ANALISIS RANGKAIAN LISTRIK DENGAN GRAF DAN MATRIKS

Skripsi

Diajukan untuk Memenuhi Salah Satu Syarat
Memperoleh Gelar Sarjana Pendidikan
Program Studi Pendidikan Matematika

Oleh:

Kandida Eka Selfiana

NIM : 061414039

PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA
JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
UNIVERSITAS SANATA DHARMA
YOGYAKARTA
2011

SKRIPSI

ANALISIS RANGKAIAN LISTRIK DENGAN GRAF DAN MATRIKS

Oleh:

Kandida Eka Selfiana

NIM : 061414039

Telah disetujui oleh:

Pembimbing

Dominikus Arif Budi Prasetyo, S. Si., M. Si. Tanggal 3 Maret 2011

SKRIPSI

ANALISIS RANGKAIAN LISTRIK DENGAN GRAF DAN MATRIKS

Dipersiapkan dan ditulis oleh:

Kandida Eka Selfiana
NIM : 061414039

Telah dipertahankan di depan Panitia Penguji pada tanggal 18 Maret 2011 dan dinyatakan memenuhi syarat

Susunan Panitia Penguji

	Nama Lengkap	Tanda Tangan
Ketua	: Drs. Severinus Domi, M.Si	....
Sekretaris	: Prof. Dr. St. Suwarsono	....
Anggota	: Dominikus Arif Budi Prasetyo, S.Si., M.Si.	....
Anggota	: Prof. Dr. St. Suwarsono	....
Anggota	: Drs. Th. Sugiarto, M.T.	....

Yogyakarta, 18 Maret 2011
Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan
Universitas Sanata Dharma
Dekan,

Drs. T. Sarkim, M.Ed., Ph.D.

"Apa pun juga yang kamu perbuat, perbuatlah dengan segenap hatimu seperti untuk Tuhan dan bukan untuk manusia. "

(Kolose 3: 23)

"Ia membuat segala sesuatu indah pada waktunya, bahkan Ia memberikan kekekalan dalam hati mereka."

(Pengkotbah 3:11)

"Mintalah, maka akan diberikan kepadamu; carilah, maka kamu akan mendapat; ketoklah, maka pintu akan dibukakan bagimu."

(Lukas 11:9)

Kupersembahkan karya ini untuk:

- *Yesus Kristus, Sahabat dan Juru Selamatku*
- *Bunda Maria penolongku*
- *Ayah dan Ibuku*
- *Adikku Tuta dan Alfon (Alm)*

PERNYATAAN KEASLIAN KARYA

Saya menyatakan dengan sesungguhnya bahwa skripsi yang saya tulis ini tidak memuat karya atau bagian karya orang lain, kecuali yang telah disebutkan dalam kutipan dan daftar pustaka, sebagaimana layaknya karya ilmiah.

Yogyakarta, 18 Maret 2011

Penulis

Kandida Eka Selfiana

ABSTRAK

Kandida Eka Selfiana. 2011. *Analisis Rangkaian Listrik dengan Graf dan Matriks*. Skripsi. Program Studi Pendidikan Matematika, Jurusan Pendidikan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Universitas Sanata Dharma, Yogyakarta.

Penulisan skripsi ini bertujuan untuk merepresentasikan analisis rangkaian listrik, khususnya analisis *loop* serta mencari penyelesaian suatu rangkaian listrik dengan menggunakan graf dan matriks.

Metode yang digunakan dalam penulisan skripsi ini adalah metode studi pustaka. Dengan demikian, kita belum menemukan hal-hal baru dalam skripsi ini.

Suatu rangkaian listrik direpresentasikan oleh graf terhubung berorientasi *G(V,E)*. Titik cabang dan elemen pada rangkaian listrik direpresentasikan oleh simpul $v \in V(G)$ dan ruas berorientasi $e \in E(G)$. Untuk menganalisis suatu rangkaian listrik, kita perlu membentuk himpunan potongan fundamental dan himpunan *cycle* fundamental dari *G(V,E)*. Insidensi antara himpunan potongan fundamental dan himpunan *cycle* fundamental dengan ruas-ruas *G(V,E)* membentuk matriks insidensi potongan-ruas C_0 dan matriks insidensi *cycle*-ruas B_0. Jika Hukum Arus Kirchhoff diberlakukan pada himpunan potongan fundamental tersebut, maka akan terbentuk persamaan:

$$C_0\mathbf{i} = \mathbf{0}.$$

Kemudian, jika Hukum Tegangan Kirchhoff diberlakukan pada himpunan *cycle* fundamental maka akan terbentuk persamaan:

$$B_0\mathbf{v} = \mathbf{0}.$$

Arus pada tiap elemen diperoleh dengan menentukan arus pada dawai terlebih dahulu. Arus pada dawai diperoleh dari persamaan *loop* :

$$B_R R B_R^T \mathbf{i}_D = -B_V \mathbf{v}_S$$

dimana B_R adalah matriks yang dibentuk dari kolom-kolom matriks B_0 yang berpadanan dengan resistor, R adalah matriks diagonal dari nilai tiap resistor, B_V adalah matriks yang dibentuk dari kolom-kolom matriks B_0 yang berpadanan dengan sumber tegangan, $\mathbf{i}_D$ adalah vektor arus pada dawai dan $\mathbf{v}_S$ merupakan vektor dari nilai tiap sumber tegangan. Jika arus pada dawai telah diketahui, maka kita dapat menentukan arus pada cabang-cabang pohon rentangan. Tegangan pada tiap resistor dapat ditentukan dengan menggunakan Hukum Ohm:

$$\mathrm{v} = \mathrm{Ri}$$

dimana v adalah tegangan pada resistor, R adalah hambatan yang terdapat pada resistor dan i adalah arus yang mengalir melalui resistor tersebut.

Kata kunci : Analisis Rangkaian Listrik, Graf, Matriks

ABSTRACT

Kandida Eka Selfiana. 2011. *Electrical Networks Analysis with Graph and Matrix*. Research. Mathematics Education Program, Mathematics and Natural Science Departement, Teaching and Education Faculty of Sanata Dharma University, Yogyakarta.

The aim of this research is to represent the electrical networks analysis, especially *loop* analysis, and solve the problems of electrical networks using graph and matrix.

The method that used in this research is study literature method. Thus, we have not found new things in this research yet.

Electrical networks are represented by connected oriented graph *G(V,E)*. Nodes and elements of electrical networks are represented by vertexs $v \in V(G)$ and oriented edges $e \in E(G)$. To analyze an electrical networks, we need to form fundamental set of cuts and fundamental set of *cycles* from *G(V,E)*. The incidence between fundamental set of cuts and fundamental set of *cycles* with the edges of *G(V,E)* form cut-edge incidence matrix C_0 and *cycle*-egde incidence matrix B_0. If Kirchhoff's Currents Law applied to that fundamental set of cuts, that will form equations:

$$C_0\mathbf{i} = \mathbf{0}\,.$$

Then, if Kirchhoff's Voltages Law applied to fundamental set of *cycles*, that will form equations:

$$B_0\mathbf{v} = \mathbf{0}\,.$$

The currents of each element can obtained by determine the currents of the chords first. The current of the chords are obtained by the *loop* equations:

$$B_R R B_R^T \mathbf{i}_D = -B_V \mathbf{v}_S$$

where B_R is the matrix that formed by colomns of matrix B_0 that correspond to the resistors, R is the diagonal matrix value of the resistors, B_V is the matrix that formed by colomns of matrix B_0 that correspond to the voltage sources, $\mathbf{i}_D$ is current vector of the chords and $\mathbf{v}_S$ is vector value of each voltage sources. If the currents of the chords have been known, so we can obtain the branches currents of the spanning tree. The voltages of each resistors can determine by using Ohm's Law:

$$v = Ri$$

where v is the voltage of the resistor, R represent the resistance of the resistor and i represent the current that flowing through the resistor.

Key words: Electrical Networks Analysis, Graph, Matrix

LEMBAR PERNYATAAN PERSETUJUAN
PUBLIKASI KARYA ILMIAH UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS

Yang bertanda tangan di bawah ini, saya mahasiswa Universitas Sanata Dharma

Nama : Kandida Eka Selfiana

NIM : 061414039

Demi pengembangan ilmu pengetahuan, saya memberikan kepada Perpustakaan Universitas Sanata Dharma karya ilmiah saya yang berjudul :

Analisis Rangkaian Listrik dalam Graf dan Matriks

Dengan demikian saya memberikan kepada Perpustakaan Universitas Sanata Dharma hak untuk menyimpan, mengalihkan dalam bentuk media lain, mengelolanya dalam bentuk pangkalan data, mendistribusikan secara terbatas, dan mempublikasikannya di internet atau media lain untuk kepentingan akademis tanpa perlu meminta izin dari saya maupun memberikan royalti kepada saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya

Dibuat di Yogyakarta

Pada Tanggal: 18 Maret 2011

Yang menyatakan

(Kandida Eka Selfiana)

KATA PENGANTAR

Puji dan syukur kehadirat Tuhan Yang Maha Pengasih dan Penyayang atas segala kasih, rahmat dan berkat-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini dengan judul ”Analisis Rangkaian Listrik dengan Graf dan Matriks”.

Skripsi ini disusun untuk memenuhi salah satu persyaratan dalam memperoleh gelar kesarjanaan di Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Sanata Dharma. Pada kesempatan kali ini penulis menyampaikan terima kasih kepada:

1. Tuhan Yesus Kristus yang selalu berjalan bersamaku, menggenggam tanganku dan menuntun jalanku, serta Bunda Maria yang tak pernah lelah mendoakanku serta menemaniku,
2. Bapak Dominikus Arif Budi Prasetyo S.Si, M.Si. selaku dosen pembimbing yang telah memberikan arahan selama penulisan skripsi ini,
3. Bapak Hongki Julie S.Pd., M.Si. yang telah memberikan saran dan arahan pada awal penulisan skripsi ini,
4. Bapak Prof. Dr. St. Suwarsono dan Bapak Drs. Th. Sugiarto, M.T. selaku dosen penguji yang telah memberikan saran guna menyempurnakan skripsi ini,
5. Segenap Dosen Jurusan Pendidikan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Universitas Sanata Dharma,
6. Bapak Nardjo, Bapak Sugeng dan Ibu Heni selaku staf administrasi JPMIPA Universitas Sanata Dharma yang selalu melayani dengan senyum,
7. Segenap staf Perpustakaan Sanata Dharma atas pelayanannya yang penuh kasih kepada penulis selama mencari bahan yang diperlukan dalam penulisan,
8. Kedua orang tuaku, Yohanes Suyoto dan Desideria Wahyu Pratiwi, juga adikku, Kristituta Dwi Ambarsari dan Alfonsus Trias Jati Pamungkas

(Alm), yang selalu memberikan cinta, kasih sayang, kepercayaan juga dorongan tanpa syarat,

9. Caecilia Noviantari, sahabatku yang selalu memberikan semangat dan dorongan dalam menyusun skripsi ini,
10. Semua teman-teman Pendidikan Matematika Angkatan 2006, khususnya sahabat-sahabatku Grani, Donna, Eva, Devi, Kunthi, Uly dan Mega. Terima kasih telah berbagi hari-hari yang menyenangkan, tawa, tangis, senyum juga semangat untuk terus maju,
11. Semua pihak yang tidak dapat disebutkan satu persatu, terima kasih atas bantuan dan saran yang berguna selama penulisan skripsi ini.

Penulis mengharapkan adanya kritik dan saran guna kemajuan penelitian, khususnya dalam bidang matematika. Akhir kata, penulis berharap kiranya skripsi ini dapat bermanfaat bagi pembaca.

Yogyakarta, Maret 2011

Penulis

Kandida Eka Selfiana

DAFTAR ISI

Halaman

DAFTAR GAMBAR

Halaman

BAB I

PENDAHULUAN

A. Latar Belakang Masalah

Graf terdiri dari himpunan titik sebagai representasi dari himpunan objek diskret dan himpunan garis sebagai representasi dari hubungan antar objek-objek diskret tersebut. Oleh karena itu, graf digunakan sebagai representasi objek-objek diskret dalam usaha untuk menemukan penyelesaian dari masalah yang berkaitan dengan jaringan, struktur dan hubungan antar objek diskret tersebut. Sebagai contoh, masalah pada jaringan komunikasi, bidang linguistik, penggambaran desain pada bidang arsitektur (Wilson & Beineke, 1979) serta masalah representasi reaksi kimia (Harray, 1967) dapat diselesaikan dengan menggunakan graf.

Pada suatu rangkaian listrik, jika besarnya hambatan dari masing-masing resistor dan besarnya daya dari sumber tegangan diketahui, maka besarnya arus dan tegangan pada masing-masing elemen dapat ditentukan dengan menggunakan Hukum Ohm dan hambatan ekuivalen dari resistor-resistor. Namun, pada rangkaian listrik dimana resistor tidak dirangkai secara seri dan paralel yang sederhana, maka besarnya arus dan tegangan tidak dapat dengan mudah dipecahkan hanya dengan hambatan ekuivalen (Sears & Zemansky, 1963).

Graf dapat digunakan sebagai alat bantu dalam memecahkan permasalahan tersebut. Dalam hal ini, penyajian rangkaian listrik dalam graf akan membantu dalam menganalisis rangkaian listrik tersebut. Selain itu, hubungan-hubungan yang terdapat pada graf dapat disajikan dalam bentuk matriks insidensi. Matriks-matriks insidensi inilah yang akan membantu kita untuk memperoleh penyelesaian dari permasalahan rangkaian listrik tersebut.

Dari beberapa uraian di atas, tampak bahwa graf dan penerapannya dalam analisis rangkaian listrik sangat penting untuk dipelajari. Selain itu, materi tentang graf serta penerapannya dalam analisis rangkaian listrik merupakan materi yang belum pernah dibahas dalam perkuliahan, oleh karenanya penulis tertarik untuk mengangkat judul analisis rangkaian listrik dengan graf dan matriks. Hasil penulisan ini diharapkan dapat memperkenalkan materi tentang graf sekaligus penerapannya dalam analisis rangkaian listrik. Selain itu, dengan adanya tulisan ini diharapkan dapat menarik minat untuk mempelajari graf dan mengembangkan serta menerapkannya di bidang lain.

B. Rumusan Masalah

Dari latar belakang permasalahan di atas, muncul beberapa permasalahan yang akan dibahas dalam skripsi ini, antara lain:

1. Bagaimana merepresentasikan analisis rangkaian listrik sebagai usaha untuk mencari penyelesaian dari permasalahan suatu rangkaian listrik dengan graf?
2. Bagaimana matriks sebagai representasi graf dapat membantu dalam mencari penyelesaian suatu rangkaian listrik?

C. Pembatasan Masalah

Masalah yang akan dibahas dalam penulisan ini hanya dibatasi pada analisis rangkaian, khususnya analisis *loop* pada rangkaian listrik sederhana yang terdiri dari resistor dan sumber tegangan dengan menggunakan graf dan matriks.

D. Batasan Istilah

Untuk menghindari kesalahan pengertian, maka berikut ini diberikan beberapa batasan pada istilah-istilah yang digunakan dalam pembahasan:

1. Rangkaian Listrik

   Rangkaian yang digunakan dalam pembahasan merupakan suatu rangkaian planar. Rangkaian planar adalah rangkaian yang tidak mengandung elemen-elemen yang melewati sebelah atas atau sebelah bawah elemen-elemen lain manapun (Chi Kong Tse, 2002 : 39).

2. *Loop*

   Pada rangkaian listrik, *loop* merupakan suatu jalur tertutup (Kartika Budi, 2009:15). Sedangkan pada graf, *loop* adalah ruas yang menghubungkan simpul yang sama (Suryadi, 1994: 17).

3. Sumber tegangan

   Sumber tegangan yang dimaksud dalam pembahasan merupakan sumber tegangan bebas. Sumber Tegangan Bebas (*Independent Voltage Source*) adalah sumber yang menghasilkan tegangan konstan, tidak dipengaruhi oleh kuat arus yang dihasilkan (Kartika Budi, 2009)

E. Tujuan Penulisan

Tujuan penulisan skripsi ini adalah:

1. Merepresentasikan analisis suatu rangkaian listrik dalam usaha untuk mencari penyelesaian dari permasalahan rangkaian listrik dengan graf.
2. Menemukan penyelesaian dari permasalahan suatu rangkaian listrik dengan menggunakan matriks sebagai representasi graf.

F. Manfaat Penulisan

Penulis berharap skripsi yang membahas tentang analisis rangkaian listrik dengan graf dan matriks ini dapat memberikan manfaat untuk berbagai pihak terutama:

1. Bagi Universitas Sanata Dharma

   Semoga skripsi ini dapat memperkaya referensi kepustakaan yang dimiliki oleh Universitas Sanata Dharma dan menjadi bahan bagi pihak-pihak yang memerlukan guna mengembangkan ilmu pengetahuan.

2. Bagi Penulis

   Penulis dapat mempelajari materi baru yakni graf, khususnya penerapan graf pada analisis rangkaian listrik, yang sebelumnya tidak dipelajari selama duduk di bangku kuliah sehingga pengetahuan, ilmu dan wawasan penulis pun menjadi bertambah.

G. Metode Penulisan

Dalam menyusun skripsi ini, penulis menggunakan metode studi pustaka yakni dengan mempelajari buku-buku yang membahas dengan graf khususnya penerapan graf pada rangkaian listrik. Adapun yang menjadi acuan pembahasan dalam penulisan skripsi ini adalah jurnal yang ditulis P. R. Bryant dengan judul *Graph Theory and Electrical Networks* dalam *Applications of Graph Theory* oleh Robin J. Wilson dan Lowell W. Beineke (1979) serta *Graph Theory Applied to Electrical Networks* dalam *Graph Theory and Theoritical Physics* oleh Frank Harray (1967).

Selain itu, terdapat pula buku-buku pendukung antara lain *Teori Graf Dasar* oleh Suryadi H.S (1994), *Graphs and Digraphs* (Ed. 3) oleh Gary Chartrand & Linda Lesniak (1996), *Applied and Algorithmic Graph Theory* oleh Gary Chartrand & Ortrud R. Oellermann (1993). Istilah-istilah pada rangkaian listrik diperoleh dari buku-buku sebagai berikut *Fisika untuk Universitas II Listrik Magnit* oleh Francis Weston Sears dan Mark W. Zemansky (1963), *Fisika* oleh Halliday dan Resnick (1984), *Rangkaian Listrik* oleh William H. Hayt, JR. dan Jack E. Kemmerly (1985), *Analisis Rangkaian Linear* oleh Chi Kong Tse (2002) serta *Diktat Kuliah Rangkaian Listrik* oleh Fr. Y. Kartika Budi (2009). Sedangkan materi-materi tentang matriks diperoleh dari buku *Aljabar Linear Elementer* oleh Howard Anton & Chris Rorres (2004), *Linear Algebra - An Interactive Approach* oleh S.K Jain and A. D. Gunawardena (2004)

H. Sistematika Penulisan

Skripsi ini memuat empat bab. Pada bab I penulis memaparkan tentang latar belakang penulisan skripsi, masalah yang akan dibahas, tujuan yang hendak dicapai serta manfaat yang diperoleh dari penulisan skripsi ini.

Bab II memaparkan tentang tinjuan pustaka yang nantinya akan digunakan untuk membahas analisis rangkaian listrik dengan graf dan matriks. Adapun yang dimuat dalam tinjauan pustaka tersebut antara lain konsep dasar dari graf sendiri yakni definisi graf, simpul, ruas, insidensi dan ajasensi, subgraf, perjalanan, lintasan, jalur, *cycle*, sirkuit, graf terhubung, potongan, pohon, pohon rentangan, cabang dan dawai pohon rentangan, *cycle* fundamental, potongan fundamental juga matriks-matriks insidensi dalam graf seperti matriks insidensi *cycle*-ruas dan matriks insidensi potongan-ruas; serta istilah-istilah dalam rangkaian listrik yakni elemen rangkaian beserta penggolongannya dan definisi rangkaian listrik, arus, tegangan, Hukum Ohm dan Hukum Kirchhoff; dan yang terakhir adalah konsep dasar tentang matriks yang meliputi definisi matriks, matriks nol, matriks diagonal, perkalian matriks dengan skalar, perkalian matriks dengan matriks dan transpos matriks. Selain itu, pada bab II juga dipaparkan tentang kerangka pikir yang menjadi benang merah penulisan skripsi ini.

Pada bab III, penulis memaparkan tentang pembahasan dari rumusan masalah yang diangkat dalam skripsi ini yakni representasi analisis rangkaian listrik dalam graf serta penggunaan mariks untuk mencari penyelesaian dari permasalahan suatu rangkaian listrik. Selain itu, penulis juga memberikan beberapa contoh dari analisis rangkaian listrik dengan graf dan matriks.

Kemudian, bab IV berisi kesimpulan yang diperoleh dari pembahasan guna menjawab masalah-masalah yang diangkat dalam skripsi ini. Pada bab ini penulis juga menyampaikan saran-saran untuk mengembangkan penelitian selanjutnya.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

A. Dasar-dasar Graf

Graf merupakan salah satu bagian yang penting dalam matematika. Banyak aspek-aspek dalam kehidupan sehari-hari yang dapat dimodelkan dengan mengunakan graf, sehingga dalam perkembangannya graf telah dapat diterapkan dalam berbagai cabang ilmu pengetahuan seperti ilmu sosial, ekonomi, biologi dan fisika. Dengan menggunakan graf kita dapat membentuk model matematika yang menggambarkan himpunan objek-objek diskret dan relasi anggota-anggota di setiap himpunan tersebut menurut aturan tertentu. Pada subbab ini, akan dibahas tentang dasar-dasar dari graf yang akan digunakan dan menunjang materi-materi pada bab-bab selanjutnya.

1. Graf

Pada beberapa permasalahan kita diharuskan untuk menggambarkan sekumpulan objek diskret dan hubungan antar objek diskret tersebut dalam suatu diagram. Contohnya saat kita membuat suatu peta rute perjalanan bus di suatu kota atau pada saat kita membuat suatu pohon silsilah keluarga. Peta rute perjalanan dan pohon silsilah keluarga dapat direpresentasikan oleh diagram dimana objek-objeknya direpresentasikan oleh titik dan hubungan antar objek tersebut direpresentasikan oleh garis. Diagram yang merepresentasikan sekumpulan objek diskret dan hubungan antar objek diskret tersebut dinamakan graf. Secara umum graf dapat didefinisikan sebagai berikut:

Definisi 2.1. Definisi Graf, Simpul dan Ruas (Suryadi, 1994:16)

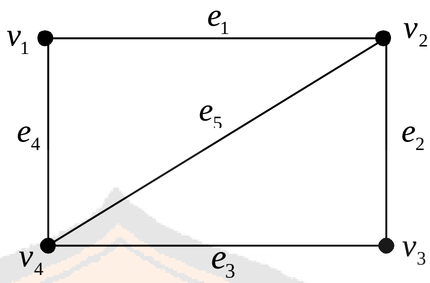
Graf *G*, dinotasikan *G(V,E)*, adalah pasangan himpunan yang terdiri dari himpunan *V* yang elemennya disebut simpul atau *vertex*; dan himpunan *E* yang anggotanya merupakan pasangan tak terurut dari simpul, disebut ruas atau *edge* dari graf *G*. ○

Himpunan *V* pada suatu graf *G(V,E)* merupakan suatu himpunan tidak kosong dan berhingga, sedangkan himpunan *E* dapat berupa suatu himpunan kosong. Dengan kata lain, suatu graf hanya memuat simpul-simpul dan tidak memuat ruas. Simpul-simpul dilambangkan dengan $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_i$ dimana i adalah bilangan asli. Sedangkan ruas-ruas dilambangkan dengan $e_1, e_2, e_3, \ldots, e_i$ dimana i adalah bilangan asli atau dengan menuliskan simpul-simpul yang dihubungkan oleh ruas tersebut, misalkan $(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_5)$ dan sebagainya.

Untuk lebih memahami tentang pengertian graf di atas, berikut ini diberikan contoh dari suatu graf:

Contoh 2.1

Misal terdapat graf $G(V, E)$ terdiri dari himpunan $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dan himpunan $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ yang disajikan sebagai berikut:



Gambar 2.1. Graf $G(V,E)$ untuk Contoh 2.1

Pada Gambar 2.1, titik v_1, v_2, v_3 dan v_4 disebut simpul graf *G*, sedangkan garis e_1, e_2, e_3, e_4 dan e_5 disebut ruas dari graf *G*.

Graf memiliki beberapa jenis antara lain graf *null* atau graf kosong, graf komplit dan graf planar. Graf *null* merupakan graf yang tidak memiliki ruas dan hanya memuat simpul. Graf komplit merupakan suatu graf yang setiap pasang simpulnya dihubungkan oleh tepat satu ruas. Sedangkan graf planar adalah graf yang tidak memiliki ruas yang berpotongan. Selain itu terdapat graf berarah dan graf berorientasi dimana tiap ruas pada kedua graf tersebut memiliki orientasi yang dilambangkan oleh tanda panah. Perbedaan antara graf berarah dan graf berorientasi adalah perjalanan, jalur, lintasan, *cycle* maupun sirkuit yang terdapat pada graf berorientasi tidak dibatasi oleh orientasi ruas seperti yang berlaku pada graf berarah.

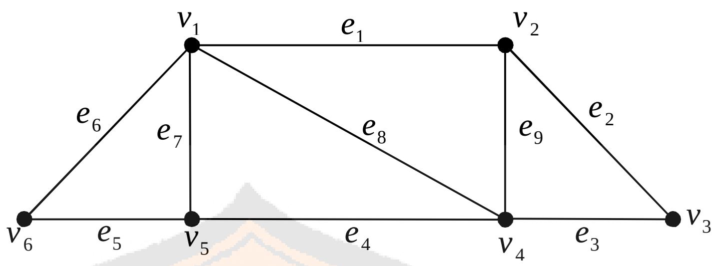
Dua buah graf dapat terlihat sama meskipun pada kenyataan kedua graf tersebut berbeda. Namun, dapat ditemui juga dua graf yang tampaknya berbeda tetapi sesungguhnya dua graf tersebut merupakan dua graf yang sama atau isomorfis. Dua buah graf dikatakan isomorfis jika terdapat korespondensi satu-satu pada simpul graf yang satu ke graf lainnya sedemikian hingga banyaknya ruas yang insiden pada simpul di kedua graf tersebut sama. Isomorfisme dua buah graf tidak dipengaruhi oleh penamaan pada tiap simpul dan ruas dari kedua graf tersebut. Jika keterhubungan di antara kedua graf tersebut sama, maka kedua graf tersebut merupakan graf isomorfis.

Definisi 2.1 menyebutkan bahwa suatu graf merupakan pasangan himpunan yang terdiri dari himpunan simpul dan himpunan ruas. Oleh karena itu, banyaknya simpul dan ruas merupakan elemen penting dari terbentuknya suatu graf. Berikut ini definisi order dan ukuran suatu graf:

Definisi 2.2. Definisi Order dan Ukuran (Chartrand & Lesniak, 1996: 1)
Misalkan *G(V,E)* adalah suatu graf. Banyaknya simpul pada graf *G* disebut order graf *G* dinotasikan dengan $n(G)$ dan banyaknya ruas pada graf *G* disebut ukuran graf *G* dinotasikan dengan $m(G)$. ○

Berikut diberikan contoh yang berkaitan dengan order dan ukuran suatu graf:

Contoh 2.2
Misal graf $G(V,E)$ dengan himpunan $V=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6\}$ dan himpunan $E=\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6,e_7,e_8,e_9\}$ yang digambarkan sebagai berikut:



Gambar 2.2. Graf $G(V,E)$ untuk Contoh 2.2

Pada graf $G(V,E)$ terdapat enam simpul dan sembilan ruas, maka graf $G(V,E)$ memiliki order enam dan ukuran sembilan, dinotasikan $n(G)=6$ dan $m(G)=9$.

Suatu ruas dapat dituliskan dengan menuliskan simpul yang dihubungkannya. Misalkan pada Contoh 2.2, ruas e_1 dapat dituliskan menjadi (v_1,v_2). Dengan demikian dapat dikatakan ruas e_1 insiden dengan simpul v_1 dan v_2. Berikut diberikan definisi ruas yang insiden dengan simpul:

Definisi 2.3. Definisi Ruas yang Insiden dengan Simpul (Chartrand & Lesniak, 1996: 1)

Misal *G(V,E)* adalah suatu graf. Jika suatu ruas $e \in E$ dan $e=(v_i,v_j)$ dimana $a,b \in V$, maka dapat dikatakan e menghubungkan v_i dan v_j atau dapat dikatakan bahwa e insiden dengan v_i seperti halnya e insiden dengan v_j di *G(V,E)*. ○

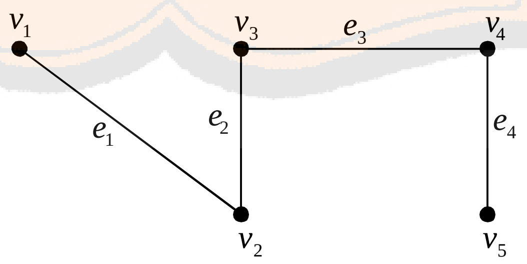
Jika ruas e insiden dengan v_i seperti halnya e insiden dengan v_j, maka dapat dikatakan pula bahwa simpul v_i dan simpul v_j merupakan simpul-simpul yang ajasen *(adjacent vertices)*. Jika terdapat dua buah ruas yang berbeda yang insiden dengan simpul yang sama maka dapat dikatakan bahwa kedua ruas tersebut adalah ruas yang ajasen *(adjacent edges)*.

Banyaknya ruas yang insiden pada sebuah simpul disebut derajat simpul dan dinotasikan dengan $d(v)$. Jika sebuah simpul berderajat ganjil maka simpul tersebut dikatakan simpul ganjil, sedangkan jika berderajat genap maka dikatakan simpul genap. Simpul yang memiliki derajat satu adalah simpul akhir *(end vertex)*. Dan simpul yang berderajat nol disebut simpul terisolasi *(isolated vertex)*.

Untuk lebih memahami Definisi 2.3 tentang ruas yang insiden dengan simpul, perhatikan Contoh 2.3 berikut:

Contoh 2.3:

Berikut ini disajikan graf *G(V,E)* yang terdiri dari himpunan $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ dan himpunan $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$:



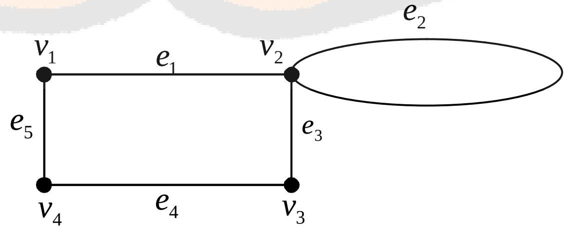
Gambar 2.3. Graf *G(V,E)* untuk Contoh 2.3

Ruas e_1 menghubungkan simpul v_1 dan v_2 karena ruas $e_1 \in E$ dan $e_1 = \{v_1, v_2\}$ dimana $v_1, v_2 \in V$. Ruas e_2 menghubungkan simpul v_2 dan v_3 karena ruas $e_2 \in E$ dan $e_2 = \{v_2, v_3\}$ dimana $v_2, v_3 \in V$. Ruas e_3 menghubungkan simpul v_3 dan v_4 karena ruas $e_3 \in E$ dan $e_3 = \{v_3, v_4\}$ dimana $v_3, v_4 \in V$. Ruas e_4 menghubungkan simpul v_4 dan v_5 karena ruas $e_4 \in E$ dan $e_4 = \{v_4, v_5\}$ dimana $v_4, v_5 \in V$. Dengan kata lain ruas e_1 insiden dengan simpul v_1 dan simpul v_2, ruas e_2 insiden dengan simpul v_2 dan simpul v_3, ruas e_3 insiden dengan simpul v_3 dan simpul v_4 dan ruas e_4 insiden dengan simpul v_4 dan simpul v_5.

Pada kasus lain dapat ditemukan suatu graf yang memiliki ruas penghubung simpul yang sama. Ruas yang demikian disebut *loop*. Graf yang tidak memuat *loop* disebut graf sederhana. Di bawah ini diberikan Contoh 2.4 tentang graf yang memuat suatu loop:

Contoh 2.4

Misal: terdapat graf $G(V, E)$ yang terdiri dari himpunan $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dan himpunan $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ yang digambarkan sebagai berikut:



Gambar 2.4. Graf $G(V, E)$ yang memuat *loop*

Graf $G(V,E)$ pada Gambar 2.4 memiliki suatu *loop* pada ruas e_2 yang menghubungkan simpul v_2 dengan dirinya sendiri, maka graf $G(V,E)$ bukan suatu graf sederhana. Sedangkan graf $G(V,E)$ yang terdapat pada Gambar 2.3 tidak memiliki *loop*, maka graf tersebut merupakan graf sederhana.

Insidensi dari setiap simpul dan ruas suatu graf dapat direpresentasikan dalam bentuk matriks yang disebut dengan matriks insidensi. Berikut ini diberikan definisi dari matriks insidensi:

Definisi 2.4. Definisi Matriks Insidensi (Suryadi, 1994: 35)

Misalkan terdapat graf $G(V,E)$ tanpa *loop* yang memiliki order n dan ukuran m. Maka matriks insidensi dari $G(V,E)$ adalah matriks $A = a_{ij}$ berukuran $n \times m$ yang didefinisikan sebagai berikut:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \textit{jika ruas } e_j \textit{ insiden dengan simpul } v_i; \\ 0, & \textit{jika ruas } e_j \textit{ tidak insiden dengan simpul } v_i. \end{cases} \qquad \circ$$

Sebagai contoh, berikut ini akan dibentuk matriks insidensi dari graf $G(V,E)$ yang disajikan pada Gambar 2.3:

Contoh 2.5:

Perhatikan graf *G(V,E)* yang disajikan pada Gambar 2.3. Maka, matriks insidensi dari graf *G(V,E)* tersebut adalah:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Pada suatu graf berorientasi, insidensi antara simpul dan ruas dapat direpresentasikan oleh suatu matriks insidensi yang didefinisikan sebagai berikut:

Definisi 2.5. Definisi Matriks Insidensi Graf Berorientasi (Harray, 1967: 112-113)

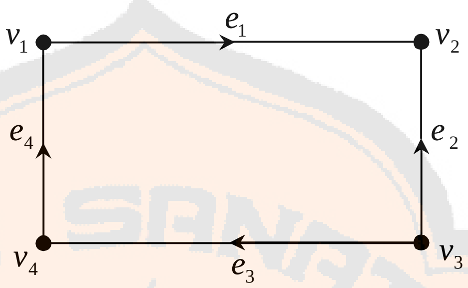
Misalkan terdapat graf berorientasi $G(V,E)$ berorder n dan berukuran m yang tidak memiliki *loop*. Matriks insidensi dari $G(V,E)$ adalah matriks $A = a_{ij}$ berukuran $n \times m$ yang didefinisikan sebagai berikut:

$$a_{ij} = \begin{cases} +1, & \textit{jika ruas } e_j \textit{ insiden dengan simpul } v_i \textit{ dan} \\ & \textit{arahnya menjauhi simpul tersebut;} \\ -1, & \textit{jika ruas } e_j \textit{ insiden dengan simpul } v_i \textit{ dan} \\ & \textit{arahnya mendekati simpul tersebut;} \\ 0, & \textit{jika ruas } e_j \textit{ tidak insiden dengan simpul } v_i \end{cases} \circ$$

Berikut ini diberikan suatu contoh graf berorientasi dan matriks insidensi simpul dan ruasnya:

Contoh 2.6

Misalkan terdapat suatu graf *G(V,E)* yang disajikan pada Gambar 2.5 berikut ini:



Gambar 2.5. Graf Berorientasi $G(V,E)$ untuk Contoh 2.6

Matriks insidensi simpul ruas yang terbentuk dari graf $G(V,E)$ yang disajikan dalam Gambar 2.5 adalah:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Suatu graf terdiri dari dua himpunan yakni himpunan simpul dan himpunan ruas, maka dapat dibentuk graf lain yang anggotanya merupakan himpunan bagian dari himpunan simpul dan himpunan ruas dari graf tersebut yang dijelaskan dengan definisi berikut:

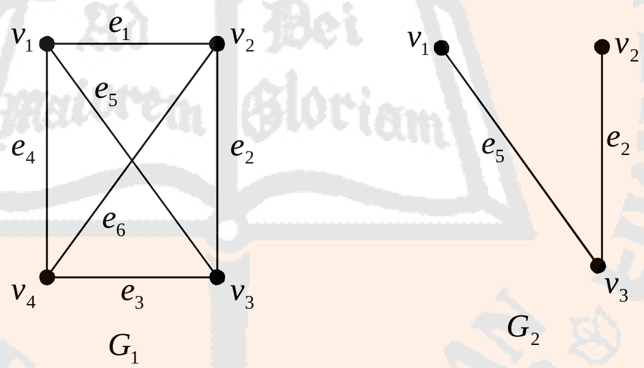
Definisi 2.6. Definisi Subgraf (Chartrand & Oellermann, 1993: 12)

Misal: *H(V,E)* dan *G(V,E)* suatu graf. *H(V,E)* dikatakan subgraf dari graf *G(V,E)* jika simpul-simpul yang termuat pada graf *H(V,E)* merupakan himpunan bagian dari simpul-simpul graf *G* dan ruas-ruas pada graf *H(V,E)* merupakan himpunan bagian dari ruas-ruas graf *G*. ○

Berikut ini diberikan contoh suatu graf serta subgraf dari graf tersebut untuk lebih memahami Definisi 2.6 di atas:

Contoh 2.7

Misal terdapat graf G_1 dengan himpunan $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dan $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$ serta graf G_2 dengan himpunan $V = \{v_1, v_2, v_3\}$ dan $E = \{e_2, e_5\}$ yang disajikan sebagai berikut:



Gambar 2.6. Graf G_1 dan Graf G_2 untuk Contoh 2.7

Pada Gambar 2.6 tampak bahwa G_2 terdiri dari himpunan $V = \{v_1, v_2, v_3\}$ dan $E = \{e_2, e_5\}$ yang merupakan himpunan bagian dari $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dan $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$ pada G_1. Maka, G_2 merupakan subgraf dari G_1 karena $V(G_2) \subseteq V(G_1)$ dan $E(G_2) \subseteq E(G_1)$.

2. Perjalanan, Lintasan, Jalur, Sirkuit dan *Cycle*

Selanjutnya akan dibahas struktur dari suatu graf yang berkaitan dengan simpul dan ruas serta hubungan antara keduanya, salah satunya adalah perjalanan pada graf *G* yang didefinisikan sebagai berikut:

Definisi 2.7. Definisi Perjalanan (Chartrand & Oellermann, 1993: 20)

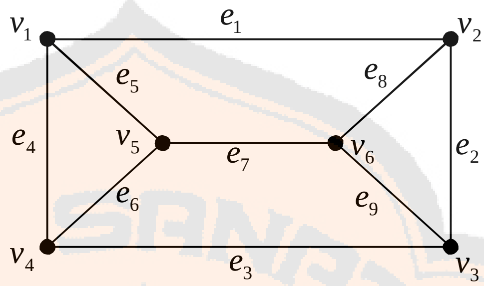
Misalkan *G(V,E)* adalah suatu graf. Perjalanan *(walk)* dari graf *G* adalah barisan berganti-ganti $v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, v_{n-1}, e_n, v_n$ $(n \geq 0)$ dari simpul-simpul dan ruas-ruas yang diawali dan diakhiri oleh simpul dimana $e_i = v_{i-1}v_i$ untuk $i = 1,2,\ldots,n$. ○

Suatu perjalanan diawali oleh simpul, misal simpul v_0, dan diakhiri oleh simpul, misal simpul v_n, maka suatu perjalanan dapat dituliskan sebagai perjalanan $v_0 - v_n$. Dalam menyajikan sebuah perjalanan, kita dapat hanya menuliskan barisan simpul-simpul yang dilalui saja seperti $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n$.

Apabila pada sebuah perjalanan simpul awalnya sama dengan simpul akhir maka perjalanan tersebut dikatakan tertutup, dikatakan terbuka jika simpul awal berbeda dengan simpul akhirnya. Berikut ini diberikan suatu contoh dari perjalanan:

Contoh 2.8

Misalkan terdapat graf *G(V,E)* yang digambarkan sebagai berikut:



Gambar 2.7. Graf $G(V,E)$ untuk Contoh 2.8

Barisan $v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_3, v_4, e_6, v_5, e_7, v_6$ merupakan sebuah perjalanan. Barisan tersebut diawali oleh simpul v_1 dan diakhiri oleh simpul v_6, karena itu perjalanan tersebut merupakan suatu perjalanan terbuka.

Dalam sebuah perjalanan baik simpul maupun ruas dapat muncul lebih dari satu kali. Akan tetapi terdapat suatu perjalanan khusus yakni lintasan dimana tidak terdapat ruas yang sama. Berikut ini diberikan definisi dari suatu lintasan:

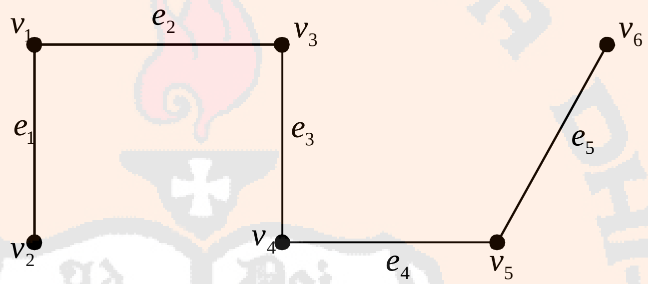
Definisi 2.8. Definisi Lintasan (Chartrand & Oellermann, 1993: 20)

Misalkan *G(V,E)* adalah suatu graf. Perjalanan dari graf *G* dikatakan suatu lintasan atau ***trail*** jika tidak terdapat ruas yang sama dalam perjalanan tersebut. ○

Untuk lebih memahami definisi lintasan berikut diberikan sebuah contoh suatu lintasan dari suatu graf:

Contoh 2.9

Misal *G(V,E)* adalah suatu graf dengan himpunan $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ dan himpunan $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ yang disajikan pada Gambar 2.8 sebagai berikut:



Gambar 2.8. Graf $G(V, E)$ untuk Contoh 2.9

Perjalanan $v_2 - v_6$ yang dibentuk oleh barisan $v_2, e_1, v_1, e_2, v_3, e_3, v_4, e_4, v_5, e_5, v_6$ merupakan suatu lintasan karena tidak ada satupun ruas yang sama pada perjalanan tersebut.

Berikut ini diberikan definisi tentang perjalanan khusus lain, yakni jalur dimana di dalamnya tidak memuat simpul yang sama:

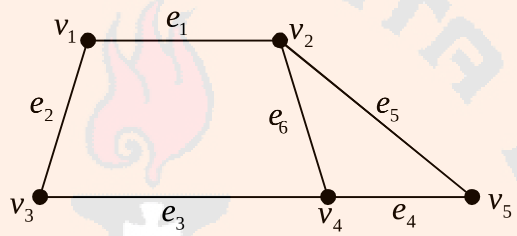
Definisi 2.9. Definisi Jalur (Chartrand & Oellermann, 1993: 20)

Misalkan *G(V,E)* adalah suatu graf. Perjalanan dari graf *G* dikatakan suatu jalur atau *path* jika tidak terdapat simpul yang sama dalam perjalanan tersebut. ○

Di bawah ini diberikan Contoh 2.10 yang menyajikan suatu jalur. Perhatikan graf *G(V,E)* pada Gambar 2.9 berikut:

Contoh 2.10

Misal *G(V,E)* adalah suatu graf dengan himpunan $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ dan himpunan $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$. yang disajikan sebagai berikut:



Gambar 2.9. Graf $G(V, E)$ untuk Contoh 2.10

Perjalanan $v_3 - v_5$ yang dibentuk oleh barisan $v_3, e_2, v_1, e_1, v_2, e_5, v_5$ merupakan sebuah jalur karena barisan tersebut tidak memiliki satupun simpul yang sama.

Berikut diberikan suatu definisi dari *cycle* yang merupakan suatu perjalanan dimana simpul awal dan simpul akhir sama:

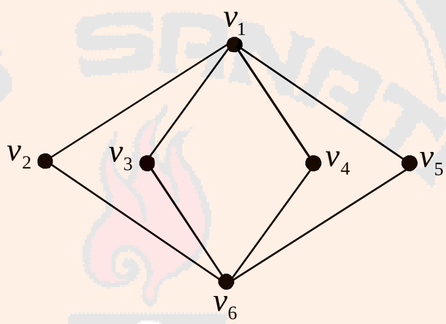
Definisi 2.10. Definisi *Cycle* (Chartrand & Oellermann, 1993: 21)

Misal *G(V,E)* adalah suatu graf dan $v_0, v_1, \ldots, v_n$ merupakan suatu perjalanan dalam *G(V,E)*. Perjalanan $v_0, v_1, \ldots, v_n$ merupakan suatu *cycle* jika $n \geq 3$, $v_0 = v_n$ dan n simpul pada $v_1, v_2 \ldots, v_n$ berbeda. ○

Untuk lebih memahami definisi dari suatu *cycle*, perhatikan contoh yang diberikan sebagai berikut:

Contoh 2.11

Misal terdapat graf *G(V,E)* yang disajikan sebagai berikut:



Gambar 2.10. Graf $G(V,E)$ untuk Contoh 2.11

Perjalanan v_1, v_2, v_6, v_5, v_1 merupakan sebuah *cycle* karena perjalanan tersebut memiliki paling sedikit tiga buah simpul yang berbeda, simpul v_1 yang menjadi simpul awal sekaligus simpul akhir dan semua simpulnya berbeda kecuali simpul awal dan simpul akhirnya. Sedangkan perjalanan $v_2, v_6, v_4, v_1, v_5, v_6, v_2$ bukan merupakan *cycle* karena pada perjalanan tersebut terdapat simpul yang sama selain simpul awal dan simpul akhir yakni simpul v_6.

Jika insidensi antara *cycle* dan setiap ruas $e \in E(G)$ dan tersebut didefinisikan oleh sebarang orientasi, maka diperoleh suatu matriks insidensi *cycle*-ruas yang didefinisikan sebagai berikut:

Definisi 2.11. Matriks Insidensi *Cycle*-Ruas (Wilson & Beineke, 1979, 84-85)

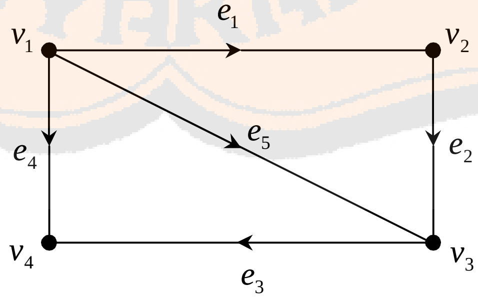
Misalkan terdapat suatu graf $G(V,E)$ dengan order *n* dan ukuran *m*. Maka dapat dibentuk suatu matriks insidensi *cycle*-ruas $B = b_{ij}$. Matriks B memiliki m kolom dan satu baris untuk setiap *cycle* pada $G(V,E)$, dengan b_{ij} yang didefinisikan sebagai berikut:

$$b_{ij} = \begin{cases} +1, & \textit{jika ruas } e_j \textit{ insiden dengan cycle } b_i \textit{ dan} \\ & \textit{arahnya sama;} \\ -1, & \textit{jika ruas } e_j \textit{ insiden dengan cycle } b_i \textit{ dan} \\ & \textit{arahnya berlawanan;} \\ 0, & \textit{jika ruas } e_j \textit{ tidak insiden dengan cycle } b_i \end{cases} \qquad \circ$$

Untuk lebih memahami Definisi 2.11, berikut ini diberikan contoh suatu graf dengan *cycle* dan matriks insidensi *cycle*-ruasnya:

Contoh 2.12

Misalkan terdapat graf $G(V,E)$ yang disajikan pada Gambar 2.11 sebagai berikut:



Gambar 2.11. Graf $G(V,E)$ untuk Contoh 2.12

Graf $G(V,E)$ mengandung tiga *cycle* yakni $(v_1,e_1,v_2,e_2,v_3,e_5,v_1)$, $(v_1,e_5,v_3,e_3,v_4,e_4,v_1)$ dan $(v_1,e_1,v_2,e_2,v_3,e_3,v_4,e_4,v_1)$. Jika ditentukan sebarang orientasi searah jarum jam untuk setiap *cycle* dalam $G(V,E)$, maka akan terbentuk matriks insidensi *cycle*-ruas B sebagai berikut:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Baris pertama pada matriks B berpadanan dengan *cycle* $(v_1,e_1,v_2,e_2,v_3,e_5,v_1)$, baris kedua berpadanan dengan *cycle* $(v_1,e_5,v_3,e_3,v_4,e_4,v_1)$ dan baris ketiga berpadanan dengan *cycle* $(v_1,e_1,v_2,e_2,v_3,e_3,v_4,e_4,v_1)$.

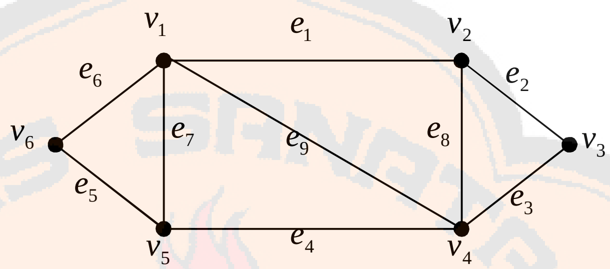
Berbeda dengan *cycle*, berikut ini diberikan definisi beserta contoh tentang suatu lintasan khusus yang disebut sirkuit:

Definisi 2.12. Definisi Sirkuit (Chartrand & Oellermann, 1993: 21)

Misal *G(V,E)* adalah suatu graf dan $v_n - v_m$ adalah suatu lintasan dari *G(V,E)*. Lintasan $v_n - v_m$ merupakan suatu sirkuit jika lintasan tersebut adalah lintasan nontrivial dan tertutup. ○

Contoh 2.13

Misal *G(V,E)* merupakan suatu graf yang terdiri dari himpunan $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ dan himpunan $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9\}$ yang disajikan sebagai berikut:



Gambar 2.12. Graf $G(V, E)$ untuk Contoh 2.13

Barisan simpul $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_1$ merupakan sebuah lintasan nontrivial dan tertutup. Oleh karena itu, barisan simpul $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_1$ dapat dikatakan sebuah sirkuit. Sedangkan meskipun memiliki simpul akhir dan awal yang sama, perjalanan $v_5, v_4, v_1, v_2, v_4, v_1, v_5$ bukan merupakan sebuah sirkuit karena perjalanan tersebut bukan merupakan sebuah lintasan dimana terdapat ruas yang sama yakni ruas e_9 di dalam perjalanan tersebut.

Simpul-simpul pada suatu graf dihubungkan oleh ruas-ruas. Jika pada suatu graf untuk setiap pasang simpul yang berbeda terdapat suatu jalur yang menghubungkan kedua simpul tersebut, maka graf tersebut merupakan suatu graf terhubung. Berikut ini diberikan definisi dari graf yang terhubung:

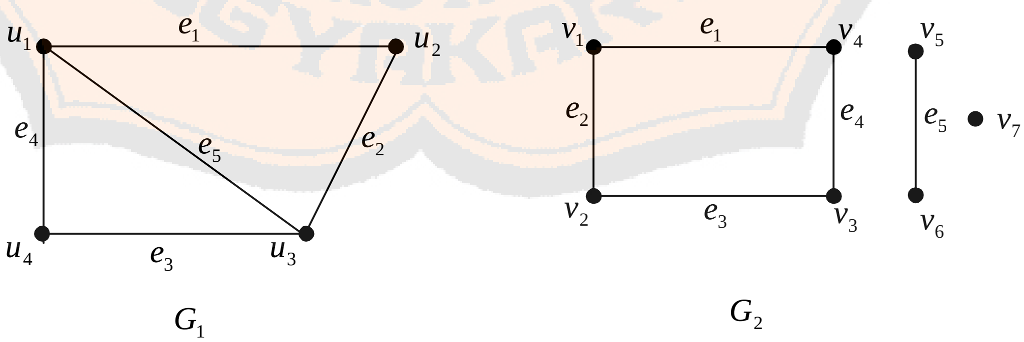
Definisi 2.13. Definisi Graf Terhubung (Chartrand & Oellermann, 1993:21)

Misal *G(V,E)* adalah suatu graf. Misalkan pula terdapat simpul v_i dan v_j dalam $G(V,E)$. Suatu graf G dikatakan terhubung *(connected)* jika terdapat jalur $v_i - v_j$ untuk setiap pasang simpul v_i dan v_j dalam *G*. Sedangkan suatu graf G dikatakan tidak terhubung *(disconnected)* jika tidak terdapat jalur $v_i - v_j$ antara dua buah simpul v_i dan v_j pada *G*. ○

Untuk lebih memahami definisi di atas, perhatikan graf G_1 dan G_2 yang terdapat dalam contoh berikut:

Contoh 2.14

Misal graf $G_1(V,E)$ yang terdiri dari himpunan $V = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ dan himpunan $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ dan graf $G_2(V,E)$ yang terdiri dari himpunan $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$ dan himpunan $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ yang disajikan sebagai berikut:



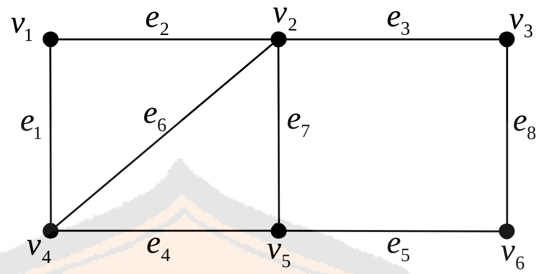
Gambar 2.13 Graf G_1 dan G_2 untuk Contoh 2.14

Pada gambar 2.13 di atas, setiap pasang simpul dalam G_1 dihubungkan oleh sebuah jalur contohnya jalur u_4, u_3, u_2, jalur u_1, u_3, u_4 serta jalur u_3, u_4, u_1, u_2. Sedangkan graf G_2 tidak terhubung karena pada graf G_2 terdapat beberapa pasang simpul yang tidak terhubungkan oleh sebuah jalur seperti tidak adanya jalur yang menghubungkan simpul v_1 dengan simpul v_5, simpul v_6 maupun simpul v_7.

Keterhubungan dua buah simpul dapat dihilangkan dengan cara penghapusan satu atau lebih simpul yang menghubungkan kedua buah simpul tersebut. Penghapusan sebarang simpul *v* pada suatu graf *G(V,E)* dilakukan dengan menghapus simpul tersebut serta semua ruas yang insiden dengan simpul *v* sedemikian hingga terbentuk graf $G(V,E)-\{v\}$ yang merupakan subgraf dari *G(V,E)* dimana simpul-simpul dari graf tersebut merupakan $V(G)-\{v\}$ dan ruas-ruasnya merupakan semua ruas $\in E$ yang tidak terhubung dengan simpul *v*. Di bawah ini diberikan sebuah contoh penghapusan simpul pada suatu graf. Perhatikan pada gambar 2.14 dan gambar 2.15 berikut:

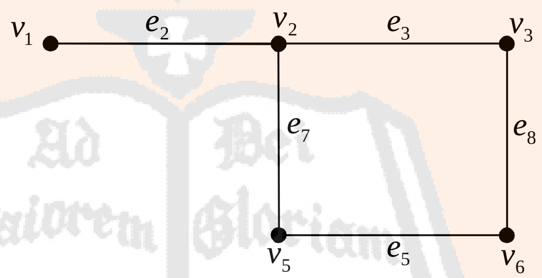
Contoh 2.15

Misalkan terdapat graf $G(V,E)$ yang terdiri dari himpunan $V=\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ dan himpunan $E=\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\}$ yang disajikan sebagai berikut:



Gambar 2.14. Graf $G(V,E)$ untuk Contoh 2.15

Bila simpul v_4 dan ruas e_1, e_4 serta e_6 dihapus, maka terbentuk graf $G(V,E)-v_4$ dimana $V=\{v_1,v_2,v_3,v_5,v_6\}$ dan $E=\{e_2,e_3,e_5,e_7,e_8\}$ yang disajikan pada Gambar 2.15:

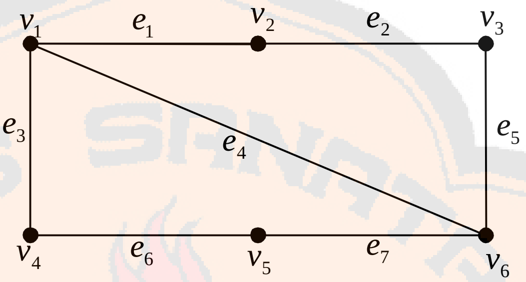


Gambar 2.15 Graf $G(V,E)$ pada Gambar 2.14 $- v_4$

Penghapusan simpul biasanya diikuti dengan penghapusan ruas. Penghapusan sebarang ruas e dilakukan dengan menghapus ruas e tanpa menghapus simpul yang insiden dengan ruas e sedemikian hingga terbentuk graf $G(V,E)-\{e\}$ yang merupakan subgraf dari *G(V,E)* dimana simpul-simpul $\in V$ dan ruas-ruasnya merupakan $E(G)-e$. Berikut ini adalah contoh dari penghapusan ruas pada suatu graf. Perhatikan gambar 2.16 dan gambar 2.17 di bawah ini:

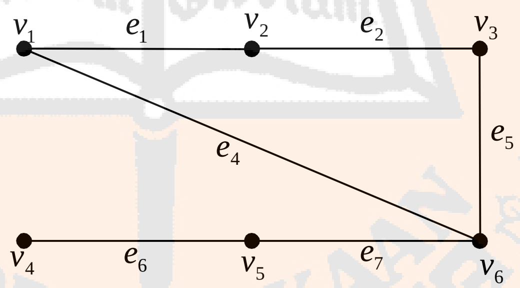
Contoh 2.16

Misal: graf $G(V,E)$ yang terdiri dari himpunan $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ dan himpunan $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$ yang disajikan sebagai berikut:



Gambar 2.16. Graf $G(V,E)$ untuk Contoh 2.16

Bila ruas e_5 dihapus, maka terbentuk graf $G(V,E) - e_5$ dimana $V = \{v_1, v_2, v_3, v_5, v_6\}$ dan $E = \{e_1, e_2, e_4, e_5, e_6, e_7\}$ yang disajikan pada Gambar 2.17 sebagai berikut:



Gambar 2.17. Graf $G(V,E)$ pada Gambar 2.16 $- e_5$

3. Pohon

Pada Definisi 2.13 disebutkan bahwa suatu graf dikatakan terhubung jika terdapat sebuah jalur yang menghubungkan setiap pasang simpul pada graf tersebut. Dengan demikian, untuk setiap sepasang simpul pada graf yang terhubung dapat dicari suatu jalur. Jika jalur-jalur yang menghubungkan untuk setiap pasang simpul tersebut tidak membentuk suatu *cycle*, maka graf tersebut merupakan suatu graf khusus yang disebut pohon. Berikut ini definisi dari suatu pohon:

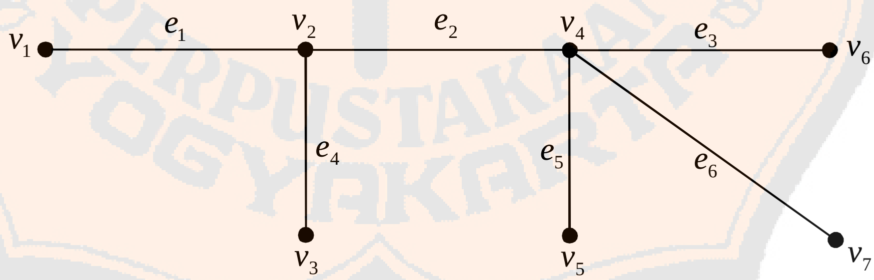
Definisi 2.14. Definisi Pohon (Chartrand & Oellermann, 1993: 62)

Misal *G(V,E)* adalah suatu graf. *G(V,E)* merupakan suatu pohon jika *G(V,E)* terhubung dan tidak memuat *cycle*. Ruas-ruas pada suatu pohon disebut jembatan *(bridge)*. ○

Untuk lebih memahami definisi pohon, perhatikan Contoh 2.17 di bawah ini yang menyajikan dua graf yang berbeda:

Contoh 2.17

Misal terdapat graf $H(V,E)$ dengan himpunan $V=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6,v_7\}$ dan $E=\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6\}$ yang disajikan sebagai berikut:



Gambar 2.18. Pohon $H(V,E)$

$H(V,E)$ merupakan graf yang terhubung karena terdapat paling sedikit sebuah buah jalur yang menghubungkan setiap sepasang simpul dalam $H(V,E)$. Pada $H(V,E)$ hanya terdapat sebuah jalur yang menghubungkan setiap pasang simpul sehingga $H(V,E)$ tidak memuat *cycle*. Dengan demikian dapat dikatakan bahwa $H(V,E)$ merupakan suatu pohon karena $H(V,E)$ terhubung dan tidak mengandung *cycle*. Sedangkan $G(V,E)$ yang terdapat pada Gambar 2.16 bukan merupakan suatu pohon karena meskipun $G(V,E)$ merupakan suatu graf terhubung tetapi terdapat lebih dari sebuah jalur yang menghubungkan simpul-simpul pada $G(V,E)$.

Berikut ini diberikan Teorema 2.1 tentang order dan ukuran dari suatu pohon.

Teorema 2.1. Order dan Ukuran Suatu Pohon (Chartrand & Oellermann, 1993: 65)

Jika *T* suatu pohon berorder *n*, maka *T* memiliki ukuran $m = n - 1$.

Bukti:

Akan dibuktikan benar untuk $n \geq 1$ dengan menggunakan induksi matematika.

a. Akan dibuktikan benar untuk $n = 1$.

   Misalkan terdapat pohon T berorder $n = 1$. Karena pohon tersebut hanya terdiri dari satu simpul, maka tidak terdapat satu pun ruas pada pohon tersebut atau dapat dikatakan bahwa $m = 0$. Dengan demikian, terbukti benar bahwa jika terdapat pohon berorder $n = 1$, maka pohon tersebut memiliki ukuran $m = 0$.

b. Akan dibuktikan benar untuk $n > 1$.

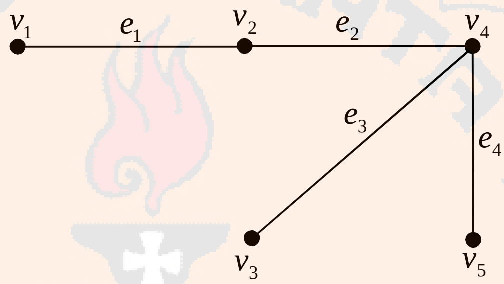
Misalkan k sebuah bilangan bulat dimana $k > 1$. Akan dibuktikan bahwa jika $n = k$ benar, maka $n = k + 1$ juga benar. Dimisalkan benar bahwa jika terdapat pohon dengan order $n = k$, maka pohon tersebut berukuran $m = k - 1$. Kemudian, misalkan terdapat pohon T_1 beroder $n = k + 1$. Berdasarkan definisi pohon, T_1 merupakan suatu graf terhubung dan tidak memiliki *cycle* sedemikian hingga terdapat paling sedikit satu simpul berderajat satu pada T_1. Misalkan terdapat simpul v_s berderajat satu dan misalkan terdapat ruas e_s yang terhubung dengan simpul v_s. Andaikan dilakukan penghapusan simpul v_s dan ruas e_s sedemikian hingga terbentuk pohon T_2 dimana $V(T_2) = V(T_1) - v_s$ dan $E(T_2) = E(T_1) - e_s$. Karena $V(T_1) = k + 1$, maka $V(T_2) = k + 1 - 1 = k$. Karena T_2 beroder $n_2 = k$, maka berdasarkan pemisalan sebelumnya $m_2 = k - 1$. Selanjutnya, misalkan simpul v_s dan ruas e_s ditambahkan kembali pada T_1, maka $V(T_1) = V(T_2) + v_s$ dan $E(T_1) = E(T_2) + e_s$. Dengan kata lain $n_1 = k + 1$ dan $m_1 = k$. Maka terbukti benar untuk pohon dengan $n = k + 1$. Dengan demikian terbukti benar bahwa jika $n = k$ benar, maka $n = k + 1$ juga benar.

Karena a dan b terbukti, dengan demikian terbukti benar bahwa jika terdapat suatu pohon berorder n, maka pohon tersebut berukuran $m = n - 1$ untuk semua $n \geq 1$. ■

Sebagai contoh dari Teorema 2.1, perhatikan pohon T yang disajikan dalam Gambar 2.19 berikut ini:

Contoh 2.18

Misal terdapat pohon T dengan himpunan $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ dan $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ yang disajikan sebagai berikut:



Gambar 2.19. Pohon T

Pohon T yang terdapat pada Gambar 2.19 memiliki lima simpul dan empat ruas atau dengan kata lain pohon T beroder lima dan berukuran empat. Dengan demikian, dapat dikatakan bahwa Teorema 2.1 berlaku pada pohon T dimana $m = n - 1 = 5 - 1 = 4$.

4. Pohon Rentangan

Dari suatu graf terhubung yang mengandung *cycle*, dapat dibentuk suatu pohon. Hal ini dapat dilakukan dengan menghapus ruas yang membentuk *cycle* pada graf tersebut sehingga akhirnya tidak ditemukan *cycle* pada graf tersebut dan membentuk suatu pohon. Pohon tersebut dinamakan dengan pohon rentangan. Berikut ini Definisi 2.15 tentang pohon rentangan:

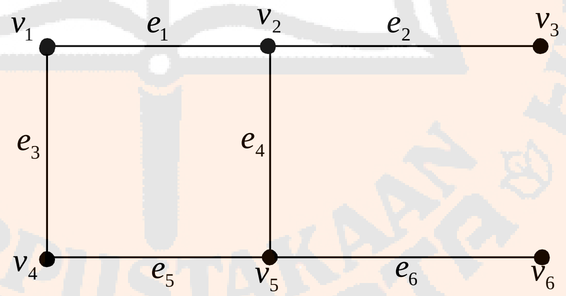
Definisi 2.15. Definisi Pohon Rentangan (Chartrand & Oellermann, 1993, 62-63)

Misal: *G(V,E)* adalah suatu graf yang terhubung. Pohon rentangan graf *G(V,E)* adalah subgraf rentangan dari *G(V,E)* yang merupakan suatu pohon. ○

Berikut ini diberikan Contoh 2.19 tentang suatu pohon rentang dari suatu graf terhubung. Perhatikan graf *G(V,E)* yang terdapat pada Gambar 2.20 di bawah ini:

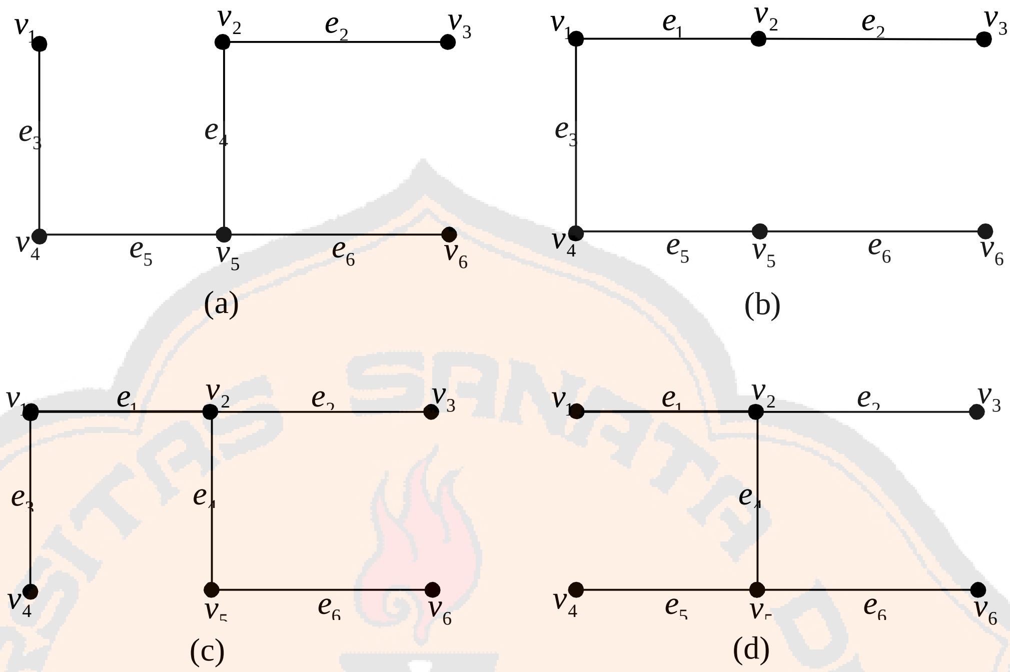
Contoh 2.19

Misal $G(V,E)$ adalah suatu graf terhubung yang disajikan pada Gambar 2.20 sebagai berikut:



Gambar 2.20. Graf $G(V,E)$ untuk Contoh 2.19

Pada $G(V,E)$ terdapat *cycle* v_1, v_2, v_5, v_4 . Untuk membentuk pohon rentangan dari graf $G(V,E)$ dapat dilakukan penghapusan salah satu ruas e_1, e_3, e_4 atau $e_5 \in E$ sehingga graf $G(V,E)$ merupakan graf terhubung dan tidak mengandung *cycle*. Dengan demikian dari graf $G(V,E)$ dapat dibentuk beberapa pohon rentangan sebagai berikut:



Gambar 2.21. Pohon Rentangan Graf *G(V,E)* pada Gambar 2.20

Untuk menghasilkan pohon rentang graf $G(V,E)$ yang disajikan pada gambar 2.21(a) dilakukan penghapusan ruas e_1, untuk pohon rentangan pada gambar 2.21(b) dilakukan penghapusan ruas e_4, untuk pohon rentangan pada gambar 2.21(c) dilakukan penghapusan ruas e_5 dan untuk pohon rentangan pada gambar 2.21(d) dilakukan penghapusan ruas e_3.

Setiap kita membentuk suatu pohon rentang dari $G(V,E)$, maka akan ada ruas yang tidak terdapat pada pohon rentang tersebut. Ruas-ruas inilah yang disebut dengan dawai. Berikut diberikan tentang dawai:

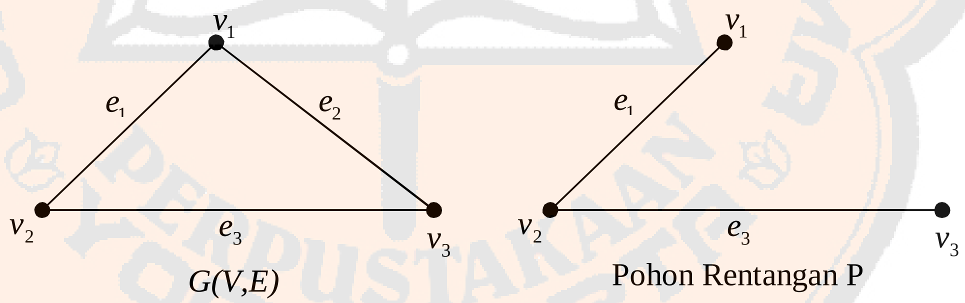
Definisi 2.16. Definisi Dawai (Suryadi, 1994, 65)

Misal *G(V,E)* adalah suatu graf yang terhubung dan *P* adalah pohon rentangan dari *G(V,E)*. Ruas pada *P* disebut cabang *(branch)*, sedangkan ruas pada *G(V,E)* yang tidak termasuk dalam *P* disebut dawai (*chord* atau *link)*. ○

Berikut ini diberikan Contoh 2.20 yang menyajikan suatu graf terhubung beserta pohon rentangan dan dawai dari graf tersebut:

Contoh 2.20

Misalkan *G(V,E)* suatu graf dengan himpunan $V = \{v_1, v_2, v_3\}$ dan $E = \{e_1, e_2, e_3\}$, dan misalkan *P* suatu pohon rentangan dari *G(V,E)* yang disajikan sebagai berikut:



Gambar 2.22.

Graf *G(V,E)* untuk Contoh 2.20 dan Pohon Rentangan *P* dari Graf *G(V,E)*

Setelah dilakukan penghapusan ruas e_2 pada *G(V,E)* didapatkan suatu pohon rentangan *P*. Ruas e_1 dan e_3 adalah cabang-cabang dari pohon *P*, sedangkan ruas e_2 merupakan dawai dari *G(V,E)* .

Pada suatu graf terhubung yang memuat *cycle*, kita dapat membentuk pohon rentangan. Dalam hal ini kita melakukan penghapusan ruas-ruas yang membentuk *cycle* pada $G(V,E)$ sehingga $G(V,E)$ tidak memuat *cycle* lagi. Berikut ini diberikan Teorema 2.2 tentang banyaknya ruas yang dihapuskan dari suatu graf untuk membentuk pohon rentangan:

Teorema 2.2. Banyak Ruas yang Dihapuskan untuk Membentuk Suatu Pohon Rentangan (Suryadi, 1994 : 127)

Misalkan *G(V,E)* adalah suatu graf yang terhubung beroder *n* dan berukuran *m*. Maka banyaknya ruas yang harus dihapus untuk membentuk sebuah pohon rentangan adalah $m-n+1$.

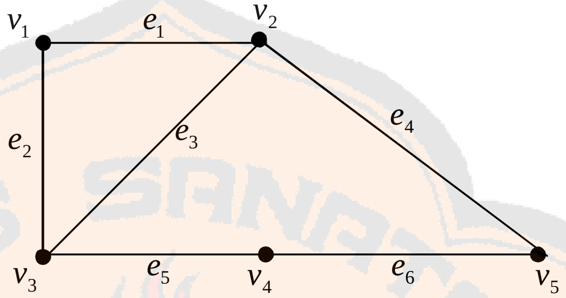
Bukti:

Misalkan *G(V,E)* adalah suatu graf yang terhubung beroder *n* dan berukuran *m*. Menurut Teorema 2.1 tentang Order dan Ukuran Suatu Pohon, suatu pohon memiliki ukuran $n-1$, maka pohon rentang dari *G(V,E)* pasti memiliki tepat $n-1$ ruas. Dengan demikian, banyaknya ruas yang harus dihapus dari *G(V,E)* untuk membentuk suatu pohon rentang dari *G(V,E)* adalah $m-(n-1)=m-n+1$. ■

Dengan kata lain, Teorema 2.2 menyatakan bahwa banyaknya dawai yang terdapat suatu graf adalah $m-n+1$. Untuk lebih memahami Teorema 2.2, berikut diberikan Contoh 2.21:

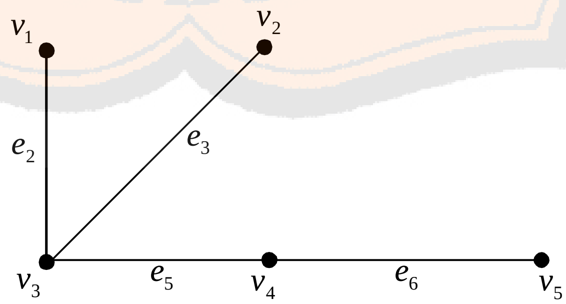
Contoh 2.21

Misal terdapat $G(V,E)$ yang terdiri dari $V=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5\}$ dan $E=\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5.e_6\}$ disajikan sebagai berikut:



Gambar 2.23. Graf *G(V,E)* untuk Contoh 2.21

$G(V,E)$ berorder lima dan berukuran enam. Pada Gambar 2.23 tampak bahwa pada $G(V,E)$ terdapat *cycle* $v_1,e_1,v_2,e_3,v_3,e_3,v_1$ dan *cycle* $v_2,e_4,v_5,e_6,v_4,e_5,v_3,e_3,v_2$. Untuk membentuk suatu pohon rentang dari $G(V,E)$, perlu dilakukan penghapusan ruas-ruas yang membentuk *cycle-cycle* pada $G(V,E)$. Berdasarkan Teorema 2.2, banyaknya rusuk yang dihapuskan dari $G(V,E)$ untuk membentuk suatu pohon rentangan adalah $6-5+1=2$ ruas. Jika ruas e_1 dan e_4 dihapus, maka $G(V,E)$ tidak memuat *cycle* lagi sehingga $G-e_1-e_4$ membentuk suatu pohon rentangan yang disajikan pada Gambar 2.24 berikut:



Gambar 2.24. Pohon Rentangan $G-e_1-e_4$ dari Graf pada Gambar 2.23

5. *Cycle* Fundamental

Jika satu dawai ditambahkan pada suatu pohon rentang akan terbentuk suatu *cycle* yang disebut *cycle* fundamental. Berikut ini definisi *cycle* fundamental:

Definisi 2.17. Definisi *Cycle* Fundamental (Wilson & Beineke, 1979, 10)

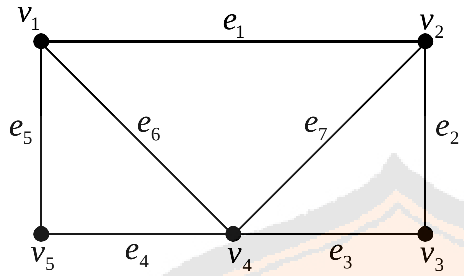
Misalkan terdapat $G(V,E)$ adalah suatu graf yang terhubung dan T adalah pohon rentangan dari $G(V,E)$. Misalkan pula terdapat ruas e yang merupakan sembarang dawai pada $G(V,E)$. Jika ruas e ditambahkan pada P, maka akan terbentuk suatu *cycle* yang disebut *cycle* fundamental. ○

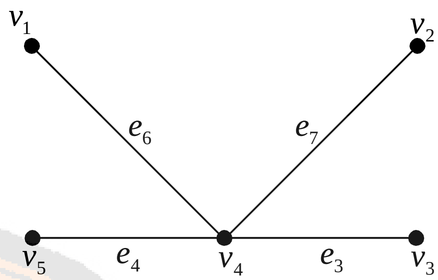
Berdasarkan Teorema 2.2 diketahui bahwa terdapat $m-n+1$ dawai dari suatu graf. Maka, terdapat $m-n+1$ *cycle* yang dibentuk dengan cara menambahkan dawai pada suatu pohon. Himpunan $m-n+1$ *cycle* fundamental tersebut dinamakan himpunan *cycle* fundamental.

Untuk lebih memahami Definisi 2.17 di atas, berikut ini diberikan contoh suatu *cycle* fundamental yang disajikan dalam Contoh 2.22:

Contoh 2.22

Misalkan *G(V,E)* suatu graf dengan himpunan $V=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5\}$ dan $E=\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6,e_7\}$, dan misalkan P suatu pohon rentangan dari *G(V,E)* yang disajikan sebagai berikut:

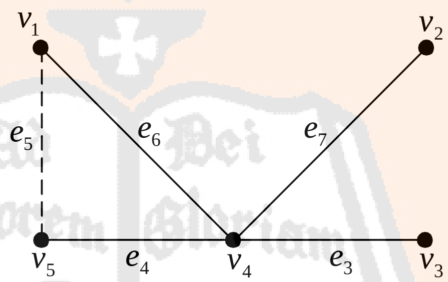




Gambar 2.25.

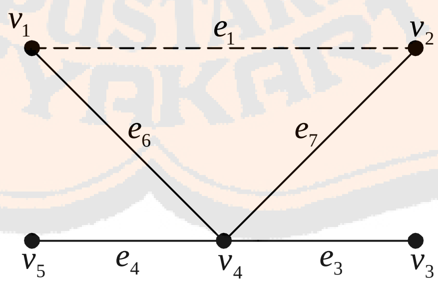
Graf $G(V, E)$ untuk Contoh 2.22 dan Pohon Rentang T dari Graf $G(V, E)$

Jika kita menambahkan ruas e_5 maka akan terbentuk *cycle* fundamental $v_1, e_6, v_4, e_4, v_5, e_5, v_1$ seperti yang tampak pada Gambar 2.26 berikut:



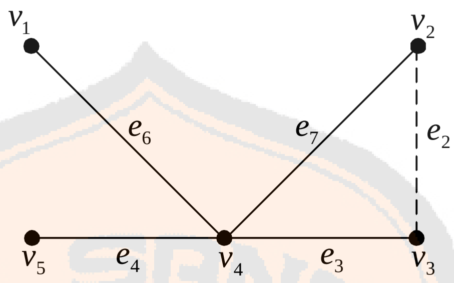
Gambar 2.26. *Cycle* fundamental $v_1, e_6, v_4, e_4, v_5, e_5, v_1$

Jika kita menambahkan ruas e_1 maka akan terbentuk *cycle* fundamental $v_1, e_1, v_2, e_7, v_4, e_6, v_1$ seperti yang tampak pada Gambar 2.37 berikut:



Gambar 2.27. *Cycle* fundamental $v_1, e_1, v_2, e_7, v_4, e_6, v_1$

Jika kita menambahkan ruas e_2 maka akan terbentuk *cycle* fundamental $v_2, e_2, v_3, e_3, v_4, e_7, v_2$ seperti yang tampak pada Gambar 2.28 di bawah ini:



Gambar 2.28. *Cycle* fundamental $v_2, e_2, v_3, e_3, v_4, e_7, v_2$

Dengan demikian graf $G(V,E)$ memiliki himpunan fundamental yang terdiri dari *cycle* $v_1, e_6, v_4, e_4, v_5, e_5, v_1$, $v_1, e_1, v_2, e_7, v_4, e_6, v_1$ dan $v_2, e_2, v_3, e_3, v_4, e_7, v_2$.

6. Potongan, Matriks Insidensi Potongan-Ruas dan Potongan Fundamental

Penghapusan beberapa ruas dalam suatu graf terhubung dapat mengakibatkan graf tersebut menjadi tidak terhubung. Ruas-ruas yang dihapus tersebut disebut himpunan potongan atau *cutset*. Berikut ini definisi dari potongan yang merupakan generalisasi dari konsep himpunan potongan:

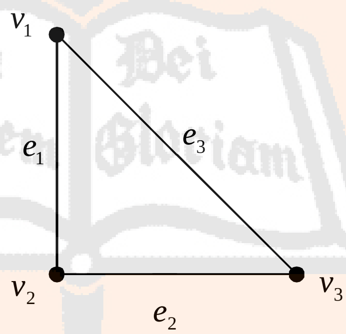
Definisi 2.18. Definisi Potongan (Harray, 1967: 119)

Andaikan terdapat graf $G(V,E)$. Misalkan terdapat himpunan bagian simpul V_1 dari himpunan simpul $V(G)$ pada graf $G(V,E)$ dan misalkan pula terdapat V_2 sedemikian hingga $V_2 = V - V_1$. Himpunan ruas yang setiap anggotanya insiden dengan satu simpul di V_1 dan satu simpul di V_2 disebut suatu potongan. ○

Berikut diberikan Contoh 2.23 tentang potongan yang terdapat pada suatu graf:

Contoh 2.23

Misalkan terdapat graf $G(V,E)$ yang disajikan pada Gambar 2.29 sebagai berikut:



Gambar 2.29. Graf $G(V,E)$ untuk Contoh 2.23

Perhatikan graf $G(V,E)$ yang terdapat pada Gambar 2.29. Graf $G(V,E)$ mengandung potongan 3 potongan yakni potongan $\{e_1,e_2\}$, $\{e_2,e_3\}$ dan $\{e_1,e_3\}$. Potongan $\{e_1,e_2\}$ membagi $G(V,E)$ menjadi dua himpunan simpul yakni $\{v_2\}$ dan $\{v_1,v_3\}$ dimana ruas e_1 berinsiden dengan satu simpul di $\{v_2\}$ dan simpul lain di $\{v_1,v_3\}$ seperti halnya dengan ruas e_2. Potongan $\{e_2,e_3\}$ membagi $G(V,E)$ menjadi dua himpunan simpul yakni

$\{v_3\}$ dan $\{v_1, v_2\}$ dimana ruas e_2 berinsiden dengan satu simpul di $\{v_3\}$ dan simpul lain di $\{v_1, v_2\}$ seperti halnya dengan ruas e_3. Potongan $\{e_1, e_3\}$ membagi $G(V, E)$ menjadi dua himpunan simpul yakni $\{v_1\}$ dan $\{v_2, v_3\}$ dimana ruas e_1 berinsiden dengan satu simpul di $\{v_1\}$ dan simpul lain di $\{v_2, v_3\}$ seperti halnya dengan ruas e_3.

Pada suatu graf berorientasi, kita dapat membentuk suatu matriks insidensi antara potongan dan ruas-ruas pada graf tersebut. Misalkan terdapat suatu graf berorientasi $G(V, E)$. Andaikan terdapat potongan P pada graf $G(V, E)$ yang masing-masing ruas anggotanya insiden dengan himpunan bagian simpul V_1 dan V_2. Orientasi dari tiap potongan dapat ditentukan berdasarkan urutan himpunan V_1 dan V_2 yakni dapat menjadi (V_1, V_2) atau (V_2, V_1). Andaikan orientasi potongan ditentukan sebagai (V_1, V_2), maka orientasi dari tiap ruas anggota potongan dapat dikatakan sama dengan orientasi potongan jika orientasi ruas-ruas tersebut berawal dari simpul anggota himpunan V_1 menuju simpul anggota himpunan V_2.

Jika setiap insidensi dari semua ruas dan potongan dari graf $G(V, E)$ didefinisikan berdasarkan arah potongan, maka dapat didefinisikan sebuah matriks insidensi. Berikut ini diberikan definisi dan contoh dari matriks insidensi potongan dan ruas:

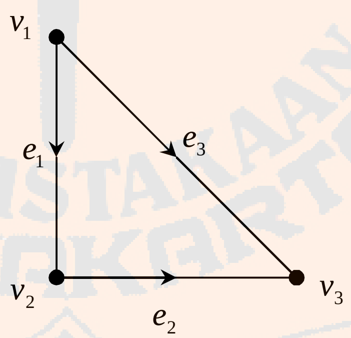
Definisi 2.19. Definisi Matriks Insidensi Potongan-Ruas (Harray, 1967:121)

Matriks insidensi antara ruas dan potongan dinotasikan dengan matriks C. Matriks C memiliki satu buah baris dan m kolom untuk masing-masing potongan dengan c_{ij} yang didefinisikan sebagai berikut:

$$c_{ij} = \begin{cases} +1, & \textit{jika ruas } e_j \textit{ berinsiden dengan potongan } d_i \textit{ dan} \\ & \textit{arahnya sesuai;} \\ -1, & \textit{jika ruas } e_j \textit{ berinsiden dengan potongan } d_i \textit{ dan} \\ & \textit{arahnya tidak sesuai;} \\ 0, & \textit{jika ruas } e_j \textit{ tidak berinsiden dengan potongan } d_i \end{cases}$$

Contoh 2.24

Misalkan graf $G(V,E)$ yang disajikan pada Gambar 2.29 merupakan suatu graf berorientasi dan disajikan kembali dalam Gambar 2.30 sebagai berikut:



Gambar 2.30. Graf berorientasi $G(V,E)$ untuk Contoh 2.24

Contoh 2.23 menyebutkan bahwa $G(V,E)$ mengandung potongan 3 potongan yakni potongan $\{e_1,e_2\}$, $\{e_2,e_3\}$ dan $\{e_1,e_3\}$. Jika ditentukan sebarang orientasi, maka matriks insidensi potongan-ruas yang terbentuk adalah:

$$C_0 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Cabang-cabang pohon rentangan dan dawai suatu graf juga membentuk suatu potongan. Potongan ini disebut potongan fundamental. Berikut ini diberikan definisi dari potongan fundamental:

Definisi 2.20. Definisi Potongan Fundamental (Harray, 1967: 121)

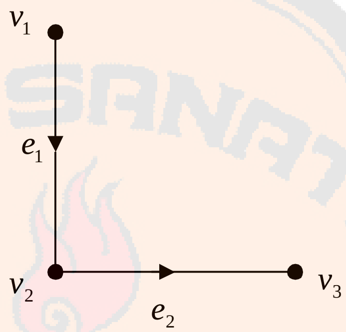
Misalkan terdapat graf $G(V,E)$ dan sembarang pohon rentangan T dari graf $G(V,E)$. Potongan yang terbentuk dari satu cabang pohon rentangan T dan dawai dari graf $G(V,E)$ adalah suatu potongan fundamental. ○

Pada Teorema 2.1 disebutkan bahwa suatu pohon memiliki $n-1$ cabang, dengan demikian pohon rentangan T memiliki $n-1$ cabang. Karena tiap potongan fundamental hanya memuat satu cabang dari *T*, dengan demikian terdapat $n-1$ potongan fundamental yang terbentuk dari $n-1$ cabang pohon rentangan $G(V,E)$. Semua $n-1$ potongan ini disebut dengan himpunan potongan fundamental.

Untuk lebih memahami potongan fundamental, berikut ini akan diberikan Contoh 2.25:

Contoh 2.25

Perhatikan graf $G(V,E)$ yang terdapat pada Gambar 2.30. Misalkan dibentuk pohon rentangan graf $G(V,E)$ yang disajikan pada Gambar 2.30 berikut:



Gambar 2.31. Pohon Rentangan Graf $G(V,E)$ pada Gambar 2.30

Jika cabang e_1 dan dawai e_3 dihapuskan, maka akan terbentuk potongan fundamental $\{e_1,e_3\}$. Jika cabang e_2 dan dawai e_3 dihapuskan, maka akan terbentuk potongan fundamental $\{e_2,e_3\}$.

B. Istilah-istilah pada Rangkaian Listrik

Seperti yang telah dikatakan pada sub-bab sebelumnya, graf banyak digunakan dalam kehidupan sehari-hari salah satunya adalah penerapannya dalam rangkaian listrik yang akan dibahas pada bab selanjutnya. Untuk itu, pada sub-bab ini akan dibahas beberapa konsep dasar dan istilah tentang rangkaian listrik yang akan digunakan dan menunjang pembahasan pada bab-bab selanjutnya.

1. Rangkaian Listrik

Suatu rangkaian listrik merupakan susunan dari beberapa alat listrik. Pada pembahasan kali ini kita akan menggunakan istilah elemen rangkaian pada alat-alat listrik tersebut. Berikut ini diberikan Definisi 2.21 tentang elemen rangkaian listrik:

Definisi 2.21. Definisi Elemen Rangkaian (Hayt dan Kemmerly, 1985: 21)
Sebuah elemen rangkaian adalah model matematis dari sebuah alat listrik yang mempunyai dua titik ujung (terminal) dan yang secara lengkap dapat dinyatakan oleh hubungan antara arus dan tegangan tetapi tidak dapat dibagi lagi menjadi alat-alat lain yang mempunyai dua titik ujung. ○

Dengan kata lain, satu elemen listrik hanya mewakili satu alat listrik. Elemen listrik terbagi menjadi dua yakni elemen aktif dan elemen pasif. Berikut ini penjelasan dari elemen aktif dan elemen pasif dalam diktat kuliah Rangkaian Listrik oleh Kartika Budi (2009):

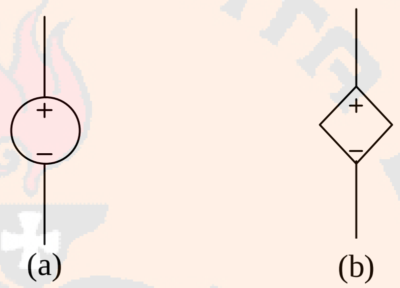
a. Elemen Aktif

Elemen aktif adalah elemen yang menghasilkan energi. Elemen aktif dibagi menjadi dua bagian, yakni:

1). Sumber Tegangan (*Voltage Source*)

Sumber tegangan terbagi menjadi dua yakni sumber tegangan bebas dan sumber tegangan tidak bebas. Sumber

Tegangan Bebas (*Independent Voltage Source*) yakni sumber yang menghasilkan tegangan kostan, tidak dipengaruhi oleh kuat arus yang dihasilkan. Sumber Tegangan Tidak Bebas (*Dependent Voltage Source*) yaitu sumber tegangan yang tegangannya yang dipengaruhi oleh kuat arus yang dihasilkan. Berikut diberikan simbol sumber tegangan bebas dan tidak bebas:



Gambar 2.32

Sumber Tegangan Bebas (a) dan Sumber Tegangan Tidak Bebas (b)

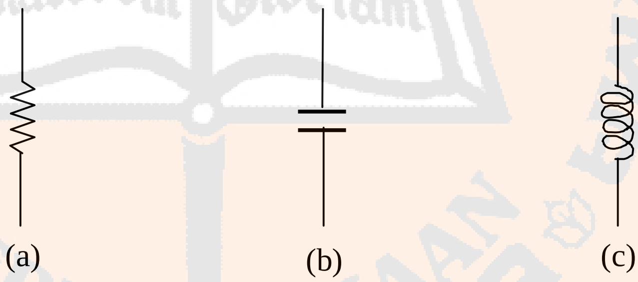
2). Sumber Arus (*Current Source*)

Sumber arus terbagi menjadi dua yakni sumber arus bebas dan sumber arus tidak bebas. Sumber Arus Bebas (*Independent Current Source*) yakni sumber yang menghasilkan arus yang kuatnya tetap, tidak tergantung pada tegangan luar yang dihasilkannya. Sumber Arus Tidak Bebas (*Dependent Currrent Source*) yaitu sumber yang menghasilkan arus yang kuatnya dipengaruhi oleh tegangan pada komponen lain yang diakibatkannya. Berikut ini diberikan simbol dari sumber arus bebas dan tidak bebas:

Gambar 2.33
Sumber Arus Bebas (a) dan Sumber Arus Tidak Bebas (b)

b. Elemen Pasif

Elemen pasif adalah elemen yang tidak dapat menghasilkan energi dan hanya menerima energi dengan cara menyerap atau menyimpan energi. Elemen pasif terdiri dari resistor, kapasitor dan induktor. Berikut ini diberikan simbol dari elemen-elemen pasif:



Gambar 2.34. Resistor (a), Kapasitor (b) dan Induktor (c)

Elemen-elemen rangkaian ini disusun membentuk jaringan maupun rangkaian. Berikut ini diberikan definisi dari jaringan dan rangkaian:

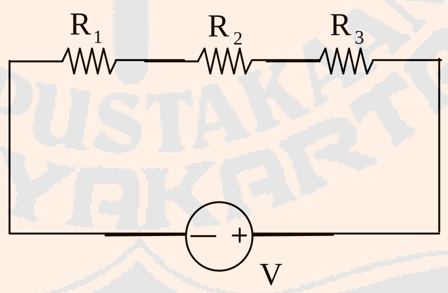
Definisi 2.22. Definisi Rangkaian Listrik (Hayt dan Kemmerly, 1985: 24)

Sambungan antara dua atau lebih elemen rangkaian disebut jaringan *(network)*. Jika jaringan tersebut mengandung sedikitnya satu jalur tertutup, maka jaringan tersebut adalah suatu rangkaian listrik. ○

Dalam hal ini, elemen-elemen rangkaian dapat disusun menjadi berbagai jenis rangkaian yakni rangkaian seri, rangkaian pararel dan rangkaian campuran seri pararel. Rangkaian seri merupakan rangkaian listrik yang hanya memiliki satu jalan bagi arus. Sedangkan rangkaian paralel merupakan rangkaian listrik yang dirangkai sedemikian rupa sehingga terdapat beberapa jalan bagi arus. Berikut ini diberikan contoh dari suatu rangkaian seri dan rangkaian pararel dari tahanan-tahanan:

Contoh 2.26:

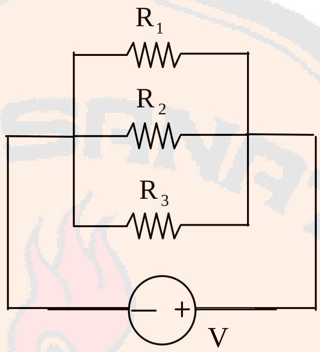
Perhatikan Gambar 2.35 yang menyajikan suatu rangkaian seri berikut ini:



Gambar 2.35. Contoh Rangkaian Seri

Pada Gambar 2.35 disajikan sebuah rangkaian seri dimana tiga buah resistor, yakni R_1, R_2 dan R_3, disusun berdampingan sedemikian hingga arus yang mengalir dari sumber tegangan hanya memiliki satu jalur. Selain itu, kuat arus yang mengalir pada tiap-tiap resistor pun sama besar.

Perhatikan Gambar 2.36 di bawah ini yang menyajikan suatu rangkaian paralel:



Gambar 2.36. Contoh Rangkaian Paralel

Rangkaian yang terdapat pada Gambar 2.36 terdiri dari sebuah sumber tegangan yang disusun dengan tiga buah resistor yang terhubung menjadi satu. Hal ini memunculkan adanya tiga buah jalan arus yang melewati rangkaian tersebut yakni jalan arus yang melewati R_1, jalan arus yang melewati R_2 dan jalan arus yang melewati R_3. Dengan demikian, besarnya arus yang berasal dari sumber tegangan tersebut pun terbagi menjadi tiga.

2. Arus

Definisi 2.23. Definisi Arus (Sears & Zemansky, 1963: 502)

Arus yang dinotasikan dengan i adalah jumlah pemindahan rata-rata dari muatan positif yang melewati suatu penampang penghantar atau dapat dikatakan bahwa arus adalah jumlah muatan positif yang melewati penampang penghantar per satuan waktu. ○

Secara matematis, arus listrik dirumuskan menjadi:

$$i = \frac{dq}{dt} \tag{2.1}$$

dimana *dq* adalah muatan listrik yang bergerak dalam satuan *Coloumb* dan *dt* adalah waktu yang dibutuhkan muatan tersebut untuk bergerak dalam satuan detik. Satuan arus adalah *Ampere* (A).

Arus listrik hanya mengalir pada suatu rangkaian tertutup. Adanya arus listrik pada suatu rangkaian tertutup disebabkan perbedaan potensial antara dua buah titik pada rangkaian tersebut dimana arah alirannya berasal dari titik yang berpotensial tinggi ke titik yang berpotensial rendah.

3. Beda Potensial atau Tegangan

Arus listrik yang mengalir pada suatu rangkaian listrik disebabkan oleh adanya beda potensial atau tegangan di antara dua buah titik dalam rangkaian tersebut. Di bawah ini diberikan Definisi 2.24 tentang beda potensial atau tegangan:

Definisi 2.24. Definisi Tegangan (Hayt dan Kemmerly, 1985:16)

Tegangan yang melewati suatu elemen listrik didefinisikan sebagai kerja yang diperlukan untuk menggerakkan muatan positif sebesar 1 Coloumb dari satu titik ujung ke titik ujung yang lain dari elemen tersebut. ○

Satuan tegangan adalah *Volt* (V).

4. Hukum Ohm

Seorang fisikawan yang bernama George Simon Ohm mengemukakan suatu gagasan tentang hubungan antara arus dan tegangan yang dikenal dengan Hukum Ohm yang berbunyi sebagai berikut:

Definisi 2.25. Hukum Ohm (Hayt dan Kemmerly, 1985:32)

Hukum Ohm mengatakan bahwa tegangan yang melalui suatu penghantar berbanding lurus dengan arus yang mengalir melalui penghantar tersebut.○

Secara matematis dapat dituliskan sebagai berikut:

$$v = Ri \tag{2.2}$$

dimana v adalah tegangan, R adalah hambatan yang terdapat pada pengantar dan i adalah arus yang mengalir melalui pengantar tersebut.

Dari persamaan (2.2) dapat terlihat bahwa besarnya arus yang mengalir melalui penghantar tidak hanya tergantung pada tegangan yang melaluinya tetapi juga pada hambatan dari penghantar tersebut. Atau dapat dikatakan bahwa semakin besar hambatan R yang dimiliki oleh penghantar tersebut, maka arus i yang mengalir pun semakin kecil untuk suatu tegangan v.

Jika kita akan mencari besarnya hambatan pada suatu penghantar, maka kita hanya perlu membagi besarnya tegangan yang melintasi penghantar tersebut dengan arus yang mengalir melaluinya. Secara matematis dapat dituliskan sebagai berikut:

$$R = \frac{v}{i} \tag{2.3}$$

Satuan hambatan adalah *Ohm* yang dilambangkan dengan Ω.

5. Hukum Kirchhoff

Dalam suatu rangkaian listrik, tegangan maupun arus yang mengalir dapat dihitung dengan menggunakan salah satu hukum yang dinyatakan oleh Gustav Robert Kirchhoff. Berikut ini diberikan isi dari hukum-hukum tersebut:

Definisi 2.26. Hukum Arus Kirchhoff (Halliday & Resnick, 1984: 225)

Hukum pertama Kirchhoff disebut Hukum Arus Kirchhoff (*Kirchhoff's Current Law, KC*L). Hukum tersebut mengatakan bahwa jumlah aljabar arus-arus yang memasuki setiap titik cabang pada suatu rangkaian listrik sama dengan nol. ○

Secara matematis Hukum Arus Kirchhoff dapat ditulis:

$$\sum_{n=1}^{N} \mathrm{i}_n = 0 \text{ atau } \sum \mathrm{i}_{masuk} = \sum \mathrm{i}_{keluar} \qquad (2.4)$$

Definisi 2.27. Hukum Tegangan Kirchhoff (Halliday& Resnick,1984: 218)

Hukum kedua Kirchhoff disebut Hukum Tegangan Kirchhoff (*Kirchhoff's Voltage Law, KVL*). Hukum kedua ini mengatakan bahwa jumlah aljabar seluruh tegangan pada suatu jalur tertutup sama dengan nol. ○

Secara matematis Hukum Tegangan Kirchhoff dapat ditulis:

$$\sum_{n=1}^{N} \mathrm{v}_n = 0 \text{ atau } \mathrm{v}_1 + \mathrm{v}_2 + \ldots + \mathrm{v}_n = 0 \qquad (2.5)$$

C. Matriks dan Vektor

Pada pembahasan yang terdapat pada bab selanjutnya, selain menggunakan graf kita juga akan menggunakan beberapa teori tentang matriks. Oleh karena itu, pada sub-bab ini akan dibahas beberapa definisi tentang matriks dan vektor yang dibutuhkan.

1. Matriks

Definisi 2.28. Definisi Matriks (Anton & Rorres, 2004:26)

Matriks adalah jajaran empat persegi panjang dari bilangan-bilangan. Bilangan-bilangan dalam susunan itu disebut entri dari matriks. ○

Pada umumnya, suatu matriks dinyatakan dengan huruf kapital, misalnya matriks A, matriks B atau matriks C. Bilangan-bilangan suatu matriks disusun menurut baris dan kolom. Untuk menyatakan entri dari suatu matriks biasanya digunakan huruf yang sama dengan huruf yang digunakan untuk menyatakan matriksnya. Misalkan entri pada baris i dan kolom j matriks A dapat dinyatakan dengan a_{ij}. Banyaknya baris dan kolom suatu matriks disebut ukuran dari matriks tersebut. Misalkan matriks A memiliki m baris dan n kolom, ditulis $A_{m\times n}$. Untuk lebih memahami definisi matriks, berikut ini diberikan Contoh 2.27:

Contoh 2.27

Misalkan terdapat matriks A yang disajikan sebagai berikut:

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriks A memiliki 2 baris dan 3 kolom, maka dapat dikatakan bahwa matriks A berukuran 2×3, ditulis $A_{2\times 3}$. Entri pada matriks A antara lain $a_{11}=2$, $a_{12}=5$, $a_{13}=0$, $a_{21}=4$, $a_{22}=3$ dan $a_{23}=1$.

Berikut ini diberikan definisi suatu matriks khusus yang semua elemennya nol:

Definisi 2.29. Definisi Matriks Nol (Jain & Gunawardena, 2004: 35)

Matriks berukuran $m \times n$ yang semua entrinya adalah nol disebut matriks nol, dinotasikan dengan $0_{m\times n}$ atau 0. ○

Di bawah ini diberikan suatu contoh tentang suatu matriks nol. Perhatikan Contoh 2.28 berikut:

Contoh 2.28

Misalkan terdapat beberapa matriks 0 yang disajikan sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Selain matriks nol terdapat pula suatu matriks diagonal. Di bawah ini diberikan definisi tentang matriks diagonal:

Definisi 2.30. Definisi Matriks Diagonal (Jain & Gunawardena, 2004 : 42)

Misalkan terdapat matriks D berukuran $n \times n$. Maka, matriks D disebut matriks diagonal jika setiap entri kecuali pada diagonal utamanya adalah nol. Matriks diagonal dapat dinotasikan sebagai berikut:

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{bmatrix}.$$ ○

Untuk lebih memahami definisi matriks diagonal di atas, berikut diberikan Contoh 2.29:

Contoh 2.29

Misalkan terdapat matriks A yang disajikan sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Matriks A merupakan suatu matriks diagonal karena setiap entrinya adalah nol kecuali pada diagonal utamanya.

Seperti halnya bilangan, matriks juga dapat dioperasikan. Dalam hal ini, matriks dapat dikalikan, baik dengan skalar maupun dengan matriks lain. Berikut ini diberikan definisi dari perkalian matriks dengan skalar.

Definisi 2.31. Definisi Perkalian Matriks dengan Skalar (Jain & Gunawardena, 2004: 34)

Andaikan terdapat matriks $A = (a_{ij})_{m \times n}$ dan k sebarang skalar k.

Maka:

$$kA = (ka_{ij})_{m \times n} \qquad \circ$$

Berikut ini diberikan Contoh 2.30 tentang perkalian suatu matriks dengan sebarang skalar:

Contoh 2.30

Misalkan terdapat matriks A yang disajikan sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Jika kita mengalikan matriks A dengan 2, maka akan diperoleh hasil sebagai berikut:

$$2A = \begin{bmatrix} 8 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Sedangkan, jika kita mengalikan matriks A dengan -2, maka:

$$-2A = \begin{bmatrix} -8 & -6 & -2 \\ -4 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Selain operasi perkalian dengan skalar, operasi perkalian pada matriks juga berlaku antara dua matriks. Berikut ini diberikan definisi tentang perkalian dua matriks:

Definisi 2.32. Definisi Perkalian Matriks dengan Matriks (Jain & Gunawardena, 2004: 38)

Andaikan $A = (a_{ij})_{m\times n}$ dan $B = (b_{ij})_{n\times p}$. Maka,

$$AB = (c_{ij})_{m\times p}$$

dimana c_{ij} adalah hasil kali dari baris ke-*i* $\begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \end{bmatrix}$ matriks A

dengan kolom ke-*j* $\begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{bmatrix}$ matriks B, dengan demikian

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj} \qquad \circ$$

Matriks A dan matriks B dapat dikalikan jika banyak kolom pada matriks A sama dengan banyak baris pada matriks B. Berikut diberikan salah satu contoh tentang perkalian dua matriks:

Contoh 2.31

Misalkan terdapat matriks $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ dan matriks $B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$. Jika matriks A dikalikan dengan matriks B, maka:

$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 4.1+(-1)3 & 4.4+(-1)1 & 4.2+(-1)2 \\ 0.1+2.3 & 0.4+2.1 & 0.2+2.5 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 15 & 6 \\ 6 & 3 & 10 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Untuk beberapa kebutuhan, kita perlu menukar baris dengan kolom suatu matriks. Matriks yang dihasilkan dengan cara demikian disebut dengan transpos suatu matriks. Berikut ini definisi transpos matriks:

Definisi 2.33. Definisi Tranpos Matriks (Anton & Rorres, 2004: 36)

Misalkan terdapat matriks A berukuran $m \times n$. Maka, transpos A, dinotasikan dengan A^T, didefinisikan sebagai matriks $n \times m$ yang diperoleh dengan mempertukarkan baris-baris dan kolom-kolom dari A; sehingga kolom pertama dari A^T adalah baris pertama dari A, kolom kedua dari A^T adalah baris kedua dari A dan seterusnya. ○

Untuk lebih memahami Definisi 2.33 tersebut di atas, berikut diberikan Contoh 2.32:

Contoh 2.32

Misalkan terdapat matriks D yang disajikan sebagai berikut:

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 9 & 6 \end{bmatrix}.$$

Maka, transpos matriks D dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$D^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & 9 \\ 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}.$$

2. Vektor

Selain matriks, kita juga memerlukan beberapa istilah tentang vektor. Berikut ini diberikan beberapa definisi yang berkaitan dengan vektor:

Definisi 2.34. Definisi Vektor (Jain & Gunawardena, 2004: 62)

Misalkan terdapat $a_1, a_2, \ldots, a_n$ yang merupakan suatu himpunan bilangan real R. Suatu matriks $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$ berukuran $n \times 1$ disebut suatu vektor kolom berdimensi n atau lebih singkat disebut vektor. Matriks $[a_1 \quad a_2 \quad \ldots \quad a_n]$ berukuran $1 \times n$ disebut suatu vektor baris berdimensi n. Himpunan semua vektor kolom atau vektor baris berdimensi n dinotasikan dengan R^n. ○

Untuk lebih memahami Definisi 2.34, berikut ini diberikan suatu contoh:

Contoh 2.33

Misalkan terdapat matriks $\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}$ dan $\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$. Matriks-matriks tersebut merupakan vektor-vektor kolom dalam R^2. Kemudian, misalkan pula terdapat matriks $[1 \quad -2 \quad 1]$, $[-3 \quad 4 \quad 1]$ dan $[7 \quad 4 \quad 5]$. Matriks-matriks tersebut merupakan vektor-vektor baris dalam R^3.

D. Kerangka Pikir

Skripsi ini memuat tiga materi yakni rangkaian listrik, graf dan matriks. Berikut ini akan diberikan suatu kerangka pikir yang menjadi benang merah dalam penulisan skripsi ini.

Permasalahan yang terdapat pada suatu rangkaian listrik akan diselesaikan dengan bantuan graf dan matriks. Dalam hal ini, graf digunakan dalam menggambarkan suatu rangkaian listrik dan graf yang digunakan adalah suatu graf terhubung berorientasi. Dari graf berorientasi tersebut dapat dibentuk suatu himpunan *cycle* fundamental. Selain himpunan *cycle* fundamental, dari graf berorientasi tersebut juga dapat dibentuk suatu himpunan potongan fundamental. Dari himpunan *cycle* fundamental dan himpunan potongan fundamental tersebut dapat dibentuk suatu matriks insidensi *cycle*-ruas dan matriks insidensi potongan-ruas. Kemudian, dibentuk suatu matriks resistansi dari matriks insidensi *cycle*-ruas dan vektor tegangan yang berpadanan dengan nilai sumber tegangan sedemikian hingga membentuk suatu persamaan *loop*. Dengan menggunakan persamaan *loop* tersebut, kita akan memperoleh persamaan-persamaan yang dibutuhkan untuk mencari arus dan tegangan elemen sebagai penyelesaian dari permasalahan suatu rangkaian listrik.

BAB III

ANALISIS RANGKAIAN LISTRIK DENGAN GRAF DAN MATRIKS

A. Rangkaian Listrik dan Graf

Rangkaian listrik tersusun dari beberapa elemen listrik. Elemen listrik dikelompokkan menjadi dua yaitu elemen aktif dan elemen pasif. Elemen aktif merupakan elemen yang dapat menghasilkan energi. Elemen aktif sendiri juga dibagi menjadi dua macam yakni sumber tegangan dan sumber arus. Berbeda dengan elemen aktif, elemen pasif hanya dapat menerima energi dengan cara menyerap atau menyimpan energi. Elemen pasif terdiri dari beberapa macam antara lain resistor, kapasitor dan induktor.

Pada setiap elemen listrik terdapat dua buah ujung yang disebut terminal. Masing-masing terminal ini menghubungkan elemen tersebut dengan terminal elemen lain. Tempat pertemuan antara dua atau lebih terminal elemen listrik disebut titik cabang. Dengan menghubungkan terminal-terminal dari beberapa elemen listrik maka akan terbentuk suatu jaringan *(network)*. Jika jaringan tersebut memiliki paling sedikit satu jalur tertutup, maka jaringan tersebut adalah suatu rangkaian listrik. Pada bab ini, rangkaian yang digunakan adalah rangkaian sederhana dengan elemen-elemen penyusunnya hanya terdiri dari sumber tegangan bebas serta resistor.

Suatu rangkaian listrik dapat digambarkan oleh suatu graf terhubung berorientasi. Graf terhubung berorientasi adalah suatu graf terhubung yang terdiri dari himpunan simpul dan ruas berorientasi. Titik-titik cabang yang terdapat pada rangkaian direpresentasikan oleh himpunan simpul pada graf. Sedangkan elemen-elemen listrik pembentuk rangkaian direpresentasikan oleh himpunan ruas berorientasi.

Ruas berorientasi adalah ruas dari suatu graf yang memiliki sebarang orientasi. Orientasi tersebut dilambangkan oleh sebuah anak panah dan digunakan sebagai acuan arah untuk mendefinisikan tanda positif atau negatif bagi berbagai insidensi yang terdapat pada graf berorientasi.

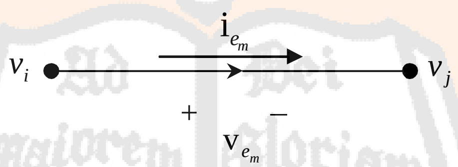
Orientasi pada graf berorientasi berbeda dengan orientasi pada graf berarah. Perjalanan yang terdapat pada graf berorientasi tidak dibatasi oleh orientasi dari setiap ruas seperti yang berlaku pada graf berarah. Dengan demikian, jalur, lintasan, *cycle* maupun sirkuit pada graf berorientasi dapat ditentukan tanpa terpengaruh orientasi dari tiap ruas graf tersebut.

Tiap titik cabang memiliki potensial yang berbeda. Perbedaan potensial ini mengakibatkan adanya arus yang mengalir pada elemen rangkaian. Arus tersebut mengalir dari titik yang memiliki potensial tinggi menuju titik berpotensial rendah. Oleh karena, setiap elemen listrik selalu dikaitkan dengan adanya tegangan dan arus. Karena ruas merupakan representasi elemen suatu rangkaian listrik, maka ruas berorientasi sebagai padanan suatu elemen rangkaian juga dihubungkan dengan adanya tegangan dan arus yang dinotasikan dengan v dan i.

Andaikan terdapat suatu ruas berorientasi e_m yang merupakan padanan dari suatu elemen rangkaian. Orientasi yang diberikan pada ruas tersebut digunakan sebagai arah acuan untuk menyatakan nilai positif negatif dari arus dan tegangan elemen rangkaian padanannya. Andaikan ruas berorientasi e_m insiden dengan simpul v_i dan simpul v_j. Sehingga tegangan dan arah arus pada ruas berorientasi e_m tersebut dapat didefinisikan sebagai berikut:

1. tegangan v_{e_m} bernilai positif jika simpul v_i memiliki potensial lebih tinggi daripada simpul v_j;
2. arus i_{e_m} bernilai positif jika arus tersebut mengalir dari simpul v_i ke simpul v_j.

Orientasi dari ruas berorientasi e_m disajikan pada Gambar 3.1 berikut:

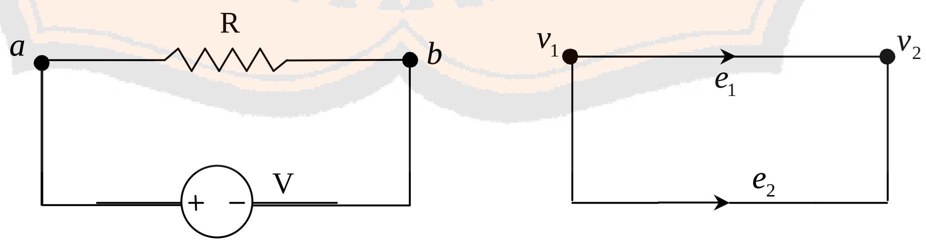


Gambar 3.1 Ruas berorientasi dan Orientasinya

Berikut ini diberikan contoh suatu rangkaian listrik dan graf padanannya:

Contoh 3.1:

Perhatikan Gambar 3.2 berikut ini:



(a) (b)

Gambar 3.2. Contoh Rangkaian Listrik (a) dan Graf Padanannya (b)

Bila rangkaian listrik yang terdapat pada Gambar 3.2 (a) disajikan dalam bentuk graf, maka graf yang mewakili adalah graf $G(V,E)$ yang terdapat pada Gambar 3.2 (b). Graf $G(V,E)$ terdiri dari $V=\{v_1,v_2\}$ dan $E=\{e_1,e_2\}$. Titik cabang a diwakili oleh simpul v_1 dan titik cabang b diwakili oleh simpul v_2. Sedangkan resistor R diwakili oleh ruas berorientasi e_1 dan sumber tegangan V diwakili oleh ruas e_2.

Kutub positif V memiliki potensial yang lebih tinggi dibandingkan kutub negatifnya, sehingga arus pada rangkaian Gambar 3.2 (a) mengalir dari kutub positif menuju kutub negatif. Misalkan diberikan sebarang orientasi pada setiap ruas graf $G(V,E)$ yang disajikan pada Gambar 3.2(b). Karena titik cabang a terhubung pada kutub positif V, maka potensial yang terdapat pada titik cabang a lebih tinggi dibandingkan dengan titik cabang b yang terhubung dengan kutub negatif V. Hal ini menyebabkan adanya arus yang mengalir dari titik cabang a menuju titik cabang b. Dengan demikian, nilai arus dari setiap ruas berorientasi pada $G(V,E)$ dapat ditentukan sebagai berikut: arus i_{e_1} bernilai positif karena arus tersebut mengalir dari simpul v_1 ke simpul v_2 dan arus i_{e_2} bernilai negatif karena arus i_{e_2} mengalir dari simpul v_2 ke simpul v_1. Sedangkan nilai tegangan dari setiap ruas berorientasi pada $G(V,E)$ dapat ditentukan sebagai berikut: tegangan v_{e_1} memiliki nilai positif karena simpul v_1 memiliki potensial yang lebih tinggi daripada simpul

v_2 dan tegangan v_{e_2} memiliki nilai positif karena simpul v_1 memiliki potensial yang lebih tinggi daripada simpul v_2.

B. Graf Padanan Rangkaian Listrik dan Matriks Insidensi

Para ilmuan kelistrikan menggunakan beberapa cara dalam memecahkan permasalahan pada suatu rangkaian. Salah satunya adalah dengan menggunakan Hukum Ohm. Akan tetapi, cara ini hanya dapat digunakan pada rangkaian seri dan paralel sederhana, contohnya rangkaian yang terdapat pada Gambar 3.2(a). Oleh karena itu, dalam menyelesaikan suatu rangkaian listrik yang lebih rumit, para ilmuan kelistrikan menggunakan analisis rangkaian dengan Hukum Kirchhoff.

Pada bab ini, kita akan memadukan antara analisis rangkaian listrik, khususnya analisis *loop*, graf dan matriks dalam menentukan arus pada tiap elemen rangkaian listrik. Setelah mengetahui arus pada tiap elemen, tegangan pada masing-masing elemen rangkaian dapat ditentukan dengan menggunakan Hukum Ohm. Oleh karena itu, langkah pertama yang harus dilakukan terlebih dahulu adalah menyajikan graf padanan rangkaian listrik ke dalam bentuk matriks.

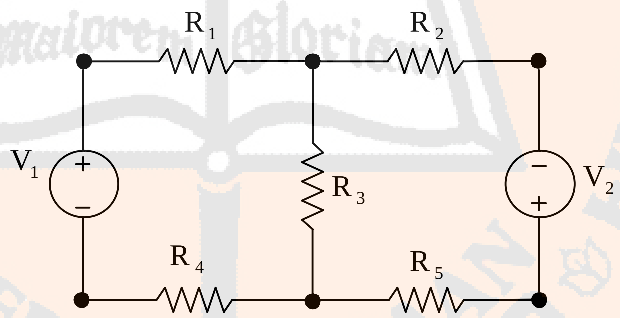
1. Graf dan Matriks Insidensi

Pada sub-bab terdahulu telah dipaparkan tentang cara merepresentasikan suatu rangkaian listrik dalam bentuk graf. Maka langkah selanjutnya adalah menyajikan insidensi antara simpul dan ruas graf padanan tersebut dalam bentuk matriks insidensi.

Orientasi ruas graf padanan suatu rangkaian listrik menentukan nilai positif atau negatif bagi insidensi antara simpul dan ruas. Jika setiap insidensi didefinisikan berdasarkan orientasi ruasnya, maka dapat dibentuk suatu matriks insidensi A antara ruas dan simpul dari graf tersebut. Berikut ini diberikan Contoh 3.2 yang menyajikan graf berorientasi dan matriks insidensi dari graf tersebut:

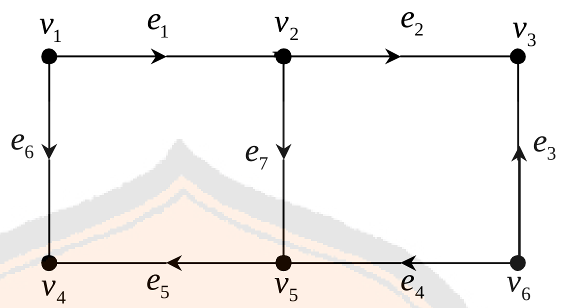
Contoh 3.2:

Misal terdapat suatu rangkaian listrik yang disajikan pada Gambar 3.3 berikut ini:



Gambar 3.3. Rangkaian Listrik untuk Contoh 3.2

Kemudian, misalkan terdapat graf $G(V,E)$ padanan rangkaian listrik pada Gambar 3.4 yang disajikan sebagai berikut:



Gambar 3.4. Graf $G(V,E)$ padanan Rangkaian Listrik pada Gambar 3.3

Pada Gambar 3.4 tampak bahwa simpul v_1 insiden dengan ruas e_1 dan ruas e_6 dimana pada kedua ruas tersebut arah orientasinya menjauhi simpul v_1. Simpul v_2 insiden dengan ruas e_1 dengan arah orientasi mendekati simpul v_2. Selain itu, simpul v_2 juga insiden dengan ruas e_2 dan e_7 dimana arah orientasi yang menjauhi simpul v_2. Simpul v_3 insiden dengan ruas e_2 dan e_3 dengan arah orientasi mendekati simpul v_3. Simpul v_4 insiden dengan ruas e_5 dan e_6 dimana kedua arah orientasiya mendekati simpul v_4. Simpul v_5 insiden dengan ruas e_4 dan ruas e_7 dengan arah orientasi mendekati simpul v_5. Selain itu, simpul v_5 juga insiden dengan ruas e_5 dimana arah orientasi menjauhi simpul v_5. Simpul v_6 insiden dengan ruas e_3 dan ruas e_4 dengan arah orientasi menjuhi simpul v_6. Dengan demikian, matriks insidensi yang terbentuk dari graf $G(V,E)$ adalah:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Jika salah satu baris dalam matriks A dihapuskan, maka akan terbentuk matriks berukuran $(n-1)\times m$ yang dinotasikan dengan A_0. Matriks A_0 disebut sebagai matriks reduksi insidensi dari matriks A. Simpul padanan baris yang dihapuskan ini disebut simpul referensi dari graf $G(V,E)$. Sebagai contoh, perhatikan Contoh 3.3 berikut:

Contoh 3.3:

Perhatikan matriks A yang terdapat pada Contoh 3.2 Jika kita menghapuskan baris terakhir dari matriks A, maka didapat matriks reduksi insidensi dari graf $G(V,E)$ sebagai berikut:

$$A_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Baris terakhir pada matriks A berpadanan dengan simpul v_6. Oleh karena itu simpul v_6 disebut simpul referensi graf $G(V,E)$.

2. *Cycle* Fundamental dan Matriks Insidensi *Cycle*-Ruas

Suatu susunan dari beberapa elemen listrik disebut suatu jaringan. Jika suatu jaringan mengandung sedikitnya satu jalur tertutup, maka jaringan tersebut merupakan suatu rangkaian. Untuk menghindari adanya masalah dalam penyebutan maupun definisi, maka dalam pembahasan ini kita akan gunakan istilah *loop* untuk menyebut suatu jalur tertutup. Sedangkan pada graf padanannya, yang dimaksud oleh *loop* di sini adalah suatu *cycle*.

Arus listrik hanya dapat mengalir pada suatu jalur tertutup. Jika terdapat salah satu elemen yang tidak terhubung dengan elemen lain, maka arus tidak dapat mengalir pada jalur tersebut. Untuk mengetahui besarnya arus yang mengalir pada suatu rangkaian listrik dengan dua atau lebih *loop* di dalamnya, kita dapat menggunakan Hukum Tegangan Kirchhoff. Dalam hal ini, Hukum Tegangan Kirchhoff diberlakukan pada masing-masing *loop* sehingga memperoleh suatu sistem persamaan.

Loop yang terdapat pada rangkaian listrik direpresentasikan oleh *cycle-cycle* yang terdapat pada graf padanan rangkaian listrik tersebut. Dengan demikian, untuk mencari besarnya arus kita perlu memberlakukan Hukum Tegangan Kirchhoff pada *cycle-cycle* tersebut sehingga diperoleh suatu sistem persamaan.

Pada suatu graf dapat dibentuk beberapa *cycle*. Jika Hukum Tegangan Kirchhoff diberlakukan pada *cycle-cycle* ini, maka akan terbentuk persamaan-persamaan. Akan tetapi, beberapa dari persamaan tersebut merupakan persamaan yang diturunkan dari persamaan lain. Oleh karena itu, kita perlu membentuk *cycle-cycle* fundamental yang akan menghasilkan persamaan-persamaan bebas yang dibutuhkan dalam mencari arus yang tidak diketahui.

Berdasarkan Definisi 2.17, jika sebuah dawai ditambahkan pada pohon rentangan dari suatu graf, maka akan terbentuk suatu *cycle* yang disebut *cycle* fundamental. Oleh karena itu, untuk membentuk *cycle-cycle* fundamental kita perlu membentuk suatu pohon rentang dari graf padanan suatu rangkaian listrik. Hal yang perlu diperhatikan adalah ruas-ruas padanan sumber-sumber tegangan pada rangkaian listrik harus menjadi cabang-cabang pada pohon rentangan tersebut.

Misalkan terdapat pohon rentang *T* dari graf $G(V,E)$. Berdasarkan Teorema 2.2, terdapat $m-n+1$ dawai dari suatu graf . Jika tiap dawai dari $m-n+1$ dawai graf $G(V,E)$ digabungkan dengan cabang-cabang pohon rentangan *T*, maka akan terbentuk $m-n+1$ *cycle* fundamental yang disebut himpunan *cycle* fundamental dari graf $G(V,E)$. Pada tiap *cycle* dari ke- $m-n+1$ *cycle* fundamental ini dapat ditentukan sebarang orientasi berdasarkan orientasi dawai graf $G(V,E)$. Dengan demikian akan didapatkan suatu sub-matriks insidensi dari B berukuran $(m-n+1)\times m$ yang dinotasikan dengan B_0.

Kolom-kolom matriks B_0 berpadanan dengan cabang-cabang dan dawai-dawai dari pohon rentangan *T*. Jika kolom-kolom tersebut diurutkan dan disusun sedemikian rupa $m-n+1$ kolom padanan dawai berada pada $m-n+1$ kolom pertama dan $n-1$ kolom padanan cabang berada pada $n-1$ kolom terakhir maka matriks B_0 akan berbentuk:

$$B_0 = [1_{m-n+1}, B_1].$$

Untuk lebih memahami pengertian dari *cycle* fundamental, berikut ini diberikan Contoh 3.4:

Contoh 3.4

Perhatikan graf yang terdapat pada Gambar 3.4.

Misalkan dibentuk pohon rentangan T dari $G(V,E)$ yang terdiri dari himpunan $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ dan himpunan $E = \{e_1, e_3, e_4, e_6, e_7\}$. Dengan demikian, dawai dari $G(V,E)$ adalah ruas e_2 dan e_5. Jika dawai e_5 dihubungkan dengan T, maka akan terbentuk *cycle* fundamental $v_1, e_1, v_2, e_7, v_5, e_5, v_4, e_6, v_1$. Jika dawai e_2 dihubungkan dengan T, maka akan terbentuk *cycle* fundamental $v_2, e_2, v_3, e_3, v_6, e_4, v_5, e_7, v_2$. Kedua *cycle* fundamental tersebut merupakan himpunan *cycle* fundamental dari $G(V,E)$.

Jika ditentukan sebarang orientasi untuk insidensi antara setiap *cycle* fundamental dan tiap ruas dari $G(V,E)$ berdasarkan orientasi dawai-dawainya, maka matriks insidensi *cycle*-ruas yang terbentuk adalah sebagai berikut:

$$B_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

dimana baris pertama pada matriks B_0 berpadanan dengan *cycle* fundamental $v_2, e_2, v_3, e_3, v_6, e_4, v_5, e_7, v_2$ dan baris kedua berpadanan dengan *cycle* fundamental $v_1, e_1, v_2, e_7, v_5, e_5, v_4, e_6, v_1$. Kolom pertama dan kolom kedua matriks B_0 berpadanan dengan dawai e_2 dan e_5. Sedangkan baris ketiga sampai baris ketujuh berpadanan dengan cabang e_1, e_3, e_4, e_6, dan cabang e_7.

3. Potongan Fundamental dan Matriks Insidesi Potongan-Ruas

Setiap elemen memiliki dua buah terminal. Untuk memindahkan muatan listrik dari satu terminal ke terminal lain dibutuhkan suatu usaha. Usaha inilah yang disebut dengan beda potensial atau tegangan.

Untuk mengetahui besarnya tegangan pada suatu rangkaian, kita dapat menggunakan Hukum Arus Kirchhoff. Dalam hal ini, Hukum Arus Kirchhoff diberlakukan pada masing-masing titik cabang sehingga membentuk suatu sistem persamaan. Pada graf padanan rangkaian listrik, titik-titik cabang direpresentasikan oleh simpul.

Pada suatu rangkaian listrik, tiap titik cabang menghubungkan dua atau lebih elemen rangkaian. Menurut Hukum Arus Kirchhoff, arus yang masuk dan keluar pada suatu titik cabang merupakan arus pada elemen-elemen yang terhubung pada titik cabang tersebut. Dalam hal ini, elemen-elemen pada rangkaian listrik direpresentasikan oleh ruas-ruas, maka untuk menentukan tegangan yang terdapat pada tiap elemen rangkaian, kita dapat memberlakukan Hukum Arus Kirchhoff pada potongan suatu graf.

Suatu graf memuat beberapa potongan dimana himpunan ruas yang insiden pada suatu simpul juga merupakan suatu potongan (Harray, 1967: 119). Jika Hukum Arus Kirchhoff diberlakukan pada potongan-potongan tersebut, maka akan didapat persamaan yang beberapa diantaranya merupakan persamaan tak bebas. Untuk itu, kita perlu membentuk himpunan potongan fundamental sehingga terbentuk persamaan bebas yang dibutuhkan. Untuk membentuk suatu potongan fundamental dari suatu graf, kita perlu membentuk pohon rentangan dari graf tersebut.

Pada Definisi 2.20 telah disebutkan bahwa setiap potongan fundamental terdiri dari satu cabang pohon rentangan dan dawai-dawai. Dengan demikian, berdasarkan Teorema 2.1 dari suatu graf terhubung dapat dibentuk $n-1$ potongan fundamental. Semua $n-1$ potongan ini disebut dengan himpunan potongan fundamental.

Pada tiap potongan anggota himpunan potongan fundamental dapat ditentukan sebarang orientasi. Andaikan insidensi antara tiap potongan fundamental dan ruas graf $G(V,E)$ didefinisikan berdasarkan orientasi ruas pada pohon rentang *T*, maka akan terbentuk suatu sub-matriks insidensi ruas-potong dari C. Sub-matriks tersebut berukuran $(n-1)\times m$ dan dinotasikan dengan matriks C_0. Jika kolom-kolom pada matriks C_0

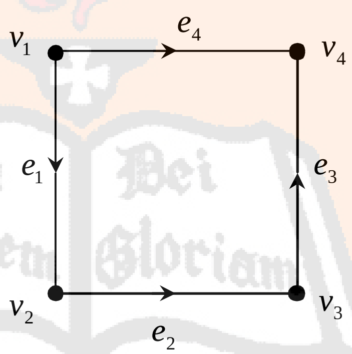
diurutkan dan disusun seperti kolom-kolom pada matriks B_0, maka matriks C_0 akan berbentuk:

$$C_0 = [C_1, 1_{n-1}].$$

Untuk lebih memahami potongan fundamental dan matriks insidensi potongan-ruas C_0, berikut ini akan diberikan contoh 3.5:

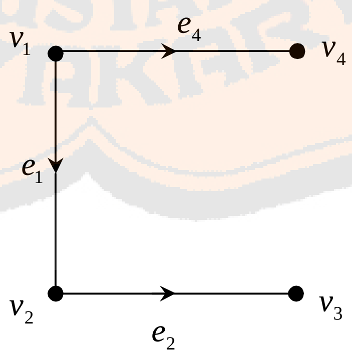
Contoh 3.5

Misalkan terdapat graf $G(V,E)$ yang disajikan pada Gambar 3.5 berikut:



Gambar 3.5. Graf $G(V,E)$ untuk Contoh 3.7

Misalkan dibentuk pohon rentangan T dari graf $G(V,E)$ yang disajikan pada Gambar 3.6 berikut:



Gambar 3.6. Pohon Rentangan T dari Graf $G(V,E)$ pada Gambar 3.5

Cabang e_1 dan dawai e_3 akan membentuk potongan fundamental $\{e_1, e_3\}$. Cabang e_2 dan dawai e_3 akan membentuk potongan fundamental $\{e_2, e_3\}$. Dan cabang e_3 dan dawai e_4 akan membentuk potongan fundamental $\{e_3, e_4\}$. Andaikan insidensi antara potongan-potongan fundamental dan ruas graf $G(V,E)$ didefinisikan berdasarkan orientasi cabang pohon rentangan graf $G(V,E)$, maka akan terbentuk matriks insidensi potongan-ruas sebagai berikut:

$$C_0 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

dimana baris pertama berpadanan dengan potongan fundamental $\{e_1, e_3\}$, baris kedua berpadanan dengan potongan fundamental $\{e_2, e_3\}$ dan baris ketiga berpadanan dengan potongan fundamental $\{e_3, e_4\}$. Kolom pertama matriks C_0 berpadanan dengan dawai e_3, sedangkan kolom pertama, kedua dan ketiga berpadanan dengan cabang e_1, e_2 dan e_4.

C. Analisis Rangkaian Listrik dengan Graf dan Matriks

Pada umumnya, permasalahan dari suatu rangkaian listrik adalah menentukan arus dan tegangan pada tiap-tiap elemennya jika nilai dari sumber-sumbernya diketahui. Untuk rangkaian yang hanya terdiri dari satu *loop*, penyelesaian dapat diperoleh dengan menggunakan Hukum Ohm. Langkah yang harus dilakukan adalah menentukan resistor ekuivalen dari resistor-resistor kemudian menggunakan Hukum Ohm sehingga ditemukan besar arus pada rangkaian tersebut.

Akan tetapi, kita kesulitan untuk menemukan arus dan tegangan pada rangkaian yang terdiri dari dua atau lebih *loop* dengan hanya menggunakan resistor ekuivalen dan Hukum Ohm. Oleh karena itu, kita menggunakan Hukum Kirchhoff untuk menganalisis rangkaian. Hukum ini memungkinkan kita untuk memperoleh persamaan-persamaan dalam mencari arus dan tegangan elemen yang tidak diketahui.

Berikut ini akan dibahas tentang langkah-langkah dalam analisis suatu rangkaian listrik dengan mengunakan graf dan matriks sebagai representasi dari graf:

1. Graf $G(V,E)$ padanan Rangkaian listrik

   Misalkan terdapat suatu rangkaian listrik yang terdiri dari resistor dan sumber tegangan bebas. Kemudian rangkaian listrik tersebut disajikan dalam suatu graf terhubung berorientasi $G(V,E)$ dimana titik cabang dan elemen-elemen pada rangkaian tersebut direpresentasikan oleh simpul dan ruas berorientasi graf $G(V,E)$.

2. Pohon Rentangan dari Graf $G(V,E)$

   Bentuk suatu pohon rentang dari graf $G(V,E)$ sedemikian hingga pohon rentangan tersebut mengandung semua ruas yang berpadanan dengan sumber tegangan. Jika kita tidak dapat mengikutkan semua sumber tegangan di dalam pohon rentangan, maka beberapa sumber tegangan pasti membentuk *cycle* (Chi Kong Tse, 2002: 178). Hal tersebut melanggar Hukum Tegangan Kirchhoff sehingga rangkaian tersebut tidak dapat dipecahkan.

3. Himpunan *Cycle* Fundamental dan Himpunan Potongan Fundamental

Kemudian, dari pohon rentangan graf $G(V,E)$ dibentuk himpunan *cycle* fundamental dan himpunan potongan fundamental. Insidensi antara himpunan *cycle* fundamental dan himpunan potongan fundamental dengan ruas-ruas $G(V,E)$ membentuk matriks insidensi *cycle*-ruas dan matriks insidensi potongan-ruas.

4. Hukum-hukum Kirchhoff

Selanjutnya, kita akan memberlakukan Hukum-hukum Kirchhoff pada himpunan potongan fundamental dan himpunan *cycle* fundamental dalam graf tersebut:

a. Potongan Fundamental dan Hukum Arus Kirchhoff

Pada Definisi 2.26 tentang Hukum Arus Kirchhoff disebutkan bahwa jumlah aljabar arus-arus yang memasuki setiap titik cabang pada suatu rangkaian listrik sama dengan nol. Dengan demikian, andaikan terdapat suatu graf berorientasi terhubung $G(V,E)$ yang merupakan padanan suatu rangkaian listrik berorder n dan berukuran

m. Kemudian, jika Hukum Arus Kirchhoff berlaku pada n simpul graf tersebut, maka dihasilkan persamaan-persamaan seperti berikut:

Untuk simpul v_1, persamaan yang dihasilkan :

$$a_1 \mathrm{i}_{e_1} + a_1 \mathrm{i}_{e_2} + \ldots + a_1 \mathrm{i}_{e_m} = 0,$$

untuk simpul v_2, persamaan yang dihasilkan :

$$a_2 \mathrm{i}_{e_1} + a_2 \mathrm{i}_{e_2} + \ldots + a_2 \mathrm{i}_{e_m} = 0$$

sedangkan untuk simpul v_n, persamaan yang dihasilkan adalah:

$$a_n \mathrm{i}_{e_1} + a_n \mathrm{i}_{e_2} + \ldots + a_n \mathrm{i}_{e_m} = 0$$

dengan $a_1, a_2, \ldots, a_n$ adalah koefisien arus di tiap ruas jika Hukum Arus Kirchhoff diberlakukan pada simpul ke-n.

Jika persamaan-persamaan tersebut dinyatakan dalam bentuk matriks, maka akan nampak sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} a_1 \mathrm{i}_{e_1} + a_1 \mathrm{i}_{e_2} + \ldots + a_1 \mathrm{i}_{e_m} \\ a_2 \mathrm{i}_{e_1} + a_2 \mathrm{i}_{e_2} + \ldots + a_2 \mathrm{i}_{e_m} \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_n \mathrm{i}_{e_1} + a_n \mathrm{i}_{e_2} + \ldots + a_n \mathrm{i}_{e_m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

atau dapat ditulis

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_1 & \ldots & a_1 \\ a_2 & a_2 & \ldots & a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & a_n & \ldots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{i}_{e_1} \\ \mathrm{i}_{e_2} \\ \vdots \\ \mathrm{i}_{e_m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Andaikan koefisien arus dari tiap ruas dinyatakan dengan oleh matriks insidensi A dan variabel arus dinyatakan oleh vektor $\mathbf{i}$ berukuran $(m \times 1)$, maka matriks tersebut dapat dituliskan menjadi:

$$A\mathbf{i} = \mathbf{0} \tag{3.1}$$

Himpunan ruas yang insiden pada suatu simpul merupakan suatu potongan. Dengan demikian dapat dikatakan bahwa matriks A termuat dalam matriks C. Hal tersebut mengakibatkan persamaan 3.1 merupakan kasus khusus dari pemberlakuan Hukum Arus Kirchhoff.

Secara umum Hukum Arus Kirchhoff dapat berbunyi jumlah arus-arus dalam ruas-ruas sebuah potongan adalah sama dengan nol dengan arah-arah arus yang dipilih sedemikian hingga semua arus mengalir dari satu subgraf ke subgraf lain melalui potongan tersebut (Chi Kong Tse, 2002:160). Dengan demikian, selain menerapkan Hukum Arus Kirchhoff pada simpul graf $G(V,E)$, kita dapat membentuk persamaan-persamaan bebas dengan menggunakan potongan fundamental.

Andaikan terdapat suatu graf berorientasi terhubung $G(V,E)$ yang merupakan padanan suatu rangkaian listrik berorder n dan berukuran m. Kemudian, jika $n-1$ potongan fundamental yang terdapat pada $G(V,E)$ diurutkan menjadi $c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}$ berdasarkan urutan cabang pohon rentangan padanannya dan jika Hukum Arus Kirchhoff berlaku pada $n-1$ potongan fundamental graf tersebut, maka dihasilkan persamaan-persamaan sebagai berikut:

untuk potongan fundamental c_1, persamaan yang dihasilkan :

$$c_1\mathrm{i}_{e_1} + c_1\mathrm{i}_{e_2} + \ldots + c_1\mathrm{i}_{e_m} = 0\,,$$

untuk potongan fundamental c_2, persamaan yang dihasilkan :

$$c_2 \mathrm{i}_{e_1} + c_2 \mathrm{i}_{e_2} + \ldots + c_2 \mathrm{i}_{e_m} = 0$$

sedangkan untuk potongan fundamental c_{n-1}, persamaan yang dihasilkan adalah:

$$c_{n-1} \mathrm{i}_{e_1} + c_{n-1} \mathrm{i}_{e_2} + \ldots + c_{n-1} \mathrm{i}_{e_m} = 0$$

dengan $c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}$ adalah koefisien arus di tiap ruas jika Hukum Arus Kirchhoff diberlakukan pada $n-1$ potongan fundamental.

Jika dinyatakan dalam bentuk matriks, maka persamaan akan menjadi:

$$\begin{bmatrix} c_1 \mathrm{i}_{e_1} + c_1 \mathrm{i}_{e_2} + \ldots + c_1 \mathrm{i}_{e_m} \\ c_2 \mathrm{i}_{e_1} + c_2 \mathrm{i}_{e_2} + \ldots + c_2 \mathrm{i}_{e_m} \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ c_{n-1} \mathrm{i}_{e_1} + c_{n-1} \mathrm{i}_{e_2} + \ldots + c_{n-1} \mathrm{i}_{e_m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

atau dapat ditulis

$$\begin{bmatrix} c_1 & c_1 & \ldots & c_1 \\ c_2 & c_2 & \ldots & c_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n-1} & c_{n-1} & \ldots & c_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{i}_{e_1} \\ \mathrm{i}_{e_2} \\ \vdots \\ \mathrm{i}_{e_m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Andaikan koefisien arus tiap ruas dinyatakan oleh matriks insidensi potongan-ruas C_0 dan variabel arus dinyatakan oleh vektor $\mathbf{i}$ berukuran $(m \times 1)$, maka matriks tersebut dapat dituliskan menjadi:

$$\mathbf{C_0 i} = \mathbf{0} \tag{3.2}$$

dimana $\mathbf{i} = \begin{bmatrix} \mathbf{i}_D \\ \mathbf{i}_T \end{bmatrix}$, $\mathbf{i}_D$ menyatakan vektor arus pada dawai-dawai dan $\mathbf{i}_T$ menyatakan vektor arus pada cabang pohon rentangan.

b. *Cycle* Fundamental dan Hukum Tegangan Kirchhoff

Berdasarkan Definsi 2.27, Hukum Tegangan Kirchhoff mengatakan bahwa jumlah aljabar seluruh tegangan pada suatu jalur tertutup sama dengan nol. Andaikan terdapat suatu graf berorientasi terhubung $G(V,E)$ padanan suatu rangkaian listrik berorder n dan berukuran m. Karena pada $G(V,E)$ terdapat $m-n+1$ dawai, maka dapat dibentuk $m-n+1$ *cycle* fundamental pada $G(V,E)$.

Jika $m-n+1$ *cycle* fundamental diurutkan berdasarkan urutan dawai padanannya dan Hukum Tegangan Kirchhoff berlaku pada masing-masing *cycle* fundamental tersebut, maka dihasilkan persamaan-persamaan seperti berikut:

Untuk *cycle* fundamental b_1, persamaan yang dihasilkan :

$$b_1 \mathrm{v}_{e_1} + b_1 \mathrm{v}_{e_2} + \ldots + b_1 \mathrm{v}_{e_m} = 0,$$

untuk *cycle* fundamental b_2, persamaan yang dihasilkan :

$$b_2 \mathrm{v}_{e_1} + b_2 \mathrm{v}_{e_2} + \ldots + b_2 \mathrm{v}_{e_m} = 0,$$

dan untuk *cycle* fundamental b_{m-n+1}, persamaan yang dihasilkan:

$$b_{m-n+1} \mathrm{v}_{e_1} + b_{m=n+1} \mathrm{v}_{e_2} + \ldots + b_{m-n+1} \mathrm{v}_{e_m} = 0,$$

dimana $b_1, b_2, \ldots, b_{m-n+1}$ menyatakan koefisien tegangan yang terdapat pada ruas e_m jika Hukum Tegangan Kirchhoff diberlakukan pada *cycle* fundamental $b_1, b_2, \ldots, b_{m-n+1}$.

Dalam bentuk matriks persamaan tersebut akan menjadi:

$$\begin{bmatrix} b_1 \mathrm{v}_{e_1} + b_1 \mathrm{v}_{e_2} + \ldots + b_1 \mathrm{v}_{e_m} \\ b_2 \mathrm{v}_{e_1} + b_2 \mathrm{v}_{e_2} + \ldots + b_2 \mathrm{v}_{e_m} \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ b_{m-n+1} \mathrm{v}_{e_1} + b_{m=n+1} \mathrm{v}_{e_2} + \ldots + b_{m-n+1} \mathrm{v}_{e_m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

atau dapat ditulis:

$$\begin{bmatrix} b_1 & b_1 & \ldots & b_1 \\ b_2 & b_2 & \ldots & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m-n+1} & b_{m-n+1} & \ldots & b_{m-n+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{v}_{e_1} \\ \mathrm{v}_{e_2} \\ \vdots \\ \mathrm{v}_{e_m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Andaikan koefisien tegangan dari tiap ruas dinyatakan dengan oleh matriks insidensi *cycle* -ruas B_0 dan variabel tegangan dinyatakan oleh vektor $\mathbf{v}$ berukuran $(m \times 1)$, maka matriks tersebut dapat dituliskan menjadi:

$$B_0 \mathbf{v} = \mathbf{0} \tag{3.3}$$

dimana $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_D \\ \mathbf{v}_T \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_D$ menyatakan tegangan pada dawai-dawai dan $\mathbf{v}_T$ menyatakan tegangan pada cabang-cabang pohon rentangan.

5. Persamaan *Loop*

Andaikan ruas-ruas yang berpadanan dengan resistor-resistor pada rangkaian listrik diurutkan seperti pada urutan ruas padanan kolom matriks B_0. Selanjutnya kita bentuk matriks B_R yang dibentuk dari kolom-kolom matriks B_0 yang berpadanan dengan ruas-ruas representasi dari resistor-resisor. Selain itu, kita juga harus membentuk matriks B_V yang dibentuk dari kolom-kolom yang berpadanan dengan ruas-ruas representasi dari sumber tegangan pada rangkaian.

Kemudian, misalkan terdapat k ruas yang berpadanan dengan resistor-resistor rangkaian listrik. Kemudian, kita bentuk matriks diagonal $R_{k\times k} = (r_{kk})$:

$$R = \begin{bmatrix} r_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & r_k \end{bmatrix}$$

dimana r_{kk} merupakan nilai tiap resistor. Selain itu kita bentuk pula vektor sumber tegangan $\mathbf{v}_S$ yang berpadanan dengan nilai pada sumber-sumber tegangan. Hal yang perlu diperhatikan bahwa urutan kolom-kolom dari matriks R dan vektor-vektor dari vektor sumber tegangan $\mathbf{v}_S$ disesuaikan dengan urutan seperti pada kolom-kolom matriks B_0.

Dengan menggunakan matriks-matriks tersebut, kita dapat membentuk $m-n+1$ persamaan yang disebut persamaan *loop* (Wilson & Beineke, 1976: 96) sebagai berikut:

$$B_R R B_R^T \mathbf{i}_D = -B_V \mathbf{v}_S \tag{3.4}$$

dimana B_R merupakan submatriks yang dibentuk dari kolom-kolom matriks B_0 yang berpadanan dengan resistor, R merupakan matriks diagonal dari nilai resistor-resistor, $\mathbf{i}_D$ merupakan vektor arus pada dawai, B_V merupakan submatriks dari B_0 yang yang dibentuk dari kolom-kolom matriks B_0 yang berpadanan dengan sumber tegangan dan $\mathbf{v}_S$ merupakan vektor nilai sumber tegangan. Matriks berukuran $(m-n+1)\times(m-n+1)$ yang dibentuk dari $B_R R B_R^T$ disebut Matriks Resistansi. Dari persamaan *loop* tersebut, akan diperoleh nilai $\mathrm{i}_1, \mathrm{i}_2, \ldots, \mathrm{i}_{m-n+1}$ yang berpadanan dengan besarnya arus pada masing-masing dawai dari graf $G(V,E)$.

Setelah mengetahui besarnya arus pada masing-masing masing dawai dari graf $G(V,E)$, kita dapat arus pada cabang-cabang pohon rentangan dari graf $G(V,E)$ dengan menggunakan persamaan Hukum Arus Kirchhoff pada potongan fundamental seperti yang tampak pada persamaan 3.2. Dengan demikian, kita pun dapat memperoleh tegangan pada tiap resistor dengan mengunakan Hukum Ohm

$$\mathrm{v} = \mathrm{Ri} \qquad (3.5)$$

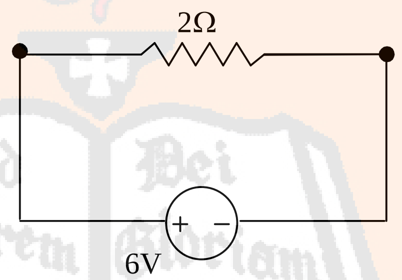
dimana v adalah tegangan, R adalah hambatan yang terdapat pada elemen dan i adalah arus yang mengalir melalui elemen tersebut. Tegangan-tegangan tersebut pasti memenuhi persamaan Hukum Tegangan Kirchhoff yang tampak pada persamaan 3.3.

D. Beberapa Analisis Rangkaian Listrik dengan Graf dan Matriks

Kita telah membahas tentang representasi dari suatu rangkaian listrik, analisis rangkaian dalam graf dan matriks. Selanjutnya akan diberikan beberapa contoh analisis suatu rangkaian listrik dengan graf dan matriks.

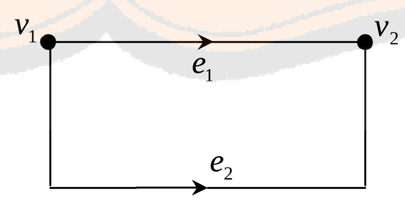
1. Analisis Rangkaian Listrik dengan *Loop* Tunggal

Misalkan terdapat suatu rangkaian listrik yang tersusun oleh sebuah sumber tegangan dan satu buah resistor. Rangkaian tersebut disajikan pada Gambar 3.7 sebagai berikut:



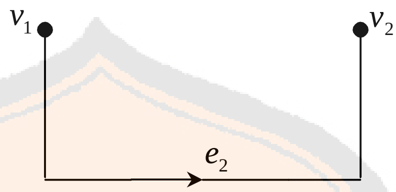
Gambar 3.7 Rangkaian Listrik dengan Satu *Loop*

Rangkaian listrik pada Gambar 3.7 dapat disajikan dalam graf terhubung berorientasi $G(V,E)$ yang terdiri dari $V=\{v_1,v_2\}$ dan $E=\{e_1,e_2\}$. Graf $G(V,E)$ dapat disajikan sebagai berikut:



Gambar 3.8 Graf $G(V,E)$ padanan Rangkaian Listrik pada Gambar 3.7

Misalkan dibentuk pohon rentangan P yang disajikan sebagai berikut:



Gambar 3.9 Pohon Rentangan P dari Graf $G(V, E)$ pada Gambar 3.8

Misalkan dawai e_1 ditambahkan pada pohon rentangan P, maka akan terbentuk *cycle* fundamental v_1, e_1, v_2, e_2, v_1. Jika insidensi *cycle* fundamental v_1, e_1, v_2, e_2, v_1 dengan tiap ruas pada $G(V, E)$ didefinisikan berdasarkan orientasi dawai e_1, maka diperoleh matriks insidensi *cycle*-ruas sebagai berikut:

$$B_0 = [1 \quad -1].$$

Jika Hukum Tegangan Kirchhoff berlaku pada *cycle* fundamental v_1, e_1, v_2, e_2, v_1, maka diperoleh persamaan sebagai berikut:

$$B_0 \mathbf{v} = \mathbf{0}$$

$$[1 \quad -1]\begin{bmatrix} \mathrm{v}_1 \\ \mathrm{v}_2 \end{bmatrix} = [0]$$

$$[\mathrm{v}_1 - \mathrm{v}_2] = [0].$$

Dengan demikian, kita memperoleh persamaan Hukum Tegangan Kirchhoff:

$$\mathrm{v}_1 - \mathrm{v}_2 = 0 \tag{3.6}$$

Jika ruas e_2 pada pohon rentangan P dihubungkan dengan dawai e_1 dari $G(V,E)$, maka terbentuk potongan fundamental $\{e_1,e_2\}$. Jika insidensi antara potongan fundamental $\{e_1,e_2\}$ dengan tiap ruas pada $G(V,E)$ didefinisikan berdasarkan orientasi ruas e_2, maka diperoleh matriks insidensi potongan-ruas sebagai berikut:

$$C_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Jika Hukum Arus Kirchhoff berlaku pada potongan fundamental graf $G(V,E)$, maka diperoleh persamaan sebagai berikut:

$$C_0\mathbf{i} = \mathbf{0}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathrm{i}_1 \\ \mathrm{i}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \mathrm{i}_1 + \mathrm{i}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}.$$

Dengan demikian, kita memperoleh persamaan Hukum Arus Kirchhoff :

$$\mathrm{i}_1 + \mathrm{i}_2 = 0 \tag{3.7}$$

Untuk mengetahui besarnya arus i_1 pada dawai e_1, kita membentuk matriks-matriks berikut ini:

1. Matriks $R = [2]$ diperoleh karena nilai resistor pada rangkaian adalah 2Ω.
2. Matriks $B_R = [1]$ merupakan submatriks yang dibentuk dari kolom matriks B_0 yang berpadanan dengan resistor, matriks $B_R^T = [1]$ merupakan transpos dari matriks B_R dan matriks $B_V = [-1]$

merupakan submatriks yang dibentuk dari kolom matriks B_0 yang berpadanan dengan sumber tegangan.

3. Vektor tegangan $\mathbf{v}_S = [6]$ yang diperoleh dari nilai sumber tegangan $\mathrm{V} = 6V$.

Dengan menggunakan matriks-matriks tersebut, maka persamaan *loop*-nya menjadi:

$$B_R R B_R^T \mathbf{i}_D = -B_V \mathbf{v}_S$$

$$[1][2][1][\mathrm{i}_1] = -[-1][6]$$

$$[2\mathrm{i}_1] = [6].$$

Dengan demikian kita peroleh persamaan:

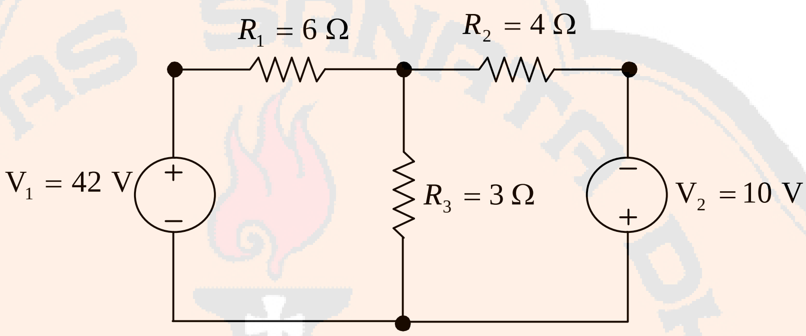
$$2\mathrm{i}_1 = 6 \tag{3.8}$$

Dari persamaan 3.7 dan 3.8 dapat diketahui bahwa $\mathrm{i}_1 = 3\mathrm{A}$ dan $\mathrm{i}_2 = -3\mathrm{A}$. Arus i_2 bernilai negatif, dengan demikian arah arus yang diberikan berlawanan dengan arah arus yang sebenarnya. Karena $\mathrm{i}_1 = 3\mathrm{A}$, maka dengan Hukum Ohm dapat diketahui bahwa $\mathrm{v}_1 = 6\mathrm{V}$. Dari persamaan 3.6 diketahui bahwa $\mathrm{v}_1 = \mathrm{v}_2 = 6\mathrm{V}$

2. Analisis Rangkaian Listrik dengan *Loop* Majemuk

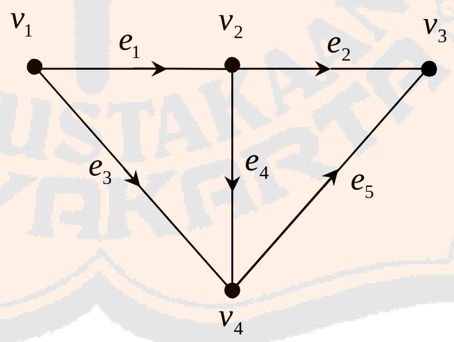
a. Analisis Rangkaian Listrik dengan Dua *Loop*

Misalkan terdapat suatu rangkaian listrik, tersusun dari dua buah sumber tegangan dan tiga buah resistor yang disajikan pada Gambar 3.10 sebagai berikut:



Gambar 3.10. Rangkaian Listrik dengan Dua *Loop*

Rangkaian listrik yang disajikan pada Gambar 3.10 dapat direpresentasikan dalam bentuk graf terhubung berorientasi $G(V,E)$ yang disajikan pada Gambar 3.11 sebagai berikut



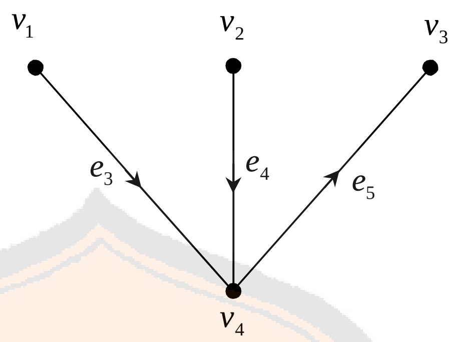
Gambar 3.11.

Graf $G(V,E)$ padanan Rangkaian Listrik pada Gambar 3.10

Graf $G(V,E)$ terdiri dari himpunan $V=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$ dan himpunan $E=\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5\}$. Dalam hal ini, masing-masing simpul dan ruas berorientasi dari graf $G(V,E)$ merepresentasikan titik cabang dan elemen dari rangkaian listrik pada Gambar 3.10.

Titik cabang yang menghubungkan V_1 dan R_1 direpresentasikan oleh simpul v_1. Titik cabang yang menghubungkan R_1, R_2 dan R_3 direpresentasikan oleh simpul v_2. Titik cabang yang menghubungkan V_2 dan R_2 direpresentasikan oleh simpul v_3. Titik cabang yang menghubungkan V_1, V_2 dan R_3 direpresentasikan oleh simpul v_4. Elemen V_1 direpresentasikan oleh ruas e_3. Elemen V_2 direpresentasikan oleh e_5. Elemen R_1 direpresentasikan oleh e_1. Elemen R_2 direpresentasikan oleh e_2. Elemen R_3 direpresentasikan oleh e_4.

Misalkan dibentuk pohon rentangan T dari graf $G(V,E)$ yang terdiri himpunan $V=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$ dan himpunan $E=\{e_3,e_4,e_5\}$ sedemikian hingga ruas e_1 dan e_2 merupakan dawai dari $G(V,E)$. Pohon rentangan T dapat disajikan pada Gambar 3.12 sebagai berikut:



Gambar 3.12. Pohon Rentangan Graf $G(V,E)$ pada Gambar 3.11

Misalkan dawai e_1 dan e_2 ditambahkan pada pohon rentangan T dari graf $G(V,E)$ maka akan terbentuk himpunan *cycle* fundamental dari $G(V,E)$ yang terdiri dari *cycle* fundamental $v_1,e_3,v_4,e_4,v_2,e_1,v_1$ dan $v_2,e_4,v_4,e_5,v_3,e_2,v_2$. Jika insidensi antara tiap *cycle* fundamental dengan tiap ruas pada $G(V,E)$ didefinisikan berdasarkan orientasi dawai, maka diperoleh matriks insidensi *cycle*-ruas sebagai berikut:

$$B_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Jika Hukum Tegangan Kirchhoff berlaku pada *cycle* fundamental graf $G(V,E)$, maka diperoleh persamaan sebagai berikut:

$$B_0\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{v}_1 \\ \mathrm{v}_2 \\ \mathrm{v}_3 \\ \mathrm{v}_4 \\ \mathrm{v}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} v_1 - v_3 + v_4 \\ v_2 - v_4 - v_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Dengan demikian kita memperoleh persamaan Hukum Tegangan Kirchhoff sebagai berikut:

$$v_1 - v_3 + v_4 = 0 \tag{3.9}$$

$$v_2 - v_4 - v_5 = 0 \tag{3.10}$$

Kemudian, jika masing-masing ruas pada pohon rentangan T dihubungkan dengan dawai-dawai dari $G(V,E)$, maka akan terbentuk himpunan potongan fundamental yang terdiri dari potongan fundamental $\{e_1, e_3\}$, $\{e_1, e_2, e_4\}$ dan $\{e_2, e_5\}$. Jika insidensi antara tiap potongan dengan tiap ruas pada $G(V,E)$ didefinisikan berdasarkan orientasi ruas pohon rentangan T, maka diperoleh matriks insidensi potongan-ruas sebagai berikut:

$$C_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Jika Hukum Arus Kirchhoff berlaku pada potongan fundamental graf $G(V,E)$, maka diperoleh persamaan sebagai berikut:

$$C_0\mathbf{i} = \mathbf{0}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} i_1 + i_3 \\ -i_1 + i_2 + i_4 \\ i_2 + i_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Dengan demikian, kita memperoleh pesamaan Hukum Arus Kirchhoff sebagai berikut:

$$i_1 + i_3 = 0 \tag{3.11}$$

$$-i_1 + i_2 + i_4 = 0 \tag{3.12}$$

$$i_2 + i_5 = 0 \tag{3.13}$$

Untuk mengetahui besarnya arus i_1 dan i_2 yang terdapat pada dawai e_1 dan e_2, kita dapat membentuk matriks-matriks berikut ini:

1. Matriks $R = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ yang dibentuk dari nilai resistor

   $R_1 = 6\Omega$, $R_2 = 4\Omega$ dan $R_3 = 3\Omega$

2. Matriks $B_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ dibentuk dari kolom pertama, kedua dan keempat dari matriks B_0 yang berpadanan dengan

resistor , $B_R^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ merupakan transpos dari matriks B_R

dan matriks $B_V = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ yang dibentuk dari kolom ketiga dan kelima matriks B_0 yang berpadanan dengan sumber tegangan

3. Vektor tegangan $\mathbf{v}_S = \begin{bmatrix} 42 \\ 10 \end{bmatrix}$ yang dibentuk dari nilai sumber tegangan $\mathrm{V}_1 = 42\mathrm{V}$ dan $\mathrm{V}_2 = 10\mathrm{V}$

Dengan menggunakan matriks-matriks tersebut, maka persamaan *loop*-nya menjadi:

$$B_R R B_R^T \mathbf{i}_D = -B_V \mathbf{v}_S$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{i}_1 \\ \mathrm{i}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 42 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 9 & -3 \\ -3 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{i}_1 \\ \mathrm{i}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 42 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 9\mathrm{i}_1 - 3\mathrm{i}_2 \\ -3\mathrm{i}_1 + 7\mathrm{i}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 42 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

Dengan demikian kita memperoleh persamaan:

$$9\mathrm{i}_1 - 3\mathrm{i}_2 = 42 \qquad (3.14)$$

$$-3\mathrm{i}_1 + 7\mathrm{i}_2 = 10 \qquad (3.15)$$

Kemudian, dengan mengeliminasi persamaan 3.14 dan 3.15, diketahui bahwa $i_1 = 6A$ dan $i_2 = 4A$.

Karena $i_1 = 6A$ dan $i_2 = 4A$ telah diketahui, maka dengan persamaan 3.11, 3.12 dan 3.13 arus-arus yang terdapat pada ruas lain dapat diketahui sebagai berikut:

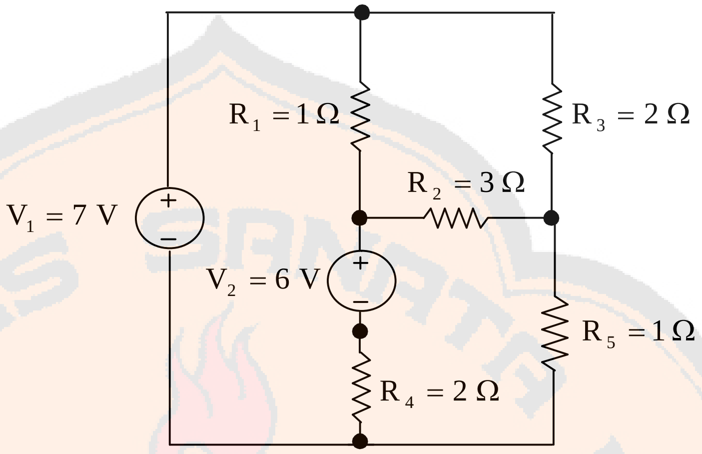
1. $i_3 = -i_1 = -6A$
2. $i_4 = i_1 - i_2 = 6A - 4A = 2A$
3. $i_5 = -i_2 = -4A$

Karena nilai i_3 dan i_5 negatif, maka arah orietasi yang diberikan pada ruas padanannya berlawanan dengan arah ruas sebenarnya.

Setelah kita mengetahui arus pada masing-masing elemen, maka kita dapat mencari tegangan pada masing-masing pada R_1, R_2 dan R_3 dengan menggunakan Hukum Ohm. Dengan demikian dapat diperoleh hasil sebagai berikut $v_1 = 36V$ untuk tegangan pada R_1, $v_2 = 16V$ untuk tegangan pada R_2 dan $v_4 = 6V$ untuk tegangan pada R_3 dimana tegangan-tegangan tersebut memenuhi persamaan Hukum Tegangan Kirchhoff yang tampak pada persamaan 3.9 dan 3.10.

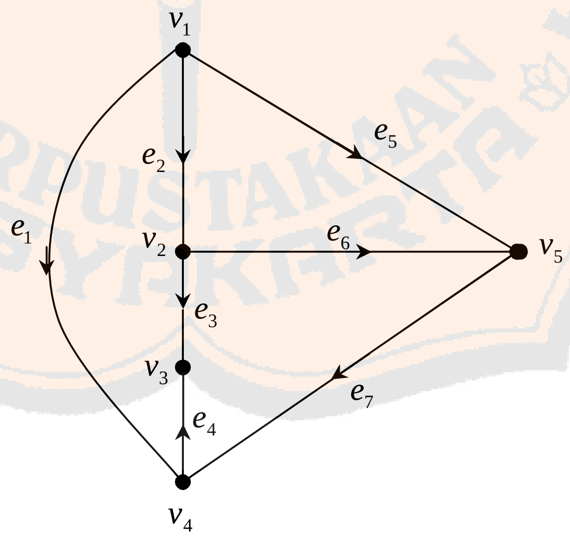
b. Analisis Rangkaian Listrik dengan Tiga *Loop*

Misalkan terdapat suatu rangkaian listrik dengan tiga buah *loop*. Rangkaian tersebut disusun oleh dua sumber tegangan dan lima resistor. Rangkaian listrik tersebut dapat disajikan pada Gambar 3.13 sebagai berikut:



Gambar 3.13. Contoh Rangkaian Listrik dengan Tiga *Loop*

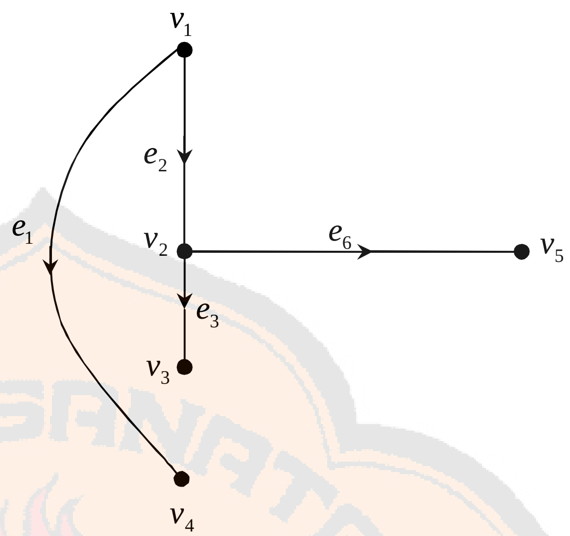
Rangkaian listrik pada Gambar 3.13 dapat direpresentasikan dalam bentuk graf terhubung berorientasi $G(V,E)$ yang disajikan pada Gambar 3.14 sebagai berikut:



Gambar 3.14.
Graf $G(V,E)$ padanan Rangkaian Listrik pada Gambar 3.13

Graf $G(V,E)$ terdiri dari himpunan $V=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5\}$ dan himpunan $E=\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6,e_7\}$. Titik cabang yang menghubungkan V_1, R_1 dan R_3 direpresentasikan oleh simpul v_1. Titik cabang yang menghubungkan R_1, R_2 dan V_2 direpresentasikan oleh simpul v_2. Titik cabang yang menghubungkan V_2 dan R_4 direpresentasikan oleh simpul v_3. Titik cabang yang menghubungkan V_1, R_4 dan R_5 direpresentasikan oleh simpul v_4. Titik cabang yang menghubungkan R_2, R_3 dan R_5 direpresentasikan oleh simpul v_4. Elemen V_1 direpresentasikan oleh ruas e_1. Elemen V_2 direpresentasikan oleh e_3. Elemen R_1 direpresentasikan oleh e_2. Elemen R_2 direpresentasikan oleh e_6. Elemen R_3 direpresentasikan oleh e_5. Elemen R_4 direpresentasikan oleh e_4. Elemen R_5 direpresentasikan oleh e_7.

Misalkan dibentuk pohon rentangan T dari graf $G(V,E)$ yang terdiri himpunan $V=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5\}$ dan himpunan $E=\{e_1,e_2,e_3,e_6\}$ sedemikian hingga ruas e_4, e_5 dan e_7 merupakan dawai dari $G(V,E)$. Pohon rentangan T dapat disajikan sebagai berikut:



Gambar 3.15.

Pohon Rentangan T dari Graf $G(V,E)$ pada Gambar 3.14

Misalkan dawai e_4, e_5 dan e_7 ditambahkan pada pohon rentangan T maka akan terbentuk himpunan *cycle* fundamental dari $G(V,E)$ yang terdiri dari *cycle* fundamental $(v_1,e_2,v_2,e_3,v_3,e_4,v_4,e_1,v_1)$, $(v_1,e_2,v_2,e_6,v_5,e_5,v_1)$ dan $(v_1,e_2,v_2,e_6,v_5,e_7,v_4,e_1,v_1)$. Jika insidensi antara tiap *cycle* fundamental dengan tiap ruas pada $G(V,E)$ didefinisikan berdasarkan orientasi dawai, maka diperoleh matriks insidensi *cycle*-ruas sebagai berikut:

$$B_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Jika Hukum Tegangan Kirchhoff berlaku pada *cycle* fundamental graf $G(V,E)$, maka diperoleh persamaan sebagai berikut:

$$B_0\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_4 \\ v_5 \\ v_7 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} v_4 + v_1 - v_2 - v_3 \\ v_5 - v_2 - v_6 \\ v_7 - v_1 + v_2 + v_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Dengan demikian kita memperoleh persamaan Hukum Tegangan Kirchhoff sebagai berikut:

$$v_4 + v_1 - v_2 - v_3 = 0 \qquad (3.16)$$

$$v_5 - v_2 - v_6 = 0 \qquad (3.17)$$

$$v_7 - v_1 + v_2 + v_6 = 0 \qquad (3.18)$$

Kemudian, jika masing-masing ruas pada pohon rentangan T dihubungkan dengan dawai-dawai dari $G(V,E)$, maka akan terbentuk himpunan potongan fundamental yang terdiri dari potongan fundamental $\{e_1, e_4, e_7\}$, $\{e_2, e_4, e_5, e_7\}$, $\{e_3, e_4\}$ dan potongan $\{e_5, e_6, e_7\}$. Jika insidensi antara tiap potongan dengan tiap ruas pada $G(V, E)$ didefinisikan berdasarkan orientasi ruas pohon rentangan T, maka diperoleh matriks insidensi potongan-ruas sebagai berikut:

$$C_0 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Jika Hukum Arus Kirchhoff berlaku pada potongan fundamental graf $G(V, E)$, maka diperoleh persamaan sebagai berikut:

$$C_0\mathbf{i} = \mathbf{0}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{i}_4 \\ \mathrm{i}_5 \\ \mathrm{i}_7 \\ \mathrm{i}_1 \\ \mathrm{i}_2 \\ \mathrm{i}_3 \\ \mathrm{i}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -\mathrm{i}_4 + \mathrm{i}_7 + \mathrm{i}_1 \\ \mathrm{i}_4 + \mathrm{i}_5 - \mathrm{i}_7 + \mathrm{i}_2 \\ \mathrm{i}_4 + \mathrm{i}_3 \\ \mathrm{i}_5 - \mathrm{i}_7 + \mathrm{i}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Dengan demikian, kita memperoleh persamaan Hukum Arus Kirchhoff sebagai berikut:

$$-\mathrm{i}_4 + \mathrm{i}_7 + \mathrm{i}_1 = 0 \tag{3.19}$$

$$\mathrm{i}_4 + \mathrm{i}_5 - \mathrm{i}_7 + \mathrm{i}_2 = 0 \tag{3.20}$$

$$\mathrm{i}_4 + \mathrm{i}_3 = 0 \tag{3.21}$$

$$i_5 - i_7 + i_6 = 0 \qquad (3.22)$$

Untuk mengetahui besarnya arus i_4, i_5 dan i_7, kita perlu membentuk matriks-matriks berikut ini:

1. Matriks $R = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ yang diperoleh dari nilai resisitor sebagai berikut $R_1 = 1\Omega$, $R_2 = 3\Omega$, $R_3 = 2\Omega$, $R_4 = 2\Omega$ dan $R_5 = 1\Omega$.

2. Matriks $B_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ dibentuk dari kolom pertama, kedua, ketiga, kelima dan ketujuh dari matriks B_0 yang berpadanan dengan resisitor , $B_R^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ merupakan transpos dari matriks B_R dan $B_V = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ dibentuk dari kolom keempat dan keenam dari matriks B_0 yang berpadanan dengan sumber tegangan.

3. Vektor tegangan $\mathbf{v}_S = \begin{bmatrix} 7 \\ 6 \end{bmatrix}$ yang dibentuk dari nilai sumber tegangan $V_1 = 7V$ dan $V_2 = 6V$

Dengan menggunakan matriks-matriks tersebut, maka persamaan *loop*-nya menjadi:

$$B_R R B_R^T \mathbf{i}_D = -B_V \mathbf{v}_S$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_4 \\ i_5 \\ i_7 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 6 & -4 \\ -1 & -4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_4 \\ i_5 \\ i_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3i_4 + i_5 - i_7 \\ i_4 + 6i_5 - 4i_7 \\ -i_4 - 4i_5 + 5i_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Dengan demikian, kita memperoleh persamaan :

$$3i_4 + i_5 - i_7 = -1 \tag{3.23}$$

$$i_4 + 6i_5 - 4i_7 = 0 \tag{3.24}$$

$$-i_4 - 4i_5 + 5i_7 = 7 \tag{3.25}$$

Dengan mengeliminasi persamaan 3.23, 3.24 dan 3.25, dapat diketahui bahwa $i_4 = 0$, $i_5 = 2A$ dan $i_7 = 3A$.

Karena $i_4 = 0$, $i_5 = 2A$ dan $i_7 = 3A$ telah diketahui, maka dengan persamaan Hukum Arus Kirchhoff yang tampak pada persamaan 3.19, 3.20, 3.21 dan 3.22, arus-arus yang terdapat pada ruas lain dapat diketahui sebagai berikut:

1. $i_1 = i_4 - i_7 = -3A$
2. $i_2 = -i_4 - i_5 + i_7 = 0 - 2A + 3A = 1A$
3. $i_6 = -i_5 + i_7 = -2A + 3A = 1A$
4. $i_3 = -i_4 = 0$

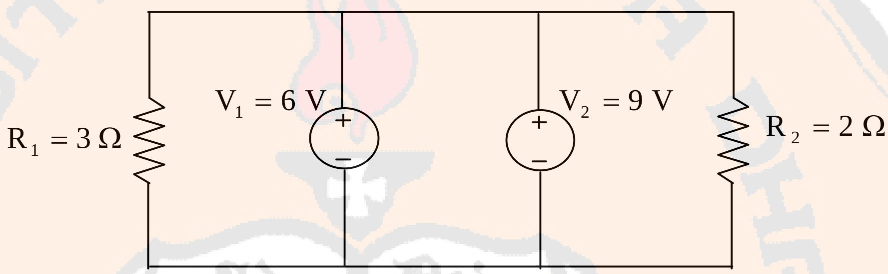
Arus i_1 bernilai negatif, maka arah orietasi yang diberikan pada ruas padanannya yakni ruas e_1 berlawanan dengan arah ruas sebenarnya.

Setelah kita mengetahui arus pada masing-masing elemen, maka kita dapat mencari tegangan pada masing-masing pada R_1, R_2, R_3, R_4 dan R_5 dengan menggunakan Hukum Ohm. Dengan demikian dapat diperoleh hasil sebagai berikut $v_2 = 1V$ untuk tegangan pada R_1, $v_6 = 3V$ untuk tegangan pada R_2, $v_5 = 4V$ untuk tegangan pada R_3, $v_4 = 0$ untuk tegangan pada R_4 dan $v_7 = 3V$ untuk tegangan pada R_5. Tegangan-tegangan tersebut memenuhi persamaan Hukum Tegangan Kirchhoff yang tampak pada persamaan 3.16, persamaan 3.17 dan persamaan 3.18.

Dari banyak contoh rangkaian listrk, terdapat beberapa rangkaian yang tidak dapat diselesaikan dengan menggunakan analisis rangkaian dalam graf. Berikut ini diberikan contoh rangkaian-rangkaian tersebut:

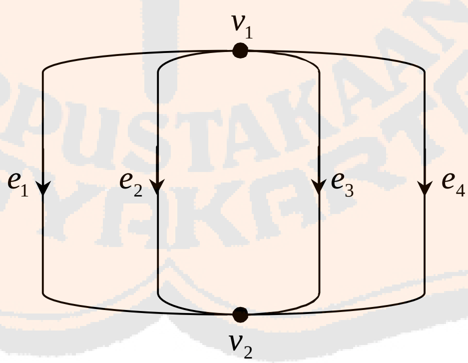
Contoh 3.6

Misalkan terdapat rangkaian listrik yang disusun seperti rangkaian listrik yang terdapat pada Gambar 3.16 berikut:



Gambar 3.16. Rangkaian Listrik untuk Contoh 3.6

Rangkaian tersebut digambarkan pada suatu graf terhubung berorientasi $G(V, E)$ yang disajikan sebagai berikut:



Gambar 3.17

Graf $G(V, E)$ padanan Rangkaian Listrik pada Gambar 3.16

Pada Gambar 3.17 tampak bahwa dari graf $G(V,E)$ tidak dapat dibentuk suatu pohon rentang dimana ruas padanan sumber tegangan termuat dalam pohon rentangan. Hal tersebut dikarenakan untuk membentuk suatu pohon rentang dari graf $G(V,E)$ hanya diperlukan satu ruas sedangkan terdapat dua ruas padanan sumber tegangan yakni ruas e_2 dan e_3 dimana kedua ruas tersebut membentuk suatu *cycle*. Dengan demikian kita tidak dapat membentuk *cycle* fundamental dan potongan fundamental dari graf $G(V,E)$ untuk memperoleh penyelesaian dari rangkaian listrik tersebut

Pada Contoh 3.6 tampak bahwa rangkaian listrik yang disajikan oleh Gambar 3.16 memiliki sumber tegangan lebih banyak dari banyaknya $n-1$ ruas yang dibutuhkan untuk membentuk suatu pohon rentangan. Ruas-ruas padanan sumber tegangan tersebut membentuk suatu *cycle* sehingga kita tidak dapat membentuk *cycle* fundamental dan potongan fundamental dari graf padanan rangkaian listrik tersebut. Hal tersebut mengakibatkan kita tidak dapat mencari penyelesaian rangkaian listrik pada Gambar 3.16 dengan menggunakan metode analisis rangkaian listrik dengan graf dan matriks. Dengan demikian kita mendapat satu kesimpulan bahwa suatu rangkaian dapat diselesaikan dengan metode tersebut jika banyaknya sumber tegangan pada rangkaian kurang dari atau sama dengan banyaknya simpul graf padanannya dikurangi satu.

BAB IV

PENUTUP

A. Kesimpulan

Pada bab sebelumnya telah dibahas tentang analisis rangkaian listrik dengan graf dan matriks. Dari pembahasan tersebut diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

1. Suatu rangkaian listrik dapat direpresentasikan oleh graf terhubung berorientasi $G(V,E)$. Dalam hal ini, titik cabang sebagai titik pertemuan elemen-elemen rangkaian direpresentasikan oleh simpul $v \in V(G)$. Sedangkan elemen pada rangkaian listrik direpresentasikan oleh ruas berorientasi $e \in E(G)$. Untuk menganalisis suatu rangkaian listrik, kita perlu membentuk himpunan potongan fundamental dan himpunan *cycle* fundamental dari graf $G(V,E)$. Himpunan potongan fundamental dan himpunan *cycle* fundamental tersebut digunakan untuk membentuk persamaan Hukum Arus Kirchhoff dan Hukum Tegangan Kirchhoff.
2. Insidensi antara himpunan potongan fundamental dan himpunan *cycle* fundamental dengan ruas-ruas graf $G(V,E)$ membentuk matriks insidensi potongan-ruas C_0 dan matriks insidensi *cycle*-ruas B_0. Jika Hukum Arus Kirchhoff diberlakukan pada himpunan potongan fundamental tersebut, maka akan diperoleh persamaan:

$$C_0\mathbf{i} = \mathbf{0} \tag{4.1}$$

Dan jika Hukum Tegangan Kirchhoff diberlakukan pada himpunan *cycle* fundamental tersebut, maka akan diperoleh persamaan:

$$B_0\mathbf{v} = \mathbf{0} \tag{4.2}$$

Untuk mencari arus pada tiap elemen, kita dapat mencari besarnya arus pada dawai-dawai dari graf $G(V, E)$ terlebih dulu. Besarnya arus pada dawai-dawai tersebut dapat diperoleh dari $m - n + 1$ persamaan yang disebut persamaan *loop* :

$$B_R R B_R^T \mathbf{i}_D = -B_V \mathbf{v}_S \tag{4.3}$$

dimana B_R merupakan submatriks yang dibentuk dari kolom-kolom matriks B_0 yang berpadanan dengan resistor, R merupakan matriks diagonal dari nilai resistor-resistor, $\mathbf{i}_D$ merupakan vektor arus pada dawai, B_V merupakan submatriks dari B_0 yang yang dibentuk dari kolom-kolom matriks B_0 yang berpadanan dengan sumber tegangan dan $\mathbf{v}_S$ merupakan vektor nilai sumber tegangan. Sedangkan arus cabang-cabang pohon rentangan graf $G(V, E)$ dapat ditentukan dengan menggunakan persamaan Hukum Arus Kirchhoff yang tampak pada persamaan 4.1.

Setelah mengetahui besarnya arus, kita dapat menentukan tegangan pada masing-masing resistor dapat ditentukan dengan menggunakan Hukum Ohm:

$$\text{v} = \text{Ri} \tag{4.5}$$

dimana v adalah tegangan, R adalah hambatan yang terdapat pada resistor dan i adalah arus yang mengalir melalui resistor tersebut. Tegangan pada tiap elemen tersebut pasti memenuhi persamaan Hukum Tegangan Kirchhoff yang tampak pada persamaan 4.2.

Suatu rangkaian listrik dapat diselesaikan oleh metode analisis rangkaian dengan graf dan matriks jika banyaknya sumber tegangan pada rangkaian listrik tersebut kurang dari atau sama dengan banyaknya simpul graf padanannya dikurangi satu.

B. Saran

Pembahasan tentang aplikasi graf pada rangkaian listrik yang terdapat pada skripsi ini masih sangat dangkal. Skripsi ini hanya membahas tentang analisis rangkaian, khususnya analisis *loop* pada rangkaian sederhana yang terdiri dari sumber tegangan bebas dan resistor. Oleh karena itu, penulis berharap ada pembahasan lebih lanjut tentang analisis rangkaian yang lebih kompleks seperti rangkaian yang tersusun oleh kapasitor, induktor serta sumber arus.

Selain itu, penulis juga mengharapkan adanya pembahasan tentang penerapan graf di bidang ilmu lain sehingga permasalahan dalam kehidupan nyata dapat diselesaikan dengan lebih mudah.

DAFTAR PUSTAKA

Anton, Howard & Chris Rorres. (2004). *Aljabar Linear Elementer*. Jakarta : Penerbit Erlangga.

Chartrand, Gary & Linda Lesniak. (1996). *Graphs and Digraphs* (Ed. 3). New York : Chapman & Hall/CRC.

Chartrand, Gary & Ortrud R. Oellermann. (1993). *Apllied and Algorithmic Graph Theory*. New York : McGraw-Hill, Inc.

Chi, Kong Tse. (2002). *Analisis Rangkaian Linear*. Jakarta : Penerbit Erlangga.

Halliday, David & Robert Resnick. (1984). *Fisika Jilid 2*. Jakarta: Penerbit Erlangga.

Harray, Frank. (1967). *Graph Theory and Theoretical Physics*. New York : Academic Press.

Hayt, William H., Jr & Jack E. Kemmerly. (1985). *Rangkaian Listrik*. Jakarta : Penerbit Erlangga.

Jain, S. K. & A. D. Gunawardena. (2004). *Libear Algebra An Interactive Approach*. USA : Brooks/Cole Thomson Learning, Inc.

Kartika Budi, Fr. Y. (2009) *Diktat Kuliah Rangkaian Listrik*. Yogyakarta: Universitas Sanata Dharma.

Sears, F. W. & M. W. Zemansky. (1963). *Fisika untuk Universitas II*. Bandung : Penerbit Dhiwantara.

Suryadi H. S. (1994). *Teori Graf Dasar*. Jakarta : Penerbit Gunadarma.

Wilson, Robin J. & Lowell W. Beineke. (1979). *Applications of Graph Theory*. New York : Academic Press.