PENENTUAN PREMI BERSIH DAN PREMI KOTOR PADA ASURANSI JIWA

SKRIPSI

Diajukan untuk Memenuhi Salah Satu Syarat
Memperoleh Gelar Sarjana Pendidikan
Program Studi Pendidikan Matematika

Oleh :

Kanisius Mandur
NIM. 071414001

PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA
JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
UNIVERSITAS SANATA DHARMA
YOGYAKARTA
2011

SKRIPSI

PENENTUAN PREMI BERSIH DAN PREMI KOTOR PADA ASURANSI JIWA

Oleh :

Kanisius Mandur
NIM.071414001

Telah disetujui oleh :

Pembimbing

Ch. Enny Murwaningtyas, S.Si., M.Si

Tanggal, 13 Juli 2011

SKRIPSI

PENENTUAN PREMI BERSIH DAN PREMI KOTOR PADA ASURANSI JIWA

Dipersiapkan dan ditulis oleh

Kanisius Mandur
NIM. 071414001

Telah dipertahankan di depan Panitia Penguji
pada tanggal, 27 Juli 2011
dan dinyatakan memenuhi syarat

Susunan Panitia Penguji

	Nama Lengkap	Tanda Tangan
Ketua	: Drs. A. Atmadi, M.Si	....
Sekertaris	: Prof. Dr. St. Suwarsono	....
Anggota	: Ch. E. Murwaningtyas, S.Si., M.Si	....
Anggota	: Prof. Dr. St. Suwarsono	....
Anggota	: Drs. A. Sardjana, M.Pd	....

Yogyakarta, 27 Juli 2011

Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan
Universitas Sanata Dharma
Dekan,

Drs. T. Sarkim, M.Ed., Ph.D

HALAMAN PERSEMBAHAN

Aku melewati hari-hariku setapak demi setapak

Banyak kisah dan pengalaman yang aku dapatkan di setiap detiknya

Ada setumpuk cerita yang mengisahkan kenakalan

Banyak kejadian yang menorehkan kemarahan

Banyak peristiwa yang membuatku malu untuk mengenangnya...

Saat aku beranjak remaja aku memahami semuanya.....

Aku menyesal mengapa hal buruk itu pernah mewarnai perjalanan ini...?

Namun, semua itu telah menjadi bagian dari kenyataan...

Kini semuanya telah berubah....

Banyak hal yang terjadi yang tak dapat kumengerti

yang tak mudah untuk dipercayai dari setiap kenyataannya....

Satu hal yang aku sadari bahwa

Tuhan telah memberikan hal yang terindah bagi hidupku...

"...mungkin aku takkan pernah berubah

kalau aku tak pernah menjadi anak yang nakal..."

Saya persembahkan karyaku ini secara khusus untuk:

ayahku tercinta Nobertus Badur yang telah terlebih dahulu

meninggalkan kami sekeluarga,

P.Ernest Waser SVD, para penjasa dan penderma.

Mamaku tercinta Esidora Asul, Ka Beny,

Ka Erna, Ka Don,Alviano, Gusty,

Sipri, Elsi, Bruno,Ocin,Ones,Gery dan semua keluargaku.

Mudah-mudahan ini menjadi kado yang membanggakan kalian

PERNYATAAN KEASLIAN KARYA

Saya nyatakan dengan sesungguhnya bahwa skripsi yang saya tulis ini tidak memuat karya atau bagian orang lain, kecuali yang telah disebutkan dalam kutipan dan daftar pustaka, sebagaimana layaknya karya ilmiah.

Yogyakarta, 27 Juli 2011

Penulis,

Kanisius Mandur

ABSTRAK

Kanisius Mandur, 2011. *Penentuan Premi Bersih dan Premi Kotor pada Asuransi Jiwa*. Skripsi. Program Studi Pendidikan Matematika, Jurusan Pendidikan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Universitas Sanata Dharma, Yogyakarta.

Kematian adalah suatu peristiwa yang pasti akan dialami oleh setiap manusia. Kematian mengakibatkan hilangnya pendapatan seseorang atau keluarga tertentu. Salah satu perusahaan keuangan yang berfungsi membantu mengurangi beban keuangan akibat kematian adalah perusahaan asuransi jiwa. Bantuan itu berupa santunan. Besarnya santunan yang akan diberikan perusahaan asuransi jiwa tergantung pada besarnya premi yang diserahkan pemegang polis.

Perhitungan premi bersih tunggal berbeda untuk berbagai jenis asuransi jiwa. Andaikan seseorang yang tepat berusia x tahun membeli polis asuransi jiwa seumur hidup dengan santunan sebesar Rp 1, maka premi bersih tunggalnya dapat dihitung dengan menggunakan persamaan $A_x = \frac{vd_x + v^2 d_{x+1} + ...}{l_x}$. Polis asuransi jiwa dengan premi tunggal terlalu berat bagi pemegang polis karena jumlahnya yang cukup besar, sehingga pemegang polis biasa membeli polis asuransi jiwa yang preminya dibayar pada periode waktu tertentu, misalnya tahunan, bulanan maupun harian. Konsep matematika yang menjelaskan sistem pembayaran berkala seperti itu disebut anuitas. Perhitungan premi bersih datar pada berbagai jenis asuransi jiwa selalu menggunakan persamaan dasar bahwa nilai tunai premi yang akan datang sama dengan nilai tunai santunan yang akan datang yang berlaku saat polis dikeluarkan. Dari persamaan tersebut dapat dicari besarnya premi dengan besar santunan diketahui atau besarnya santunan dengan besar premi diketahui. Misalkan seseorang yang tepat berusia x tahun membeli polis asuransi jiwa seumur hidup dengan santunan sebesar Rp 1 dan premi sebesar P rupiah yang dibayar setiap awal tahun, sehingga dengan menggunakan persamaan dasar di atas maka $P\left(\frac{l_x + vl_{x+1} + ...}{l_x}\right) = \frac{vd_x + v^2 d_{x+1} + ..}{l_x}$. Dari persamaan ini dapat dicari besar premi (P) yang akan dibayar oleh pemegang polis. Premi kotor diperoleh dari besarnya premi bersih ditambah dengan biaya-biaya asuransi. Andaikan premi bersihnya adalah Rp P dan biaya-biaya asuransi adalah Rp C maka premi kotor $(P*)$ dapat dihitung dengan persamaan $P* = P + C$.

Besar premi yang diserahkan pemegang polis ke perusahaan asuransi jiwa tergantung pada peluang hidup, tingkat bunga dan besarnya biaya asuransi. Premi yang hanya bergantung pada peluang hidup dan tingkat bunga disebut premi bersih, dan premi yang bergantung pada peluang hidup, tingkat bunga dan besar biaya asuransi disebut premi kotor.

ABSTRACT

Kanisius Mandur, 2011. *The Determination of Net Premiums and Gross Premiums of Life Insurance.* Thesis. Mathematics Education Study Program, Mathematics and Science Education Department, Faculty of Teacher Training and Education, Sanata Dharma University, Yogyakarta.

Human beings face the fact that everybody dies. Death results in the loss of a personal or family income. One of financial companies which overcome the financial burden caused by the death is life insurance company. Aid given will be in the form of claim. The amount of claim given by a life insurance company depends on the amount of a premium paid by policyholder.

The calculation of a single net premium varies according to different types of life insurance. Suppose a person of *x*-year-old buys a lifetime life insurance policy with claim of Rp 1, therefore single net premium can be calculated using the equation of $A_x = \frac{vd_x + v^2 d_{x+1} + ...}{l_x}$. Life insurance policy with a single premium is too large for policyholders because of its large amount, so that a policyholder generally buys life insurance policy with periodically paid premium which can be annually, monthly or daily paid. Mathematical concept which explains the periodic payment system is called annuity. The calculation of flat net premiums on the various types of life insurance always applies the basic equation of which future amount of premium equal to future amount of claim applicable at the time policy is issued. From the equation, the amount of premium can be calculated with known amount of claim, or amount of claim with known amount of premium. Suppose a person of *x*-year-old buys a life insurance policy with claim of Rp 1 and a premium of *P* dollars is paid beginning of each year, by using the equation above, therefore $P\left(\frac{l_x + vl_{x+1} + ...}{l_x}\right) = \frac{vd_x + v^2 d_{x+1} + ..}{l_x}$. From this equation, amount of premium (*P*) have to paid by policyholder can be calculated. Gross premium is calculated by adding amount of net premium to insurance fee. Suppose the net premium is Rp *P* and insurance fee is Rp *C*, therefore gross premium (P^*) can be calculated with equation of $P^* = P + C$.

The amount of premium paid by a policyholder to life insurance company depends on the chance to live, the interest rate, and the amount of insurance fee. A premium which depends only on the life chance and the interest rate is known as net premium, and the premium depends on the chance of life, the interest rate and the amount of insurance fee is known as gross premium.

LEMBAR PERSETUJUAN
PUBLIKASI KARYA ILMIAH UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS

Yang bertanda tangan di bawah ini, saya Mahasiswa Universitas Sanata Dharma :

Nama : Kanisius Mandur

Nomor Mahasiswa : 071414001

Demi pengembangan ilmu pengetahuan, saya memberikan kepada perpustakaan Universitas Sanata Dharma karya ilmiah saya yang berjudul:

PENENTUAN PREMI BERSIH DAN PREMI KOTOR
PADA ASURANSI JIWA

beserta perangkat yang diperlukan(bila ada). Dengan demikian saya memberikan kepada perpustakaan Universitas Sanata Dharma hak untuk menyimpan, mengalihkan dalam bentuk media lain, mengolahnya dalam bentuk pangkalan data, mendistribusikan secara terbatas dan mempublikasikan di internet atau media lain untuk keperluan akademis tanpa meminta ijin dari saya maupun memberikan royalti sepada saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis.

Demikian pernyataan ini yang saya buat dengan sebenarnya.

Dibuat di Yogyakarta
Pada tanggal 27 bulan Juli tahun 2011

Yang menyatakan

Kanisius Mandur

KATA PENGANTAR

Puji dan syukur kehadirat Tuhan karena penulis dapat menyelesaikan skripsi dengan judul “Penentuan Premi Bersih dan Premi Kotor pada Asuransi Jiwa”. Skripsi ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat memperoleh gelar Sarjana Pendidikan pada Program Studi Pendidikan Matematika, Jurusan Pendidikan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan di Universitas Sanata Dharma Yogyakarta.

Selama penyusunan skripsi ini banyak kesulitan dan hambatan yang dialami penulis. Namun dengan bantuan berbagai pihak semua kesulitan dan hambatan tersebut dapat teratasi. Untuk itu dalam kesempatan ini penulis dengan tulus hati ingin mengucapkan terima kasih kepada:

1. Tuhan Yesus dan Bunda Maria yang selalu menjaga dan menuntun langkahku.
2. Ibu Ch. Enny Murwaningtyas, S.Si,.M.Si selaku dosen pembimbing yang dengan tulus telah membimbing, mengarahkan dan memberikan masukan serta kritikan yang berharga kepada penulis selama proses penyusunan skripsi ini.
3. Bapak Prof. Dr. St. Suwarsono selaku Ketua Program Studi Pendidikan Matematika dan selaku dosen penguji yang telah banyak memberikan bantuan selama penulis menempuh kuliah dan kritikan yang bermanfaat untuk penyempurnaan skripsi ini.

4. Bapak Drs. A. Sadrjana, M.Pd selaku dosen penguji yang telah membimbing penulis selama menempuh kuliah serta masukan dan kritikan yang bermanfaat untuk penyempurnaan skripsi ini.
5. P. Ernest Waser, SVD yang telah membantu dan mendukung penulis sehingga penulis bisa menyelesaikan kuliah ini dengan baik.
6. Segenap dosen JPMIPA, khususnya dosen-dosen Program Studi Pendidikan Matematika, Universitas Sanata Dharma yang telah mendidik dan membagi ilmu pengetahuan dan pengalaman yang sangat bermanfaat bagi penulis.
7. Ibu Heny dan Bapak Sugeng di sekertariat JPMIPA atas segala bantuan dan kerja samanya selama penulis menempuh kuliah hingga penyelesaian skripsi ini.
8. Mamaku tercinta Esidora Asul, saudara-saudaraku, Enu Memik, Enu Mendak serta seluruh keluargaku atas semua doa, dukungan,cinta, perhatian, nasehat dan semangat yang diberikan selama ini, semoga skripsi ini menjadi hadiah kecil yang membanggakan bagi kalian semua.
9. Teman-temanku di Pendidikan Matematika, khususnya angkatan 2007 atas segala bantuan, semangat kebersamaan dan keceriaan selama kuliah.
10. Sahabat-sahabatku Orin, Elan, Ratna, Lian, Ketrin, Anita, Lita, Kriswan, John dan Riza atas segala doa, bantuan dan perhatian yang diberikan selama ini.
11. Temen-teman Komunitas Sant'Egidio yang selalu memberikan semangat, dukungan dan keceriaan, terima kasih atas doa serta semangat kebersamaan selama ini.

12. Seluruh staf perpustakaan Universitas Sanata Dharma Paingan atas segala bantuan dan kerja sama serta keramahan yang telah diberikan selama ini.
13. Semua pihak yang tidak dapat disebutkan satu per satu yang telah rela membantu dan mendukung penulis hingga penyelesaian proses penyusunan skripsi ini.

Penulis menyadari masih banyak kekurangan dan kesalahan dalam skripsi ini, sehingga penulis sangat mengharapkan masukan dan saran dari pembaca demi perbaikan skripsi ini. Akhir kata, penulis berharap semoga skripsi yang tidak sempurna ini bermanfaat bagi setiap pembaca.

Penulis

DAFTAR ISI

BAB I

PENDAHULUAN

A. Latar Belakang

Pada masa lampau manusia hanya ingin memenuhi tiga kebutuhan yaitu kebutuhan akan sandang, pangan dan papan. Namun perkembangan zaman yang semakin pesat, kini manusia tidak hanya ingin memenuhi ketiga kebutuhan tersebut, namun kebutuhan yang lain juga ingin mereka penuhi. Seperti kebutuhan yang belum pasti di masa mendatang, manusia sudah terlebih dahulu ingin memenuhinya mulai dari sekarang, misalnya kebutuhan di hari tua maka manusia sudah menyiapkan dana pensiun, dana untuk anak-anak yang belum sekolah telah disiapkan mulai tingkat dasar hingga perguruan tinggi. Agar kebutuhan yang belum pasti di masa mendatang terpenuhi maka manusia memerlukan asuransi. Asuransi merupakan suatu hasil evaluasi kebutuhan manusia yaitu kebutuhan akan rasa aman dan terlindung dari kemungkinan menderita kerugian. Asuransi merupakan sarana finansial dalam tata kehidupan rumah tangga, baik dalam menghadapi risiko mendasar seperti risiko kematian maupun menghadapi risiko atas harta benda yang dimiliki.

Masalah yang ditakuti manusia adalah kemungkinan kematian yang terjadi terlalu dini. Kematian merupakan hal yang pasti dialami oleh setiap orang, tetapi masalah waktu atau kapan kematian itu datang adalah hal yang tidak dapat diketahui oleh manusia. Kematian tersebut mengakibatkan hilangnya pendapatan seseorang atau keluarga tertentu. Salah satu cara mengurangi resiko kematian adalah melimpahkannya kepada perusahaan asuransi jiwa. Asuransi jiwa adalah alat sosial ekonomi yang merupakan cara dari sekelompok orang untuk bekerja sama meratakan beban keuangan akibat kematian yang dialami para anggotanya. Pada asuransi jiwa yang dipertanggungkan hanya yang mengalami kematian. Asuransi jiwa menarik dibahas karena asuransi jiwa merupakan sebuah upaya untuk meminimumkan resiko kerugian yang diakibatkan oleh kematian.

B. Rumusan Masalah

Pokok permasalahan yang dibahas dalam skripsi ini antara lain:

1. Apa yang dimaksudkan dengan asuransi jiwa?
2. Bagaimana cara menentukan besarnya premi bersih suatu asuransi jiwa?
3. Bagaimana cara menentukan besarnya premi kotor suatu asuransi jiwa?

C. Batasan Masalah

Batasan masalah dalam skripsi ini antara lain:

1. Peluang hidup dan peluang meninggal seseorang dalam interval waktu yang akan datang dari sekelompok tertanggung diasumsikan saling bebas.
2. Dalam menghitung nilai tunai anuitas dan nilai tunai asuransi menggunakan tingkat suku bunga 2,5%
3. Tabel mortalita yang digunakan adalah tabel mortalita CSO 1941.
4. Santunan asuransi akan dibayarkan bila si tertanggung meninggal dan akan dibayarkan diakhir periode tertanggung meninggal.

D. Tujuan Penulisan

Penulisan ini bertujuan untuk memahami asuransi jiwa dan mengetahui cara menghitung besarnya premi bersih dan premi kotor pada asuransi jiwa.

E. Manfaat Penulisan

Manfaat penulisan ini bagi penulis adalah penulis lebih memahami konsep dasar teori peluang, variabel random, harapan hidup, memahami cara-cara menentukan nilai tunai berbagai macam anuitas, memahami asuransi jiwa serta mengetahui dan memahami cara menghitung besarnya premi bersih dan premi kotor suatu asuransi jiwa.

F. Metode Penulisan

Metode yang digunakan dalam penulisan skripsi ini adalah metode studi pustaka atau studi literatur. Studi literatur dilakukan dengan mempelajari materi dari buku-buku acuan yang berkaitan dengan masalah ini. Jadi dalam skripsi ini tidak ada penemuan baru.

G. Sistematika Penulisan

BAB I PENDAHULUAN

Pada bab ini mengemukakan hal-hal yang melatarbelakangi tulisan skripsi, perumusan masalah, tujuan, manfaat, pembatasan masalah, metode dan sistematika penulisan.

BAB II PELUANG DAN TABEL MORTALITAS

Pada bab ini menjelaskan mengenai definisi peluang, berbagai macam sifat peluang, variabel random, distribusi peluang, rataan dan variansi distribusi variabel random uniform, tabel mortalitas dan harapan hidup secara teoritik.

BAB III ANUITAS

Pada bab ini akan membahas nilai tunai anuitas tentu: anuitas tentu dengan pembayaran setiap tahun dan anuitas tentu dengan pembayaran beberapa kali dalam setahun serta nilai tunai berbagai macam anuitas hidup : anuitas hidup dengan pembayaran setiap tahun dan anuitas hidup dengan pembayaran beberapa kali dalam setahun.

BAB IV ASURANSI JIWA

Dalam bab ini berbicara mengenai pengertian asuransi jiwa, premi bersih tunggal asuransi jiwa: premi bersih tunggal dengan pembayaran santunan setiap akhir tahun dan premi bersih tunggal dengan pembayaran santunan beberapa kali dalam setahun, premi bersih datar: premi bersih datar tahunan dan premi bersih datar beberapa kali setahun serta premi kotor berbagai jenis asuransi jiwa.

BAB V PENUTUP

Dalam bab ini menguraikan kesimpulan yang diperoleh dari pembahasan bab-bab sebelumnya.

BAB II

PELUANG DAN TABEL MORTALITAS

A. Peluang

1. Ruang Sampel dan Titik Sampel

Jika seseorang melempar sekeping mata uang logam, maka kegiatan melempar sekeping mata uang logam tersebut dinamakan percobaan. Pada percobaan ini hanya ada dua macam hasil yang mungkin yaitu munculnya sisi gambar G atau munculnya sisi tulisan T. Himpunan semua hasil yang mungkin muncul dari percobaan melempar sekeping mata uang disebut ruang sampel dari percobaan tersebut, ditulis $S = \{G, T\}$. Anggota-anggota dari ruang sampel disebut titik sampel. Titik-titik sampel dari percobaan melempar sekeping mata uang logam adalah adalah G dan T .

Definisi 2.1

Ruang sampel adalah himpunan semua kemungkinan hasil suatu percobaan yang dinotasikan dengan S dan anggota-anggota dari ruang sampel disebut titik sampel.

Contoh 2.1

Tentukan ruang sampel pada percobaan melempar sebuah dadu bersisi enam?

Jawab:

Hasil yang mungkin dari percobaan melempar sebuah dadu bersisi enam adalah mata dadu 1,2,3,4,5 atau 6 atau ditulis $S = \{1,2,3,4,5,6\}$.

Pada percobaan melempar sekeping mata uang logam dan sebuah dadu, ruang sampelnya mengandung jumlah anggota yang berhingga. Akan tetapi bila seseorang mengadakan penelitian mengenai jarak yang ditempuh suatu mobil merek tertentu dijalankan pada jalan tertentu dengan lima liter bensin, maka kemungkinan jarak yang ditempuh dalam ruang sampel tak hingga banyaknya. Jadi, ruang sampel ada dua macam yaitu ruang sampel diskrit dan ruang sampel kontinu.

Definisi 2.2

Bila suatu ruang sampel mengandung jumlah titik sampel yang berhingga banyaknya atau suatu barisan unsur yang tidak pernah berakhir tetapi sama banyaknya dengan bilangan cacah, maka ruang sampel itu disebut ruang sampel diskrit sedangkan bila suatu ruang sampel mengandung jumlah titik sampel yang takhingga banyaknya atau sama dengan banyaknya titik pada sebuah ruas garis, maka ruang sampel itu disebut ruang sampel kontinu.

2. Kejadian dan Himpunan Kosong

Jika *A* menyatakan himpunan munculnya mata dadu bilangan ganjil pada percobaan melempar sebuah dadu yang bersisi enam maka $A = \{1,3,5\}$. Himpunan $A = \{1,3,5\}$ adalah himpunan bagian dari $S = \{1,2,3,4,5,6\}$. Munculnya mata dadu bilangan ganjil pada lemparan sebuah dadu yang bersisi enam disebut kejadian. Bila *B* menyatakan kejadian munculnya mata dadu yang lebih besar dari 6 dalam suatu percobaan melempar sebuah dadu bersisi enam maka kejadian *B* tersebut tidak mempunyai anggota,ditulis $B = \varnothing = \{\ \}$.

Definisi 2.3

Kejadian adalah himpunan bagian dari ruang sampel dan himpunan bagian ruang sampel yang tidak mempunyai anggota disebut himpunan kosong.

Contoh 2.2

Jika *A* adalah kejadian terlihatnya organisme mikroskopik dengan mata telanjang dalam suatu percobaaan biologis maka *A* adalah kejadian yang tidak mempunyai satu pun anggota, sehingga $A = \varnothing$.

Ada dua jenis kejadian yaitu: kejadian sederhana dan kejadian majemuk. Pada percobaan melempar sebuah dadu bersisi enam, banyak kejadian yang dapat terjadi misalnya $A = \{2\}, B = \{4\}, C = \{6\}, D = \{3\}, C_1 = \{1,3\}, C_2 = \{2,4\}\ C_3 = \{1,3,5\}$ dan $C_4 = \{1,3,4,6\}$. Kejadian *A, B, C* dan *D* adalah kejadian sederhana sedangkan kejadian C_1, C_2, C_3, C_4 merupakan kejadian majemuk.

Definisi 2.4

Suatu kejadian disebut kejadian sederhana bila kejadian tersebut dapat dinyatakan sebagai himpunan yang hanya terdiri dari satu titik sampel sedangkan bila kejadiannya dapat dinyatakan sebagai gabungan beberapa kejadian sederhana disebut kejadian majemuk.

3. Operasi Kejadian

a. Irisan Dua Kejadian

Definisi 2.5

Irisan dua kejadian *A* dan *B* adalah kejadian yang mengandung semua anggota yang sama dan dinotasikan dengan $A \cap B$.

Contoh 2.3

Bila *A* adalah kejadian munculnya mata dadu angka ganjil maka $A = \{1,3,5\}$ dan *B* adalah kejadian munculnya mata dadu angka prima maka $B = \{2,3,5\}$. Jadi, irisan kejadian *A* dan *B* adalah $\{3,5\}$, ditulis $A \cap B = \{3,5\}$.

Definisi 2.6

Bila kejadian A dan B tidak mengandung anggota yang sama, dalam hal ini $A \cap B = \varnothing$ maka kejadian A dan B dikatakan saling lepas.

Contoh 2.4

Bila *A* adalah kejadian munculnya mata dadu angka ganjil maka $A = \{1,3,5\}$ dan *B* adalah kejadian munculnya mata dadu angka genap maka $B = \{2,4,6\}$. Jadi, irisan kejadian *A* dan *B* adalah $\varnothing$, ditulis $A \cap B = \varnothing$.

b. Gabungan Dua Kejadian

Definisi 2.7

Gabungan dua kejadian *A* dan *B* adalah suatu kejadian yang mengandung semua anggota kejadian *A* atau kejadian *B*.

Contoh 2.5

Jika *A* adalah kejadian munculnya mata dadu bilangan ganjil maka $A = \{1,3,5\}$ dan B adalah kejadian munculnya mata dadu bilangan komposit maka $B = \{4,6\}$. Maka gabungan kejadian *A* dan *B* adalah $\{1,3,4,5,6\}$, ditulis $A \cup B = \{1,3,4,5,6\}$.

c. Komplemen suatu Kejadian

Bila *A* menyatakan kejadian seorang mahasiswa yang dipilih secara acak dari suatu kelas memiliki sepeda motor maka A' menyatakan kejadian bahwa mahasiswa yang terpilih dari kelas tersebut adalah mahasiswa yang tidak mempunyai sepeda motor. Kejadian *A* disebut komplemen kejadian A', demikian sebaliknya.

Definisi 2.8

Komplemen suatu kejadian *A* terhadap *S* adalah himpunan semua unsur *S* yang tidak termasuk anggota *A*, dinotasikan dengan A'.

Contoh 2.6

Ruang sampel pada percobaan melempar sebuah dadu bersisi enam sebanyak satu kali adalah $S = \{1,2,3,4,5,6\}$. Bila *E* adalah kejadian muncul mata dadu angka 1, $E = \{1\}$ maka E' adalah kejadian munculnya mata dadu bukan 1, $E' = \{2,3,4,5,6\}$.

4. Pengertian Peluang

Teori peluang adalah suatu cabang matematika yang sudah mulai dikembangkan sejak abad ke 17 untuk menyelidiki gejala ketidakpastian dan telah berhasil diaplikasikan dalam banyak bidang. Ketidakpastian yang digarap dalam teori peluang adalah keacakan *(randomness)*, yaitu ketidakpastian mengenai suatu hal yang disebabkan karena hal itu belum terjadi (akan terjadi). Ketidakpastian macam itu akan hilang dan berubah menjadi kepastian, pada waktu hal itu telah terjadi. Peluang mempunyai niai dalam selang tertutup $[0,1]$ dan jumlah peluang dari semua kemungkinan yang dapat terjadi adalah 1.

Misalnya seorang yang mengalami ketidakpastian mengenai apakah ia lulus atau tidak lulus dalam ujian matematika dasar yang diikutinya. Pada waktu ia melihat hasil di papan pengumuman ternyata ia lulus, ketidakpastian itu langsung hilang dan berubah menjadi kepastian, diberi nilai 1, sedangkan kejadian yang menggambarkan ia tidak lulus dalam ujian tersebut tidak terjadi, diberi nilai nol.

Definisi 2.9

Bila suatu percobaan mempunyai N hasil percobaan yang berbeda dan masing-masing mempunyai kemungkinan yang sama untuk terjadi dan tepat k hasil percobaan itu menyusun kejadian A, maka peluang kejadian A adalah:

$$p(A) = \frac{k}{N}$$

Contoh 2.7

Sekeping mata uang logam dilemparkan sebanyak dua kali. Berapakah peluang paling sedikit sisi gambar muncul sekali?

Jawab:

Ruang sampel dalam contoh tersebut adalah: $S = \{GG, GT, TG, TT\}$. Bila setiap kejadian mempunyai kemungkinan yang sama untuk muncul dan andaikan nilai setiap titik sampel adalah a sehingga $4a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{4}$. Jika A menyatakan kejadian paling sedikit sisi gambar muncul sekali, maka $p(A) = \frac{3}{4}$.

Contoh 2.8

Jika pada percobaan melempar sebuah dadu sebanyak satu kali, kemungkinan muncul mata dadu bilangan genap dua kali lebih besar daripada kemungkinan muncul mata dadu bilangan ganjil, hitunglah $p(B)$ bila B menyatakan kejadian munculnya suatu bilangan yang lebih kecil dari 4 dalam satu kali lantunan?

Jawab:

Ruang sampel, $S = \{1,2,3,4,5,6\}$. Andaikan nilai setiap mata dadu bilangan ganjil adalah a maka nilai setiap mata dadu bilangan genap adalah $2a$. Jumlah semua nilai sama dengan 1, maka $3a + 6a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{9}$ sehingga $p(B) = \frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \frac{1}{9} = \frac{4}{9}$.

Andaikan peluang setiap titik sampel dianggap tidak sama, maka besar peluangnya ditentukan berdasarkan hasil percobaan. Misalkan bila sekeping mata uang logam tidak seimbang, maka kedua nilainya ditaksir dengan melantunkannya sebanyak ratusan kali atan ribuan kali dan mencatat hasilnya. Peluang sebenarnya adalah rasio banyaknya sisi gambar dan rasio banyaknya sisi tulisan relatif terhadap banyaknya lantunan. Metode mendapatkan peluang seperti itu disebut dengan metode mencari peluang berdasarkan frekuensi relatif.

Definisi 2.10

Bila peluang setiap titik sampel dari ruang sampel tidak dapat dianggap sama, maka peluang itu harus diberikan berdasarkan bukti percobaan. Bila suatu percobaan dilakukan *n* kali usaha dan kejadian *A* muncul *m* maka frekuensi relatif kejadian *A* pada percobaan tersebut dinyatakan:

$$F(A) = \frac{m}{n}$$

Bila nilai $n \to \infty$ maka nilai peluang kejadian *A* cendrung konstan mendekati nilai tertentu. Secara matematis dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} p(A) &= \lim_{n\to\infty} F(A) \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{m}{n} \end{aligned}$$

Contoh 2.9

Jika sekeping mata uang logam yang bentuknya simetris dilempar sebanyak 50 kali, kejadian munculnya sisi gambar sebanyak 23 kali, sehingga $\frac{23}{50} = 0{,}46$ dinamakan dinamakan frekuensi relatif muncul sisi gambar. Jika pelemparan uang logam tersebut dilakukan berulang-ulang dalam frekuensi yang besar, frekuensi relatif kejadian muncul sisi gambar akan mendekati suatu bilangan tertentu yaitu $\frac{1}{2}$. Bilangan tersebut dinamakan peluang dari kejadian muncul sisi gambar. Pada pelemparan sekeping mata uang logam yang bentuknya simetris, kemungkinan yang muncul hanya dua, yaitu sisi gambar dan sisi tulisan. Peluang muncul sisi gambar atau sisi tulisan sama yaitu $\frac{1}{2}$.

5. Beberapa Teorema Peluang

Teorema 2.1

Jika A dan B dua kejadian sembarang maka peluang gabungan dua kejadian tersebut adalah:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

Bukti:

Jika $n(S), n(A), n(B), n(A \cap B), n(A \cup B)$, masing-masing menyatakan banyaknya anggota ruang sampel S, banyak anggota kejadian A, banyak anggota kejadian B, banyak anggota kejadian $A \cap B$ dan banyak anggota kejadian $A \cup B$, maka:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

Jika kedua ruas dibagi dengan $n(S)$ maka diperoleh:

$$\frac{n(A \cup B)}{n(S)} = \frac{n(A) + n(B) - n(A \cap B)}{n(S)}$$
$$\frac{n(A \cup B)}{n(S)} = \frac{n(A)}{n(S)} + \frac{n(B)}{n(S)} - \frac{n(A \cap B)}{n(S)}$$

Berdasarkan Definisi 2.9 maka diperoleh:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) \qquad (2.1)\ \square$$

Teorema 2.2

Jika *A* dan *B* dua kejadian yang saling lepas maka peluang gabungan dua kejadian tersebut adalah $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$

Bukti:

Dua kejadian saling lepas merupakan bentuk khusus dari gabungan dua buah kejadian sembarang dengan $(A \cap B) = \varnothing$, sehingga peluang gabungannya adalah:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) \qquad (2.2)\ \square$$

Teorema 2.3

Bila $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ merupakan *n* kejadian yang saling lepas maka peluang *n* kejadian tersebut adalah:

$$p(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup .... \cup A_n) = p(A_1) + p(A_2) + p(A_3) + ... + p(A_n)$$

$$p\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} p(A_i)$$

Bukti:

Andaikan $A = A_1$ dan $B = (A_2 \cup A_3 \cup ..... \cup A_n)$, oleh karena *A* dan *B* saling lepas maka menurut Teorema 2.2 peluang gabungan *A* dan *B* adalah:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B)$$
$$p(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup ..... \cup A_n) = p(A_1) + p(A_2 \cup A_3 \cup ..... \cup A_n)$$

Dengan cara yang sama maka diperoleh peluang *n* kejadian saling lepas tersebut adalah: $p(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup ..... \cup A_n) = p(A_1) + p(A_2) + p(A_3) + ... + p(A_n)$

$$p\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} p(A_i) \qquad (2.3)\ \square$$

Teorema 2.4

Bila A dan A' adalah dua kejadian yang satu merupakan komplemen kejadian yang lainnya, maka:

$$p(A) + p(A') = 1$$

Bukti:

Oleh karena A dan A' adalah dua kejadian yang saling berkomplemen dalam himpunan S maka:

$$n(A \cup A') = n(A) + n(A')$$
$$n(S) = n(A) + n(A')$$

Bila kedua ruas dibagi dengan $n(S)$ dan menurut Definisi 2.9 maka diperoleh:

$$\frac{n(S)}{n(S)} = \frac{n(A)}{n(S)} + \frac{n(A')}{n(S)}$$

$$p(A) + p(A') = 1 \qquad (2.4)$$ □

Jika kejadian A terjadi dengan syarat kejadian B terjadi terlebih dahulu maka kejadian seperti itu dinamakan kejadian bersyarat, yang dinotasikan dengan $A|B$ dan peluangnya disebut peluang kejadian bersyarat, disimbolkan dengan $p(A|B)$. Hitunglah peluang munculnya mata dadu bilangan komposit pada percobaan melempar sebuah dadu bersisi enam sebanyak satu kali, bila mata dadu bilangan genap muncul terlebih dahulu? Peluang kejadian bersyarat tersebut dapat dicari dengan cara berikut: ruang sampel, $S = \{1,2,3,4,5,6\}$. Andaikan A adalah kejadian munculnya mata dadu bilangan komposit maka $A = \{4,6\}$ dan misalkan B kejadian munculnya mata dadu bilangan genap maka $B = \{2,4,6\}$. Oleh karena kejadian B terjadi terlebih dahulu maka kejadian B menjadi ruang sampel bagi kejadian *A*. Andaikan $A|B$ menyatakan kejadian munculnya mata dadu bilangan komposit dengan syarat mata dadu bilangan genap terjadi terlebih dahulu maka $A|B = \{4,6\}$, sehingga $p(A|B) = \frac{n(A|B)}{n(B)} = \frac{1}{3}$. Kejadian $A|B$ adalah irisan dari kejadian A dan kejadian B, ditulis $A|B = A \cap B$ sehingga:

$$p(A|B) = \frac{n(A|B)}{n(B)} = \frac{1}{3} = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{\frac{n(A \cap B)}{n(S)}}{\frac{n(B)}{n(S)}} = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$$

Definisi 2.11

Peluang kejadian *A* dengan syarat kejadian *B* terjadi terlebih dahulu, didefinisikan sebagai berikut:

$$p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}, p(B) \neq 0$$

Pada percobaan pengambilan dua kartu berturut-turut dengan pengembalian artinya setelah diambil dan dicatat hasilnya, kartu itu dikembalikan lagi. Bila *A* menyatakan kejadian pengambilan kartu pertama sebuah ace dan *B* menyatakan kejadian pengambilan kartu kedua sebuah sekop. Oleh karena kartu pertama dikembalikan maka ruang sampel untuk pengambilan pertama dan kedua tetap sama yaitu sebesar 52, yang mempunyai 4 ace dan 13 sekop. Jadi,

$$p(B|A) = \frac{\frac{1}{52}}{\frac{4}{52}} = \frac{1}{4} \quad \text{dan} \quad p(B) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$$

Bila $p(B|A) = p(B)$ maka *A* dan *B* dikatakan saling bebas.

Definisi 2.12

Dua kejadian *A* dan *B* dikatakan bebas bila $p(A|B) = p(A)$ dan $p(B|A) = p(B)$

Teorema 2.5

Bila peluang terjadinya kejadian pertama adalah $p(A)$ dan peluang terjadinya kejadian kedua setelah kejadian pertama terjadi adalah $p(B|A)$, maka peluang terjadinya kejadian pertama dan kedua adalah:

$$p(A \cap B) = p(A).p(B|A)$$

Bukti :

Dari Definisi 2.11 diperoleh :

$$p(B|A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} \Rightarrow p(A \cap B) = p(A).p(B|A) \qquad (2.5) \ \square$$

Teorema 2.6

Bila dua kejadian *A* dan *B* bebas maka peluang dua kejadian tersebut adalah:

$$p(A \cap B) = p(A).p(B)$$

Bukti:

Berdasarkan Teorema 2.5 dan Definisi 2.12 maka diperoleh:

$$\begin{aligned} p(A \cap B) &= p(A).p(B|A) \\ &= p(A).\,p(B) \qquad (2.6) \ \square \end{aligned}$$

Teorema 2.7

Bila $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ merupakan n kejadian yang saling bebas maka peluang n kejadian tersebut adalah:

$$p(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap .... \cap A_n) = p(A_1).p(A_2).p(A_3).....p(A)$$
$$p\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = p(A_1).p(A_2).p(A_3).....p(A)$$

Bukti:

Andaikan $A = A_1$ dan $B = A_2 \cap A_3 \cap .... \cap A_n$ maka berdasarkan Teorema 2.6 maka peluang kejadian A dan B adalah:

$$p(A \cap B) = p(A).p(B)$$
$$p(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap .... \cap A_n) = p(A_1).p(A_2 \cap A_3 \cap .... \cap A_n)$$

Dengan cara yang sama maka diperoleh peluang n kejadian saling bebas tersebut adalah:

$$p(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap .... \cap A_n) = p(A_1).p(A_2).p(A_3)........p(A_n)$$
$$p\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = p(A_1).p(A_2).p(A_3)........p(A_n) \qquad (2.7) \square$$

Contoh 2.10

Peluang seseorang berusia 18 tahun akan mencapai usia 28 tahun adalah 0,95 dan peluangnya mencapai usia 48 tahun adalah 0,75. Berapakah peluang seseorang berusia 28 tahun akan meninggal sebelum berusia 48 tahun?

Jawab:

Peluang seseorang berusia 18 tahun akan mencapai usia 28 tahun ditulis ${}_{10}p_{18}$ sehingga ${}_{10}p_{18} = 0{,}95$ dan peluang seseorang berusia 18 tahun mencapai usia 48 tahun ditulis ${}_{30}p_{18}$ sehingga ${}_{30}p_{18} = 0,75$, sedangkan peluang seseorang berusia 28 tahun akan mencapai usia 48 tahun ditulis ${}_{20}p_{28}$. Berdasarkan Teorema 2.6 maka :

$${}_{30}p_{18} = {}_{10}p_{18} \cdot {}_{20}p_{28}$$

$$0,75 = (0,95)\,{}_{20}p_{28} \Rightarrow {}_{20}p_{28} = \frac{0,75}{0,95} = \frac{15}{19}$$

Peluang seseorang berusia 28 tahun akan meninggal sebelum mencapai usia 48 tahun ditulis ${}_{20}q_{28}$. Dengan menggunakan persamaan 2.6 maka diperoleh:

$${}_{20}q_{28} = 1 - {}_{20}p_{28} = 1 - \frac{15}{19} = \frac{4}{19}$$

Jadi, peluang seseorang yang berusia 28 tahun akan meninggal sebelum mencapai usia 48 tahun adalah $\frac{4}{19}$.

B. Variabel Random

1. Definisi Variabel Random

Dalam suatu percobaan sering kali hanya tertarik pada keterangan numerik suatu hasil percobaan dan bukan pada keterangan rinci dari setiap titik sampel. Jika sekeping mata uang logam dilantunkan dua kali maka hasil yang mungkin dari percobaan tersebut adalah $S = \{GG, GT, TG, TT\}$. Andaikan yang dibutuhkan adalah banyaknya sisi tulisan yang muncul, maka hasil numerik yaitu : $X(GG) = 0, X(GT) = X(TG) = 1, X(TT) = 2$. Bilangan 0,1,2 dapat dipandang sebagai nilai yang diperoleh variabel random X yang menyatakan banyaknya sisi tulisan muncul bila sekeping mata uang logam dilemparkan dua kali.

Definisi 2.13

Variabel random X adalah suatu fungsi yang didefinisikan pada ruang sampel S yang mengawankan setiap elemen $e \in S$ ke bilangan real x, dinotasikan dengan $X(e) = x$.

Bila anggota S berhingga maka jumlah titik sampelnya dapat dinyatakan dengan banyaknya bilangan bulat sehingga dapat dihitung. Namun bila anggota S tak hingga maka jumlah titik sampelnya tidak dapat dinyatakan dengan banyaknya bilangan bulat sehingga tak terhitung. Misalnya, bila seorang peneliti ingin mencatat lamanya waktu yang diperlukan oleh suatu reaksi kimia, maka selang waktu yang dapat dibuat untuk ruang sampel banyaknya tak hingga dan tak terhitung. Variabel random yang didefinisikan pada ruang sampel diskrit adalah variabel random diskrit. Sedangkan variabel random yang didefinisikan pada ruang sampel kontinu adalah variabel random kontinu.

2. Distribusi Peluang Variabel Random

a. Distribusi Peluang Diskrit

Pada variabel random diskrit, setiap nilainya dikaitkan dengan peluang tertentu. Misalnya sekeping mata uang logam dilantunkan dua kali. Andaikan variabel random X menyatakan banyaknya sisi tulisan yang muncul, maka nilai yang diperoleh masing-masing 0, 1, 2 dengan peluangnya adalah $p(x=0) = \frac{1}{4}$, $p(x=1) = \frac{1}{2}$ dan $p(x=2) = \frac{1}{4}$. Nilai-nilai $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ adalah distribusi peluang dari variabel random X. Perhatikan bahwa $p(x=0) + p(x=1) + p(x=2) = 1$.

Definisi 2.14

Fungsi $f(x)$ disebut fungsi probabilitas atau distribusi peluang suatu variabel random diskrit X bila untuk setiap hasil x yang mungkin:

1. $f(x) \geq 0$ 2. $\sum_x f(x) = 1$ 3. $p(X = x) = f(x)$

Contoh 2.11

Suatu pengiriman enam pesawat televisi berisi dua yang rusak. Sebuah hotel membeli tiga pesawat televisi secara acak dari kelompok tadi. Bila *X* menyatakan banyaknya pesawat televisi yang rusak yang dibeli hotel tersebut, carilah distribusi peluang *X*!

Jawab:

Andaikan *X* adalah variabel random yang menyatakan banyaknya pesawat televisi yang rusak yang dibeli hotel tersebut. Distribusi peluang *X* adalah:

$$f(x) = \frac{4C(3-x).2Cx}{6C3}, \; x = 0, 1, 2$$

atau

x	0	1	2
$f(x)$	0,2	0,6	0,2

b. Distribusi Peluang Kontinu

Ruang sampel kontinu mempunyai titik sampel tak hingga sehingga peluang setiap titik sampelnya nol, akibatnya distribusi peluangnya tak mungkin dapat disajikan dalam bentuk tabel, tetapi dapat disajikan dalam bentuk rumus.

Fungsi yang mendeskripsikan distribusi peluang untuk variabel random kontinu disebut fungsi padat. Oleh karena X didefinisikan pada ruang sampel yang kontinu, maka mungkin ada berhingga banyaknya titik yang menyebabkan $f(x)$ tidak kontinu. Akan tetapi, kebanyakan fungsi padat yang mempunyai penggunaan praktis dalam analisis data statistika bersifat kontinu. Andaikan peluang X mempunyai nilai dalam interval terbuka (a,b) berarti peluang tersebut sama dengan luas daerah yang dibatasi oleh $y = f(x), x = a, x = b$ sehingga menurut kalkulus integral luas ini dinyatakan dengan:

$$p(a < x < b) = \int_a^b f(x)dx$$

Oleh karena luas menyatakan peluang dan peluang adalah bilangan yang positif maka fungsi padat haruslah selalu berada di kuadran I pada koordinat kartesius. Bila rentangan X dimana $f(x)$ didefinisikan merupakan selang yang terhingga, maka selang tersebut dapat saja selalu diperpanjang sehingga mencakup seluruh bilangan real dengan mendefinisikan $f(x)$ bernilai nol untuk setiap titik pada daerah perpanjangan itu. Jumlah semua peluang pada daerah tersebut harus sama dengan 1.

Definisi 2.15

Fungsi $f(x)$ disebut fungsi probabilitas atau distribusi peluang suatu variabel random kontinu X bila untuk setiap hasil x yang mungkin:

1. $f(x) \geq 0$ 2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ 3. $p(a < x < b) = \int_a^b f(x)dx$

Contoh 2.12

Misalkan variabel random X mempunyai fungsi padat peluang :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{3} & , -1 < x < 2 \\ 0 & , \text{untuk } x \text{ lainnya} \end{cases}$$

Tunjukkan bahwa syarat ke 2 dipenuhi dan hitunglah $p(0 < x \leq 1)$

Jawab:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{3} dx = \frac{1}{3}\int_{-}^{2} x^2 dx$$

$$= \frac{1}{9}\left[x^3\right]_{-1}^{2}$$

$$= \frac{1}{9}[8+1] = 1$$

sedangkan

$$p(0 < x \leq 1) = \frac{1}{3}\int_{0}^{1} x^2$$

$$= \frac{1}{9} x^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{9}$$

3. Nilai Harapan dan Variansi

Salah satu konsep yang berkaitan dengan variabel random adalah nilai harapan dan juga variansinya. Nilai harapan variabel random digunakan untuk mendefinisikan mean atau rataan variabel random. Andaikan X adalah variabel random, maka nilai harapan bagi variabel random X adalah perkiraan rata-rata distribusi peluang yang pengamatannya mencakup keseluruhan nilai X bila percobaannya dilakukan secara berulang-ulang.

Definisi 2.16

Andaikan X adalah variabel random dengan distribusi probabilitas $f(x)$. Nilai harapan X adalah:

$$\mu = E(X) = \begin{cases} \sum\limits_{x} x\, f(x) & \text{jika X diskret} \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} x\, f(x) dx & \text{jika X kontinu} \end{cases}$$

Definisi 2.17

Bila X menyatakan variabel random maka variansi bagi X didefinisikan sebagai:

$$\sigma^2 = E\left[(X-\mu)^2\right]$$

4. Sifat-Sifat Nilai Harapan

Teorema 2.8

Bila a dan b konstan maka:

$$E(aX+b) = aE(X)+b \tag{2.8}$$

Bukti:

Menurut Definisi 2.16, bila X diskrit maka:

$$\begin{aligned} E(aX+b) &= \sum_x (ax+b) f(x) = \sum_x axf(x) + \sum_x b\, f(x) \\ &= a\sum_x xf(x) + b\sum_x f(x) \end{aligned}$$

$$E(aX+b) = aE(X)+b$$

Bila *X* kontinu maka

$$E(aX+b)=\int_{-\infty}^{\infty}(ax+b)f(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}(ax)f(x)dx+\int_{-\infty}^{\infty}b\,f(x)dx$$

$$=a\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx+b\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx$$

$$=aE(X)+b$$

$$E(aX+b)=aE(X)+b$$

Teorema 2.9

Nilai harapan jumlah atau selisih dua fungsi suatu variabel random *X* sama dengan jumlah atau selisih nilai harapan dua fungsi tersebut, yaitu :

$$E[g(X)\pm h(X)]=E[g(X)]\pm E[h(X)] \qquad (2.9)\square$$

Bukti:

Bila *X* diskrit maka

$$E[g(X)\pm h(X)]=\sum_{x}[g(x)\pm h(x)]$$

$$=\sum_{x}[g(x)]f(x)\pm\sum_{x}[h(x)]f(x)$$

$$=E[g(X)]\pm E[h(X)]$$

Bila *X* kontinu maka

$$E[g(X)\pm h(X)]=\int_{-\infty}^{\infty}[g(x)\pm h(x)]f(x)dx$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}[g(x)]f(x)dx\pm\int_{-\infty}^{\infty}[h(x)]f(x)dx$$

$$=E[g(X)]\pm E[h(X)]$$

Teorema 2.10

Variansi variabel random *X* adalah:

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= E(X^2) - E^2(X) \\ &= E(X^2) - \mu^2\end{aligned} \qquad (2.10) \square$$

Bukti:

Berdasarkan Teorema 2.8 dan Definisi 2.17 maka

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= E\left[(X-\mu)^2\right] \\ &= E\left[X^2 - 2\mu X + \mu^2\right] \\ &= E(X^2) - 2\mu E(X) + \mu^2 \\ &= E(X^2) - 2\mu^2 + \mu^2 \\ &= E(X^2) - \mu^2\end{aligned}$$

Teorema 2.11

Bila *a* dan *b* konstan maka :

$$\sigma^2_{aX+b} = a^2\left[E(X^2) - E^2(X)\right] \qquad (2.11) \square$$

Bukti:

Berdasarkan Teorema 2.9 maka

$$\begin{aligned}E\left[(aX+b)^2\right] &= E\left[a^2X^2 + 2abX + b^2\right] \\ &= a^2E(X^2) + 2abE(X) + E(b^2) \\ &= a^2E(X^2) + 2abE(X) + b^2\end{aligned}$$

sehingga

$$\begin{aligned}\sigma^2_{aX+b} &= E\left[(aX+b)^2\right] - E^2(aX+b) \\ &= \left(a^2E(X^2) + 2abE(X) + b^2\right) - \left[aE(x) + b\right]^2 \\ &= a^2\left[E(X^2) - E^2(X)\right]\end{aligned}$$

Teorema 2.12

Variansi jumlah atau selisih dua fungsi suatu variabel random X adalah:

$$\sigma^2_{g(X)\pm h(X)} = \left(E\left[g^2(X)\right] + E\left[h^2(X)\right]\right) - \left(E^2\left[g(X)\right] + E^2\left[h(X)\right]\right) \qquad (2.12)\ \square$$

Bukti:

Berdasarkan Teorema 2.9 maka:

$$\begin{aligned} E\left[(g(X) \pm h(X))^2\right] &= E\left[g^2(X) \pm 2g(X)h(X) + h^2(X)\right] \\ &= E\left[g^2(X)\right] \pm 2E\left[g(X)h(X)\right] + E\left[h^2(X)\right] \\ &= E\left[g^2(X)\right] \pm 2E\left[g(X)\right]E\left[h(X)\right] + E\left[h^2(X)\right] \end{aligned}$$

sedangkan

$$\begin{aligned} E^2\left[h(X) \pm g(X)\right] &= \left(E\left[g(X)\right] \pm E\left[h(X)\right]\right)^2 \\ &= E^2\left[g(X)\right] \pm 2E\left[g(X)\right]E\left[h(X)\right] + E^2\left[h(X)\right] \end{aligned}$$

sehingga

$$\begin{aligned} \sigma^2_{g(X)\pm h(X)} &= \left(E\left[g^2(X)\right] \pm 2E\left[g(X)\right]E\left[h(X)\right] + E\left[h^2(X)\right]\right) - \left(E^2\left[g(X)\right] \pm \right. \\ &\quad \left. 2E\left[g(X)\right]E\left[h(X)\right] + E^2\left[h(X)\right]\right) \\ &= \left(E\left[g^2(X)\right] + E\left[h^2(X)\right]\right) - \left(E^2\left[g(X)\right] + E^2\left[h(X)\right]\right) \end{aligned}$$

5. Distribusi Peluang Uniform

a. Distribusi Peluang Uniform Diskrit

Distribusi peluang diskrit yang paling sederhana adalah distribusi peluang yang variabel randomnya memperoleh semua nilainya dengan peluang yang sama. Distribusi peluang seperti itu disebut distribusi peluang seragam atau uniform.

Definisi 2.18

Bila variabel random diskrit X mempunyai nilai-nilai $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ dengan peluang yang sama, maka fungsi distribusi uniform didefinisikan sebagai berikut:

$$f(x,n) = \frac{1}{n} \qquad x = x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$$

Teorema 2.13

Nilai harapan dan variansi distribusi uniform diskrit $f(x,n)$ adalah:

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \qquad \text{dan} \qquad \sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2}{n}$$

Bukti:

Berdasarkan Definisi 2.16 maka:

$$\mu = \sum_x x\, f(x,n) = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \qquad (2.13)\ \square$$

dan

$$\sigma^2 = E\left[(X-\mu)^2\right] = \sum_x (X-\mu)^2 f(x,n)$$

$$= \frac{(x_1-\mu)^2 + (x_2-\mu)^2 + \ldots + (x_n-\mu)^2}{n}$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i-\mu)^2}{n} \qquad (2.14)\ \square$$

Contoh 2.13

Sebuah bola lampu dipilh secara acak dari sekotak bola lampu yang berisi 1 yang 40 watt, 1 yang 60 watt, 1 yang 75 watt dan 1 yang 100 watt. Tentukan distribusi seragam variabel random *X* yang menyatakan dipilihnya sebuah bola lampu dari kotak tersebut!

Jawab:

Ruang sampel, $S = \{40, 60, 75, 100\}$. Peluang terambilnya setiap bola lampu adalah $p = \frac{1}{4}$ sehingga distribusi seragamnya adalah:

$$f(x,4) = \frac{1}{4} \quad , \ x = 40, 60, 75, 100$$

b. Distribus Peluang Uniform Kontinu

Definisi 2.19

Andaikan *X* adalah variabel random kontinu maka fungsi distribusi uniform didefinisikan sebagai berikut:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{untuk } a < x < b \\ 0 & \text{untuk } x \text{ yang lainnya} \end{cases}$$

Teorema 2.14

Rataan dan variansi distribusi uniform variabel random kontinu adalah:

$$\mu = \frac{a+b}{2} \quad \text{dan} \quad \sigma^2 = \frac{(a-b)^2}{12}$$

Bukti:

Menurut Definisi 2.16 :

$$E(X) = \mu = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

$$E(X) = \mu = \int_a^b x\left(\frac{1}{b-a}\right)dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b xdx = \frac{1}{b-a}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_a^b$$
$$= \left(\frac{1}{b-a}\right)\left(\frac{1}{2}\left(b^2 - a^2\right)\right)$$
$$= \frac{(b-a)(b+a)}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2} \qquad (2.15)$$

sedangkan

$$E\left(X^2\right) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx = \int_a^b x^2\left(\frac{1}{b-a}\right)dx$$

$$E\left(X^2\right) = \frac{1}{b-a}\int_a^b x^2 dx = \frac{1}{3(b-a)}\left[x^3\right]_a^b$$
$$= \frac{1}{3(b-a)}\left[b^3 - a^3\right]$$
$$= \frac{a^2 + ab + b^2}{3}$$

sehingga,

$$\sigma^2 = E\left(x^2\right) - E^2(x) = \frac{a^2 + ab + b^2}{3} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$
$$= \frac{a^2 - 2ab + b^2}{12}$$

$$\sigma^2 = \frac{(a-b)^2}{12} \qquad (2.16)$$

C. Tabel Mortalitas

Tabel mortalitas adalah tabel yang berisi peluang meninggal seseorang menurut umurnya dari kelompok orang yang diasuransikan atau pemegang polis asuransi jiwa. Tabel mortalita dibuat berdasarkan pengamatan terhadap banyaknya orang yang lahir pada saat yang bersamaan dan kemudian mencatat banyaknya orang yang meninggal setiap tahunnya sampai semua orang tersebut meninggal. Dari data tersebut dapat dihitung peluang hidup dan peluang meninggal seseorang pada usia tertentu. Tabel mortalitas digunakan dalam perhitungan jumlah premi yang harus dibayar oleh pemegang polis kepada perusahaan asuransi jiwa. Untuk mempermudah penulisan orang yang berusia x dinotasikan dengan (x) dan banyaknya orang yang tepat berusia x dinotasikan dengan l_x, sedangkan untuk menunjukkan banyak orang yang tepat berusia $x+1$ adalah l_{x+1} sedangkan untuk menyatakan banyaknya orang yang meninggal dalam interval x dan $x+1$ adalah d_x. Sementara itu p_x menyatakan peluang (x) mencapai usia $x+1$ tahun dan q_x menunjukkan peluang (x) sebelum mencapai usia $x+1$ tahun.

Dalam tabel mortalitas terdapat hubungan $l_x - d_x = l_{x+1}$. Perhitungan peluang hidup p_x merupakan selisih antara banyaknya orang yang berusia x dengan banyaknya orang yang meninggal antara usia x dan $x+1$ tahun yang kemudian hasil dari selisih tersebut dibagi dengan banyak orang yang berusia x, sehingga sehingga peluang hidup (x)dapat ditulis:

$$\begin{aligned} p_x &= \frac{l_x - d_x}{l_x} \\ &= \frac{l_{x+1}}{l_x} \end{aligned} \tag{2.17}$$

Contoh 2.14

Jika tiap 100 orang yang lahir bersamaan waktunya, satu orang meninggal setiap tahun sampai semua orang tersebut meninggal semua. Hitunglah peluang seseorang yang berusia 20 tahun akan mencapai usia 60 tahun?

Jawab:

Dari soal diketahui bahwa $l_0 = 100$ dan tiap tahun yang meninggal satu orang, sehingga sampai akhir tahun ke 20 yang meninggal berjumlah 20 orang berarti $l_{20} = 80$ dan yang mencapai usia 60 tahun adalah $l_{60} = 40$, maka

$${}_{40}p_{20} = \frac{l_{60}}{l_{20}} = \frac{40}{80} = 0{,}5$$

Jadi, peluang seseorang yang berusia 20 tahun akan mencapai usia 60 tahun adalah 0,5

Sedangkan untuk kemungkinan meninggal(q_x) adalah hasil bagi antara banyak orang yang meninggal dalam interval satu tahun atau dari usia x sampai usia $x+1$ dengan banyaknya orang yang berusia x, sehingga peluang meninggal bagi (x) adalah:

$$q_x = \frac{d_x}{l_x} = \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x} \qquad (2.18)$$

Sesuai dengan teorema dalam statistika bahwa jumlah dari peluang berhasilnya suatu kejadian dengan peluang gagalnya kejadian tersebut adalah 1. Demikian juga dalam ilmu asuransi yaitu jumlah peluang hidup dan meninggalnya seseorang adalah 1, sehingga dapat ditulis:

$$p_x + q_x = \frac{l_x - d_x}{l_x} + \frac{d_x}{l_x} = 1 \qquad (2.19)$$

Secara teknis tabel mortalitas dibuat dengan cara mengamati peluang meninggal dari sekelompok orang yang berusia tertentu atau dengan kata lain peluang meninggal bagi (x) ditaksir dari data yang dikumpulkan oleh perusahaan asuransi jiwa.

Contoh 2.15

Tabel di bawah ini berisi data peluang meninggal sekelompok orang yang berusia antara 85 tahun sampai 90 tahun dan diketahui $l_{85} = 10.000$, maka buatlah tabel mortalitas dari data tersebut?

x	l_x	d_x	q_x	p_x
85	10.000		$\frac{3}{10}$	
86			$\frac{3}{7}$	
87			$\frac{3}{4}$	
88			$\frac{9}{10}$	
89			1	
90			0	

Jawab:

Dari persamaan (2.18) maka diperoleh:

$$q_5 = \frac{l_{85} - l_{86}}{l_{85}} \Rightarrow l_{86} = l_{85} - l_{85}q = 10.000 - 10.000\left(\frac{3}{10}\right) = 7.000$$

$$l_{87} = l_{86} - l_{86}q_{86} = 7.000 - 7.000\left(\frac{3}{7}\right) = 4.000$$

Dengan cara yang sama dapat diperoleh $l_{88} = 1.000, l_{89} = 100, l_{90} = 0$

Nilai d_x dapat dihitung dengan menggunakan persamaan $d_x = l_x - l_{x+1}$ sehingga diperoleh: $d_{85} = 3000, d_{86} = 3000, d_{87} = 3000, d_{88} = 900, d_{89} = 100, d_{90} = 0$

Sedangkan nilai p_x dapat dihitung dengan menggunakan persamaan (2.17), diperoleh $p_{85} = \frac{7}{10}, p_{86} = \frac{4}{7}, p_{87} = \frac{1}{4}, p_{88} = \frac{1}{10}, p_{89} = 0$

Jadi, tabel mortalitas untuk jangka waktu pengamatan tersebut adalah:

x	l_x	d_x	q_x	p_x
85	10.000	3.000	$\frac{3}{10}$	$\frac{7}{10}$
86	7.000	3.000	$\frac{3}{7}$	$\frac{4}{7}$
87	4.000	3.000	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$
88	1.000	900	$\frac{9}{10}$	$\frac{1}{10}$
89	100	100	1	0
90	0	0	0	

1. Probabilitas Hidup Seseorang

Asuransi jiwa berkaitan erat dengan peluang meninggal dan peluang hidup seseorang. Sebelum membuat perjanjian tertulis dengan pemegang polis, biasanya perusahaan asuransi jiwa mengadakan tes kesehatan terlebih dahulu untuk mengetahui tingkat kesehatan si tertanggung atau pemegang polis. Semakin buruk kesehatan si tertanggung, maka semakin mahal premi yang harus dibayar. Pada umumnya peluang meninggal seseorang naik seiring dengan bertambahnya usia orang tersebut. Asuransi jiwa dengan status hidup perorangan mempunyai probabilitas hidup dan probabilitas meninggal sebagai berikut:

Probabilitas (x) mencapai usia $x+n$ tahun kemudian adalah:

$$ {}_n p_x = \frac{l_{x+n}}{l_x} \tag{2.20} $$

Probabilitas (x) meninggal sebelum mencapai usia $x+n$ tahun adalah:

$$ {}_n q_x = 1 - \frac{l_{x+n}}{l_x} = \frac{l_x - l_{x+n}}{l_x} \tag{2.21} $$

Indeks yang terletak di sebelah kiri bawah menunjukkan periode hidup bagi (x)Probabilitas (x) akan hidup sampai n tahun dan akan meninggal dalam 1 tahun berikutnya adalah:

$$\begin{aligned} {}_{n|}q_x &= \frac{d_{x+n}}{l_x} = \frac{l_{x+n} - l_{x+n+1}}{l_x} \\ &= \frac{l_{x+n}}{l_x} - \frac{l_{x+n+1}}{l_x} \\ &= {}_n p_x - {}_{n+1} p_x \end{aligned} \tag{2.22}$$

Indeks yang terletak di sebelah kiri di bawah garis karakter q menunjukkan periode (jangka waktu) hidup bagi (x). Peluang seseorang yang berusia x akan meninggal dalam jangka waktu n tahun dapat terjadi pada tahun pertama, tahun kedua sampai tahun ke $n-1$. Oleh karena ${}_n q_x = 1 - {}_n p_x$ sehingga:

$$\begin{aligned} {}_n q_x &= 1 - {}_n p_x = 1 - \left(\frac{l_{x+n}}{l_x}\right) = \frac{l_x - l_{x+n}}{l_x} \\ &= \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x} + \frac{l_{x+1} - l_{x+2}}{l_x} + \frac{l_{x+2} - l_{x+3}}{l_x} + \ldots + \frac{l_{x+n-1} - l_{x+n}}{l_x} \\ &= q_x + {}_{1|}q_x + {}_{2|}q_x + {}_{3|}q_x + \ldots + {}_{n-1|}q_x \end{aligned}$$

Jadi persamaan (2.21) dapat dinyatakan dengan cara lain yaitu:

$$\begin{aligned} {}_n q_x &= q_x + {}_{1|}q_x + {}_{2|}q_x + {}_{3|}q_x + \ldots + {}_{n-1|}q_x \\ &= \sum_{t=0}^{n-1} {}_{t|}q_x \end{aligned} \tag{2.23}$$

Probabilitas (x) akan hidup sampai m tahun dan akan meninggal dalam n tahun berikutnya adalah:

$$
\begin{aligned}
{}_{m|n}q_x &= \frac{{}_n d_{x+m}}{l_x} = \frac{l_{x+m} - l_{x+m+n}}{l_x} \\
&= \frac{l_{x+m}}{l_x} - \frac{l_{x+m+n}}{l_x} \\
&= {}_m p_x - {}_{m+n} p_x
\end{aligned}
\tag{2.24}
$$

Contoh 2.16

Hitunglah peluang seseorang yang sekarang berusia 27 tahun akan meninggal antara usia 62 dan 68 tahun?

Jawab:

Peluang seseorang yang sekarang berusia 27 tahun akan meninggal antara usia 62 dan 68 tahun dinotasikan dengan ${}_{35|6}q_{27}$, sehingga berdasarkan persamaan (2.24) dan tabel 1 pada lampiran maka :

$$
\begin{aligned}
{}_{35|6}q_{27} &= \frac{{}_6 d_{62}}{l_{27}} = \frac{l_{62} - l_{68}}{l_{27}} \\
&= \frac{640741 - 506403}{933692} \\
&= 0{,}2528
\end{aligned}
$$

Jadi, peluang seseorang yang berusia 27 tahun akan meninggal antara usia 62 dan 68 tahun adalah 0,2528.

Contoh 2.17

Jika Ahmad sekarang berusia 19 tahun sedangkan ayahnya berusia 43 tahun. Hitunglah peluang keduanya hidup 20 tahun lagi dan meninggal dalam waktu setahun kemudian?

Jawab:

Peluang Ahmad yang berusia 19 tahun akan meninggal antara usia 39 dan 40 tahun tidak mempengaruhi/dipengaruhi peluang Ayahnya yang berusia 43 tahun akan meninggal antara usia 63 dan 64 tahun dalam hal ini kedua peristiwa tersebut saling bebas, sehingga peluang keduanya hidup 20 tahun lagi dan akan meninggal setahun berikutnya adalah:

$$
\begin{aligned}
{}_{20|}q_{19} \cdot {}_{20|}q_{43} &= \frac{l_{39}-l_{40}}{l_{19}} \cdot \frac{l_{63}-l_{64}}{l_{43}} \\
&= \frac{888504-883342}{953743} \cdot \frac{620782-599824}{865967} \\
&= 0{,}00013
\end{aligned}
$$

2. Harapan Hidup

Harapan hidup adalah perkiraan rata-rata seseorang berusia x tahun akan hidup mencapai beberapa tahun lagi. Dalam statistika dikenal dengan nilai harapan yang didefinisikan sebagai berikut:

$$
E(T) = \begin{cases} \sum_{t=0}^{\infty} t\, p(t) & \text{untuk t diskret} \\ \int_{-\infty}^{\infty} t\, f(t)\, dt & \text{untuk t kontinu} \end{cases}
$$

Perhitungan harapan hidup dalam asuransi jiwa ada dua macam, pertama adalah harapan hidup ringkas yang dinotasikan dengan e_x dan kedua adalah harapan hidup lengkap yang dinotasikan dengan $\overset{\circ}{e}_x$. Misalkan Albert lahir pada tanggal 5 Maret tahun 1967 dan ia meninggal pada tanggal 20 Juni tahun 1992, maka dalam perhitungan harapan hidup ringkas, tahun yang lengkap dialami oleh Albert hanya sampai pada tanggal 3 Maret 1992, sehingga umur Albert saat meninggal adalah 25 tahun dan bukan 25,3 tahun. Jadi jelas dalam contoh bahwa bagian tahun yang tidak lengkap yang dialami 0,3 tahun tidak ikut diperhitungkan. Ini berarti bahwa setiap orang dianggap meninggal pada hari ulang tahunnya yang terakhir.

Peluang seseorang dapat bertahan hidup sampai t tahun adalah dan meninggal setahun kemudian adalah ${}_t|q_x$. Misalkan seseorang dapat bertahan hidup selama 0,1,2,3,...tahun berturut-turut adalah $|q_x, {}_1|q_x, {}_2|q_x, {}_{\backslash 3}|q_x, \ldots .$ maka sesuai dengan definisi nilai harapan hidupnya adalah:

$$
\begin{aligned}
e_x &= \sum_{t=0}^{\infty} t\left({}_t|q_x\right) = \sum_{t=0}^{\infty} t\,\frac{d_{x+t}}{l_x} = \sum_{t=0}^{\infty} t\,\frac{l_{x+t} - l_{x+t+1}}{l_x} \\
&= \frac{1}{l_x}\left[1\left(l_{x+1} - l_{x+2}\right) + 2\left(l_{x+2} - l_{x+3}\right) + 3\left(l_{x+3} - l_{x+4}\right) + \ldots\right] \\
&= \frac{l_{x+1} + l_{x+2} + l_{x+3} + \ldots .}{l_x}
\end{aligned}
$$

Dengan menggunakan persamaan (2.22), maka :

$$
e_x = \sum_{t=1}^{\infty} {}_t p_x \qquad (2.25)
$$

Jika dalam harapan hidup ringkas, perhitungan pecahan tidak ikut diperhitungkan. Tetapi dalam harapan hidup lengkap pecahan tahun yang dialami tetap diperhitungkan. Misalkan dalam kasus Albert, bagian tahun yang tidak lengkap adalah 0,3 tahun. Sesuai dengan definisi nilai harapan maka harapan hidup lengkap yang dinyatakan dengan $\overset{\circ}{e}_x$ adalah:

$$
\overset{\circ}{e}_x = \int_0^{\infty} \frac{l_{x+t}}{l_x}\,dt = \int_0^{\infty} {}_t p_x\,dt \qquad (2.26)
$$

Integral tersebut akan menghasilkan perhitungan yang sangat sulit karena tidak mudah untuk menentukan fungsi kontinu yang menggambarkan probabilitas kematian seseorang, sehingga harapan hidup lengkap bagi (x) dapat didekati dengan harapan hidup ringkas ditambah dengan harapan hidup setahun bagi (x). Peluang meninggal setiap orang dalam rentang waktu setahun dapat diasumsikan sama, sehingga harapan hidup setahun dapat didekati dengan menggunakan distribusi uniform yaitu:

$$\int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}x^2\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

Jadi, harapan hidup lengkap bagi (x) adalah:

$$\overset{\circ}{e}_x = e_x + \frac{1}{2} \tag{2.27}$$

BAB III

ANUITAS

A. Bunga Dan Tingkat Bunga

Bunga adalah uang yang dibayarkan oleh perorangan atau organisasi kepada pemilik modal sebagai balas jasa atas penggunaan sejumlah uang, yang disebut uang pokok. Bunga biasanya dibayarkan pada akhir jangka waktu tertentu, misalnya tahunan, setengah tahunan, seperempat tahunan, bulanan atau harian. Besarnya bunga tergantung pada besarnya uang pokok, jangka waktu investasi dan besarnya tingkat bunga. Tingkat bunga adalah perbandingan bunga yang dikenakan dengan uang pokok dalam satu satuan waktu. Tingkat bunga biasanya dinyatakan dalam bentuk persentase. Misalnya uang pokok Rp 1000 dan bunga Rp 100 per tahun, maka tingkat bunga adalah: $\frac{100}{1000}.100\% = 10\%$.

Ada dua jenis bunga yaitu:

1. Bunga Tunggal

Bunga tunggal adalah bunga yang dihitung berdasarkan persen tertentu dari penggunaan uang pokok pada jangka waktu tertentu. Bila P menyatakan uang pokok yang diinvestasikan selama n tahun dengan tingkat bunga i setahun, maka jumlah uang pada akhir tahun ke-n (P_n) adalah jumlah uang pokok beserta bunganya. Secara matematis dapat ditulis:

$$\begin{aligned} P_n &= P + niP \\ &= P(1+ni) \end{aligned} \qquad (3.1)$$

2. Bunga Majemuk

Jika bunga ditambahkan pada uang pokok pada akhir setiap periode bunga, sehingga uang pokok bertambah banyak, maka bunga seperti itu disebut bunga majemuk. Andaikan uang pokok adalah P rupiah diinvestasikan selama n periode waktu dengan tingkat bunga i per periode waktu, sehingga jumlah uang pada akhir periode pertama adalah:

$$\begin{aligned} P_1 &= P + Pi \\ &= P(1+i) \end{aligned}$$

Jumlah uang pada akhir periode kedua adalah:

$$\begin{aligned} P_2 &= P_1 + P_1 i \\ &= P_1(1+i) \\ &= P(1+i)^2 \end{aligned}$$

Bila proses ini dilanjutkan maka jumlah uang pada akhir periode ke-n adalah:

$$P_n = P(i+1)^n \qquad (3.2)$$

Jika periode waktunya adalah tahunan maka persamaan (3.2), menyatakan jumlah uang pada akhir tahun ke n sedangkan P menyatakan jumlah uang pokok. Persamaan (3.2) dapat ditulis:

$$P = \frac{P_n}{(1+i)^n} = P_n(1+i)^{-n} \text{ untuk } n = 1,2,3,\ldots$$

Andaikan $(1+i)^{-1} = v$ maka $P = P_n v^n$ $\qquad (3.3)$

v adalah nilai sekarang dari pembayaran sebesar Rp 1 yang dilakukan satu tahun kemudian dan P sering disebut dengan nilai tunai atau *present value*.

Contoh 3.1

Pak Ahmad mempunyai seorang anak yang berusia 10 tahun. Pak Ahmad ingin menyimpan uang di bank dan akan memberikan uang tersebut pada anaknya sebagai biaya di perguruan tinggi waktu si anak tepat berusia 20 tahun. Jika Pak Ahmad ingin memberikan Rp 10.000.000,00 pada si anak maka berapakah dia harus menyimpan uang di bank sekarang?

a. Bila bank memberi bunga tunggal 10 % per tahun

b. Bila bank memberi bunga majemuk 10 % per tahun

Jawab:

Diketahui $n = 10, i = 10\%, P_n = 10.000.000$

a. Berdasarkan persamaan (3.1) maka diperoleh:

$$P = \frac{10^7}{[1 + 10(0,1)]} = 5.000.000$$

Jadi, si ayah harus menyimpan uang sebesar Rp 5.000.000,00 sekarang dengan bunga tunggal 10 % per tahun maka 10 tahun mendatang akan mendapatkan uang sebesar Rp 10.000.000,00.

b. Menurut persamaan (3.2) maka diperoleh:

$$P = \frac{10^7}{[1 + 0,1]^{10}} = 3.855.432,8943$$

Jadi, si ayah harus menyimpan uang sebesar Rp 3.855.432,8943 saat ini dengan bunga majemuk 10 % per tahun sehingga 10 tahun mendatang akan menperoleh uang sebesar Rp 10.000.000,00.

B. Anuitas

Anuitas adalah serangkaian pembayaran dengan jumlah tertentu yang dilakukan secara berkala pada selang waktu yang sama, misalkan tahunan, triwulan, bulanan atau harian. Anuitas mempunyai peran yang sangat penting karena banyak contoh pembayaran yang tidak dapat dilakukan sekaligus. Dalam asuransi jiwa, pembayaran premi oleh pemegang polis atau tertanggung kepada perusahaan asuransi jiwa pada umumnya berbentuk anuitas, karena bisa dibayar mingguan, bulanan, tahunan atau jangka waktu lainnya yang berkala.

Pembayaran anuitas dapat dilakukankan pada awal periode pembayaran (anuitas awal) atau pada akhir periode pembayaran(anuitas akhir). Jika periode pembayarannya adalah tahunan, maka pembayaran anuitas awal dilakukan pada saat anuitan berusia x tahun sedangkan pembayaran anuitas akhir dilakukan saat anuitan berusia $x+1$ tahun, sehingga jelas bahwa selisih anuitas awal dan anuitas akhir adalah setahun.

Pada umumnya anuitas dibedakan menjadi dua macam yaitu anuitas tentu dan anuitas hidup. Dari setiap anuitas akan dicari besarnya nilai tunai *(present value)*, yaitu nilai seluruh pembayaran beserta bunganya bila dibayar sekaligus sekarang dan menghitung nilai akhir yaitu jumlah seluruh pembayaran beserta bunganya. Jumlah nilai tunai dan nilai akhir tergantung besarnya tingkat bunga yang digunakan. Pembayaran anuitas dapat dilakukan setiap tahun atau beberapa kali dalam setahun.

1. Anuitas Tentu

a. Anuitas Tentu dengan Pembayaran Setiap Tahun

Anuitas tentu adalah serangkaian pembayaran secara berkala yang tidak memperhatikan hidup matinya anuitan serta dilakukan selama jangka waktu tertentu. Diketahui suatu anuitas tentu dengan pembayaran setiap tahun yang di-lakukan selama n tahun dan untuk mempermudah penulisan dimisalkan besar setiap pembayaran adalah Rp 1. Jika pembayaran dilakukan setiap akhir tahun maka pembayaran pertama dilakukan pada akhir tahun pertama, pembayaran kedua dilakukan pada akhir tahun kedua, dan seterusnya. Setiap pembayaran tahunan sebesar Rp 1 tersebut sudah dikenakan bunga, sehingga nilai akhir pembayaran pertama adalah $(1+i)^{n-1}$, nilai akhir pembayaran kedua adalah $(1+i)^{n-2}$, nilai akhir pembayaran ketiga adalah $(1+i)^{n-3}$ demikian seterusnya sampai nilai akhir pembayaran ke n adalah 1. Jadi, nilai akhir seluruh pembayaran tersebut adalah:

$$\begin{aligned} s_n &= (1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + (1+i)^{n-3} + \dots . + (1+i) + 1 \\ &= 1 + (1+i) + \dots + (1+i)^{n-3} + (1+i)^{n-2} + (1+i)^{n-1} \end{aligned}$$

$$s_n = \sum_{t=0}^{n-1} (1+i)^t \qquad (3.4)$$

Oleh karena ruas kanan persamaan (3.4) merupakan deret geometri berhingga dengan suku pertama adalah 1 dan rasio adalah $(1+i)>1$ sehingga persamaan (3.4) dapat diubah menjadi:

$$s_n = \left(\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)-1} \right) = \frac{(1+i)^n - 1}{i} = \frac{v^{-n} - 1}{i} \qquad (3.5)$$

Jika pembayaran dilakukan pada awal tahun maka nilai akhir seluruh pembayaran tersebut adalah:

$$\begin{aligned}\ddot{s}_n &= (1+i)^n + (1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + \ldots. + (1+i)^2 + (1+i) \\ &= (1+i) + (1+i)^2 + \ldots. + (1+i)^{n-2} + (1+i)^{n-1} + (1+i)^n\end{aligned}$$

$$\ddot{s}_n = \sum_{t=1}^{n} (1+i)^t \qquad (3.6)$$

Jika menggunakan persamaan (3.5) maka persamaan (3.6) dapat ditulis menjadi:

$$\begin{aligned}\ddot{s}_n &= (1+i)\left(1 + (1+i) + \ldots + (1+i)^{n-3} + (1+i)^{n-2} + (1+i)^{n-1}\right) \\ &= (1+i)(s_n) \\ &= (1+i)\left(\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right) \\ &= v^{-1}\left(\frac{v^{-n} - 1}{i}\right)\end{aligned}$$

$$\ddot{s}_n = \frac{v^{-n} - 1}{iv} \qquad (3.7)$$

Nilai tunai pembayaran tahunan sebesar Rp 1 dapat dihitung dengan menggunakan persamaan (3.3). Jika pembayaran anuitas dilakukan pada akhir tahun maka nilai tunai pembayaran pada akhir tahun pertama adalah $P_1 v = 1.v = v$, nilai tunai pembayaran pada akhir tahun kedua adalah $P_2 v^2 = 1.v^2 = v^2$, demikian seterusnya sampai nilai tunai pembayaran terakhir yang dilakukan pada akhir tahun ke n yaitu $P_n v^n = 1.v^n = v^n$, sehingga nilai tunai seluruh pembayaran tersebut adalah:

$$\begin{aligned}A &= v + v^2 + v^3 + \ldots. + v^n \\ A &= \sum_{t=1}^{n} v^t\end{aligned} \qquad (3.8)$$

Persamaan (3.8) menunjukkan besar pembayaran setiap tahunnya adalah Rp 1, namun bila besar pembayaran setiap tahunnya bukan Rp 1, maka persamaan (3.8) dikalikan dengan besarnya pembayaran tersebut. Nilai tunai anuitas tentu akhir sebesar Rp 1 dengan *n* kali pembayaran dinotasikan dengan $a_{\overline{n}|}$, maka persamaan (3.8) menjadi:

$$a_{\overline{n}|} = \sum_{t=1}^{n} v^t \tag{3.9}$$

Ruas kanan pada persamaan (3.9) adalah deret geometri berhingga dengan suku pertama dan rasionya adalah v $(v < 1)$, sehingga persamaan (3.9) dapat diubah menjadi:

$$a_{\overline{n}|} = \frac{v(1-v^n)}{1-v} = \frac{1-v^n}{v^{-1}(1-v)} = \frac{1-v^n}{v^{-1}-1} = \frac{1-v^n}{(1+i)-1}$$

$$a_{\overline{n}|} = \frac{1-v^n}{i} \tag{3.10}$$

Oleh karena selisih anuitas tentu awal dan anuitas tentu akhir adalah 1 maka nilai tunai anuitas tentu awal $\ddot{a}_{\overline{n}|}$ adalah:

$$\begin{aligned} \ddot{a}_{\overline{n}|} &= v^{1-1} + v^{2-1} + v^{3-1} + v^{4-1} .... + v^{n-1} \\ &= 1 + v + v^2 + v^3 + ... + v^{n-1} \\ &= \sum_{t=0}^{n-1} v^t \end{aligned} \tag{3.11}$$

Jika menggunakan persamaan (3.10) maka persamaan (3.11) dapat ditulis:

$$\ddot{a}_{\overline{n}|} = \frac{1}{v}\left(v + v^2 + v^3 + ... + v^n\right)$$

$$\ddot{a}_{\overline{n}|} = \frac{1}{v}\left(a_{\overline{n}|}\right) = \frac{1-v^n}{iv} \qquad (3.12)$$

Contoh 3.2

Seseorang akan menerima 10 kali pembayaran tahunan sebesar Rp 5.000.000,00 pembayaran pertama dilakukan sekarang. Berapakah nilai tunai dan nilai akhir seluruh pembayaran bila tingkat bunganya 5 % per tahun?

Jawab:

Berdasarkan persamaan (3.12) maka nilai tunai anuitas tentu awal dari seluruh pembayaran tersebut adalah:

$$\begin{aligned} 5.10^6\,\ddot{a}_{\overline{10}|} &= \left(5.10^6\right)\frac{1-v^n}{iv} = \\ &= \left(5.10^6\right)\frac{1-(1+0{,}05)^{-10}}{0{,}05(1+0{,}05)^{-1}} \\ &= 40.539.108{,}38 \end{aligned}$$

Sedangkan nilai akhir seluruh pembayaran dapat dihitung dengan menggunakan persamaan (3.7) yaitu:

$$\begin{aligned} 5.10^6\,\ddot{s}_{\overline{n}|} &= 5.10^6\,\frac{v^{-n}-1}{iv} \\ &= 5.10^6\,\frac{(1+0{,}05)^{10}-1}{(0{,}05)(1+0{,}05)^{-1}} \\ &= 66.033.935{,}81 \end{aligned}$$

Jadi, nilai tunai dan nilai akhir anuitas tentu dengan pembayaran Rp 5.000.000,00 tiap awal tahun dan tingkat bunga 5% masing-masing adalah Rp 40.539.108,38 dan Rp 66.033.935,81.

Anuitas tentu dengan pembayaran tertunda, misalnya ditunda selama *m* tahun dan pembayaran sebesar Rp 1 dilakukan pada awal tahun maka pembayaran pertama dilakukan pada awal tahun ke $(m+1)$, jika jangka waktu pembayaran adalah *n* tahun maka nilai tunai seluruh pembayarannya adalah:

$$\begin{aligned} {}_{m|}\ddot{a}_{\overline{n|}} &= v^m + v^{m+1} + v^{m+2} + \ldots. + v^{m+n-1} \\ &= v^m\left(1 + v + v^2 + \ldots. + v^{n-1}\right) \\ &= v^m \ddot{a}_{\overline{n|}} \end{aligned} \tag{3.13}$$

Sedangkan jika pembayarannya dilakukan di akhir tahun maka nilai tunai seluruh pembayarannya adalah:

$$\begin{aligned} {}_{m|}a_{\overline{n|}} &= v^{m+1} + v^{m+2} + v^{m+3} + \ldots. + v^{m+n} \\ &= v^m\left(v + v^2 + v^3 + \ldots + v^{n-1}\right) \\ &= v^m a_{\overline{n|}} \end{aligned} \tag{3.14}$$

Contoh 3.3

Seseorang menaruh uang di bank untuk membiayai sekolah anaknya selama 12 tahun. Jika anaknya menerima \$ 1000 tiap akhir tahun, pembayaran pertama dilakukan pada akhir tahun keenam dari sekarang, seluruh uang dan bunganya habis dibayarkan pada waktu pembayaran yang ke 12, berapakah besarnya uang yang harus ditabung bila bank memberikan bunga 10 % per tahun?

Jawab:

Berdasarkan persamaan (3.14) maka nilai tunai anuitas akhir sebesar \$ 1000 dengan pembayaran dilakukan sebanyak 12 kali dengan tingkat bunga 10% per tahun dan ditunda terlebih dahulu selama 6 tahun adalah:

$$1.000\ {}_{6}|a_{\overline{12}|} = 1000(1+0{,}1)^{-6}\left(\frac{1-(1+0{,}1)^{-12}}{0{,}1}\right)$$
$$= 3846{,}15$$

Jadi, orang tersebut harus menyimpan uang di bank sebesar $ 3846,15 agar anaknya menerima $ 1.000 tiap akhir tahun.

b. Anuitas Tentu dengan Pembayaran Beberapa Kali Setahun

Anuitas tentu dengan pembayaran beberapa kali setahun adalah anuitas tentu yang pembayarannya dilakukan r kali dalam setahun atau setiap $\frac{1}{r}$ tahun selama jangka waktu tertentu, misalnya selama n tahun. Jika besar pembayaran setahun adalah Rp 1, maka besar pembayaran setiap $\frac{1}{r}$ tahun adalah Rp $\frac{1}{r}$ selama n tahun. Jika pembayaran dilakukan pada akhir setiap periode $\frac{1}{r}$ tahun dengan tingkat bunga i per tahun, maka nilai akhir pembayaran pertama $\frac{1}{r}(1+i)^{n-\frac{1}{r}}$ yang dilakukan sesudah $\frac{1}{r}$ tahun dari sekarang, nilai akhir pembayaran kedua $\frac{1}{r}(1+i)^{n-\frac{2}{r}}$ yang dilakukan sesudah $\frac{2}{r}$ tahun dari sekarang, dan seterusnya sampai nilai akhir pembayaran ke nr adalah $\frac{1}{r}$ yang dilakukan sesudah n tahun dari sekarang. Andaikan $s_{\overline{n}|}^{(r)}$ menyatakan nilai akhir seluruh pembayaran yang dilakukan setiap $\frac{1}{r}$ tahun, selama n tahun maka:

$$s_{\overline{n}|}^{(r)} = \left[\frac{1}{r}(1+i)^{n-\frac{1}{r}} + \frac{1}{r}(1+i)^{n-\frac{2}{r}} + \ldots + \frac{1}{r}(1+i)^{n-1}\right] + \left[\frac{1}{r}(1+i)^{(n-1)-\frac{1}{r}} + \frac{1}{r}(1+i)^{(n-1)-\frac{2}{r}} + \ldots\right.$$

$$\left.\frac{1}{r}(1+i)^{n-2}\right] + \ldots. + \left[\frac{1}{r}(1+i)^{1-\frac{1}{r}} + \frac{1}{r}(1+i)^{1-\frac{2}{r}} \quad + \ldots + \frac{1}{r}\right]$$

$$= \tfrac{1}{r}(1+i)^{n-1}\left[1+\ldots+(1+i)^{1-\frac{2}{r}} + (1+i)^{1-\frac{1}{r}}\right] + \tfrac{1}{r}(1+i)^{n-2}\left[1+\ldots+(1+i)^{1-\frac{2}{r}} + (1+i)^{1-\frac{1}{r}}\right] +$$

$$\ldots + \tfrac{1}{r}\left[1+\ldots+(1+i)^{1-\frac{2}{r}} + (1+i)^{1-\frac{1}{r}}\right]$$

$$= \tfrac{1}{r}\left[1+\ldots+(1+i)^{1-\frac{2}{r}} + (1+i)^{1-\frac{1}{r}}\right].\left[(1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + \ldots + 1\right]$$

$$= \frac{1}{r}\left[\frac{\left((1+i)^{\frac{1}{r}}\right)^{r} - 1}{(1+i)^{\frac{1}{r}} - 1}\right].\left[\frac{(1+i)^{n} - 1}{i}\right]$$

$$= \frac{1}{r}\left[\frac{i}{(1+i)^{\frac{1}{r}} - 1}\right]\left[\frac{(1+i)^{n} - 1}{i}\right]$$

$$s_{\overline{n}|}^{(r)} = \frac{1}{r}\left(\frac{(1+i)^{n} - 1}{(1+i)^{\frac{1}{r}} - 1}\right) = \frac{1}{r}\left(\frac{v^{-n} - 1}{v^{-\frac{1}{r}} - 1}\right) \qquad (3.15)$$

Sedangkan jika pembayaran dilakukan setiap awal periode maka nilai akhir seluruh pembayaran tersebut adalah:

$$\ddot{s}_{\overline{n}|}^{(r)} = \left[\frac{1}{r}(1+i)^{n} + \frac{1}{r}(1+i)^{n-\frac{1}{r}} + \ldots + \frac{1}{r}(1+i)^{(n-1)+\frac{1}{r}}\right] + \left[\frac{1}{r}(1+i)^{(n-1)} + \frac{1}{r}(1+i)^{(n-1)-\frac{1}{r}} + \ldots\right.$$

$$\left.\frac{1}{r}(1+i)^{(n-2)+\frac{1}{r}}\right] + \ldots.. + \left[\frac{1}{r}(1+i) + \frac{1}{r}(1+i)^{1-\frac{1}{r}} + \ldots + \frac{1}{r}(1+i)^{\frac{1}{r}}\right]$$

$$= (1+i)^{\frac{1}{r}}\left(\left[\frac{1}{r}(1+i)^{n-\frac{1}{r}} + \frac{1}{r}(1+i)^{n-\frac{2}{r}} + \ldots + \frac{1}{r}(1+i)^{n-1}\right] + \left[\frac{1}{r}(1+i)^{(n-1)-\frac{1}{r}} +\right.\right.$$

$$\left.\left.\frac{1}{r}(1+i)^{(n-1)-\frac{2}{r}} + \ldots + \frac{1}{r}(1+i)^{n-2}\right] + \ldots. + \left[\frac{1}{r}(1+i)^{1-\frac{1}{r}} + \frac{1}{r}(1+i)^{1-\frac{2}{r}} \quad + \ldots + \frac{1}{r}\right]\right)$$

$$= (1+i)^{\frac{1}{r}} S_{\overline{n}|}^{(r)}$$

Dengan mengggunakan persamaan (3.15) maka diperoleh :

$$\ddot{s}_{\overline{n}|}^{(r)} = (1+i)^{\frac{1}{r}} \frac{1}{r}\left(\frac{v^{-n}-1}{v^{-\frac{1}{r}}-1}\right) = \frac{1}{r}\left(\frac{v^{-n}-1}{1-v^{\frac{1}{r}}}\right) \tag{3.16}$$

Nilai tunai anuitas tentu akhir dengan pembayaran *r* kali setahun selama *n* tahun dinotasikan $a_{\overline{n}|}^{(r)}$. Jika pembayaran sebesar Rp $\frac{1}{r}$ dilakukan setiap akhir periode $\frac{1}{r}$ tahun selama *n* tahun , maka nilai tunai pembayaran pertama adalah $\frac{1}{r}v^{\frac{1}{r}}$, nilai tunai pembayaran kedua adalah $\frac{1}{r}v^{\frac{2}{r}}$, dan seterusnya sampai nilai tunai pembayaran ke *nr* adalah $\frac{1}{r}v^{n}$. Dengan demikian nilai tunai seluruh pembayaran tersebut adalah:

$$a_{\overline{n}|}^{(r)} = \left[\frac{1}{r}v^{\frac{1}{r}} + \frac{1}{r}v^{\frac{2}{r}} + \ldots + \frac{1}{r}v\right] + \left[\frac{1}{r}v^{1+\frac{1}{r}} + \frac{1}{r}v^{1+\frac{2}{r}} + \ldots + \frac{1}{r}v^{2}\right] +$$

$$\ldots + \left[\frac{1}{r}v^{(n-1)+\frac{1}{r}} + \frac{1}{r}v^{(n-1)+\frac{2}{r}} + \ldots + \frac{1}{r}v^{n}\right]$$

$$= \frac{1}{r}\left(v^{\frac{1}{r}}\frac{1-v^{\left(\frac{1}{r}\right)^{r}}}{1-v^{\frac{1}{r}}}\right) + \frac{1}{r}\left(v^{1+\frac{1}{r}}\frac{1-v^{\left(\frac{1}{r}\right)^{r}}}{1-v^{\frac{1}{r}}}\right) + \ldots . + \frac{1}{r}\left(v^{(n-1)+\frac{1}{r}}\frac{1-v^{\left(\frac{1}{r}\right)^{r}}}{1-v^{\frac{1}{r}}}\right)$$

$$= \frac{1}{r}\left[v^{\frac{1}{r}}\left(\frac{1-v}{1-v^{\frac{1}{r}}}\right)\right] + \frac{1}{r}\left[v^{1+\frac{1}{r}}\left(\frac{1-v}{1-v^{\frac{1}{r}}}\right)\right] + \ldots . + \frac{1}{r}\left[v^{(n-1)+\frac{1}{r}}\left(\frac{1-v}{1-v^{\frac{1}{r}}}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{r}\left(\frac{1-v}{1-v^{\frac{1}{r}}}\right)\left(v^{\frac{1}{r}} + v^{1+\frac{1}{r}} + \ldots . + v^{(n-1)+\frac{1}{r}}\right)$$

$$= \frac{1}{r}\left(\frac{1-v}{1-v^{\frac{1}{r}}}\right)\left(v^{\frac{1}{r}}\frac{(1-v^{n})}{1-v}\right)$$

$$a_{\overline{n}|}^{(r)} == \frac{1}{r}\left(v^{\frac{1}{r}}\frac{\left(1-v^{n}\right)}{1-v^{\frac{1}{r}}}\right)=\frac{1}{r}\left(\frac{\left(1-v^{n}\right)}{v^{-\frac{1}{r}}-1}\right) \tag{3.17}$$

Sedangkan nilai tunai anuitas tentu awal dengan pembayaran r kali setahun selama n tahun dinyatakan dengan $\ddot{a}_{\overline{n}|}^{(r)}$. Oleh karena selisih pembayaran anuitas awal dan anuitas akhir adalah $\frac{1}{r}$ tahun maka:

$$\begin{aligned}
\ddot{a}_{\overline{n}|}^{(r)} &= \left[\frac{1}{r}+\frac{1}{r}v^{\frac{1}{r}}+\ldots+\frac{1}{r}v^{1-\frac{2}{r}}+\frac{1}{r}v^{1-\frac{1}{r}}\right]+\left[\frac{1}{r}v+\frac{1}{r}v^{1+\frac{1}{r}}+\ldots+\frac{1}{r}v^{2-\frac{2}{r}}+\frac{1}{r}v^{2-\frac{1}{r}}\right]+ \\
&\quad \ldots.+\left[\frac{1}{r}v^{(n-1)}+\frac{1}{r}v^{(n-1)+\frac{1}{r}}+\ldots+\frac{1}{r}v^{n-\frac{2}{r}}+\frac{1}{r}v^{n-\frac{1}{r}}\right] \\
&= \frac{1}{v^{\frac{1}{r}}}\left[\frac{1}{r}v^{\frac{1}{r}}+\frac{1}{r}v^{\frac{2}{r}}+\ldots+\frac{1}{r}v^{1-\frac{1}{r}}+\frac{1}{r}v\right]+\frac{1}{v^{\frac{1}{r}}}\left[\frac{1}{r}v^{1+\frac{1}{r}}+\frac{1}{r}v^{1+\frac{2}{r}}+\ldots+\frac{1}{r}v^{2-\frac{1}{r}}+\frac{1}{r}v^{2}\right] \\
&\quad \ldots+\frac{1}{v^{\frac{1}{r}}}\left[\frac{1}{r}v^{(n-1)+\frac{1}{r}}+\frac{1}{r}v^{(n-1)+\frac{2}{r}}+\ldots+\frac{1}{r}v^{n-\frac{1}{r}}+\frac{1}{r}v^{n}\right] \\
\ddot{a}_{\overline{n}|}^{(r)} &= \frac{1}{v^{\frac{1}{r}}}a_{\overline{n}|}^{(r)} \\
&= \frac{1}{v^{\frac{1}{r}}}\left[\frac{1}{r}\left(\frac{\left(1-v^{n}\right)}{v^{-\frac{1}{r}}-1}\right)\right]
\end{aligned}$$

$$\ddot{a}_{\overline{n}|}^{(r)} = \frac{1}{r}\left(\frac{\left(1-v^{n}\right)}{1-v^{\frac{1}{r}}}\right) \tag{3.18}$$

Contoh 3.4

Hitunglah nilai tunai anuitas tentu akhir dan nilai seluruh pembayaran bulanan selama 15 tahun bila besar pembayaran setahun adalah Rp 300.000,00 dan tingkat bunga 6%?

Jawab:

Nilai tunai anuitas tentu akhir dengan sistem pembayaran di atas dapat dihitung dengan menggunakan persamaan (3.17) yaitu:

$$300.000a_{\overline{15|}}^{(12)} = \frac{300.000}{12}\left(\frac{1-(1+0,06)^{-15}}{(1+0,06)^{\frac{1}{12}}-1}\right) = 2.992.957,81$$

Sedangkan nilai seluruh pembayarannya dapat dihitung dengan menggunakan persamaan (3.15) sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned}(300.000)s_{\overline{15|}}^{(12)} &= \frac{300.000}{12}\left(\frac{(1+0,06)^{15}-1}{(1+0,06)^{\frac{1}{12}}-1}\right)\\ &= 7.172.797,56\end{aligned}$$

Jadi, nilai tunai anuitas tentu akhir dan nilai akhir seluruh pembayaran tersebut adalah Rp 2.992.957,81 dan Rp 7.172.797,56.

2. Anuitas Hidup

Anuitas hidup adalah serangkaian pembayaran berkala yang dikaitkan dengan hidup matinya anuitan. Pembayaran dapat dilakukan pada awal tahun maupun akhir tahun selama tertanggung masih hidup. Dalam menghitung nilai tunai anuitas hidup selalu menggunakan prinsip bahwa jumlah uang yang diterima perusahaan keuangan sama dengan jumlah uang yang dikeluarkan perusahaan tersebut. Pada umumnya jenis pembayaran anuitas hidup ada dua macam yaitu anuitas hidup dengan pembayaran setiap tahun tepatnya pada awal tahun atau pada akhir tahun dan anuitas hidup dengan pembayaran beberapa kali setahun.

2.1 Anuitas Hidup dengan Pembayaran Setiap Tahun

a. Anuitas Seumur Hidup

Anuitas seumur hidup adalah serangkaian pembayaran sebesar Rp 1 yang dilakukan selama tertanggung masih hidup. Nilai tunai anuitas awal seumur hidup dinotasikan dengan $\ddot{a}_x$ sedangkan nilai tunai anuitas akhir seumur hidup dinotasikan dengan a_x. Indeks x pada bagian bawah menyatakan usia seseorang.

Misalkan setiap orang sebanyak l_x menyerahkan uang sebesar A rupiah kepada suatu perusahaan, sehingga jumlah uang di perusahaan saat ini adalah Al_x rupiah. Pada permulaan tahun berikutnya ada sebanyak l_{x+1} orang dari l_x orang yang masih hidup dan setiap orang dari l_{x+1} akan menerima uang sebesar Rp 1, sehingga jumlah dana yang harus dikeluarkan perusahaan pada akhir tahun pertama sebesar l_{x+1} rupiah. Pada tahun berikutnya ada l_{x+2} orang dari l_{x+1} orang yang masih hidup dan masing-masing dari mereka menerima Rp 1 maka jumlah dana yang dikeluarkan perusahaan pada akhir tahun kedua sebesar l_{x+2} rupiah, dan seterusnya. Seperti pada anuitas tentu bahwa besarnya dana yang diterima anuitan sudah dikenai bunga, maka nilai tunai pembayaran tiap tahunnya dapat dihitung. Nilai tunai pembayaran akhir tahun pertama adalah vl_{x+1}, nilai tunai pembayaran akhir tahun kedua adalah $v^2 l_{x+2}$, dan seterusnya. Sehingga nilai tunai seluruh pembayaran tersebut adalah:

$$Al_x = vl_{x+1} + v^2 l_{x+2} + v^3 l_{x+3} + \ldots.$$

$$A = \frac{vl_{x+1} + v^2 l_{x+2} + v^3 l_{x+3} + \ldots.}{l_x}$$

$$A = \sum_{t=1}^{\infty} v^t \frac{l_{x+t}}{l_t} = \sum_{t=1}^{\infty} v^t \, {}_t p_x \tag{3.19}$$

Pembayaran dilakukan pada tiap akhir tahun sehingga A adalah nilai tunai anuitas akhir seumur hidup disimbolkan dengan a_x sehingga persamaan (3.19) menjadi:

$$a_x = \sum_{t=1}^{\infty} v^t \, {}_t p_x \tag{3.20}$$

Untuk memudahkan perhitungan maka digunakan simbol perantara atau simbol komutasi berikut:

$$v^x l_x = D_x, v^{x+1} l_{x+1} = D_{x+1} \text{ dan } N_x = \sum_{t=0}^{\infty} D_{x+t}$$

Apabila pembilang dan penyebutnya dari persamaan (3.20) dikalikan dengan v^x maka diperoleh:

$$\begin{aligned} a_x &= \left(\sum_{t=1}^{\infty} v^t \, {}_t p_x\right)\left(\frac{v^x}{v^x}\right) \\ &= \left(\frac{v l_{x+1} + v^2 l_{x+2} + v^3 l_{x+3} + \dots}{l_x}\right)\left(\frac{v^x}{v^x}\right) \\ &= \frac{v^{x+1} l_{x+1} + v^{x+2} l_{x+2} + v^{x+3} l_{x+3} + \dots}{v^x l_x} \end{aligned}$$

Bila dinyatakan dengan simbol komutasi maka diperoleh:

$$a_x = \frac{D_{x+1} + D_{x+2} + D_{x+3} + \dots}{D_x}$$

$$a_x = \frac{N_{x+1}}{D_x} \tag{3.21}$$

Sedangkan jika pembayaran dilakukan setiap awal tahun maka nilai tunai anuitas awal seumur hidup adalah:

$$\ddot{a}_x = \frac{l_x + vl_{x+1} + v^2 l_{x+2} + v^3 l_{x+3} + \dots}{l_x}$$

$$= \sum_{t=0}^{\infty} v^t \cdot \frac{l_{x+t}}{l_x}$$

$$\ddot{a}_x = \sum_{t=0}^{\infty} v^t \, {}_t p_x \tag{3.22}$$

Bila dinyatakan dengan simbol komutasi maka :

$$\ddot{a}_x = \frac{l_x + vl_{x+1} + v^2 l_{x+2} + v^3 l_{x+3} + \dots}{l_x} \left(\frac{v^x}{v^x} \right)$$

$$= \frac{v^x l_x + v^{x+1} l_{x+1} + v^{x+2} l_{x+2} + v^{x+3} l_{x+3} + \dots}{l_x}$$

$$= \frac{D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + D_{x+3} + \dots}{D_x}$$

$$\ddot{a}_x = \frac{N_x}{D_x} \tag{3.23}$$

Contoh 3.5

Pak Budi pensiun pada usia 57 tahun dan menerima sepuluh juta rupiah dari perusahaan tempatnya bekerja. Bila uang tersebut dia pakai untuk membeli anuitas seumur hidup maka berapakah besarnya penerimaan tahunan yang akan diterima pak Budi, bila pembayarannya dilakukan pada akhir tiap tahun mulai usia 57?

Jawab:

Andaikan pak Budi menerima B rupiah setiap akhir tahun, maka besarnya B dapat dihitung dengan menggunakan persamaan (3.21) dan tabel I pada lampiran sehingga diperoleh:

$$Ba_{57} = 10.000.000$$

$$B\frac{N_{58}}{D_{57}} = 10.000.000 \Rightarrow B = \frac{10^7 D_{57}}{N_{58}} = 808.980,28$$

Jadi, besarnya uang yang akan diterima pak Budi tiap tahun adalah Rp 808,980,28

b. Anuitas Hidup Berjangka

Anuitas hidup berjangka adalah serangkaian pembayaran berkala sebesar Rp 1 yang dilakukan selama jangka waktu tertentu misalnya selama n tahun. Pembayaran tidak dilakukan sepanjang umur x tetapi hanya n tahun saja asalkan tertanggung masih hidup. Bila (x) meninggal sebelum mencapai usia $x+n$ tahun maka pembayaran tidak diteruskan. Penjabaran nilai tunai anuitas akhir berjangka sama seperti penjabaran nilai tunai anuitas akhir seumur hidup hanya saja pembayaran dilakukan sampai n tahun . Sehingga berdasarkan persamaan (3.20) maka nilai tunai anuitas akhir berjangka selama n tahun yang disimbolkan dengan $a_{x:\overline{n|}}$ adalah:

$$a_{x:\overline{n|}} = \sum_{t=1}^{n} v^t \frac{l_{x+t}}{l_x} = \sum_{t=1}^{n} v^t \, {}_t p_x \qquad (3.24)$$

Jika menggunakan simbol komutasi maka persamaan (3.24) menjadi:

$$a_{x:\overline{n|}} = \left(\frac{vl_{x+1} + v^2 l_{x+2} + v^3 l_{x+3} + \ldots. + v^n l_{x+n}}{l_x}\right)\left(\frac{v^x}{v^x}\right)$$

$$= \frac{v^{x+1} l_{x+1} + v^{x+2} l_{x+2} + v^{x+3} l_{x+3} + \ldots. + v^{x+n} l_{x+n}}{v^x l_x}$$

$$= \frac{D_{x+1} + D_{x+2} + D_{x+3} + \ldots. + D_{x+n}}{D_x}$$

$$a_{\overline{x:n}|} = \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x} \tag{3.25}$$

Berdasarkan persamaan (3.22) maka nilai tunai anuitas hidup awal berjangka selama *n* tahun adalah:

$$\ddot{a}_{\overline{x:n}|} = \sum_{t=0}^{n-1} v^t \frac{l_{x+t}}{l_x} = \sum_{t=0}^{n-1} v^t \, {}_t p_x \tag{3.26}$$

Persamaan (3.26) dapat juga dinyatakan dengan simbol komutasi yaitu:

$$\begin{aligned}
\ddot{a}_{\overline{x:n}|} &= \frac{l_x + vl_{x+1} + v^2 l_{x+2} + v^3 l_{x+3} + \dots + v^{n-1} l_{x+n-1}}{l_x}\left(\frac{v^x}{v^x}\right) \\
&= \frac{v^x l_x + v^{x+1} l_{x+1} + v^{x+2} l_{x+2} + v^{x+3} l_{x+3} + \dots + v^{x+n-1} l_{x+n-1}}{l_x} \\
&= \frac{D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + D_{x+3} + \dots + D_{x+n-1}}{D_x}
\end{aligned}$$

$$\ddot{a}_{\overline{x:n}|} = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x} \tag{3.27}$$

Contoh 3.6

Hitunglah nilai tunai suatu anuitas berjangka selama 10 tahun dengan pembayaran sebesar Rp 300.000,00 yang dilakukan setiap awal tahun bagi seseorang yang berusia 35 tahun?

Jawab

Nilai tunai anuitas awal berjangka 10 tahun sebesar Rp 300.000,00 bagi seseorang yang berusia 35 tahun dapat dihitung dengan menggunakan persamaan (3.27) dan tabel I pada lampiran sehingga diperoleh:

$$300.000\ddot{a}_{35:\overline{10}|} = 300.000\left(\frac{N_{35}-N_{45}}{D_{35}}\right)$$
$$= 2.629.700{,}58$$

Jadi, nilai tunai anuitas awal berjangka 10 tahun bagi seseorang yang berusia 35 tahun adalah Rp 2.629.700,58.

c. Endowment Murni

Endowment murni adalah suatu pembayaran yang dilakukan pada akhir jangka waktu tertentu misalnya *n* tahun bagi seseorang yang berusia *x* tahun bila dapat mencapai usia *x*+*n* tahun. Jila (x) meninggal sebelum mencapai usia *x*+*n* tahun maka tidak ada pembayaran.

Andaiakan sebanyak l_x orang membeli endowment murni selama *n* tahun sebesar *C* rupiah, maka dana yang terkumpul di perusahaan saat ini ada sebanyak Cl_x rupiah. Oleh karena masa kontraknya selama *n* tahun maka dana di perusahaan tersebut akan dikenai bunga selama *n* tahun sehingga dananya menjadi $Cl_x(1+i)^n$. Setelah *n* tahun kemudian ada sebanyak l_{x+n} orang yang masih hidup, masing-masing dari mereka menerima uang sebesar Rp 1, sehingga jumlah uang yang dikeluarkan perusahaan pada akhir tahun ke *n* sebanyak l_{x+n} rupiah. Jadi nilai tunai dari endowment murni sebesar Rp 1 adalah:

$$Cl_x(1+i)^n = l_{x+n} \Rightarrow C = \frac{l_{x+n}}{l_x(1+i)^n} = \frac{l_{x+n}}{l_x}(1+i)^n$$

$$C = {}_np_x v^n \tag{3.28}$$

Biasanya nilai tunai endowment murni sebesar Rp 1 bagi (x) selama periode n tahun dinotasikan dengan ${}_nE_x$ sehingga persamaan (3.28) dapat ditulis:

$$ {}_nE_x = v^n \, {}_np_x \qquad (3.29)$$

Bila dinyatakan dengan simbol komutasi maka persamaan (3.29) menjadi:

$$ {}_nE_x = v^n \, {}_np_x = \left(v^n \frac{l_{x+n}}{l_x}\right)\left(\frac{v^x}{v^x}\right)$$

$$ = \frac{v^{x+n} l_{x+n}}{v^x l_x}$$

$$ {}_nE_x = \frac{D_{x+n}}{D_x} \qquad (3.30)$$

Contoh 3.7

Hitunglah nilai tunai suatu endowment murni sebesar Rp 10.000.000,00 yang dikeluarkan bagi seseorang yang berusia 20 tahun selama 30 tahun?

Jawab:

Nilai tunai suatu endowment murni sebesar Rp 10.000.000,00 yang dikeluarkan bagi seseorang yang berusia 20 tahun selama 30 tahun dapat dihitung dengan persamaan (3.30) dan tabel I pada lampiran, sehingga diperoleh:

$$10.000.000 \, {}_{30}E_{20} = \frac{10.000.000(D_{50})}{D_{20}} = 4.063.032,59$$

Jadi, nilai tunai endowment murni tersebut adalah Rp 4.063.032,59.

d. Anuitas Tertunda

Pembayaran anuitas dapat juga ditunda selama beberapa tahun, misalnya n tahun dan pembayarannya dapat berlangsung seumur hidup atau selama jangka waktu tertentu. Oleh karena pembayaran ditunda terlebih dahulu selama n tahun maka pembayaran pertama dilakukan pada awal tahun saat (x) berusia $x+n$. Nilai tunai dari anuitas awal seumur hidup yang tertunda selama n tahun disimbolkan dengan ${}_{n|}\ddot{a}_x$ merupakan selisih antara anuitas awal seumur hidup dengan anuitas awal berjangka selama n tahun, ditulis:

$$ {}_{n|}\ddot{a}_x = \ddot{a}_x - \ddot{a}_{x:\overline{n|}} \tag{3.31}$$

Menurut persamaan (3.22) dan (3.26) maka persamaan (3.31) diubah menjadi:

$$\begin{aligned}
{}_{n|}\ddot{a}_x &= \sum_{t=0}^{\infty} v^t\,{}_t p_x - \sum_{t=0}^{n-1} v^t\,{}_t p_x \\
&= \frac{l_x + vl_{x+1} + v^2 l_{x+2} + \ldots.}{l_x} - \frac{l_x + vl_{x+1} + v^2 l_{x+2} \ldots. + v^{n-1} l_{x+n-1}}{l_x} \\
&= \frac{v^n l_{x+n} + v^{n+1} l_{x+n+1} + v^{n+2} l_{x+n+2} + v^{n+3} l_{x+n+3} + \ldots..}{l_x} \\
&= v^n \frac{\left(l_{x+n} + vl_{x+n+1} + v^2 l_{x+n+2} + v^3 l_{x+n+3} + \ldots..\right)}{l_x} \\
&= v^n \frac{\left(l_{x+n} + vl_{x+n+1} + v^2 l_{x+n+2} + v^3 l_{x+n+3} + \ldots..\right)}{l_x} \left(\frac{l_{x+n}}{l_{x+n}}\right) \\
&= \left(\frac{v^n l_{x+n}}{l_x}\right) \frac{\left(l_{x+n} + vl_{x+n+1} + v^2 l_{x+n+2} + v^3 l_{x+n+3} + \ldots..\right)}{l_{x+n}} \\
&= \left(\frac{v^n l_{x+n}}{l_x}\right) \sum_{t=0}^{\infty} v^t \frac{l_{x+n+t}}{l_{x+n}}
\end{aligned}$$

$$ {}_{n|}\ddot{a}_x = \left(v^n\,{}_n p_x\right) \sum_{t=0}^{\infty} v^t\,{}_t p_{x+n} \tag{3.32}$$

Dari persamaan (3.22) dan (3.29) maka persamaan (3.32) dapat diubah menjadi:

$$ {}_{n|}\ddot{a}_x = {}_n E_x \ddot{a}_{x+n} \tag{3.33}$$

Bila dinyatakan dengan simbol komutasi maka persamaan (3.33) menjadi:

$$_{n|}\ddot{a}_x = \frac{D_{x+n}}{D_x} \cdot \frac{N_{x+n}}{D_{x+n}} = \frac{N_{x+n}}{D_x} \qquad (3.34)$$

Sedangkan anuitas hidup akhir yang tertunda selama *n* tahun merupakan selisih anuitas akhir seumur hidup dengan anuitas akhir berjangka selama *n* tahun, sehingga nilai tunai anuitas akhir yang tertunda selama *n* tahun adalah:

$$_{n|}a_x = a_x - a_{x:\overline{n|}} \qquad (3.35)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (3.20) dan (3.24) maka persamaan (3.35) dapat diubah menjadi:

$$\begin{aligned}
_{n|}a_x &= \sum_{t=1}^{\infty} v^t\,{}_t p_x - \sum_{t=1}^{n} v^t\,{}_t p_x \\
&= \left(vp_x + v^2\,{}_2 p_x + ...\right) - \left(vp_x + v^2\,{}_2 p_x + ... + v^n\,{}_n p_x\right) \\
&= v^{n+1}\,{}_{n+1} p_x + v^{n+2}\,{}_{n+2} p_x + ... \\
&= v^n\left(v\,{}_{n+1}p_x + v^2\,{}_{n+2} p_x + ...\right) \\
&= v^n \left(\frac{vl_{x+n+1} + v^2 l_{x+n+2} + ...}{l_x}\right)\left(\frac{l_{x+n}}{l_{x+n}}\right) \\
&= \frac{v^n l_{x+n}}{l_x}\left(\frac{vl_{x+n+1} + v^2 l_{x+n+2} + ...}{l_{x+n}}\right) \\
&= \frac{v^n l_{x+n}}{l_x}\left(vp_{x+n} + v^2\,{}_2 p_{x+n} + ..\right)
\end{aligned}$$

$$_{n|}a_x = \left(v^n\,{}_n p_x\right)\sum_{t=1}^{\infty} v^t\,{}_t p_{x+n} \qquad (3.36)$$

Bila menggunakan persamaan (3.20) dan (3.29) maka persamaan (3.36) menjadi:

$$_{n|}a_x = {}_nE_x a_{x+n} \qquad (3.37)$$

Jika persamaan (3.37) dinyatakan dengan simbol komutasi, maka persamaannya menjadi:

$$ {}_{n|}a_x = \frac{D_{x+n}}{D_x} \cdot \frac{N_{x+n+1}}{D_{x+n}} = \frac{N_{x+n+1}}{D_x} \qquad (3.38) $$

Contoh 3.8

Yalince sekarang berusia 25 tahun. Jika setiap awal tahun dia melakukan pembayaran sebesar Rp 150.000,00 ke suatu lembaga keuangan sampai pada hari ulang tahunnya yang ke 60. Mulai pada hari ulang tahunnya yang ke 65 dia akan menerima pensiun sebesar *B* rupiah tiap tahun selama hidupnya. Hitunglah nilai *B*?

Jawab:

Nilai tunai pembayaran Yalince kepada perusahaan dapat dihitung menggunakan persamaan (3.27) sehingga diperoleh:

$$ 150.000\ddot{a}_{\overline{25:36|}} = 150.000\frac{N_{25} - N_{61}}{D_{25}} $$

Sedangkan nilai tunai pengeluaran perusahaan sebesar *B* rupiah tiap akhir tahun seumur hidup yang ditunda terlebih dahulu selama 40 tahun bagi Yalince dapat dihitung dengan menggunakan persamaan (3.34) sehingga diperoleh:

$$ B\,{}_{40|}\ddot{a}_{25} = B\frac{N_{65}}{D_{25}} $$

Selanjutnya menggunakan persamaan dasar bahwa banyak uang yang diterima perusahaan sama dengan banyaknya uang yang dikeluarkan perusahaan tersebut, sehingga diperoleh:

$$B\frac{N_{65}}{D_{25}} = 150.000\frac{N_{25}-N_{61}}{D_{25}}$$

$$\Rightarrow B = 150.000\frac{N_{25}-N_{61}}{N_{65}} = 1.443.660{,}74$$

Jadi, Yalince menerima uang pensiun sebesar Rp 1.443.660,74 setiap tahun yang dimulai pada ulang tahunnya yang ke 65 sampai ia meninggal dunia.

e. Anuitas Tertunda Berjangka

Jika pembayaran anuitas awal yang tertunda selama *n* tahun hanya sampai pada waktu tertentu misalkan *m* tahun, maka jenis anuitas ini disebut anuitas berjangka selama *m* tahun yang pembayarannya tertunda terlebih dahulu selama *n* tahun. Nilai tunai anuitas awal berjangka selama *m* tahun yang tertunda selama *n* tahun dinotasikan dengan ${}_{n|m}\ddot{a}_x$. Penjabaran nilai tunai anuitasnya sama seperti penjabaran nilai tunai anuitas awal tertunda selama *n* tahun hanya saja pembayarannya sampai *m* tahun, sehingga nilai tunai anuitas awal tertunda berjangka adalah:

$$\begin{aligned}
{}_{n|m}\ddot{a}_x &= v^n\,{}_np_x + v^{n+1}\,{}_{n+1}p_x + \ldots + v^{n+m-1}\,{}_{n+m-1}p_x \\
&= v^n\left({}_np_x + v\,{}_{n+1}p_x + \ldots + v^{m-1}\,{}_{n+m-1}p_x\right) \\
&= v^n\left(\frac{l_{x+n} + vl_{x+n+1} + \ldots + v^{m-1}l_{x+m+n-1}}{l_x}\right)\left(\frac{l_{x+n}}{l_{x+n}}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
{}_{n|m}\ddot{a}_x &= \frac{v^n l_{x+n}}{l_x}\left(\frac{l_{x+n} + vl_{x+n+1} + \ldots + v^{m-1}l_{x+m+n-1}}{l_{x+n}}\right) \\
&= \frac{v^n l_{x+n}}{l_x}\left(1 + vp_{x+n} + \ldots + v^{m-1}\,{}_{m-1}p_{x+n}\right)
\end{aligned}$$

$${}_{n|m}\ddot{a}_x = \left(v^n\,{}_np_x\right)\sum_{t=0}^{m-1} v^t\,{}_tp_{x+n} \qquad (3.39)$$

Jika menggunakan persamaan (3.26) dan (3.29) maka persamaan (3.39) menjadi:

$$_{n|m}\ddot{a}_x = {}_nE_x\,\ddot{a}_{\overline{x+n:m|}} \tag{3.40}$$

Bila dinyatakan dengan simbol komutasi maka persamaan (3.40) menjadi:

$$_{n|m}\ddot{a}_x = \frac{D_{x+n}}{D_x}\left(\frac{N_{x+n}-N_{x+n+m}}{D_{x+n}}\right)$$

$$_{n|m}\ddot{a}_x = \frac{N_{x+n}-N_{x+n+m}}{D_x} \tag{3.41}$$

Sedangkan nilai tunai anuitas akhir yang tertunda selama n tahun dan berjangka selama m tahun adalah:

$$\begin{aligned}
_{n|m}a_x &= v^{n+1}{}_{n+1}p_x + v^{n+2}{}_{n+2}p_x + \ldots + v^{n+m}{}_{n+m}p_x \\
&= v^n\left(v_{n+1}p_x + v^2{}_{n+2}p_x + \ldots + v^m{}_{n+m}p_x\right) \\
&= v^n\left(\frac{vl_{x+n+1} + v^2 l_{x+n+2}\ldots + v^m l_{x+m+n}}{l_x}\right)\left(\frac{l_{x+n}}{l_{x+n}}\right) \\
&= \frac{v^n l_{x+n}}{l_x}\left(\frac{vl_{x+n+1} + v^2 l_{x+n+2} + \ldots + v^m l_{x+m+n}}{l_{x+n}}\right) \\
&= \frac{v^n l_{x+n}}{l_x}\left(vp_{x+n} + v^2{}_2p_{x+n}\ldots + v^m{}_m p_{x+n}\right)
\end{aligned}$$

$$_{n|m}a_x = \left(v^n{}_np_x\right)\sum_{t=1}^{m} v^t{}_tp_{x+n} \tag{3.42}$$

Jika menggunakan persamaan (3.24) dan (3.29) maka persamaan (3.42) menjadi:

$$_{n|m}a_x = {}_nE_x\,a_{\overline{x+n:m|}} \tag{3.43}$$

Bila dinyatakan dengan simbol komutasi maka persamaan (3.43) menjadi:

$$ {}_{n|m}a_x = \frac{D_{x+n}}{D_x}\left(\frac{N_{x+m+n+1}}{D_{x+n}}\right) $$

$$ {}_{n|m}a_x = \frac{N_{x+n+1} - N_{x+n+m+1}}{D_x} \tag{3.44} $$

Contoh 3.9

Frengky pensiun pada usia 50 tahun dan menerima sepuluh juta rupiah dari perusahaan tempatnya bekerja. Uang tersebut digunakan untuk membeli anuitas berjangka selama 25 tahun . Hitunglah besarnya penerimaan tahunan yang akan diterima Frengky bila pembayaran pertama dilakukan pada ulang tahunnya yang ke 55?

Jawab:

Andaikan besar penerimaan tahunan yang akan diterima Frengky adalah C rupiah, maka nilai C dapat dihitung dengan menggunakan persamaan (3.41) dan tabel I pada lampiran, sehingga diperoleh:

$$ C\,{}_{5|25}\ddot{a}_{50} = 10.000.000 $$

$$ C\frac{N_{55} - N_{80}}{D_{50}} = 10.000.000 \Rightarrow C = 10^7 \frac{D_{50}}{N_{55} - N_{80}} = 898.375{,}21 $$

Jadi, besarnya penerimaan tahunan tersebut adalah Rp 898.375,21

2.2 Anuitas Hidup dengan Pembayaran Beberapa Kali Setahun

a. Anuitas Seumur Hidup

Anuitas seumur hidup dengan pembayaran beberapa kali setahun adalah serangkaian pembayaran berkala yang dilakukan r kali setahun atau setiap $\frac{1}{r}$

tahun selama anuitan masih hidup. Pembayaran dapat dilakukan di awal atau di akhir periode. Jika pembayaran dalam setahun adalah 1 rupiah, maka besarnya setiap kali pembayaran adalah Rp$\frac{1}{r}$. Oleh karena pembayaran dilakukan setiap $\frac{1}{r}$ tahun, maka peluang hidup anuitan tidak lagi dihitung setiap tahun melainkan dihitung setiap $\frac{1}{r}$ tahun. Bila pembayaran dilakukan setiap akhir periode dengan tingkat bunga i per tahun maka nilai tunai pembayaran pada akhir periode pertama oleh setiap anuitan $\dfrac{\frac{1}{r}v^{\frac{1}{r}}l_{x+\frac{1}{r}}}{l_x}=\frac{1}{r}v^{\frac{1}{r}}\,{}_{\frac{1}{r}}p_x$ rupiah, nilai tunai pembayaran pada akhir periode yang keduanya adalah $\dfrac{\frac{1}{r}v^{\frac{2}{r}}l_{x+\frac{2}{r}}}{l_x}=\frac{1}{r}v^{\frac{2}{r}}\,{}_{\frac{2}{r}}p_x$ rupiah demikian seterusnya, sehingga nilai tunai anuitas akhir seumur hidup bagi (x) dengan pembayaran r kali dalam setahun yang disimbolkan dengan $a_x^{(r)}$ adalah:

$$a_x^{(r)}=\frac{1}{r}\left[v^{\frac{1}{r}}\,{}_{\frac{1}{r}}p_x+v^{\frac{2}{r}}\,{}_{\frac{2}{r}}p_x+\dots+v^{1-\frac{1}{r}}\,{}_{1-\frac{1}{r}}p_x+vp_x\right]+$$
$$\frac{1}{r}\left[v^{1+\frac{1}{r}}\,{}_{1+\frac{1}{r}}p_x+v^{1+\frac{2}{r}}\,{}_{1+\frac{2}{r}}p_x+\dots+v^{2-\frac{1}{r}}\,{}_{2-\frac{1}{r}}p_x+v^2\,{}_2p_x\right]+\dots$$

$$a_x^{(r)}=\frac{1}{r}\sum_{t=1}^{\infty}v^{\frac{t}{r}}\,{}_{\frac{t}{r}}p_x \tag{3.45}$$

Persamaan (3.45) dapat pula diubah menjadi:

$$
\begin{aligned}
a_x^{(r)} = \frac{1}{r}\left[v^{\frac{1}{r}}\, {}_{\frac{1}{r}}p_x + v^{1+\frac{1}{r}}\, {}_{1+\frac{1}{r}}p_x + v^{2+\frac{1}{r}}\, {}_{2+\frac{1}{r}}p_x + \ldots \right] + \\
\frac{1}{r}\left[v^{\frac{2}{r}}\, {}_{\frac{2}{r}}p_x + v^{1+\frac{2}{r}}\, {}_{1+\frac{2}{r}}p_x + v^{2+\frac{2}{r}}\, {}_{2+\frac{2}{r}}p_x + \ldots \right] + \ldots + \\
\frac{1}{r}\left[v^{1-\frac{1}{r}}\, {}_{1-\frac{1}{r}}p_x + v^{2-\frac{1}{r}}\, {}_{2-\frac{1}{r}}p_x + v^{3-\frac{1}{r}}\, {}_{3-\frac{1}{r}}p_x + \ldots \right] + \\
\frac{1}{r}\left[vp_x + v^2\, {}_2p_x + v^3\, {}_3p_x + \ldots . \right] \\
= \frac{1}{r}\left[{}_{\frac{1}{r}|}\ddot{a}_x + {}_{\frac{2}{r}|}\ddot{a}_x + \ldots + {}_{1-\frac{1}{r}|}\ddot{a}_x + a_x \right]
\end{aligned}
$$

$$
a_x^{(r)} = \frac{1}{r}\left[a_x + \sum_{t=1}^{r-1} {}_{\frac{t}{r}|}\ddot{a}_x \right] \qquad (3.46)
$$

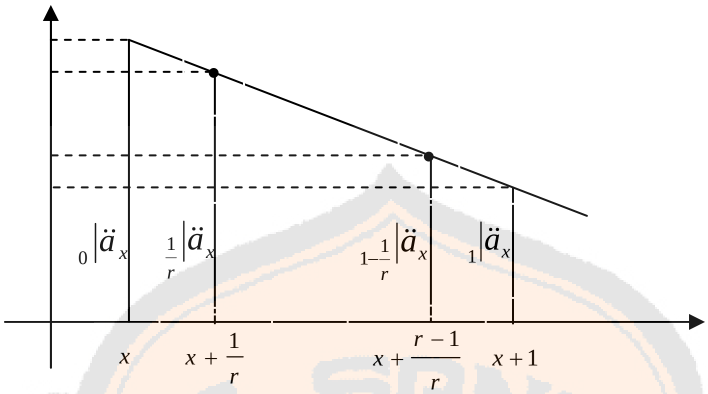
Akan tetapi persamaan (3.46) agak sulit untuk menghitung besarnya nilai tunai anuitas akhir seumur hidup yang dibayar r kali dalam setahun, sehingga untuk memudahkan perhitungan maka digunakan suatu cara pendekatan yang disebut interpolasi linear. Perhatikan kedua persamaan di bawah ini:

$$
{}_{0|}\ddot{a}_x = \ddot{a}_x - 0 \text{ dan } {}_{1|}\ddot{a}_x = \ddot{a}_x - 1
$$

Persamaan pertama menyatakan anuitas hidup yang ditunda selama 0 tahun sedangkan persamaan yang kedua menyatakan anuitas hidup yang ditunda setahun, sehingga untuk $0 \leq t \leq r$ berlaku:

$$
{}_{1|}\ddot{a}_x \leq {}_{\frac{t}{r}|}\ddot{a}_x \leq {}_{0|}\ddot{a}_x
$$

Perhatikan grafik pendekatan interpolasi linear berikut:



Dari grafik di atas tampak bahwa:

$$\frac{{}_{\frac{1}{r}}|\ddot{a}_x - {}_{1}|\ddot{a}_x}{\ddot{a}_x - {}_{1}|\ddot{a}_x} = \frac{(x+1)-\left(x+\frac{1}{r}\right)}{(x+1)-x} \Rightarrow \frac{{}_{\frac{1}{r}}|\ddot{a}_x - (\ddot{a}_x - 1)}{\ddot{a}_x - (\ddot{a}_x - 1)} = 1 - \frac{1}{r}$$

$${}_{\frac{1}{r}}|\ddot{a}_x = \ddot{a}_x - \frac{1}{r}$$

dan

$$\frac{{}_{1-\frac{1}{r}}|\ddot{a}_x - {}_{1}|\ddot{a}_x}{\ddot{a}_x - {}_{1}|\ddot{a}_x} = \frac{(x+1)-\left(x+\frac{r-1}{r}\right)}{(x+1)-x} \Rightarrow \frac{{}_{1-\frac{1}{r}}|\ddot{a}_x - (\ddot{a}_x - 1)}{\ddot{a}_x - (\ddot{a}_x - 1)} = \frac{1}{r}$$

$${}_{1-\frac{1}{r}}|\ddot{a}_x = \ddot{a}_x - \frac{r-1}{r}$$

Sehingga secara umum untuk $1 \le t \le r-1$ berlaku ${}_{\frac{t}{r}}|\ddot{a}_x = \ddot{a}_x - \frac{t}{r}$

Jadi persamaan (3.46) dapat diubah menjadi:

$$\begin{aligned} a_x^{(r)} &= \frac{1}{r}\left[\left(\ddot{a}_x - \frac{1}{r}\right) + \left(\ddot{a}_x - \frac{2}{r}\right) + \dots + \left(\ddot{a}_x - \left(1 - \frac{1}{r}\right)\right) + (\ddot{a}_x - 1)\right] \\ &= \frac{1}{r}\left[r\ddot{a}_x - \frac{1}{r}(1 + 2 + \dots + (r-1) + r)\right] \end{aligned}$$

$$a_x^{(r)} = \frac{1}{r}\left[r\ddot{a}_x - \frac{1}{r}\left(\frac{r}{2}(1+r)\right)\right]$$
$$= \ddot{a}_x - \frac{(1+r)}{2r}$$
$$= (1+a_x) - \frac{(1+r)}{2r}$$

$$a_x^{(r)} = a_x + \frac{r-1}{2r} \qquad (3.47)$$

Selisih anuitas awal dan anuitas akhir dengan pembayaran r kali dalam setahun adalah $\frac{1}{r}$ tahun, sehingga nilai tunai anuitas awal seumur hidup bagi (x) dengan pembayaran r kali dalam setahun yang dinotasikankan dengan $\ddot{a}_x^{(r)}$ adalah:

$$\ddot{a}_x^{(r)} = \frac{1}{r} + a_x^{(r)} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r}\sum_{t=1}^{\infty} v^{\frac{t}{r}} {}_{\frac{t}{r}}p_x$$
$$= \frac{1}{r} + \frac{1}{r}\left(v^{\frac{1}{r}} {}_{\frac{1}{r}}p_x + v^{\frac{2}{r}} {}_{\frac{2}{r}}p_x + ..\right)$$
$$= \frac{1}{r}\left(1 + v^{\frac{1}{r}} {}_{\frac{1}{r}}p_x + v^{\frac{2}{r}} {}_{\frac{2}{r}}p_x + ..\right)$$

$$\ddot{a}_x^{(r)} = \frac{1}{r}\sum_{t=0}^{\infty} v^{\frac{t}{r}} {}_{\frac{t}{r}}p_x \qquad (3.48)$$

Bila menggunakan persamaan (3.47) maka :

$$\ddot{a}_x^{(r)} = \frac{1}{r} + a_x^{(r)} = \frac{1}{r} + a_x + \frac{r-1}{2r} = (\ddot{a}_x - 1) + \frac{r+1}{2r}$$

$$\ddot{a}_x^{(r)} = \ddot{a}_x - \frac{r-1}{2r} \qquad (3.49)$$

Contoh 3.10

Hitunglah nilai tunai suatu anuitas seumur hidup bagi seseorang yang berusia 40 tahun dengan pembayaran bulanan sebesar Rp 200.000,00 yang dibayar tiap akhir bulan?

Jawab:

Nilai tunai anuitas seumur hidup dengan sistem pembayaran di atas dapat dihitung dengan menggunakan persamaan (3.47) dan tabel I pada lampiran yaitu:

$$
\begin{aligned}
(200.0000)a_{40}^{(12)} &= 200.0000\left(a_{40} + \frac{r-1}{2r}\right) \\
&= 200.0000\left(\frac{N_{41}}{D_{40}} + \frac{r-1}{2r}\right) \\
&= 200.000\left(\frac{N_{41}}{D_{40}} + \frac{11}{24}\right) \\
&= 3.970.029,49
\end{aligned}
$$

Jadi, nilai tunai anuitas seumur hidup bagi seseorang yang berusia 40 tahun dengan pembayaran bulanan sebesar Rp 200.000,00 yang dibayar tiap akhir bulan adalah Rp 3.970.029,49.

b. Anuitas Tertunda Seumur Hidup

Anuitas tertunda seumur hidup dengan pembayaran beberapa kali dalam setahun adalah serangkaian pembayaran berkala sebesar Rp $\frac{1}{r}$ yang dilakukan r kali dalam setahun sepanjang umur anuitan dan ditunda terlebih dahulu selama n tahun. Nilai tunai anuitas awal seumur hidup bagi (x) dengan pembayaran r kali dalam setahun yang ditunda terlebih dahulu n tahun dinotasikan dengan ${}_{n|}\ddot{a}_x^{(r)}$.

Pembayaran pertama dilakukan saat (x) berusia $x+n$ tahun, sehingga :

$$\begin{aligned}
{}_{n|}\ddot{a}_x^{(r)} &= \frac{1}{r}\left[v^n\,{}_{n}p_x + v^{n+\frac{1}{r}}\,{}_{n+\frac{1}{r}}p_x + \dots + v^{n+1-\frac{1}{r}}\,{}_{n+1-\frac{1}{r}}p_x + v^{n+1}\,{}_{n+1}p_x + \dots\right] \\
&= \frac{1}{r}v^n\left[{}_{n}p_x + v^{\frac{1}{r}}\,{}_{n+\frac{1}{r}}p_x + \dots + v^{1-\frac{1}{r}}\,{}_{n+1-\frac{1}{r}}p_x + v\,{}_{n+1}p_x + \dots\right] \\
&= \frac{1}{r}v^n\,\frac{l_{x+n} + v^{\frac{1}{r}}l_{x+n+\frac{1}{r}} + \dots + v^{1-\frac{1}{r}}l_{x+n+1-\frac{1}{r}} + v\,l_{x+n+1} + \dots}{l_x}\left(\frac{l_{x+n}}{l_{x+n}}\right) \\
&= \left(\frac{1}{r}\frac{v^n l_{x+n}}{l_x}\right)\frac{l_{x+n} + v^{\frac{1}{r}}l_{x+n+\frac{1}{r}} + \dots + v^{1-\frac{1}{r}}l_{x+n+1-\frac{1}{r}} + v\,l_{x+n+1} + \dots}{l_{x+n}} \\
&= \frac{1}{r}\left(v^n\frac{l_{x+n}}{l_x}\right)\left[1 + v^{\frac{1}{r}}\,{}_{\frac{1}{r}}p_{x+n} + \dots + v^{1-\frac{1}{r}}\,{}_{1-\frac{1}{r}}p_{x+n} + v\,p_{x+n} + \dots\right]
\end{aligned}$$

$$ {}_{n|}\ddot{a}_x^{(r)} = \left(v^n\frac{l_{x+n}}{l_x}\right)\frac{1}{r}\sum_{t=0}^{\infty} v^{\frac{t}{r}}\,{}_{\frac{t}{r}}p_{x+n} \qquad (3.50)$$

Dengan menggunakan persamaan (3.29) dan (3.48) maka persamaan (3.50) menjadi:

$$ {}_{n|}\ddot{a}_x^{(r)} = {}_{n}E_x\,\ddot{a}_{x+n}^{(r)} \qquad (3.51)$$

Sedangkan nilai tunai anuitas akhir seumur hidup bagi (x) dengan pembayaran r kali dalam setahun yang ditunda terlebih dahulu n tahun dinotasikan dengan ${}_{n|}a_x^{(r)}$

$$\begin{aligned}
{}_{n|}a_x^{(r)} &= \frac{1}{r}\left[v^{n+\frac{1}{r}}\,{}_{n+\frac{1}{r}}p_x + \dots + v^{n+1-\frac{1}{r}}\,{}_{n+1-\frac{1}{r}}p_x + v^{n+1}\,{}_{n+1}p_x + \dots\right] \\
&= \frac{1}{r}v^n\left[v^{\frac{1}{r}}\,{}_{n+\frac{1}{r}}p_x + \dots + v^{1-\frac{1}{r}}\,{}_{n+1-\frac{1}{r}}p_x + v\,{}_{n+1}p_x + \dots\right]
\end{aligned}$$

$$ {}_{n|}a_x^{(r)} = \frac{1}{r} v^n \frac{v^{\frac{1}{r}} l_{x+n+\frac{1}{r}} + ... + v^{1-\frac{1}{r}} l_{x+n+1-\frac{1}{r}} + vl_{x+n+1} + ...}{l_x} \left(\frac{l_{x+n}}{l_{x+n}} \right) $$

$$ = \frac{1}{r} \left(\frac{v^n l_{x+n}}{l_x} \right) \frac{v^{\frac{1}{r}} l_{x+n+\frac{1}{r}} + ... + v^{1-\frac{1}{r}} l_{x+n+1-\frac{1}{r}} + vl_{x+n+1} + ...}{l_{x+n}} $$

$$ = \frac{1}{r} \left(v^n \frac{l_{x+n}}{l_x} \right) \left[v^{\frac{1}{r}} {}_{\frac{1}{r}}p_{x+n} + .. + v^{1-\frac{1}{r}} {}_{1-\frac{1}{r}}p_{x+n} + vp_{x+n} + ... \right] $$

$$ {}_{n|}a_x^{(r)} = \frac{1}{r} \left(v^n \frac{l_{x+n}}{l_x} \right) \sum_{t=1}^{\infty} v^{\frac{t}{r}} {}_{\frac{t}{r}}p_{x+n} \tag{3.52} $$

Jika menggunakan persamaan (3.24),(3.43) maka persamaan (3.52) menjadi:

$$ {}_{n|}a_x^{(r)} = {}_nE_x a_{x+n}^{(r)} \tag{3.53} $$

Contoh 3.11

Hitunglah nilai tunai suatu anuitas seumur hidup yang tertunda 5 tahun bagi seseorang yang berusia 30 tahun dengan pembayaran setiap 3 bulan sebesar Rp 300.000,00 yang pembayarannya dilakukan setiap awal periode pembayaran?

Jawab:

Nilai tunai anuitas awal tertunda dengan sistem pembayaran seperti di atas dapat dihitung dengan menggunakan persamaan (3.51) dan tabel I pada lampiran, yaitu:

$$ 300.000 {}_{5|}\ddot{a}_{30}^{(3)} = 300.0000 \left({}_5E_{30} \ddot{a}_{35}^{(3)} \right) $$

$$ 300.000 {}_{5|}\ddot{a}_{30}^{(3)} = 300.000 \frac{D_{35}}{D_{30}} \left(\ddot{a}_{35} - \frac{r-1}{2r} \right) $$

$$ = 300.000 \frac{D_{35}}{D_{30}} \left(\frac{N_{35}}{D_{35}} - \frac{2}{6} \right) $$

$$ = 5.705.376,72 $$

Jadi, nilai tunai suatu anuitas seumur hidup yang tertunda 5 tahun bagi seseorang yang berusia 30 tahun yang dibayar di awal periode pembayaran adalah Rp 5.705.376,72.

c. Anuitas Berjangka

Anuitas berjangka dengan pembayaran beberapa kali setahun adalah sejumlah pembayaran secara berkala yang dilakukan r kali dalam setahun selama n tahun. Penjabaran nilai tunai seluruh pembayaran sama dengan penjabaran nilai tunai dalam anuitas seumur hidup dengan pembayaran dilakukan selama n tahun. Jika pembayaran dilakukan di akhir periode maka pembayaran pertama dilakukan di akhir periode $\frac{1}{r}$ tahun dan pembayaran terakhir dilakukan di akhir tahun ke n . Berdasarkan persamaan (3.45) maka nilai tunai anuitas akhir berjangka bagi (x) dengan pembayaran r kali setahun selama n tahun, yang dinotasikan dengan $a_{x:\overline{n}|}^{(r)}$ adalah:

$$a_{x:\overline{n}|}^{(r)} = \frac{1}{r}\sum_{t=1}^{rn} v^{\frac{t}{r}} {}_{\frac{t}{r}}p_x \qquad (3.54)$$

Dengan menggunakan persamaan (3.47) dan (3.53) maka persamaan (3.54) menjadi:

$$\begin{aligned} a_{x:\overline{n}|}^{(r)} &= a_x^{(r)} - {}_{n|}a_x^{(r)} \\ &= \left(a_x + \frac{r-1}{2r}\right) - {}_nE_x a_{x+n}^{(r)} \\ &= \left(a_x + \frac{r-1}{2r}\right) - {}_nE_x \left(a_{x+n} + \frac{r-1}{2r}\right) \end{aligned}$$

$$a_{\overline{x:n|}}^{(r)} = \left(a_x - {}_nE_x a_{x+n}\right) + \frac{r-1}{2r}\left(1 - {}_nE_x\right)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (3.37) maka diperoleh :

$$\begin{aligned} a_{\overline{x:n|}}^{(r)} &= \left(a_x - {}_nE_x a_{x+n}\right) + \frac{r-1}{2r}\left(1 - {}_nE_x\right) \\ &= \left(a_x - {}_{n|}a_x\right) + \frac{r-1}{2r}\left(1 - {}_nE_x\right) \end{aligned}$$

$$a_{\overline{x:n|}}^{(r)} = a_{\overline{x:n|}} + \frac{r-1}{2r}\left(1 - {}_nE_x\right) \tag{3.55}$$

Sedangkan nilai tunai anuitas awal berjangka bagi (x) dengan pembayaran *r* kali dinotasikankan dengan $\ddot{a}_{\overline{x:n|}}^{(r)}$. Oleh karena selisih anuitas awal berjangka dengan anuitas akhir berjangka adalah $\frac{1}{r}$, sehingga:

$$\begin{aligned} \ddot{a}_{\overline{x:n|}}^{(r)} &= \frac{1}{r} + a_{\overline{x:n-\frac{1}{r}|}}^{(r)} \\ &= \frac{1}{r} + \frac{1}{r}\sum_{t=1}^{rn-1} v^{\frac{t}{r}}\, {}_{\frac{t}{r}}p_x \\ &= \frac{1}{r}\left(1 + v^{\frac{1}{r}}\, {}_{\frac{1}{r}}p_x + v^{\frac{2}{r}}\, {}_{\frac{2}{r}}p_x + \dots + v^{n-\frac{2}{r}}\, {}_{n-\frac{2}{r}}p_x + v^{n-\frac{1}{r}}\, {}_{n-\frac{1}{r}}p_x\right) \end{aligned}$$

$$\ddot{a}_{\overline{x:n|}}^{(r)} = \frac{1}{r}\sum_{t=0}^{rn-1} v^{\frac{t}{r}}\, {}_{\frac{t}{r}}p_x \tag{3.56}$$

Bila menggunakan persamaan (3.49) dan (3.51) maka persamaan (3.56) menjadi:

$$\begin{aligned} \ddot{a}_{\overline{x:n|}}^{(r)} &= \ddot{a}_x^{(r)} - {}_{n|}\ddot{a}_x^{(r)} \\ &= \left(\ddot{a}_x - \frac{r-1}{2r}\right) - \left({}_nE_x \ddot{a}_{x+n}^{(r)}\right) \\ &= \left(\ddot{a}_x - \frac{r-1}{2r}\right) - {}_nE_x\left(\ddot{a}_{x+n} - \frac{r-1}{2r}\right) \end{aligned}$$

$$\ddot{a}^{(r)}_{x:\overline{n}|} = \left(\ddot{a}_x - {}_nE_x\ddot{a}_{x+n}\right) - \frac{r-1}{2r}\left(1 - {}_nE_x\right)$$

$$= \left(\ddot{a}_x - {}_{n|}\ddot{a}_x\right) - \frac{r-1}{2r}\left(1 - {}_nE_x\right)$$

$$\ddot{a}^{(r)}_{x:\overline{n}|} = \ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \frac{r-1}{2r}\left(1 - {}_nE_x\right) \tag{3.57}$$

Contoh 3.12

Hitunglah nilai tunai anuitas berjangka selama 20 tahun dengan pembayaran bulanan sebesar Rp 100.000,00 yang dibayar setiap akhir bulan bagi seseorang yang berusia 25 tahun?

Jawab:

Nilai tunai seluruh pembayaran tersebut dapat dihitung dengan menggunakan persamaan (3.55) dan tabel I pada lampiran:

$$100.000a^{(12)}_{25:\overline{20}|} = 100.000\left(a_{25:\overline{20}|} + \frac{11}{24}\left(1 - {}_{20}E_{25}\right)\right)$$

$$= 100.000\left(\frac{N_{26} - N_{46}}{D_{25}} + \frac{11}{24}\left(1 - \frac{D_{45}}{D_{25}}\right)\right)$$

$$= 1.521.579,49$$

Jadi, nilai tunai anuitas berjangka selama 20 tahun dengan pembayaran bulanan sebesar Rp 100.000,00 yang dibayar setiap akhir bulan bagi seseorang yang berusia 25 tahun adalah Rp 1.521.579,49.

d. Anuitas Tertunda Berjangka

Anuitas tertunda berjangka dengan pembayaran beberapa kali dalam setahun adalah serangkaian pembayaran secara berkala yang dilakukan *r* kali dalam setahun dan dalam jangka waktu tertentu misalnya *m* tahun yang pembayarannya tertunda terlebih dahulu selama n tahun. Nilai tunai anuitas awal tertunda berjangka disimbolkan dengan ${}_{n|m}\ddot{a}_x^{(r)}$.

$$
\begin{aligned}
{}_{n|m}\ddot{a}_x^{(r)} &= \frac{1}{r}\left(v^n\, {}_n p_x + v^{n+\frac{1}{r}}\, {}_{n+\frac{1}{r}} p_x + \ldots + v^{n+m-\frac{1}{r}}\, {}_{n+m-\frac{1}{r}} p_x \right) \\
&= \frac{v^n}{r}\left({}_n p_x + v^{\frac{1}{r}}\, {}_{n+\frac{1}{r}} p_x + \ldots + v^{m-\frac{1}{r}}\, {}_{n+m-\frac{1}{r}} p_x \right) \\
&= \frac{v^n}{r}\left(\frac{l_{x+n} + v^{\frac{1}{r}} l_{x+n+\frac{1}{r}} + \ldots + v^{m-\frac{1}{r}} l_{x+n+m-\frac{1}{r}}}{l_x} \right)\left(\frac{l_{x+n}}{l_{x+n}}\right) \\
&= \frac{v^n l_{x+n}}{r l_x}\left(\frac{l_{x+n} + v^{\frac{1}{r}} l_{x+n+\frac{1}{r}} + \ldots + v^{m-\frac{1}{r}} l_{x+n+m-\frac{1}{r}}}{l_{x+n}} \right) \\
&= \frac{1}{r}\left(\frac{v^n l_{x+n}}{l_x}\right)\left(1 + v^{\frac{1}{r}}\, {}_{\frac{1}{r}} p_{x+n} + \ldots + v^{m-\frac{1}{r}}\, {}_{m-\frac{1}{r}} p_{x+n} \right)
\end{aligned}
$$

$$
{}_{n|m}\ddot{a}_x^{(r)} = \frac{1}{r}\left(\frac{v^n l_{x+n}}{l_x}\right)\sum_{t=0}^{mr-1} v^{\frac{t}{r}}\, {}_{\frac{t}{r}} p_{x+n} \tag{3.58}
$$

Bila menggunakan persamaan (3.29) dan persamaan (3.56) maka persamaan (3.58) menjadi:

$$
{}_{n|m}\ddot{a}_x^{(r)} = {}_n E_x\, \ddot{a}_{x+n:\overline{m|}}^{(r)} \tag{3.59}
$$

Bila menggunakan persamaan (3.57) maka persamaan (3.59) menjadi:

$$
\begin{aligned}
{}_{n|m}\ddot{a}_x^{(r)} &= {}_n E_x\, \ddot{a}_{x+n:\overline{m|}}^{(r)} \\
&= {}_n E_x\left(\ddot{a}_{x+n:\overline{m|}} - \frac{r-1}{2r}\left(1 - {}_m E_{x+n}\right) \right)
\end{aligned} \tag{3.60}
$$

Sedangkan nilai tunai anuitas akhir tertunda n tahun berjangka selama m tahun dengan pembayaran dilakukan r kali dalam setahun dinotasikan dengan ${}_{n|m}a_x^{(r)}$.

Penjabarannya adalah sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
{}_{n|m}a_x^{(r)} &= \frac{1}{r}\left(v^{n+\frac{1}{r}}\,{}_{n+\frac{1}{r}}p_x + v^{n+\frac{2}{r}}\,{}_{n+\frac{2}{r}}p_x \ldots + v^{n+m}\,{}_{n+m}p_x \right) \\
&= \frac{v^n}{r}\left(v^{\frac{1}{r}}\,{}_{n+\frac{1}{r}}p_x + v^{\frac{2}{r}}\,{}_{n+\frac{2}{r}}p_x \ldots + v^{m}\,{}_{n+m}p_x \right) \\
&= \frac{v^n}{r}\left(\frac{v^{\frac{1}{r}} l_{x+n+\frac{1}{r}} + v^{\frac{2}{r}} l_{x+n+\frac{2}{r}} + \ldots. + v^{m-\frac{1}{r}} l_{x+n+m-\frac{1}{r}}}{l_x} \right)\left(\frac{l_{x+n}}{l_{x+n}} \right) \\
&= \frac{v^n l_{x+n}}{r l_x}\left(\frac{v^{\frac{1}{r}} l_{x+n+\frac{1}{r}} + v^{\frac{2}{r}} l_{x+n+\frac{2}{r}} + \ldots. + v^{m-\frac{1}{r}} l_{x+n+m-\frac{1}{r}}}{l_{x+n}} \right) \\
&= \frac{1}{r}\left(\frac{v^n l_{x+n}}{l_x} \right)\left(v^{\frac{1}{r}}\,{}_{\frac{1}{r}}p_{x+n} + v^{\frac{2}{r}}\,{}_{\frac{2}{r}}p_{x+n} + \ldots + v^{m}\,{}_{m}p_{x+n} \right)
\end{aligned}
$$

$$
{}_{n|m}a_x^{(r)} = \frac{1}{r}\left(\frac{v^n l_{x+n}}{l_x} \right)\sum_{t=1}^{mr} v^{\frac{t}{r}}\,{}_{\frac{t}{r}}p_{x+n} \tag{3.61}
$$

Jika menggunakan persamaan $(3.29), (3.54)$ maka persamaan (3.61) menjadi:

$$
{}_{n|m}a_x^{(r)} = {}_nE_x\, a_{\overline{x+n:m|}}^{(r)} \tag{3.62}
$$

Bila menggunakan persamaan (3.55) maka persamaan (3.62) menjadi:

$$
\begin{aligned}
{}_{n|m}a_x^{(r)} &= {}_nE_x\, a_{\overline{x+n:m|}}^{(r)} \\
&= {}_nE_x\left(a_{\overline{x+n:m|}} + \frac{r-1}{2r}\left(1 - {}_mE_{x+n}\right) \right)
\end{aligned} \tag{3.63}
$$

Contoh 3.13

Hitunglah nilai tunai anuitas berjangka selama 10 tahun yang tertunda terlebih dahulu selama 5 tahun dengan pembayaran bulanan sebesar Rp 100.000,00 yang dibayar setiap akhir bulan bagi seseorang yang berusia 25 tahun ?

Jawab:

Nilai tunai seluruh pembayaran tersebut dapat dihitung dengan menggunakan persamaan (3.63) tabel I pada lampiran yaitu:

$$\begin{aligned}
100.000\,{}_{5|10}a_{25}^{(12)} &= 100.000\left({}_{5}E_{25}\left(a_{\overline{30:10|}} + \frac{11}{24}\left(1 - {}_{10}E_{30}\right)\right)\right) \\
&= 100.000\left(\frac{D_{30}}{D_{25}}\left(\frac{N_{31} - N_{41}}{D_{30}} + \frac{11}{24}\left(1 - \frac{D_{40}}{D_{30}}\right)\right)\right) \\
&= 755.070{,}14
\end{aligned}$$

Jadi, nilai tunai anuitas berjangka 10 tahun yang tertunda terlebih dahulu selama 5 tahun dengan pembayaran bulanan adalah Rp 755.070,14.

BAB IV

ASURANSI JIWA

A. Pengertian Asuransi

Asuransi berasal dari kata *assurance* atau *insurance* yang berarti jaminan atau pertanggungan. Menurut kamus besar bahasa Indonesia, asuransi merupakan perjanjian antara dua pihak, pihak yang satu berkewajiban membayar iuran dan pihak yang lain berkewajiban memberikan jaminan sepenuhnya kepada pembayar iuran apabila terjadi sesuatu yang menimpa dirinya atau barang miliknya yang diasuransikan sesuai dengan perjanjian yang dibuatnya. Pada dasarnya asuransi adalah usaha kerja sama atau koperasi dari sejumlah orang yang sepakat memikul kesulitan keuangan bila terjadi musibah terhadap salah seorang anggotanya.

Kematian merupakan peristiwa yang pasti akan dialami oleh tiap orang. Namun problemnya, manusia tidak akan pernah tahu kapan peristiwa kematian itu datang, sehingga sulit bagi manusia untuk mempersiapkan diri terhadap peristiwa kematian tersebut. Kematian mengakibatkan hilangnya pendapatan seseorang atau keluarga tertentu. Salah satu lembaga yang berfungsi membantu meminimumkan beban akibat kematian adalah lembaga asuransi jiwa. Setiap orang yang akan mengasuransikan jiwanya pada perusahaan asuransi jiwa berarti sepakat terhadap kontrak tertulis antara dia dengan perusahaan. Kontrak tersebut dinamakan polis asuransi. Dalam polis tersebut berisi besarnya premi yang harus dibayar kepada perusahaan asuransi dan jadwal pembayarannya serta besarnya santunan yang akan dibayarkan perusahaan asuransi jiwa jika anggotanya meninggal dunia.

B. Premi Asuransi Jiwa

Besar santunan asuransi jiwa tergantung besar premi yang dibayarkan oleh pemegang polis sedangkan besar premi dipengaruhi oleh tiga faktor, yaitu:

1. Tingkat Kematian atau Mortalitas

Mortalitas adalah peluang seseorang dengan umur tertentu meninggal dalam jangka waktu tertentu. Pada prinsipnya asuransi harus berdasarkan pada ramalan yang akurat tentang peluang meninggal, misalnya rata-rata kematian yang terjadi setiap tahun dalam tiap kelompok usia. Ramalan kematian tersebut dibuat dalam bentuk tabel mortalitas. Jadi tabel mortalitas berisi laju kematian setiap usia tertentu. Ramalan mortalita ini bagi perusahaan asuransi akan memberikan dasar taksiran lama kehidupan tertanggung, lama pembayaran premi dan saat pembayaran santunan. Dengan kata lain, bagian premi yang berkaitan dengan mortalitas menggambarkan beban murni dalam memberikan perlindungan kematian. Perusahaan asuransi menggunakan tabel mortalitas sebagai langka awal dalam penentuan premi.

2. Tingkat Bunga

Pada saat pemegang polis membayar premi kepada perusahaan asuransi jiwa, dana pada perusahaan serta dana pemilik polis lainnya akan mendapatkan bunga. Pendapatan dari bunga ini akan membantu pembebanan premi asuransi jiwa. Namun, sulit sekali meramalkan tingkat bunga investasi untuk beberapa tahun yang akan datang, sehingga perusahaan asuransi mengadakan penyesuaian tingkat bunga dari polis yang sedang berjalan dan harus memperhatikan perubahan nilai uang dari waktu ke waktu. Semakin tinggi tingkat bunga yang dijanjikan perusahaan maka makin rendah premi yang akan dikenakan terhadap pemegang polis.

3. Biaya

Perusahaan asuransi mempunyai aneka biaya operasional, seperti pegawai harus diadakan dan dibayar, tenaga pemasaran harus diadakan, dilatih dan digaji, alat tulis dan peralatan kantor harus dibeli, gedung harus dipelihara, bahkan juga pajak harus dibayar. Setiap premi harus dibebani secara proporsional untuk membiayai kegiatan operasional. Jadi, faktor biaya dihitung dan dimasukkan dalam tarif premi.

Dari ketiga faktor di atas, faktor mortalitas atau peluang meninggal mempunyai pengaruh terbesar. Artinya faktor bunga dan faktor biaya umumnya sama untuk semua pemegamg polis sedangkan faktor mortalitas tergantung pada karakteristik pribadi tertanggung. Premi ada dua macam yaitu premi bersih dan premi kotor. Premi bersih tidak memperhatikan faktor biaya atau dengan kata lain perhitungan premi bersih hanya memperhatikan peluang meninggal dan tingkat bunga sedangkan perhitungan premi kotor memperhatikan peluang meninggal, tingkat bunga dan besarnya biaya asuransi.

C. Premi Bersih Asuransi Jiwa

1. Premi Bersih Tunggal

Premi bersih tunggal adalah premi bersih yang dibayarkan sekaligus. Asuransi jiwa dengan pembayaran premi bersih tunggal, santunannya dapat dibayar setiap tahun dan juga dapat dibayar beberapa kali dalam setahun.

1.1 Premi Bersih Tunggal(Santunan Dibayar di Akhir Tahun Tertanggung Meninggal)

a. Asuransi Jiwa Seumur Hidup

Uang santunan dalam asuransi jiwa seumur hidup pasti akan diterima pewaris tertanggung tanpa mempedulikan kapan dia meninggal dan pembayaran santunannya dilakukan pada akhir tahun tertanggung meninggal. Andaikan ada sebanyak l_x orang menyerahkan uang sebesar A rupiah ke perusahaan asuransi, maka dana di perusahaan saat ini ada sebanyak Al_x rupiah. Setiap akhir tahun akan dibayarkan Rp 1 kepada tiap pewaris dari tertanggung yang meninggal di antara l_x. Banyaknya orang yang meninggal antara usia x sampai $x+1$ adalah d_x, sehingga dana yang dikeluarkan perusahaan beserta bunganya pada akhir tahun pertama adalah vd_x rupiah. Banyaknya yang meninggal antara usia $x+1$ tahun sampai dengan usia $x+2$ ada sebanyak d_{x+1} orang, sehingga dana yang dikeluarkan perusahaan beserta bunganya pada akhir tahun kedua adalah $v^2 d_{x+1}$ rupiah, demikian seterusnya. Dengan menggunakan prinsip dasar bahwa jumlah uang yang diterima sama dengan jumlah uang dikeluarkan oleh perusahaan maka secara matematis pernyataan tersebut dapat ditulis:

$$Al_x = vd_x + v^2 d_{x+1} + v^3 d_{x+2} + v^4 d_{x+3} + ...$$

$$A = \frac{vd_x + v^2 d_{x+1} + v^3 d_{x+2} + v^4 d_{x+3} + ...}{l_x} \tag{4.1}$$

Persamaan (4.1) menyatakan nilai tunai atau premi bersih tunggal suatu asuransi jiwa seumur hidup sebesar Rp 1 bagi (x) disimbolkan dengan A_x sehingga dapat ditulis:

$$\begin{aligned} A_x &= \frac{vd_x + v^2 d_{x+1} + v^3 d_{x+2} + v^4 d_{x+3} + ...}{l_x} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} v^{n+1} \frac{d_{x+n}}{l_x} \end{aligned}$$

$$A_x = \sum_{n=0}^{\infty} v^{n+1} {}_{n|}q_x \tag{4.2}$$

Bila menggunakan simbol komutasi, maka persamaan (4.2) menjadi:

$$\begin{aligned} A_x &= \frac{vd_x + v^2 d_{x+1} + v^3 d_{x+2} + v^4 d_{x+3} + ...}{l_x} \left(\frac{v^x}{v^x} \right) \\ &= \frac{v^{x+1} d_x + v^{x+2} d_{x+1} + v^{x+3} d_{x+2} + v^{x+4} d_{x+3} + ...}{v^x l_x} \\ &= \frac{C_x + C_{x+1} + C_{x+2} + C_{x+3} + ...}{D_x} \end{aligned}$$

$$A_x = \frac{M_x}{D_x} \tag{4.3}$$

Contoh 4.1

Hitunglah premi bersih tunggal suatu polis asuransi seumur hidup bagi seseorang yang berusia 25 tahun bila besar santunannya adalah Rp 10.000.000,00?

Jawab :

Besar premi bersih tunggal suatu asuransi seumur hidup dapat dihitung dengan menggunakan persamaan (4.3) dan tabel I pada lampiran, sehingga diperoleh:

$$10.000.000 A_{25} = 10.000.000 \frac{M_{25}}{D_{25}}$$
$$= 3.744.633,098$$

Jadi, premi bersih tunggal suatu polis asuransi jiwa seumur hidup bagi seseorang yang berusia 25 tahun dengan besar uang santunan adalah Rp 10.000.000,00 adalah Rp 3.744.633,098.

b. Asuransi Jiwa Berjangka

Dalam kontrak asuransi jiwa berjangka, uang santunan akan dibayarkan perusahaan kepada pewaris si tertanggung bila tertanggung meninggal dalam jangka waktu tertentu yaitu jangka waktu polis. Andaikan $A_{x:\overline{n}|}$ adalah nilai tunai asuransi atau premi bersih tunggal suatu asuransi sebesar Rp 1 untuk seorang yang berusia x selama n tahun. Ini berarti bila (x) meninggal sebelum mencapai usia $x+n$, maka kepada pewarisnya akan dibayarkan sebesar Rp 1 pada akhir tahun (x) meninggal. Namun, bila (x) mencapai usia $x+n$ maka (x) tidak menerima uang santunan. Cara penurunan rumusnya sama seperti pada asuransi seumur hidup, hanya saja masa kontrak dalam asuransi berjangka sampai waktu tertentu yaitu n tahun, sehingga nilai tunai seluruh pembayarannya adalah:

$$A^{1}_{x:\overline{n}|} = \frac{vd_x + v^2 d_{x+1} + v^3 d_{x+2} + v^4 d_{x+3} + \dots + v^n d_{x+n-1}}{l_x} \qquad (4.4)$$

Bila menggunakan simbol komutasi maka persamaan (4.4) di atas menjadi:

$$A^{1}_{x:\overline{n}|} = \frac{vd_x + v^2 d_{x+1} + v^3 d_{x+2} + v^4 d_{x+3} + ... + v^n d_{x+n-1}}{l_x}\left(\frac{v^x}{v^x}\right)$$

$$= \frac{v^{x+1} d_x + v^{x+2} d_{x+1} + v^{x+3} d_{x+2} + v^{x+4} d_{x+3} + ... + v^{x+n} d_{x+n-1}}{v^x l_x}$$

$$= \frac{C_x + C_{x+1} + C_{x+2} + C_{x+3} + ... + C_{x+n-1}}{D_x}$$

$$A^{1}_{x:\overline{n}|} = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x} \tag{4.5}$$

Contoh 4.2

Seseorang yang berusia 30 tahun membeli polis asuransi jiwa dengan besarnya santunan Rp 5.000.000,00 . Hitunglah besarnya premi bersih tunggal yang harus dibayar orang tersebut bila dia membeli polis asuransi berjangka selama 20 tahun?

Jawab:

Premi bersih tunggal asuransi jiwa berjangka dapat dihitung dengan menggunakan persamaan (4.5) dan tabel I pada lampiran, sehingga diperoleh:

$$5.10^6 A^{1}_{30:\overline{20}|} = 5.10^6 \frac{M_{30} - M_{50}}{D_{30}}$$

$$= 457.898,667$$

Jadi, besar premi yang harus dibayar orang tersebut untuk membeli polis asuransi berjangka selama 20 tahun adalah Rp 457.898,667.

c. Asuransi Jiwa Endowment

Asuransi jiwa endowment merupakan kontrak asuransi yang diperoleh dari perpaduan antara asuransi jiwa berjangka dengan endowmen murni. Bila (x) meninggal selama jangka waktu polis misalnya n tahun, maka kepada pewarisnya akan dibayarkan Rp 1 sedangkan bila (x) mencapai usia $x+n$ tahun, maka dia akan menerima uang sebesar Rp 1 pada akhir tahun $x+n$. Jadi nilai tunai seluruh pembayarannya adalah:

$$A_{x:\overline{n|}} = A^{1}_{x:\overline{n|}} + {}_{n}E_{x} = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x} + \frac{D_{x+n}}{D_x}$$

$$A_{x:\overline{n|}} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_x} \qquad (4.6)$$

Contoh 4.3

Hitunglah premi bersih tunggal suatu asuransi endowment selama 10 tahun dengan santunan sebesar duabelas juta rupiah yang dikeluarkan bagi seseorang yang berusia 20 tahun?

Jawab:

Premi bersih tunggal asuransi jiwa endowment dapat dihitung dengan persamaan (4.6) dan tabel I pada lampiran sehingga :

$$12.10^{6}\, A_{20:\overline{10|}} = 12.10^{6}\,\frac{M_{20} - M_{30} + D_{30}}{D_{20}} = 9.404.174{,}84$$

Jadi, besar premi bersih tunggal suatu asuransi endowment selama 10 tahun sebesar duabelas juta rupiah yang dikeluarkan bagi seseorang yang berusia 20 tahun adalah Rp 9.404.174,84.

d. Asuransi Jiwa Tertunda Seumur Hidup

Dalam kontrak asuransi jiwa seumur hidup yang tertunda selama n tahun uang santunan sebesar Rp 1 akan diterima pewaris (x) dari perusahaan asuransi jika (x) meninggal setelah berusia $x+n$ tahun. Premi bersih tunggal asuransi jiwa seumur hidup sebesar Rp 1 bagi (x) yang tertunda selama n tahun dinotasikan dengan ${}_{n|}A_x$. Penurunan rumus ${}_{n|}A_x$ adalah sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
{}_{n|}A_x &= \frac{v^{n+1}d_{x+n} + v^{n+2}d_{x+n+1} + v^{n+3}d_{x+n+2} + v^{n+4}d_{x+n+3} + \ldots}{l_x} \\
&= \frac{v^{n+1}d_{x+n} + v^{n+2}d_{x+n+1} + v^{n+3}d_{x+n+2} + v^{n+4}d_{x+n+3} + \ldots}{l_x}\left(\frac{v^x}{v^x}\right) \\
&= \frac{v^{x+n+1}d_{x+n} + v^{x+n+2}d_{x+n+1} + v^{x+n+3}d_{x+n+2} + v^{x+n+4}d_{x+n+3} + \ldots}{v^x l_x} \\
&= \frac{C_{x+n} + C_{x+n+1} + C_{x+n+2} + C_{x+n+3} + \ldots.}{D_x}
\end{aligned}
$$

$$
{}_{n|}A_x = \frac{M_{x+n}}{D_x} \qquad (4.7)
$$

Contoh 4.4

Hitunglah premi tunggal bersih suatu polis asuransi dengan santunan satu juta rupiah selama 5 tahun dan 2 juta rupiah sesudah itu bagi seseorang yang berusia 30 tahun?

Jawab:

Berdasarkan persamaan $(4.5),(4.7)$ dan tabel I pada lampiran maka premi tunggal bersih adalah:

$$10^6 A^{1}_{30:\overline{5}|} + 2.10^6 \; {}_{5|}A_{30} = 10^6\left(\frac{M_{30} - M_{35}}{D_{30}}\right) + 2.10^6\left(\frac{M_{35}}{D_{30}}\right)$$
$$= 809.498,35$$

Jadi, besar premi bersih tunggal yang harus dibayar orang tersebut untuk membeli polis asuransi itu adalah Rp 809.498,35

e. Asuransi Jiwa Tertunda Berjangka

Asuransi jiwa berjangka selama m tahun yang tertunda terlebih dahulu selama n tahun bagi (x) dinotasikan dengan ${}_{n|}A^{1}_{x:\overline{m}|}$. Dalam kontrak asuransi ini uang santunan akan diterima pewaris (x) bila dia meninggal antara usia $x+n$ dan $x+m+n$. Perhitungan premi bersih tunggalnya hampir sama dengan asuransi jiwa tertunda seumur hidup hanya saja pembayaran sebesar Rp 1 dilakukan selama m tahun, sehingga premi bersih tunggal adalah:

$${}_{n|}A^{1}_{x:\overline{m}|} = \frac{v^{n+1}d_{x+n} + v^{n+2}d_{x+n+1} + v^{n+3}d_{x+n+2} + \ldots + v^{m+n}d_{x+m+n-1}}{l_x}$$

$${}_{n|}A^{1}_{x:\overline{m}|} = \frac{v^{n+1}d_{x+n} + v^{n+2}d_{x+n+1} + v^{n+3}d_{x+n+2} + \ldots + v^{m+n}d_{x+m+n-1}}{l_x}\left(\frac{v^x}{v^x}\right)$$
$$= \frac{v^{x+n+1}d_{x+n} + v^{x+n+2}d_{x+n+1} + v^{x+n+3}d_{x+n+2} + \ldots + v^{x+m+n}d_{x+m+n-1}}{v^x l_x}$$
$$= \frac{C_{x+n} + C_{x+n+1} + C_{x+n+2} + \ldots. + C_{x+m+n-1}}{D_x}$$

$${}_{n|}A^{1}_{x:\overline{m}|} = \frac{M_{x+n} - M_{x+n+m}}{D_x} \qquad (4.8)$$

Asuransi jiwa tertunda seumur hidup dan asuransi tertunda berjangka digunakan untuk menghitung besar premi suatu asuransi jiwa yang santunannya berbeda atau menghitung santunan yang preminya berbeda antara jangka waktu yang satu dengan jangka waktu yang lainnya.

Contoh 4.5

Hitunglah premi bersih tunggal suatu polis asuransi bagi seseorang yang berusia 25 tahun dengan santunan satu juta rupiah bila dia meninggal dalam jangka waktu 10 tahun dan setengah juta rupiah bila ia meninggal antara usia 35 tahun dan 45 tahun?

Jawab:

Premi bersih tunggalnya dapat dihitung dengan menggunakan persamaan $(4{,}5),(4.8)$ dan tabel I pada lampiran sehingga diperoleh:

$$10^6 A^{1}_{25:\overline{10}|} + 5.10^5\ {}_{10|}A^{1}_{25:\overline{10}|} = 10^6\left(\frac{M_{25}-M_{35}}{D_{25}}\right) + 5.10^5\left(\frac{M_{35}-M_{45}}{D_{25}}\right)$$
$$= 49.587{,}33$$

Jadi, premi bersih tunggal yang harus dibayar oleh orang itu untuk membeli polis asuransi tersebut adalah Rp 49.587,33.

1.2 Premi Bersih Tunggal (Santunan Dibayar pada Akhir Periode $\frac{1}{r}$ Tahun Tertanggung Meninggal)

Pada pembahasan sebelumnya perhitungan premi tunggal bersih untuk berbagai jenis asuransi jiwa, uang santunan dibayar pada akhir tahun polis yaitu tahun polis saat (x) meninggal, namun dapat pula ditentukan premi bersih tunggal untuk asuransi yang pembayaran santunannya dibayarkan pada akhir periode $\frac{1}{r}$ tahun tertanggung meninggal.

a. Asuransi Jiwa Seumur Hidup

Andaikan ada sebanyak l_x orang menyerahkan uang sebesar A rupiah pada suatu perusahaan asuransi, maka dana di perusahaan sekarang adalah Al_x rupiah. Setiap akhir periode $\frac{1}{r}$ tahun perusahaan tersebut akan memberikan santunan sebesar Rp 1 kepada tiap pewaris dari tertanggung yang meninggal di antara l_x orang. Banyaknya orang yang meninggal dalam interval $\left[x, x+\frac{1}{r}\right]$ adalah $\left(l_x - l_{x+\frac{1}{r}}\right)$ orang, sehingga dana yang dikeluarkan perusahaan beserta bunganya pada akhir periode yang pertama adalah $v^{\frac{1}{r}}\left(l_x - l_{x+\frac{1}{r}}\right)$ rupiah. Banyaknya yang meninggal dalam interval $\left[x+\frac{1}{r}, x+\frac{2}{r}\right]$ sebanyak $\left(l_{x+\frac{1}{r}} - l_{x+\frac{2}{r}}\right)$ orang, sehingga besar dana yang dikeluarkan perusahaan beserta bunganya adalah $v^{\frac{2}{r}}\left(l_{x+\frac{1}{r}} - l_{x+\frac{2}{r}}\right)$ rupiah, demikian seterusnya. Dengan menggunakan prinsip dasar bahwa jumlah uang yang diterima perusahaan sama dengan jumlah uang yang dikeluarkan oleh perusahaan tersebut, maka secara matematis ditulis:

$$Al_x = v^{\frac{1}{r}}\left(l_x - l_{x+\frac{1}{r}}\right) + v^{\frac{2}{r}}\left(l_{x+\frac{1}{r}} - l_{x+\frac{2}{r}}\right). + \dots\dots\dots + v\left(l_{x+1-\frac{1}{r}} - l_{x+1}\right) +$$

$$v^{1+\frac{1}{r}}\left(l_{x+1} - l_{x+1+\frac{1}{r}}\right) + v^{1+\frac{2}{r}}\left(l_{x+1+\frac{1}{r}} - l_{x+1+\frac{2}{r}}\right) + \dots + v^2\left(l_{x+2-\frac{1}{r}} - l_{x+2}\right) + \dots$$

$$A = v^{\frac{1}{r}} \frac{l_x + v^{\frac{1}{r}} l_{x+\frac{1}{r}} + \dots + v^{1-\frac{1}{r}} l_{x+1-\frac{1}{r}} + v l_{x+1} + v^{1+\frac{1}{r}} l_{x+1+\frac{1}{r}} + \dots + v^{2-\frac{1}{r}} l_{x+2-\frac{1}{r}} + \dots.}{l_x} -$$

$$\frac{v^{\frac{1}{r}} l_{x+\frac{1}{r}} + v^{\frac{2}{r}} l_{x+\frac{2}{r}} + \dots + v l_{x+1} + v^{1+\frac{1}{r}} l_{x+1+\frac{1}{r}} + v^{1+\frac{2}{r}} l_{x+1+\frac{2}{r}} + \dots + v^2 l_{x+2} + \dots.}{l_x}$$

$$A = v^{\frac{1}{r}} \sum_{t=0}^{\infty} v^{\frac{t}{r}} \frac{l_{x+\frac{t}{r}}}{l_x} - \sum_{t=1}^{\infty} v^{\frac{t}{r}} \frac{l_{x+\frac{t}{r}}}{l_x} \tag{4.9}$$

Persamaan terakhir menunjukkan premi bersih tunggal asuransi seumur hidup bagi (x) dengan santunan sebesar Rp 1 yang dibayar pada akhir periode $\frac{1}{r}$ tahun (x) meninggal disimbolkan dengan $A_x^{(r)}$.

$$A_x^{(r)} = v^{\frac{1}{r}} \sum_{t=0}^{\infty} v^{\frac{t}{r}}\, {}_{\frac{t}{r}}p_x - \sum_{t=1}^{\infty} v^{\frac{t}{r}}\, {}_{\frac{t}{r}}p_x \tag{4.10}$$

Dengan menggunakan persamaan persamaan (3.45) dan (3.48) maka persamaan (4.10) dapat diubah menjadi:

$$A_x^{(r)} = r v^{\frac{1}{r}} \ddot{a}_x^{(r)} - r a_x^{(r)} = r\left(v^{\frac{1}{r}} \ddot{a}_x^{(r)} - a_x^{(r)}\right) \tag{4.11}$$

Contoh 4.6

Alisa berusia 28 tahun membeli suatu polis asuransi jiwa dengan santunan sebesar Rp 5.000.000,00 dibayar pada akhir bulan Alisa meninggal. Hitunglah premi bersih tunggal yang harus dibayar Alisa untuk membeli polis asuransi jiwa tersebut bila Alisa membeli polis asuransi seumur hidup?

Jawab:

Besar premi bersih tunggal untuk asuransi seumur hidup yang santunan dibayar pada akhir bulan Alisa meninggal, dapat dihitung dengan persamaan (3.47), (3.49), (4.11) dan tabel I pada lampiran, sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} 5.10^6 A_{28}^{(12)} &= 5.10^6.12\left((1{,}025)^{-\frac{1}{12}}\left[\frac{N_{28}}{D_{28}} - \frac{11}{24}\right] - \left[\frac{N_{29}}{D_{28}} + \frac{11}{24}\right]\right) \\ &= 2.010.539{,}282 \end{aligned}$$

Jadi, besar premi bersih tunggal yang harus dibayar Alisa untuk membeli polis asuransi jiwa seumur hidup tersebut adalah Rp 2.010.539,282.

b. Asuransi Jiwa Berjangka

Dalam asuransi jiwa berjangka, santunan akan diterima pewaris (x) bila (x) meninggal sebelum mencapai usia $x+n$ dan santunan tersebut akan diterima pada akhir periode (x) meninggal, tetapi bila (x) mencapai usia $x+n$ maka pewaris (x) tidak menerima uang santunan. Premi bersih tunggal suatu asuransi berjangka selama *n* tahun dengan santunan sebesar Rp 1 bagi (x) dibayar pada akhir periode $\frac{1}{r}$ tahun (x) meninggal, dinotasikan dengan $A_{\overset{1}{x}:\overline{n|}}^{(r)}$. Penjabaran rumusnya adalah sebagai berikut:

$$A^{(r)}_{\overset{1}{x:\overline{n|}}} = \frac{v^{\frac{1}{r}}\left(l_x - l_{x+\frac{1}{r}}\right) + v^{\frac{2}{r}}\left(l_{x+\frac{1}{r}} - l_{x+\frac{2}{r}}\right). + \ldots\ldots\ldots + v\left(l_{x+1-\frac{1}{r}} - l_{x+1}\right) + \ldots..}{l_x}$$

$$\frac{v^{n-1+\frac{1}{r}}\left(l_{x+n-1} - l_{x+n-1+\frac{1}{r}}\right) + v^{n-1+\frac{2}{r}}\left(l_{x+n-1+\frac{1}{r}} - l_{x+n-1+\frac{2}{r}}\right) + \ldots + v^{n}\left(l_{x+n-\frac{1}{r}} - l_{x+n}\right)}{l_x}$$

$$= \frac{v^{\frac{1}{r}}}{l_x}\left[l_x + v^{\frac{1}{r}} l_{x+\frac{1}{r}} + \ldots + v^{1-\frac{1}{r}} l_{x+1-\frac{1}{r}} + .. + v^{n-1} l_{x+n-1} + v^{n-1+\frac{1}{r}} l_{x+n-1+\frac{1}{r}} + \ldots + v^{n-\frac{1}{r}} l_{x+n-\frac{1}{r}}\right] -$$

$$\frac{1}{l_x}\left[v^{\frac{1}{r}} l_{x+\frac{1}{r}} + v^{\frac{2}{r}} l_{x+\frac{2}{r}} + \ldots + v l_{x+1} + .. + v^{n-1+\frac{1}{r}} l_{x+n-1+\frac{1}{r}} + v^{n-1+\frac{2}{r}} l_{x+n-1+\frac{2}{r}} + \ldots + v^{n} l_{x+n}\right]$$

$$A^{(r)}_{\overset{1}{x:\overline{n|}}} = v^{\frac{1}{r}} \sum_{t=0}^{nr-1} v^{\frac{t}{r}} \frac{l_{x+\frac{t}{r}}}{l_x} - \sum_{t=1}^{nr} v^{\frac{t}{r}} \frac{l_{x+\frac{t}{r}}}{l_x}$$

$$A^{(r)}_{\overset{1}{x:\overline{n|}}} = v^{\frac{1}{r}} \sum_{t=0}^{nr-1} v^{\frac{t}{r}} {}_{\frac{t}{r}}p_x - \sum_{t=1}^{nr} v^{\frac{t}{r}} {}_{\frac{t}{r}}p_x \qquad (4.12)$$

Dengan menggunakan persamaan persamaan (3.54) dan (3.56) maka persamaan (4.12) menjadi:

$$A^{(r)}_{\overset{1}{x:\overline{n|}}} = r\, v^{\frac{1}{r}} \ddot{a}^{(r)}_{x:\overline{n|}} - r a^{(r)}_{x:\overline{n|}} = r\left(v^{\frac{1}{r}} \ddot{a}^{(r)}_{x:\overline{n|}} - a^{(r)}_{x:\overline{n|}}\right) \qquad (4.13)$$

Contoh 4.7

Andi berusia 25 tahun membeli suatu polis asuransi jiwa dengan santunan sebesar Rp 1.000.000,00 dibayar pada akhir periode triwulan Andi meninggal. Hitunglah premi bersih tunggal yang harus dibayar Andi untuk membeli polis asuransi jiwa tersebut bila Andi membeli polis asuransi berjangka 10 tahun?

Jawab:

Besar premi bersih tunggal untuk asuransi berjangka selama 10 tahun, santunan dibayar pada akhir triwulan Andi meninggal, dapat dihitung dengan persamaan (3.55), (3.57), (4.13) dan tabel I pada lampiran yaitu:

$$10^6 A^{(3)}_{\overset{1}{25}:\overline{10|}} = 10^6.3.\left((1{,}025)^{-\frac{1}{3}}\left[\frac{N_{25}-N_{35}}{D_{25}} - \frac{2}{6}\left(1-\frac{D_{35}}{D_{25}}\right)\right] - \left[\frac{N_{26}-N_{36}}{D_{25}} + \frac{2}{6}\left(1-\frac{D_{35}}{D_{25}}\right)\right]\right)$$

$$= 30.393{,}85$$

Jadi, besar premi bersih tunggal yang harus dibayar Andi untuk membeli polis asuransi jiwa berjangka 10 tahun adalah Rp 30.395,85.

c. Asuransi Jiwa Tertunda Seumur Hidup

Apabila asuransi jiwanya adalah asuransi jiwa tertunda seumur hidup maka premi bersih tunggal asuransi tertunda dengan santunan sebesar Rp 1 dibayar pada akhir periode $\frac{1}{r}$ tahun (x) meninggal, yang terunda terlebih dahulu selama n tahun dinotasikan dengan ${}_{n|}A_x^{(r)}$. Ini berarti bahwa uang santunan akan diterima pewaris (x) bila ia meninggal setelah berusia $x+n$ dan santunan tersebut akan diterima pada akhir periode tertanggung meninggal. Penjabaran nilai tunai asuransinya adalah sebagai berikut:

$${}_{n|}A_x^{(r)} = \frac{v^{n+\frac{1}{r}}\left(l_{x+n} - l_{x+n+\frac{1}{r}}\right) + \ldots + v^{n+1}\left(l_{x+n+1-\frac{1}{r}} - l_{x+n+1}\right) +}{l_x}$$

$$\frac{v^{n+1+\frac{1}{r}}\left(l_{x+n+1}-l_{x+n+1+\frac{1}{r}}\right)+\ldots+v^{n+2}\left(l_{x+n+2-\frac{1}{r}}-l_{x+n+2}\right)+\ldots}{l_x}$$

$$_{n|}A_x^{(r)}=v^{n+\frac{1}{r}}\frac{l_{x+n}+\ldots+v^{1-\frac{1}{r}}l_{x+n+1-\frac{1}{r}}+vl_{x+n+1}+\ldots+v^{2-\frac{1}{r}}l_{x+n+2-\frac{1}{r}}+\ldots}{l_x}-$$

$$v^n\frac{v^{\frac{1}{r}}l_{x+n+\frac{1}{r}}+\ldots+vl_{x+n+1}+v^{1+\frac{1}{r}}l_{x+n+1+\frac{1}{r}}+\ldots+v^2l_{x+n+2}+\ldots}{l_x}$$

$$=\left(\frac{v^{n+\frac{1}{r}}l_{x+n}}{l_x}\right)\frac{l_{x+n}+\ldots+v^{1-\frac{1}{r}}l_{x+n+1-\frac{1}{r}}+vl_{x+n+1}+\ldots+v^{2-\frac{1}{r}}l_{x+n+2-\frac{1}{r}}+\ldots}{l_{x+n}}-$$

$$\left(\frac{v^nl_{x+n}}{l_x}\right)\frac{v^{\frac{1}{r}}l_{x+n+\frac{1}{r}}+\ldots+vl_{x+n+1}+v^{1+\frac{1}{r}}l_{x+n+1+\frac{1}{r}}+\ldots+v^2l_{x+n+2}+\ldots}{l_{x+n}}$$

$$_{n|}A_x^{(r)}=\left(\frac{v^{n+\frac{1}{r}}l_{x+n}}{l_x}\right)\sum_{t=0}^{\infty}v^{\frac{t}{r}}\frac{l_{x+n+\frac{t}{r}}}{l_{x+n}}-\left(\frac{v^nl_{x+n}}{l_x}\right)\sum_{t=1}^{\infty}v^{\frac{t}{r}}\frac{l_{x+n+\frac{t}{r}}}{l_{x+n}}$$

$$_{n|}A_x^{(r)}=v^{\frac{1}{r}}\,{}_nE_x\sum_{t=0}^{\infty}v^{\frac{t}{r}}\,{}_{\frac{t}{r}}p_{x+n}-{}_nE_x\sum_{t=1}^{\infty}v^{\frac{t}{r}}\,{}_{\frac{t}{r}}p_{x+n} \quad (4.14)$$

Dengan menggunakan persamaan (3.50) dan (3.52) maka persamaan (4.14) dapat diubah menjadi:

$$_{n|}A_x^{(r)}=rv^{\frac{1}{r}}\,{}_{n|}\ddot{a}_x^{(r)}-r\,{}_{n|}a_x^{(r)}=r\left(v^{\frac{1}{r}}\,{}_{n|}\ddot{a}_x^{(r)}-{}_{n|}a_x^{(r)}\right) \quad (4.15)$$

Contoh 4.8

Magda berusia 28 tahun membeli suatu polis asuransi jiwa dengan santunan sebesar Rp 5.000.000,00 dibayar pada akhir bulan Magda meninggal. Hitunglah premi bersih tunggal yang harus dibayar Magda untuk membeli polis asuransi jiwa tersebut bila dia membeli asuransi jiwa tertunda seumur hidup?

Jawab:

Besar premi bersih tunggal untuk asuransi jiwa tertunda seumur hidup dapat dihitung dengan menggunakan persamaan (4.15) dan tabel I pada lampiran, sehingga diperoleh:

$$
\begin{aligned}
5.10^6 \; {}_{4|}A_{28}^{(12)} &= 5.10^6 r\left(v^{\frac{1}{r}} \; {}_{n|}\ddot{a}_x^{(r)} - {}_{n|}a_x^{(r)} \right) \\
&= 5.10^6 r\left(v^{\frac{1}{r}} \; {}_nE_x \ddot{a}_{x+n}^{(r)} - {}_nE_x a_{x+n}^{(r)} \right) \\
&= 5.10^6 r \; {}_nE_x \left(v^{\frac{1}{r}} \ddot{a}_{x+n}^{(r)} - a_{x+n}^{(r)} \right) \\
&= 5.10^6.12.{}_4E_{28}\left((1{,}025)^{-\frac{1}{12}} \ddot{a}_{32}^{(12)} - a_{32}^{(12)} \right) \\
&= 5.10^6.12.\frac{D_{32}}{D_{28}}\left((1{,}025)^{-\frac{1}{12}} \left[\frac{N_{32}}{D_{32}} - \frac{11}{24} \right] - \left[\frac{N_{33}}{D_{32}} + \frac{11}{24} \right] \right) \\
&= 1.944.699{,}241
\end{aligned}
$$

Jadi, besar premi bersih tunggal yang harus dibayar Magda untuk membeli polis asuransi jiwa yang tertunda selama 4 tahun tersebut adalah Rp 1.944.699,241.

d. Asuransi Jiwa Tertunda Berjangka

Apabila kontak asuransinya hanya sampai pada waktu tertentu, misalnya m tahun dan pembayaran preminya ditunda terlebih dahulu selama n tahun serta santunan dibayar dibayar pada akhir periode $\frac{1}{r}$ tahun (x) meninggal disimbolkan dengan ${}_{n|}A_{\overset{1}{x}:\overline{m|}}^{(r)}$. Ini berarti bahwa pewaris (x) akan menerima uang santunan bila tertanggung meninggal antara usia $x+n$ dan $x+m+n$. Nilai tunai asuransinya adalah:

$$
{}_{n|}A^{1(r)}_{x:\overline{m|}} = \frac{v^{n+\frac{1}{r}}\left(l_{x+n} - l_{x+n+\frac{1}{r}}\right) + \dots. + v^{n+1}\left(l_{x+n+1-\frac{1}{r}} - l_{x+n+1}\right) + \dots..}{l_x}
$$

$$
\frac{v^{n+m-1+\frac{1}{r}}\left(l_{x+n+m-1} - l_{x+n+m-1+\frac{1}{r}}\right) + \dots + v^{n+m}\left(l_{x+n+m-\frac{1}{r}} - l_{x+n+m}\right)}{l_x}
$$

$$
= v^{n+\frac{1}{r}} \frac{l_{x+n} + \dots + v^{1-\frac{1}{r}} l_{x+n+1-\frac{1}{r}} + v^{m-1} l_{x+n+m-1} + \dots + v^{m-\frac{1}{r}} l_{x+n+m-\frac{1}{r}} + \dots}{l_x} -
$$

$$
v^n \frac{v^{\frac{1}{r}} l_{x+n+\frac{1}{r}} + \dots + v l_{x+n+1} + v^{m-1+\frac{1}{r}} l_{x+n+m-1+\frac{1}{r}} + \dots + v^m l_{x+n+m}}{l_x}
$$

$$
{}_{n|}A^{1(r)}_{x:\overline{m|}} = \left(\frac{v^{n+\frac{1}{r}} l_{x+n}}{l_x}\right) \frac{l_{x+n} + \dots + v^{1-\frac{1}{r}} l_{x+n+1-\frac{1}{r}} + v^{m-1} l_{x+n+m-1} + \dots + v^{m-\frac{1}{r}} l_{x+n+m-\frac{1}{r}} + \dots}{l_{x+n}} -
$$

$$
\left(\frac{v^n l_{x+n}}{l_x}\right) \frac{v^{\frac{1}{r}} l_{x+n+\frac{1}{r}} + \dots + v l_{x+n+1} + v^{m-1+\frac{1}{r}} l_{x+n+m-1+\frac{1}{r}} + \dots + v^m l_{x+n+m}}{l_{x+n}}
$$

$$
= \left(\frac{v^{n+\frac{1}{r}} l_{x+n}}{l_x}\right) \sum_{t=0}^{mr-1} v^{\frac{t}{r}} \frac{l_{x+n+\frac{t}{r}}}{l_{x+n}} - \left(\frac{v^n l_{x+n}}{l_x}\right) \sum_{t=1}^{mr-1} v^{\frac{t}{r}} \frac{l_{x+n+\frac{t}{r}}}{l_{x+n}}
$$

$$
{}_{n|}A^{1(r)}_{x:\overline{m|}} = v^{\frac{1}{r}}\, {}_nE_x \sum_{t=0}^{mr-1} v^{\frac{t}{r}}\, {}_{n+\frac{t}{r}}p_x - {}_nE_x \sum_{t=1}^{mr-1} v^{\frac{t}{r}}\, {}_{n+\frac{t}{r}}p_x \tag{4.16}
$$

Dengan menggunakan persamaan (3.58) dan (3.60) maka persamaan (4.16) menjadi:

$$
{}_{n|}A^{1(r)}_{x:\overline{m|}} = r\, v^{\frac{1}{r}}\, {}_{n|m}\ddot{a}_x^{(r)} - r\, {}_{n|m}a_x^{(r)} = r\left(v^{\frac{1}{r}}\, {}_{n|m}\ddot{a}_x^{(r)} - {}_{n|m}a_x^{(r)}\right) \tag{4.17}
$$

Contoh 4.9

Hitunglah premi bersih tunggal yang dibayar Mikael yang berusia 28 tahun bila ia membeli polis asuransi jiwa berjangka 10 tahun yang ditunda terlebih dahulu selama 5 tahun, santunan sebesar Rp 5.000.000,00 pada akhir bulan Mikael meninggal?

Jawab:

Besar premi bersih tunggal asuransi jiwa tertunda berjangka dengan santunan dibayar pada akhir bulan Mikael meninggal, dapat dihitung dengan menggunakan persamaan (4.17) dan tabel I pada lampiran, sehingga diperoleh:

$$5.10^6 \; {}_{n|}A^{1\,(r)}_{x:\overline{m|}} = 5.10^6 r\left(v^{\frac{1}{r}} \; {}_{n|m}\ddot{a}^{(r)}_x - {}_{n|m}a^{(r)}_x \right)$$

$$= 5.10^6 r\left(v^{\frac{1}{r}} \; {}_nE_x \ddot{a}^{(r)}_{x+n:\overline{m|}} - {}_nE_x a^{(r)}_{x+n:\overline{m|}} \right)$$

$$= 5.10^6 r. {}_nE_x \left(v^{\frac{1}{r}} \ddot{a}^{(r)}_{x+n:\overline{m|}} - a^{(r)}_{x+n:\overline{m|}} \right)$$

$$5.10^6 \; {}_{5|}A^{1\,(12)}_{28:\overline{10|}} = 5.10^6.12. {}_5E_{28} \left((1{,}025)^{-\frac{1}{12}} \ddot{a}^{(12)}_{33:\overline{10|}} - a^{(12)}_{33:\overline{10|}} \right)$$

$$= 5.10^6.12. \frac{D_{33}}{D_{28}} \left((1{,}025)^{-\frac{1}{12}} \left[\frac{N_{33} - D_{43}}{D_{33}} - \frac{11}{24}\left(1 - \frac{D_{43}}{D_{33}}\right) \right] - \left[\frac{N_{34} - D_{44}}{D_{33}} + \frac{11}{24}\left(1 - \frac{D_{43}}{D_{33}}\right) \right] \right)$$

$$= 200.761{,}939$$

Jadi, besar premi bersih tunggal yang harus dibayar Mikael untuk membeli polis asuransi jiwa berjangka 10 tahun yang tertunda terlebih dahulu selama 5 tahun adalah Rp 200.761,939.

2. Premi Bersih Datar

Premi bersih datar adalah premi bersih yang besarnya sama pada setiap periode pembayaran. Periode pembayaran premi bersih datar bisa setiap tahun, tiap enam bulan, setiap empat bulan, setiap bulan maupun harian.

2.1 Premi Bersih Datar yang Dibayar Setiap Tahun

1. Asuransi Jiwa Seumur Hidup

Asuransi jiwa dengan pembayaran premi tahunan adalah suatu kontrak asuransi dengan masa kontrak sepanjang umur tertanggung dan premi dibayar secara berkala yaitu tahunan. Dalam asuransi seumur hidup dengan pembayaran tahunan ini, perhitungannya berdasarkan pada persamaan bahwa nilai tunai premi sama dengan nilai tunai santunan. Alasan perusahaan menggunakan persamaan tersebut adalah untuk menghindari terjadinya kerugian pada salah satu pihak, jadi jika nilai tunai premi lebih besar dari nilai tunai santunan maka pemegang polis akan mengalami kerugian demikian sebaliknya. Pada penjelasan sebelumnya A_x menyatakan nilai tunai atau premi bersih tunggal dari suatu asuransi seumur hidup sebesar Rp 1 bagi (x) untuk pembayaran premi tunggal. Jika premi dibayar tahunan dan pembayarannya dilakukan pada setiap permulaan tahun, maka A_x merupakan total nilai tunai anuitas seumur hidup dengan pembayaran P rupiah setiap awal tahun. Jadi, nilai tunai asuransi seumur hidup dengan pembayaran premi tahunan adalah:

$$A_x = P\ddot{a}_x \qquad (4.18)$$

Contoh 4.10

Elisa berusia 20 tahun membeli polis asuransi seumur hidup dengan santunan limabelas juta rupiah. Hitunglah premi bersih tahunan yang dibayar Elisa?

Jawab:

Berdasarkan persamaan (4.18) dan tabel I pada lampiran maka besar premi bersih tahunan untuk asuransi seumur hidup adalah:

$$\begin{aligned} 15.10^6 A_{20} = P\ddot{a}_{20} \Rightarrow P &= 15.10^6 \frac{A_{20}}{\ddot{a}_{20}} \\ &= 15.10^6 \frac{M_{20}}{N_{20}} \\ &= 187.361,35 \end{aligned}$$

Jadi, besarnya premi bersih tahunan yang dibayar Elisa adalah Rp 187.361,35.

2. Asuransi Jiwa Berjangka

Asuransi berjangka dengan pembayaran premi tahunan adalah suatu kontrak asuransi selama jangka waktu n tahun. Nilai tunai asuransi berjangka merupakan total nilai anuitas berjangka dengan pembayaran P rupiah tiap awal tahun. Secara matematis ditulis sebagai berikut:

$$A^1_{x:\overline{n}|} = P\,\ddot{a}_{x:\overline{n}|} \tag{4.19}$$

Contoh 4.11

Seseorang yang berusia 32 tahun membeli polis asuransi berjangka selama 28 tahun dengan santunan duabelas juta rupiah. Hitunglah premi bersih tahunan yang akan dibayar orang tersebut?

Jawab:

Besarnya premi bersih tahunan untuk asuransi berjangka dapat dihitung dengan menggunakan persamaan (4.19) dan tabel I pada lampiran, sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} 12.10^6 A^1_{32:\overline{28|}} = P\ddot{a}_{32:\overline{28|}} \Rightarrow P &= 12.10^6 \frac{A^1_{32:\overline{28|}}}{\ddot{a}_{32:\overline{28|}}} \\ &= 12.10^6 \frac{M_{32} - M_{60}}{N_{32} - N_{60}} \\ &= 108.053,65 \end{aligned}$$

Jadi, besarnya premi bersih tahunan yang harus dibayar oleh orang tersebut adalah Rp 108.053,65

3. Asuransi Jiwa Endowment

Asuransi endowment merupakan perpaduan antara asuransi berjangka dengan endowmen murni. Bila (x) meninggal selama jangka waktu asuransi misalnya n tahun, maka kepada pewarisnya akan dibayarkan Rp 1 sedangkan bila (x) mencapai usia $x+n$ tahun, maka kepadanya akan dibayarkan Rp 1 pada akhir tahun $x+n$. Nilai tunai asuransinya merupakan total nilai anuitas berjangka dengan pembayaran P rupiah tiap awal tahun. Secara matematis dapat ditulis:

$$A_{x:\overline{n|}} = P\ddot{a}_{x:\overline{n|}} \tag{4.20}$$

Bila pembayaran preminya hanya sebanyak m kali $(m < n)$ maka nilai tunai asuransinya adalah:

$$A_{x:\overline{n|}} = P\ddot{a}_{x:\overline{m|}} \tag{4.21}$$

Contoh 4.12

Hitunglah premi bersih tahunan untuk asuransi endowment sampai usia 60 tahun bagi orang yang berusia 35 tahun dengan pembayaran premi 20 kali dan besar santunan lima juta rupiah?

Jawab :

Berdasarkan persamaan (4.21) dan tabel I pada lampiran maka besar premi bersih tahunan untuk asuransi endowment adalah:

$$5.10^6 A_{\overline{35:25|}} = P\ddot{a}_{\overline{35:20|}} \Rightarrow P = 5.10^6 \frac{A_{\overline{35:25|}}}{\ddot{a}_{\overline{35:20|}}}$$

$$= 5.10^6 \frac{M_{35} - M_{60} + D_{60}}{N_{35} - N_{55}}$$

$$= 191.051,998$$

Jadi, besar premi bersih tahunan yang harus dibayar oleh orang tersebut untuk asuransi endowment adalah Rp 191.051,998.

4. Asuransi Jiwa Tertunda Seumur hidup

Asuransi jiwa seumur hidup yang tertunda selama n tahun dengan pembayaran premi tahunan adalah suatu kontrak asuransi sepanjang usia tertanggung dengan pembayaran premi ditunda terlebih dahulu selama n tahun. Nilai tunai asuransinya merupakan total nilai tunai anuitas tertunda selama n tahun dengan pembayaran premi tahunan P rupiah tiap awal tahun.

$$_{n|}A_x = P\,_{n|}\ddot{a}_x \qquad (4.22)$$

5. Asuransi Jiwa Tertunda berjangka

Asuransi jiwa tertunda berjangka adalah suatu kontrak asuransi yang tertunda selama *n* tahun dengan pembayaran premi tahunannya dilakukan selama *m* tahun. Nilai tunai asuransinya adalah:

$$_{n|}A^{1}_{x:\overline{m}|} = P\; _{n|}{}_{m}\ddot{a}_{x} \qquad (4.23)$$

Contoh 4.13

Andi yang berusia 30 tahun membeli polis asuransi jiwa dengan uang santunan sebesar Rp 15.000.000,00 . Hitunglah besar premi bersih tahunan yang harus dibayar Andi, bila:

a. Andi membeli polis asuransi seumur hidup yang tertunda selama 5 tahun.

b. Andi membeli polis asuransi berjangka selama 10 tahun yang tertunda selama 5 tahun.

Jawab:

a. Jika Andi membeli polis asuransi seumur hidup yang tertunda selama 5 tahun maka dengan menggunakan persamaan (4.22) dan tabel pada I lampiran maka diperoleh:

$$15.10^{6}\; _{5|}A_{30} = P\; _{5|}\ddot{a}_{30}$$

$$15.10^{6}\frac{M_{35}}{D_{30}} = P\frac{N_{35}}{D_{30}}$$

$$\Rightarrow P = 15.10^{6}\frac{M_{35}}{N_{35}}$$

$$= 307.429,078$$

Jadi, besar premi bersih yang harus dibayar Andi setiap tahun adalah untuk asuransi seumur hidup yang tertunda selama 5 tahun adalah Rp 307.429,078

b. Besar premi bersih tahunan untuk asuransi tertunda berjangka dapat dihitung dengan menggunakan persamaaan (4.23) dan tabel I pada lampiran yaitu:

$$15.10^{6}\; {}_{5|}A^{1}_{30:\overline{10}|} = P\; {}_{5|}\ddot{a}_{30:\overline{10}|}$$

$$15.10^{6}\,\frac{M_{35}-M_{45}}{D_{30}} = P\,\frac{N_{35}-N_{45}}{D_{30}} \Rightarrow P = 15.10^{6}\,\frac{M_{35}-M_{45}}{N_{35}-N_{45}}$$

$$= 88.192,663$$

Jadi, besar premi bersih yang harus dibayar Andi setiap tahun untuk asuransi berjangka 10 tahun yang tertunda selama 5 tahun adalah Rp 88.192,663.

Contoh 4.14

Tika yang berusia 30 tahun membeli polis asuransi jiwa seumur hidup. Hitunglah santunan yang akan diterima pewaris bila Tika menyerahkan premi sebesar Rp 50.000,00 setiap permulaan tahun selama 10 tahun pertama dan Rp 100.000,00 setiap akhir tahun antara usia 40 dan 55 tahun?

Jawab:

Andaikan besar santunan yang akan diterima oleh pewaris Tika adalah sebesar B rupiah, maka nilai B dapat dihitung dengan cara berikut:

$$50.000\ddot{a}_{30:\overline{10}|} + 100.000\; {}_{10|15}a_{30} = \mathrm{B}A_{30}$$

$$\Rightarrow \mathrm{B} = \frac{A_{30}}{50.000\ddot{a}_{30:\overline{10}|} + 100.000\; {}_{10|15}a_{30}}$$

$$= 3.294.826.372$$

Jadi, besar santunan yang akan diterima oleh pewaris Tika adalah Rp 3.294.826,4.

2.2 Premi Bersih Datar Yang Dibayar Beberapa Kali Setahun

1. Asuransi Jiwa Seumur Hidup

Asuransi seumur hidup dengan pembayaran premi beberapa kali dalam setahun adalah suatu kontrak asuransi dengan masa kontrak sepanjang usia tertanggung dengan premi dibayar beberapa kali dalam setahun. Andaikan $P^{(r)}$ menyatakan jumlah premi setahun yang dibayarkan r kali setahun, sehingga besarnya setiap kali pembayaran adalah $\frac{1}{r}P^{(r)}$. Nilai tunai asuransi seumur hidup dengan pembayaran premi r kali dalam setahun merupakan total dari nilai tunai anuitas dengan pembayaran r kali dalam setahun. Secara matematis pernyataan tersebut dapat ditulis:

$$A_x = P^{(r)}\ddot{a}_x^{(r)} \qquad (4.24)$$

2. Asuransi Jiwa Berjangka

Asuransi jiwa berjangka dengan pembayaran premi beberapa kali dalam setahun adalah suatu kontrak asuransi selama jangka waktu n tahun dengan pembayaran premi sebanyak r kali dalam setahun. Nilai tunai asuransinya adalah total nilai tunai anuitas berjangka dengan pembayaran premi r kali dalam setahun.

$$A^1_{x:\overline{n}|} = P^{(r)}\ddot{a}^{(r)}_{x:\overline{n}|} \qquad (4.25)$$

3. Asuransi Jiwa Endowment

Nilai tunai asuransi endowment yang pembayaran preminya sebanyak r kali dalam setahun merupakan total nilai anuitas berjangka dengan pembayaran premi r kali dalam setahun yang dibayar tiap awal tahun. Secara matematis dapat ditulis:

$$A_{\overline{x:n|}} = P^{(r)} a^{(r)}_{\overline{x:n|}} \qquad (4.26)$$

4. Asuransi Jiwa Tertunda Seumur Hidup

Asuransi jiwa seumur hidup yang tertunda dengan pembayaran preminya beberapa kali dalam setahun adalah suatu kontrak asuransi dengan masa kontrak selama umur tertanggung dan pembayaran premi dilakukan sebanyak r kali dalam setahun tetapi tertunda terlebih dahulu selama n tahun. Nilai tunai asuransinya adalah total nilai anuitas dengan pembayaran premi r kali dalam setahun tetapi ditunda terlebih dahulu selama n tahun.

$${}_{n|}A_x = P^{(r)}\, {}_{n|}\ddot{a}^{(r)}_x \qquad (4.27)$$

5. Asuransi Jiwa Tertunda Berjangka

Asuransi jiwa tertunda berjangka dengan pembayaran beberapa kali dalam setahun adalah adalah suatu kontrak asuransi yang preminya dibayar r kali dalam selama m tahun yang ditunda terlebih dahulu selama n tahun. Nilai tunai asuransinya adalah total nilai anuitas tertunda berjangka yang pembayaran preminya sebanyak r kali dalam setahun, yang dapat dinyatakan dengan:

$${}_{n|}A^{1}_{\overline{x:m|}} = P^{(r)}\, {}_{n|m}\ddot{a}^{(r)}_x \qquad (4.28)$$

Contoh 4.15

Dimas yang berusia 30 tahun membeli polis asuransi dengan santunan Rp 5.000.000,00. Jika pembayaran premi dilakukan setiap awal bulan maka tentukan besar premi bersih bila:

a. Dimas membeli polis asuransi jiwa seumur hidup
b. Dimas membeli polis asuransi jiwa berjangka selama 25 tahun
c. Dimas membeli polis asuransi jiwa endowment selama 30 tahun
d. Dimas membeli polis asuransi jiwa seumur hidup yang tertunda selama 5 tahun
e. Dimas membeli polis asuransi jiwa berjangka selama 15 tahun yang tertunda selama 8 tahun.

Jawab:

a. Besar premi tahunan yang dibayar 12 kali dalam setahun dapat dihitung dengan menggunakan persamaan (4.24) dan tabel I pada lampiran, yaitu:

$$5.10^6 A_{30} = P^{(12)}\ddot{a}_{30}^{(12)}$$
$$5.10^6 \frac{M_{30}}{D_{30}} = P^{(12)}\left(\frac{N_{30}}{D_{30}} - \frac{11}{24}\right)$$
$$\Rightarrow P^{(12)} = 5.10^6 \frac{\frac{M_{30}}{D_{30}}}{\left(\frac{N_{30}}{D_{30}} - \frac{11}{24}\right)}$$
$$= 87.759,413$$

Sehingga besar pembayaran tiap bulan adalah :

$$\frac{1}{12}P^{(12)} = \frac{1}{12}(87759,413)$$
$$= 7.313,284$$

Jadi, besar premi bersih yang harus dibayar Dimas setiap bulan adalah Rp 7.313,284.

b. Besar premi tahunan yang dibayar 12 kali dalam setahun untuk asuransi jiwa berjangka selama 25 tahun dapat dihitung dengan menggunakan persamaan (4.25) dan tabel I pada lampiran, yaitu:

$$5.10^6 A^{1}_{\overline{30:25|}} = P^{(12)} \ddot{a}^{(12)}_{\overline{30:25|}}$$

$$5.10^6 \frac{M_{30} - M_{55}}{D_{30}} = P^{(12)} \left(\ddot{a}_{\overline{30:25|}} - \frac{11}{24}\left[1 - {}_{25}E_{30}\right] \right)$$

$$5.10^6 \frac{M_{30} - M_{55}}{D_{30}} = P^{(12)} \left(\frac{N_{30} - N_{55}}{D_{30}} - \frac{11}{24}\left[1 - \frac{D_{55}}{D_{30}}\right] \right)$$

$$\Rightarrow P^{(12)} = 5.10^6 \frac{\dfrac{M_{30} - M_{55}}{D_{30}}}{\left(\dfrac{N_{30} - N_{55}}{D_{30}} - \dfrac{11}{24}\left[1 - \dfrac{D_{55}}{D_{30}}\right] \right)}$$

$$= 36.014,577$$

Sehingga besarnya pembayaran tiap bulan adalah:

$$\frac{1}{12} P^{(12)} = \frac{1}{12}(36.014,577) = 3001,215$$

Jadi, besarnya premi bersih yang dibayar Dimas tiap bulan adalah Rp 3001,215.

c. Besar premi tahunan yang dibayar 12 kali untuk asuransi endowment berjangka selama 30 tahun dapat dihitung dengan menggunakan persamaan (4.26) dan tabel I pada lampiran, yaitu:

$$5.10^6 A_{\overline{30:30|}} = P^{(12)} \ddot{a}^{(12)}_{\overline{30:30|}}$$

$$5.10^6 \frac{M_{30} - M_{60} + D_{60}}{D_{30}} = P^{(12)} \left(\ddot{a}_{\overline{30:30|}} - \frac{r-1}{2r}\left(1 - {}_{30}E_{30}\right) \right)$$

$$\Rightarrow P^{(12)} = \frac{5.10^6 \dfrac{M_{30} - M_{60} + D_{60}}{D_{30}}}{\left(\dfrac{N_{30} - N_{60}}{D_{30}} - \dfrac{11}{24}\left(1 - \dfrac{D_{60}}{D_{30}}\right)\right)}$$
$$= 132.546{,}215$$

Besarnya pembayaran tiap bulan adalah:

$$\frac{1}{12} P^{(12)} = \frac{1}{12}(132.546{,}215) = 11.045{,}52$$

Jadi, besarnya premi bersih yang dibayar Dimas tiap bulan adalah Rp 11.045,52

d. Besar premi tahunan yang dibayar 12 kali untuk asuransi jiwa seumur hidup yang tertunda selama 5 tahun dapat dihitung dengan menggunakan persamaan (4.27) dan tabel I pada lampiran, diperoleh:

$$5.10^6 \; {}_{5|}A_{30} = P^{(12)} \; {}_{5|}a_{30}^{(12)}$$

Dengan menggunkan (3.49), (3.51) dan (4.7) maka diperoleh:

$$5.10^6 \frac{M_{35}}{D_{30}} = P^{(12)} \; {}_5E_{30} \ddot{a}_{35}^{(12)}$$

$$5.10^6 \frac{M_{35}}{D_{30}} = P^{(12)} \; {}_5E_{30} \left(\ddot{a}_{35} - \frac{r-1}{2r}\right)$$

$$P^{(12)} = \frac{5.10^6 \dfrac{M_{35}}{D_{30}}}{\dfrac{D_{35}}{D_{30}}\left(\dfrac{N_{35}}{D_{35}} - \dfrac{11}{24}\right)} = 104.628{,}84$$

Besarnya pembayaran tiap bulan adalah:

$$\frac{1}{2} P^{(12)} = \frac{104.628{,}84}{12} = 8.719{,}07$$

Jadi, besar premi bersih yang harus dibayar Dimas tiap bulan adalah Rp 8.719,07.

e. Besar premi bersih tahunan yang dibayar 12 kali untuk asuransi berjangka selama 15 tahun yang tertunda selama 8 tahun dapat dihitung dengan menggunakan persamaan (4.28) dan tabel 1 pada lampiran yaitu:

$$5.10^6 \;{}_{8|}A^{1}_{30:\overline{15|}} = P^{(12)} \;{}_{8|}\ddot{a}^{(12)}_{30:\overline{15|}}$$

Dengan menggunakan persamaan $(4.8),(3.57)$ dan (3.60) maka diperoleh:

$$5.10^6 \frac{M_{38} - M_{53}}{D_{30}} = P^{(12)} \;{}_{8}E_{30}\left(a_{38:\overline{15|}} - \frac{11}{24}\left(1 - {}_{15}E_{38}\right)\right)$$

$$P^{(12)} = \frac{5.10^6 \dfrac{M_{38} - M_{53}}{D_{30}}}{\dfrac{D_{38}}{D_{30}}\left(\dfrac{N_{38} - N_{53}}{D_{38}} - \dfrac{11}{24}\left(1 - \dfrac{D_{53}}{D_{38}}\right)\right)}$$

$$= 43.134{,}669$$

Pembayaran tiap bulannya adalah:

$$\frac{1}{12} P^{(12)} = \frac{1}{12}(43.134{,}669) = 3.594{,}56$$

Jadi, besar premi bersih yang harus dibayar Dimas tiap bulan adalah Rp 3.594,56.

D. Premi Kotor Asuransi Jiwa

Dalam perusahaan asuransi jumlah premi yang diterima dari pemegang polis disebut dengan premi kotor atau *gross premi*. Premi kotor ini jumlahnya lebih besar dari premi bersih, selisih premi kotor dengan premi bersih disebut biaya. Biaya yang diterima oleh perusahaan asuransi jiwa digunakan untuk biaya pemeliharaan administrasi pemegang polis dan merupakan sumber pendapatan bunga yang digunakan untuk keperluan cadangan. Premi kotor dipengaruhi oleh tiga faktor yaitu mortalitas, tingkat bunga dan biaya. Premi kotor diperoleh dari premi bersih ditambah dengan biaya. Jika jangka waktu kontrak asuransinya pendek maka biayanya sangat besar, sebaliknya jika jangka waktu asuransinya panjang maka biayanya menjadi lebih murah. Untuk menetapkan alokasi biaya, aneka biaya asuransi dikelompokkan dalam tiga kelompok yaitu:

1. Biaya yang berkaitan dengan jumlah premi yaitu komisi agen, biaya pengumpulan premi, biaya mengadministrasikan polis dari tahun ke tahun, biaya pemeliharaan dan pajak premi.
2. Biaya yang berkaitan dengan jumlah santunan misalnya komisi, biaya permulaan tahun polis, biaya pemeriksaan kesehatan.
3. Jumlah yang berkaitan dengan jumlah polis misalnya biaya persiapan penerbitan polis, pembentukan catatan akuntansi, pengiriman tagihan premi.

Secara umum premi kotor tahunan dapat dinyatakan secara matematis adalah sebagai berikut:

$$P^* = P + kP = P(1+k) \qquad (4.29)$$

atau

$$P^* = P(1+k) + C \qquad (4.30)$$

Persamaan di atas menunjukkan bahwa premi kotor adalah premi bersih ditambah dengan $k\%$ dari premi bersih tersebut dan C menyatakan biaya-biaya yang lain. Andaikan macam-macam biaya yang mungkin dalam asuransi jiwa adalah:

a. Biaya permulaan tahun polis dengan santunan sebesar Rp 1 dinotasikan dengan α, misalnya $\alpha = 0{,}025$

b. Biaya pengumpulan premi yaitu biaya yang ada selama jangka pembayaran premi dengan besarnya santunan Rp 1 disimbolkan dengan β, misalnya $\beta = 3\%$

c. Biaya pemeliharaan yang terdiri atas:

1. Dalam masa pembayaran premi pada tiap akhir tahun polis dengan uang santunan Rp 1, dinyatakan dengan γ, misalnya $\gamma = 0{,}3\%$
2. Setelah masa pembayaran premi, pada tiap akhir tahun polis dengan besarnya santunan Rp 1, besarnya biaya adalah γ', misalnya $\gamma' = 0{,}002$.

1. Premi Kotor Tunggal

Premi kotor tunggal asuransi jiwa seumur hidup bagi (x) dengan santunan sebesar Rp 1 dinotasikan dengan A_x^*. Santunannya akan dibayar pada akhir tahun polis yaitu akhir tahun (x) meninggal. Besarnya premi kotor asuransi jiwa seumur hidup adalah:

$$A_x^* = A_x + \alpha + \gamma' \ddot{a}_x \qquad (4.31)$$

Sedangkan premi kotor tunggal asuransi endowment selama n tahun bagi (x) dengan santunan sebesar Rp 1 adalah:

$$A_{x:\overline{n|}}^* = A_{x:\overline{n|}} + \alpha + \gamma' \ddot{a}_{x:\overline{n|}} \qquad (4.32)$$

Contoh 4.16

Hitunglah premi kotor tunggal untuk asuransi endowment berjangka selama 10 tahun bagi seseorang yang berusia 35 tahun dengan besar santunan Rp 1.000.000 dan perincian biaya sebagai berikut:

Komisi : 5% dari premi kotor

Biaya : (per satu juta santunan) Rp 5.000 tahun pertama dan Rp 2.000 setelah itu.

Pajak : 2% dari premi kotor

Jawab:

$$A^*_{35:\overline{10|}} = 10^6 A_{35:\overline{10|}} + 0{,}05A^*_{35:\overline{10|}} + 5000\ddot{a}_{35:\overline{1|}} + 2000a_{35:\overline{9|}} + 0{,}02A^*_{35:\overline{10|}}$$

$$A^*_{35:\overline{10|}}(1-0{,}05-0{,}02) = 10^6 A_{35:\overline{10|}} + 5000\ddot{a}_{35:\overline{1|}} + 2000a_{35:\overline{9|}}$$

$$\Rightarrow 0{,}93A^*_{35:\overline{10|}} = 10^6 \frac{M_{35}-M_{45}+D_{45}}{D_{35}} + 5000\frac{N_{35}-N_{36}}{D_{35}} + 2000\frac{N_{36}-N_{45}}{D_{35}}$$

$$A^*_{x:\overline{n|}} = \frac{10^6(M_{35}-M_{45}+D_{45}) + 5000D_{35} + 2000(N_{36}-N_{45})}{0{,}93D_{35}}$$

$$= 867.456{,}4970$$

Jadi, besarnya premi kotor tunggal yang diserahkan oleh orang tersebut adalah Rp 867.456,4970.

2. Premi Kotor Tahunan

Premi kotor suatu asuransi endowment n tahun bagi (x) sebesar Rp 1 dan pembayaran preminya paling banyak m kali dan pembayaran preminya tahunan serta santunannya akan dibayar pada akhir tahun polis adalah:

$$P*\ddot{a}_{\overline{x:m}|} = A_{\overline{x:n}|} + \alpha + \beta P*\ddot{a}_{\overline{x:m}|} + \gamma\ddot{a}_{\overline{x:m}|} + \gamma'\left(\ddot{a}_{\overline{x:n}|} - \ddot{a}_{\overline{x:m}|}\right)$$
$$P* = \frac{A_{\overline{x:n}|} + \alpha + \gamma\ddot{a}_{\overline{x:m}|} + \gamma'\left(\ddot{a}_{\overline{x:n}|} - \ddot{a}_{\overline{x:m}|}\right)}{(1-\beta)\ddot{a}_{\overline{x:m}|}}$$
$$= \frac{1}{(1-\beta)}\left[\frac{A_{\overline{x:n}|}}{\ddot{a}_{\overline{x:m}|}} + \frac{\alpha}{\ddot{a}_{\overline{x:m}|}} + \frac{\gamma\ddot{a}_{\overline{x:m}|}}{\ddot{a}_{\overline{x:m}|}} + \gamma'\frac{\ddot{a}_{\overline{x:n}|} - \ddot{a}_{\overline{x:m}|}}{\ddot{a}_{\overline{x:m}|}}\right]$$

Dengan menggunakan (4.21) maka diperoleh:

$$P* = \frac{1}{(1-\beta)}\left[P + \frac{\alpha}{\ddot{a}_{\overline{x:m}|}} + \gamma + \gamma'\frac{\ddot{a}_{\overline{x:n}|} - \ddot{a}_{\overline{x:m}|}}{\ddot{a}_{\overline{x:m}|}}\right] \qquad (4.33)$$

3. Premi Kotor yang Dibayar Beberapa Kali Dalam Setahun

Jika preminya dibayar setiap $\frac{1}{r}$ tahun dan $P^{(r)}*$ menyatakan jumlah premi kotor setahun yang dibayar *r* kali, sehingga besar premi kotor setiap kali pembayaran adalah $\frac{1}{r}P^{(r)}*$. Besarnya premi kotor suatu asuransi endowment berjangka selama *n* tahun dengan pembayaran premi *r* kali dalam setahun selama *m* tahun serta besar santuan Rp 1 adalah:

$$P^{(r)}*\ddot{a}^{(r)}_{\overline{x:m}|} = A_{\overline{x:n}|} + \alpha + \beta P^{(r)}*\ddot{a}^{(r)}_{\overline{x:m}|} + \gamma\ddot{a}^{(r)}_{\overline{x:m}|} + \gamma'\left(\ddot{a}_{\overline{x:n}|} - \ddot{a}_{\overline{x:m}|}\right)$$
$$P^{(r)}*(1-\beta) = \frac{A_{\overline{x:n}|}}{\ddot{a}^{(r)}_{\overline{x:m}|}} + \frac{\alpha}{\ddot{a}^{(r)}_{\overline{x:m}|}} + \frac{\gamma\ddot{a}^{(r)}_{\overline{x:m}|}}{\ddot{a}^{(r)}_{\overline{x:m}|}} + \frac{\gamma'\left(\ddot{a}_{\overline{x:n}|} - \ddot{a}_{\overline{x:m}|}\right)}{\ddot{a}^{(r)}_{\overline{x:m}|}}$$

$$P^{(r)}* = {}_{m}P^{(r)} + \frac{\alpha}{\ddot{a}^{(r)}_{\overline{x:m}|}} + \gamma + \gamma'\frac{\left(\ddot{a}_{\overline{x:n}|} - \ddot{a}_{\overline{x:m}|}\right)}{\ddot{a}^{(r)}_{\overline{x:m}|}} \qquad (4.34)$$

Contoh 4.17

Hitunglah besar premi kotor $P*$ untuk asuransi seumur hidup bagi seseorang yang berusia 20 tahun dengan santunan Rp 10.000.000,00. Biaya permulaan 2% dari besar santunan, biaya tahun berikutnya 2,5% dari premi bersih, keuntungan 2% dari premi kotor dan beban tambahan untuk keadaan darurat 0,1% dari besar santunan yang dibayarkan tiap kali pembayaran premi?

Jawab:

Andaikan $P*$ menyatakan premi kotor tahunan dan P menyatakan premi bersih tahunan. Besar premi kotor dengan sistem pembayaran tersebut adalah:

$$P*\ddot{a}_{20} = 10^7 A_{20} + 0{,}02\left(10^7\right) + 0{,}025\left(P\ddot{a}_{20}\right) + 0{,}02\left(P*\ddot{a}_{20}\right) + 0{,}01\left(10^7 \ddot{a}_{20}\right)$$

$$\Rightarrow P*(1-0{,}02) = \frac{10^7 A_{20} + 0{,}02\left(10^7\right) + 0{,}025\left(P\ddot{a}_{20}\right) + 0{,}01\left(10^7 \ddot{a}_{20}\right)}{\ddot{a}_{20}}$$

$$P* = \frac{1}{0{,}98}\left[10^7 \frac{A_{20}}{\ddot{a}_{20}} + \frac{0{,}02\left(10^7\right)}{\ddot{a}_{20}} + \frac{0{,}025\left(P\ddot{a}_{20}\right)}{\ddot{a}_{20}} + \frac{0{,}01\left(10^7 \ddot{a}_{20}\right)}{\ddot{a}_{20}}\right]$$

$$= \frac{1}{0{,}98}\left[P + \frac{0{,}02\left(10^7\right)}{\ddot{a}_{20}} + 0{,}025P + 0{,}01\left(10^7\right)\right]$$

$$= \frac{1}{0{,}98}\left[1{,}025P + \frac{0{,}02\left(10^7\right)}{\ddot{a}_{20}} + 10.000\right]$$

Dengan menggunakan persamaan (3.23) dan (4.18) maka diperoleh:

$$P* = \frac{1}{0{,}98}\left[1{,}025\frac{10^7 A_{30}}{\ddot{a}_{20}} + \frac{0{,}02\left(10^7\right)}{\frac{N_{20}}{D_{20}}} + 10.000\right]$$

$$= \frac{1}{0{,}98}\left[1{,}025\frac{10^7 \frac{M_{20}}{D_{20}}}{\frac{N_{20}}{D_{20}}} + \frac{0{,}02\left(10^7\right)}{\frac{N_{20}}{D_{20}}} + 10.000\right]$$

$$= 148.373{,}93$$

Jadi, besar premi kotor tahunan yang harus dibayar oleh orang tersebut adalah Rp 148.373,93.

Contoh 4.18

Suatu asuransi berjangka selama 20 tahun bagi seseorang yang berusia 35 tahun dengan santunan Rp 1.000.000,00 dengan biaya sebagai berikut: biaya permulaan tahun polis 2% dari besarnya santunan, biaya pengumpulan premi 3% dari besarnya premi kotor, biaya pemeliharaan Rp 1.000,00 yang dibayar tiap kali pembayaran premi. Hitunglah besarnya premi kotor?

Jawab:

$$P^*\ddot{a}_{\overline{35:20|}} = 10^6 A_{\overline{35:20|}} + 0{,}02.10^6 + 0{,}03P^*\ddot{a}_{\overline{35:20|}} + 1000\ddot{a}_{\overline{35:20|}}$$

$$P^*(1-0{,}03) = \frac{10^6 A_{\overline{35:20|}}}{\ddot{a}_{\overline{35:20|}}} + \frac{0{,}02.10^6}{\ddot{a}_{\overline{35:20|}}} + \frac{1000\ddot{a}_{\overline{35:20|}}}{\ddot{a}_{\overline{35:20|}}}$$

$$P^* = \frac{100}{97}\left(10^6\frac{\dfrac{M_{35}-M_{55}}{D_{35}}}{\dfrac{N_{35}-N_{55}}{D_{35}}} + \frac{0{,}02.10^6}{\dfrac{N_{35}-N_{55}}{D_{35}}} + 1000\right)$$

$$P^* = \frac{100}{97}\left(10^6\frac{M_{35}-M_{55}}{N_{35}-N_{55}} + \frac{0{,}02.10^6 D_{35}}{N_{35}-N_{55}} + 1000\right)$$

$$= 10.938{,}2524$$

Jadi, besar premi kotor yang harus dibayar orang tersebut adalah Rp 10.938,2524.

BAB V
PENUTUP

Asuransi jiwa merupakan usaha kerja sama dari sekelompok orang yang bertujuan membantu mengurangi kesulitan keuangan dari para anggotanya yang mengalami kematian, yang mengakibatkan hilangnya pendapatan seseorang atau keluarga tertentu. Setiap orang yang bergabung dalam usaha kerja sama tersebut mempunyai kontrak tertulis yang disebut polis asuransi jiwa. Dalam polis tersebut berisi besar premi yang akan dibayar, jadwal pembayarannya serta besar santunan yang akan diterima bila pemegang polis meninggal dunia. Besarnya santunan tergantung pada besarnya premi yang dibayarkan pemegang polis kepada perusahaan asuransi jiwa. Ada dua jenis premi dalam asuransi jiwa yaitu premi bersih dan premi kotor. Premi kotor diperoleh dari premi bersih ditambah dengan biaya-biaya asuransi jiwa.

Premi bersih terdiri dari: premi bersih tunggal yaitu premi bersih yang dibayarkan sekaligus dan premi bersih datar yaitu premi yang dibayarkan setiap periode tertentu. Besar premi bersih tunggal untuk setiap jenis asuransi berbeda-beda.

1. Asuransi Jiwa Seumur Hidup.

Andaikan (x) atau seseorang yang tepat berusia x tahun membeli polis asuransi jiwa seumur hidup dengan santunan sebesar Rp 1 dibayar pada akhir tahun (x) meninggal, maka premi bersih tunggal yang akan dibayar oleh (x) dapat dihitung dengan menggunakan persamaan $A_x = \frac{vd_x + v^2 d_{x+1} + ...}{l_x}$, dimana v menyatakan nilai tunai dari pembayaran sebesar Rp 1 yang dilakukan satu tahun kemudian, $\frac{d_x}{l_x}$ menyatakan peluang (x) meninggal sebelum mencapai usia $x+1$ tahun, $\frac{d_{x+1}}{l_x}$ menyatakan peluang (x) meninggal antara usia $x+1$ dan $x+2$ tahun. Dalam kontak asuransi jiwa seumur hidup, uang santunan dibayar tanpa mempedulikan kapan (x) meninggal dunia.

2. Asuransi Jiwa Berjangka.

Perhitungan premi bersih tunggal pada asuransi jiwa berjangka sama dengan perhitungan premi pada asuransi jiwa seumur hidup tetapi hanya sampai pada jangka waktu tertentu, misalnya selama n tahun. Andaikan (x) membeli polis asuransi jiwa berjangka selama n tahun dengan santunan sebesar Rp 1 dibayar pada akhir tahun (x) meninggal, maka besar premi bersih tunggalnya dihitung dengan persamaan $A^1_{x:\overline{n|}} = \frac{vd_x + v^2 d_{x+1} + .. + v^n d_{x+n-1}}{l_x}$. Dalam kontrak asuransi jiwa ini uang santunan akan diterima oleh pewaris bila (x) meninggal dalam jangka waktu polis, namun bila tetap hidup maka dia tidak mendapatkan uang santunan.

3. Asuransi Jiwa Endowment.

Dalam kontrak asuransi jiwa berjangka uang santunan akan diterima bila (x) meninggal dalam jangka waktu polis, namun dalam asuransi jiwa endowment jika (x) meninggal selama jangka waktu asuransi misalnya n tahun, maka kepada pewarisnya akan dibayarkan Rp 1 sedangkan bila (x) mencapai usia $x+n$ tahun, maka kepadanya akan dibayarkan Rp 1 pada akhir tahun $x+n$. Premi bersih tunggal pada asuransi jiwa endowment dihitung dengan menggunakan persamaan $A_{x:\overline{n|}} = \frac{vd_x + v^2 d_{x+1} + ... + v^n d_{x+n-1}}{l_x} + \frac{v^n l_{x+n}}{l_x}$ dengan $\frac{l_{x+n}}{l_x}$ menyatakan peluang (x) akan mencapai usia $x+n$ tahun.

4. Asuransi Jiwa Tertunda Seumur Hidup dan Tertunda Berjangka.

Jika (x) membeli polis asuransi jiwa tertunda seumur hidup, misalnya tertunda selama n tahun dengan santunan sebesar Rp 1, maka besar premi bersih tunggal yang akan dibayar oleh seseorang yang tepat berusia x tahun dapat dihitung dengan persamaan ${}_{n|}A_x = \frac{v^{n+1} d_{x+n} + v^{n+2} d_{x+n+1} + ..}{l_x}$. Dalam kontrak asuransi jiwa tertunda seumur hidup, uang santunan akan diterima pewaris (x) bila dia meninggal setelah mencapai usia $x+n$ tahun. Sedangkan dalam asuransi jiwa tertunda berjangka, perhitungan premi bersih tunggalnya sama dengan perhitungan premi pada asuransi jiwa tertunda seumur hidup hanya saja dalam asuransi jiwa berjangka hanya sampai pada jangka waktu tertentu. Andaikan (x) membeli polis asuransi jiwa berjangka selama m tahun yang ditunda terlebih dahulu selama n tahun, maka premi bersih tunggalnya dapat dihitung dengan menggunakan persamaan ${}_{n|}A^1_{x:\overline{m|}} = \frac{v^{n+1} d_{x+n} + .. + v^{m+n} d_{x+m+n-1}}{l_x}$. Uang santunan akan diterima pewaris (x) bila dia meninggal antara usia $x+n$ dan $x+m+n$ tahun. Kedua jenis asuransi ini digunakan untuk menghitung besar premi yang santunannya berbeda atau menghitung besar santunan yang preminya berbeda antara jangka waktu yang satu dengan jangka waktu yang lain.

Pemegang polis jarang membeli polis asuransi jiwa dengan premi tunggal karena jumlahnya cukup besar, biasanya mereka membeli polis asuransi dengan premi datar yang pembayarannya dilakukan pada setiap periode waktu tertentu misalnya tahunan, bulanan maupun harian serta besar preminya lebih kecil dari premi tunggal. Konsep matematika yang menjelaskan sistem pembayaran berkala seperti itu disebut anuitas. Anuitas terdiri atas anuitas tentu dan anuitas hidup. Anuitas yang dibicarakan dalam asuransi jiwa adalah anuitas hidup karena dikaitkan dengan hidup matinya anuitan. Nilai tunai untuk berbagai jenis anuitas adalah sebagai berikut:

1. Anuitas Seumur Hidup

Andaikan seseorang yang tepat berusia x tahun melakukan suatu pembayaran dengan sistem anuitas yaitu sebesar Rp 1 setiap awal tahun sepanjang hidupnya, maka nilai tunai seluruh pembayaran tersebut dapat dihitung dengan persamaan $\ddot{a}_x = \frac{l_x + vl_{x+1} + v^2 l_{x+2} + \dots}{l_x}$ dengan $\frac{l_{x+1}}{l_x}$ menyatakan peluang (x) akan mencapai usia $x+1$ tahun, $\frac{l_{x+2}}{l_x}$ menyatakan peluang (x) akan mencapai usia $x+2$ tahun. Oleh karena pembayaran dilakukan setiap permulaan tahun maka nilai tunainya disebut nilai tunai anuitas awal seumur hidup. Jika (x) melakukan pembayaran berkala sebesar Rp $\frac{1}{r}$ yang dibayarkan setiap awal periode $\frac{1}{r}$ tahun sepanjang hidupnya, maka nilai tunai tunai seluruh pembayaran tersebut dapat dihitung dengan persamaan $\ddot{a}_x^{(r)} = \frac{1}{r}\left(1 + v^{\frac{1}{r}}\,{}_{\frac{1}{r}}p_x + v^{\frac{2}{r}}\,{}_{\frac{2}{r}}p_x + \ldots\right)$ dengan ${}_{\frac{1}{r}}p_x$ menyatakan peluang seorang yang berusia x tahun akan mencapai usia $x + \frac{1}{r}$ tahun.

2. Anuitas Hidup Berjangka

Andaikan (x) melakukan serangkaian pembayaran berkala sebesar Rp 1 selama jangka waktu n tahun, maka nilai tunai anuitas awal berjangka selama n tahun dapat dihitung dengan persamaan $\ddot{a}_x = \frac{l_x + vl_{x+1} + v^2 l_{x+2} + \ldots + v^{n-1} l_{x+n-1}}{l_x}$ sedangkan jika (x) melakukan pembayaran berkala sebesar Rp $\frac{1}{r}$ yang dibayarkan setiap awal periode $\frac{1}{r}$ tahun selama n tahun, maka nilai tunai tunainya dapat dihitung dengan persamaan $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(r)} = \frac{1}{r}\left(1 + v^{\frac{1}{r}}\,{}_{\frac{1}{r}}p_x + \ldots + v^{n-\frac{1}{r}}\,{}_{n-\frac{1}{r}}p_x\right)$.

3. Endowment murni

Jika seseorang yang tepat berusia x tahun melakukan sistem pembayaran berkala dengan sistem endowment murni sebesar Rp 1, maka besar nilai tunainya dapat dihitung dengan persamaan ${}_nE_x = \frac{v^n l_{x+n}}{l_x}$, dimana $\frac{l_{x+n}}{l_x}$ menyatakan peluang (x) akan menacapai usia $x + n$ tahun.

4. Anuitas Hidup Tertunda Seumur Hidup

Andaikan (x) melakukan pembayaran anuitas sebesar Rp 1 setiap permulaan tahun yang ditunda terlebih dahulu selama n tahun maka pembayaran pertama dilakukan pada awal tahun saat (x) berusia $x + n$. Nilai tunai dari anuitas awal seumur hidup yang tertunda selama n tahun dapat dihitung dengan menggunakan persamaan ${}_{n|}\ddot{a}_x = \dfrac{v^n l_{x+n} + v^{n+1} l_{x+n+1} + ..}{l_x}$. Tetapi jika (x) melakukan pembayaran berkala sebesar Rp $\frac{1}{r}$ yang dibayarkan setiap awal periode $\frac{1}{r}$ tahun sepanjang hidupnya yang ditunda terlebih dahulu selama n tahun, maka nilai tunai tunai anuitas awalnya dihitung dengan persamaan ${}_{n|}\ddot{a}_x^{(r)} = \dfrac{1}{r}\left(v^n {}_n p_x + v^{n+\frac{1}{r}} {}_{n+\frac{1}{r}} p_x + ..\right)$.

5. Anuitas Hidup Tertunda Berjangka

Jika (x) melakukan pembayaran berkala sebesar Rp 1 setiap awal tahun selama m tahun yang tertunda terlebih dahulu selama n tahun, maka nilai tunai anuitas awal dari seluruh pembayaran tersebut dapat dihitung dengan menggunakan persamaan ${}_{n|m}\ddot{a}_x = v^n {}_n p_x + ... + v^{n+m-1} {}_{n+m-1} p_x$ sedangkan jika (x) melakukan pembayaran berkala sebesar Rp $\frac{1}{r}$ setiap awal periode $\frac{1}{r}$ tahun selama m tahun yang tertunda terlebih dahulu selama n tahun, maka nilai tunai anuitas awalnya dapat dihitung dengan persamaan ${}_{n|m}\ddot{a}_x^{(r)} = \dfrac{1}{r}\left(v^n {}_n p_x + ... + v^{n+m-\frac{1}{r}} {}_{n+m-\frac{1}{r}} p_x \right)$.

Dalam perhitungan besar premi bersih datar pada berbagai jenis asuransi jiwa, selalu menggunakan persamaan dasar bahwa nilai tunai premi yang akan datang sama dengan nilai tunai santunan yang akan datang. Misalkan seseorang yang tepat berusia x tahun membeli polis asuransi jiwa seumur hidup dengan santunan sebesar Rp 1, premi dibayarkan setiap permulaan tahun sebesar P rupiah, maka dengan menggunakan persamaan dasar tersebut, besar nilai P dapat dihitung dengan persamaan $P\ddot{a}_x = A_x$. Namun, jika orang tersebut membayar premi setiap

$\frac{1}{r}$ tahun sebesar $\dfrac{P^{(r)}}{r}$ rupiah dengan $P^{(r)}$ adalah besar premi tahunan yang dibayar r kali dalam setahun, maka besar nilai $P^{(r)}$ dapat dihitung dengan menggunakan persamaan $P^{(r)}a_x^{(r)} = A_x$. Dengan cara yang sama dapat ditentukan besar premi tahunan atau premi $\frac{1}{r}$ tahun untuk berbagai jenis asuransi jiwa.

Premi yang biasa diserahkan pemegang polis kepada perusahaan asuransi jiwa adalah premi kotor. Premi kotor diperoleh dari premi bersih ditambah dengan sejumlah biaya asuransi, misalnya biaya permulaan tahun yaitu biaya pemeriksaan kesehatan, biaya mengeluarkan polis dan biaya komisi bagi agen, biaya pada masa pembayaran premi yaitu biaya bagi komisi, biaya mengadministrasikan polis dari tahun ke tahun, biaya penagihan premi dan biaya untuk pajak serta biaya setelah masa pembayaran premi. Andaikan P adalah premi bersih dan C adalah biaya-biaya asuransi, maka premi kotor $P*$ secara matematis dapat ditulis $P* = P + C$.

Besarnya premi yang akan dibayarkan oleh pemegang polis kepada perusahaan asuransi jiwa tergantung pada peluang meninggal, tingkat bunga dan besarnya biaya asuransi. Premi yang tergantung pada peluang meninggal dan tingkat bunga disebut premi bersih sedangkan premi yang tergantung pada peluang meninggal, tingkat bunga dan besar biaya asuransi disebut premi kotor.

DAFTAR PUSTAKA

Larson, Robert and Gaumnitz, Erwin. (1951). *Life Insurance Mathematics*. New York.

Sembiring, RK. (1986). *Asuransi I* modul 1-5. Jakarta : Karunia Universitas Terbuka Jakarta.

Sembiring, RK. (1986). *Asuransi II* modul 6-9. Jakarta : Karunia Universitas Terbuka Jakarta.

Futami, Takashi. (1988). *Matematika Asuransi Jiwa Bagian I* (Terjamahan). Tokyo, Japan: The Kyoei Life Insurance co.LTD.

Futami, Takashi. (1988). *Matematika Asuransi Jiwa Bagian II* (Terjamahan). Tokyo, Japan: The Kyoei Life Insurance co.LTD.

Walpole, Ronald E. dan Myers, Raymond H. (1986). *Ilmu Peluang dan Statistika untuk Insinyur dan Ilmuwan* (Terjemahan). Macmillan Publishing Co.,Inc.

LAMPIRAN

TABEL I

TABEL MORTALITAS DAN NILAI SIMBOL KOMUTASI,CSO 2,5%

x	lx	dx	qx	ex	exo	Dx	Nx	Cx	Mx
0	1023102	23102	0.0226	61.827	62.33	1023102.0000	31374229.7785	22538.5366	257876.8835
1	1000000	5770	0.0058	62.256	62.76	975609.7561	30351127.7785	5491.9691	235338.3469
2	994230	4116	0.0041	61.617	62.12	946322.4271	29375518.0224	3822.1152	229846.3778
3	990114	3347	0.0034	60.873	61.37	919419.2771	28429195.5953	3032.2168	226024.2626
4	986767	2950	0.0030	60.079	60.58	893962.1999	27509776.3181	2607.3701	222992.0458
5	983817	2715	0.0028	59.260	59.76	869550.8737	26615814.1182	2341.1360	220384.6757
6	981102	2561	0.0026	58.424	58.92	846001.1798	25746263.2446	2154.4803	218043.5397
7	978541	2417	0.0025	57.576	58.08	823212.5244	24900262.0648	1983.7445	215889.0594
8	976124	2255	0.0023	56.719	57.22	801150.4257	24077049.5404	1805.6425	213905.3149
9	973869	2065	0.0021	55.850	56.35	779804.5289	23275899.1147	1613.1747	212099.6725
10	971804	1914	0.0020	54.969	55.47	759171.7316	22496094.5857	1458.7451	210486.4978
11	969890	1852	0.0019	54.078	54.58	739196.6028	21736922.8541	1377.0655	209027.7527
12	968038	1859	0.0019	53.181	53.68	719790.3518	20997726.2514	1348.5565	207650.6872
13	966179	1913	0.0020	52.283	52.78	700885.9331	20277935.8995	1353.8821	206302.1307
14	964266	1996	0.0021	51.387	51.89	682437.2721	19577049.9664	1378.1693	204948.2486
15	962270	2069	0.0022	50.494	50.99	664414.2914	18894612.6942	1393.7300	203570.0793
16	960201	2103	0.0022	49.602	50.10	646815.3348	18230198.4029	1382.0812	202176.3493
17	958098	2156	0.0023	48.711	49.21	629657.2698	17583383.0681	1382.3537	200794.2681
18	955942	2199	0.0023	47.821	48.32	612917.4217	16953725.7983	1375.5354	199411.9144
19	953743	2260	0.0024	46.931	47.43	596592.6809	16340808.3766	1379.2123	198036.3790
20	951483	2312	0.0024	46.043	46.54	580662.4275	15744215.6957	1376.5331	196657.1667
21	949171	2382	0.0025	45.155	45.66	565123.3962	15163553.2682	1383.6196	195280.6336
22	946789	2452	0.0026	44.269	44.77	549956.2791	14598429.8720	1389.5416	193897.0139
23	944337	2531	0.0027	43.384	43.88	535153.1697	14048473.5929	1399.3275	192507.4723
24	941806	2609	0.0028	42.500	43.00	520701.3258	13513320.4232	1407.2700	191108.1448
25	939197	2705	0.0029	41.618	42.12	506594.0234	12992619.0974	1423.4649	189700.8747
26	936492	2800	0.0030	40.738	41.24	492814.6067	12486025.0740	1437.5192	188277.4098
27	933692	2904	0.0031	39.861	40.36	479357.2190	11993210.4673	1454.5491	186839.8906
28	930788	3025	0.0032	38.985	39.49	466211.0305	11513853.2482	1478.2003	185385.3415
29	927763	3154	0.0034	38.112	38.61	453361.8294	11047642.2178	1503.6464	183907.1412
30	924609	3292	0.0036	37.242	37.74	440800.5774	10594280.3883	1531.1580	182403.4948
31	921317	3437	0.0037	36.375	36.88	428518.1858	10153479.8109	1559.6094	180872.3368
32	917880	3598	0.0039	35.511	36.01	416506.9134	9724961.6251	1592.8453	179312.7274

33	914282	3767	0.0041	34.651	35.15	404755.3629	9308454.7117	1626.9874	177719.8821
34	910515	3961	0.0044	33.795	34.29	393256.2934	8903699.3488	1669.0508	176092.8947
35	906554	4161	0.0046	32.942	33.44	381995.6257	8510443.0554	1710.5610	174423.8439
x	**lx**	**dx**	**qx**	**ex**	**exo**	**Dx**	**Nx**	**Cx**	**Mx**
36	902393	4386	0.0049	32.094	32.59	370968.0983	8128447.4297	1759.0801	172713.2829
37	898007	4625	0.0052	31.251	31.75	360161.0158	7757479.3315	1809.6928	170954.2028
38	893382	4878	0.0055	30.413	30.91	349566.9080	7397318.3157	1862.1345	169144.5100
39	888504	5162	0.0058	29.580	30.08	339178.7513	7047751.4077	1922.4869	167282.3756
40	883342	5459	0.0062	28.752	29.25	328983.6120	6708572.6563	1983.5110	165359.8887
41	877883	5785	0.0066	27.931	28.43	318976.1105	6379589.0443	2050.6947	163376.3777
42	872098	6131	0.0070	27.117	27.62	309145.5106	6060612.9339	2120.3380	161325.6829
43	865967	6503	0.0075	26.308	26.81	299485.0382	5751467.4233	2194.1367	159205.3449
44	859464	6910	0.0080	25.508	26.01	289986.3883	5451982.3851	2274.5951	157011.2082
45	852554	7340	0.0086	24.714	25.21	280638.9545	5161995.9968	2357.2099	154736.6131
46	845214	7801	0.0092	23.929	24.43	271436.8921	4881357.0423	2444.1542	152379.4032
47	837413	8299	0.0099	23.152	23.65	262372.3258	4609920.1502	2536.7649	149935.2490
48	829114	8822	0.0106	22.384	22.88	253436.2359	4347547.8244	2630.8595	147398.4841
49	820292	9392	0.0114	21.624	22.12	244624.0048	4094111.5885	2732.5292	144767.6246
50	810900	9990	0.0123	20.875	21.37	235925.0365	3849487.5837	2835.6221	142035.0954
51	800910	10628	0.0133	20.135	20.64	227335.1452	3613562.5472	2943.1375	139199.4733
52	790282	11301	0.0143	19.406	19.91	218847.2481	3386227.4021	3053.1772	136256.3358
53	778981	12020	0.0154	18.687	19.19	210456.3331	3167380.1540	3168.2230	133203.1586
54	766961	12770	0.0167	17.980	18.48	202155.0289	2956923.8209	3283.8121	130034.9357
55	754191	13560	0.0180	17.285	17.78	193940.6063	2754768.7920	3401.9132	126751.1236
56	740631	14390	0.0194	16.601	17.10	185808.4344	2560828.1857	3522.0901	123349.2104
57	726241	15251	0.0210	15.930	16.43	177754.4312	2375019.7513	3641.7835	119827.1202
58	710990	16147	0.0227	15.272	15.77	169777.1738	2197265.3200	3761.6968	116185.3367
59	694843	17072	0.0246	14.627	15.13	161874.5703	2027488.1463	3880.1854	112423.6399
60	677771	18022	0.0266	13.995	14.50	154046.2246	1865613.5760	3996.1998	108543.4545
61	659749	18988	0.0288	13.377	13.88	146292.7998	1711567.3513	4107.7080	104547.2547
62	640761	19979	0.0312	12.774	13.27	138616.9747	1565274.5515	4216.6760	100439.5466
63	620782	20958	0.0338	12.185	12.69	131019.3969	1426657.5768	4315.4138	96222.8707
64	599824	21942	0.0366	11.611	12.11	123508.3880	1295638.1799	4407.8313	91907.4568
65	577882	22907	0.0396	11.052	11.55	116088.1571	1172129.7918	4489.4496	87499.6256
66	554975	23842	0.0430	10.508	11.01	108767.2890	1056041.6348	4558.7282	83010.1760
67	531133	24730	0.0466	9.979	10.48	101555.7001	947274.3457	4613.1892	78451.4477
68	506403	25553	0.0505	9.467	9.97	94465.5425	845718.6457	4650.4522	73838.2585
69	480850	26302	0.0547	8.970	9.47	87511.0527	751253.1031	4670.0141	69187.8063
70	454548	26955	0.0593	8.489	8.99	80706.6227	663742.0504	4669.2260	64517.7922

71	427593	27481	0.0643	8.024	8.52	74068.9425	583035.4277	4644.2354	59848.5662
72	400112	27872	0.0697	7.575	8.08	67618.1475	508966.4852	4595.4279	55204.3308
73	372240	28104	0.0755	7.142	7.64	61373.4965	441348.3377	4520.6626	50608.9029
74	344136	28154	0.0818	6.726	7.23	55355.9193	379974.8412	4418.2491	46088.2402
75	315982	28009	0.0886	6.325	6.82	49587.5258	324618.9219	4288.2869	41669.9911
76	287973	27651	0.0960	5.940	6.44	44089.7870	275031.3962	4130.2202	37381.7042
x	**lx**	**dx**	**qx**	**ex**	**exo**	**Dx**	**Nx**	**Cx**	**Mx**
77	260322	27071	0.1040	5.571	6.07	38884.2062	230941.6091	3944.9618	33251.4840
78	233251	26262	0.1126	5.218	5.72	33990.8491	192057.4030	3733.7259	29306.5222
79	206989	25224	0.1219	4.880	5.38	29428.0781	158066.5539	3498.6841	25572.7963
80	181765	23966	0.1319	4.557	5.06	25211.6361	128638.4757	3243.1158	22074.1123
81	157799	22502	0.1426	4.249	4.75	21353.6023	103426.8397	2970.7367	18830.9965
82	135297	20857	0.1542	3.956	4.46	17862.0461	82073.2374	2686.4021	15860.2598
83	114440	19062	0.1666	3.676	4.18	14739.9843	64211.1913	2395.3213	13173.8577
84	95378	17157	0.1799	3.411	3.91	11985.1512	49471.2070	2103.3560	10778.5364
85	78221	15185	0.1941	3.159	3.66	9589.4744	37486.0558	1816.1946	8675.1804
86	63036	13198	0.2094	2.921	3.42	7539.3902	27896.5813	1540.0394	6858.9858
87	49838	11245	0.2256	2.694	3.19	5815.4633	20357.1911	1280.1454	5318.9464
88	38593	9378	0.2430	2.479	2.98	4393.4773	14541.7278	1041.5646	4038.8010
89	29215	7638	0.2614	2.275	2.77	3244.7547	10148.2505	827.6215	2997.2364
90	21577	6063	0.2810	2.080	2.58	2337.9928	6903.4958	640.9377	2169.6149
91	15514	4681	0.3017	1.892	2.39	1640.0309	4565.5030	482.7731	1528.6772
92	10833	3506	0.3236	1.710	2.21	1117.2571	2925.4721	352.7706	1045.9041
93	7327	2540	0.3467	1.529	2.03	737.2363	1808.2150	249.3391	693.1335
94	4787	1776	0.3710	1.340	1.84	469.9158	1070.9787	170.0888	443.7944
95	3011	1193	0.3962	1.130	1.63	288.3657	601.0628	111.4678	273.7056
96	1818	813	0.4472	0.871	1.37	169.8646	312.6972	74.1098	162.2378
97	1005	551	0.5483	0.576	1.08	91.6117	142.8326	49.0019	88.1280
98	454	329	0.7247	0.275	0.78	40.3754	51.2209	28.5452	39.1261
99	125	125	1.0000	0.000	0.50	10.8454	10.8454	10.5809	10.5809
100	0								