas Sanata Dharma yang telah mendidik, membagi pengetahuan dan pengalaman yang sangat bermanfaat kepada penulis.
6. Bapak Sunardjo dan Bapak Sugeng di sekretariat JPMIPA atas segala keramahan, bantuan, dan kerja samanya dalam membantu penulis selama kuliah hingga penyelesaian skripsi ini.
7. Papa Venantius Widiyanto, Mama Petronella Ratnawati, dan adikku tersayang Benediktus Raditya atas doa yang tak pernah kunjung henti, cinta, kasih sayang, perhatian, kesempatan, nasehat, dan dorongan yang diberikan baik secara materiil maupun spiritual. Kalian adalah semangatku untuk menyelesaikan skripsi ini. Semoga skripsiku ini dapat menjadi hadiah kecil yang membanggakan.
8. Sahabat terbaikku, Mbak Wr, Era, dan Heni yang selalu jadi tempat curhatku, terima kasih atas bantuan, semangat, perhatian, masukan, dan kritikan yang sangat berarti. Teman yang baik tidak selalu memberi ciuman dan pelukan tapi terkadang juga tamparan agar aku sadar dan bangkit dari kesalahan. Terima kasih untuk persahabatan kita.

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

9. Teman-teman PMAT angkatan 2003 di JPMIPA, Patris, Tami, Yohana, Patres, Ika, Iin, Tika Ndut, Nita, Tuti, Oni, Lilis, Yuni, Sri Kotini, Tatik, Mujiyono, Bernand, Dimas, dan teman-teman angkatan 2003 lainnya. Terima kasih atas bantuan, semangat, keceriaan dan kebersamaan kita selama kuliah.
10. Teman-teman Kost Palem, Imelda, Anni, Dian, Citra, Mbak Retta, Aline, Siska, Eta, Mbak Nia, Cici, Krisen, Mitha, Anna, Lia, Tante dan Jessie, Aprina, Emma, Rini, Dita, dan Lina. Terima kasih atas bantuan, semangat, perhatian yang diberikan kepadaku, dan kebersamaan kita selama di kost.
11. Seluruh staf perpustakaan USD Paingan, atas segala bantuan, kerja sama, dan keramahan yang telah diberikan selama ini.
12. Semua pihak yang tidak dapat disebutkan satu persatu yang telah rela membantu dan mendukung penulis hingga selesainya proses penyusunan skripsi ini.

Semoga segala bantuan, perhatian, serta dukungan yang telah diberikan akan mendapat imbalan dari Tuhan Yang Maha Esa. Penulis menyadari masih banyak kekurangan dan kesalahan dalam skripsi ini. Karena itu penulis sangat mengharapkan masukan dan saran dari pembaca demi perbaikan skripsi ini. Akhir kata, penulis berharap semoga skripsi yang tidak sempurna ini bermanfaat bagi setiap pembaca.

Yogyakarta, 2 November 2007

Penulis

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

DAFTAR ISI

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

BAB I

PENDAHULUAN

A. Latar Belakang

Persamaan diferensial adalah persamaan yang memuat derivatif atau diferensial dari satu atau lebih fungsi. Persamaan diferensial dapat diklasifikasikan dengan banyak cara. Jika fungsi yang belum diketahui dalam persamaan diferensial bergantung hanya pada satu variabel bebas maka persamaan itu disebut persamaan diferensial biasa. Bentuk umum persamaan diferensial biasa :

$$f(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \ldots, \frac{d^ny}{dx^n}) = 0,$$

dengan x menyatakan variabel bebas dan y menyatakan variabel tak bebas. Sedangkan jika fungsi yang belum diketahui bergantung pada dua atau lebih variabel bebas, maka persamaan itu disebut persamaan diferensial parsial. Bentuk umum persamaan diferensial parsial :

$$f(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \ldots, \frac{\partial^n z}{\partial y^n}) = 0,$$

dengan x dan y menyatakan variabel bebas, sedangkan z menyatakan variabel tak bebas. Contoh persamaan diferensial :

$$\frac{dy}{dx} = 2xy \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + 3x \frac{dy}{dx} - 2y = 0 \quad \text{.............................} \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad \text{..} \quad (3)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 1 + x \quad \text{..} \quad (4)$$

Persamaan (1) dan (2) merupakan contoh persamaan diferensial biasa, sedangkan persamaan (3) dan (4) merupakan contoh persamaan diferensial parsial.

Persamaan diferensial dibedakan menurut tingkat (orde) dan menurut derajatnya. Orde persamaan diferensial adalah tingkat derivatif tertinggi yang muncul dalam persamaan diferensial. Derajat adalah pangkat dari derivatif tingkat tertinggi yang muncul dalam persamaan diferensial. Persamaan (1) merupakan persamaan diferensial biasa orde satu dan berderajat satu, sedangkan persamaan (2) merupakan persamaan diferensial biasa orde dua dan berderajat satu. Persamaan (3) merupakan persamaan diferensial parsial orde satu dan berderajat satu, sedangkan persamaan (4) merupakan persamaan diferensial parsial orde dua dan berderajat satu.

Persamaan diferensial biasa masih bisa dibagi lagi menjadi 2 kelompok besar, yaitu persamaan diferensial linear dan persamaan diferensial non linear. Persamaan diferensial biasa tingkat n disebut linear dalam y jika persamaan diferensial dapat ditulis dalam bentuk :

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{n-1} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x) \quad \text{.............................} \quad (5)$$

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

di mana $a_0, a_1, \cdots, a_n$ dan *f* adalah fungsi-fungsi kontinu pada suatu interval *x* dan $a_n(x) \neq 0$ pada interval itu. Fungsi $a_n(x)$ disebut fungsi-fungsi koefisien. Jadi, persamaan diferensial biasa dikatakan linear jika syarat-syarat berikut dipenuhi :

1. Fungsi yang belum diketahui dan derivatif-derivatifnya secara aljabar yang terjadi hanya berpangkat satu.
2. Tidak ada hasil kali yang berkaitan dengan fungsi yang belum diketahui dan derivatif-derivatifnya atau dua atau lebih derivatif.
3. Tidak ada fungsi transendental dari y, y', y'', dan seterusnya.

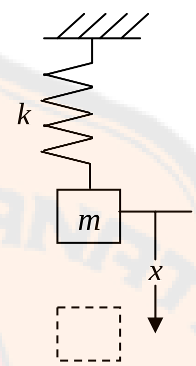
Persamaan diferensial yang tidak linear disebut persamaan diferensial non linear. Jika pada persamaan (5) $f(x) = 0$, maka persamaan itu disebut persamaan diferensial linear homogen. Tetapi jika $f(x) \neq 0$, maka persamaan itu disebut persamaan diferensial linear non homogen. Jika koefisien $a_0(x), a_1(x), \cdots, a_n(x)$ adalah konstan, maka persamaan (5) disebut persamaan diferensial linear dengan koefisien konstan, sedangkan jika koefisien-koefisiennya berupa variabel maka persamaan (5) disebut persamaan diferensial linear dengan koefisien variabel.

Persamaan diferensial linear orde dua dengan koefisien konstan mempunyai penerapan pada getaran pegas. Untuk lebih memahami penerapan persamaan diferensial linear orde dua dengan koefisien konstan pada getaran pegas, perhatikan contoh berikut.

Contoh : Sebuah benda bermassa *m* tergantung dari keadaan seimbang pada sebuah pegas dengan konstanta pegas *k* kemudian benda itu ditarik ke

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

bawah sejauh jarak tertentu dengan pengandaian tak ada gesekan seperti gambar di bawah ini :



Jika x menyatakan perpindahan benda dari keadaan seimbang dan F menyatakan gaya pengembalian pegas maka berdasarkan hukum Hooke $F = -kx$. Dengan menggunakan hukum Newton II, $F = ma$ di mana m adalah massa benda, a adalah percepatan benda, dan F adalah gaya yang bekerja pada benda dengan massa m maka kita mempunyai hubungan :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

atau $m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$.

Persamaan di atas merupakan persamaan diferensial linear homogen orde dua dengan koefisien konstan. Persamaan karakteristiknya dapat

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

ditulis dalam variabel r yaitu $mr^2 + k = 0$ yang mempunyai akar-akar $r = \pm\, i\sqrt{\dfrac{k}{m}}$. Jika $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ maka penyelesaian umumnya :

$$x(t) = c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \sin \omega_0 t\,.$$

Persamaan tersebut menyatakan perpindahan benda pada saat *t*. Untuk menentukan penyelesaian khususnya kita harus mengetahui titik awal dan kecepatan awal dari benda yaitu :

$$x(0) = x_0\,,\; x'(0) = v_0\,.$$

Penyelesaian dari masalah nilai awal di atas dapat diperoleh dengan mensubstitusikan penyelesaian umum ke dalam kondisi awal ini.

$x(t) = c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \sin \omega_0 t$ disubstitusikan ke $x(0) = x_0$.

$$x(0) = c_1 \cos 0 + c_2 \sin 0$$

$$x_0 = c_1.1 + c_2.0$$

$$c_1 = x_0$$

$x(t) = c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \sin \omega_0 t$ disubstitusikan ke $x'(0) = v_0$.

$$x'(t) = -\omega_0 c_1 \sin \omega_0 t + \omega_0 c_2 \cos \omega_0 t$$

$$x'(0) = -\omega_0 c_1 \sin 0 + \omega_0 c_2 \cos 0$$

$$v_0 = -\omega_0 c_1.0 + \omega_0 c_2.1$$

$$\omega_0 c_2 = v_0$$

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

$$c_2 = \frac{v_0}{\omega_0}$$

Sehingga didapat penyelesaian khususnya :

$$x(t) = x_0 \cos \omega_0 t + \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t \ .$$

Dari contoh di atas, dapat dilihat bahwa dalam menentukan penyelesaian khusus suatu persamaan diferensial kita perlu mengetahui kondisi awalnya. Persamaan diferensial beserta kondisi awal tersebut dinamakan masalah nilai awal. Metode-metode yang dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah nilai awal dari persamaan diferensial linear orde dua dengan koefisien konstan misalnya metode reduksi, metode koefisien tak tentu, metode variasi parameter, dan lain-lain. Tetapi ada salah satu metode yang berbeda dengan metode lainnya yaitu metode transform Laplace.

Dalam menyelesaikan masalah nilai awal persamaan diferensial, biasanya yang pertama dilakukan adalah menentukan penyelesaian umumnya. Setelah memperoleh penyelesaian umum, kita menggunakan syarat-syarat awal yang diberikan untuk mencari penyelesaian khusus yang diinginkan. Melalui transform Laplace, kita dapat menyelesaikan masalah nilai awal tanpa mencari penyelesaian umumnya terlebih dahulu.

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

Transform Laplace didefinisikan sebagai berikut : misalkan $f(t)$ suatu fungsi dari t yang terdefinisikan untuk $t > 0$ maka transfom Laplace dari $f(t)$ yang dinyatakan oleh $\mathcal{L}\{f(t)\}$, didefinisikan sebagai

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt \text{, untuk } s > 0 .$$

Karena alasan itulah penulis tertarik untuk mengkaji lebih jauh transform Laplace secara teoritik dan penerapan transform Laplace dalam menyelesaikan masalah nilai awal persamaan diferensial linear orde dua dengan koefisien konstan khususnya pada getaran pegas.

B. Rumusan Masalah

Pokok permasalahan yang akan dibahas dalam penulisan ini adalah membahas transform Laplace dan bagaimana penerapan transform Laplace dalam menyelesaikan masalah nilai awal persamaan diferensial linear orde dua dengan koefisien konstan khususnya pada getaran pegas.

C. Batasan Masalah

Dalam skripsi ini, permasalahan yang akan dibahas dibatasi pada penggunaan transform Laplace dalam menyelesaikan masalah nilai awal persamaan diferensial linear orde dua dengan koefisien konstan. Untuk penerapan transform Laplace penulis akan membahas bagaimana transform Laplace

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

digunakan untuk menyelesaikan masalah nilai awal persamaan diferensial linear orde dua dengan koefisien konstan khususnya pada getaran pegas.

D. Tujuan Penulisan

Tujuan penulisan ini adalah untuk lebih memahami transform Laplace secara teoritik dan penerapan transform Laplace dalam menyelesaikan masalah nilai awal persamaan diferensial linear orde dua dengan koefisien konstan khususnya pada getaran pegas.

E. Metode Penulisan

Metode yang akan digunakan dalam membahas topik tersebut adalah metode studi pustaka.

F. Sistematika Penulisan

Penulisan ini terbagi dalam beberapa bab, yakni :

BAB I Pendahuluan

A. Latar Belakang
B. Rumusan Masalah
C. Batasan Masalah
D. Tujuan Penulisan
E. Metode Penulisan
F. Sistematika Penulisan

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

BAB II Transform Laplace

A. Pengertian Transform Laplace

B. Sifat-Sifat Transform Laplace

C. Invers Transform Laplace

D. Transform Laplace dari Turunan dan Integral

E. Konvolusi Dua Fungsi f(t) dan g(t)

F. Aplikasi Transform Laplace dalam Menyelesaikan Masalah Nilai Awal Persamaan Diferensial Linear Orde Dua dengan Koefisien Konstan

BAB III Penerapan Transform Laplace dalam Penyelesaian Masalah Nilai Awal Persamaan Diferensial Linear Orde Dua dengan Koefisien Konstan pada Getaran Pegas

A. Getaran Tak Teredam

B. Getaran Teredam

C. Getaran Terpaksa Tak Teredam

D. Getaran Terpaksa Teredam

BAB IV PENUTUP

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

BAB II

TRANSFORM LAPLACE

A. Pengertian Transform Laplace

Definisi (transform Laplace) : Misalkan $f(t)$ suatu fungsi dari t yang terdefinisikan untuk $t > 0$ maka transfom Laplace dari $f(t)$ yang dinyatakan oleh $\mathcal{L}\{f(t)\}$, didefinisikan sebagai

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt \text{, untuk } s > 0 .$$

Integral pada definisi transform Laplace merupakan bentuk integral tak wajar sehingga untuk mengerjakan integral tak wajar ini kita kerjakan :

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt = \lim_{T\to\infty} \int_0^T e^{-st} f(t)dt .$$

Jadi, transform Laplace bergantung pada ada tidaknya nilai limit.

Dengan menggunakan definisi di atas, kita dapat mencari transform Laplace dari beberapa fungsi elementer.

Contoh 1 : Tentukan transform Laplace dari $f(t) = 1,\ t > 0$.

Dengan menggunakan definisi transform Laplace maka

$$\mathcal{L}\{1\} = \int_0^\infty e^{-st}(1)dt$$

$$= \lim_{T\to\infty} \int_0^T e^{-st}(1)dt$$

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

$$= \lim_{T\to\infty}\left[-\frac{e^{-st}}{s}\right]_0^T$$

$$= \lim_{T\to\infty}\left(-\frac{e^{-sT}}{s}+\frac{1}{s}\right)$$

$$= \frac{1}{s}$$

Jadi, $\mathcal{L}\{1\} = \dfrac{1}{s}$, di mana $s > 0$.

Contoh 2 : Tentukan transform Laplace dari $f(t) = t$, $t > 0$.

Dengan menggunakan definisi transform Laplace maka

$$\mathcal{L}\{t\} = \int_0^\infty e^{-st}tdt$$

$$= \lim_{T\to\infty}\int_0^T e^{-st}tdt$$

Kita gunakan pengintegralan parsial.

Misalkan : $u = t$ $\qquad dv = e^{-st}dt$

$du = dt$ $\qquad v = -\dfrac{1}{s}e^{-st}$

sehingga

$$\mathcal{L}\{t\} = \lim_{T\to\infty}\left\{\left[-\frac{1}{s}te^{-st}\right]_0^T + \frac{1}{s}\int_0^T e^{-st}dt\right\}$$

$$= \lim_{T\to\infty}\left\{\left[-\frac{1}{s}te^{-st}\right]_0^T - \left[\frac{1}{s^2}e^{-st}\right]_0^T\right\}$$

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

$$= \lim_{T\to\infty}\left\{\left[-\frac{1}{s}Te^{-sT}+0\right]-\left[\frac{1}{s^2}e^{-sT}-\frac{1}{s^2}\right]\right\}$$

$$= \lim_{T\to\infty}\left\{\left[-\frac{1}{s}Te^{-sT}\right]-\left[\frac{1}{s^2}e^{-sT}-\frac{1}{s^2}\right]\right\}$$

$$= \lim_{T\to\infty}\left[-\frac{1}{s}Te^{-sT}-\frac{1}{s^2}e^{-sT}+\frac{1}{s^2}\right]$$

$$= \frac{1}{s^2}$$

Jadi, $\mathcal{L}\{t\} = \frac{1}{s^2}$, di mana $s > 0$.

Contoh 3 : Tentukan transform Laplace dari $f(t) = t^n$, $t > 0$.

Dengan menggunakan definisi transform Laplace maka

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \int_0^\infty e^{-st}t^n dt$$

$$= \lim_{T\to\infty}\int_0^T e^{-st}t^n dt$$

Kita gunakan pengintegralan parsial.

Misalkan : $u = t^n$ $\qquad dv = e^{-st}dt$

$du = nt^{n-1}dt$ $\qquad v = -\frac{1}{s}e^{-st}$

Sehingga

$$\lim_{T\to\infty}\int_0^T e^{-st}t^n dt = \lim_{T\to\infty}\left\{\left[-\frac{1}{s}t^n e^{-st}\right]_0^T + \frac{n}{s}\int_0^T e^{-st}t^{n-1}dt\right\}$$

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

$$= \lim_{T\to\infty}\left[-\frac{1}{s}t^n e^{-st}\right]_0^T + \lim_{T\to\infty}\frac{n}{s}\int_0^T e^{-st}t^{n-1}dt$$

$$= \lim_{T\to\infty}\left[-\frac{1}{s}T^n e^{-sT} + 0\right] + \lim_{T\to\infty}\frac{n}{s}\int_0^T e^{-st}t^{n-1}dt$$

$$= 0 + \lim_{T\to\infty}\frac{n}{s}\int_0^T e^{-st}t^{n-1}dt$$

$$= \frac{n}{s}\lim_{T\to\infty}\int_0^T e^{-st}t^{n-1}dt$$

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n}{s}\lim_{T\to\infty}\int_0^T e^{-st}t^{n-1}dt = \frac{n}{s}\,\mathcal{L}\{t^{n-1}\}$$

Apabila n diganti dengan $n-1$ maka

$$\mathcal{L}\{t^{n-1}\} = \frac{n-1}{s}\,\mathcal{L}\{t^{n-2}\}$$

sehingga $\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n}{s}\cdot\frac{n-1}{s}\,\mathcal{L}\{t^{n-2}\}$

$$= \frac{n(n-1)}{s^2}\,\mathcal{L}\{t^{n-2}\}$$

Jika diteruskan akan didapat

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}{s^n}\,\mathcal{L}\{t^0\}$$

di mana $n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1 = n!$ dan $\mathcal{L}\{t^0\} = \mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}$

Jadi, $\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^n}\left(\frac{1}{s}\right) = \frac{n!}{s^{n+1}}$, di mana $s > 0$.

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

Contoh 4 : Tentukan transform Laplace dari $f(t) = e^{at}$, $t > 0$.

Dengan menggunakan definisi transform Laplace maka

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \int_0^\infty e^{-st} e^{at}\, dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-(s-a)t}\, dt$$

$$= \lim_{T\to\infty} \int_0^T e^{-(s-a)t}\, dt$$

$$= \lim_{T\to\infty} \left[-\frac{e^{-(s-a)t}}{s-a} \right]_0^T$$

$$= \lim_{T\to\infty} \left[-\frac{e^{-(s-a)T}}{s-a} + \frac{1}{s-a} \right]$$

$$= \frac{1}{s-a}$$

Jadi, $\mathcal{L}\{e^{at}\} = \dfrac{1}{s-a}$, di mana $s > a$.

Contoh 5: Tentukan transform Laplace dari $f(t) = \sin kt$, $t > 0$.

Dengan menggunakan definisi transform Laplace maka

$$\mathcal{L}\{\sin kt\} = \int_0^\infty e^{-st} \sin kt\, dt$$

$$= \lim_{T\to\infty} \int_0^T e^{-st} \sin kt\, dt$$

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

Untuk mencari $\int_0^T e^{-st} \sin kt\, dt$ kita gunakan pengintegralan parsial.

Misalkan : $u = e^{-st}$ $\qquad dv = \sin kt\, dt$

$$du = -se^{-st} dt \qquad v = -\frac{1}{k}\cos kt$$

sehingga

$$\int_0^T e^{-st} \sin kt\, dt = \left[-\frac{1}{k}e^{-st}\cos kt\right]_0^T - \frac{s}{k}\int_0^T e^{-st}\cos kt\, dt$$

Untuk mencari $\int_0^T e^{-st} \cos kt\, dt$ kita gunakan pengintegralan parsial.

Misalkan : $u = e^{-st}$ $\qquad dv = \cos kt\, dt$

$$du = -se^{-st} dt \qquad v = \frac{1}{k}\sin kt$$

didapat

$$\int_0^T e^{-st} \sin kt\, dt = \left[-\frac{1}{k}e^{-st}\cos kt\right]_0^T - \frac{s}{k}\left\{\left[\frac{1}{k}e^{-st}\sin kt\right]_0^T + \frac{s}{k}\int_0^T e^{-st}\sin ktdt\right\}$$

$$= \left[-\frac{1}{k}e^{-st}\cos kt\right]_0^T - \frac{s}{k}\left[\frac{1}{k}e^{-st}\sin kt\right]_0^T - \frac{s^2}{k^2}\int_0^T e^{-st}\sin kt\, dt$$

Tambahkan kedua ruas dengan $\frac{s^2}{k^2}\int_0^T e^{-st}\sin kt\, dt$ akan diperoleh

$$\left(1+\frac{s^2}{k^2}\right)\int_0^T e^{-st}\sin kt\, dt = \left[-\frac{1}{k}e^{-st}\cos kt\right]_0^T - \frac{s}{k}\left[\frac{1}{k}e^{-st}\sin kt\right]_0^T$$

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

$$\left(\frac{k^2+s^2}{k^2}\right)\int_0^T e^{-st}\sin kt\,dt = \left[-\frac{1}{k}e^{-st}\cos kt\right]_0^T - \frac{s}{k}\left[\frac{1}{k}e^{-st}\sin kt\right]_0^T$$

$$\int_0^T e^{-st}\sin kt\,dt = \frac{k^2}{s^2+k^2}\left\{\left[-\frac{1}{k}e^{-st}\cos kt\right]_0^T - \frac{s}{k}\left[\frac{1}{k}e^{-st}\sin kt\right]_0^T\right\}$$

maka

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{\sin kt\} &= \lim_{T\to\infty}\frac{k^2}{s^2+k^2}\left\{\left[-\frac{1}{k}e^{-st}\cos kt\right]_0^T - \frac{s}{k}\left[\frac{1}{k}e^{-st}\sin kt\right]_0^T\right\} \\
&= \frac{k^2}{s^2+k^2}\lim_{T\to\infty}\left\{\left[-\frac{1}{k}e^{-st}\cos kt\right]_0^T - \frac{s}{k}\left[\frac{1}{k}e^{-st}\sin kt\right]_0^T\right\} \\
&= \frac{k^2}{s^2+k^2}\lim_{T\to\infty}\left\{\left[-\frac{1}{k}e^{-sT}\cos kT + \frac{1}{k}\right] - \frac{s}{k}\left[\frac{1}{k}e^{-sT}\sin kT - 0\right]\right\} \\
&= \frac{k^2}{s^2+k^2}\lim_{T\to\infty}\left\{\left[-\frac{1}{k}e^{-sT}\cos kT + \frac{1}{k}\right] - \left[\frac{s}{k^2}e^{-sT}\sin kT\right]\right\} \\
&= \frac{k^2}{s^2+k^2}\left\{\lim_{T\to\infty}\left[-\frac{1}{k}e^{-sT}\cos kT + \frac{1}{k}\right] - \lim_{T\to\infty}\left[\frac{s}{k^2}e^{-sT}\sin kT\right]\right\} \\
&= \frac{k^2}{s^2+k^2}\cdot\frac{1}{k} \\
&= \frac{k}{s^2+k^2}
\end{aligned}$$

Jadi, $\mathcal{L}\{\sin kt\} = \dfrac{k}{s^2+k^2}$, di mana $s > 0$.

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

Contoh 6 : Tentukan transform Laplace dari $f(t) = \cosh kt$, $t > 0$.

Kita ketahui bahwa $\cosh kt = \dfrac{e^{kt} + e^{-kt}}{2}$ untuk $k > 0$.

Dengan menggunakan definisi transform Laplace maka

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}\{\cosh kt\} &= \int_0^\infty e^{-st} \cosh kt \, dt \\
&= \int_0^\infty e^{-st} \left(\frac{e^{kt} + e^{-kt}}{2} \right) dt \\
&= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2} \int_0^T e^{-st} \left(e^{kt} + e^{-kt} \right) dt \\
&= \frac{1}{2} \lim_{T\to\infty} \left(\int_0^T e^{-st} e^{kt} \, dt + \int_0^T e^{-st} e^{-kt} \, dt \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\lim_{T\to\infty} \int_0^T e^{-(s-k)t} \, dt + \lim_{T\to\infty} \int_0^T e^{-(s+k)t} \, dt \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\lim_{T\to\infty} \left[-\frac{e^{-(s-k)t}}{s-k} \right]_0^T + \lim_{T\to\infty} \left[-\frac{e^{-(s+k)t}}{s+k} \right]_0^T \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\lim_{T\to\infty} \left[-\frac{e^{-(s-k)t}}{s-k} + \frac{1}{s-k} \right] + \lim_{T\to\infty} \left[-\frac{e^{-(s+k)t}}{s+k} + \frac{1}{s+k} \right] \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s-k} + \frac{1}{s+k} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{s+k+s-k}{s^2 - k^2} \right)
\end{aligned}
$$

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2s}{s^2 - k^2}\right)$$

$$= \frac{s}{s^2 - k^2}$$

Jadi, $\mathscr{L}\{\cosh kt\} = \dfrac{s}{s^2 - k^2}$, di mana $s > |k|$.

Transform Laplace yang dihasilkan dari contoh-contoh tersebut dapat dirangkum menjadi sebuah tabel yang disebut tabel transform Laplace. Tetapi tabel ini tidak hanya berisi contoh-contoh di atas karena masih ada transform Laplace yang lain dan tidak mungkin untuk dibahas satu persatu. Jadi, transform Laplace dari beberapa fungsi elementer lainnya dapat dilihat dalam tabel transform Laplace pada lembar lampiran.

Dari contoh-contoh di atas dapat dilihat bahwa transform Laplace dari suatu fungsi selalu ada untuk $s > 0$. Untuk hal tersebut terdapat teorema eksistensi transform Laplace. Tetapi terlebih dahulu akan dibicarakan mengenai pengertian fungsi kontinu sepotong-sepotong dan fungsi berorde eksponensial.

Definisi (fungsi kontinu sepotong-sepotong) : Sebuah fungsi $f(t)$ disebut kontinu sepotong-sepotong pada sebuah interval terhingga $[a,b]$ jika $f(t)$ kontinu di setiap titik pada interval $[a,b]$ selain di sejumlah titik tertentu di mana $f(t)$ diskontinu serta memiliki limit kanan dan limit kiri yang berhingga.

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

Contoh 7 : Sebuah fungsi $f(t)$ didefinisikan dengan $f(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < 2 \\ 2, & t > 2 \end{cases}$.

Fungsi $f(t)$ kontinu pada selang $(0,2)$ karena pada selang tersebut fungsi $f(t)$ bernilai 1. Demikian pula pada selang $(2,\infty)$ fungsi $f(t)$ kontinu karena fungsi $f(t)$ bernilai 2. Dan pada $t = 2$ terdapat dua limit yaitu

$f(2-) = \lim\limits_{t \to 2^-} f(t) = 1$

$f(2+) = \lim\limits_{t \to 2^+} f(t) = 2$

Jadi, fungsi $f(t)$ tersebut kontinu sepotong-sepotong pada $0 < t < \infty$.

Contoh 8 : Perlihatkan bahwa $f(t) = \begin{cases} t^2, & 0 \le t < 1 \\ 2 - t, & 1 \le t < 2 \\ 3 - t, & 2 \le t \le 3 \end{cases}$ kontinu sepotong-sepotong dalam selang tertutup $[0,3]$.

Fungsi $f(t)$ kontinu dalam selang $[0,1)$ karena pada selang itu $f(t) = t^2$, $f(t)$ juga kontinu dalam selang $[1,2)$. Demikian juga pada selang $[2,3]$. Pada $t = 1$, $f(1-) = \lim\limits_{t \to 1^-} f(t) = 1$ dan $f(1+) = \lim\limits_{t \to 1^+} f(t) = 1$. Sedangkan pada $t = 2$ terdapat dua limit, yaitu $f(2-) = \lim\limits_{t \to 2^-} f(t) = 0$ dan $f(2+) = \lim\limits_{t \to 2^+} f(t) = 1$. Jadi, fungsi $f(t)$ kontinu sepotong-sepotong dalam selang $0 \le t \le 3$.

Definisi (fungsi berorde eksponensial) : Sebuah fungsi $f(t)$ adalah fungsi berorde eksponensial jika ada bilangan real α, M, dan T sedemikian hingga

$|f(t)| \le Me^{\alpha t}$, untuk $t \ge T$.

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

Contoh 9 : Sebuah fungsi $f(t) = e^{kt} \sin bt$ termasuk fungsi berorde eksponensial dengan $\alpha = k$ karena menurut definisi fungsi berorde eksponensial

$e^{-kt}|f(t)| = e^{-kt}|e^{kt} \sin bt| = |\sin bt|$

yang terbatas untuk semua *t*.

Contoh 10 : Setiap fungsi yang terbatas adalah fungsi berorde eksponensial seperti $\sin bt$ dan $\cos bt$ dengan $\alpha = 0$.

Contoh 11 : Fungsi yang dinyatakan dengan rumus $f(t) = e^{t^3}$ tidak termasuk fungsi berorde eksponensial karena $e^{-\alpha t}|f(t)| = e^{-\alpha t} e^{t^3} = e^{t^3 - \alpha t}$ menjadi tak berhingga jika $t \to \infty$ untuk berapapun nilai α.

Teorema (eksistensi transform Laplace) : Jika sebuah fungsi $f(t)$ kontinu sepotong-sepotong pada selang $[0, \infty)$ dan berorde eksponensial α, maka transform Laplace ada untuk $s > \alpha$.

Bukti : $\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$ dapat kita bagi dua menjadi $\int_0^T e^{-st} f(t)dt + \int_T^\infty e^{-st} f(t)dt$.

Integral pertama yaitu $\int_0^T e^{-st} f(t)dt$ ada karena $f(t)$ kontinu sepotong-sepotong dalam interval $[0, T]$. Untuk membuktikan bahwa integral kedua juga konvergen maka kita gunakan teorema uji banding untuk integral tak wajar yaitu jika *g* dan *G* fungsi-fungsi real sedemikian hingga $0 \le g(t) \le G(t)$ dalam interval $a \le t < \infty$

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

dan andaikan $\int_a^\infty G(t)dt$ ada dan g terintegralkan dalam setiap interval $a \le t < \infty$ maka $\int_a^\infty g(t)dt$ juga ada. Karena $f(t)$ adalah fungsi berorde eksponensial α untuk $t \ge T$ maka berlaku

$e^{-\alpha t}|f(t)| \le M$, untuk $t \ge T$

Kalikan dengan $e^{-st}e^{\alpha t}$ sehingga kita memperoleh

$|e^{-st} f(t)| \le Me^{-st}e^{\alpha t}$

Andaikan $g(t) = |e^{-st} f(t)|$ dan $G(t) = Me^{-st}e^{\alpha t} = Me^{-(s-\alpha)t}$.

Oleh karena itu,

$$
\begin{aligned}
\int_T^\infty Me^{-(s-\alpha)t}dt &= M\int_T^\infty e^{-(s-\alpha)t}dt \\
&= M \lim_{x\to\infty}\int_T^x e^{-(s-\alpha)t}dt \\
&= M \lim_{x\to\infty}\left[-\frac{e^{-(s-\alpha)t}}{s-\alpha}\right]_T^x \\
&= M \lim_{x\to\infty}\left[-\frac{e^{-(s-\alpha)x}}{s-\alpha}+\frac{e^{-(s-\alpha)T}}{s-\alpha}\right] \\
&= M\,\frac{e^{-(s-\alpha)T}}{s-\alpha}
\end{aligned}
$$

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

Jadi, $\int_T^{\infty} Me^{-(s-\alpha)t}dt$ ada untuk $s > \alpha$. Karena $\left|e^{-st} f(t)\right| \leq Me^{-(s-\alpha)t}$ untuk $t \geq T$ dan $\int_T^{\infty} Me^{-(s-\alpha)t}dt$ ada maka berdasarkan teorema uji banding, integral $\int_T^{\infty} \left|e^{-st} f(t)\right|dt$ ada untuk $s > \alpha$ sehingga $\int_T^{\infty} e^{-st} f(t)dt$ juga ada untuk $s > \alpha$. Jadi, karena kedua integral tersebut ada maka transform Laplace $F(s)$ ada untuk $s > \alpha$.

B. Sifat-Sifat Transform Laplace

Selain menggunakan definisi transform Laplace untuk mencari transform Laplace, kita juga memerlukan sifat-sifat dari transform Laplace yang dapat mempermudah kita untuk mencari transform Laplace tersebut. Sifat-sifat dari transform Laplace ini dapat juga diperoleh dengan menggunakan definisi transform Laplace.

Teorema (sifat linearitas) : Misalkan $f_1(t)$ dan $f_2(t)$ adalah fungsi-fungsi dengan transform Laplacenya masing-masing $F_1(s)$ dan $F_2(s)$ sedangkan c_1 dan c_2 adalah sebarang konstanta maka

$$\mathcal{L}\{c_1 f_1(t) \pm c_2 f_2(t)\} = c_1 \mathcal{L}\{f_1(t)\} \pm c_2 \mathcal{L}\{f_2(t)\} = c_1F_1(s) \pm c_2F_2(s).$$

Bukti : $\mathcal{L}\{c_1 f_1(t) \pm c_2 f_2(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st}(c_1 f_1(t) \pm c_2 f_2(t))dt$

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

$$= c_1\int_0^\infty e^{-st} f_1(t)dt \pm c_2\int_0^\infty e^{-st} f_2(t)dt$$

$$= c_1\,\mathcal{L}\{f_1(t)\} \pm c_2\,\mathcal{L}\{f_2(t)\}$$

$$= c_1F_1(s) \pm c_2F_2(s)$$

Contoh 12 : Tentukan transform Laplace dari fungsi $f(t) = \sinh kt$ dengan menggunakan sifat linearitas.

Kita ketahui bahwa $\sinh kt = \dfrac{e^{kt} - e^{-kt}}{2}$ untuk $k > 0$ dan $\mathcal{L}\{e^{kt}\} = \dfrac{1}{s-k}$ maka

$$\mathcal{L}\{\sinh kt\} = \mathcal{L}\left\{\frac{e^{kt} - e^{-kt}}{2}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\,\mathcal{L}\{e^{kt}\} - \frac{1}{2}\,\mathcal{L}\{e^{-kt}\}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-k}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s+k}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{(s+k)-(s-k)}{s^2-k^2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2k}{s^2-k^2}\right)$$

$$= \frac{k}{s^2-k^2}$$

Jadi, $\mathcal{L}\{\sinh kt\} = \dfrac{k}{s^2-k^2}$, untuk $s > |k|$.

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

Contoh 13 : Tentukan $\mathcal{L}\{3t + 5e^{-2t}\}$ dengan menggunakan sifat linearitas.

$\mathcal{L}\{3t + 5e^{-2t}\} = 3\,\mathcal{L}\{t\} + 5\,\mathcal{L}\{e^{-2t}\}$

Dari tabel transform Laplace diketahui bahwa

$\mathcal{L}\{t\} = \dfrac{1}{s^2}$ dan $\mathcal{L}\{e^{-2t}\} = \dfrac{1}{s+2}$

sehingga

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{3t + 5e^{-2t}\} &= 3\left(\frac{1}{s^2}\right) + 5\left(\frac{1}{s+2}\right)\\ &= \frac{3(s+2) + 5s^2}{s^2(s+2)}\\ &= \frac{5s^2 + 3s + 6}{s^2(s+2)}\end{aligned}$$

Jadi, $\mathcal{L}\{3t + 5e^{-2t}\} = \dfrac{5s^2 + 3s + 6}{s^2(s+2)}$.

Contoh 14 : Tentukan $\mathcal{L}\{4 - 3e^t + \sin t\}$ dengan menggunakan sifat linearitas.

$\mathcal{L}\{4 - 3e^t + \sin t\} = 4\,\mathcal{L}\{1\} - 3\,\mathcal{L}\{e^t\} + \mathcal{L}\{\sin t\}$

Dari tabel transform Laplace diketahui bahwa

$\mathcal{L}\{1\} = \dfrac{1}{s}$, $\mathcal{L}\{e^t\} = \dfrac{1}{s-1}$, dan $\mathcal{L}\{\sin t\} = \dfrac{1}{s^2+1}$

sehingga

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

$$\mathcal{L}\left\{4-3e^t+\sin t\right\} = 4\left(\frac{1}{s}\right)-3\left(\frac{1}{s-1}\right)+\frac{1}{s^2+1}$$

$$= \frac{4(s-1)(s^2+1)-3s(s^2+1)+s(s-1)}{s(s-1)(s^2+1)}$$

$$= \frac{4s^3-4s^2+4s-4-3s^3-3s+s^2-s}{s(s-1)(s^2+1)}$$

$$= \frac{s^3-3s^2-4}{s(s-1)(s^2+1)}$$

Jadi, $\mathcal{L}\left\{4-3e^t+\sin t\right\} = \dfrac{s^3-3s^2-4}{s(s-1)(s^2+1)}$.

Teorema (sifat translasi) : Jika $f(t)$ adalah sebuah fungsi sedemikian hingga $\mathcal{L}\{f(t)\}=F(s)$ ada untuk $s>\alpha$ maka untuk setiap konstanta *a* berlaku :

$\mathcal{L}\left\{e^{at}f(t)\right\}=F(s-a)$, untuk $s>\alpha+a$.

Bukti : $\mathcal{L}\{f(t)\}=\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt=F(s)$

$$\mathcal{L}\left\{e^{at}f(t)\right\}=\int_0^\infty e^{-st}e^{at}f(t)dt$$

$$=\int_0^\infty e^{-(s-a)t}f(t)dt$$

$$=F(s-a)$$

Contoh 15 : Dengan menggunakan sifat translasi tentukan $\mathcal{L}\left\{e^{at}\sin kt\right\}$.

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

Dari tabel transform Laplace diketahui bahwa $\mathcal{L}\{\sin kt\} = \dfrac{k}{s^2 + k^2}$, $s > 0$

Menurut sifat translasi diperoleh

$$\mathcal{L}\{e^{at}\sin kt\} = \frac{k}{(s-a)^2 + k^2}$$

Jadi, $\mathcal{L}\{e^{at}\sin kt\} = \dfrac{k}{(s-a)^2 + k^2}$, di mana $s > a$.

Contoh 16 : Dengan menggunakan sifat translasi tentukan $\mathcal{L}\{e^{at}t^n\}$.

Dari tabel transform Laplace diketahui bahwa $\mathcal{L}\{t^n\} = \dfrac{n!}{s^{n+1}}$, $s > 0$.

Menurut sifat translasi diperoleh

$$\mathcal{L}\{e^{at}t^n\} = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$$

Jadi, $\mathcal{L}\{e^{at}t^n\} = \dfrac{n!}{(s-a)^{n+1}}$, di mana $s > a$.

Contoh 17 : Dengan menggunakan sifat translasi tentukan $\mathcal{L}\{e^{3t}\sin t\}$.

Dari contoh 15 telah kita ketahui bahwa $\mathcal{L}\{e^{at}\sin kt\} = \dfrac{k}{(s-a)^2 + k^2}$, $s > a$

sehingga $\mathcal{L}\{e^{3t}\sin t\} = \dfrac{1}{(s-3)^2 + 1}$.

C. Invers Transform Laplace

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

Definisi : Jika diketahui suatu fungsi $f(t)$ sedemikian hingga $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ maka $f(t)$ disebut invers transform Laplace dari $F(s)$ dan secara simbolis ditulis $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$.

Invers transform Laplace juga memiliki sifat yang sama dengan transform Laplace yaitu :

1. Sifat linearitas

$$\mathcal{L}^{-1}\{c_1 F_1(s) \pm c_2 F_2(s)\} = c_1 f_1(t) \pm c_2 f_2(t)$$

2. Sifat translasi

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s-a)\} = e^{at} f(t)$$

Untuk mencari invers transform Laplace, kita dapat melihat tabel transform Laplace. Kadang dalam menemukan invers transform Laplace, kita perlu mengubah bentuk persamaan fungsi $F(s)$ agar mempunyai bentuk yang sesuai dengan tabel.

Contoh 18 : Tentukan $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s}{s^2+9}\right\}$.

Dengan menggunakan sifat linearitas dan tabel transform Laplace diperoleh

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s}{s^2+9}\right\} &= 3\ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+9}\right\} \\ &= 3\ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+3^2}\right\} \\ &= 3\cos 3t\end{aligned}$$

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

Jadi, $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{3s}{s^2+9}\right\} = 3\cos 3t$.

Contoh 19 : Tentukan $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2-6s+13}\right\}$.

Kita perlu mengubah bentuk penyebut pecahan menjadi bentuk kuadrat sempurna.

$$\frac{1}{s^2-6s+13} = \frac{1}{(s-3)^2-9+13} = \frac{1}{(s-3)^2+4} = \frac{1}{(s-3)^2+2^2}$$

Dengan menggunakan sifat translasi dan tabel transform Laplace diperoleh

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-6s+13}\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-3)^2+2^2}\right\} \\ &= \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s-3)^2+2^2}\right\} \\ &= \frac{1}{2}e^{3t}\sin 2t\end{aligned}$$

Jadi, $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2-6s+13}\right\} = \dfrac{1}{2}e^{3t}\sin 2t$.

Contoh 20 : Tentukan $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s^2}{(s+1)^3}\right\}$.

Dengan menggunakan pecahan parsial diperoleh

$$\frac{s^2}{(s+1)^3} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{(s+1)^2} + \frac{C}{(s+1)^3}$$

$$s^2 = A(s+1)^2 + B(s+1) + C$$

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

$$s^2 = As^2 + 2As + A + Bs + B + C$$

$$s^2 = As^2 + (2A + B)s + (A + B + C)$$

Dari persamaan di atas akan kita dapatkan sistem persamaan berikut :

$$A = 1$$

$$2A + B = 0$$

$$A + B + C = 0$$

Dari sistem persamaan di atas kita dapatkan $A = 1$, $B = -2$, dan $C = 1$ sehingga

$$\frac{s^2}{(s+1)^3} = \frac{1}{s+1} - \frac{2}{(s+1)^2} + \frac{1}{(s+1)^3}$$

maka

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2}{(s+1)^3}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1} - \frac{2}{(s+1)^2} + \frac{1}{(s+1)^3}\right\}$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s+1)^2}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^3}\right\}$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} - 2\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2}\right\} + \frac{1}{2}\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s+1)^3}\right\}$$

$$= e^{-t} - 2e^{-t}t + \frac{1}{2}e^{-t}t^2$$

Jadi, $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2}{(s+1)^3}\right\} = e^{-t} - 2e^{-t}t + \frac{1}{2}e^{-t}t^2$.

D. Transform Laplace dari Turunan dan Integral

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

Transform Laplace dari turunan dan integral sangat berguna dalam menyelesaikan masalah nilai awal persamaan diferensial linear orde dua dengan koefisien konstan.

Teorema (Transform Laplace dari turunan berorde satu) : Misalkan $f(t)$ adalah fungsi yang kontinu dan merupakan fungsi berorde eksponensial α untuk $t \geq 0$ dan jika $f'(t)$ kontinu sepotong-sepotong untuk $t \geq 0$ maka

$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\ \mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)$.

Bukti : Menurut definisi transform Laplace

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f'(t)dt = \lim_{T\to\infty} \int_0^T e^{-st} f'(t)dt$$

Gunakan pengintegralan parsial.

Misalkan $u = e^{-st}$ $\qquad dv = f'(t)dt$

$du = -se^{-st}$ $\qquad v = f(t)$

Sehingga

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = \lim_{T\to\infty}\left(\left[e^{-st} f(t)\right]_0^T + s\int_0^T e^{-st} f(t)dt\right)$$

$$= \lim_{T\to\infty}\left[e^{-st} f(t)\right]_0^T + \lim_{T\to\infty} s\int_0^T e^{-st} f(t)dt$$

$$= \lim_{T\to\infty}\left(e^{-sT} f(T) - f(0)\right) + s\lim_{T\to\infty}\int_0^T e^{-st} f(t)dt$$

$$= -f(0) + s\ \mathcal{L}\{f(t)\}$$

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

$$= s\,\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)$$

Teorema (transform Laplace dari turunan berorde dua) : Misalkan $f(t)$ dan $f'(t)$ adalah fungsi yang kontinu dan merupakan fungsi berorde eksponensial α untuk $t \geq 0$ dan jika $f''(t)$ kontinu sepotong-sepotong untuk $t \geq 0$ maka

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2\,\mathcal{L}\{f(t)\} - sf(0) - f'(0).$$

Bukti : Misalkan $g(t) = f'(t)$, maka $g'(t) = f''(t)$ sehingga

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = \mathcal{L}\{g'(t)\}$$

$$= s\,\mathcal{L}\{g(t)\} - g(0)$$

$$= s\,\mathcal{L}\{f'(t)\} - f'(0)$$

$$= s[s\,\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)] - f'(0)$$

$$= s^2\,\mathcal{L}\{f(t)\} - sf(0) - f'(0)$$

Contoh 21 : Tentukan $\mathcal{L}\{t\}$ dengan menggunakan teorema transform Laplace dari turunan berorde satu.

Misalkan $f(t) = t$ maka $f(0) = 0$ dan $f'(t) = 1$. Menurut teorema transform Laplace dari turunan berorde satu :

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\,\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)$$

$$\mathcal{L}\{1\} = s\,\mathcal{L}\{t\}$$

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

Dari tabel transform Laplace diketahui bahwa $\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}$ sehingga

$$\frac{1}{s} = s\ \mathcal{L}\{t\}$$

Jadi, $\mathcal{L}\{t\} = \frac{1}{s^2}$.

Contoh 22 : Tentukan $\mathcal{L}\{\sin kt\}$ dengan menggunakan teorema transform Laplace dari turunan berorde dua.

Misalkan $f(t) = \sin kt$ maka $f'(t) = k\cos kt$ dan $f''(t) = -k^2 \sin kt$ sehingga $f(0) = 0$ dan $f'(0) = k$. Menurut teorema transform Laplace dari turunan berorde dua :

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2\ \mathcal{L}\{f(t)\} - sf(0) - f'(0)$$

$$\mathcal{L}\{-k^2 \sin kt\} = s^2\ \mathcal{L}\{\sin kt\} - s \cdot 0 - k$$

$$\mathcal{L}\{-k^2 \sin kt\} = s^2\ \mathcal{L}\{\sin kt\} - k$$

Menurut sifat linearitas

$$-k^2\ \mathcal{L}\{\sin kt\} = s^2\ \mathcal{L}\{\sin kt\} - k$$

$$s^2\ \mathcal{L}\{\sin kt\} + k^2\ \mathcal{L}\{\sin kt\} = k$$

$$(s^2 + k^2)\ \mathcal{L}\{\sin kt\} = k$$

Jadi, $\mathcal{L}\{\sin kt\} = \frac{k}{s^2 + k^2}$.

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

Teorema (transform Laplace dari integral) : Misalkan $f(t)$ fungsi yang kontinu sepotong-sepotong dan merupakan fungsi berorde eksponensial untuk $t \geq 0$ maka

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(x)dx\right\} = \frac{1}{s}\ \mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{s}F(s) \text{ untuk } s > \alpha .$$

Bukti : Misalkan $g(t) = \int_0^t f(x)dx$ maka $g'(t) = f(t)$ dan $g(0) = 0$. Dengan menggunakan teorema transform Laplace dari turunan berorde satu diperoleh

$$\mathcal{L}\{g'(t)\} = s\ \mathcal{L}\{g(t)\} - g(0)$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = s\ \mathcal{L}\{g(t)\}$$

$$\mathcal{L}\{g(t)\} = \frac{1}{s}\mathcal{L}\{f(t)\}$$

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(x)dx\right\} = \frac{1}{s}F(s)$$

Contoh 23 : Tentukan $\mathcal{L}\left\{\int_0^t xdx\right\}$ dengan menggunakan teorema transform Laplace dari integral.

Misalkan $g(t) = \int_0^t xdx$ maka $g'(t) = f(t) = t$. Berdasarkan teorema transform Laplace dari integral diperoleh

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t xdx\right\} = \frac{1}{s}\mathcal{L}\{f(t)\}$$

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

$$= \frac{1}{s}\mathcal{L}\{t\}$$

$$= \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s^2}$$

$$= \frac{1}{s^3}$$

Contoh 24 : Tentukan $\mathcal{L}\left\{\int_0^t \sin x dx\right\}$ dengan menggunakan teorema transform Laplace dari integral.

Misalkan $g(t) = \int_0^t \sin x dx$ maka $g'(t) = f(t) = \sin t$. Berdasarkan teorema transform Laplace dari integral diperoleh

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t \sin x dx\right\} = \frac{1}{s}\mathcal{L}\{f(t)\}$$

$$= \frac{1}{s}\mathcal{L}\{\sin t\}$$

$$= \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s^2 + 1}$$

$$= \frac{1}{s(s^2 + 1)}$$

E. Konvolusi Dua Fungsi f(t) dan g(t)

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

Prosedur penting yang lain dalam hubungannya dengan penggunaan tabel transform Laplace adalah teorema konvolusi dari fungsi $f(t)$ dan $g(t)$.

Definisi : Misalkan $f(t)$ dan $g(t)$ adalah fungsi yang kontinu sepotong-sepotong untuk $t \geq 0$ maka konvolusi dari $f(t)$ dan $g(t)$ didefinisikan dengan

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(t-x)g(x)dx.$$

Misalkan kita ganti $t-x$ menjadi u sehingga $u = t - x$ maka $du = -dx$. Untuk $x = 0$ maka $u = t$, sedangkan untuk $x = t$, $u = 0$ sehingga

$$\begin{aligned} f(t) * g(t) &= \int_0^t f(t-x)g(x)dx \\ &= -\int_t^0 f(u)g(t-u)du \\ &= \int_0^t g(t-u)f(u)du \\ &= g(t) * f(t) \end{aligned}$$

Jadi, konvolusi memiliki sifat komutatif yaitu $f(t) * g(t) = g(t) * f(t)$.

Contoh 25 : Tentukan konvolusi dari 1 dan $\sin t$.

Misalkan $f(t) = 1$ dan $g(t) = \sin t$

$$\begin{aligned} 1 * \sin t &= \int_0^t 1 \cdot \sin x dx \\ &= \int_0^t \sin x dx \end{aligned}$$

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

$= [-\cos x]_0^t$

$= -\cos t + 1$

$= 1 - \cos t$

Contoh 26 : Tentukan konvolusi dari e^t dan e^{2t}.

Misalkan $f(t) = e^t$ dan $g(t) = e^{2t}$

$$e^t * e^{2t} = \int_0^t e^{(t-x)} e^{2x} dx$$

$$= \int_0^t e^t e^x dx$$

$$= e^t \int_0^t e^x dx$$

$$= e^t [e^x]_0^t$$

$$= e^t (e^t - 1)$$

$$= e^{2t} - e^t$$

Contoh 27 : Tentukan konvolusi dari $\sin t$ dan $\cos t$.

Misalkan $f(t) = \sin t$ dan $g(t) = \cos t$

$$\sin t * \cos t = \int_0^t \sin(t-x) \cos x dx$$

Berdasarkan rumus perkalian sinus dan cosinus :

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}\{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)\}$$

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

sehingga

$$\sin t * \cos t = \frac{1}{2}\int_0^t [\sin t + \sin(t-2x)]dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[x\sin t + \frac{1}{2}\cos(t-2x)\right]_0^t$$

$$= \frac{1}{2}\left[t\sin t + \frac{1}{2}\cos(-t) - \frac{1}{2}\cos t\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[t\sin t + \frac{1}{2}\cos t - \frac{1}{2}\cos t\right]$$

$$= \frac{1}{2}t\sin t$$

Teorema (konvolusi) : Misalkan $f(t)$ dan $g(t)$ kontinu sepotong-sepotong dan merupakan fungsi berorde eksponensial untuk $t \geq 0$ maka transform Laplace dari $f(t) * g(t)$ adalah

$$\mathcal{L}\{f(t) * g(t)\} = F(s)G(s).$$

Bukti : Dengan menggunakan definisi transform Laplace dan definisi konvolusi diperoleh

$$\mathcal{L}\{f(t) * g(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}\left[\int_0^t f(t-x)g(x)dx\right]dt$$

$$= \lim_{B\to\infty}\int_0^B e^{-st}\left[\int_0^t f(t-x)g(x)dx\right]dt$$

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

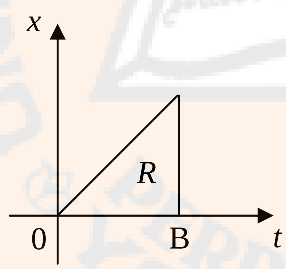
Batas dari integral berulang tersebut sesuai dengan daerah R dalam bidang tx yang diperlihatkan pada gambar 1a yaitu daerah antara sumbu t dan garis $x = t$. Dengan melakukan pengubahan variabel misalkan $u = t - x$ dan $v = x$ akan mengubah daerah R menjadi daerah R^* (lihat gambar 1b) dalam bidang uv. Oleh karena itu,

$$\mathcal{L}\{f(t) * g(t)\} = \lim_{B\to\infty} \int_0^B \int_0^{B-v} e^{-s(u+v)} f(u)g(v)\,du\,dv$$

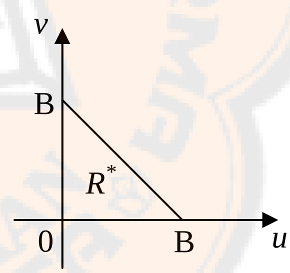
$$= \int_0^\infty \left[\int_0^\infty e^{-su} f(u)\,du \right] e^{-sv} g(v)\,dv$$

Jadi, $\mathcal{L}\{f(t) * g(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\}\,\mathcal{L}\{g(t)\}$

$$= F(s)G(s)$$



Gambar 1a



Gambar 1b

Dapat juga dikatakan

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)G(s)\} = f(t) * g(t)$$

Contoh 28 : Tentukan transform Laplace dari $2 * e^{3t}$ dengan menggunakan teorema konvolusi.

Misalkan $f(t) = 2$ dan $g(t) = e^{3t}$

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

Berdasarkan teorema konvolusi

$\mathcal{L}\{f(t)*g(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\}\ \mathcal{L}\{g(t)\}$

$\mathcal{L}\{2*e^{3t}\} = \mathcal{L}\{2\}\ \mathcal{L}\{e^{3t}\}$

$$= \frac{2}{s}\cdot\frac{1}{s-3}$$

$$= \frac{2}{s(s-3)}$$

Contoh 29 : Tentukan transform Laplace dari $t^3 * \sin t$ dengan menggunakan teorema konvolusi.

Misalkan $f(t) = t^3$ dan $g(t) = \sin t$

Berdasarkan teorema konvolusi

$\mathcal{L}\{f(t)*g(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\}\ \mathcal{L}\{g(t)\}$

$\mathcal{L}\{t^3 * \sin t\} = \mathcal{L}\{t^3\}\mathcal{L}\{\sin t\}$

$$= \frac{3!}{s^4}\cdot\frac{1}{s^2+1}$$

$$= \frac{6}{s^4(s^2+1)}$$

Contoh 30 : Tentukan $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+1)^2}\right\}$ dengan menggunakan teorema konvolusi.

$\frac{1}{(s^2+1)^2}$ dapat kita tulis menjadi $\frac{1}{s^2+1}\cdot\frac{1}{s^2+1}$

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

Dari tabel transform Laplace diketahui bahwa $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} = \sin t$ sehingga

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+1)^2}\right\} = \sin t * \sin t$$

$$= \int_0^t \sin(t-x)\sin x dx$$

Berdasarkan rumus perkalian sinus dan sinus :

$$\sin\alpha\sin\beta = -\frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\}$$

maka

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+1)^2}\right\} = -\frac{1}{2}\int_0^t [\cos t - \cos(t-2x)]dx$$

$$= -\frac{1}{2}\left[x\cos t + \frac{1}{2}\sin(t-2x)\right]_0^t$$

$$= -\frac{1}{2}\left[t\cos t + \frac{1}{2}\sin(-t) - \frac{1}{2}\sin t\right]$$

$$= -\frac{1}{2}\left[t\cos t - \frac{1}{2}\sin t - \frac{1}{2}\sin t\right]$$

$$= -\frac{1}{2}[t\cos t - \sin t]$$

$$= -\frac{1}{2}t\cos t + \frac{1}{2}\sin t$$

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

F. Aplikasi Transform Laplace dalam Menyelesaikan Masalah Nilai Awal Persamaan Diferensial Linear Orde Dua dengan Koefisien Konstan

Dalam menyelesaikan masalah nilai awal persamaan diferensial, biasanya yang pertama dilakukan adalah menentukan penyelesaian umumnya. Setelah memperoleh penyelesaian umum, kita menggunakan syarat-syarat awal yang diberikan untuk mencari penyelesaian khusus yang diinginkan. Dengan transform Laplace, kita dapat menentukan penyelesaian khusus tanpa mencari penyelesaian umumnya terlebih dahulu. Pertama-tama kita lihat bentuk umum persamaan diferensial linear orde dua dengan koefisien konstan :

$a_2 \dfrac{d^2y}{dt^2} + a_1 \dfrac{dy}{dt} + a_0 y = f(t)$, di mana $a_2 \neq 0$

dengan kondisi awal $y(0) = c_0$ dan $y'(0) = c_1$. Kemudian kita ambil transform Laplace dari kedua ruas persamaan tersebut.

$$\mathcal{L}\left\{a_2 \frac{d^2y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y\right\} = \mathcal{L}\{f(t)\}$$

Dengan menggunakan sifat linearitas transform laplace diperoleh

$$a_2\, \mathcal{L}\left\{\frac{d^2y}{dt^2}\right\} + a_1\, \mathcal{L}\left\{\frac{dy}{dt}\right\} + a_0\, \mathcal{L}\{y(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Menurut teorema transform Laplace dari turunan dan kondisi awal yang diberikan maka

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2y}{dt^2}\right\} = s^2\, \mathcal{L}\{y(t)\} - sy(0) - y'(0) = s^2\, \mathcal{L}\{y(t)\} - c_0 s - c_1$$

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dy}{dt}\right\} = s\ \mathcal{L}\{y(t)\} - y(0) = s\ \mathcal{L}\{y(t)\} - c_0$$

Andaikan $\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s)$ dan $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ maka persamaan (1) menjadi

$$a_2(s^2Y(s) - c_0 s - c_1) + a_1(sY(s) - c_0) + a_0 Y(s) = F(s) \quad \text{..........................} \quad (2)$$

Persamaan (2) merupakan persamaan aljabar dalam *s*. Untuk memperoleh $Y(s)$ kita selesaikan persamaan aljabar tersebut. Kemudian kita cari invers dari transform Laplace tersebut yaitu $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}$ dengan melihat tabel atau menggunakan metode yang sesuai (misalnya pecahan parsial, konvolusi).

Langkah-langkah di atas dapat diringkas menjadi :

1. Ambil transform Laplace dari kedua ruas persamaan diferensial.
2. Gunakan sifat linearitas, teorema transform Laplace dari turunan dan kondisi awal yang diberikan untuk memperoleh persamaan aljabar.
3. Selesaikan persamaan aljabar tersebut untuk memperoleh transform Laplacenya.
4. Cari invers transform Laplace dengan melihat tabel atau menggunakan metode yang sesuai (misalnya pecahan parsial, konvolusi) sehingga diperoleh penyelesaian masalah nilai awal yang diberikan.

Contoh 31 : Selesaikan masalah nilai awal $\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + 2y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = -2$ dengan menggunakan transform Laplace.

Langkah 1 : ambil transform Laplace dari kedua ruas persamaan diferensial.

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2y}{dt^2}+3\frac{dy}{dt}+2y\right\} = \mathcal{L}\{0\}$$

Langkah 2 : gunakan sifat linearitas transform Laplace.

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2y}{dt^2}\right\}+3\,\mathcal{L}\left\{\frac{dy}{dt}\right\}+2\,\mathcal{L}\{y(t)\}=\mathcal{L}\{0\} \quad \text{...} \quad (3)$$

Dengan menggunakan teorema transform Laplace dari turunan dan kondisi awal yang diberikan diperoleh

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2y}{dt^2}\right\}=s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)=s^2Y(s)+2$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dy}{dt}\right\}=sY(s)-y(0)=sY(s)$$

Kemudian kita substitusikan hasil yang diperoleh di atas ke persamaan (3).

$$s^2Y(s)+2+3sY(s)+2Y(s)=0$$

Langkah 3 : menyelesaikan persamaan aljabar tersebut.

$$(s^2+3s+2)Y(s)=-2$$

$$Y(s)=-\frac{2}{(s^2+3s+2)}=-\frac{2}{(s+2)(s+1)}$$

Langkah 4 : mencari invers $Y(s)$ yaitu $\mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{2}{(s+2)(s+1)}\right\}$.

Dengan menggunakan metode pecahan parsial :

$$-\frac{2}{(s+2)(s+1)}=\frac{A}{s+2}+\frac{B}{s+1}$$

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

$-2 = A(s+1) + B(s+2)$

Untuk $s = -2$ maka $A = 2$

Untuk $s = -1$ maka $B = -2$ sehingga

$$-\frac{2}{(s+2)(s+1)} = \frac{2}{s+2} - \frac{2}{s+1}$$

Maka $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{2}{(s+2)(s+1)}\right\}$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s+2} - \frac{2}{s+1}\right\}$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s+2}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s+1}\right\}$$

$$= 2\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} - 2\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}$$

$$= 2e^{-2t} - 2e^{-t}$$

Jadi, penyelesaian dari masalah nilai awal yang diberikan adalah $y(t) = 2e^{-2t} - 2e^{-t}$.

Contoh 32 : Selesaikan masalah nilai awal $\frac{d^2y}{dt^2} + 4y = 1$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$ dengan menggunakan transform Laplace.

Langkah 1 : ambil transform Laplace dari kedua ruas persamaan diferensial.

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2y}{dt^2} + 4y\right\} = \mathcal{L}\{1\}$$

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

Langkah 2 : gunakan sifat linearitas transform Laplace.

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2y}{dt^2}\right\} + 4\,\mathcal{L}\{y(t)\} = \mathcal{L}\{1\} \quad \text{.......................................} \quad (4)$$

Dengan menggunakan teorema transform Laplace dari turunan dan kondisi awal yang diberikan diperoleh

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2y}{dt^2}\right\} = s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) = s^2Y(s)$$

Kemudian kita substitusikan hasil yang diperoleh di atas ke persamaan (4).

$$s^2Y(s) + 4Y(s) = \frac{1}{s}$$

Langkah 3 : menyelesaikan persamaan aljabar tersebut.

$$(s^2+4)Y(s) = \frac{1}{s}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s(s^2+4)}$$

Langkah 4 : mencari invers $Y(s)$ yaitu $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+4)}\right\}$.

Maka $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+4)}\right\}$

$$= \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s(s^2+4)}\right\}$$

Dengan menggunakan teorema transform Laplace dari integral :

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

misalkan $F(s)=\dfrac{2}{s^2+4}$ maka $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{2}{s^2+4}\right\}=\sin 2t$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s(s^2+4)}\right\} = \int_0^t \sin 2x dx$$

$$= \left[-\frac{1}{2}\cos 2x\right]_0^t$$

$$= \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2t$$

Sehingga $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \dfrac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{2}{s(s^2+4)}\right\}$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2t\right)$$

$$= \frac{1}{4}-\frac{1}{4}\cos 2t$$

Jadi, penyelesaian dari masalah nilai awal yang diberikan adalah $y(t)=\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{4}\cos 2t$.

Contoh 33 : Selesaikan masalah nilai awal $\dfrac{d^2y}{dt^2}+y=t$, $y(0)=1$, $y'(0)=-2$ dengan menggunakan transform Laplace.

Langkah 1 : ambil transform Laplace dari kedua ruas persamaan diferensial.

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2y}{dt^2}+y\right\} = \mathcal{L}\{t\}$$

Langkah 2 : gunakan sifat linearitas transform Laplace.

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2y}{dt^2}\right\} + \mathcal{L}\{y(t)\} = \mathcal{L}\{t\} \quad \text{......} \quad (5)$$

Dengan menggunakan teorema transform Laplace dari turunan dan kondisi awal yang diberikan diperoleh

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2y}{dt^2}\right\} = s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) = s^2Y(s) - s + 2$$

Kemudian kita substitusikan hasil yang diperoleh di atas ke persamaan (5).

$$s^2Y(s) - s + 2 + Y(s) = \frac{1}{s^2}$$

Langkah 3 : menyelesaikan persamaan aljabar tersebut.

$$(s^2+1)Y(s) = \frac{1}{s^2} + s - 2$$

$$Y(s) = \frac{1}{s^2(s^2+1)} + \frac{s}{s^2+1} - \frac{2}{s^2+1}$$

Langkah 4 : mencari invers $Y(s)$ yaitu $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s^2+1)} + \frac{s}{s^2+1} - \frac{2}{s^2+1}\right\}$.

Untuk menentukan $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s^2+1)}\right\}$ kita gunakan teorema konvolusi.

$\frac{1}{s^2(s^2+1)}$ dapat kita tulis menjadi $\frac{1}{s^2} \cdot \frac{1}{s^2+1}$

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

Dari tabel transform Laplace diketahui bahwa $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} = t$ dan $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} = \sin t$

sehingga

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s^2+1)}\right\} = t * \sin t$$

$$= \int_0^t (t-x)\sin x dx$$

Dengan menggunakan sifat komutatif dari konvolusi diperoleh

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s^2+1)}\right\} = \int_0^t \sin(t-x)x dx$$

Untuk menyelesaikan integral tersebut kita gunakan pengintegralan parsial.

Misalkan $u = x$ $\qquad dv = \sin(t-x)dx$

$du = dx$ $\qquad v = \cos(t-x)$

sehingga

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s^2+1)}\right\} = \int_0^t \sin(t-x)x dx$$

$$= \left[x\cos(t-x)\right]_0^t - \int_0^t \cos(t-x)dx$$

$$= t + \left[\sin(t-x)\right]_0^t$$

$$= t + \left[\sin 0 - \sin t\right]$$

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

$$= t - \sin t$$

Maka

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s^2+1)} + \frac{s}{s^2+1} - \frac{2}{s^2+1}\right\}$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s^2+1)}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+1}\right\}$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s^2+1)}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\} - 2\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}$$

$$= t - \sin t + \cos t - 2\sin t$$

$$= t + \cos t - 3\sin t$$

Jadi, penyelesaian dari masalah nilai awal yang diberikan adalah $y(t) = t + \cos t - 3\sin t$.

Contoh 34 : Selesaikan masalah nilai awal $\frac{d^2y}{dt^2} - 3\frac{dy}{dt} + 2y = 4e^{2t}$, $y(0) = -3$, $y'(0) = 5$ dengan menggunakan transform Laplace.

Langkah 1 : ambil transform Laplace dari kedua ruas persamaan diferensial.

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2y}{dt^2} - 3\frac{dy}{dt} + 2y\right\} = \mathcal{L}\{4e^{2t}\}$$

Langkah 2 : gunakan sifat linearitas transform Laplace.

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2y}{dt^2}\right\} - 3\,\mathcal{L}\left\{\frac{dy}{dt}\right\} + 2\,\mathcal{L}\{y(t)\} = 4\,\mathcal{L}\{e^{2t}\} \quad \text{...} \quad (6)$$

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

Dengan menggunakan teorema transform Laplace dari turunan dan kondisi awal yang diberikan diperoleh

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2y}{dt^2}\right\} = s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) = s^2Y(s) + 3s - 5$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dy}{dt}\right\} = sY(s) - y(0) = sY(s) + 3$$

Kemudian kita substitusikan hasil yang diperoleh di atas ke persamaan (6).

$$s^2Y(s) + 3s - 5 - 3(sY(s) + 3) + 2Y(s) = \frac{4}{s-2}$$

$$s^2Y(s) + 3s - 5 - 3sY(s) - 9 + 2Y(s) = \frac{4}{s-2}$$

Langkah 3 : menyelesaikan persamaan aljabar tersebut.

$$(s^2 - 3s + 2)Y(s) + 3s - 14 = \frac{4}{s-2}$$

$$Y(s) = \frac{4}{(s-2)(s^2-3s+2)} - \frac{3s}{s^2-3s+2} + \frac{14}{s^2-3s+2}$$

$$= \frac{4}{(s-1)(s-2)(s-2)} - \frac{3s}{(s-1)(s-2)} + \frac{14}{(s-1)(s-2)}$$

$$= \frac{4 - 3s(s-2) + 14(s-2)}{(s-1)(s-2)^2}$$

$$= \frac{-3s^2 + 20s - 24}{(s-1)(s-2)^2}$$

Langkah 4 : mencari invers $Y(s)$ yaitu $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-3s^2 + 20s - 24}{(s-1)(s-2)^2}\right\}$.

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

Dengan menggunakan metode pecahan parsial :

$$\frac{-3s^2+20s-24}{(s-1)(s-2)^2}=\frac{A}{s-1}+\frac{B}{s-2}+\frac{C}{(s-2)^2}$$

$$-3s^2+20s-24=A(s-2)^2+B(s-1)(s-2)+C(s-1)$$

$$-3s^2+20s-24=A(s^2-4s+4)+B(s^2-3s+2)+Cs-C$$

$$-3s^2+20s-24=As^2-4As+4A+Bs^2-3Bs+2B+Cs-C$$

$$-3s^2+20s-24=(A+B)s^2+(-4A-3B+C)s+(4A+2B-C)$$

Dari persamaan di atas akan kita dapatkan sistem persamaan berikut :

$$A+B=-3$$

$$-4A-3B+C=20$$

$$4A+2B-C=-24$$

Dari sistem persamaan di atas kita dapatkan $A=-7$, $B=4$, dan $C=4$ sehingga

$$\frac{-3s+20s-24}{(s-1)(s-2)^2}=-\frac{7}{s-1}+\frac{4}{s-2}+\frac{4}{(s-2)^2}$$

Maka $y(t)=\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-3s+20s-24}{(s-1)(s-2)^2}\right\}$

$$=\mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{7}{s-1}+\frac{4}{s-2}+\frac{4}{(s-2)^2}\right\}$$

$$=\mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{7}{s-1}\right\}+\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4}{s-2}\right\}+\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4}{(s-2)^2}\right\}$$

$$=-7\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\}+4\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\}+4\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-2)^2}\right\}$$

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

$$= -7e^{t} + 4e^{2t} + 4te^{2t}$$

Jadi, penyelesaian dari masalah nilai awal yang diberikan adalah $y(t) = -7e^{t} + 4e^{2t} + 4te^{2t}$.

Contoh 35 : Selesaikan masalah nilai awal $\dfrac{d^2y}{dt^2} - \dfrac{dy}{dt} - 6y = \cos 2t$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ dengan menggunakan transform Laplace.

Langkah 1 : ambil transform Laplace dari kedua ruas persamaan diferensial.

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} - 6y\right\} = \mathcal{L}\{\cos 2t\}$$

Langkah 2 : gunakan sifat linearitas transform Laplace.

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2y}{dt^2}\right\} - \mathcal{L}\left\{\frac{dy}{dt}\right\} - 6\,\mathcal{L}\{y(t)\} = \mathcal{L}\{\cos 2t\} \quad \text{...} \quad (7)$$

Dengan menggunakan teorema transform Laplace dari turunan dan kondisi awal yang diberikan diperoleh

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2y}{dt^2}\right\} = s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) = s^2Y(s) - 1$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dy}{dt}\right\} = sY(s) - y(0) = sY(s)$$

Kemudian kita substitusikan hasil yang diperoleh di atas ke persamaan (7).

$$s^2Y(s) - 1 - sY(s) - 6Y(s) = \frac{s}{s^2 + 4}$$

Langkah 3 : menyelesaikan persamaan aljabar tersebut.

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

$$(s^2 - s - 6)Y(s) - 1 = \frac{s}{s^2 + 4}$$

$$Y(s) = \frac{s}{(s^2 + 4)(s^2 - s - 6)} + \frac{1}{s^2 - s - 6}$$

$$= \frac{s}{(s^2 + 4)(s - 3)(s + 2)} + \frac{1}{(s - 3)(s + 2)}$$

$$= \frac{s^2 + s + 4}{(s^2 + 4)(s - 3)(s + 2)}$$

Langkah 4 : mencari invers $Y(s)$ yaitu $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2 + s + 4}{(s^2 + 4)(s - 3)(s + 2)}\right\}$.

Dengan menggunakan metode pecahan parsial :

$$\frac{s^2 + s + 4}{(s^2 + 4)(s - 3)(s + 2)} = \frac{As + B}{s^2 + 4} + \frac{C}{s - 3} + \frac{D}{s + 2}$$

$$s^2 + s + 4 = (As + B)(s - 3)(s + 2) + C(s^2 + 4)(s + 2) + D(s^2 + 4)(s - 3)$$

$$s^2 + s + 4 = (As + B)(s^2 - s - 6) + C(s^3 + 2s^2 + 4s + 8) + D(s^3 - 3s^2 + 4s - 12)$$

$$s^2 + s + 4 = As^3 - As^2 + Bs^2 - 6As - Bs - 6B + Cs^3 + 2Cs^2 + 4Cs + 8C + Ds^3$$
$$- 3Ds^2 + 4Ds - 12D$$

$$s^2 + s + 4 = (A + C + D)s^3 + (-A + B + 2C - 3D)s^2 + (-6A - B + 4C + 4D)s$$
$$+ (-6B + 8C - 12D)$$

Dari persamaan di atas akan kita dapatkan sistem persamaan berikut :

$$A + C + D = 0$$

$$-A + B + 2C - 3D = 1$$

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

$$-6A - B + 4C + 4D = 1$$

$$-6B + 8C - 12D = 4$$

Dari sistem persamaan di atas kita dapatkan $A = -\frac{5}{52}$, $B = -\frac{1}{26}$, $C = \frac{16}{65}$ dan $D = -\frac{3}{20}$ sehingga

$$\frac{s^2+s+4}{(s^2+4)(s-3)(s+2)} = -\frac{5}{52}\frac{s}{(s^2+4)} - \frac{1}{26}\frac{1}{(s^2+4)} + \frac{16}{65}\frac{1}{(s-3)} - \frac{3}{20}\frac{1}{(s+2)}$$

Maka

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2+s+4}{(s^2+4)(s-3)(s+2)}\right\}$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{5}{52}\frac{s}{(s^2+4)} - \frac{1}{26}\frac{1}{(s^2+4)} + \frac{16}{65}\frac{1}{(s-3)} - \frac{3}{20}\frac{1}{(s+2)}\right\}$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{5}{52}\frac{s}{(s^2+4)}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{26}\frac{1}{(s^2+4)}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{16}{65}\frac{1}{(s-3)}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{20}\frac{1}{(s+2)}\right\}$$

$$= -\frac{5}{52}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4}\right\} - \frac{1}{52}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+4}\right\} + \frac{16}{65}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\} - \frac{3}{20}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\}$$

$$= -\frac{5}{52}\cos 2t - \frac{1}{52}\sin 2t + \frac{16}{65}e^{3t} - \frac{3}{20}e^{-2t}$$

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

Jadi, penyelesaian dari masalah nilai awal yang diberikan adalah $y(t) = -\frac{5}{52}\cos 2t - \frac{1}{52}\sin 2t + \frac{16}{65}e^{3t} - \frac{3}{20}e^{-2t}$.

Contoh 36 : Selesaikan masalah nilai awal $\frac{d^2y}{dt^2} + y = e^{-2t}\sin t$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$ dengan menggunakan transform Laplace.

Langkah 1 : ambil transform Laplace dari kedua ruas persamaan diferensial.

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2y}{dt^2} + y\right\} = \mathcal{L}\left\{e^{-2t}\sin t\right\}$$

Langkah 2 : gunakan sifat linearitas transform Laplace.

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2y}{dt^2}\right\} + \mathcal{L}\{y(t)\} = \mathcal{L}\left\{e^{-2t}\sin t\right\} \qquad \text{(8)}$$

Dengan menggunakan teorema transform Laplace dari turunan dan kondisi awal yang diberikan diperoleh

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2y}{dt^2}\right\} = s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) = s^2Y(s)$$

Kemudian kita substitusikan hasil yang diperoleh di atas ke persamaan (8).

$$s^2Y(s) + Y(s) = \frac{1}{(s+2)^2 + 1}$$

Langkah 3 : menyelesaikan persamaan aljabar tersebut.

$$(s^2 + 1)Y(s) = \frac{1}{(s+2)^2 + 1}$$

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

$$Y(s) = \frac{1}{((s+2)^2+1)(s^2+1)}$$

Langkah 4 : mencari invers $Y(s)$ yaitu $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{((s+2)^2+1)(s^2+1)}\right\}$.

Dengan menggunakan metode pecahan parsial :

$$\frac{1}{((s+2)^2+1)(s^2+1)} = \frac{As+B}{(s+2)^2+1} + \frac{Cs+D}{s^2+1}$$

$$1 = (As+B)(s^2+1) + (Cs+D)((s+2)^2+1)$$

$$1 = (As+B)(s^2+1) + (Cs+D)(s^2+4s+5)$$

$$1 = As^3 + Bs^2 + As + B + Cs^3 + 4Cs^2 + Ds^2 + 5Cs + 4Ds + 5D$$

$$1 = (A+C)s^3 + (B+4C+D)s^2 + (A+5C+4D)s + (B+5D)$$

Dari persamaan di atas akan kita dapatkan sistem persamaan berikut :

$$A + C = 0$$

$$B + 4C + D = 0$$

$$A + 5C + 4D = 0$$

$$B + 5D = 1$$

Dari sistem persamaan di atas kita dapatkan $A = \frac{1}{8}$, $B = \frac{3}{8}$, $C = -\frac{1}{8}$ dan $D = \frac{1}{8}$

sehingga

$$\frac{1}{((s+2)^2+1)(s^2+1)} = \frac{1}{8}\frac{s}{((s+2)^2+1)} + \frac{3}{8}\frac{1}{((s+2)^2+1)} - \frac{1}{8}\frac{s}{(s^2+1)} + \frac{1}{8}\frac{1}{(s^2+1)}$$

Maka

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{((s+2)^2+1)(s^2+1)}\right\}$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{8}\frac{s}{((s+2)^2+1)} + \frac{3}{8}\frac{1}{((s+2)^2+1)} - \frac{1}{8}\frac{s}{(s^2+1)} + \frac{1}{8}\frac{1}{(s^2+1)}\right\}$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{8}\frac{s}{((s+2)^2+1)}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{8}\frac{1}{((s+2)^2+1)}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{8}\frac{s}{(s^2+1)}\right\}$$

$$+ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{8}\frac{1}{(s^2+1)}\right\}$$

$$= \frac{1}{8}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s+2)^2+1}\right\} + \frac{3}{8}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^2+1}\right\} - \frac{1}{8}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\}$$

$$+ \frac{1}{8}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}$$

Untuk menentukan $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s+2)^2+1}\right\}$ kita kerjakan

$$\frac{s}{(s+2)^2+1} = \frac{s+2}{(s+2)^2+1} - \frac{2}{(s+2)^2+1}$$

Akan didapat

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s+2)^2+1}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+2}{(s+2)^2+1} - \frac{2}{(s+2)^2+1}\right\}$$

Sehingga

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

$$y(t) = \frac{1}{8}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+2}{(s+2)^2+1} - \frac{2}{(s+2)^2+1}\right\} + \frac{3}{8}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^2+1}\right\} - \frac{1}{8}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\} + \frac{1}{8}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}$$

$$= \frac{1}{8}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+2}{(s+2)^2+1}\right\} - \frac{1}{8}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s+2)^2+1}\right\} + \frac{3}{8}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^2+1}\right\} - \frac{1}{8}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\} + \frac{1}{8}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}$$

$$= \frac{1}{8}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+2}{(s+2)^2+1}\right\} - \frac{2}{8}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^2+1}\right\} + \frac{3}{8}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^2+1}\right\} - \frac{1}{8}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\} + \frac{1}{8}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}$$

$$= \frac{1}{8}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+2}{(s+2)^2+1}\right\} + \frac{1}{8}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^2+1}\right\} - \frac{1}{8}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\} + \frac{1}{8}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}$$

$$= \frac{1}{8}e^{-2t}\cos t + \frac{1}{8}e^{-2t}\sin t - \frac{1}{8}\cos t + \frac{1}{8}\sin t$$

Jadi, penyelesaian dari masalah nilai awal yang diberikan adalah $y(t) = \frac{1}{8}e^{-2t}\cos t + \frac{1}{8}e^{-2t}\sin t - \frac{1}{8}\cos t + \frac{1}{8}\sin t$.

Contoh 37 : Selesaikan soal pada contoh 34 dengan menggunakan metode koefisien tak tentu.

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 3\frac{dy}{dt} + 2y = 4e^{2t} \quad \text{(9)}$$

Persamaan diferensial linear homogen yang bersangkutan : $\frac{d^2y}{dt^2} - 3\frac{dy}{dt} + 2y = 0$

Persamaan karakteristiknya dapat kita tulis dalam variabel *m* yaitu

$m^2 - 3m + 2 = 0$

$(m-1)(m-2) = 0$

$m = 1$ atau $m = 2$

Sehingga penyelesaian komplementernya :

$y_c = c_1e^t + c_2e^{2t}$

Keluarga diferensial dari $R(t) = \{e^{2t}\}$ sehingga bentuk umum y_p adalah

$y_p = Ate^{2t}$

$y'_p = Ae^{2t} + 2Ate^{2t}$

$y''_p = 4Ae^{2t} + 4Ate^{2t}$

Masukkan nilai-nilai ini ke dalam persamaan (9) akan kita peroleh $A = 4$, sehingga $y_p = 4te^{2t}$.

Maka penyelesaian umumnya adalah

$y = y_c + y_p$

$\quad = c_1e^t + c_2e^{2t} + 4te^{2t}$

$y' = c_1e^t + 2c_2e^{2t} + 4e^{2t} + 8te^{2t}$

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

Dengan menggunakan syarat awal $y(0) = -3$ dan $y'(0) = 5$ kita peroleh $c_1 = -7$ dan $c_2 = 4$.

Jadi, penyelesaian dari masalah nilai awal yang diberikan adalah $y = -7e^t + 4e^{2t} + 4te^{2t}$.

Dapat kita lihat perbandingan contoh 34 dan contoh 37. Pada contoh 34 kita dapat menentukan penyelesaian khusus tanpa mencari penyelesaian umumnya terlebih dahulu. Sedangkan pada contoh 37, penyelesaian khusus didapat setelah menentukan penyelesaian umumnya. Selain itu, penyelesaian dengan menggunakan metode koefisien tak tentu nampaknya lebih sederhana bila dibandingkan dengan metode transform Laplace.

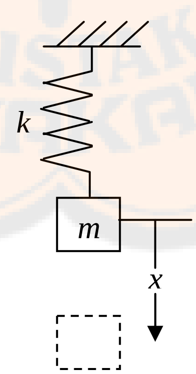
PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

BAB III

PENERAPAN TRANSFORM LAPLACE DALAM PENYELESAIAN MASALAH NILAI AWAL PERSAMAAN DIFERENSIAL LINEAR ORDE DUA DENGAN KOEFISIEN KONSTAN PADA GETARAN PEGAS

Pada bab II telah kita ketahui bahwa persamaan diferensial linear orde dua dengan koefisien konstan dapat diselesaikan dengan transform Laplace. Pada bab ini kita akan membahas penerapan transform Laplace dalam menyelesaikan masalah nilai awal persamaan diferensial linear orde dua dengan koefisien konstan pada getaran pegas.

Ketika sebuah benda bermassa m tergantung dari keadaan seimbang pada sebuah pegas dengan konstanta pegas k kemudian benda itu ditarik ke bawah yang akan merentangkan pegas sejauh jarak tertentu seperti gambar di bawah ini :



Pegas akan memberikan gaya pada benda yang bekerja dalam upaya mengembalikan benda ke posisi seimbang. Gaya ini disebut gaya pengembalian pegas

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

yang akan dijelaskan oleh hukum Hooke. Hukum Hooke menyatakan bahwa gaya pengembalian berbanding langsung dengan perubahan penyangganya. Jika x menyatakan perpindahan benda dari keadaan seimbang dan F menyatakan gaya pengembalian pegas maka berdasarkan Hukum Hooke $F = -kx$, di mana tanda negatif $(-)$ menyatakan bahwa gaya pengembalian pegas selalu berlawanan arah dengan perpindahan benda.

Sekarang kita akan menghitung bermacam-macam gaya yang bekerja pada benda. Gaya-gaya itu adalah :

1. F_1, gaya pengembalian pegas. Seperti yang sudah kita bahas di atas bahwa gaya pengembalian pegas selalu berlawanan arah dengan perpindahan benda sehingga gaya pengembaliannya dapat ditulis sebagai berikut :

   $$F_1 = -kx \quad \text{.........................} \quad (1)$$

2. F_2, gaya redaman. Gaya tersebut mempunyai arah yang berlawanan dengan gerak benda dan kita andaikan bahwa gaya ini sebanding dengan kecepatan. Ketika benda bergerak ke bawah, F_2 bekerja dengan arah ke atas (berlawanan dengan gerakan benda). Begitu juga sebaliknya. Karena gaya redaman sebanding dengan kecepatan dan melawan gerakan benda maka gaya redamannya dapat kita tulis :

   $$F_2 = -c\frac{dx}{dt} \quad \text{.........................} \quad (2)$$

   di mana c disebut konstanta redaman.

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

3. F_3, gaya luar yang bekerja pada benda. Misalkan kita notasikan gaya luar tersebut dengan $F(t)$ maka kita dapat menulis :

$$F_3 = F(t) \quad \text{..} \quad (3)$$

Sekarang kita akan menggunakan hukum Newton II yang menyatakan bahwa percepatan sebuah benda berbanding lurus dengan gaya yang bekerja pada benda. Jika m adalah massa benda, a adalah percepatan benda (a dapat kita tulis sebagai $\frac{d^2x}{dt^2}$), dan F adalah gaya yang bekerja pada benda maka berdasarkan hukum Newton II $F = ma$. Dengan menggunakan persamaan (1), (2), dan (3) serta kita kombinasikan dengan hukum Newton II akan diperoleh :

$$F = F_1 + F_2 + F_3$$

atau $ma = -kx - c\dfrac{dx}{dt} + F(t)$

atau $m\dfrac{d^2x}{dt^2} + c\dfrac{dx}{dt} + kx = F(t)$ .... (4)

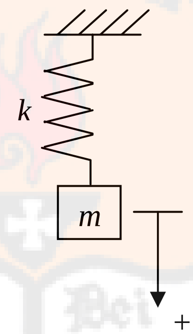
Persamaan (4) akan kita ambil sebagai persamaan diferensial untuk getaran pegas. Persamaan tersebut merupakan persamaan diferensial linear non homogen orde dua dengan koefisien konstan. Jika $c = 0$ getaran itu disebut tak teredam, dan sebaliknya jika $c \neq 0$ getaran itu disebut teredam. Jika tidak ada pengaruh dari gaya luar maka $F(t) = 0$ dan getaran itu disebut bebas. Sebaliknya jika ada pengaruh dari gaya luar maka getaran itu disebut terpaksa. Sekarang kita akan membahas kasus tersebut satu persatu.

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

A. Getaran Tak Teredam

Dalam kasus ini kita andaikan bahwa tidak ada gaya luar yang bekerja pada benda dan tidak ada gaya redaman maka $F(t) = 0$ dan $c = 0$ sehingga persamaan (4) menjadi

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \text{ atau } m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0 \quad \text{.......................................} \quad (5)$$



di mana m adalah massa benda dan k adalah konstanta pegas. Persamaan (5) merupakan persamaan diferensial linear homogen orde dua dengan koefisien konstan untuk getaran tak teredam.

Persamaan karakteristiknya dapat kita tulis dalam variabel r yaitu $mr^2 + k = 0$ yang mempunyai akar-akar $r = \pm\, i\sqrt{\frac{k}{m}}$. Jika $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ maka penyelesaian umum dari persamaan (5) adalah $x(t) = c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \sin \omega_0 t$ di mana $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ disebut frekuensi natural. Penyelesaian umumnya dapat kita tulis dalam bentuk $x(t) = A\cos(\omega_0 t - \phi)$ di mana $A = \sqrt{c_1^{\,2} + c_2^{\,2}}$ dan $tg\phi = \frac{c_2}{c_1}$.

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

Amplitudonya adalah *A*, periodenya $\frac{2\pi}{\omega_0}$ detik, frekuensinya $\frac{\omega_0}{2\pi}$ putaran/detik, dan fase geser $\frac{\phi}{\omega_0}$.

Untuk menentukan persamaan perpindahan benda kita harus mengetahui titik awal dan kecepatan awal dari benda yaitu $x(0) = x_0$, $x'(0) = v_0$. Untuk menyelesaikan masalah nilai awal tersebut pertama-tama kita ambil transform Laplace dari kedua ruas persamaan tersebut.

$$\mathcal{L}\left\{m\frac{d^2x}{dt^2} + kx\right\} = \mathcal{L}\{0\}$$

Dengan menggunakan sifat linearitas transform Laplace diperoleh

$$m\ \mathcal{L}\left\{\frac{d^2x}{dt^2}\right\} + k\ \mathcal{L}\{x(t)\} = \mathcal{L}\{0\} \quad \text{......} \quad (6)$$

Menurut teorema transform Laplace dari turunan dan kondisi awal yang diberikan maka

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2x}{dt^2}\right\} = s^2\ \mathcal{L}\{x(t)\} - sx(0) - x'(0) = s^2\ \mathcal{L}\{x(t)\} - x_0 s - v_0$$

Andaikan $\mathcal{L}\{x(t)\} = X(s)$ dan $\mathcal{L}\{0\} = 0$ maka persamaan (6) menjadi

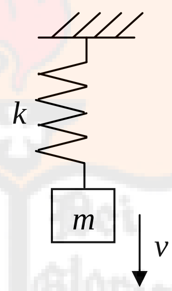
$$m(s^2 X(s) - x_0 s - v_0) + kX(s) = 0 \quad \text{......} \quad (7)$$

Persamaan (7) merupakan persamaan aljabar dalam *s*. Untuk memperoleh $X(s)$ kita selesaikan persamaan aljabar tersebut. Kemudian kita cari invers dari

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

transform Laplace tersebut yaitu $x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\}$ untuk mendapatkan persamaan perpindahan benda dengan melihat tabel atau menggunakan metode yang sesuai (misalnya pecahan parsial, konvolusi).

Contoh 1 : Sebuah benda bermassa 1 slug tergantung pada pegas yang mempunyai konstanta pegas 4 lb/ft. Tentukan persamaan perpindahan benda sebagai fungsi waktu jika benda mulai bergerak dari kedudukan seimbang dengan kecepatan ke bawah 1 ft/det.



Persamaan diferensial dari sistem itu adalah

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4x = 0\,,\ x(0) = 0\,,\ x'(0) = 1$$

Langkah 1 : ambil transform Laplace dari kedua ruas persamaan diferensial.

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2x}{dt^2} + 4x\right\} = \mathcal{L}\{0\}$$

Langkah 2 : gunakan sifat linearitas transform Laplace.

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2x}{dt^2}\right\} + 4\,\mathcal{L}\{x(t)\} = \mathcal{L}\{0\} \quad \text{..} \quad (8)$$

Dengan menggunakan teorema transform Laplace dari turunan dan kondisi awal yang diberikan diperoleh

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2x}{dt^2}\right\} = s^2X(s) - sx(0) - x'(0) = s^2X(s) - 1$$

Kemudian kita substitusikan hasil yang diperoleh di atas ke persamaan (8).

$$s^2X(s) - 1 + 4X(s) = 0$$

Langkah 3 : menyelesaikan persamaan aljabar tersebut.

$$(s^2 + 4)X(s) = 1$$

$$X(s) = \frac{1}{s^2 + 4}$$

Langkah 4 : mencari invers $X(s)$ yaitu $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4}\right\}$.

Maka $x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4}\right\}$

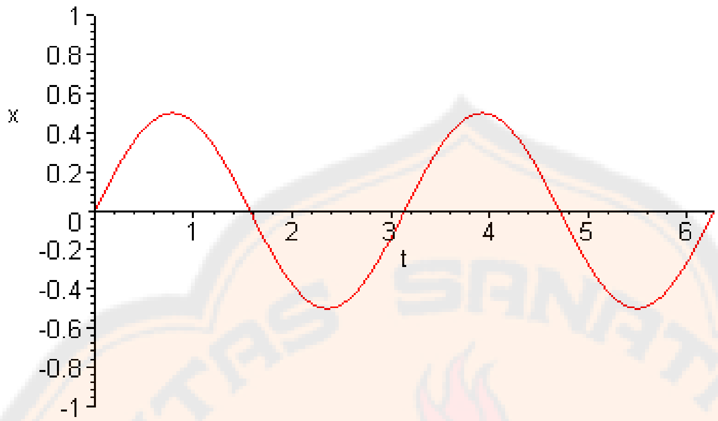
$$= \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+4}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\sin 2t$$

Jadi, persamaan perpindahan bendanya adalah $x(t) = \frac{1}{2}\sin 2t$.

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

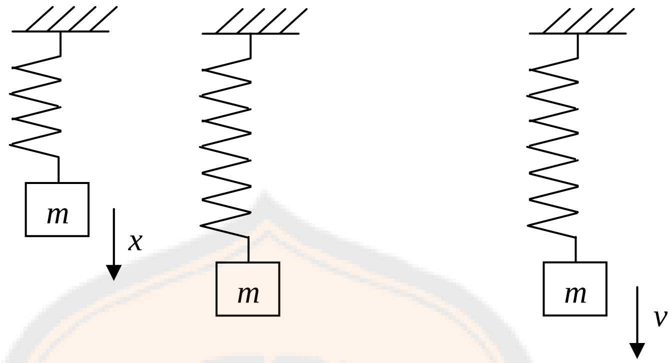
Grafik dari penyelesaian di atas ditunjukkan oleh gambar berikut :



Persamaan perpindahan benda di atas dapat kita tulis dalam bentuk $x(t) = \frac{1}{2}\cos\left(2t - \frac{\pi}{2}\right)$. Persamaan ini memperlihatkan bahwa amplitudonya adalah $\frac{1}{2}$ feet, periodenya adalah $\frac{2\pi}{2} = \pi$ detik, dan frekuensinya adalah $\frac{1}{\pi}$ putaran/detik. Sedangkan fase gesernya adalah $\frac{\pi}{4}$ detik. Amplitudo maksimum pertama terjadi pada saat $t = \frac{\pi}{4}$. Gerakan yang terjadi adalah gerakan harmonis.

Contoh 2 : Sebuah benda bermassa $\frac{1}{8}$ slug digantung pada pegas dengan konstanta pegas 2 lb/ft. Tentukan perpindahan benda sebagai fungsi waktu jika benda ditarik ke bawah $\frac{1}{2}$ ft di bawah keadaan seimbang dan kemudian diberi kecepatan ke bawah 2 ft/det.

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI



Persamaan diferensial dari sistem itu adalah

$$\frac{1}{8}\frac{d^2x}{dt^2} + 2x = 0\,,\ x(0) = \frac{1}{2}\,,\ x'(0) = 2$$

atau $\dfrac{d^2x}{dt^2} + 16x = 0$

Langkah 1 : ambil transform Laplace dari kedua ruas persamaan diferensial.

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2x}{dt^2} + 16x\right\} = \mathcal{L}\{0\}$$

Langkah 2 : gunakan sifat linearitas transform Laplace.

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2x}{dt^2}\right\} + 16\,\mathcal{L}\{x(t)\} = \mathcal{L}\{0\} \quad \text{...} \quad (9)$$

Dengan menggunakan teorema transform Laplace dari turunan dan kondisi awal yang diberikan diperoleh

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2x}{dt^2}\right\} = s^2X(s) - sx(0) - x'(0) = s^2X(s) - \frac{1}{2}s - 2$$

Kemudian kita substitusikan hasil yang diperoleh di atas ke persamaan (9).

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

$$s^2X(s)-\frac{1}{2}s-2+16X(s)=0$$

Langkah 3 : menyelesaikan persamaan aljabar tersebut.

$$(s^2+16)X(s)=\frac{1}{2}s+2$$

$$X(s)=\frac{1}{2}\frac{s}{(s^2+16)}+\frac{2}{s^2+16}$$

Langkah 4 : mencari invers $X(s)$ yaitu $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{2}\frac{s}{(s^2+16)}+\frac{2}{s^2+16}\right\}$.

Maka $x(t)=\mathcal{L}^{-1}\{X(s)\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{2}\frac{s}{(s^2+16)}+\frac{2}{s^2+16}\right\}$

$$=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{2}\frac{s}{(s^2+16)}\right\}+\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+16}\right\}$$

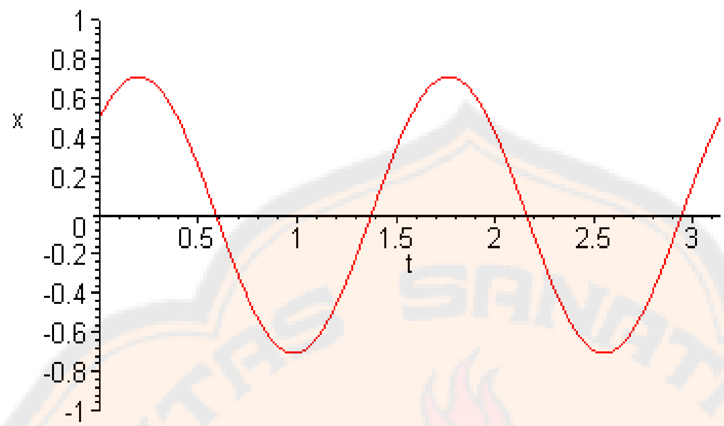
$$=\frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+16}\right\}+\frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4}{s^2+16}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\cos 4t+\frac{1}{2}\sin 4t$$

Jadi, persamaan perpindahan bendanya adalah $x(t)=\frac{1}{2}\cos 4t+\frac{1}{2}\sin 4t$.

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

Grafik dari penyelesaian di atas ditunjukkan oleh gambar berikut :



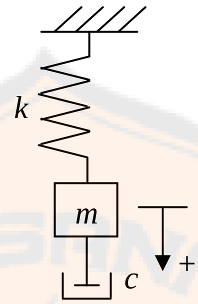
Persamaan perpindahan benda di atas dapat kita tulis dalam bentuk $x(t) = \frac{1}{2}\sqrt{2}\cos\left(4t - \frac{\pi}{4}\right)$. Persamaan ini memperlihatkan bahwa amplitudonya adalah $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ feet, periodenya adalah $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ detik, dan frekuensinya adalah $\frac{2}{\pi}$ putaran/detik. Sedangkan fase gesernya adalah $\frac{\pi}{16}$ detik. Amplitudo maksimum pertama terjadi pada saat $t = \frac{\pi}{16}$. Gerakan yang terjadi adalah gerakan harmonis.

B. Getaran Teredam

Dalam kasus ini masih kita andaikan bahwa tidak ada gaya luar yang bekerja pada benda tetapi ada gaya redaman. Oleh karena itu, dengan konstanta redaman c dan $F(t) = 0$ maka persamaan (4) menjadi :

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = 0 \quad \text{...} \quad (10)$$



Persamaan (10) merupakan persamaan diferensial linear homogen orde dua dengan koefisien konstan untuk getaran teredam.

Persamaan karakterisitiknya dapat kita tulis dalam variabel r yaitu $mr^2 + cr + k = 0$ yang mempunyai akar-akar $-\frac{c}{2m} \pm \frac{1}{2m}\sqrt{c^2 - 4mk}$. Misalkan $\alpha = \frac{c}{2m}$ dan $\beta = \frac{1}{2m}\sqrt{c^2 - 4mk}$ maka akar-akarnya menjadi $-\alpha \pm \beta$. Bentuk penyelesaiannya tergantung dari nilai $\sqrt{c^2 - 4mk}$ maka kita akan membahasnya satu persatu.

Kasus 1 :

Jika $c^2 - 4mk < 0$ maka kasus ini disebut teredam kurang. Akar-akarnya menjadi $-\alpha \pm i\omega^*$ di mana $\beta = i\omega^*$ dan $\omega^* = \frac{1}{2m}\sqrt{4mk - c^2}$. Penyelesaian umumnya adalah $x(t) = e^{-\alpha t}(c_1 \cos \omega^* t + c_2 \sin \omega^* t)$ atau $x(t) = Ae^{-\alpha t}\cos(\omega^* t - \phi)$. Periode getaran $\frac{2\pi}{\omega^*}$ detik dan frekuensinya $\frac{\omega^*}{2\pi}$ putaran/detik.

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

Kasus 2 :

Jika $c^2 - 4mk = 0$ maka kasus ini disebut teredam kritis. Persamaan karakteristiknya mempunyai akar kembar yaitu $r = -\alpha$ sehingga penyelesaian umumnya adalah $x(t) = e^{-\alpha t}(c_1 + c_2 t)$.

Kasus 3 :

Jika $c^2 - 4mk > 0$ maka kasus ini disebut teredam lebih. Akar-akarnya menjadi $-\alpha \pm \beta$ sehingga penyelesaian umumnya adalah $x(t) = c_1 e^{-(\alpha-\beta)t} + c_2 e^{-(\alpha+\beta)t}$.

Untuk menentukan persamaan perpindahan benda kita harus mengetahui titik awal dan kecepatan awal dari benda yaitu $x(0) = x_0$, $x'(0) = v_0$. Untuk menyelesaikan masalah nilai awal tersebut pertama-tama kita ambil transform Laplace dari kedua ruas persamaan tersebut.

$$\mathcal{L}\left\{m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx\right\} = \mathcal{L}\{0\}$$

Dengan menggunakan sifat linearitas transform Laplace diperoleh

$$m\,\mathcal{L}\left\{\frac{d^2x}{dt^2}\right\} + c\,\mathcal{L}\left\{\frac{dx}{dt}\right\} + k\,\mathcal{L}\{x(t)\} = \mathcal{L}\{0\} \quad \text{...} \quad (11)$$

Menurut teorema transform Laplace dari turunan dan kondisi awal yang diberikan maka

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2x}{dt^2}\right\} = s^2\,\mathcal{L}\{x(t)\} - sx(0) - x'(0) = s^2\,\mathcal{L}\{x(t)\} - x_0 s - v_0$$

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

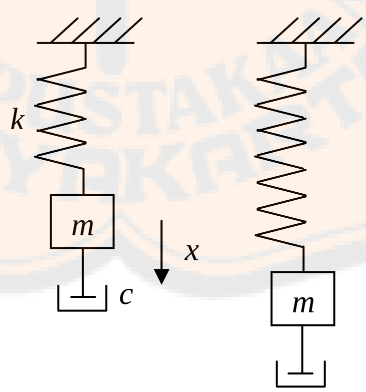
$$\mathcal{L}\left\{\frac{dx}{dt}\right\} = s\ \mathcal{L}\{x(t)\} - x(0) = s\ \mathcal{L}\{x(t)\} - x_0$$

Andaikan $\mathcal{L}\{x(t)\} = X(s)$ dan $\mathcal{L}\{0\} = 0$ maka persamaan (11) menjadi

$$m(s^2 X(s) - x_0 s - v_0) + c(sX(s) - x_0) + kX(s) = 0 \quad \text{.................................} \quad (12)$$

Persamaan (12) merupakan persamaan aljabar dalam *s*. Untuk memperoleh $X(s)$ kita selesaikan persamaan aljabar tersebut. Kemudian kita cari invers dari transform Laplace tersebut yaitu $x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\}$ untuk mendapatkan persamaan perpindahan benda dengan melihat tabel atau menggunakan metode yang sesuai (misalnya pecahan parsial, konvolusi).

Contoh 3 : Sebuah benda bermassa 1 slug digantung pada pegas dengan konstanta pegas 5 lb/ft. Andaikan gaya redam sama dengan dua kali kecepatan benda. Tentukan perpindahan benda sebagai fungsi waktu jika benda ditarik 2 ft di bawah posisi seimbang dan dilepaskan.



PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

Persamaan diferensial dari sistem itu adalah

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 5x = 0\,,\ x(0) = 2\,,\ x'(0) = 0$$

Langkah 1 : ambil transform Laplace dari kedua ruas persamaan diferensial.

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 5x\right\} = \mathcal{L}\{0\}$$

Langkah 2 : gunakan sifat linearitas transform Laplace.

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2x}{dt^2}\right\} + 2\,\mathcal{L}\left\{\frac{dx}{dt}\right\} + 5\,\mathcal{L}\{x(t)\} = \mathcal{L}\{0\} \quad \text{.........} \quad (13)$$

Dengan menggunakan teorema transform Laplace dari turunan dan kondisi awal yang diberikan diperoleh

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2x}{dt^2}\right\} = s^2X(s) - sx(0) - x'(0) = s^2X(s) - 2s$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dx}{dt}\right\} = sX(s) - x(0) = sX(s) - 2$$

Kemudian kita substitusikan hasil yang diperoleh di atas ke persamaan (13).

$$s^2X(s) - 2s + 2(sX(s) - 2) + 5X(s) = 0$$

$$s^2X(s) - 2s + 2sX(s) - 4 + 5X(s) = 0$$

Langkah 3 : menyelesaikan persamaan aljabar tersebut.

$$(s^2 + 2s + 5)X(s) = 2s + 4$$

$$X(s) = \frac{2s}{s^2 + 2s + 5} + \frac{4}{s^2 + 2s + 5} = \frac{2s}{(s+1)^2 + 4} + \frac{4}{(s+1)^2 + 4}$$

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

Langkah 4 : mencari invers $X(s)$ yaitu $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{2s}{(s+1)^2+4}+\dfrac{4}{(s+1)^2+4}\right\}$.

Maka

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s}{(s+1)^2+4}+\frac{4}{(s+1)^2+4}\right\}$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s}{(s+1)^2+4}\right\}+\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4}{(s+1)^2+4}\right\}$$

$$= 2\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s+1)^2+4}\right\}+2\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s+1)^2+4}\right\}$$

Untuk menentukan $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{(s+1)^2+4}\right\}$ kita kerjakan

$$\frac{s}{(s+1)^2+4} = \frac{s+1}{(s+1)^2+4}-\frac{1}{(s+1)^2+4}$$

Akan didapat

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s+1)^2+4}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{(s+1)^2+4}-\frac{1}{(s+1)^2+4}\right\}$$

Sehingga

$$x(t) = 2\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{(s+1)^2+4}-\frac{1}{(s+1)^2+4}\right\}+2\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s+1)^2+4}\right\}$$

$$= 2\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{(s+1)^2+4}\right\}-\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s+1)^2+4}\right\}+2\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s+1)^2+4}\right\}$$

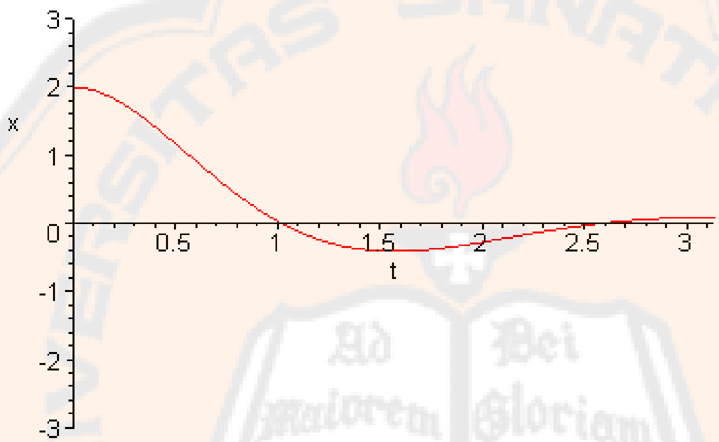
PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

$$= 2\,\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{(s+1)^2+4}\right\} + \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s+1)^2+4}\right\}$$

$$= 2e^{-t}\cos 2t + e^{-t}\sin 2t$$

Jadi, persamaan perpindahan bendanya adalah $x(t) = 2e^{-t}\cos 2t + e^{-t}\sin 2t$.

Grafik dari penyelesaian di atas ditunjukkan oleh gambar berikut :

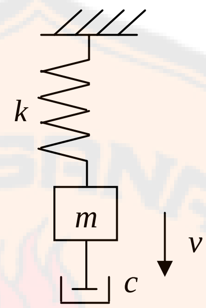


Persamaan perpindahan benda di atas dapat kita tulis dalam bentuk $x(t) = \sqrt{5}e^{-t}\cos(2t - 0{,}46)$. Persamaan ini memperlihatkan bahwa periodenya adalah $\frac{2\pi}{2} = \pi$ detik dan frekuensinya adalah $\frac{1}{\pi}$ putaran/detik. Gerakan pada grafik di atas merupakan gerakan teredam kurang. Dapat kita lihat bahwa gerakannya berosilasi. Amplitudo gerakan akan mendekati nol jika $t \to \infty$.

Contoh 4 : Sebuah pegas mempunyai konstanta pegas 16 lb/ft dan sebuah benda bermassa 1 slug digantung pada pegas itu. Andaikan gaya redam sama dengan 8 kali kecepatan benda. Jika benda mulai bergerak dari kedudukan

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

seimbang dengan kecepatan ke bawah 1 ft/det tentukan perpindahan benda sebagai fungsi waktu.



Persamaan diferensial dari sistem itu adalah

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 8\frac{dx}{dt} + 16x = 0\,,\ x(0) = 0\,,\ x'(0) = 1$$

Langkah 1 : ambil transform Laplace dari kedua ruas persamaan diferensial.

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2x}{dt^2} + 8\frac{dx}{dt} + 16x\right\} = \mathcal{L}\{0\}$$

Langkah 2 : gunakan sifat linearitas transform Laplace.

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2x}{dt^2}\right\} + 8\,\mathcal{L}\left\{\frac{dx}{dt}\right\} + 16\,\mathcal{L}\{x(t)\} = \mathcal{L}\{0\} \quad \text{...} \quad (14)$$

Dengan menggunakan teorema transform Laplace dari turunan dan kondisi awal yang diberikan diperoleh

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2x}{dt^2}\right\} = s^2X(s) - sx(0) - x'(0) = s^2X(s) - 1$$

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dx}{dt}\right\} = sX(s) - x(0) = sX(s)$$

Kemudian kita substitusikan hasil yang diperoleh di atas ke persamaan (14).

$$s^2 X(s) - 1 + 8sX(s) + 16X(s) = 0$$

Langkah 3 : menyelesaikan persamaan aljabar tersebut.

$$(s^2 + 8s + 16)X(s) = 1$$

$$X(s) = \frac{1}{s^2 + 8s + 16} = \frac{1}{(s+4)^2}$$

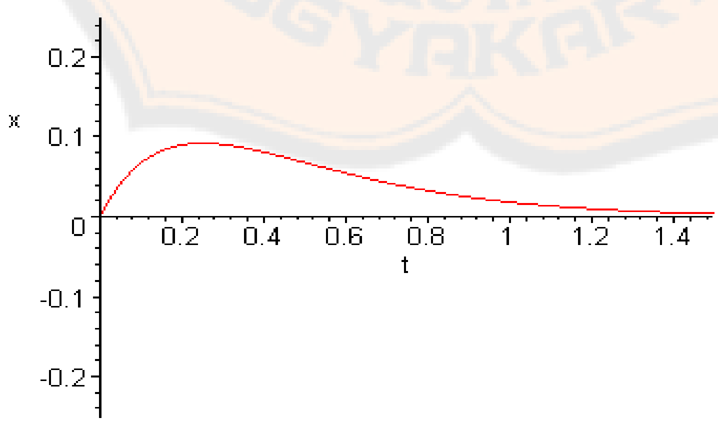
Langkah 4 : mencari invers $X(s)$ yaitu $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+4)^2}\right\}$.

Maka $x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+4)^2}\right\}$

$$= te^{-4t}$$

Jadi, persamaan perpindahan bendanya adalah $x(t) = te^{-4t}$.

Grafik dari penyelesaian di atas ditunjukkan oleh gambar berikut :



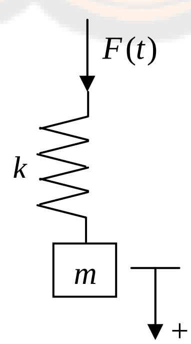
PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

Gerakan ini merupakan gerakan teredam kritis. Dengan mencari turunan pertama dari persamaan perpindahan benda kemudian kita samakan dengan nol maka kita akan mendapatkan amplitudo maksimumnya yaitu pada saat $t = \frac{1}{4}$. Gerakan mula-mula dari titik pangkal kemudian naik sampai amplitudo maksimum. Untuk $t > \frac{1}{4}$ amplitudonya semakin berkurang. Dapat kita lihat bahwa gerakannya tidak berosilasi. Benda mendekati posisi seimbang tetapi tidak pernah mencapainya. Dengan kata lain amplitudo gerakan mendekati nol jika $t \to \infty$.

C. Getaran Terpaksa Tak Teredam

Bila pada pembahasan sebelumnya tidak ada gaya luar yang bekerja pada benda, maka sekarang kita andaikan ada gaya luar yang bekerja pada benda. Misalkan gaya luar tersebut diberikan oleh $F(t) = F_0 \cos \omega t$, di mana F_0 dan ω adalah konstanta. Jika kita andaikan juga bahwa tidak ada gaya redaman $(c = 0)$ maka persamaan (4) menjadi :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = F_0 \cos \omega t \quad \text{.........} \quad (15)$$



PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

Persamaan (15) merupakan persamaan diferensial linear non homogen orde dua dengan koefisien konstan untuk getaran terpaksa tak teredam.

Andaikan $\omega \neq \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ maka penyelesaian umumnya adalah $x(t) = c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \sin \omega_0 t + \frac{F_0}{m(\omega_0{}^2 - \omega^2)} \cos \omega t$. Jika $\omega = \omega_0$ maka persamaan (15) menjadi $m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = F_0 \cos \omega_0 t$ sehingga penyelesaian umumnya adalah $x(t) = c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \sin \omega_0 t + \frac{F_0}{2m\omega_0} t \sin \omega_0 t$.

Untuk menentukan persamaan perpindahan benda kita harus mengetahui titik awal dan kecepatan awal dari benda yaitu $x(0) = x_0$, $x'(0) = v_0$. Untuk menyelesaikan masalah nilai awal tersebut pertama-tama kita ambil transform Laplace dari kedua ruas persamaan tersebut.

$$\mathcal{L}\left\{m\frac{d^2x}{dt^2} + kx\right\} = \mathcal{L}\{F_0 \cos \omega t\}$$

Dengan menggunakan sifat linearitas transform Laplace diperoleh

$$m\,\mathcal{L}\left\{\frac{d^2x}{dt^2}\right\} + k\,\mathcal{L}\{x(t)\} = F_0\,\mathcal{L}\{\cos \omega t\} \quad \text{...} \quad (16)$$

Menurut teorema transform Laplace dari turunan dan kondisi awal yang diberikan maka

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

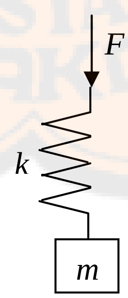
$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2x}{dt^2}\right\} = s^2\,\mathcal{L}\{x(t)\} - sx(0) - x'(0) = s^2\,\mathcal{L}\{x(t)\} - x_0 s - v_0$$

Andaikan $\mathcal{L}\{x(t)\} = X(s)$ dan dari tabel transform Laplace diketahui bahwa $\mathcal{L}\{\cos\omega t\} = \dfrac{s}{s^2+\omega^2}$ maka persamaan (16) menjadi

$$m(s^2X(s) - x_0 s - v_0) + kX(s) = \frac{F_0 s}{s^2+\omega^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

Persamaan (17) merupakan persamaan aljabar dalam *s*. Untuk memperoleh $X(s)$ kita selesaikan persamaan aljabar tersebut. Kemudian kita cari invers dari transform Laplace tersebut yaitu $x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\}$ untuk mendapatkan persamaan perpindahan benda dengan melihat tabel atau menggunakan metode yang sesuai (misalnya pecahan parsial, konvolusi).

Contoh 5 : Sebuah benda bermassa 1 slug digantung pada pegas dengan konstanta pegas 64 lb/ft. Gaya luar yang diberikan sebesar 15 cos 7t. Tentukan perpindahan benda jika titik awal dan kecepatannya sama dengan nol.



Persamaan diferensial dari sistem itu adalah

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 64x = 15\cos 7t\,,\; x(0) = 0\,,\; x'(0) = 0$$

Langkah 1 : ambil transform Laplace dari kedua ruas persamaan diferensial.

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2x}{dt^2} + 64x\right\} = \mathcal{L}\{15\cos 7t\}$$

Langkah 2 : gunakan sifat linearitas transform Laplace.

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2x}{dt^2}\right\} + 64\,\mathcal{L}\{x(t)\} = 15\,\mathcal{L}\{\cos 7t\} \qquad \text{(18)}$$

Dengan menggunakan teorema transform Laplace dari turunan dan kondisi awal yang diberikan diperoleh

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2x}{dt^2}\right\} = s^2X(s) - sx(0) - x'(0) = s^2X(s)$$

Kemudian kita substitusikan hasil yang diperoleh di atas ke persamaan (18).

$$s^2X(s) + 64X(s) = \frac{15s}{s^2+49}$$

Langkah 3 : menyelesaikan persamaan aljabar tersebut.

$$(s^2+64)X(s) = \frac{15s}{s^2+49}$$

$$X(s) = \frac{15s}{(s^2+49)(s^2+64)}$$

Langkah 4 : mencari invers $X(s)$ yaitu $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{15s}{(s^2+49)(s^2+64)}\right\}$.

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

Maka $x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{15s}{(s^2+49)(s^2+64)}\right\}$

$$= \frac{15}{7}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{7s}{(s^2+49)(s^2+64)}\right\}$$

Untuk menentukan $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{7s}{(s^2+49)(s^2+64)}\right\}$ kita gunakan teorema konvolusi.

$\dfrac{7s}{(s^2+49)(s^2+64)}$ dapat kita tulis menjadi $\dfrac{7}{s^2+49}\cdot\dfrac{s}{s^2+64}$

Dari tabel transform Laplace diketahui bahwa $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{7}{s^2+49}\right\} = \sin 7t$ dan

$\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{s^2+64}\right\} = \cos 8t$

sehingga

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{7s}{(s^2+49)(s^2+64)}\right\} = \sin 7t * \cos 8t$$

$$= \int_0^t \sin 7(t-x)\cos 8x\,dx$$

Berdasarkan rumus perkalian sinus dan cosinus :

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\}$$

Akan kita dapatkan

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{7s}{(s^2+49)(s^2+64)}\right\} = \frac{1}{2}\int_0^t[\sin(7t+x)+\sin(7t-15x)]dx$$

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

$$= \frac{1}{2}\left[-\cos(7t + x) + \frac{1}{15}\cos(7t - 15x)\right]_0^t$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\cos 8t + \frac{1}{15}\cos(-8t) + \cos 7t - \frac{1}{15}\cos 7t\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\cos 8t + \frac{1}{15}\cos 8t + \cos 7t - \frac{1}{15}\cos 7t\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{14}{15}\cos 8t + \frac{14}{15}\cos 7t\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{14}{15}\cos 7t - \frac{14}{15}\cos 8t\right]$$

$$= \frac{7}{15}\cos 7t - \frac{7}{15}\cos 8t$$

sehingga

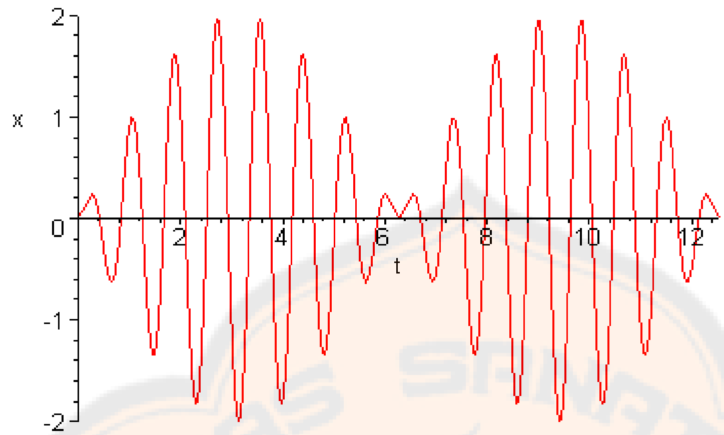
$$x(t) = \frac{15}{7}\left(\frac{7}{15}\cos 7t - \frac{7}{15}\cos 8t\right)$$

$$= \cos 7t - \cos 8t$$

Jadi, persamaan perpindahan bendanya adalah $x(t) = \cos 7t - \cos 8t$.

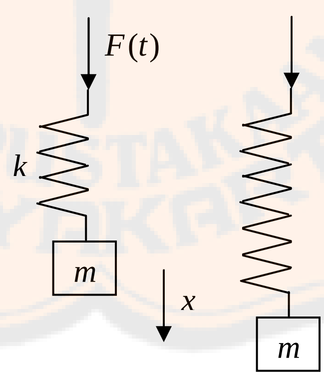
Grafik dari penyelesaian di atas ditunjukkan oleh gambar berikut :

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI



Dapat kita lihat pada grafik di atas bahwa gerakan benda teratur. Jadi amplitudo-amplitudo itu pada awalnya bertambah besar kemudian semakin berkurang sampai berhenti dan begitu pula yang terjadi seterusnya.

Contoh 6 : Sebuah benda bermassa 1 slug digantung pada pegas dengan $k = 9$ lb/ft. Sebuah gaya luar sebesar 12 cos 3t bekerja pada pegas itu. Jika benda ditarik ke bawah 4 ft dan dilepaskan tentukan persamaan perpindahan benda.



Persamaan diferensial dari sistem itu adalah

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 9x = 12\cos 3t\ ,\ \ x(0) = 4\ ,\ \ x'(0) = 0$$

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

Langkah 1 : ambil transform Laplace dari kedua ruas persamaan diferensial.

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2x}{dt^2}+9x\right\}=\mathcal{L}\{12\cos 3t\}$$

Langkah 2 : gunakan sifat linearitas transform Laplace.

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2x}{dt^2}\right\}+9\ \mathcal{L}\{x(t)\}=12\ \mathcal{L}\{\cos 3t\} \quad \text{...} \quad (19)$$

Dengan menggunakan teorema transform Laplace dari turunan dan kondisi awal yang diberikan diperoleh

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2x}{dt^2}\right\}=s^2X(s)-sx(0)-x'(0)=s^2X(s)-4s$$

Kemudian kita substitusikan hasil yang diperoleh di atas ke persamaan (19).

$$s^2X(s)-4s+9X(s)=\frac{12s}{s^2+9}$$

Langkah 3 : menyelesaikan persamaan aljabar tersebut.

$$(s^2+9)X(s)=\frac{12s}{s^2+9}+4s$$

$$X(s)=\frac{12s}{(s^2+9)^2}+\frac{4s}{s^2+9}$$

Langkah 4 : mencari invers $X(s)$ yaitu $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{12s}{(s^2+9)^2}+\frac{4s}{s^2+9}\right\}$.

Maka $x(t)=\mathcal{L}^{-1}\{X(s)\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{12s}{(s^2+9)^2}+\frac{4s}{s^2+9}\right\}$

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

$$= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{12s}{(s^2+9)^2}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4s}{s^2+9}\right\}$$

$$= 4\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s}{(s^2+9)^2}\right\} + 4\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+9}\right\}$$

Untuk menentukan $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s}{(s^2+9)^2}\right\}$ kita gunakan teorema konvolusi.

$\frac{3s}{(s^2+9)^2}$ dapat kita tulis menjadi $\frac{3}{s^2+9}\cdot\frac{s}{s^2+9}$

Dari tabel transform Laplace diketahui bahwa $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s^2+9}\right\} = \sin 3t$ dan

$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+9}\right\} = \cos 3t$

sehingga

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s}{(s^2+9)^2}\right\} = \sin 3t * \cos 3t$$

$$= \int_0^t \sin 3(t-x)\cos 3x dx$$

Berdasarkan rumus perkalian sinus dan cosinus :

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\}$$

Akan kita dapatkan

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s}{(s^2+9)^2}\right\} = \frac{1}{2}\int_0^t [\sin 3t + \sin(3t-6x)]dx$$

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

$$= \frac{1}{2}\left[x\sin 3t + \frac{1}{6}\cos(3t-6x) \right]_0^t$$

$$= \frac{1}{2}\left[t\sin 3t + \frac{1}{6}\cos(-3t) - \frac{1}{6}\cos 3t \right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[t\sin 3t + \frac{1}{6}\cos 3t - \frac{1}{6}\cos 3t \right]$$

$$= \frac{1}{2} t\sin 3t$$

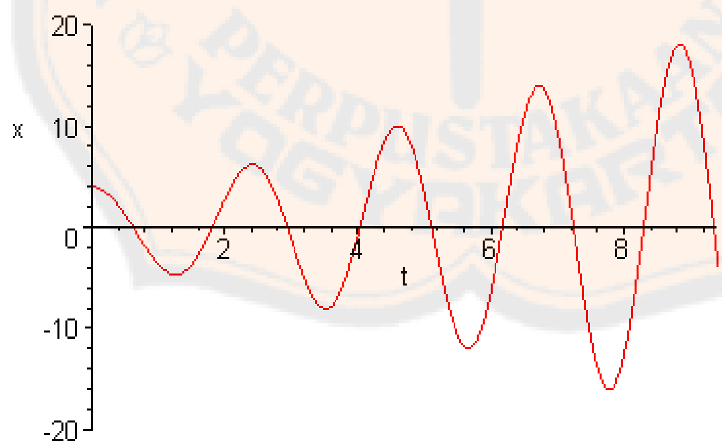
sehingga

$$x(t) = 4\cdot\frac{1}{2} t\sin 3t + 4\cos 3t$$

$$= 2t\sin 3t + 4\cos 3t$$

Jadi, persamaan perpindahan bendanya adalah $x(t) = 2t\sin 3t + 4\cos 3t$.

Grafik dari penyelesaian di atas ditunjukkan oleh gambar berikut :



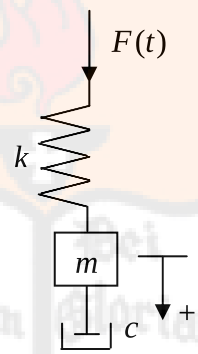
Dapat kita lihat pada grafik di atas bahwa semakin lama amplitudonya akan semakin besar. Dengan kata lain amplitudonya naik tanpa batas jika $t \to \infty$.

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

D. Getaran Terpaksa Teredam

Apabila dalam kasus ini ada gaya redaman dan gaya luar yang bekerja pada benda sedangkan gaya luarnya diberikan oleh $F(t) = F_0 \cos \omega t$ maka persamaan (4) menjadi :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = F_0 \cos \omega t \quad \text{..............................} \quad (20)$$



Persamaan (20) merupakan persamaan diferensial linear non homogen orde dua dengan koefisien konstan untuk getaran terpaksa teredam.

Telah kita bahas sebelumnya bahwa penyelesaian dari $m\frac{d^{2x}}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = 0$ tergantung dari nilai $c^2 - 4mk$ yaitu

1. Jika $c^2 - 4mk < 0$ maka $x_c(t) = e^{-\alpha t}(c_1 \cos \omega^* t + c_2 \sin \omega^* t)$ .... (21)
2. Jika $c^2 - 4mk = 0$ maka $x_c(t) = e^{-\alpha t}(c_1 + c_2 t)$ .... (22)
3. Jika $c^2 - 4mk > 0$ maka $x(t) = c_1 e^{-(\alpha - \beta)t} + c_2 e^{-(\alpha + \beta)t}$ .... (23)

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

Sedangkan $x_p(t) = \dfrac{F_0 m(\omega_0{}^2 - \omega^2)}{m^2(\omega_0{}^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 c^2}\cos\omega t + \dfrac{F_0 \omega c}{m^2(\omega_0{}^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 c^2}\sin\omega t$

atau dapat kita tulis dalam bentuk $x_p(t) = A\cos(\omega t - \phi)$ di mana $A = \dfrac{F_0}{\sqrt{m^2(\omega_0{}^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 c^2}}$ dan $tg\phi = \dfrac{\omega c}{m(\omega_0{}^2 - \omega^2)}$. Jadi penyelesaian umumnya adalah $x(t) = x_c(t) + x_p(t)$ di mana $x_c(t)$ adalah salah satu dari persamaan (21), persamaan (22) atau persamaan (23).

Untuk menentukan persamaan perpindahan benda kita harus mengetahui titik awal dan kecepatan awal dari benda yaitu $x(0) = x_0$, $x'(0) = v_0$. Untuk menyelesaikan masalah nilai awal tersebut pertama-tama kita ambil transform Laplace dari kedua ruas persamaan tersebut.

$$\mathcal{L}\left\{m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx\right\} = \mathcal{L}\{F_0\cos\omega t\}$$

Dengan menggunakan sifat linearitas transform Laplace diperoleh

$$m\,\mathcal{L}\left\{\frac{d^2x}{dt^2}\right\} + c\,\mathcal{L}\left\{\frac{dx}{dt}\right\} + k\,\mathcal{L}\{x(t)\} = F_0\,\mathcal{L}\{\cos\omega t\} \quad \text{.................................} \quad (24)$$

Menurut teorema transform Laplace dari turunan dan kondisi awal yang diberikan maka

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2x}{dt^2}\right\} = s^2\,\mathcal{L}\{x(t)\} - sx(0) - x'(0) = s^2\,\mathcal{L}\{x(t)\} - x_0 s - v_0$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dx}{dt}\right\} = s\,\mathcal{L}\{x(t)\} - x(0) = s\,\mathcal{L}\{x(t)\} - x_0$$

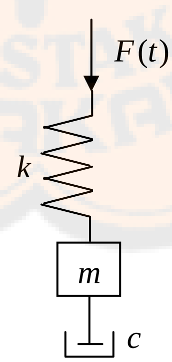
PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

Andaikan $\mathcal{L}\{x(t)\} = X(s)$ dan dari tabel transform Laplace diketahui bahwa $\mathcal{L}\{\cos \omega t\} = \dfrac{s}{s^2 + \omega^2}$ maka persamaan (24) menjadi

$$m(s^2 X(s) - x_0 s - v_0) + c(sX(s) - x_0) + kX(s) = \frac{F_0 s}{s^2 + \omega^2} \quad \text{......................} \quad (25)$$

Persamaan (25) merupakan persamaan aljabar dalam *s*. Untuk memperoleh $X(s)$ kita selesaikan persamaan aljabar tersebut. Kemudian kita cari invers dari transform Laplace tersebut yaitu $x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\}$ untuk mendapatkan persamaan perpindahan benda dengan melihat tabel atau menggunakan metode yang sesuai (misalnya pecahan parsial, konvolusi).

Contoh 7 : Sebuah benda bermassa $\dfrac{5}{16}$ slug digantung pada pegas dengan konstanta pegas 20 lb/ft. Sebuah gaya luar sebesar 10 cos 8t bekerja pada pegas dan gaya redamnya sama dengan 5 kali kecepatan benda. Tentukan perpindahan benda jika titik awal dan kecepatannya sama dengan nol.



Persamaan diferensial dari sistem itu adalah

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

$$\frac{5}{16}\frac{d^2x}{dt^2}+5\frac{dx}{dt}+20x=10\cos 8t\,,\ x(0)=0\,,\ x'(0)=0$$

atau $\dfrac{d^2x}{dt^2}+16\dfrac{dx}{dt}+64x=32\cos 8t$

Langkah 1 : ambil transform Laplace dari kedua ruas persamaan diferensial.

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2x}{dt^2}+16\frac{dx}{dt}+64\right\}=\mathcal{L}\{32\cos 8t\}$$

Langkah 2 : gunakan sifat linearitas transform Laplace.

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2x}{dt^2}\right\}+16\,\mathcal{L}\left\{\frac{dx}{dt}\right\}+64\,\mathcal{L}\{x(t)\}=32\,\mathcal{L}\{\cos 8t\} \quad \text{.................................} \quad (26)$$

Dengan menggunakan teorema transform Laplace dari turunan dan kondisi awal yang diberikan diperoleh

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2x}{dt^2}\right\}=s^2X(s)-sx(0)-x'(0)=s^2X(s)$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dx}{dt}\right\}=sX(s)-x(0)=sX(s)$$

Kemudian kita substitusikan hasil yang diperoleh di atas ke persamaan (26).

$$s^2X(s)+16sX(s)+64X(s)=\frac{32s}{s^2+64}$$

Langkah 3 : menyelesaikan persamaan aljabar tersebut.

$$(s^2+16s+64)X(s)=\frac{32s}{s^2+64}$$

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

$$X(s) = \frac{32s}{(s^2+64)(s^2+16s+64)}$$

Langkah 4 : mencari invers $X(s)$ yaitu $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{32s}{(s^2+64)(s^2+16s+64)}\right\}$.

Dengan menggunakan metode pecahan parsial :

$$\frac{32s}{(s^2+64)(s^2+16s+64)} = \frac{As+B}{s^2+64} + \frac{Cs+D}{s^2+16s+64}$$

$$32s = (As+B)(s^2+16s+64) + (Cs+D)(s^2+64)$$

$$32s = As^3 + 16As^2 + Bs^2 + 64As + 16Bs + 64B + Cs^3 + Ds^2 + 64Cs + 64D$$

$$32s = (A+C)s^3 + (16A+B+D)s^2 + (64A+16B+64C)s + (64B+64D)$$

Dari persamaan di atas akan kita dapatkan sistem persamaan berikut :

$$A + C = 0$$

$$16A + B + D = 0$$

$$64A + 16B + 64C = 32$$

$$64B + 64D = 0$$

Dari sistem persamaan di atas kita dapatkan $A = 0$, $B = 2$, $C = 0$ dan $D = -2$ sehingga

$$\frac{32s}{(s^2+64)(s^2+16s+64)} = \frac{2}{s^2+64} - \frac{2}{s^2+16s+64}$$

Maka

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\}$$

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

$$= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{32s}{(s^2+64)(s^2+16s+64)}\right\}$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+64} - \frac{2}{s^2+16s+64}\right\}$$

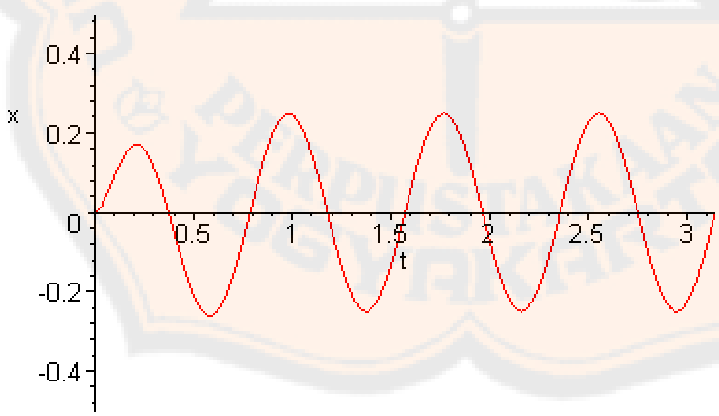
$$= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+64}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s+8)^2}\right\}$$

$$= \frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{8}{s^2+64}\right\} - 2\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+8)^2}\right\}$$

$$= \frac{1}{4}\sin 8t - 2te^{-8t}$$

Jadi, persamaan perpindahan bendanya adalah $x(t) = \frac{1}{4}\sin 8t - 2te^{-8t}$.

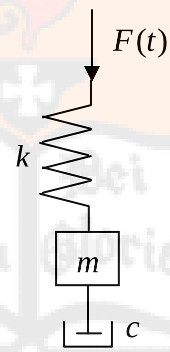
Grafik dari penyelesaian di atas ditunjukkan oleh gambar berikut :



Dapat kita lihat bahwa setelah beberapa saat gerakan akan berosilasi harmonis.

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

Contoh 8 : Sebuah benda bermassa $\frac{1}{2}$ slug digantung pada pegas dengan $k = 10$ lb/ft. Gaya luar yang diberikan sebesar 5 cos 2t dan gaya redamnya sama dengan 2 kali kecepatan benda. Tentukan perpindahan benda jika titik awal dan kecepatannya sama dengan nol.



Persamaan diferensial dari sistem itu adalah

$$\frac{1}{2}\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 10x = 5\cos 2t\,,\ \ x(0) = 0\,,\ \ x'(0) = 0$$

atau $\dfrac{d^2x}{dt^2} + 4\dfrac{dx}{dt} + 20x = 10\cos 2t$

Langkah 1 : ambil transform Laplace dari kedua ruas persamaan diferensial.

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 20\right\} = \mathcal{L}\{10\cos 2t\}$$

Langkah 2 : gunakan sifat linearitas transform Laplace.

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

$$\mathscr{L}\left\{\frac{d^2x}{dt^2}\right\} + 4\,\mathscr{L}\left\{\frac{dx}{dt}\right\} + 20\,\mathscr{L}\{x(t)\} = 10\,\mathscr{L}\{\cos 2t\} \quad \text{.......................} \quad (27)$$

Dengan menggunakan teorema transform Laplace dari turunan dan kondisi awal yang diberikan diperoleh

$$\mathscr{L}\left\{\frac{d^2x}{dt^2}\right\} = s^2X(s) - sx(0) - x'(0) = s^2X(s)$$

$$\mathscr{L}\left\{\frac{dx}{dt}\right\} = sX(s) - x(0) = sX(s)$$

Kemudian kita substitusikan hasil yang diperoleh di atas ke persamaan (27).

$$s^2X(s) + 4sX(s) + 20X(s) = \frac{10s}{s^2+4}$$

Langkah 3 : menyelesaikan persamaan aljabar tersebut.

$$(s^2+4s+20)X(s) = \frac{10s}{s^2+4}$$

$$X(s) = \frac{10s}{(s^2+4)(s^2+4s+20)}$$

Langkah 4 : mencari invers $X(s)$ yaitu $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{10s}{(s^2+4)(s^2+4s+20)}\right\}$.

Dengan menggunakan metode pecahan parsial :

$$\frac{10s}{(s^2+4)(s^2+4s+20)} = \frac{As+B}{s^2+4} + \frac{Cs+D}{s^2+4s+20}$$

$$10s = (As+B)(s^2+4s+20) + (Cs+D)(s^2+4)$$

$$10s = As^3 + 4As^2 + Bs^2 + 20As + 4Bs + 20B + Cs^3 + Ds^2 + 4Cs + 4D$$

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

$$10s = (A+C)s^3 + (4A+B+D)s^2 + (20A+4B+4C)s + (20B+4D)$$

Dari persamaan di atas akan kita dapatkan sistem persamaan berikut :

$$A + C = 0$$

$$4A + B + D = 0$$

$$20A + 4B + 4C = 10$$

$$20B + 4D = 0$$

Dari sistem persamaan di atas kita dapatkan $A = \frac{1}{2}$, $B = \frac{1}{2}$, $C = -\frac{1}{2}$ dan $D = -\frac{5}{2}$ sehingga

$$\frac{10s}{(s^2+4)(s^2+4s+20)} = \frac{1}{2}\frac{s}{(s^2+4)} + \frac{1}{2}\frac{1}{(s^2+4)} - \frac{1}{2}\frac{s}{(s^2+4s+20)} - \frac{5}{2}\frac{1}{(s^2+4s+20)}$$

Maka

$$\begin{aligned}
x(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} \\
&= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{10s}{(s^2+4)(s^2+4s+20)}\right\} \\
&= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{2}\frac{s}{(s^2+4)} + \frac{1}{2}\frac{1}{(s^2+4)} - \frac{1}{2}\frac{s}{(s^2+4s+20)} - \frac{5}{2}\frac{1}{(s^2+4s+20)}\right\} \\
&= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{2}\frac{s}{(s^2+4)}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{2}\frac{1}{(s^2+4)}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{2}\frac{s}{((s+2)^2+16)}\right\} - \\
&\quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5}{2}\frac{1}{((s+2)^2+16)}\right\}
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4}\right\} + \frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+4}\right\} - \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s+2)^2+16}\right\} -$$

$$\frac{5}{8}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4}{(s+2)^2+16}\right\}$$

Untuk menentukan $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s+2)^2+16}\right\}$ kita kerjakan

$$\frac{s}{(s+2)^2+16} = \frac{s+2}{(s+2)^2+16} - \frac{2}{(s+2)^2+16}$$

Akan didapat

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s+2)^2+16}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+2}{(s+2)^2+16} - \frac{2}{(s+2)^2+16}\right\}$$

Sehingga

$$x(t) = \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4}\right\} + \frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+4}\right\} - \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+2}{(s+2)^2+16} - \frac{2}{(s+2)^2+16}\right\} -$$

$$\frac{5}{8}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4}{(s+2)^2+16}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4}\right\} + \frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+4}\right\} - \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+2}{(s+2)^2+16}\right\} +$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^2+16}\right\} - \frac{5}{8}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4}{(s+2)^2+16}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4}\right\} + \frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+4}\right\} - \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+2}{(s+2)^2+16}\right\} +$$

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

$$\frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4}{(s+2)^2+16}\right\}-\frac{5}{8}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4}{(s+2)^2+16}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4}\right\}+\frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+4}\right\}-\frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+2}{(s+2)^2+16}\right\}-$$

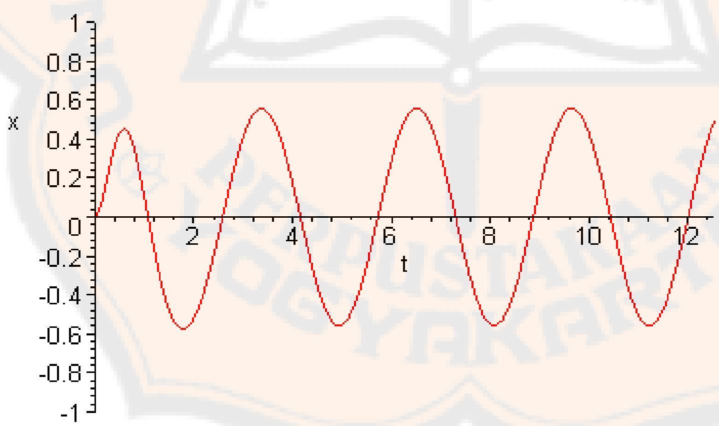
$$\frac{3}{8}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4}{(s+2)^2+16}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\cos 2t+\frac{1}{4}\sin 2t-\frac{1}{2}e^{-2t}\cos 4t-\frac{3}{8}e^{-2t}\sin 4t$$

Jadi, persamaan perpindahan bendanya adalah :

$$x(t)=\frac{1}{2}\cos 2t+\frac{1}{4}\sin 2t-\frac{1}{2}e^{-2t}\cos 4t-\frac{3}{8}e^{-2t}\sin 4t\ .$$

Grafik dari penyelesaian di atas ditunjukkan oleh gambar berikut :



Dapat kita lihat bahwa setelah beberapa saat gerakan akan berosilasi harmonis.

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

BAB IV

PENUTUP

Dari permasalahan yang sudah dibahas dalam skripsi ini, kita dapat mengambil beberapa kesimpulan sebagai berikut :

1. Transform Laplace merupakan salah satu metode yang dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah nilai awal persamaan diferensial linear orde dua dengan koefisien konstan. Transform Laplace didefinisikan sebagai berikut : misalkan $f(t)$ suatu fungsi dari t yang terdefinisikan untuk $t > 0$ maka transfom Laplace dari $f(t)$ yang dinyatakan oleh $\mathcal{L}\{f(t)\}$, didefinisikan sebagai :

   $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$, untuk $s > 0$.

   Berikut ini merupakan langkah-langkah transform Laplace dalam menyelesaikan masalah nilai awal persamaan diferensial linear orde dua dengan koefisien konstan :

   a. Ambil transform Laplace dari kedua ruas persamaan diferensial

   b. Gunakan sifat linearitas, teorema transform Laplace dari turunan dan kondisi awal yang diberikan untuk memperoleh persamaan aljabar.

      Sifat linearitas transform Laplace :

      $\mathcal{L}\{c_1 f_1(t) \pm c_2 f_2(t)\} = c_1 \mathcal{L}\{f_1(t)\} \pm c_2 \mathcal{L}\{f_2(t)\} = c_1F_1(s) \pm c_2F_2(s)$

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

Teorema transform Laplace dari turunan berorde satu :

$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\ \mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)$

Teorema transform Laplace dari turunan berorde dua :

$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2\ \mathcal{L}\{f(t)\} - sf(0) - f'(0)$

c. Selesaikan persamaan aljabar tersebut untuk memperoleh transform Laplacenya.

d. Cari invers transform Laplace dengan melihat tabel atau menggunakan metode yang sesuai (misalnya pecahan parsial, konvolusi) sehingga diperoleh penyelesaian masalah nilai awal yang diberikan.

Invers transform Laplace :

$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$.

Teorema konvolusi :

$\mathcal{L}\{f(t) * g(t)\} = F(s)G(s)$.

2. Transform Laplace dapat diterapkan untuk menyelesaikan masalah nilai awal persamaan diferensial linear orde dua dengan koefisien konstan khususnya pada getaran pegas dengan langkah-langkah yang sama seperti di atas.

Dengan transform Laplace kita dapat menyelesaikan masalah nilai awal tanpa mencari penyelesaian umumnya terlebih dahulu.

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

DAFTAR PUSTAKA

Tutoyo, A. (1991). *Diktat Persamaan Diferensial disadur dari buku "Ordinary Differential Equations with Applications" karangan Rice & Strange*. Yogyakarta : IKIP Sadhar.

Spiegel, Murray R. (1989). *Seri Buku Schaum Teori dan Soal – Soal : Matematika Lanjutan untuk Para Insinyur dan Ilmuwan*. Jakarta : Erlangga.

Kusumah, Yaya S. (1989). *Persamaan Diferensial*. Jakarta : Depdikbud Direktorat Jenderal Pendidikan Tinggi Proyek Pengembangan Lembaga Pendidikan Tenaga Kependidikan.

Ayres, Frank. (1986). *Seri Buku Schaum Teori dan Soal – Soal : Persamaan Diferensial*. Jakarta : Erlangga.

Spiegel, Murray R. (1985). *Seri Buku Schaum Teori dan Soal – Soal : Transformasi Laplace*. Jakarta : Erlangga.

Kreyszig, Erwin. (1993). *Matematika Teknik Lanjutan*. Jakarta : PT Gramedia Pustaka Utama.

Finizio, N. & Ladas, G. (1988). *Persamaan Diferensial Biasa dengan Penerapan Modern*. Jakarta : Erlangga.

Boyce, William E. & Diprima, Richard C. (1992). *Elementary Differential Equations* (5^{th}ed). Canada : John Wiley & Sons, Inc.

Guterman, Martin M. & Nitecki, Zbigniew H. (1991). *Differential Equations : A First Course* (3^{rd}ed). Orlando : Saunders College Publishing.

Rice, Bernard J. & Strange, Jerry D. (1986). *Ordinary Differential Equations with Applications*. Monterey California : Brooks/Cole Publishing Co.

Ross, Shepley L. (1984). *Introduction to Ordinary Differential Equations* (3^{rd}ed). New York : John Wiley & Sons, Inc.

Silaban, Pantur & Sucipto, Erwin. (1993). *Fisika* (Edisi III jilid 1). Jakarta : Erlangga.

Vierck, Robert K. (1995). *Analisis Getaran*. Bandung : PT Eresco.

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

TABEL TRANSFORM LAPLACE

f(t)	$\mathcal{L}$\{f(t)\}=F(s)
1	$\frac{1}{s},\ s>0$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}},\ s>0$
e^{at}	$\frac{1}{s-a},\ s>a$
$e^{at}t^n$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}},\ s>a$
$\sin kt$	$\frac{k}{s^2+k^2},\ s>0$
$\cos kt$	$\frac{s}{s^2+k^2},\ s>0$
$\sinh kt$	$\frac{k}{s^2-k^2},\ s>\lvert k\rvert$
$\cosh kt$	$\frac{s}{s^2-k^2},\ s>\lvert k\rvert$
$e^{at}\sin kt$	$\frac{k}{(s-a)^2+k^2},\ s>a$
$e^{at}\cos kt$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+k^2},\ s>a$
$t\sin kt$	$\frac{2ks}{(s^2+k^2)^2},\ s>0$
$t\cos kt$	$\frac{s^2-k^2}{(s^2+k^2)^2},\ s>\lvert k\rvert$
$c_1 f_1(t)\pm c_2 f_2(t)$	$c_1F_1(s)\pm c_2F_2(s)$

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

$e^{at} f(t)$	$F(s-a)$
f(t)	**$\mathcal{L}$\{f(t)\}=F(s)**
$f'(t)$	$s\,\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)$
$f''(t)$	$s^2\,\mathcal{L}\{f(t)\} - sf(0) - f'(0)$
$\int_0^t f(x)dx$	$\frac{1}{s}F(s)$
$f(t) * g(t)$	$F(s)G(s)$

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

TABEL SATUAN BESARAN

Besaran	Satuan British	Satuan SI
Panjang	Feet (ft)	Meter (m)
Waktu	Second (s)	Detik (s)
Massa	Slug	Kilogram (kg)
Gaya	Libra (lb)	Newton (N)

KONVERSI SATUAN

Mengubah dari	Menjadi	Dikalikan dengan
feet	meter	0,3048
slug	kilogram	14,5939
libra	newton	4,4482

Gravitasi = 32,1740 ft/s ^{2} = 9,80665m/s ^{2}