DERET FOURIER DAN PEMAKAIANNYA

Skripsi

Diajukan untuk Memenuhi Salah Satu Syarat
Memperoleh Gelar Sarjana Pendidikan
Program Studi Pendidikan Matematika

Oleh:

Veronika Fitri Rianasari
NIM. 041414012

PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA
JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
UNIVERSITAS SANATA DHARMA
YOGYAKARTA
2008

SKRIPSI

DERET FOURIER DAN PEMAKAIANNYA

Oleh:

Veronika Fitri Rianasari
NIM. 041414012

Telah disetujui oleh:

Pembimbing,

Drs. A. Tutoyo, M.Sc.

Tanggal : 19 Agustus 2008

SKRIPSI

DERET FOURIER DAN PEMAKAIANNYA

Dipersiapkan dan ditulis oleh:

Veronika Fitri Rianasari
NIM. 041414012

Telah dipertahankan di depan Panitia Penguji
pada tanggal 29 Agustus 2008
dan dinyatakan memenuhi syarat

Susunan Panitia Penguji

	Nama lengkap	Tanda tangan
Ketua	: Drs. Severinus Domi, M.Si.	....
Sekretaris	: Dr. St. Suwarsono	....
Anggota	: Drs. A. Tutoyo, M.Sc.	....
Anggota	: Dr. St. Suwarsono	....
Anggota	: Dr. Susento, M.S.	....

Yogyakarta, 29 Agustus 2008

Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan
Universitas Sanata Dharma
Dekan,

Drs. T. Sarkim, M.Ed., Ph.D.

HALAMAN PERSEMBAHAN

Whatever you do, do it heartily, as to the Lord and not to men.

(Colossians 3:23)

And we know that in all things God works for the good of those who love Him, who have been called according to His purpose. (Rome 8:28)

Dengan penuh syukur kupersembahkan karyaku ini kepada

Tuhan Yesus dan Bunda Maria

Bapak, Ibu, dan saudara-saudaraku tercinta

Masku Nobertus Ribut Santoso

Kalian adalah anugerah terindah dalam hidupku

PERNYATAAN KEASLIAN KARYA

Saya menyatakan dengan sesungguhnya bahwa skripsi yang saya tulis ini tidak memuat karya atau bagian orang lain, kecuali yang telah disebutkan dalam kutipan dan daftar pustaka, sebagaimana layaknya karya ilmiah.

Yogyakarta, 19 Agustus 2008

Penulis,

Veronika Fitri Rianasari

ABSTRAK

Veronika Fitri Rianasari, 2008. *Deret Fourier dan Pemakaiannya*. Skripsi. Program Studi Pendidikan Matematika, Jurusan Pendidikan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Universitas Sanata Dharma, Yogyakarta.

Fungsi $f(x)$ yang didefinisikan pada interval $(-L, L)$, periodik dengan periode $2L$, dan kontinu sepotong-sepotong dalam interval tersebut, dapat dinyatakan dalam bentuk deret Fourier sebagai berikut $a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi}{L}x + b_n \sin\frac{n\pi}{L}x\right)$, dimana

$a_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)dx$, $a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx$, dan $b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx$

untuk n adalah bilangan bulat positif.

Sebuah teorema yang penting yang dibahas dalam skripsi ini yaitu teorema mengenai kekonvergenan deret Fourier. Teorema tersebut menyatakan bahwa deret Fourier dari fungsi $f(x)$ yang mempunyai periode 2π, kontinu sepotong-sepotong dalam interval $-\pi \le x \le \pi$, dan mempunyai turunan kiri dan turunan kanan di setiap titik pada interval tersebut akan konvergen ke $f(x)$ jika x titik kontinuitas, dan konvergen ke $\frac{f(x_+) + f(x_-)}{2}$ jika x titik diskontinuitas.

Dalam studi ini dibahas pemakaian deret Fourier dalam bidang fisika, khususnya pada osilasi paksa, konduksi panas, dan getaran dawai. Persamaan diferensial biasa dari osilasi paksa berbentuk $m\,y'' + c\,y' + k\,y = F(t)$, dimana $F(t)$ berupa fungsi kontinu sepotong-sepotong dalam suatu interval . Persamaan tersebut merupakan persamaan diferensial linear non homogen orde dua dengan koefisien konstan. Pada osilasi paksa, deret Fourier digunakan untuk merepresentasikan gaya luar $(F(t))$ yang bekerja pada sistem, sehingga akhirnya dapat diperoleh penyelesaian dari persamaan diferensial biasa dari osilasi paksa. Persamaan diferensial parsial dari konduksi panas berbentuk $\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. Sedangkan persamaan diferensial parsial dari getaran dawai berbentuk $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

Pada konduksi panas dan getaran dawai, deret Fourier digunakan untuk menentukan solusi bagi kedua persamaan diferensial biasa yang persamaannya diperoleh dari metode hasilkali dua fungsi untuk mencari penyelesaian masalah nilai batas pada persamaan diferensial parsial dari masing-masing kasus.

ABSTRACT

Veronika Fitri Rianasari, 2008. *Fourier Series and Its Use*. Thesis. Mathematics Education Study Program, Mathematics and Science Education Department, Faculty of Teacher Training and Education, Sanata Dharma University, Yogyakarta.

Function $f(x)$ defined in interval $(-L, L)$, periodic function with period $2L$, and piecewise continuous in its interval, can be expressed in the Fourier Series form as follows

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi}{L} x + b_n \sin\frac{n\pi}{L} x \right),$$

$$a_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)dx,\quad a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx,\ \text{and}\ \ b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx$$

for n is a positive integer.
An important theorem discussed in this thesis is a theorem about convergence of Fourier series. The theorem defined that the Fourier series of $f(x)$ that have period 2π, piecewise continuous in interval $-\pi \le x \le \pi$, and left derivative and right derivative of $f(x)$ at each point in the interval exist converges to $f(x)$ if x is continuity point, and converges to $\dfrac{f(x_+) + f(x_-)}{2}$ if x is discontinuity point.

This study discussed the use of the Fourier series in physics, particularly forced oscillations, heat conduction, and string vibration. Ordinary differential equation from forced oscillations is of the form $m\,y'' + c\,y' + k\,y = F(t)$, $F(t)$ is a piecewise continuous function in an interval. It is second order nonhomogeneous linear differential equation with constant coefficients. In the forced oscillations, the Fourier series is used to represent the external force $(F(t))$ acting on a spring-mass system so it is obtained the solution of ordinary differential equation from forced oscillations. Partial differential equation from heat conduction is of the form $\dfrac{\partial u}{\partial t} = c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. Moreover, partial differential equation from string vibration is of the form $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. In the heat conduction and string vibration, the Fourier series is used to decide the solution for two ordinary differential equations in which the equations are obtained from product of two functions method, so it is obtained the solution of the boundary value problem in the partial differential equation from the heat conduction and string vibration.

LEMBAR PERNYATAAN PERSETUJUAN
PUBLIKASI KARYA ILMIAH UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS

Yang bertanda tangan di bawah ini, saya mahasiswa Universitas Sanata Dharma :

Nama : Veronika Fitri Rianasari

Nomor Mahasiswa : 041414012

Demi pengembangan ilmu pengetahuan, saya memberikan kepada Perpustakaan Universitas Sanata Dharma karya ilmiah saya yang berjudul :

DERET FOURIER DAN PEMAKAIANNYA.

beserta perangkat yang diperlukan (bila ada). Dengan demikian saya memberikan kepada Perpustakaan Universitas Sanata Dharma hak untuk menyimpan, mengalihkan dalam bentuk media lain, mengelolanya dalam bentuk pangkalan data, mendistribusikan secara terbatas, dan mempublikasikannya di Internet atau media lain untuk kepentingan akademis tanpa perlu meminta ijin dari saya maupun memberikan royalti kepada saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis.

Demikian pernyataan ini yang saya buat dengan sebenarnya.

Dibuat di Yogyakarta

Pada tanggal : 29 Agustus 2008

Yang menyatakan

(Veronika Fitri Rianasari)

KATA PENGANTAR

Puji dan syukur ke hadirat Allah Bapa di Surga karena penulis dapat menyelesaikan skripsi dengan judul "Deret Fourier dan Pemakaiannya". Skripsi ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat memperoleh gelar Sarjana Pendidikan pada Program Studi Pendidikan Matematika, Jurusan Pendidikan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan di Universitas Sanata Dharma Yogyakarta.

Selama penyusunan skripsi ini banyak kesulitan dan hambatan yang penulis alami. Namun dengan bantuan berbagai pihak semua kesulitan dan hambatan tersebut dapat teratasi. Untuk itu, dalam kesempatan ini penulis dengan tulus hati ingin mengucapkan terima kasih yang tak terhingga kepada :

1. Tuhan Yesus dan Bunda Maria yang selalu menjaga, melindungi, dan menuntun langkahku. Puji syukur atas segala berkat dan anugerah yang telah dianugerahkan selama ini.
2. Bapak Drs. A. Tutoyo, M.Sc. selaku dosen pembimbing yang dengan tulus telah membimbing, mengarahkan, dan memberikan masukan serta kritikan yang berharga kepada penulis selama proses penyusunan skripsi ini.
3. Bapak Dr. St. Suwarsono selaku Ketua Program Studi Pendidikan Matematika dan selaku dosen penguji yang telah banyak memberikan bantuan selama penulis menempuh kuliah serta atas masukan dan kritikan yang bermanfaat untuk penyempurnaan skripsi ini.

4. Bapak Dr. Susento, M.S. selaku dosen penguji yang telah membimbing selama penulis menempuh kuliah serta atas masukan dan kritikan yang bermanfaat untuk penyempurnaan skripsi ini.
5. Segenap dosen JPMIPA, khususnya dosen-dosen Program Studi Pendidikan Matematika, Universitas Sanata Dharma yang telah mendidik, membagi pengetahuan dan pengalaman yang sangat bermanfaat kepada penulis.
6. Bapak Sunardjo dan Bapak Sugeng di sekretariat JPMIPA atas segala bantuan, keramahan, dan kerja samanya selama penulis menempuh kuliah hingga penyelesaian skripsi ini.
7. Bapak Markus Ramen Sudiran, Ibu Khatarina Mariani, saudara-saudaraku Irwan Wijayanto, Agustinus Heru Apriyanto, Theresia Renny Andarwati, dan Sr. Yoanne Dian Retnosari, CB atas doa, cinta, kasih sayang, perhatian, nasehat, dan semangat yang diberikan selama ini. Semoga skripsi ini dapat menjadi hadiah kecil yang membanggakan.
8. Nobertus Ribut Santoso yang tak pernah kunjung henti memberi cinta, kasih sayang, doa, dan dukungan kepada penulis selama ini.
9. Teman-teman PMAT angkatan 2004 di JPMIPA. Terima kasih atas bantuan, semangat, keceriaan dan kebersamaan selama kuliah.
10. Teman-teman Kost Flamboyan, Resti, Ayu, Monik, Putu, Windru, Lusi, Weni, Asih, Darti, Heni, Meli, dan Ria. Terima kasih atas bantuan, semangat, dan perhatian yang diberikan selama ini.

11. Teman-teman KMPKS (Keluarga Mahasiswa/i Pelajar Katolik Sumatera bagian Selatan) khususnya paduan suara KMPKS Voice yang selalu memberi dukungan, semangat , dan keceriaan kepada penulis.
12. Seluruh staf perpustakaan USD Paingan, atas segala bantuan, kerja sama, dan keramahan yang telah diberikan selama ini.
13. Semua pihak yang tidak dapat disebutkan satu persatu yang telah rela membantu dan mendukung penulis hingga selesainya proses penyusunan skripsi ini.

Penulis menyadari masih banyak kekurangan dan kesalahan dalam skripsi ini. Karena itu penulis sangat mengharapkan masukan dan saran dari pembaca demi perbaikan skripsi ini. Akhir kata, penulis berharap semoga skripsi yang tidak sempurna ini bermanfaat bagi setiap pembaca.

Penulis

DAFTAR ISI

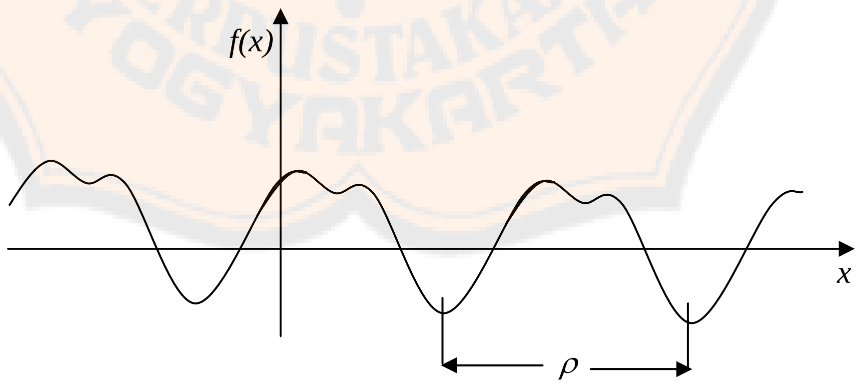
BAB I

PENDAHULUAN

A. Latar Belakang

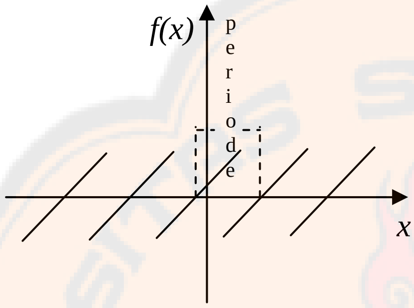
Fenomena periodik sangat sering dijumpai di dalam fisika dan penerapan rekayasanya, dan suatu masalah praktis yang penting adalah merepresentasikan fungsi periodik yang muncul dengan fungsi-fungsi periodik yang sederhana seperti sinus dan kosinus. Hal ini membawa deret Fourier, yang suku-sukunya adalah fungsi sinus dan kosinus. Temuan Jean-Baptiste Joseph Fourier (yang mengembangkan temuan Euler dan Daniel Bernoulli) merupakan salah satu kejadian paling penting di dalam perkembangan matematika terapan.

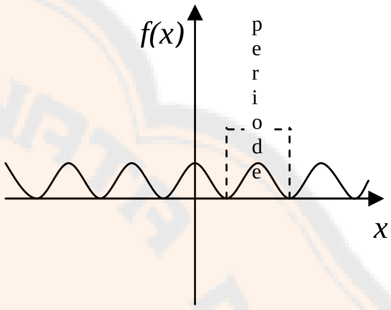
Fungsi $f(x)$ dikatakan periodik jika ada bilangan positif ρ sedemikian rupa sehingga $f(x+\rho)=f(x)$ untuk semua *x*. Bilangan ρ ini dinamakan periode fungsi *f(x)*. Grafik fungsi periodik diperoleh melalui pengulangan periodik grafiknya untuk sembarang selang yang panjangnya ρ.



Fungsi periodik yang telah kita kenal adalah fungsi sinus dan kosinus, dan kita lihat bahwa fungsi $f(x) = c$ (c = konstanta) juga merupakan fungsi periodik , sebab fungsi ini memenuhi $f(x+\rho) = f(x)$ untuk setiap ρ positif.

Contoh-contoh lain dari fungsi periodik bisa dilihat pada gambar berikut :





Jika suatu fungsi memiliki periode ρ, maka

$$f(x+2\rho) = f[(x+\rho)+\rho] = f(x+\rho) = f(x),$$

dan juga

$$f(x+3\rho) = f[(x+2\rho)+\rho] = f(x+\rho) = f(x),$$

dan seterusnya , sehingga untuk setiap bilangan bulat n berlaku $f(x+n\rho) = f(x)$ untuk semua *x*. Jika *f(x)* dan *g(x)* masing-masing adalah fungsi periodik dengan periode ρ, maka berdasarkan sifat linearitas berlaku $h(x) = a \cdot f(x) + b \cdot g(x)$ juga merupakan fungsi periodik dengan periode ρ.

Fungsi periodik yang dijumpai di dalam masalah rekayasa sering kali agak rumit, oleh karena itu kita berusaha untuk merepresentaskan fungsi itu ke dalam bentuk yang lebih sederhana. Berikut adalah fungsi-fungsi sederhana yang berperiode 2π :

$$1,\ \cos x,\ \sin x,\ \cos 2x,\ \sin 2x,\ \ldots,\ \cos nx,\ \sin nx,\ \ldots .$$

Deret yang diperoleh akan berbentuk

$$a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \dots$$

dengan $a_0, a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots$ adalah bilangan real. Deret ini dinamakan deret trigonometrik, sedangkan a_n dan b_n disebut koefisien deret trigonometrik. Dengan menggunakan notasi sigma, kita dapat menuliskan deret itu sebagai $a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$. Himpunan fungsi-fungsi yang menyusun deret trigonometrik sering dinamakan sistem trigonometrik. Hampir semua fungsi periodik $f(x)$ yang berperiode 2π yang banyak dijumpai dalam penerapan (misalnya dalam kaitan dengan getaran dan konduksi panas) dapat direpresentasikan oleh deret trigonometrik.

Dalam penerapan, khususnya dalam getaran dan konduksi panas, penuh dengan masalah-masalah yang harus dimodelkan dengan persamaan diferensial. Persamaan diferensial adalah persamaan yang memuat derivatif atau diferensial dari satu atau lebih fungsi yang belum diketahui. Jika fungsi yang belum diketahui dalam persamaan diferensial bergantung hanya pada satu variabel bebas maka persamaan itu disebut persamaan diferensial biasa. Bentuk umum persamaan diferensial biasa yaitu:

$$f(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}) = 0,$$

dengan x menyatakan variabel bebas dan y menyatakan variabel tak bebas. Sedangkan jika fungsi yang belum diketahui bergantung pada dua atau lebih variabel bebas, maka persamaan itu disebut persamaan diferensial parsial. Bentuk umum persamaan diferensial parsial yaitu :

$$f(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \ldots, \frac{\partial^n z}{\partial y^n}) = 0,$$

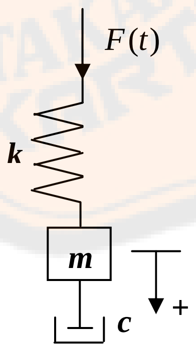
dengan x dan y menyatakan variabel bebas, sedangkan z menyatakan variabel tak bebas.

Persamaan diferensial biasa mempunyai penerapan pada getaran pegas. Untuk lebih memahami penerapan persamaan diferensial biasa pada getaran pegas, perhatikan contoh berikut.

Contoh 1.1 : Sebuah benda bermassa m tergantung dari keadaan seimbang pada sebuah pegas dengan konstanta pegas k. Sebuah gaya luar bekerja pada pegas tersebut sebesar

$$F(t) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & \text{jika } -\pi < t < 0 \\ -\dfrac{\pi}{2} & \text{jika } 0 < t < \pi \end{cases}, \quad F(t + 2\pi) = F(t)$$

dan terdapat gaya redaman sebesar c satuan seperti terlihat pada gambar di bawah ini :



Tentukan solusi keadaan stabilnya!

Untuk menentukan keadaan stabil dari masalah di atas berarti menentukan penyelesaian dari persamaan diferensial biasa berikut:

$$m\,y'' + c\,y' + k\,y = F(t)\,.$$

Karena gaya luar $F(t)$ bukan berupa suatu fungsi sinus atau kosinus murni maka langkah pertama yang harus dilakukan yaitu merepresentasi gaya luar $F(t)$ dengan suatu deret Fourier. Setelah ditentukan deret Fourier dari gaya luar tersebut, maka langkah selanjutnya yaitu menentukan penyelesaian dari persamaan diferensial yang telah terbentuk.

Persamaan diferensial parsial banyak dijumpai dalam kaitan dengan berbagai masalah fisik seperti konduksi panas, teori mengenai getaran dan berbagai bidang fisik lainnya yang penuh dengan masalah-masalah yang harus dimodelkan dengan persamaan diferensial parsial. Untuk lebih memahami penerapan persamaan diferensial parsial pada konduksi panas, perhatikan contoh berikut.

Contoh 1.2 : Tentukan suhu $u\,(x,t)$ dalam suatu kawat yang telah diisolasi, yang panjangnya L cm, dan kedua ujungnya dipertahankan pada suhu $0^{\circ}C$, jika diasumsikan suhu awalnya

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{jika } 0 < x < \dfrac{L}{2} \\ L - x & \text{jika } \dfrac{L}{2} < x < L \end{cases} \quad \text{dalam satuan } {}^{\circ}C\,.$$

Syarat batas dari masalah tersebut yaitu $u\,(0,t) = 0$ dan $u\,(L,t) = 0$ untuk semua *t*, sedangkan syarat awalnya yaitu $u\,(x,t) = f(x)$.

Untuk menentukan suhu $u(x,t)$ dalam kawat tersebut berarti menentukan penyelesaian dari persamaan diferensial parsial berikut

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial u^2}{\partial^2 t} \qquad \text{.........(1)}$$

yang harus memenuhi syarat awal dan syarat batas di atas.

Suatu metode umum untuk menyelesaikan masalah tersebut yaitu dengan menggunakan metode hasil kali dua fungsi. Pada metode ini diasumsikan solusinya berbentuk hasil kali dua fungsi, yang masing-masing hanya tergantung pada salah satu peubah saja. Jadi, persamaan (1) diuraikan menjadi

$$u(x,t) = F(x) \cdot G(x) \qquad \text{.........(2)}$$

Substitusi persamaan (2) ke dalam persamaan (1) menghasilkan persamaan diferensial biasa untuk F dan G, dan akhirnya diperoleh takhingga banyaknya solusi $F = F_n$ dan $G = G_n$, sedemikian rupa sehingga fungsi $u_n(x,t) = F_n(x) \cdot G_n(x)$ merupakan solusi untuk persamaan diferensial parsial (1) yang memenuhi syarat batas. Agar solusi terebut juga memenuhi syarat awal, harus dibentuk deret takhingga bagi u_n yang koefisien-koefisiennya merupakan koefisien Fourier untuk fungsi $f(x)$ yang merepresentasikan syarat awal. Dari contoh di atas, dapat dilihat bahwa dalam mencari penyelesaian persamaan diferensial diperlukan pengetahuan bagaimana mengekspansi suatu fungsi menjadi deret trigonometri.

Deret Fourier merupakan deret yang bersuku sinus dan kosinus (deret trigonometrik) yang muncul ketika kita ingin merepresentasikan fungsi periodik umum. Deret ini merupakan alat yang sangat penting untuk memecahkan masalah yang melibatkan persamaan diferensial biasa maupun parsial. Karena alasan itulah penulis tertarik untuk mengkaji lebih jauh deret Fourier secara teoritik dan pemakaian deret Fourier dalam menentukan penyelesaian persamaan diferensial khususnya pada osilasi paksa , konduksi panas, dan getaran dawai.

B. Perumusan Masalah

Dengan latar belakang yang telah diungkapkan diatas, dapat dirumuskan beberapa masalah :

1. Apakah yang dimaksud dengan deret Fourier?
2. Bagaimana pemakaian deret Fourier dalam bidang fisika?

C. Tujuan Penulisan

Tujuan penulisan skripsi ini adalah :

1. Penulis dapat memahami deret Fourier secara teoritik.
2. Penulis dapat menggunakan deret Fourier dalam menyelesaikan persoalan-persoalan dalam bidang fisika.

D. Manfaat Penelitian

Manfaat penulisan topik ini bagi penulis adalah penulis lebih mengerti tentang konsep, fakta dan teknik dasar yang berkaitan dengan deret Fourier beserta berbagai pemakaiannya dalam bidang fisika.

E. Pembatasan Masalah

Materi yang akan dibahas pada skripsi ini mencakup konsep deret Fourier, dan teorema kekonvergenan deret Fourier. Dalam pembahasan akan dibahas juga tentang pemakaian deret Fourier dalam osilasi paksa , konduksi panas, dan getaran dawai.

F. Metode Penulisan

Metode yang akan digunakan dalam membahas topik tersebut adalah metode studi pustaka.

G. Sistematika Penulisan

Penulisan ini terbagi dalam beberapa bab, yakni :

Bab I Pendahuluan

Pada bab ini dikemukakan hal-hal yang melatarbelakangi penulisan skripsi, beserta perumusan masalah, tujuan penulisan, manfaat penulisan, pembatasan masalah, metode penulisan, dan sistematika penulisan.

Bab II Deret Fourier

Pada bab ini dijelaskan berbagai hal mengenai deret Fourier secara teoritik. Hal-hal yang dibahas dalam bab ini meliputi pengertian deret Fourier, menghitung koefisien Fourier dengan rumus Euler, ekspansi fungsi menjadi deret Fourier, fungsi genap dan fungsi ganjil, penguraian setengah kisaran, konvergensi uniform, sifat koefisien deret Fourier, dan kekonvergenan deret Fourier.

Bab III Pemakaian Deret Fourier

Pada bab ini diuraikan mengenai pemakaian deret Fourier dalam bidang fisika, khususnya pemakaian deret Fourier pada osilasi paksa, konduksi panas, dan getaran dawai.

Bab IV Kesimpulan

Pada bab ini diuraikan mengenai kesimpulan yang diperoleh dari pembahasan pada bab-bab sebelumnya.

BAB II

DERET FOURIER

A. Pengertian Deret Fourier

1. Fungsi Periodik

Fungsi $f(x)$ disebut mempunyai periode ρ atau periodik dengan periode ρ jika untuk semua nilai *x*, $f(x+\rho)=f(x)$ dengan ρ adalah bilangan positif. Nilai terkecil dari ρ disebut sebagai periode terkecil atau periode dari $f(x)$. Jika fungsi periodik $f(x)$ mempunyai periode terkecil ρ, ini sering dinamakan **periode primitif** dari fungsi $f(x)$. Jika *f(x)* dan *g(x)* masing-masing adalah fungsi periodik dengan periode ρ, maka berdasarkan sifat linearitas berlaku $h(x)=a\cdot f(x)+b\cdot g(x)$ juga merupakan fungsi periodik dengan periode ρ.

Contoh 2.1:

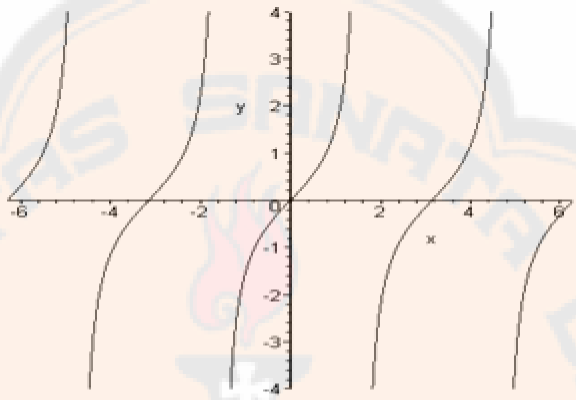
Fungsi $\cos x$ mempunyai periode 2π, 4π, 6π, ..., $2n\pi$, ... (*n* = 1, 2, 3, ...), karena $\cos(x+2\pi)=\cos(x+4\pi)=\cos(x+6\pi)=\cos(x+2n\pi)=\cos x$. Walaupun demikian, 2π adalah periode terkecil atau periode dari $\cos x$.

Contoh 2.2:

Periode dari fungsi $\sin nx$ atau fungsi $\cos nx$, dengan *n* = 1, 2, 3, ... adalah $\frac{2\pi}{n}$, karena $f(x)=\cos nx=\cos(nx+2\pi)=\cos n\left(x+\frac{2\pi}{n}\right)=f\left(x+\frac{2\pi}{n}\right)$ dan $f(x)=\sin nx=\sin(nx+2\pi)=\sin n\left(x+\frac{2\pi}{n}\right)=f\left(x+\frac{2\pi}{n}\right)$.

Contoh 2.3:

Periode dari $\tan x$ yang didefinisikan pada interval $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ adalah π, karena $f(x) = \tan x = \tan(x + \pi) = f(x + \pi)$.



Contoh 2.4:

Fungsi $f(x) = c$ (c = konstanta) mempunyai sebarang bilangan positif sebagai periodenya, sehingga dapat dikatakan bahwa $f(x) = c$ merupakan fungsi periodik tanpa periode primitif.

Contoh 2.5:

Tentukan periode dari fungsi berikut:

a. $f(t) = \sin 2t$

b. $f(t) = \cos \dfrac{2\pi nt}{k}$

c. $f(t) = \tan 2t + \cos^2 t$

Jawab:

a. Fungsi sinus dan kosinus merupakan fungsi periodik dengan periode 2π, maka $f(t) = \sin 2t = \sin(2t + 2\pi) = \sin 2(t + \pi) = f(t + \pi)$. Oleh karena itu, $\sin 2t$ periodik dengan periode π.

b. Karena $f(t) = \cos \frac{2\pi nt}{k} = \cos\left(\frac{2\pi nt}{k} + 2\pi\right) = \cos \frac{2\pi n}{k}\left(t + \frac{k}{n}\right) = f\left(t + \frac{k}{n}\right)$, maka $\cos \frac{2\pi nt}{k}$ periodik dengan periode $\frac{k}{n}$.

c. Fungsi tangen dan cotangen merupakan fungsi periodik dengan periode π. Misal: $h(x) = \tan 2t = \tan(2t + \pi) = \tan 2\left(t + \frac{\pi}{2}\right)$, maka $\rho_1 = \frac{\pi}{2}$, dan

$$g(x) = \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x + 2\pi)) = \frac{1}{2}(1 + \cos 2(x + \pi))$$

$$= \cos^2(x + \pi) = g(x + \pi), \text{ maka } \rho_2 = \pi.$$

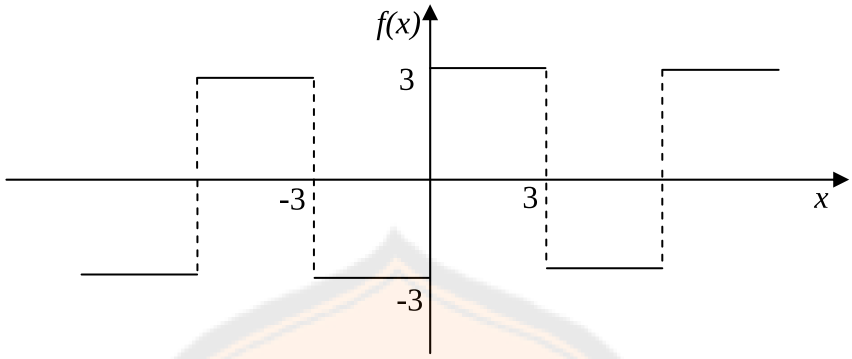
Oleh karena itu, periode dari $f(t) = \tan 2t + \cos^2 t$ adalah KPK $\left(\pi, \frac{\pi}{2}\right) = \pi$.

Contoh 2.6:

Gambarkan grafik dari fungsi berikut yang dipandang periodik dengan periode diketahui.

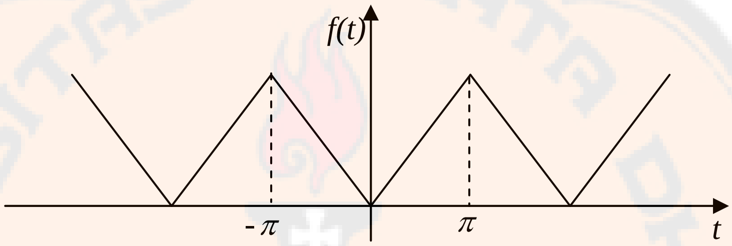
a. $f(x) = \begin{cases} 3, & 0 \le x < 3 \\ -3, & -3 \le x < 0 \end{cases}$, periode = 6

Jawab:



b. $f(t) = |t|$, periode 2π untuk $-\pi < t < \pi$

Jawab:



Dari contoh-contoh di atas dapat dilihat bahwa tidak semua fungsi periodik kontinu untuk setiap bilangan real yang diberikan. Sebelum membahas mengenai definisi deret Fourier terlebih dahulu akan dibicarakan mengenai pengertian fungsi kontinu sepotong-sepotong.

Definisi 2.1 (fungsi kontinu sepotong-sepotong) : Fungsi $f(x)$ disebut fungsi kontinu sepotong-sepotong atau kontinu bagian demi bagian pada interval $[a,b]$ bila dipenuhi syarat-syarat berikut :

1. Interval $[a,b]$ dapat dibagi menjadi sebanyak hingga sub interval sehingga $f(x)$ kontinu pada setiap sub interval tersebut.
2. Limit dari $f(x)$ jika x mendekati ujung-ujung dari sub interval ada dan terhingga.

Atau dapat dikatakan bahwa $f(x)$ mempunyai sebanyak hingga titik diskontinu.

Contoh 2.7 : Sebuah fungsi $f(x)$ didefinisikan dengan

$f(x)=\begin{cases}-1, & 0\le x<2\\ 1, & 2\le x\le 4\end{cases}$. Fungsi $f(x)$ kontinu pada selang $[0,2)$ karena pada selang tersebut fungsi $f(x)$ bernilai -1. Demikian pula pada selang $[2,4]$ fungsi $f(x)$ kontinu karena fungsi $f(x)$ bernilai 1.

Dan pada $x=2$ terdapat dua limit yaitu

- $f(x)=-1,\, 0\le x<2$

  $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}-1=-1$, $f(x)=-1\,(0\le t<2)$ mempunyai limit kiri untuk $x=2$,

- $f(x)=1,\, 2\le x\le 4$

  $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}1=1$, $f(x)=1\,(2\le t\le 4)$ mempunyai limit kanan untuk $x=2$.

Jadi, fungsi $f(x)$ tersebut kontinu sepotong-sepotong pada $0\le x\le 4$.

Contoh 2.8 : Perlihatkan bahwa $f(t)=\begin{cases}t^2, & 0\le t<1\\ 2-t, & 1\le t<2\\ 3-t, & 2\le t\le 3\end{cases}$ kontinu sepotong-sepotong dalam selang tertutup $[0,3]$.

Fungsi $f(t)$ kontinu dalam selang $[0,1)$ karena pada selang itu $f(t)=t^2$, $f(t)$ juga kontinu dalam selang $[1,2)$. Demikian juga pada selang $[2,3]$.

Pada $t=1$,

- $f(t) = t^2, 0 \le t < 1$

  $\lim_{t \to 1^-} f(t) = \lim_{t \to 1^-} t^2 = 1$, $f(t) = t^2 \ (0 \le t < 1)$ mempunyai limit kiri untuk $t = 1$,

- $f(t) = 2 - t, 1 \le t < 2$

  $\lim\limits_{t \to 1^+} f(t) = \lim\limits_{t \to 1^+} 2 - t = 1$, $f(t) = 2 - t \ (1 \le t < 2)$ mempunyai limit kanan untuk $t = 1$.

Pada $t = 2$,

- $f(t) = 2 - t, 1 \le t < 2$

  $\lim\limits_{t \to 2^-} f(t) = \lim\limits_{t \to 2^-} 2 - t = 0$, $f(t) = 2 - t \ (1 \le t < 2)$ mempunyai limit kiri untuk $t = 2$,

- $f(t) = 3 - t, \ 2 \le t \le 3$

  $\lim\limits_{t \to 2^+} f(t) = \lim\limits_{t \to 2^+} 3 - t = 1$, $f(t) = 3 - t \ (2 \le t \le 3)$ mempunyai limit kanan untuk $t = 2$.

Jadi, fungsi $f(t)$ kontinu sepotong-sepotong dalam selang $0 \le t \le 3$.

1. Definisi Deret Fourier

Fungsi periodik yang dijumpai di dalam masalah rekayasa sering kali agak rumit, oleh karena itu kita berusaha untuk merepresentaskan fungsi itu ke dalam bentuk yang lebih sederhana. Berikut adalah fungsi-fungsi sederhana yang berperiode 2π :

$$1, \ \cos x, \ \sin x, \ \cos 2x, \ \sin 2x, \ \ldots, \ \cos nx, \ \sin nx, \ \ldots .$$

Deret trigonometri yang didefinisikan oleh

$$a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \ldots$$

mempunyai periode 2π dengan $a_0, a_1, a_2, \ldots, b_1, b_2, \ldots$ adalah bilangan real. Dengan menggunakan notasi sigma, kita dapat menuliskan deret itu sebagai

$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$, a_n dan b_n disebut koefisien-koefisien deret trigonometri.

Definisi 2.2 (deret Fourier) : Misalkan $f(x)$ didefinisikan pada interval $(-\pi, \pi)$, periodik dengan periode 2π, dan $f(x)$ kontinu sepotong-sepotong pada interval tersebut, maka deret Fourier dari $f(x)$ didefinisikan sebagai berikut:

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

dengan harga-harga koefisien Fourier a_0, a_n dan b_n ditentukan oleh rumus-rumus Euler sebagai berikut:

$$\begin{cases} a_0 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \\ a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx & n=1, 2, 3, \ldots \\ b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx \end{cases}$$

A. Menghitung Koefisien- Koefisien Fourier dengan Rumus Euler

Misalkan $f(x)$ adalah fungsi periodik dengan periode 2π. Akan ditentukan deret trigonometri dari fungsi itu,

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \text{ dengan } n=1, 2, 3, \ldots \qquad \ldots.(1)$$

Selanjutnya akan ditentukan koefisien-koefisien deret trigonometrik tersebut.

Langkah I

Langkah pertama yaitu menentukan a_0 dengan mengintegralkan kedua ruas pada persamaan (1) dari $-\pi$ sampai π.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi}\left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)\right]dx$$

Kemudian dilakukan pengintegralan suku demi suku (untuk lebih jelas akan dibahas pada konvergensi uniform), didapat:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = a_0 \int_{-\pi}^{\pi} dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \int_{-\pi}^{\pi}\cos nxdx + b_n \int_{-\pi}^{\pi}\sin nxdx\right)$$

$$= a_0[x]_{-\pi}^{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\left[\frac{\sin nx}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} - b_n\left[\frac{\cos nx}{n}\right]_{-\pi}^{\pi}\right)$$

$$= a_0(\pi-(-\pi)) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\left[\frac{\sin n\pi}{n} - \frac{\sin(-n\pi)}{n}\right] - b_n\left[\frac{\cos n\pi}{n} - \frac{\cos(-n\pi)}{n}\right]\right)$$

$$= 2\pi a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n(0-0) - b_n(0-0))$$

$$= 2\pi a_0$$

Sehingga didapatkan $a_0 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$. .....(2)

Langkah II

Langkah kedua yaitu menentukan $a_1, a_2, a_3, \ldots$ pada persamaan (1) dengan cara mengalikan kedua ruas pada persamaan (1) dengan $\cos mx$ (m adalah bilangan bulat positif) dan kemudian mengintegralkan persamaan tersebut dari $-\pi$ sampai π.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx dx = \int_{-\pi}^{\pi}\left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right)\right]\cos mx dx$$

Kemudian dilakukan pengintegralan suku demi suku, didapat:

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx dx &= a_0 \int_{-\pi}^{\pi}\cos mx dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \int_{-\pi}^{\pi}\cos nx \cos mx dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi}\sin nx \cos mx dx\right) \\
&= a_0\left[\frac{\sin mx}{m}\right]_{-\pi}^{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \int_{-\pi}^{\pi}\cos nx \cos mx dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi}\sin nx \cos mx dx\right) \\
&= a_0\left[\frac{\sin m\pi}{m} - \frac{\sin(-m\pi)}{m}\right] \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \int_{-\pi}^{\pi}\cos nx \cos mx dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi}\sin nx \cos mx dx\right) \\
&= a_0[0-0] + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \int_{-\pi}^{\pi}\cos nx \cos mx dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi}\sin nx \cos mx dx\right) \\
&= 0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \int_{-\pi}^{\pi}\cos nx \cos mx dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi}\sin nx \cos mx dx\right)
\end{aligned}$$

Penjabaran tiap bagian:

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx \cos mx dx &= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(n+m)x dx + \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(n-m)x dx \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(n+m)x}{n+m}\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(n-m)x}{n-m}\right]_{-\pi}^{\pi} \\
&= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\sin(n+m)\pi}{n+m}\right) - \left(\frac{\sin(-(n+m)\pi)}{n+m}\right)\right] \\
&\quad + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\sin(n-m)\pi}{n-m}\right) - \left(\frac{\sin(-(n-m)\pi)}{n-m}\right)\right] \\
&= 0
\end{aligned}$$

karena $\frac{\sin(n+m)\pi}{n+m} = \frac{\sin(-(n+m)\pi)}{n+m} = 0$ (untuk semua nilai n dan m) dan $\frac{\sin(n-m)\pi}{n-m} = \frac{\sin(-(n-m)\pi)}{n-m} = 0$ (untuk semua nilai n dan m dan $n \neq m$).

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(n+m)x dx + \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(n-m)x dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos(n+m)x}{n+m}\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos(n-m)x}{n-m}\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\cos(n+m)\pi}{n+m}\right) - \left(\frac{\cos(-(n+m)\pi)}{n+m}\right)\right]$$

$$-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\cos(n-m)\pi}{n-m}\right) - \left(\frac{\cos(-(n-m)\pi)}{n-m}\right)\right]$$

$$= 0$$

karena $\frac{\cos(n+m)\pi}{n+m} = \frac{\cos(-(n+m)\pi)}{n+m}$ (untuk semua nilai n dan m) dan $\frac{\cos(n-m)\pi}{n-m} = \frac{\cos(-(n-m)\pi)}{n-m}$ (untuk semua nilai n dan m dan $n \neq m$).

Pengintegralan dari keempat bagian di atas sama dengan nol, kecuali untuk $\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n-m)x dx = \pi$ jika $n = m$. Dengan demikian jika $n = m$,

maka $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx dx = \pi a_m$.

Jadi didapatkan $a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx dx$, m = 1, 2, 3, ...(3)

Langkah III

Langkah ketiga yaitu menentukan $b_1, b_2, b_3, \dots$ pada persamaan (1) dengan cara mengalikan kedua ruas pada persamaan (1) dengan $\sin mx$ $(m > 0)$ dan kemudian mengintegralkan persamaan tersebut dari $-\pi$ sampai π.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin mxdx = \int_{-\pi}^{\pi}\left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)\right]\sin mxdx$$

Kemudian dilakukan pengintegralan suku demi suku, didapat:

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin mxdx &= a_0\int_{-\pi}^{\pi}\sin mxdx + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\sin mxdx + b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\sin mxdx\right)\\ &= a_0\left[-\frac{\cos mx}{m}\right]_{-\pi}^{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\sin mxdx + b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\sin mxdx\right)\\ &= -a_0\left[\frac{\cos m\pi}{m} - \frac{\cos(-m\pi)}{m}\right]\\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\sin mxdx + b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\sin mxdx\right)\\ &= 0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\sin mxdx + b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\sin mxdx\right)\end{aligned}$$

karena $\frac{\cos m\pi}{m} = \frac{\cos(-m\pi)}{m}$ untuk semua nilai *m*.

Penjabaran tiap bagian:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\sin mxdx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(n+m)xdx - \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(n-m)xdx$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos(n+m)x}{n+m}\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos(n-m)x}{n-m}\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\cos(n+m)\pi}{n+m}\right) - \left(\frac{\cos(-(n+m)\pi)}{n+m}\right)\right]$$

$$+ \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\cos(n-m)\pi}{n-m}\right) - \left(\frac{\cos(-(n-m)\pi)}{n-m}\right)\right]$$

$$= 0$$

karena $\frac{\cos(n+m)\pi}{n+m} = \frac{\cos(-(n+m)\pi)}{n+m}$ (untuk semua nilai *n* dan *m*) dan $\frac{\cos(n-m)\pi}{n-m} = \frac{\cos(-(n-m)\pi)}{n-m}$ (untuk semua nilai *n* dan *m* dan $n \neq m$).

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n-m)x dx - \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n+m)x dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(n-m)x}{n-m}\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(n+m)x}{n+m}\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\sin(n-m)\pi}{n-m}\right) - \left(\frac{\sin(-(n-m)\pi)}{n-m}\right)\right]$$

$$- \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\sin(n+m)\pi}{n+m}\right) - \left(\frac{\sin(-(n+m)\pi)}{n+m}\right)\right]$$

$$= 0$$

karena $\frac{\sin(n+m)\pi}{n+m} = \frac{\sin(-(n+m)\pi)}{n+m} = 0$ (untuk semua nilai *n* dan *m*) dan $\frac{\sin(n-m)\pi}{n-m} = \frac{\sin(-(n-m)\pi)}{n-m} = 0$ (untuk semua nilai *n* dan *m* dan $n \neq m$).

Pengintegralan dari keempat bagian di atas sama dengan nol, kecuali untuk

$\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n-m)x dx = \pi$ jika $n = m$.

Dengan demikian jika $n = m$, maka $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin mxdx = \pi b_m$.

Jadi didapatkan $b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin mxdx$, m = 1, 2, 3, ...(5)

Dengan mengganti m dengan n pada persamaan (2), (3), dan (4), diperoleh **rumus-rumus Euler** sebagai berikut:

$$\begin{cases} a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \\ a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx & n=1, 2, 3, \ldots \\ b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx \end{cases} \quad \text{....(6)}$$

Deret trigonometri $a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ dengan koefisien-koefisien yang ditentukan oleh (6) dinamakan deret Fourier untuk $f(x)$.

Di dalam penerapan, fungsi periodik kadang tidak mempunyai periode 2π melainkan mempunyai periode lain yaitu $2L$. Jika $f(x)$ didefinisikan pada interval $(-L, L)$, periodik dengan periode $2L$, dan kontinu sepotong-sepotong dalam interval tersebut, maka deret Fourier dari $f(x)$ didefinisikan sebagai berikut:

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi}{L}x + b_n \sin\frac{n\pi}{L}x\right)$$

dengan harga-harga koefisien Fourier a_0, a_n dan b_n ditentukan oleh rumus-rumus Euler sebagai berikut:

$$a_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)dx\,,\; a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx\,, \text{ dan } b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx$$

untuk n adalah bilangan bulat positif.

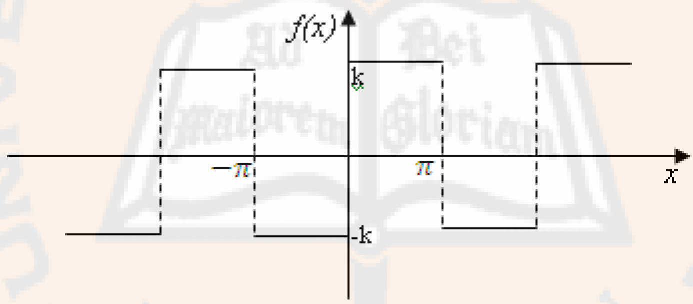
A. Ekspansi Fungsi Menjadi Deret Fourier

Contoh 2.9 : Tentukan koefisien Euler dan deret Fourier dari $f(x)$ bila

$$f(x) = \begin{cases} -k, & -\pi < x < 0 \\ k, & 0 < x < \pi \end{cases} \quad dan\ f(x+2\pi) = f(x)$$

Jawab:

Fungsi tersebut periodik dengan periode 2π dan dapat digambarkan sebagai berikut



Koefisien Euler dari $f(x)$ ditentukan sebagai berikut:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} -kdx + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} kdx$$

$$= -\frac{k}{2\pi}x\Big|_{-\pi}^{0} + \frac{k}{2\pi}x\Big|_{0}^{\pi} = \frac{-k}{2} + \frac{k}{2} = 0$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(-k)\cos nxdx + \int_{0}^{\pi} k\cos nxdx\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[(-k)\frac{\sin nx}{n}\Big|_{-\pi}^{0} + k\frac{\sin nx}{n}\Big|_{0}^{\pi}\right] = 0$$

(karena $\sin nx = 0$ untuk $x = -\pi$, 0 dan π dan untuk semua nilai n)

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(-k)\sin nx dx + \int_{0}^{\pi} k\sin nx dx\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[k\frac{\cos nx}{n}\Big|_{-\pi}^{0} - k\frac{\cos nx}{n}\Big|_{0}^{\pi}\right]$$

$$= \frac{k}{n\pi}\left[\cos 0 - \cos n(-\pi) - \cos n\pi + \cos 0\right]$$

$$= \frac{k}{n\pi}\left[2 - 2\cos n\pi\right] = \frac{2k}{n\pi}(1 - \cos n\pi)$$

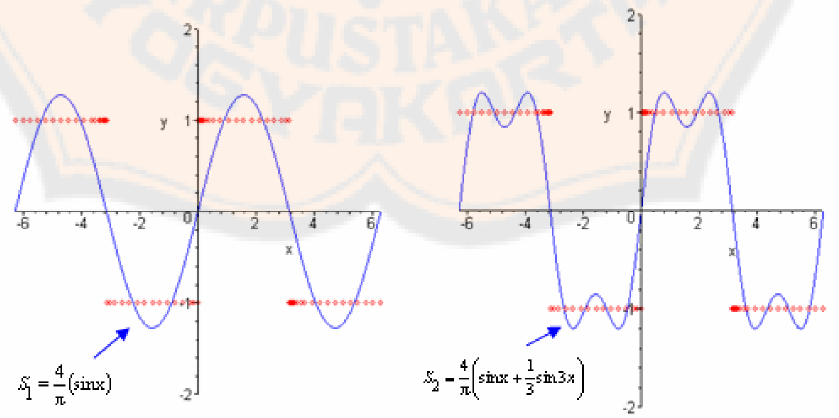
Karena $1 - \cos n\pi = 2$ untuk n ganjil dan $1 - \cos n\pi = 0$ untuk n genap, maka

$$b_1 = \frac{4k}{\pi}, b_2 = 0, b_3 = \frac{4k}{3\pi}, b_4 = 0, b_5 = \frac{4k}{5\pi}, \ldots.$$

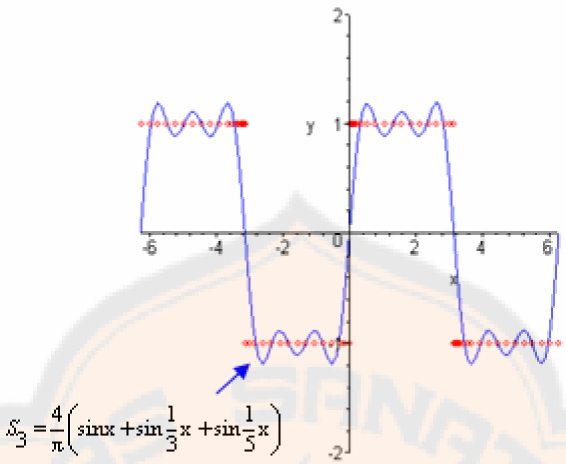
Deret Fourier untuk $f(x)$ adalah :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2k}{n\pi}(1 - \cos n\pi)\sin nx = \frac{4k}{\pi}\left(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \ldots\right).$$

Gambar grafik di bawah ini merupakan representasi deret Fourier dari fungsi periodik tersebut dengan mengambil nilai $k = 1$.



Gambar (a) Gambar (b)



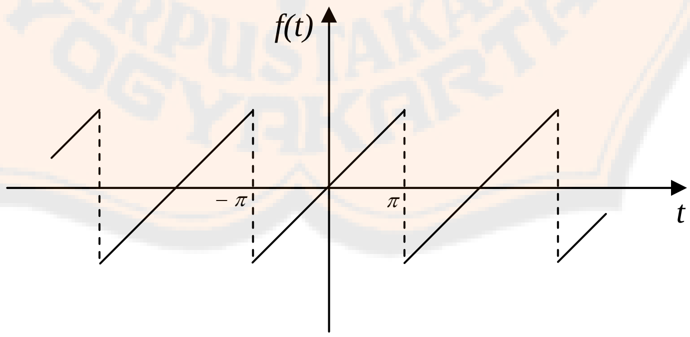
Gambar (c)

Ketiga gambar tersebut menunjukkan tiga jumlah parsial yang pertama dari deret Fourier yang dihasilkan.

Contoh 2.10: Tentukan koefisien Euler dan deret Fourier dari $f(t)$ bila $f(t) = t, -\pi < t < \pi$ dan $f(t+2\pi) = f(t)$.

Jawab:

Fungsi tersebut periodik dengan periode 2π dan dapat digambarkan sebagai berikut



Koefisien Euler dari $f(t)$ ditentukan sebagai berikut:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\, dt = \left[\frac{t^2}{4\pi}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\ dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\cos nt\ dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{\left[\frac{t}{n}\sin nt\right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{n}\sin ntdt\right\}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{t}{n}\sin nt + \frac{1}{n^2}\cos nt\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{\left(\frac{\pi}{n}\sin n\pi - \frac{-\pi}{n}\sin(-n\pi)\right) + \right.$$

$$\left.\left(\frac{1}{n^2}\cos n\pi - \frac{1}{n^2}\cos(-n\pi)\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{\pi}\{(0-0)+(0)\} = 0$$

$$\left(\frac{1}{n^2}\cos n\pi - \frac{1}{n^2}\cos(-n\pi) = 0 \text{ karena } \cos n\pi = \cos(-n\pi)\right)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin ntdt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\sin nt\ dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{\left[-\frac{t}{n}\cos nt\right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} -\frac{1}{n}\cos ntdt\right\}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{t}{n}\cos nt + \frac{1}{n^2}\sin nt\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{\left(-\frac{\pi}{n}\cos n\pi + \frac{-\pi}{n}\cos(-n\pi)\right) + \right.$$

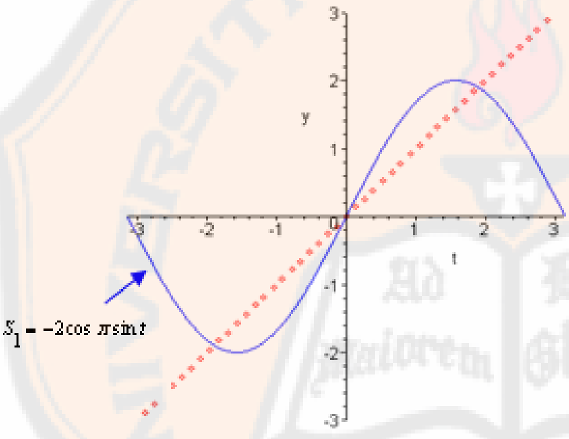
$$\left.\left(\frac{1}{n^2}\sin n\pi - \frac{1}{n^2}\sin(-n\pi)\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{\left(-\frac{2\pi}{n}\cos n\pi\right)+(0-0)\right\} = -\frac{2}{n}\cos n\pi$$

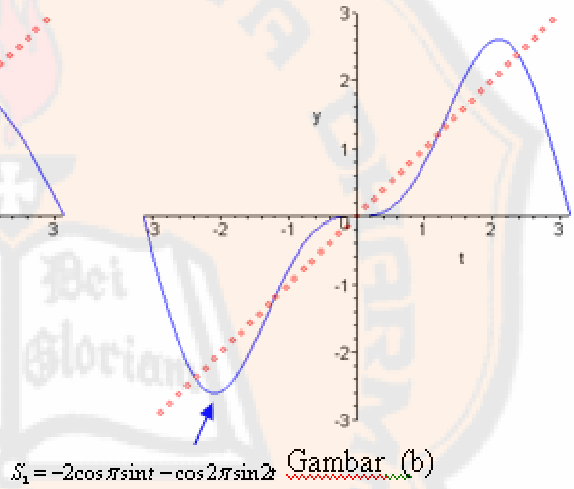
Deret Fourier untuk $f(t)$ adalah :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{2}{n}\cos n\pi \sin nt\right)$$

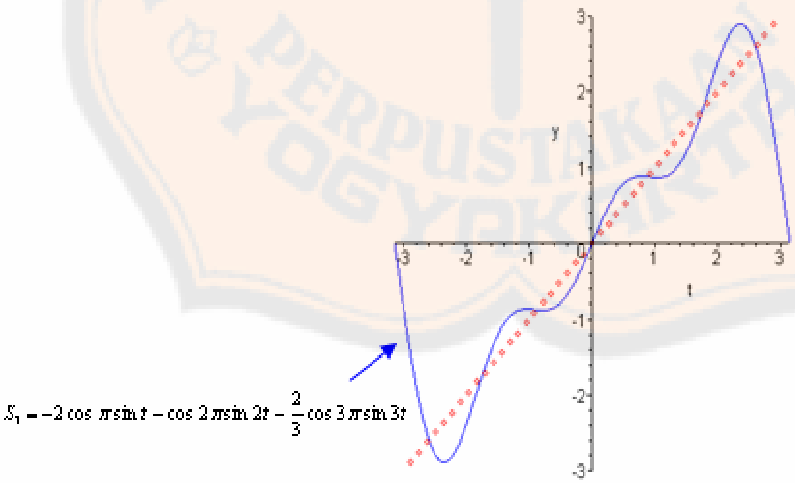
Ketiga gambar di bawah ini menunjukkan tiga jumlah parsial yang pertama dari deret Fourier yang dihasilkan.



Gambar (a)



Gambar (b)



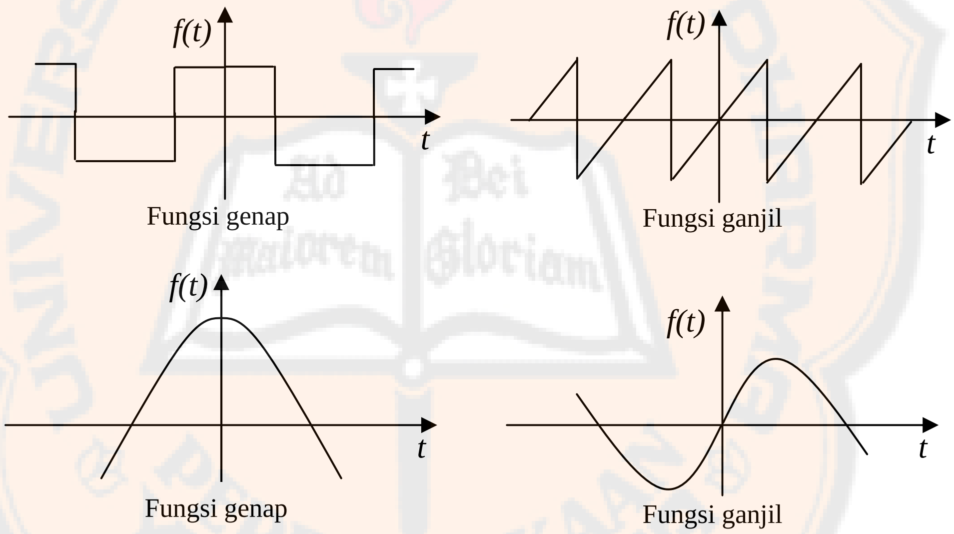
Gambar (c)

A. Fungsi Genap dan Fungsi Ganjil

Definisi 2.3 (fungsi genap dan fungsi ganjil) : Fungsi $f(x)$ disebut fungsi genap bila berlaku $f(-x) = f(x)$ untuk semua x dalam daerah asal dan $f(x)$ disebut fungsi ganjil bila berlaku $f(-x) = -f(x)$ untuk semua x dalam daerah asal.

Sifat-sifat fungsi genap dan fungsi ganjil yaitu sebagai berikut:

1. Grafik fungsi genap $y = f(x)$ simetris terhadap sumbu y dan grafik fungsi ganjil $y = f(x)$ simetris terhadap titik pusat salib sumbu.



2. Hasil kali dua fungsi genap dan hasil kali dua fungsi ganjil merupakan fungsi genap, sedangkan hasil kali antara fungsi ganjil dan fungsi genap adalah fungsi ganjil.

Bukti:

a. Misalkan $f(x)$ adalah hasil kali antara fungsi genap $g(x)$ dan fungsi genap $h(x)$, maka $f(x) = g(x)h(x)$

$$f(-x) = g(-x)h(-x)$$
$$= g(x)h(x)$$
$$= f(x)$$

Jadi hasil kali dua fungsi genap adalah fungsi genap.

b. Misalkan $f(x)$ adalah hasil kali antara fungsi ganjil $g(x)$ dan fungsi ganjil $h(x)$, maka $f(x) = g(x)h(x)$

$$f(-x) = g(-x)h(-x)$$
$$= (-g(x))(-h(x))$$
$$= f(x)$$

Jadi hasil kali dua fungsi ganjil adalah fungsi genap.

c. Misalkan $f(x)$ adalah hasil kali antara fungsi genap $g(x)$ dan fungsi ganjil $h(x)$, maka $f(x) = g(x)h(x)$

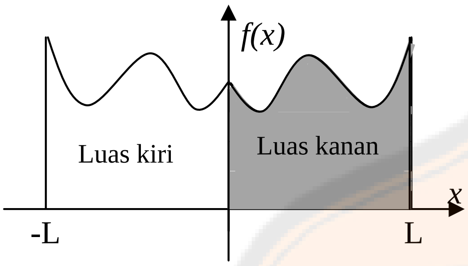
$$f(-x) = g(-x)h(-x)$$
$$= g(x)(-h(x))$$
$$= -(g(x)h(x))$$
$$= f(x)$$

Jadi hasil kali antara fungsi ganjil dan fungsi genap adalah fungsi ganjil.

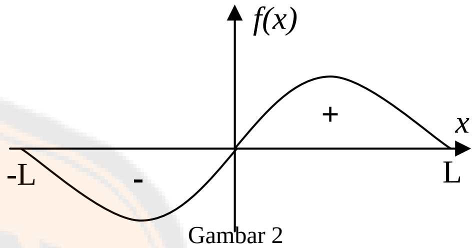
3. Bila $f(x)$ fungsi genap, maka $\int_{-L}^{L} f(x)dx = 2\int_{0}^{L} f(x)dx$. Bila $f(x)$ fungsi ganjil, maka $\int_{-L}^{L} f(x)dx = 0$.

Bukti:

Tafsiran geometri dari sifat ini diperlihatkan dalam gambar 1 dan 2 sebagai berikut:



Gambar 1
Fungsi genap
Luas kiri = Luas kanan



Gambar 2
Fungsi ganjil
Luas kiri menetralkan lus kanan

$$\int_{-L}^{L} f(x)dx = \int_{-L}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{L} f(x)dx$$

Dalam integral di ruas kanan, dilakukan substitusi $u = -x$, $-du = dx$.

a. Jika $f(x)$ fungsi genap, maka $f(-x) = f(x)$ dan.

$$\int_{-L}^{0} f(x)dx = \int_{-L}^{0} f(-x)dx = \int_{L}^{0} f(u)(-du) = -\int_{L}^{0} f(u)du = \int_{0}^{L} f(u)du = \int_{0}^{L} f(x)dx$$

Jadi, $\int_{-L}^{L} f(x)dx = \int_{-L}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{L} f(x)dx = \int_{0}^{L} f(x)dx + \int_{0}^{L} f(x)dx = 2\int_{0}^{L} f(x)dx$.

b. Jika $f(x)$ fungsi ganjil, maka $f(-x) = -f(x)$ dan

$$\int_{-L}^{0} f(x)dx = \int_{-L}^{0} -f(-x)dx = \int_{L}^{0} -f(u)(-du) = \int_{L}^{0} f(u)du = -\int_{0}^{L} f(u)du = -\int_{0}^{L} f(x)dx$$

Jadi, $\int_{-L}^{L} f(x)dx = \int_{-L}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{L} f(x)dx = -\int_{0}^{L} f(x)dx + \int_{0}^{L} f(x)dx = 0$.

Catatan: x adalah **variabel dummy** dalam lambang $\int_a^b f(x)dx$, yaitu dimaksudkan bahwa x dapat diganti oleh huruf sebarang lain (diganti di setiap kemunculannya). Jadi, $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du$.

Deret Fourier untuk fungsi genap $f(x)$ yang terdefinisi pada suatu interval $(-L, L)$, kontinu sepotong-sepotong dan periodik dengan periode $2L$ disebut juga **Deret Kosinus Fourier** dengan bentuk

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L}$$

dengan koefisien-koefisien

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)dx, \quad a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx, \quad n=1, 2, 3, \ldots \qquad \ldots\ldots(7)$$

Deret Fourier untuk fungsi ganjil $f(x)$ yang terdefinisi pada suatu interval $(-L, L)$, kontinu sepotong-sepotong dan periodik dengan periode $2L$ disebut juga **Deret Sinus Fourier** dengan bentuk

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L}$$

dengan koefisien-koefisien

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx, \quad n=1, 2, 3, \ldots \qquad \ldots\ldots(8)$$

Contoh 2.11:

Selidiki apakah fungsi berikut genap, ganjil, atau tidak kedua-duanya!

a. $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

b. $h(x) = \dfrac{x}{x^2 + 2}$

c. $f(t) = t + 1$

Jawab:

a. $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ adalah fungsi genap karena $f(-x) = \sqrt{(-x)^2 + 1} = \sqrt{x^2 + 1} = f(x)$.

b. $h(x) = \dfrac{x}{x^2 + 2}$ adalah fungsi ganjil karena $h(-x) = \dfrac{-x}{(-x)^2 + 2} = -\dfrac{x}{x^2 + 2} = -h(x)$.

c. $f(t) = t + 1$ bukan fungsi genap maupun fungsi ganjil karena $f(-t) = -t + 1$ bukan fungsi $f(t)$ maupun $-f(t)$.

Contoh 2.12:

Klasifikasikan masing-masing fungsi-fungsi berikut apakah fungsi genap, ganjil, atau tidak genap dan tidak ganjil!

a. $f(x) = x(8 - x), \quad 0 < x < 8$, periode = 8

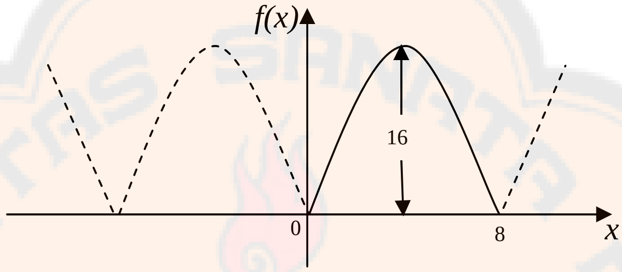
b. $f(x) = \begin{cases} 2, & 0 < x < 3 \\ -2, & -3 < x < 0 \end{cases}$, periode = 6

Jawab:

a. $f(x) = x(8-x), \quad 0 < x < 8$ dengan periode = 8 merupakan fungsi genap karena $f(-x) = x(8-x), \quad -8 < x < 0$

$= f(x).$

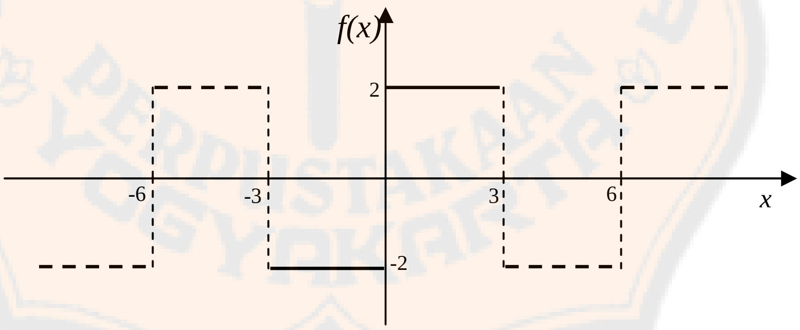
Secara geometri dapat diperlihatkan dalam gambar sebagai berikut:



b. $f(x) = \begin{cases} 2, & 0 < x < 3 \\ -2, & -3 < x < 0 \end{cases}$ dengan periode = 6 merupakan fungsi ganjil

karena $f(-x) = \begin{cases} -2, & -3 < x < 0 \\ 2, & 0 < x < 3 \end{cases} = -f(x).$

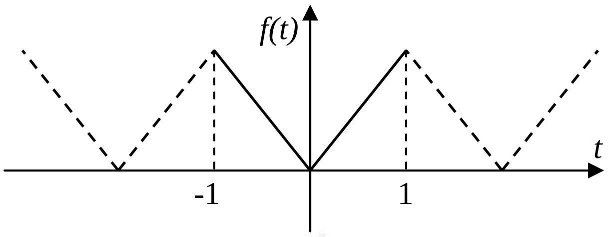
Secara geometri dapat diperlihatkan dalam gambar sebagai berikut:



Contoh 2.13: Tentukan deret Fourier dari fungsi $f(x)$ yang periodik dengan periode 2, bila fungsi $f(x) = |x|, -1 < x < 1$.

Jawab:

Fungsi tersebut periodik dengan periode 2 dan dapat digambarkan sebagai berikut:



Fungsi $f(x)$ tersebut merupakan fungsi genap, sehingga $b_0 = 0$. Dengan demikian, koefisien Fourier dapat ditentukan sebagai berikut:

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}|x|dx = \int_{0}^{1} xdx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2},$$

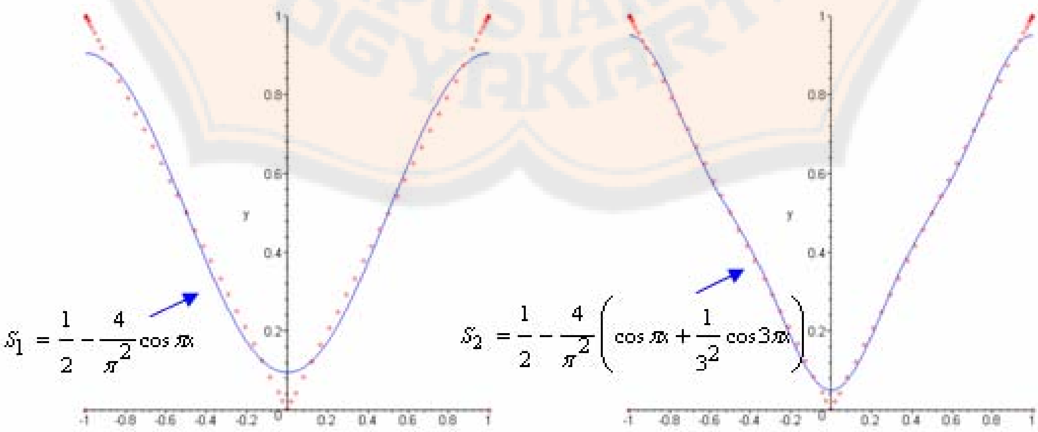
$$a_n = \int_{-1}^{1}|x|\cos n\pi x dx = 2x\int_{0}^{1} x\cos n\pi x dx = \frac{2}{n\pi}\left[x\sin n\pi x + \frac{1}{n\pi}\cos n\pi x\right]_0^1$$

$$= \frac{2}{n^2\pi^2}(\cos n\pi - 1) = \frac{-4}{n^2\pi^2}(n\ ganjil).$$

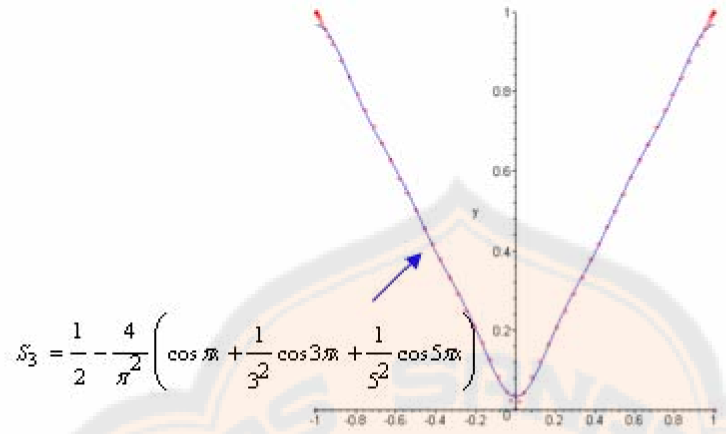
Jadi didapatkan deret Fourier dari $f(x) = |x|$, yaitu

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2\pi^2}(\cos n\pi - 1)\cos n\pi x = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\left(\cos\pi x + \frac{1}{3^2}\cos 3\pi x + \frac{1}{5^2}\cos 5\pi x + \ldots\right).$$

Ketiga gambar di bawah ini menunjukkan tiga jumlah parsial yang pertama dari deret Fourier yang dihasilkan.



Gambar (a) Gambar (b)

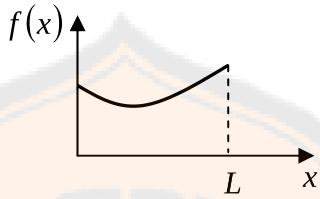


Gambar (c)

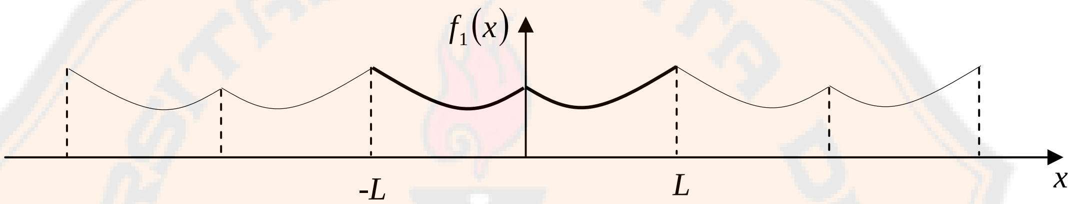
A. Penguraian Setengah-Kisaran

Di dalam berbagai masalah penerapan, akan banyak dijumpai penggunaan deret Fourier bagi fungsi $f(x)$ yang didefinisikan pada suatu selang terhingga tertentu. Dalam hal ini, $f(x)$ didefinisikan dalam selang $0 \le x \le L$, dan pada selang ini $f(x)$ akan direpresentasikan oleh deret Fourier. Untuk memperoleh deret Fourier dari fungsi tersebut dapat menggunakan L sebagai selang keperiodikan, namun akan lebih baik jika mengambil periode *2L*. Hal ini disebabkan karena dengan mengambil periode *2L*, maka akan diperoleh suatu deret kosinus Fourier untuk $f(x)$ yang merupakan perluasan genap $f(x)$ ke kisaran penuh $-L \le x \le L$, atau dapat diperoleh suatu deret sinus Fourier untuk $f(x)$ yang merupakan perluasan ganjil $f(x)$ ke kisaran penuh $-L \le x \le L$. Masing-masing deret itu dinamakan **penguraian setengah-kisaran** fungsi $f(x)$, yang diberikan hanya pada setengah kisarannya (setengah selang keperiodikan deret tersebut).

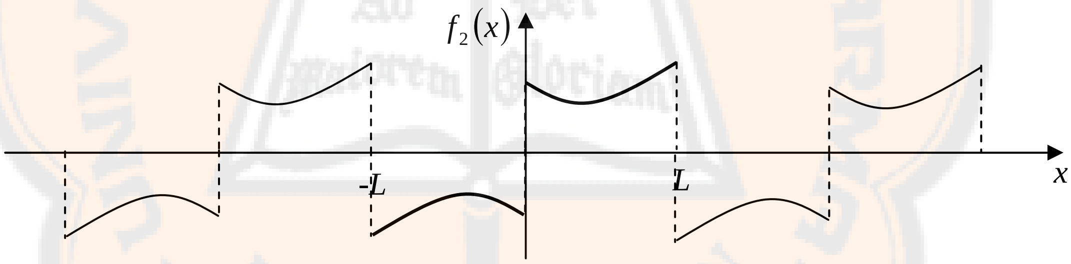
Perluasan genap dan perluasan ganjil $f(x)$ ke kisaran penuh $-L \le x \le L$ diperlihatkan dalam gambar sebagai berikut:



(a) Fungsi $f(x)$ yang diberikan



(b) Fungsi $f(x)$ diperluas sebagai suatu fungsi genap dengan periode 2L



(c) Fungsi $f(x)$ diperluas sebagai suatu fungsi ganjil dengan periode 2L

Keterangan gambar:

(a) Fungsi $f(x)$ diberikan pada selang $0 \le x \le L$,

(b) perluasan genap fungsi $f(x)$ ke kisaran penuh $-L \le x \le L$ dan perluasan periodik periode 2*L* pada sumbu-*x*,

(c) perluasan ganjil fungsi $f(x)$ ke kisaran penuh $-L \le x \le L$ dan perluasan periodik periode 2*L* pada sumbu-*x*.

Penguraian setengah kisaran kosinus fungsi $f(x)$ adalah

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L}$$

dengan koefisien-koefisien

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)dx\,,\quad a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx\,,\ n=1,2,3,\ldots \qquad \ldots\ldots(9)$$

Penguraian setengah kisaran sinus fungsi $f(x)$ adalah

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{L}$$

dengan koefisien-koefisien

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx\,,\ n=1,2,3,\ldots \qquad \ldots\ldots(10)$$

Contoh 2.14: Tentukan kedua penguraian setengah kisaran bagi fungsi

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{jika } 0 < x < \frac{L}{2} \\ L-x & \text{jika } \frac{L}{2} < x < L \end{cases}$$

Jawab:

a. Penguraian setengah kisaran kosinus untuk $f(x)$ adalah

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)dx$$

$$= \frac{1}{L}\left\{\int_0^{L/2} x\,dx + \int_{L/2}^{L} (L-x)dx\right\}$$

$$= \frac{1}{L}\left\{\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^{\frac{L}{2}} + \left[Lx - \frac{1}{2}x^2\right]_{\frac{L}{2}}^{L}\right\}$$

$$= \frac{1}{L}\left\{\frac{1}{2}\cdot\frac{L^2}{4} + \left(\left(L^2 - \frac{L^2}{2}\right) - \left(\frac{L^2}{2} - \frac{L^2}{8}\right)\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{L}\left\{\frac{L^2}{8} + \frac{L^2}{8}\right\} = \frac{L}{4}$$

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx$$

$$= \frac{2}{L}\left\{\int_0^{L/2} x\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx + \int_{L/2}^{L}(L-x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx\right\}$$

Melalui pengintegralan bagian demi bagian

$$\int_0^{L/2} x\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx = \left[x\frac{L}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{L}\right]_0^{L/2} - \frac{L}{n\pi}\int_0^{L/2}\sin\frac{n\pi x}{L}dx$$

$$= \left[\frac{Lx}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{L} + \frac{L^2}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{L}\right]_0^{L/2}$$

$$= \left\{\frac{L^2}{2n\pi}\sin\frac{n\pi}{2} + \frac{L^2}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi}{2}\right\} - \left\{0 + \frac{L^2}{n^2\pi^2}\right\}$$

$$= \frac{L^2}{2n\pi}\sin\frac{n\pi}{2} + \frac{L^2}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi}{2} - \frac{L^2}{n^2\pi^2}$$

$$\int_{L/2}^{L}(L-x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx = \left[(L-x)\frac{L}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{L}\right]_{L/2}^{L} + \frac{L}{n\pi}\int_{L/2}^{L}\sin\frac{n\pi x}{L}dx$$

$$=\left[\frac{L(L-x)}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{L}-\frac{L^2}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{L}\right]_{L/2}^{L}$$

$$=\left\{0-\frac{L^2}{n^2\pi^2}\cos n\pi\right\}-\left\{\frac{L^2}{2n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}-\frac{L^2}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi}{2}\right\}$$

$$=-\frac{L^2}{n^2\pi^2}\cos n\pi-\frac{L^2}{2n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}+\frac{L^2}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi}{2}$$

Dengan menggunakan kedua hasil tersebut, diperoleh

$$a_n=\frac{2}{L}\left\{\left(\frac{L^2}{2n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}+\frac{L^2}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi}{2}-\frac{L^2}{n^2\pi^2}\right)+\right.$$

$$\left.\left(-\frac{L^2}{n^2\pi^2}\cos n\pi-\frac{L^2}{2n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}+\frac{L^2}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi}{2}\right)\right\}$$

$$=\frac{2}{L}\left(\frac{2L^2}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi}{2}-\frac{L^2}{n^2\pi^2}\cos n\pi-\frac{L^2}{n^2\pi^2}\right)$$

$$=\frac{2L}{n^2\pi^2}\left(2\cos\frac{n\pi}{2}-\cos n\pi-1\right).$$

Dengan demikian,

$a_2=\frac{-8L}{2^2\pi^2}$, $a_6=\frac{-8L}{6^2\pi^2}$, $a_{10}=\frac{-8L}{10^2\pi^2}$, …, dan $a_n=0$ jika $n\neq 2,6,10,14,\ldots$.

Jadi, penguraian setengah kisaran kosinus untuk $f(x)$ adalah

$$\frac{L}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2L}{n^2\pi^2}\left(2\cos\frac{n\pi}{2}-\cos n\pi-1\right)\cos\frac{n\pi x}{L}$$

$$=\frac{L}{4}-\frac{8L}{\pi^2}\left(\frac{1}{2^2}\cos\frac{2\pi x}{L}+\frac{1}{6^2}\cos\frac{6\pi x}{L}+\frac{1}{10^2}\cos\frac{10\pi x}{L}+\ldots\right)$$

b. Penguraian setengah kisaran sinus untuk $f(x)$ adalah

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx$$

$$= \frac{2}{L}\left\{\int_0^{L/2} x\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx + \int_{L/2}^{L}(L-x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx\right\}$$

Melalui pengintegralan bagian demi bagian

$$\int_0^{L/2} x\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx = \left[x\frac{-L}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{L}\right]_0^{L/2} + \frac{L}{n\pi}\int_0^{L/2}\cos\frac{n\pi x}{L}dx$$

$$= \left[\frac{-Lx}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{L} + \frac{L^2}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi x}{L}\right]_0^{L/2}$$

$$= \left\{\frac{-L^2}{2n\pi}\cos\frac{n\pi}{2} + \frac{L^2}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}\right\} - \{0\}$$

$$= \frac{-L^2}{2n\pi}\cos\frac{n\pi}{2} + \frac{L^2}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}$$

$$\int_{L/2}^{L}(L-x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx = \left[(L-x)\cdot\frac{-L}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{L}\right]_{L/2}^{L} - \frac{L}{n\pi}\int_{L/2}^{L}\cos\frac{n\pi x}{L}dx$$

$$= \left[\frac{-L(L-x)}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{L} - \frac{L^2}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi x}{L}\right]_{L/2}^{L}$$

$$= \{0\} - \left\{\frac{-L^2}{2n\pi}\cos\frac{n\pi}{2} - \frac{L^2}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}\right\}$$

$$= \frac{L^2}{2n\pi}\cos\frac{n\pi}{2} + \frac{L^2}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}$$

Dengan menggunakan kedua hasil tersebut, diperoleh

$$b_n = \frac{2}{L}\left\{\left(\frac{-L^2}{2n\pi}\cos\frac{n\pi}{2} + \frac{L^2}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}\right) + \left(\frac{L^2}{2n\pi}\cos\frac{n\pi}{2} + \frac{L^2}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}\right)\right\}$$

$$= \frac{2}{L}\left(\frac{2L^2}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}\right) = \frac{4L}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}$$

Dengan demikian,

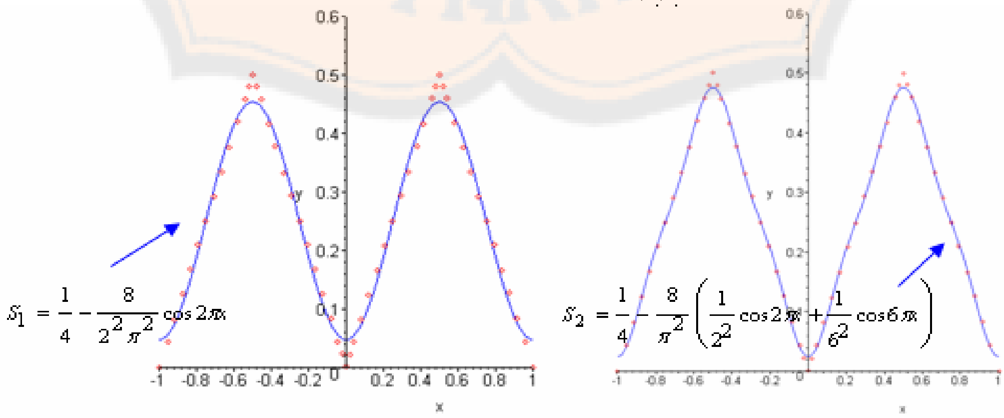
$b_1 = \frac{4L}{1^2\pi^2}$, $b_3 = \frac{-4L}{3^2\pi^2}$, $b_5 = \frac{4L}{5^2\pi^2}$, $b_7 = \frac{-4L}{7^2\pi^2}, \ldots,$ dan $b_n = 0$ jika $n = 2, 4, 6, 8, \ldots$.

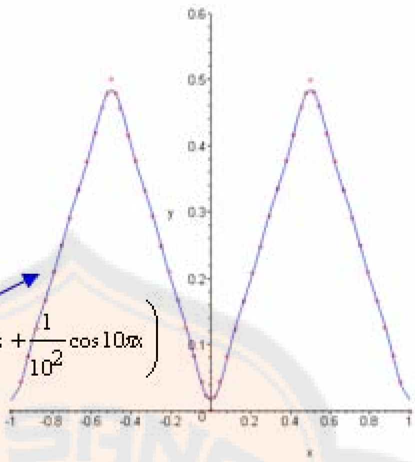
Jadi, penguraian setengah kisaran sinus untuk $f(x)$ adalah

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4L}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}\sin\frac{n\pi x}{L}$$
$$= \frac{4L}{\pi^2}\left(\frac{1}{1^2}\sin\frac{\pi x}{L} - \frac{1}{3^2}\sin\frac{3\pi x}{L} + \frac{1}{5^2}\sin\frac{5\pi x}{L} - \frac{1}{7^2}\sin\frac{7\pi x}{L} + \ldots\right)$$

Kedua deret di atas merepresentasikan perluasan genap dan perluasan ganjil untuk fungsi $f(x)$. Untuk menunjukkan tiga jumlah parsial yang pertama dari deret Fourier yang dihasilkan, maka dimisalkan nilai $L = 1$.

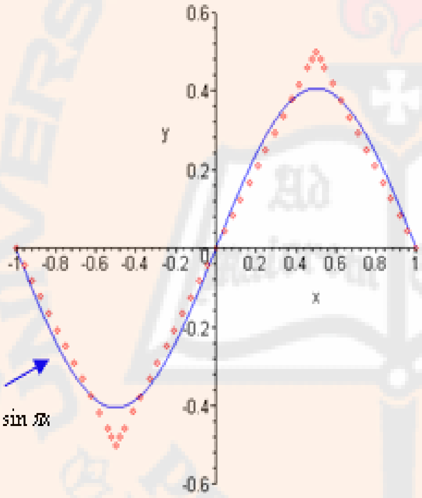
Gambar-gambar di bawah ini menunjukkan tiga jumlah parsial yang pertama dari **penguraian setengah kisaran kosinus** untuk $f(x)$.



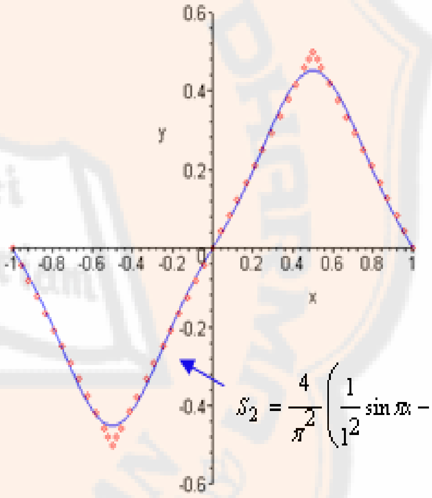


$$S_3 = \frac{1}{4} - \frac{8}{\pi^2}\left(\frac{1}{2^2}\cos 2\pi x + \frac{1}{6^2}\cos 6\pi x + \frac{1}{10^2}\cos 10\pi x\right)$$

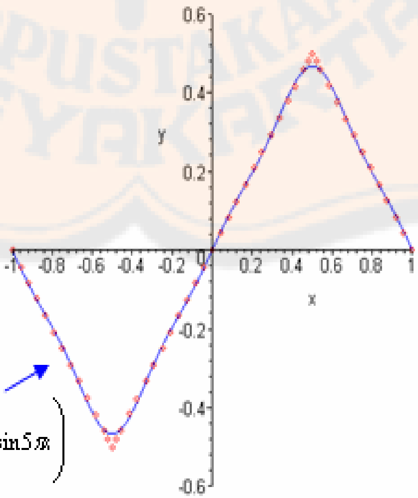
Selanjutnya ketiga gambar di bawah ini menunjukkan tiga jumlah parsial yang pertama dari **penguraian setengah kisaran sinus** untuk $f(x)$.



$$S_1 = \frac{4}{\pi^2}\sin \pi x$$



$$S_2 = \frac{4}{\pi^2}\left(\frac{1}{1^2}\sin \pi x - \frac{1}{3^2}\sin 3\pi x\right)$$



$$S_3 = \frac{4}{\pi^2}\left(\frac{1}{1^2}\sin \pi x - \frac{1}{3^2}\sin 3\pi x + \frac{1}{5^2}\sin 5\pi x\right)$$

A. Konvergensi Uniform

Untuk membahas mengenai konvergensi uniform, diperlukan pemahaman mengenai hal-hal yang berhubungan dengan konvergensi suatu deret. Berikut akan dibahas mengenai definisi limit fungsi, kekontinuan fungsi di suatu titik, konvergensi barisan, dan konvergensi deret tak hingga.

Definisi 2.4 (limit): $\lim_{x\to c} f(x) = L$ berarti bahwa untuk tiap $\varepsilon > 0$ yang diberikan (betapapun kecilnya), terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga $|f(x) - L| <$ ε asalkan bahwa $0 < |x - c| < \delta$, yakni

$$0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Definisi 2.5 (kekontinuan di suatu titik): f dikatakan kontinu di c jika memenuhi tiga syarat berikut:

1. $\lim_{x\to c} f(x)$ ada,
2. $f(c)$ ada (c berada dalam daerah asal f),
3. $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$.

Definisi 2.6 (konvergensi barisan): Suatu barisan $\{U_n(x)\}_{n=1}^{+\infty}$ disebut mempunyai limit $L(x)$ bila untuk sebarang $\varepsilon > 0$ ada bilangan bulat positif N sedemikian rupa sehingga $|U_n(x) - L(x)| < \varepsilon$ bila $n \geq N$. Bila barisan $\{U_n(x)\}_{n=1}^{+\infty}$ mempunyai limit $L(x)$, dikatakan bahwa barisan konvergen ke $L(x)$ dan ditulis

$$\lim_{n\to\infty} U_n(x) = L(x).$$

Definisi 2.7 (konvergensi deret tak hingga): Andaikan $\{S_n(x)\}$ adalah barisan jumlah bagian deret $\sum_{k=1}^{\infty} U_k(x)$. Jika barisan $\{S_n(x)\}$ konvergen ke limit $S(x)$, maka deret itu konvergen, dan $S(x)$ disebut jumlah deret. Ditulis $S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} U_k(x)$.

Untuk sebuah deret tak terhingga $\sum_{k=1}^{\infty} U_k(x)$, didefinisikan jumlah parsial ke n dari deret tersebut sebagai jumlah n suku yang pertama dari deret tersebut, yaitu $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} U_k(x)$.

Berdasarkan definisi, suatu deret tak terhingga dikatakan konvergen ke $f(x)$ pada suatu interval kalau diberikan sebarang bilangan positif ε, maka untuk setiap *x* di dalam interval tersebut terdapat suatu bilangan bulat positif *N*, sehingga $|S_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ untuk semua $n \geq N$. Bilangan *N* secara umum tergantung tidak hanya pada ε tetapi juga pada x.

Definisi 2.8 (konvergensi uniform) : Deret $\sum_{k=1}^{\infty} U_k(x)$ disebut konvergen secara uniform ke $S(x)$ dalam suatu interval jika untuk tiap $\varepsilon > 0$ terdapat sebuah bilangan bulat positif *N* sehingga untuk semua $n \geq N$ berlaku

$$|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon,$$

untuk semua *x* dalam interval.

Hal yang sangat mendasar dari definisi tersebut yakni bahwa *N* hanya tergantung pada ε dan tidak tergantung pada nilai *x* di dalam interval tersebut.

Contoh 2.15: Tentukan apakah deret $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ konvergen secara uniform pada interval $-a \le x \le a \quad (0 < a < 1)$, diketahui bahwa deret $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ konvergen dalam interval $-1 < x < 1$.

Penyelesaian

Jumlah *n* suku pertama dari deret tersebut yaitu:

$$S_n(x) = x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n = \frac{1 - x^n}{1 - x}.$$

Jumlah deret tersebut yaitu:

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - x^n}{1 - x} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 - x} - \lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{1 - x} = \frac{1}{1 - x},$$

ini karena deret $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ konvergen dalam interval $-1 < x < 1$.

Sisa ke-*n* dari deret $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ adalah $R_n(x) = S(x) - S_n(x)$.

Nilai mutlak dari sisa ke-*n* tersebut adalah $|R_n(x)| = |S(x) - S_n(x)|$

$$= \left| \frac{1}{1 - x} - \frac{1 - x^n}{1 - x} \right|$$

$$= \left| \frac{x^n}{1 - x} \right|$$

Untuk interval tertutup $-a \le x \le a \quad (0 < a < 1)$, nilai maksimum $R_n(x)$ yaitu $\overline{R}_n$ adalah $\overline{R}_n = \max_{-a \le x \le a} |R_n(x)| = \max_{-a \le x \le a} \left| \frac{x^n}{1 - x} \right| = \frac{a^n}{1 - a}$ (karena untuk $x = a$, nilai x^n menjadi sangat besar sedangkan nilai $1 - x$ menjadi sangat kecil).

Kemudian akan ditentukan nilai $\overline{R}_n$ untuk $n \to +\infty$.

$$\lim_{n\to+\infty} \overline{R}_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{1-a} = 0,$$

dengan kata lain $\overline{R}_n < \varepsilon$ untuk $n \geq N$, sehingga $|S(x) - S_n(x)| < \varepsilon$.

Jadi berdasarkan definisi terbukti bahwa $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ konvergen secara uniform pada interval $-a \leq x \leq a$ $(0 < a < 1)$.

Ada beberapa cara untuk membuktikan konvergensi uniform dari suatu deret. Cara yang pertama yaitu dengan menentukan jumlah $S_n(x)$ dan kemudian menggunakan definisi. Cara yang kedua adalah dengan menggunakan suatu teorema yang disebut sebagai Weierstrass M test.

Teorema 2.1 (Weierstrass M test) : Andaikan deret $\sum_{k=1}^{\infty} U_k(x)$ adalah deret yang semua sukunya terdefinisi pada suatu interval. Jika terdapat deret konstan $\sum_{k=1}^{\infty} M_k$ yang konvergen, sehingga $|U_k(x)| \leq M_k$ untuk semua x dalam interval tersebut, maka deret $\sum_{k=1}^{\infty} U_k(x)$ konvergen mutlak dan konvergen uniform pada interval tersebut.

Bukti

Untuk tiap *x* dalam suatu interval, tiap suku deret $\sum |U_k(x)|$ kurang dari atau sama dengan suku ke-n dari deret $\sum M_k$ yang konvergen, yaitu $|U_k(x)| \leq M_k$. Menurut Uji Banding, deret $\sum U_k(x)$ adalah deret yang konvergen mutlak.

Jika pendekatan suatu fungsi f oleh jumlah parsial ke-n dari deret $\sum U_k(x)$ yaitu $S_n(x)$, maka besar kesalahan pada suatu titik x adalah selisih $f(x)-S_n(x)$. Selisih ini biasanya disebut sisa ke-n dari deret $\sum U_k(x)$ dan ditulis $R_n(x)=f(x)-S_n(x)$. Nilai mutlak dari sisa ke-n tersebut adalah $|R_n(x)|=|f(x)-S_n(x)|$.

$$\begin{aligned}|R_n(x)| &= |U_{n+1}(x)+U_{n+2}(x)+U_{n+3}(x)+\ldots| \\ &\leq |U_{n+1}(x)|+|U_{n+2}(x)|+|U_{n+3}(x)|+\ldots \\ &\leq M_{n+1}+M_{n+2}+M_{n+3}+\ldots\end{aligned}$$

Jika T_n merupakan sisa ke-n dari deret $\sum M_k$ yang konvergen yaitu $T_n = M_{n+1}+M_{n+2}+M_{n+3}+\ldots$, maka

$$|R_n(x)| \leq T_n .$$

Karena $\sum M_k$ adalah deret konstan yang konvergen, maka untuk tiap $\varepsilon > 0$ yang diberikan,terdapat bilangan bulat positif N sedemikian sehingga $T_n < \varepsilon$ untuk $n \geq N$.

Untuk nilai N yang sama, diperoleh

$$|R_n(x)| \leq T_n < \varepsilon \text{ untuk } n \geq N .$$

Karena N tidak tergantung pada x, tetapi hanya tergantung pada nilai ε, maka terbukti bahwa $\sum_{k=1}^{\infty} U_k(x)$ konvergen uniform pada interval tersebut.

Jadi terbukti bahwa deret $\sum_{k=1}^{\infty} U_k(x)$ konvergen mutlak dan konvergen uniform pada interval tersebut.

Contoh 2.16: Deret $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ pada contoh 2.15 konvergen secara uniform pada interval $-a \leq x \leq a$ $(0 < a < 1)$, karena terdapat deret konstan $\sum_{n=1}^{\infty} a^n$ $(0 < a < 1)$ yang konvergen sehingga

$$\left|x^n\right| \leq a^n$$

untuk semua x dalam interval tersebut (berdasarkan teorema Weierstrass M test).

Contoh 2.17: Deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$ konvergen secara uniform pada interval $(-\pi, \pi)$, karena terdapat deret konstan $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ yang konvergen sehingga

$$\left|\frac{\sin nx}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$$

untuk semua x dalam interval tersebut (berdasarkan teorema Weierstrass M test).

Dua buah sifat yang penting tentang deret yang konvergen secara uniform ini disimpulkan pada dua teorema berikut:

Teorema 2.2 : Apabila masing-masing suku dari deret tak terhingga $\sum_{k=1}^{\infty} U_k(x)$ kontinu pada interval (a,b) dan deret tersebut konvergen secara uniform ke jumlah $f(x)$ pada interval ini, maka :

1. $f(x)$ juga kontinu pada interval tersebut,
2. deret tersebut dapat diintegralkan suku demi suku, yaitu

$$\int_a^b \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} U_k(x) \right\} dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b U_k(x) dx \text{ atau dapat ditulis}$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b U_1(x)dx + \int_a^b U_2(x)dx + \ldots + \int_a^b U_n(x)dx + \ldots$$

Bukti

1. Andaikan diberikan x_0, $a < x_0 < b$, dan andaikan diberikan $\varepsilon > 0$, maka harus dicari δ sedemikian sehingga untuk $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| <$ ε, dan $a < x < b$.

   Karena deret $\sum_{k=1}^{\infty} U_k(x)$ konvergen secara uniform ke $f(x)$, maka terdapat suatu bilangan positif δ_1 sedemikian sehingga

   $$0 < |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |S_n(x) - f(x)| < \frac{1}{3}\varepsilon,\ n \geq N. \qquad ....(11)$$

   Fungsi $S_N(x)$ sebagai jumlah bagian dari fungsi kontinu adalah juga kontinu. Oleh karena itu, terdapat suatu bilangan positif δ_2 sedemikian sehingga

   $$0 < |x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow |S_N(x) - S_N(x_0)| < \frac{1}{3}\varepsilon.$$

   Oleh persamaan (11), diperoleh

   $$|S_N(x) - f(x)| < \frac{1}{3}\in, \quad |S_N(x_0) - f(x_0)| < \frac{1}{3}\varepsilon.$$

   Pilih $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ yaitu pilih δ yang terkecil di antara δ_1 dan δ_2, sehingga $0 < |x - x_0| < \delta$ menunjukkan

   $$|f(x) - f(x_0)| = |f(x) - S_N(x) + S_N(x) - S_N(x_0) + S_N(x_0) - f(x_0)|$$

$$\leq |f(x) - S_N(x)| + |S_N(x) - S_N(x_0)| + |S_N(x_0) - f(x_0)|$$

$$< \frac{1}{3}\varepsilon + \frac{1}{3}\varepsilon + \frac{1}{3}\varepsilon = \varepsilon \text{ untuk } 0 < |x - x_0| < \delta .$$

Dengan demikian telah diperlihatkan bahwa

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon,\ a < x < b .$$

Jadi $f(x)$ juga kontinu pada interval (a,b).

2. Seperti pembuktian sebelumnya, andaikan $S_n(x)$ adalah jumlah n bagian dari deret $\sum U_k(x)$, maka

$$\int_a^b S_n(x)dx = \int_a^b U_1(x)dx + \int_a^b U_2(x)dx + \ldots + \int_a^b U_n(x)dx .$$

Untuk membuktikan teorema di atas, harus ditunjukkan bahwa $\int_a^b S_n(x)dx$ konvergen ke $\int_a^b f(x)dx$, sehingga untuk tiap $\varepsilon > 0$ terdapat N sehingga $\left|\int_a^b f(x)dx - \int_a^b S_n(x)dx\right| < \varepsilon, n \geq N$. Untuk membuktikan ini, dipilih N yang sangat besar sehingga

$$|f(x) - S_n(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a}, n \geq N, a < x < b,$$

ini dikarenakan konvergensi uniform.

Oleh karena itu,

$$\left|\int_a^b f(x)dx - \int_a^b S_n(x)dx\right| = \left|\int_a^b [f(x) - S_n(x)]dx\right| < \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon,\ n \geq N .$$

Dengan demikian, deret tersebut dapat diintegralkan suku demi suku, yaitu

$$\int_a^b \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} U_k(x) \right\} dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b U_k(x) dx .$$

Teorema 2.3 : Deret yang konvergen dapat didiferensialkan suku demi suku jika diketahui bahwa suku-suku dari deret tersebut mempunyai turunan yang kontinu dan deret dari turunan itu konvergen secara uniform, yakni jika $U'_k(x) = \dfrac{dU_k}{dx}$ adalah kontinu pada interval (a,b), deret $\sum_{k=1}^{\infty} U_k(x)$ konvergen ke $f(x)$ pada interval (a,b), dan deret $\sum_{k=1}^{\infty} U'_k(x)$ konvergen secara uniform pada interval (a,b), maka $f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} U'_k(x)$.

Bukti

Andaikan $g(x)$ adalah jumlah dari deret turunan tersebut

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} U'_k(x), \quad a < x < b .$$

Menurut teorema 2.2, fungsi $g(x)$ adalah fungsi kontinu

$$\int_a^{x_1} g(x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^{x_1} U'_k(x) dx, \quad a < x_1 < b ,$$

sehingga

$$\int_a^{x_1} g(x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} [U_k(x_1) - U_k(a)] = \sum_{k=1}^{\infty} U_k(x_1) - \sum_{k=1}^{\infty} U_k(a)$$

$$\int_{a}^{x_1} g(x)dx = f(x_1) - f(a).$$

Jika kedua ruas diturunkan terhadap x_1, maka $g(x_1) = f'(x_1),\ a < x_1 < b$.

Dengan kata lain $f'(x) = g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} U'_k(x),\ a < x < b$.

Jadi, terbukti bahwa deret tersebut dapat dideferensialkan suku demi suku.

A. Sifat Koefisien Deret Fourier

Hal penting yang harus dibahas sebelum membahas mengenai konvergensi deret Fourier adalah mengetahui mengenai sifat koefisien deret Fourier. Sifat koefisien deret Fourier yaitu

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0. \qquad \text{......(12)}$$

Untuk membuktikan sifat ini, diandaikan f kontinu sepotong-sepotong dengan periode 2π dan mempunyai bentuk deret Fourier

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

Andaikan pula $S_N(x)$ sebagai jumlah bagian yang terdiri dari jumlah N+1 (N>1) suku dalam deret.

$$S_N(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{N} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

Dengan melakukan pengintegralan begian demi bagian, maka

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)S_N(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left[\begin{pmatrix} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 + \sum_{n=1}^{N}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \end{pmatrix} \right] dx$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \left(a_0^{\ 2} + a_0 \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) + a_0 \sum_{n=1}^{N}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \right) dx$$

$$+ \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=1}^{N} \left(a_n^{\ 2} \cos^2 nx + b_n^{\ 2} \sin^2 nx + a_n b_b \cos nx \sin nx\right) dx$$

$$= 2\pi a_0^{\ 2} + \pi \sum_{n=1}^{N} \left(a_n^{\ 2} + b_n^{\ 2}\right),$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} [S_N(x)]^2 \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left(a_0 + \sum_{n=1}^{N}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \right)^2 dx$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \left(a_0 + 2a_0 \sum_{n=1}^{N}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) + \left(\sum_{n=1}^{N}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \right)^2 \right) dx$$

$$= 2\pi a_0^{\ 2} + \pi \sum_{n=1}^{N} \left(a_n^{\ 2} + b_n^{\ 2}\right),$$

sehingga

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - S_N(x)]^2 \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx - 2\int_{-\pi}^{\pi} f(x)S_N(x)dx + \int_{-\pi}^{\pi} S_N^{\ 2}(x)dx$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx - \pi\left[2a_0^{\ 2} + \sum_{n=1}^{N}\left(a_n^{\ 2} + b_n^{\ 2}\right) \right].$$

Karena nilai $\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - S_N(x)]^2 \, dx$ adalah tak negatif, maka

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx - \pi\left[2a_0^{\ 2} + \sum_{n=1}^{N}\left(a_n^{\ 2} + b_n^{\ 2}\right) \right] \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left[2a_0^{\ 2} + \sum_{n=1}^{N}\left(a_n^{\ 2} + b_n^{\ 2}\right)\right] \leq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx \text{, untuk semua } N.$$

Untuk $N \to \infty$, maka $\left[2a_0^{\ 2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^{\ 2} + b_n^{\ 2}\right)\right] \leq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx$.

Karena $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx$ berhingga, maka $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^{\ 2} + b_n^{\ 2}\right)$ menjadi terbatas sehingga deret $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^{\ 2} + b_n^{\ 2}\right)$ konvergen.

Dengan kata lain $\lim_{n\to\infty}\left(a_n^{\ 2} + b_n^{\ 2}\right) = 0$ atau $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0$.

Teorema 2.4 (Teorema Riemann): Jika f kontinu sepotong-sepotong pada selang $0 \leq x \leq \pi$, maka

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = \lim_{n\to\infty}\int_{\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = 0. \qquad \text{......(13)}$$

Bukti

$\int_{\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx$ adalah koefisien a_n dalam deret kosinus Fourier untuk fungsi f kontinu sepotong-sepotong pada selang $0 \leq x \leq \pi$, dengan mengabaikan nilai $\frac{2}{\pi}$ pada persamaan (7).

Demikian pula $\int_{\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx$, dengan mengabaikan nilai $\frac{2}{\pi}$ pada persamaan (8), maka $\int_{\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx$ adalah koefisien b_n dalam deret kosinus Fourier untuk fungsi f kontinu sepotong-sepotong pada selang $0 \le x \le \pi$.

Menurut sifat koefisien deret Fourier, jika $n \to \infty$, maka $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0$ atau

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = \lim_{n\to\infty}\int_{\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = 0.$$

Teorema 2.5 (Teorema Akibat): Jika f kontinu sepotong-sepotong pada selang $0 \le x \le \pi$, maka

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\pi}^{\pi} f(x)\sin\frac{(2N+1)x}{2} dx = 0, \qquad \text{......(14)}$$

dimana N adalah bilangan bulat positif.

Bukti

Dengan menggunakan rumus identitas trigonometri $\sin(A+B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B$, $\int_{\pi}^{\pi} f(x)\sin\frac{(2N+1)x}{2} dx$ atau $\int_{\pi}^{\pi} f(x)\sin\left(\frac{x}{2} + Nx\right) dx$ dapat ditulis menjadi

$$\int_{\pi}^{\pi} f(x)\sin\frac{x}{2}\cos Nx dx + \int_{\pi}^{\pi} f(x)\cos\frac{x}{2}\sin Nx dx.$$

Karena fungsi $f(x)\sin\frac{x}{2}$ dan fungsi $f(x)\cos\frac{x}{2}$ adalah fungsi kontinu sepotong-sepotong pada selang $0 \le x \le \pi$, maka menurut teorema Riemann persamaan (14) dapat ditulis menjadi

$$\int_{\pi}^{\pi} f(x)\sin\frac{(2N+1)x}{2}\,dx = \int_{\pi}^{\pi}\left(f(x)\sin\frac{x}{2}\right)\cos Nxdx + \int_{\pi}^{\pi}\left(f(x)\cos\frac{x}{2}\right)\sin Nxdx$$

$$= 0 + 0 = 0.$$

Jadi terbukti bahwa $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{\pi}^{\pi} f(x)\sin\frac{(2N+1)x}{2}\,dx = 0$.

B. Kekonvergenan Deret Fourier

Dalam pembahasan sebelumnya, telah diuraikan mengenai bentuk deret Fourier dari suatu fungsi periodik $f(x)$ yang mempunyai periode 2π dan kontinu sepotong-sepotong dalam interval $-\pi \le x \le \pi$. Akan sangat baik jika deret yang diperoleh konvergen ke $f(x)$ (kecuali pada titik loncatan, yang akan dibahas dibawah). Dalam hal demikian deret Fourier untuk $f(x)$ memang merepresentasikan $f(x)$, sehingga dapat dituliskan

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

dengan tanda sama dengan. Jika deret Fourier untuk $f(x)$ tidak memiliki jumlah $f(x)$ atau tidak konvergen ke $f(x)$, maka dituliskan

$$f(x) \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

yang menunjukkan bahwa deret trigonometri di ruas kanan mempunyai koefisien Fourier untuk $f(x)$ sebagai koefisien-koefisiennya, sehingga deret tersebut merupakan deret Fourier untuk $f(x)$.

Sebelum membahas mengenai kekonvergenan deret Fourier, terlebih dahulu akan didefinisikan mengenai Kernel Dirichlet yang akan digunakan dalam pembahasan lema dan teorema selanjutnya.

Kernel Dirichlet adalah suatu fungsi dengan bentuk $D_N(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{N} \cos nx$, dimana N adalah bilangan bulat positif.

Fungsi $D_N(x)$ bersifat kontinu, merupakan fungsi genap dan periodik dengan periode 2π. Sifat-sifat fungsi $D_N(x)$ yaitu:

1. $\int_0^{\pi} D_N(x)dx = \frac{\pi}{2}$

   Bukti:

   $$\int_0^{\pi} D_N(x)dx = \int_0^{\pi}\left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{N} \cos nx\right)dx = \left[\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}n\sum_{n=1}^{N} \sin nx\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}.$$

2. $D_N(x) = \dfrac{\sin\left[(2N+1)\frac{x}{2}\right]}{2\sin\frac{x}{2}}$, $x \neq 0, \pm 2, \pm 4, \ldots$

   Bukti:

   Untuk membuktikan hal tersebut, perhatikan persamaan berikut.

   Untuk $n = 1, 2, \ldots, N$

   $$\sin\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right] - \sin\left[\left(n - \frac{1}{2}\right)x\right] = 2\cos nx \sin\frac{x}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{n=1}^{N} \sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\right]x - \sin\left[\left(n-\frac{1}{2}\right)\right]x = \sin\left(\frac{x}{2}\right)\sum_{n=1}^{N} 2\cos(nx)$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin\left[\left(N+\frac{1}{2}\right)x\right] - \sin\left(\frac{x}{2}\right) = \sin\left(\frac{x}{2}\right)\sum_{n=1}^{N} 2\cos nx$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin\left[\left(N+\frac{1}{2}\right)x\right] = \sin\left(\frac{x}{2}\right)\sum_{n=1}^{N} 2\cos nx + \sin\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin\left[\left(N+\frac{1}{2}\right)x\right] = 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{N} \cos nx\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad D_N(x) = \frac{\sin\left[(2N+1)\frac{x}{2}\right]}{2\sin\frac{x}{2}}.$$

Lema 2.1: Andaikan $f(x)$ adalah fungsi kontinu sepotong-sepotong pada $0 \le x \le \pi$, dan turunan kanan $(f'_R(0))$ ada, maka

$$\lim_{N\to\infty} \int_0^{\pi} f(x) D_N(x)\, dx = \frac{\pi}{2} f(0_+) \qquad \text{......(15)}$$

dimana $D_N(x)$ adalah Kernel Dirichlet.

Bukti:

Andaikan $\lim_{N\to\infty} \int_0^{\pi} f(x) D_N(x)\, dx = I_N(x) + J_N(x)$ ......(16)

, dimana $I_N(x) = \int_0^{\pi} [f(x) - f(0_+)] D_N(x)\, dx$, dan $J_N(x) = \int_0^{\pi} f(0_+) D_N(x)\, dx$.

Dengan menggunakan sifat Kernel Dirichlet, I_N dapat dinyatakan menjadi

$$I_N(x) = \int_0^{\pi} [f(x) - f(0_+)] \frac{\sin\left[(2N+1)\frac{x}{2}\right]}{2\sin\frac{x}{2}} dx$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{[f(x) - f(0_+)]}{2\sin\frac{x}{2}} \sin\left[(2N+1)\frac{x}{2}\right] dx. \qquad \text{......(17)}$$

Andaikan $F(x) = \dfrac{[f(x) - f(0_+)]}{2\sin\frac{x}{2}}$, akan diperlihatkan bahwa $F(x)$ kontinu sepotong-sepotong pada interval $0 \le x \le \pi$.

$$\lim_{x\to 0, x>0} F(x) = \lim_{x\to 0, x>0} \frac{[f(x) - f(0_+)]}{2\sin\frac{x}{2}} = \lim_{x\to 0, x>0} \frac{[f(x) - f(0_+)]}{x - 0} \cdot \frac{\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$$

$$= \lim_{x\to 0, x>0} \frac{[f(x) - f(0_+)]}{x - 0} \cdot \lim_{x\to 0, x>0} \frac{\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} = f'_R(0).$$

Karena keberadaan $f'_R(0)$ menjamin keberadaan $F(0_+)$, maka $F(x)$ adalah fungsi kontinu sepotong-sepotong pada interval $0 \le x \le \pi$.

Berdasarkan teorema akibat dan digunakan pada persamaan (17), maka diperoleh $\lim\limits_{N\to\infty} I_N(x) = 0$.

Berdasrkan sifat Kernel Dirichlet, maka

$$J_N(x) = \int_0^{\pi} f(0_+) D_N(x) dx = f(0_+) \int_0^{\pi} D_N(x) dx = \frac{\pi}{2} f(0_+).$$

Jadi, $\lim\limits_{N\to\infty} \int_0^{\pi} f(x) D_N(x) dx = \lim\limits_{N\to\infty} I_N(x) + \lim\limits_{N\to\infty} J_N(x) = 0 + \frac{\pi}{2} f(0_+) = \frac{\pi}{2} f(0_+)$.

Teorema 2.6 (Kekonvergenan Deret Fourier) : Andaikan $f(x)$ mempunyai periode 2π, kontinu sepotong-sepotong dalam interval $-\pi \le x \le \pi$, dan mempunyai turunan kiri dan turunan kanan di setiap titik pada interval tersebut, maka deret Fourier dari $f(x)$ konvergen ke

1. $f(x)$, jika x titik kontinuitas,
2. $\dfrac{f(x_+)+f(x_-)}{2}$, jika x titik diskontinuitas.

Bukti

Bukti kekonvergenan di dalam teorema tersebut berlaku untuk fungsi kontinu $f(x)$ yang mempunyai turunan pertama dan kedua yang kontinu.

Untuk $n \neq 0$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\, dx = \left[\frac{f(x)\sin nx}{n\pi}\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin nxdx$$

$$= \left[\frac{f(x)\sin n\pi}{n\pi} - \frac{f(x)\sin -n\pi}{n\pi}\right] + \frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin nxdx$$

$$= [0-0] + \frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin nxdx$$

$$= \frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin nxdx$$

$$= \left[\frac{f'(x)\cos nx}{n^2\pi}\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n^2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f''(x)\cos nxdx$$

$$=\left[\frac{f'(x)\cos n\pi}{n^2\pi}-\frac{f'(x)\cos -n\pi}{n^2\pi}\right]+\frac{1}{n^2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f''(x)\cos nx dx$$
$$=\left[\frac{f'(x)\cos n\pi}{n^2\pi}-\frac{f'(x)\cos n\pi}{n^2\pi}\right]+\frac{1}{n^2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f''(x)\cos nx dx$$
$$=0+\frac{1}{n^2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f''(x)\cos nx dx$$
$$=\frac{1}{n^2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f''(x)\cos nx dx$$

Fungsi $f''(x)$ kontinu dalam interval $-\pi \le x \le \pi$ sehingga $|f''(x)| \le M$ untuk suatu konstanta M yang sesuai. Lebih lanjut, $|\cos nx| \le 1$. Akibatnya

$$|a_n| = \left|\frac{1}{n^2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f''(x)\cos nx dx\right| \le \frac{1}{n^2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} M dx = \frac{M}{n^2},\ n = 1, 2, 3, \ldots .$$

Begitu juga $|b_n| \le \dfrac{M}{n^2}$ untuk semua *n*. Jadi, nilai mutlak setiap suku deret Fourier bagi $f(x)$ paling besar sama dengan suku padanannya pada deret

$$\frac{1}{2}|a_0| + \frac{2M}{1} + \frac{2M}{1} + \frac{2M}{2^2} + \frac{2M}{2^2} + \frac{2M}{3^2} + \frac{2M}{3^2} + \ldots$$

yang konvergen. Berdasarkan Weierstrass M test terbukti bahwa deret Fourier tersebut konvergen secara uniform untuk semua *x*.

Jadi, terbukti bahwa deret Fourier dari $f(x)$ konvergen ke $f(x)$, jika x titik kontinuitas.

Untuk pembuktian yang kedua, diawali dengan menggunakan peubah *s* dalam integrasi koefisien deret.

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(s)\cos\frac{n\pi s}{L}\,ds \text{ , } n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(s)\sin\frac{n\pi s}{L}\,ds \text{ , } n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

Dengan memasukkan koefisien a_n dan b_n, diperoleh korespondensi

$$f(x)\sim\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)\,ds+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\cos nx\int_{-\pi}^{\pi} f(s)\cos ns\,ds+\sin nx\int_{-\pi}^{\pi} f(s)\sin ns\,ds\right).$$

Dengan menggunakan rumus $\cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B$, dengan demikian korespondensi di atas dapat ditulis sebagai berikut

$$f(x)\sim\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)\,ds+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)\cos[n(s-x)]\,ds\,.$$

Jika $S_N(x)$ menyatakan jumlah bagian N suku yang pertama deret tersebut, maka

$$S_N(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)\,ds+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{N}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)\cos[n(s-x)]\,ds\,. \qquad \text{......(18)}$$

Dengan menggunakan Kernel Dirichlet, maka persamaan (18) dapat ditulis menjadi $S_N(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)D_N(s-x)\,ds$. Karena sifat periodisitas integran, maka selang pengintegrasian dapat diubah menjadi sebarang selang dengan panjang interval 2π .

Maka $S_N(x)=\frac{1}{\pi}\int_{x-\pi}^{x+\pi} f(s)D_N(s-x)\,ds$ ......(19)

dimana *x* adalah titik tengah selang tersebut.

Persamaan (19) dapat ditulis menjadi

$$S_N(x) = \frac{1}{\pi}\left[I_N(x) + J_N(x)\right] \qquad \text{......(20)}$$

dimana $I_N(x) = \int_0^{x+\pi} f(s) D_N(s-x)\,ds$ ......(21)

dan $J_N(x) = \int_{x-\pi}^{0} f(s) D_N(s-x)\,ds$ ......(22)

i. Misalkan $u = s - x$, maka $I_N(x) = \int_0^{x+\pi} f(u+x) D_N(u)\,d(u)$.

Karena $f(x)$ mempunyai periode 2π, kontinu sepotong-sepotong dalam interval $-\pi \le x \le \pi$, maka $f(x)$ kontinu sepotong-sepotong pada sebarang interval terbatas pada sumbu *x*. Jadi fungsi $g(u) = f(u+x)$ adalah fungsi kontinu sepotong-sepotong pada sebarang interval terbatas pada sumbu *x*, khususnya pada interval $0 \le u \le \pi$.

Berikut akan diperlihatkan bahwa turunan kanan *g* pada *u*=0 ada. Andaikan $f'_R(x)$ ada,

$g(0_+) = \lim_{u \to 0, u>0} g(u) = \lim_{u \to 0, u>0} f(x+u) = f(x_+)$, sehingga

$$g'_R(0) = \lim_{u \to 0, u>0} \frac{g(u) - g(0_+)}{u - 0} = \lim_{u \to 0, u>0} \frac{f(x+u) - f(x_+)}{u} = f'_R(x).$$

Jadi terbukti bahwa $g'_R(0)$ ada.

Berdasarkan lema 2.1, maka $\lim_{N \to \infty} I_N(x) = \frac{\pi}{2} g(0_+) = \frac{\pi}{2} f(x_+)$. ......(23)

ii. Misalkan $u = x - s$, maka $J_N(x) = \int\limits_0^{x+\pi} f(x-u) D_N(u) d(u)$.

Fungsi $g(u) = f(x-u)$ adalah fungsi kontinu sepotong-sepotong pada sebarang interval terbatas pada sumbu *x*, khususnya pada interval $0 \le u \le \pi$.

Berikut akan diperlihatkan bahwa turunan kanan *g* pada *u*=0 ada. Andaikan $f'_L(x)$ ada,

$g(0_+) = \lim\limits_{u \to 0, u>0} g(u) = \lim\limits_{u \to 0, u>0} f(x-u) = f(x_-)$, sehingga

$$g'_R(0) = \lim_{u \to 0, u>0} \frac{g(u) - g(0_+)}{u - 0} = \lim_{u \to 0, u>0} \frac{f(x-u) - f(x_-)}{-u} = f'_L(x).$$

Jadi terbukti bahwa $g'_R(0)$ ada.

Berdasarkan lema 2.1, maka $\lim\limits_{N \to \infty} J_N(x) = \frac{\pi}{2} g(0_+) = \frac{\pi}{2} f(x_-)$. ......(24)

Berdasarkan persamaan 20, 23, dan 24, maka dapat ditarik kesimpulan bahwa

$$\lim_{N \to \infty} S_N(x) = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{\pi}\left[I_N(x) + J_N(x)\right] = \frac{1}{\pi} \lim_{N \to \infty} I_N(x) + \frac{1}{\pi} \lim_{N \to \infty} J_N(x)$$

$$= \frac{1}{2} f(x_+) + \frac{1}{2} f(x_-) = \frac{f(x_+) + f(x_-)}{2}$$

Jadi, terbukti bahwa deret Fourier dari $f(x)$ konvergen secara uniform ke $\frac{f(x_+) + f(x_-)}{2}$, jika *x* titik diskontinuitas.

Contoh 2.18: Gelombang persegi panjang pada contoh 2.9 yaitu

$$f(x) = \begin{cases} -k, & -\pi < x < 0 \\ k, & 0 < x < \pi \end{cases}, \quad f(x + 2\pi) = f(x)$$

mempunyai titik loncatan di $x = \ldots, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, \ldots$.

Untuk $x = 0$, limit kiri di titik itu adalah $-k$, dan limit kanannya adalah k, sehingga rata-rata limit tersebut adalah 0. Deret Fourier untuk fungsi tersebut yaitu $\frac{4k}{\pi}\left(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \ldots\right)$. Deret Fourier tersebut konvergen ke 0 untuk $x = 0$, sebab semua sukunya 0 untuk $x = 0$. Demikian pula untuk titik-titik loncatan lainnya.

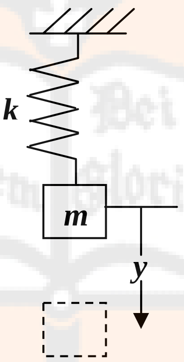
BAB III

PEMAKAIAN DERET FOURIER

Pada bab ini akan dibahas penerapan deret Fourier dalam masalah-masalah fisika seperti osilasi paksa , konduksi panas, dan getaran dawai.

A. Pemakaian pada Osilasi Paksa

Ketika sebuah benda bermassa m tergantung dalam keadaan seimbang pada sebuah pegas dengan konstanta pegas k kemudian benda itu ditarik ke bawah yang akan merentangkan pegas sejauh jarak tertentu seperti gambar di bawah ini :

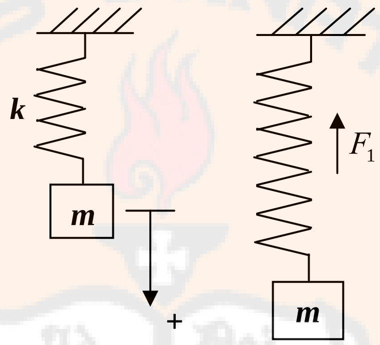


Pegas penyangga akan memberikan gaya pada benda yang bekerja dalam upaya mengembalikan benda ke posisi seimbang. Gaya ini disebut gaya pengembalian pegas yang akan dijelaskan oleh hukum Hooke. Hukum Hooke menyatakan bahwa gaya pengembalian berbanding langsung dengan perubahan penyangganya. Jika y menyatakan perpindahan benda dari keadaan seimbang dan F menyatakan gaya pengembalian pegas maka berdasarkan Hukum Hooke $F = -ky$, di mana tanda negatif $(-)$ menyatakan bahwa gaya pengembalian pegas selalu berlawanan arah dengan perpindahan benda.

Berikut akan diuraikan mengenai gaya-gaya yang bekerja pada suatu benda, gaya-gaya tersebut adalah :

1. F_1, gaya pengembalian pegas. Seperti yang sudah kita bahas di atas bahwa gaya pengembalian pegas selalu berlawanan arah dengan perpindahan benda sehingga gaya pengembaliannya dapat ditulis sebagai berikut :

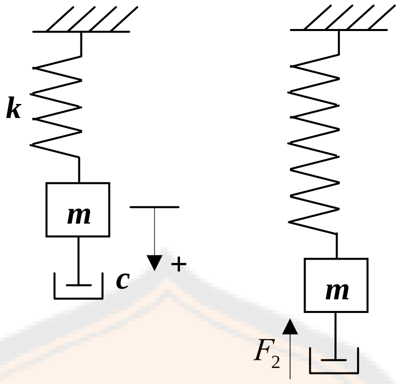
$$F_1 = -ky \quad \text{...} \quad (1)$$



2. F_2, gaya redaman. Gaya tersebut mempunyai arah yang berlawanan dengan gerak benda dan kita andaikan bahwa gaya ini sebanding dengan kecepatan. Ketika benda bergerak ke bawah, F_2 bekerja dengan arah ke atas (berlawanan dengan gerakan benda). Begitu juga sebaliknya. Karena gaya redaman sebanding dengan kecepatan dan melawan gerakan benda maka gaya redamannya dapat kita tulis :

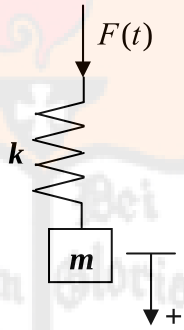
$$F_2 = -c\frac{dy}{dt} \quad \text{...} \quad (2)$$

di mana c disebut konstanta redaman.



3. F_3, gaya luar yang bekerja pada benda. Misalkan kita notasikan gaya luar tersebut dengan $F(t)$ maka kita dapat menulis :

$$F_3 = F(t) \quad \text{..} \quad (3)$$



Untuk menurunkan persamaan getaran akan digunakan hukum Newton II yang menyatakan bahwa percepatan sebuah benda berbanding lurus dengan gaya yang bekerja pada benda. Jika m adalah massa benda, a adalah percepatan benda (a dapat kita tulis sebagai $\frac{d^2y}{dt^2}$), dan F adalah gaya yang bekerja pada benda maka berdasarkan hukum Newton II $F = ma$. Dengan menggunakan persamaan (1), (2), dan (3) serta menggunakan hukum Newton II akan diperoleh :

$$F = F_1 + F_2 + F_3$$

atau $ma = -ky - c\frac{dy}{dt} + F(t)$

atau $m\dfrac{d^2y}{dt^2}+c\dfrac{dy}{dt}+ky=F(t)$

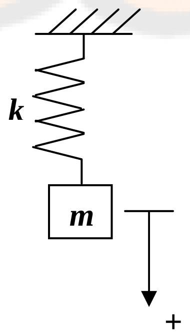
$$m\,y''+c\,y'+k\,y=F(t) \quad \text{..} \quad (4)$$

Gaya luar $F(t)$ merupakan masukan (input) dan penyelesaiannya dinamakan hasil (output) atau reaksi sistem terhadap gaya luar $F(t)$. Persamaan (4) merupakan persamaan diferensial untuk getaran pegas. Persamaan tersebut merupakan persamaan diferensial linear non homogen orde dua dengan koefisien konstan. Jika $c=0$ getaran itu disebut tak teredam, dan sebaliknya jika $c\neq 0$ getaran itu disebut teredam. Jika tidak ada pengaruh dari gaya luar $\left(F(t)=0\right)$ maka getaran tersebut disebut getaran bebas. Sebaliknya jika ada pengaruh dari gaya luar maka getaran itu disebut getaan terpaksa. Pada bab ini, getaran bebas akan dibahas sekilas dan hal yang akan dibahas lebih mendalam hanya meliputi getaran terpaksa (osilasi paksa), karena gaya luar $F(t)$ bukan berupa suatu fungsi sinus atau kosinus murni sehingga diperlukan representasi dengan deret Fourier.

1. Getaran Tak Teredam

Dalam kasus ini tidak ada gaya luar yang bekerja pada benda dan tidak ada gaya redaman maka $F(t)=0$ dan $c=0$ sehingga persamaan (4) menjadi

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-kx \text{ atau } m\frac{d^2x}{dt^2}+kx=0 \quad \text{..} \quad (5)$$

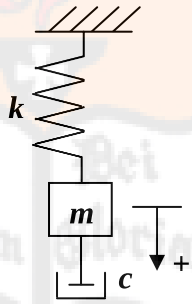


di mana m adalah massa benda dan k adalah konstanta pegas. Persamaan (5) merupakan persamaan diferensial linear homogen orde dua dengan koefisien konstan untuk getaran tak teredam.

2. Getaran Teredam

Dalam kasus ini tidak ada gaya luar yang bekerja pada benda tetapi ada gaya redaman. Oleh karena itu, dengan konstanta redaman c dan $F(t)=0$ maka persamaan (4) menjadi :

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+c\frac{dx}{dt}+kx=0 \quad \text{......} \quad (6)$$

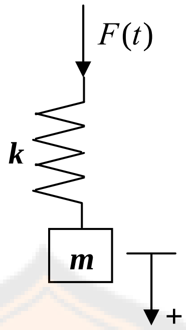


Persamaan (6) merupakan persamaan diferensial linear homogen orde dua dengan koefisien konstan untuk getaran teredam.

3. Osilasi Paksa Tak Teredam

Dalam kasus ini terdapat gaya luar yang bekerja pada benda tetapi tidak ada gaya redaman. Oleh karena itu, dengan gaya luar $F(t)$ dan $c=0$ maka persamaan (4) menjadi :

$$m\,y''+k\,y=F(t) \quad \text{......} \quad (7)$$



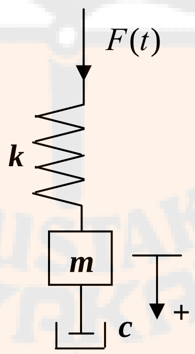
Persamaan (7) merupakan persamaan diferensial linear non homogen orde dua dengan koefisien konstan untuk osilasi paksa tak teredam.

Gaya luar $F(t)$ tidak selalu berupa fungsi kontinu saja melainkan juga dapat berupa fungsi kontinu sepotong-sepotong, seperti yang diberikan pada contoh1.

4. Osilasi Paksa Teredam

Dalam kasus ini ada gaya redaman dan gaya luar yang bekerja pada benda, sehingga persamaan (4) menjadi :

$$m\,y'' + c\,y' + k\,y = F(t) \quad \text{...} \quad (8)$$



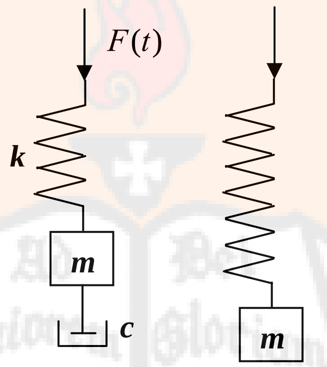
Persamaan (8) merupakan persamaan diferensial linear non homogen orde dua dengan koefisien konstan untuk osilasi paksa teredam.

Berikut merupakan contoh penyelesaian kasus osilasi paksa teredam. Untuk penyelesaian pada kasus osilasi paksa tak teredam langkah-langkah yang dilakukan sama dengan penyelesaian pada kasus osilasi paksa teredam.

Contoh 3.1: Sebuah partikel bermassa 1 gram digantung pada pegas dengan konstanta pegas 25 gram/detik^2. Sebuah gaya luar dalam satuan gram cm/detik^2 yang bekerja pada pegas sebesar

$$F(t)=\begin{cases} t+\dfrac{\pi}{2} & \text{jika } -\pi<t<0 \\ -t+\dfrac{\pi}{2} & \text{jika } 0<t<\pi \end{cases},\ F(t+2\pi)=F(t)$$

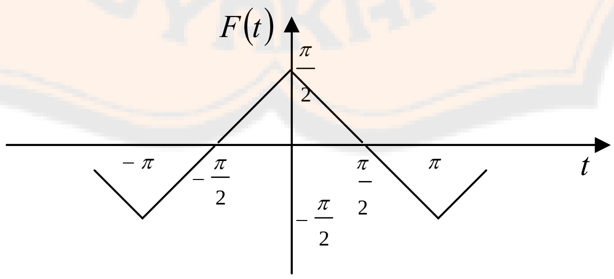
dan gaya redamnya 0,02 gram/detik. Tentukan solusi keadaan stabilnya dan gambarkan grafiknya!



Penyelesaian:

Langkah 1 : merepresentasikan $F(t)$ dengan sebuah deret Fourier

$F(t)$ merupakan fungsi periodik dengan periode 2π dan dapat digambarkan sebagai berikut



, fungsi $F(t)$ merupakan fungsi genap sehingga $b_n=0$. Dengan demikian, koefisien-koefisien Fourier dapat ditentukan sebagai berikut:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} F(t)\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(-t+\frac{\pi}{2}\right)dt = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{1}{2}t^2+\frac{\pi}{2}t\right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{\pi^2}{2}+\frac{\pi^2}{2}\right] = 0,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} F(t)\cos nt\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(-t+\frac{\pi}{2}\right)\cos nt\,dt$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{n}\left(-t+\frac{\pi}{2}\right)\sin nt - \frac{1}{n^2}\cos nt\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{2}{\pi}\left\{\left(\frac{1}{n}\left(-\pi+\frac{\pi}{2}\right)\sin n\pi - \frac{1}{n^2}\cos n\pi\right) - \right.$$

$$\left.\left(\frac{1}{n}\left(0+\frac{\pi}{2}\right)\sin 0 - \frac{1}{n^2}\cos 0\right)\right\}$$

$$= \frac{2}{\pi}\left\{\left(0-\frac{1}{n^2}\cos n\pi\right) - \left(0-\frac{1}{n^2}\right)\right\}$$

$$= \frac{2}{n^2\pi}(1-\cos n\pi)$$

$$\left(\text{bernilai } 0 \text{ jika } n \text{ genap, dan bernilai } \frac{4}{n^2\pi} \text{ jika } n \text{ ganjil}\right).$$

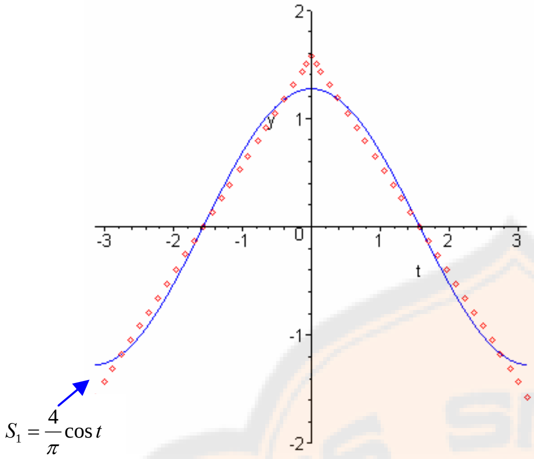
Deret Fourier untuk $F(t)$ adalah

$$F(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2\pi}(1-\cos n\pi)\cos nt$$

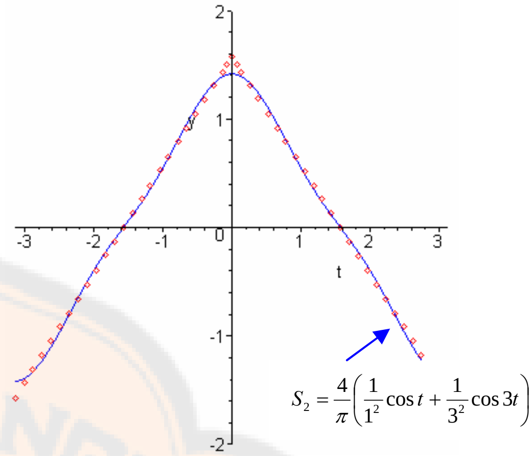
$$= \left(\frac{4}{1^2\pi}\right)\cos t + 0 + \left(\frac{4}{3^2\pi}\right)\cos 3t + 0 + \left(\frac{4}{5^2\pi}\right)\cos 5t + \ldots$$

$$= \frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{1^2}\cos t + \frac{1}{3^2}\cos 3t + \frac{1}{5^2}\cos 5t + \ldots\right)$$

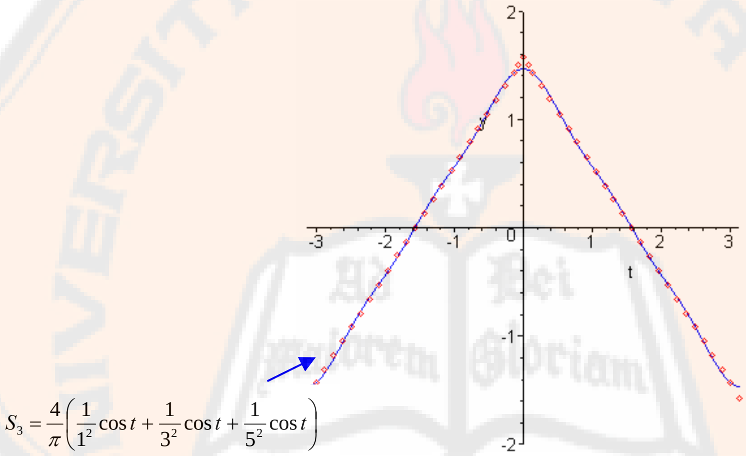
Ketiga gambar di bawah ini menunjukkan tiga jumlah parsial yang pertama dari deret Fourier yang dihasilkan.



Gambar (a)



Gambar (b)



Gambar (c)

Langkah 2 : membentuk persamaan diferensial

Persamaan diferensial dari kasus tersebut dapat dituliskan sebagai berikut:

$$y'' + 0{,}02\,y' + 25\,y = \frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{1^2}\cos t + \frac{1}{3^2}\cos 3t + \frac{1}{5^2}\cos 5t + \dots\right) \qquad \text{.........(9)}$$

Langkah 3 : menentukan penyelesaian persamaan diferensial

Selanjutnya perhatikan persamaan diferensial

$$y'' + 0{,}02\,y' + 25\,y = \frac{4}{n^2\pi}\cos nt\,,\ (n = 1, 3, 5, \dots), \qquad \text{.........(10)}$$

yang ruas kanannya adalah salah satu suku deret $F(t)$.

- menentukan penyelesaian komplementer

PDLH : $y'' + 0{,}02\,y' + 25\,y = 0$

Persamaan karakteristik : $m^2 + 0{,}02m + 25 = 0$

$$m_1 = -0{,}01 + 4{,}99999i,\; m_2 = -0{,}01 - 4{,}99999i$$

Penyelesaian komplementer:

$$y_c = e^{-0{,}01t}\left(c_1 \cos 4{,}99999t + c_2 \sin 4{,}99999t\right). \qquad \text{.........(11)}$$

- menentukan penyelesaian khusus

$$F(t) = \frac{4}{n^2\pi}\cos nt$$

Keluarga diferensial dari $F(t) = \{\cos nt, \sin nt\}$

Penyelesaian khusus: $(y_p)_n = A_n \cos nt + B_n \sin nt$

$$(y'_p)_n = -nA_n \sin nt + nB_n \cos nt$$

$$(y''_p)_n = -n^2 A_n \cos nt - n^2 B_n \sin nt$$

$$(y''_p)_n = -n^2 A_n \cos nt - n^2 B_n \sin nt$$

$$0{,}02(y'_p)_n = -0{,}02nA_n \sin nt + 0{,}02nB_n \cos nt$$

$$\underline{25(y_p)_n = 25A_n \cos nt + 25B_n \sin nt} \quad +$$

$$\left((25-n^2)A_n + 0{,}02nB_n\right)\cos nt + \left(-0{,}02nA_n + (25-n^2)B_n\right)\sin nt \equiv \frac{4}{n^2\pi}\cos nt$$

Koefisien $\cos nt$: $\left((25-n^2)A_n + 0{,}02nB_n\right) = \dfrac{4}{n^2\pi}$

$\sin nt$: $\left(-0{,}02nA_n + (25-n^2)B_n\right) = 0$

kemudian diperoleh

$$A_n = \frac{4\left(25-n^2\right)}{n^2\pi\left\{\left(25-n^2\right)^2+\left(0{,}02n\right)^2\right\}},\; B_n = \frac{0{,}08}{n\pi\left\{\left(25-n^2\right)^2+\left(0{,}02n\right)^2\right\}}.$$

Sehingga diperoleh penyelesaian khusus yaitu;

$$\left(y_p\right)_n = \frac{4\left(25-n^2\right)}{n^2\pi\left\{\left(25-n^2\right)^2+\left(0{,}02n\right)^2\right\}}\cos nt + \frac{0{,}08}{n\pi\left\{\left(25-n^2\right)^2+\left(0{,}02n\right)^2\right\}}\sin nt$$

.........(12)

Jadi, penyelesaian persamaan diferensial (10) adalah

$$y = y_c + \left(y_p\right)_n$$

dengan y_c dan $\left(y_p\right)_n$ diberikan oleh (11) dan (12).

Langkah 4 : menentukan solusi keadaan stabil

Solusi keadaan stabil untuk (9) yaitu

$$y(t) = y_c + \left(y_p\right)_1 + \left(y_p\right)_2 + \left(y_p\right)_3 + \ldots + \left(y_p\right)_n + \ldots \qquad ....(13)$$

dengan y_c dan $\left(y_p\right)_n$ diberikan oleh (11) dan (12).

Langkah 5 : menentukan amplitudo solusi keadaan stabil

Dari penyelesaian khusus $\left(y_p\right)_n$, diperoleh bahwa amplitudo solusi keadaan stabil $y(t)$ adalah

$$C(n) = \sqrt{A_n^{\,2} + B_n^{\,2}}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{4\left(25-n^2\right)}{n^2\pi\left\{\left(25-n^2\right)^2+\left(0{,}02n\right)^2\right\}}\right)^2 + \left(\frac{0{,}08}{n\pi\left\{\left(25-n^2\right)^2+\left(0{,}02n\right)^2\right\}}\right)^2}$$

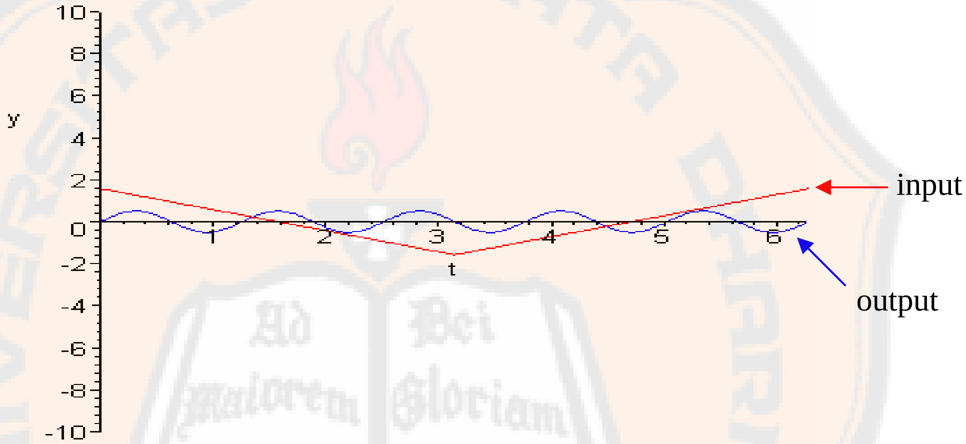
$$= \sqrt{\frac{4^2\left\{\left(25-n^2\right)+\left(0{,}02n\right)^2\right\}}{n^4\pi^2\left\{\left(25-n^2\right)^2+\left(0{,}02n\right)^2\right\}^2}}$$

$$= \frac{4}{n^2\pi\sqrt{\left(25-n^2\right)^2+\left(0{,}02n\right)^2}}$$

$C(1)=0{,}0530$, $C(3)=0{,}0088$, $C(5)=0{,}5093$, $C(7)=0{,}011$, …

Untuk $n=5$, nilai penyebut $C(n)$ menjadi sangat kecil, akibatnya $C(n)$ menjadi sangat besar sehingga $(y_p)_5$ mendominasi keadaan stabil $y(t)$.

Gambar berikut merupakan grafik keadaan stabil dari solusi yang diperoleh.



Gambar masukan dan keluaran keadaan stabil

Input : $F(t)$ merupakan fungsi periodik dengan periode 2π, sehingga memiliki frekuensi sebesar $\frac{1}{2\pi}$.

Output : Persamaan gelombang yang mendominasi keadaan stabil $y(t)$ adalah $(y_p)_5 = \frac{1{,}6}{\pi}\sin 5t$. Persamaan tersebut memiliki kecepatan sudut (ω) sebesar 5, sehingga frekuensinya dapat ditentukan sebagai berikut

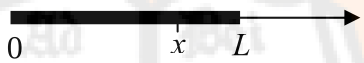
$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{5}{2\pi}.$$

Jadi, gerak keadaan stabilnya berupa suatu osilasi selaras yang memiliki frekuensi lima kali besarnya frekuensi gaya penggeraknya.

B. Pemakaian pada Konduksi Panas

Konduksi panas adalah suatu fenomena yang terjadi apabila suhu berubah dari tempat ke tempat dalam suatu bahan. Perbedaan suhu menyebabkan terjadinya suatu aliran energi, karena itu konduksi panas didefinisikan sebagai perpindahan energi oleh adanya perbedaan suhu. Mekanisme konduksi panas berbeda dalam padatan, cairan, dan gas karena mobilitas molekulnya berbeda dalam ketiga keadaan ini.

Konduksi panas yang akan dibahas dalam bagian ini adalah konduksi panas yang terjadi pada suatu kawat tipis panjang, yang irisan melintangnya konstan dan terbuat dari bahan yang homogen, yang terletak pada sumbu-*x*.



Kawat tipis yang dibahas

Misalkan $u\,(x,t)$ adalah suhu di dalam benda tersebut, maka u tergantung hanya pada x dan waktu t, dan persamaan panasnya dinamakan **persamaan panas berdimensi satu**, yaitu:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad c^2 = \frac{K}{\sigma\rho} \qquad \text{.........(14)}$$

K adalah konduktivitas panas, σ adalah panas jenis, dan ρ adalah kerapatan benda. Untuk kasus dimana kedua ujung kawat ($x = 0$ dan $L = 0$) dipertahankan pada suhu nol, maka **syarat batasnya** adalah

$$u\,(0,t) = 0\,,\ u\,(L,t) = 0 \text{ untuk semua } t. \qquad \text{.........(15)}$$

Jika $f(x)$ adalah suhu awal kawat tersebut, maka **syarat awalnya** adalah

$$u\,(x,0) = f(x),\ (f(x)\,\text{diketahui}). \qquad \text{.........(16)}$$

Solusi $u(x,t)$ bagi (14) yang memenuhi syarat (15) dan (16) dapat diperoleh melalui langkah-langkah sebagai berikut:

Langkah pertama (Membentuk dua persamaan diferensial biasa melalui metode hasil kali dua fungsi.)

Dengan menerapkan metode hasil kali dua fungsi, akan dihasilkan solusi untuk (14) yang berbentuk

$$u(x,t) = F(x)G(t), \qquad ....(17)$$

yang masing-masing tergantung pada salah satu variabel *x* atau *t*. Dengan mendefinisikan (17), diperoleh

$$\frac{\partial u}{\partial t} = F\dot{G} \text{ dan } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F''G,$$

dengan tanda titik di atas melambangkan turunan terhadap *t*, sedangkan tanda aksen melambangkan turunan terhadap *x*. Dengan menyisipkan ini ke dalam persamaan (14), diperoleh

$$F\dot{G} = c^2 F''G.$$

Untuk memisahkan variabel, bagi persamaan tersebut dengan $c^2 FG$, diperoleh

$$\frac{\dot{G}}{c^2 G} = \frac{F''}{F}.$$

Ruas kiri hanya mengandung fungsi yang tergantung hanya pada *t* sedangkan ruas kanan mengandung fungsi yang tergantung hanya pada *x*. Ini berarti ruas kanan maupun ruas kiri sama dengan suatu konstanta (misalkan *k*), sebab jika ruas kiri tidak sama dengan konstanta, maka pengubahan *t* akan mengubah nilai ruas ini namun jelas tidak mengubah nilai ruas kanan, sebab ruas kanan tidak tergantung pada t. Begitu pula, jika ruas kanan tidak sama dengan konstanta maka pengubahan x akan mengubah nilai ruas ini namun jelas tidak mengubah nilai ruas kiri. Jadi,

$$\frac{\dot{G}}{c^2 G} = \frac{F''}{F} = k \text{.}$$

Ini menghasilkan dua persamaan diferensial biasa linear, yaitu

$$F'' - k\,F = 0 \qquad \text{.........(18)}$$

dan

$$\dot{G} - c^2 k\,G = 0\,. \qquad \text{.........(19)}$$

Di sini, k masih merupakan sembarang bilangan real.

Langkah kedua (Menentukan solusi bagi kedua persamaan diferensial biasa yang memenuhi syarat-syarat batas.)

Pada langkah ini, akan ditentukan solusi F dan G untuk (18) dan (19) sehingga $u = F\,G$ memenuhi syarat batas (15), dengan kata lain

$$u\,(0,t) = F(0)G(t) = 0\,,\ u\,(L,t) = F(L)G(t) = 0 \text{ untuk semua } t.$$

Jika $G \equiv 0$, maka $u \equiv 0$, bukan hal yang menarik. Jadi, haruslah $G \not\equiv 0$, sehingga

$$F(0) = 0 \text{ dan } F(L) = 0\,. \qquad \text{.........(20)}$$

Untuk $k = 0$, solusi umum bagi (18) adalah $F = ax + b$, sehingga dari (20) diperoleh $a = b = 0$. Dengan demikian $F \equiv 0$, sehingga $u \equiv 0$, juga bukan hal yang menarik.

Untuk $k = \mu^2$, solusi umum bagi (18) adalah $F = A_1 e^{\mu x} + A_2\, e^{-\mu x}$, dan dari (20) diperoleh $F \equiv 0$, seperti sebelumnya.

Kemungkinan nilai k yang terakhir adalah k negatif, misalkan $k = -p^2$. Persamaan (18) menjadi $F'' + p^2 F = 0$ dengan solusi umum yaitu

$$F(x) = A_1 \cos px + A_2 \sin px . \qquad ....(21)$$

Dari persamaan (21) dan (20), diperoleh

$$F(0) = A_1 = 0 \text{ sehingga } F(L) = A_2 \sin pL = 0 .$$

Nilai A_2 haruslah tidak sama dengan nol $(A_2 \neq 0)$, sebab jika tidak demikian $F \equiv 0$. Ini berarti $\sin pL = 0$ sehingga $p = \frac{n\pi}{L}$ (n bilangan bulat).

Dengan mengambil $A_2 = 1$, diperoleh tak hingga banyaknya solusi $F(x) = F_n(x)$ yang memenuhi syarat batas (15)

$$F_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{L}, \; n = 1, 2, 3, \ldots .$$

Untuk nilai-nilai $p = \frac{n\pi}{L}$, persamaan diferensial (19) mempunyai bentuk

$$\dot{G} + \lambda_n{}^2 G = 0 \text{ dengan } \lambda_n = \frac{cn\pi}{L}.$$

Solusi umumnya adalah

$$G_n(t) = B_n e^{-\lambda_n{}^2 t}, \; n = 1, 2, 3, \ldots$$

dengan B_n adalah konstanta. Jadi, fungsi-fungsi

$$u_n(x,t) = F_n(x) G_n(t) = B_n \sin \frac{n\pi x}{L} e^{-\lambda_n{}^2 t}, \; n = 1, 2, 3, \ldots$$

merupakan solusi bagi persamaan panas (14) yang memenuhi syarat batas (15).

Langkah ketiga (Menentukan solusi bagi kedua persamaan diferensial biasa yang memenuhi syarat-syarat awal.)

Satu solusi $u_n(x,t)$ pada umumnya tidak memenuhi syarat awal (16). Persamaan (14) adalah persamaan diferensial linear dan homogen, maka menurut prinsip superposisi jumlah terhingga banyaknya solusi $u_n(x,t)$ juga merupakan solusi bagi (14). Untuk memperoleh solusi yang memenuhi syarat awal (16), perhatikan deret

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\frac{n\pi x}{L}e^{-\lambda_n^2 t}\text{, dengan } \lambda_n=\frac{cn\pi}{L}. \qquad ....(22)$$

Dari (22) dan syarat awal (16), diperoleh

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\frac{n\pi x}{L}=f(x).$$

Agar (22) memenuhi syarat awal (16), koefisien B_n harus dipilih sedemikian rupa sehingga $u_n(x,0)$ merupakan penguraian setengah kisaran sinus bagi $f(x)$, dengan kata lain

$$B_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx\text{, } n=1,2,3,\ldots. \qquad ....(23)$$

Deret (22) dengan koefisien (23) merupakan solusi bagi masalah fisik tersebut, dengan asumsi bahwa $f(x)$ kontinu sepotong-sepotong dalam interval $0\le x\le L$.

Contoh 3.2: Tentukan suhu $u(x,t)$ di dalam sebatang kawat perak yang telah diisolasi yang panjangnya 10 cm, suhu awalnya adalah $x(10-x)^{\circ}\text{C}$, dan ujung-ujungnya dipertahankan pada suhu 0°C. Data fisik untuk tembaga: kerapatan $1{,}06\ \text{gram/cm}^3$, panas jenis $0{,}056\ \text{kal/gram}^{\circ}\text{C}$, konduktivitas panas $1{,}04\ \text{kal/cm det}\ ^{\circ}\text{C}$.

Penyelesaian:

Syarat awal menghasilkan

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\frac{n\pi x}{10}=x(10-x),$$

yang merupakan penguraian setengah kisaran sinus bagi $f(x)$, dengan nilai B_n yaitu:

$$B_n=\frac{2}{10}\int_0^{10}x(10-x)\sin\frac{n\pi x}{10}dx$$

$$=\frac{2}{10}\left\{\left[\frac{-10x(10-x)}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{10}\right]_0^{10}-\left(-\frac{10}{n\pi}\right)\int_0^{10}(10-2x)\cos\frac{n\pi x}{10}dx\right\}$$

$$=\frac{-2}{n\pi}\left\{\left[x(10-x)\cos\frac{n\pi x}{10}\right]_0^{10}-\int_0^{10}(10-2x)\cos\frac{n\pi x}{10}dx\right\}$$

$$=\frac{-2}{n\pi}\left\{\left[x(10-x)\cos\frac{n\pi x}{10}\right]_0^{10}-\left(\left[\frac{10(10-2x)}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{10}\right]_0^{10}+\frac{20}{n\pi}\int_0^{10}\sin\frac{n\pi x}{10}dx\right)\right\}$$

$$=\frac{-2}{n\pi}\left\{\left[x(10-x)\cos\frac{n\pi x}{10}-\frac{10(10-2x)}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{10}+\frac{200}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{10}\right]_0^{10}\right\}$$

$$=\frac{-2}{n\pi}\left\{\left(0-0+\frac{200}{n^2\pi^2}\cos n\pi\right)-\left(0-0+\frac{200}{n^2\pi^2}\right)\right\}$$

$$=\frac{-2}{n\pi}\left\{\frac{200}{n^2\pi^2}\cos n\pi-\frac{200}{n^2\pi^2}\right\}$$

karena $\cos n\pi=\begin{cases}-1\text{ untuk } n \text{ ganjil}\\ 1\text{ untuk } n\text{ genap}\end{cases}$

sehingga

$$B_n=\begin{cases}\dfrac{800}{n^3\pi^3}\text{ untuk } n\text{ ganjil}\\ 0\text{ untuk } n\text{ genap}\end{cases}.$$

Untuk menentukan solusi dari permasalahan tersebut dibutuhkan $\lambda_n{}^2 = c^2 n^2 \pi^2 / L^2$, dengan nilai c^2 yaitu

$$c^2 = \frac{K}{\sigma\rho} = \frac{1{,}04}{(0{,}056)(10{,}6)} = 1{,}752\, cm^2/\text{det}.$$

Jadi, suhu batang tersebut adalah

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi x}{L} e^{-\lambda_n{}^2 t}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{800}{n^3\pi^3} \sin\frac{n\pi x}{L} e^{-\frac{1{,}752 n^2\pi^2}{100}t}$$

$$= \frac{800}{\pi^3}\left(\sin\frac{\pi x}{10} e^{-\frac{1{,}752\pi^2}{100}t} + \frac{1}{3^3}\sin\frac{3\pi x}{10} e^{-\frac{15{,}768\pi^2}{100}t} + \ldots\right).$$

Karena adanya faktor eksponensial, maka semua suku deret tersebut akan mendekati nol jika *t* mendekati tak hingga.

Contoh 3.3: Tentukan suhu $u(x,t)$ dalam suatu kawat yang telah diisolasi, yang panjangnya L cm, dan kedua ujungnya dipertahankan pada suhu $0^{o}C$, jika diasumsikan suhu awalnya

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{jika } 0 < x < \dfrac{L}{2} \\ L - x & \text{jika } \dfrac{L}{2} < x < L \end{cases} \quad \text{dalam satuan } {}^{o}C.$$

Penyelesaian:

Syarat awal menghasilkan

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi x}{L} = f(x),$$

sehingga

$$B_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

$$= \frac{2}{L}\left(\int_0^{L/2} x\,\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx + \int_{L/2}^{L}(L-x)\,\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx\right)$$

$$= \frac{2}{L}\left\{\left(\left[\frac{-Lx}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{L}\right]_0^{L/2} + \frac{L}{n\pi}\int_0^{L/2}\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx\right) + \right.$$

$$\left.\left(\left[\frac{-(L-x)L}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{L}\right]_{L/2}^{L} - \frac{L}{n\pi}\int_{L/2}^{L}\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx\right)\right\}$$

$$= \frac{-2}{n\pi}\left\{\left[x\cos\frac{n\pi x}{L} - \frac{L}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{L}\right]_0^{L/2} + \left[(L-x)\cos\frac{n\pi x}{L} + \frac{L}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{L}\right]_{L/2}^{L}\right\}$$

$$= \frac{-2}{n\pi}\left\{\left(\frac{L}{2}\cos\frac{n\pi}{2} - \frac{L}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}\right) - \left(\frac{L}{2}\cos\frac{n\pi}{2} + \frac{L}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}\right)\right\}$$

$$= \frac{4L}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}.$$

Jika n genap, maka $B_n = 0$. Jika n ganjil, maka

$B_n = \dfrac{4L}{n^2\pi^2}$ untuk $n = 1, 5, 9, \ldots$ dan $B_n = -\dfrac{4L}{n^2\pi^2}$ untuk $n = 3, 7, 11, \ldots$.

Jadi, suhu batang tersebut adalah

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi x}{L}\, e^{-\lambda_n^2 t}$$

$$= \frac{4L}{\pi^2}\left(\sin\frac{\pi x}{L}e^{-(c\pi/L)^2 t} - \frac{1}{9}\sin\frac{3\pi x}{L}e^{-(3c\pi/L)^2 t} + \ldots\right).$$

C. Pemakaian pada Getaran Dawai

Salah satu permasalahan fisika yang menggunakan deret Fourier dalam menentukan solusinya adalah pada getaran dawai. Getaran dawai yang dimaksud di sini adalah getaran seutas dawai elastis yang diregangkan sampai panjang L dan kedua ujungnya diikat. Jika dawai itu ditarik dan diganggu dan kemudian dilepaskan pada $t = 0$ agar bergetar, maka untuk menentukan getaran dawai tersebut berarti menentukan defleksi atau penyimpangannya $(u(x,t))$ pada sembarang titik x dan pada waktu $t > 0$.

Getaran seutas dawai (misal dawai biola dan gitar), mengikuti persamaan gelombang berdimensi satu

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad \text{.........(24)}$$

dengan $u(x,t)$ adalah defleksi (penyimpangan) dawai tersebut. Untuk mengetahui bagaimana dawai tersebut bergerak, harus ditentukan solusi $u(x,t)$ bagi (24) yang harus memenuhi syarat yang terdapat pada masalah fisik tersebut.

Karena dawai tersebut diikat kedua ujungnya ($x = 0$ dan $L = 0$), maka **syarat batasnya** adalah

$$u\,(0,t) = 0,\; u\,(L,t) = 0 \text{ untuk semua } t. \qquad \text{.........(25)}$$

Gerak dawai akan tergantung pada defleksi awalnya (defleksi pada saat $t = 0$) dan tergantung pada kecepatan awalnya (kecepatan pada saat $t = 0$). Jika $f(x)$ (diketahui) adalah defleksi awalnya, $g(x)$ adalah kecepatan awalnya, dan diasumsikan bahwa kecepatan awalnya adalah nol, maka terdapat dua **syarat awal** yaitu

$$u(x,0) = f(x), \text{ dan} \qquad ....(26)$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = g(x) \equiv 0. \qquad ....(27)$$

Solusi $u(x,t)$ bagi (24) yang memenuhi syarat (25) dan (26) dapat diperoleh melalui langkah-langkah seperti yang dilakukan pada masalah konduksi panas. Langkah-langkah tersebut yaitu sebagai berikut:

Langkah pertama (Membentuk dua persamaan diferensial biasa melalui metode hasil kali dua fungsi.)

Dengan menerapkan metode hasil kali dua fungsi, akan dihasilkan solusi untuk persamaan gelombang (24) yang berbentuk

$$u(x,t) = F(x)G(t), \qquad ....(28)$$

yang masing-masing tergantung pada salah satu variabel x atau t. Dengan mendefinisikan (28), diperoleh

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F\ddot{G} \text{ dan } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F''G.$$

Dengan menyisipkan hasil ini ke dalam persamaan (24), diperoleh

$$F\ddot{G} = c^2 F''G.$$

Untuk memisahkan variabel, bagi persamaan tersebut dengan c^2FG, diperoleh

$$\frac{\ddot{G}}{c^2 G} = \frac{F''}{F}.$$

Ruas kiri hanya mengandung fungsi yang tergantung hanya pada *t* sedangkan ruas kanan mengandung fungsi yang tergantung hanya pada *x*. Seperti pada langkah pertama dalam masalah konduksi panas, disimpulkan bahwa kedua ruas tersebut pasti sama dengan suatu konstanta (misalkan *k*). Jadi,

$$\frac{\ddot{G}}{c^2 G} = \frac{F''}{F} = k\,.$$

Ini menghasilkan dua persamaan diferensial biasa linear, yaitu

$$F'' - k\,F = 0 \qquad ....(29)$$

dan

$$\ddot{G} - c^2 k\,G = 0\,. \qquad ....(30)$$

Pada langkah ini, *k* masih merupakan sembarang bilangan real.

Langkah kedua (Menentukan solusi bagi kedua persamaan diferensial biasa yang memenuhi syarat-syarat batas.)

Pada langkah ini, akan ditentukan solusi F dan G untuk (29) dan (30) sehingga $u = F\,G$ memenuhi syarat batas (25), dengan kata lain

$$u\,(0,t) = F(0)G(t) = 0\,,\ u\,(L,t) = F(L)G(t) = 0 \text{ untuk semua } t.$$

Jika $G \equiv 0$, maka $u \equiv 0$, bukan hal yang menarik. Jadi, haruslah $G \not\equiv 0$, sehingga

$$F(0) = 0 \text{ dan } F(L) = 0\,. \qquad ....(31)$$

Untuk $k = 0$, solusi umum bagi (29) adalah $F = ax + b$, sehingga dari (31) diperoleh $a = b = 0$. Dengan demikian $F \equiv 0$, sehingga $u \equiv 0$, juga bukan hal yang menarik.

Untuk nilai k positif $(k = \mu^2)$, solusi umum bagi (29) adalah $F = A_1 e^{\mu x} + A_2 e^{-\mu x}$, dan dari (31) diperoleh $F \equiv 0$, seperti sebelumnya.

Kemungkinan nilai k yang terakhir adalah k negatif, misalkan $k = -p^2$. Persamaan (29) menjadi $F'' + p^2 F = 0$ dengan solusi umum yaitu

$$F(x) = A_1 \cos px + A_2 \sin px . \qquad ....(32)$$

Dari persamaan (32) dan (31), diperoleh

$$F(0) = A_1 = 0 \text{ sehingga } F(L) = A_2 \sin pL = 0 .$$

Nilai A_2 haruslah tidak sama dengan nol $(A_2 \neq 0)$, sebab jika tidak demikian $F \equiv 0$. Ini berarti $\sin pL = 0$ sehingga $p = \dfrac{n\pi}{L}$ (n bilangan bulat).

Dengan mengambil $A_2 = 1$, diperoleh tak hingga banyaknya solusi $F(x) = F_n(x)$ yang memenuhi syarat batas (25)

$$F_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{L}, \; n = 1, 2, 3, \ldots .$$

Untuk nilai-nilai $p = \dfrac{n\pi}{L}$, persamaan diferensial (30) mempunyai bentuk

$$\ddot{G} + \lambda_n{}^2 G = 0 \text{ dengan } \lambda_n = \frac{cn\pi}{L} .$$

Solusi umumnya adalah

$$G_n(t) = B_n \cos \lambda_n t + C_n \sin \lambda_n t \;, \; n = 1, 2, 3, \ldots$$

dengan B_n dan C_n adalah konstanta.

Jadi, fungsi-fungsi $u_n(x,t) = F_n(x) G_n(t)$, yaitu

$$u_n(x,t) = (B_n \cos \lambda_n t + C_n \sin \lambda_n t) \sin \frac{n\pi x}{L}, \; n = 1, 2, 3, \ldots$$

yang merupakan solusi bagi persamaan panas (24) yang memenuhi syarat batas (25).

Langkah ketiga (Menentukan solusi bagi kedua persamaan diferensial biasa yang memenuhi syarat-syarat awal.)

Satu solusi $u_n(x,t)$ pada umumnya tidak memenuhi syarat awal (26) dan (27). Persamaan gelombang (24) adalah persamaan diferensial linear dan homogen, maka menurut prinsip superposisi jumlah terhingga banyaknya solusi $u_n(x,t)$ juga merupakan solusi bagi (24). Untuk memperoleh solusi yang memenuhi syarat awal (26), perhatikan deret

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}(B_n\cos\lambda_n t+C_n\sin\lambda_n t)\sin\frac{n\pi x}{L},$$

dengan $\lambda_n=\dfrac{cn\pi}{L}$ ....(33)

Dari (33) dan syarat awal (26), diperoleh

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\frac{n\pi x}{L}=f(x).$$

Agar (33) memenuhi syarat awal (26), koefisien B_n harus dipilih sedemikian rupa sehingga $u_n(x,0)$ merupakan penguraian setengah kisaran sinus bagi $f(x)$, dengan kata lain

$$B_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx,\; n=1,2,3,\dots. \qquad ....(34)$$

Dengan mendiferensialkan (33) terhadap t dan dengan menggunakan syarat awal (27), diperoleh

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(-B_n\lambda_n \sin\lambda_n t + C_n\lambda_n \cos\lambda_n t\right)\sin\frac{n\pi x}{L}\right]_{t=0}$$

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n\lambda_n \sin\frac{n\pi x}{L}.$$

Agar (33) memenuhi syarat awal (27), koefisien C_n harus dipilih sedemikian rupa sehingga $\frac{\partial u}{\partial t}$ merupakan penguraian setengah kisaran sinus bagi $f(x)$, dengan kata lain

$$C_n\lambda_n = \frac{2}{L}\int_0^L g(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx,$$

karena $\lambda_n = \frac{cn\pi}{L}$, maka

$$C_n = \frac{2}{cn\pi}\int_0^L g(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots .$$

Karena kecepatan awalnya $g(x)$ sama dengan nol, maka akibatnya nilai koefisien C_n sama dengan nol, sehingga persamaan (33) menjadi

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos\lambda_n t \sin\frac{n\pi x}{L}, \quad \lambda_n = \frac{cn\pi}{L} \qquad \text{..........(35)}$$

Dengan menggunakan rumus $\cos\left(\frac{cn\pi}{L}t\right)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = \frac{1}{2}\left[\sin\left\{\frac{n\pi}{L}(x-ct)\right\} + \sin\left\{\frac{n\pi}{L}(x+ct)\right\}\right]$, persamaan (35) dapat dituliskan dalam bentuk sebagai berikut:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left\{\frac{n\pi}{L}(x-ct)\right\} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left\{\frac{n\pi}{L}(x+ct)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{f^{*}(x-ct)+f^{*}(x+ct)\right\}, \qquad \text{..........(36)}$$

dengan nilai B_n ditentukan dari persamaan (34) dan f^* adalah penguraian setengah kisaran sinus untuk fungsi f dengan periode $2L$.

Deret di atas merupakan solusi bagi masalah getaran dawai, dengan asumsi bahwa $f(x)$ kontinu sepotong-sepotong dalam interval $0 \le x \le L$.

Contoh 3.4: Tentukan defleksi dawai yang bergetar $u(x,t)$ dengan panjang dawai 1 satuan panjang dan kedua ujungnya diikat jika defleksi awalnya berbentuk gelombang segitiga

$$f(x)=\begin{cases} x & \text{jika } 0<x<\dfrac{L}{2} \\ L-x & \text{jika } \dfrac{L}{2}<x<L \end{cases}$$

dan kecepatan awalnya nol.

Penyelesaian:

Syarat awal menghasilkan

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin n\pi x = f(x),$$

yang merupakan penguraian setengah kisaran sinus bagi $f(x)$, dengan nilai B_n yaitu:

$$B_n = 2\int_0^1 f(x)\sin n\pi x dx$$

$$=2\left\{\int_0^{1/2} x\sin(n\pi x)dx+\int_{1/2}^{1}(1-x)\sin(n\pi x)dx\right\}$$

Melalui pengintegralan bagian demi bagian

$$\int_0^{1/2} x\sin(n\pi x)\,dx = \left[x\frac{-1}{n\pi}\cos(n\pi x)\right]_0^{1/2} + \frac{1}{n\pi}\int_0^{1/2}\cos(n\pi x)dx$$

$$= \left[\frac{-x}{n\pi}\cos(n\pi x) + \frac{1}{n^2\pi^2}\sin(n\pi x)\right]_0^{1/2}$$

$$= \left\{\frac{-1}{2n\pi}\cos\frac{n\pi}{2} + \frac{1}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}\right\} - \{0\}$$

$$= \frac{-1}{2n\pi}\cos\frac{n\pi}{2} + \frac{1}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}$$

$$\int_{1/2}^{1}(1-x)\sin(n\pi x)dx = \left[(1-x)\cdot\frac{-1}{n\pi}\cos(n\pi x)\right]_{1/2}^{1} - \frac{1}{n\pi}\int_{1/2}^{1}\cos(n\pi x)dx$$

$$= \left[\frac{-(1-x)}{n\pi}\cos(n\pi x) - \frac{1}{n^2\pi^2}\sin(n\pi x)\right]_{1/2}^{1}$$

$$= \{0\} - \left\{\frac{-1}{2n\pi}\cos\frac{n\pi}{2} - \frac{1}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}\right\}$$

$$= \frac{1}{2n\pi}\cos\frac{n\pi}{2} + \frac{1}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}$$

Dengan menggunakan kedua hasil tersebut, diperoleh

$$B_n = 2\left\{\left(\frac{-1}{2n\pi}\cos\frac{n\pi}{2} + \frac{1}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}\right) + \left(\frac{1}{2n\pi}\cos\frac{n\pi}{2} + \frac{1}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}\right)\right\}$$

$$= 2\left(\frac{2}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}\right) = \frac{4}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}$$

Dengan demikian,

$B_1 = \frac{4}{1^2\pi^2}$, $B_3 = \frac{-4}{3^2\pi^2}$, $B_5 = \frac{4}{5^2\pi^2}$, $B_7 = \frac{-4}{7^2\pi^2}$, … , dan $B_n = 0$ jika n genap.

Karena kecepatan awalnya $g(x) \equiv 0$, maka akibatnya nilai koefisien C_n sama dengan nol, sehingga defleksi dawai $u(x,t)$ menjadi

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos \lambda_n t \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad \lambda_n = \frac{cn\pi}{L}.$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2\pi^2} \sin \frac{n\pi}{2} \cos(cn\pi) \sin(n\pi x)$$

$$= \frac{4L}{\pi^2}\left(\frac{1}{1^2}\sin(\pi x)\cos(c\pi) - \frac{1}{3^2}\sin(3\pi x)\cos(3c\pi) + - \ldots\right)$$

Untuk menggambar grafik $u(x,t)$, digunakan persamaan (13) yaitu

$u(x,t) = \frac{1}{2}\{f^*(x-ct) + f^*(x+ct)\}$, dengan $f^*(x-ct)$ dan $f^*(x+ct)$ masing-masing merupakan substitusi berturut-turut $x-ct$ dan $x+ct$ bagi peubah x di dalam penguraian setengah kisaran sinus untuk $f(x)$.

Penguraian setengah kisaran sinus untuk $f(x)$ adalah

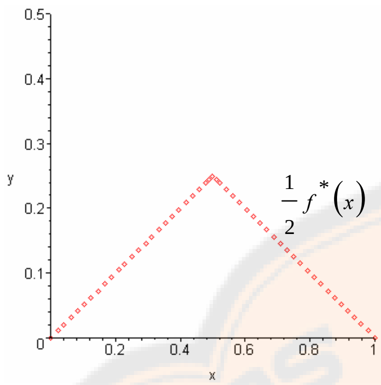
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi x}{L}$$

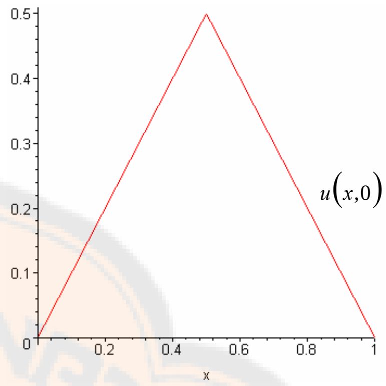
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2\pi^2} \sin \frac{n\pi}{2} \sin(n\pi x)$$

$$= \frac{4L}{\pi^2}\left(\frac{1}{1^2}\sin(\pi x) - \frac{1}{3^2}\sin(3\pi x) + - \ldots\right).$$

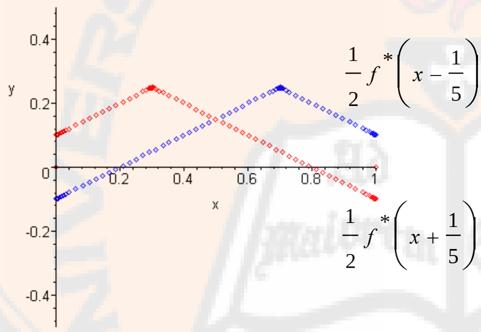
Gambar di bawah ini merupakan grafik solusi $u(x,t)$ untuk berbagai nilai t.

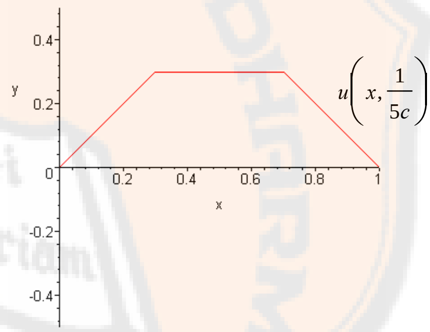
Untuk $t = 0$, $u(x,0) = f(x)$



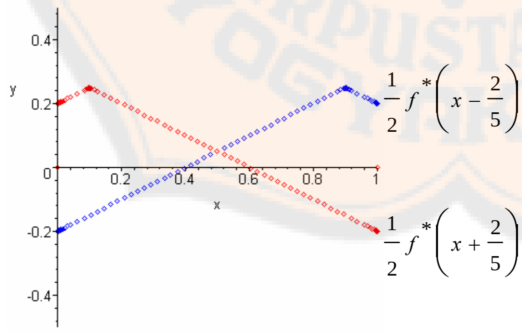


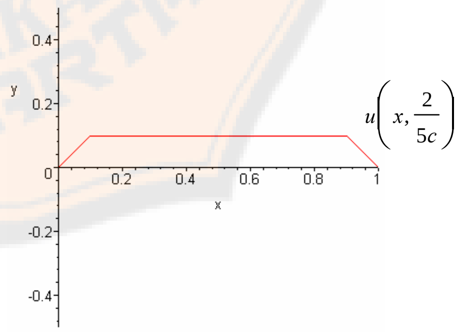
$t = \frac{1}{5c}$



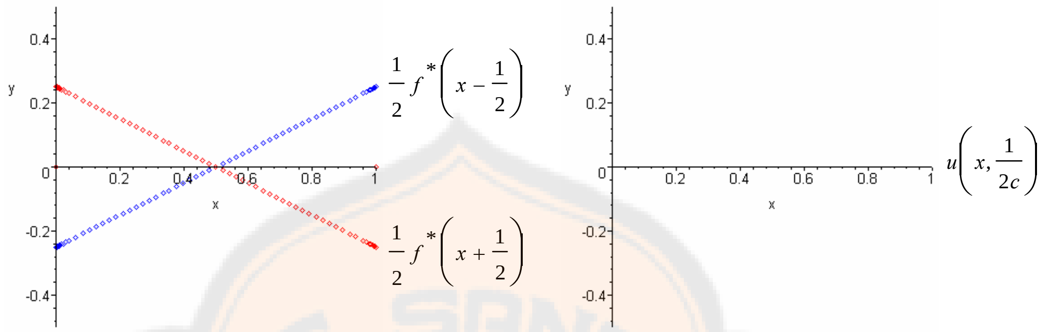


$t = \frac{2}{5c}$

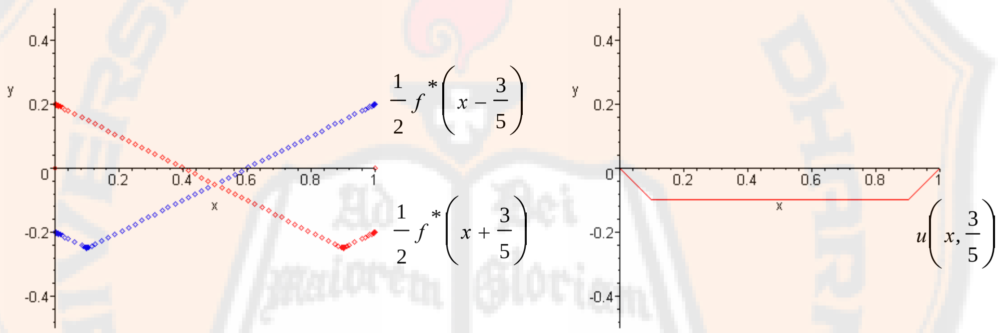




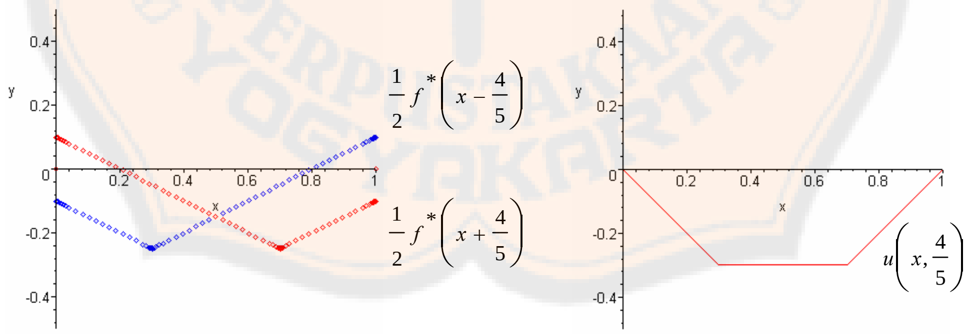
Untuk $t = \frac{1}{2c}$



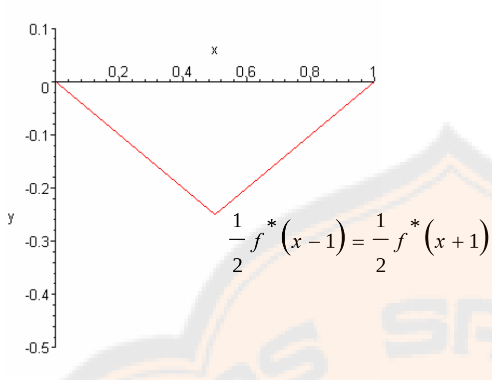
$t = \frac{3}{5c}$

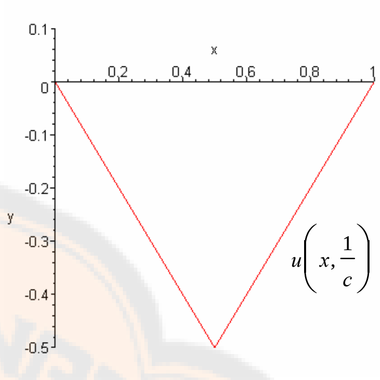


$t = \frac{4}{5c}$



$t = \dfrac{1}{c}$





Gambar-gambar pada bagian kanan merupakan solusi $u(x,t)$ untuk berbagai nilai t yang diperoleh melalui superposisi gelombang yang bergerak ke kanan dengan gelombang yang bergerak kiri (gambar pada bagian kiri).

BAB IV

KESIMPULAN

Dari permasalahan yang sudah dibahas dalam skripsi ini, kita dapat mengambil beberapa kesimpulan sebagai berikut :

1. Deret trigonometri adalah suatu deret yang berbentuk $a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ dengan $a_0, a_1, a_2, \ldots, b_1, b_2, \ldots$ adalah bilangan-bilangan real. Deret Fourier fungsi $f(x)$ yang berperiode 2π dan kontinu sepotong-sepotong dalam interval $(-\pi, \pi)$ adalah suatu deret trigonometri yang koefisien-koefisiennya adalah koefisien Fourier untuk $f(x)$ yang diberikan oleh rumus Euler sebagai berikut

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx,$$

dengan n adalah bilangan bulat positif.

Jika $f(x)$ adalah fungsi yang tidak berperiode 2π melainkan berperiode $2L$ dan kontinu sepotong-sepotong dalam interval $(-L, L)$, maka deret Fourier untuk fungsi $f(x)$ tersebut didefinisikan sebagai berikut

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{L} x + b_n \sin \frac{n\pi}{L} x \right)$$

dengan harga-harga koefisien Fourier a_0, a_n dan b_n ditentukan oleh rumus-rumus Euler sebagai berikut:

$$a_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(x) dx,$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx,$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx,$$

dengan n adalah bilangan bulat positif.

Jika fungsi $f(x)$ adalah fungsi genap atau fungsi ganjil, maka fungsi $f(x)$ dapat dinyatakan menjadi deret kosinus Fourier atau deret sinus Fourier. Fungsi $f(x)$ yang didefinisikan dalam interval $0 \le x \le L$ dapat dinyatakan menjadi deret kosinus Fourier atau deret sinus Fourier yang merupakan perluasan genap atau perluasan ganjil $f(x)$ ke kisaran penuh $-L \le x \le L$, dan masing-masing deret tersebut dinamakan penguraian setengah-kisaran fungsi $f(x)$. Menurut teorema kekonvergenan deret Fourier, deret Fourier dari fungsi $f(x)$ yang mempunyai periode 2π, kontinu sepotong-sepotong dalam interval $-\pi \le x \le \pi$, dan mempunyai turunan kiri dan turunan kanan di setiap titik pada interval tersebut akan konvergen ke $f(x)$ jika x titik kontinuitas, dan konvergen ke $\frac{f(x_+) + f(x_-)}{2}$ jika x titik diskontinuitas.

2. Deret Fourier mempunyai peranan penting di dalam persamaan diferensial biasa maupun persamaan diferensial parsial. Contoh pemakaian deret Fourier pada persamaan diferensial biasa adalah pada masalah osilasi paksa, dan contoh pemakaian deret Fourier pada persamaan diferensial parsial adalah pada masalah konduksi panas dan getaran dawai.

Persamaan diferensial pada osilasi paksa berbentuk $m\,y'' + c\,y' + k\,y = F(t)$, dimana $F(t)$ marupakan gaya luar yang berupa fungsi kontinu sepotong-sepotong dalam suatu interval. Persamaan tersebut merupakan persamaan diferensial linear non homogen orde dua dengan koefisien konstan. Terdapat 5 langkah untuk mencari penyelesaian pada persamaan diferensial biasa untuk osilasi paksa. Langkah-langkah tersebut yaitu:

i. merepresentasikan $F(t)$ dengan sebuah deret Fourier,

ii. membentuk persamaan diferensial,

iii. menentukan penyelesaian persamaan diferensial,

iv. menentukan solusi keadaan stabil, dan

v. menentukan amplitudo solusi keadaan stabil.

Beberapa persamaan diferensial parsial yang penting dalam fisika yang dibahas di dalam skripsi ini adalah:

a. $\dfrac{\partial u}{\partial t} = c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ (persamaan panas berdimensi satu),

b. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ (persamaan gelombang berdimensi satu).

Terdapat 3 langkah untuk mencari penyelesaian masalah nilai batas pada persamaan diferensial parsial untuk konduksi panas dan getaran dawai. Langkah-langkah tersebut yaitu:

i. Membentuk dua persamaan diferensial biasa melalui metode hasil kali dua fungsi.

Pada langkah ini diasumsikan solusinya berbentuk hasil kali dua fungsi, yang masing-masing hanya tergantung pada salah satu peubah saja. Jadi, persamaan diferensial parsial tersebut diuraikan menjadi $u(x,t) = F(x) \cdot G(x)$.

ii. Menentukan solusi bagi kedua persamaan diferensial biasa yang memenuhi syarat-syarat batas.

Substitusi persamaan $u(x,t) = F(x) \cdot G(x)$ ke dalam persamaan diferensial parsial menghasilkan persamaan diferensial biasa untuk *F* dan *G*, dan akhirnya diperoleh takhingga banyaknya solusi $F = F_n$ dan $G = G_n$, sedemikin rupa sehingga fungsi $u_n(x,t) = F_n(x) \cdot G_n(x)$ merupakan solusi untuk persamaan diferensial parsial yang memenuhi syarat batas.

iii. Menentukan solusi bagi kedua persamaan diferensial biasa yang memenuhi syarat-syarat awal.

Agar solusi tersebut juga memenuhi syarat awal, harus dibentuk deret takhingga bagi u_n yang koefisien-koefisiennya merupakan koefisien Fourier untuk fungsi $f(x)$ yang merepresentasikan syarat awal.

DAFTAR PUSTAKA

Alonso, Marcelo & Finn, Edward J. (1994). *Dasar-dasar Fisika Universitas* (Edisi II jilid 1). Jakarta: Erlangga.

Folland, Gerald B. (1992). *Fourier Analysis and Its Applications*. California: A Division of Wadsworth, Inc.

Fulks, Watson. (1961). *Advanced Calculus An Introduction to Analysis*. United States of America : John Wiley & Sons, Inc.

Haberman, Richard. (2004). *Applied Partial Differential Equations with Fourier Series and Boundary Value Problems* (4thed). United States of America: Pearson Education, Inc.

Kaplan, Wilfred. (2003). *Advanced Calculus* (5thed). United States of America: Pearson Education, Inc.

Kreyszig, Erwin. (1993). *Matematika Teknik Lanjutan*. Jakarta: PT Gramedia Pustaka Utama.

Potter, Merle C. & Goldberg, J. L. & Aboufadel, Edward F. (2005). *Advanced Engineering Mathematics* (3thed). New York: Oxford University Press, Inc.

Purcell, Edwin J. & Varberg, Dale. (1987). *Kalkulus dan Geometri Analitis*. Jakarta: Erlangga.

Spiegel, Murray R. (1986). *Analisis Fourier dengan Penerapan pada Soal-Soal Nilai Batas*. Jakarta: Erlangga.

Tutoyo, A. (1991). *Diktat Persamaan Diferensial disadur dari buku "Ordinary Differential Equations with Applications" karangan Rice & Strange*. Yogyakarta : IKIP Sadhar.

Vierck, Robert K. (1995). *Analisis Getaran*. Bandung : PT Eresco.