

**PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI**

**PELABELAN TOTAL TAK AJAIB TITIK PADA GRAF SIKEL  
DENGAN TAMBAHAN SATU ANTING**

Skripsi

Diajukan untuk Memenuhi Salah Satu Syarat Memperoleh Gelar Sarjana Program Studi

Pendidikan Matematika pada Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan



Oleh:

Cosmas Wenny Septian

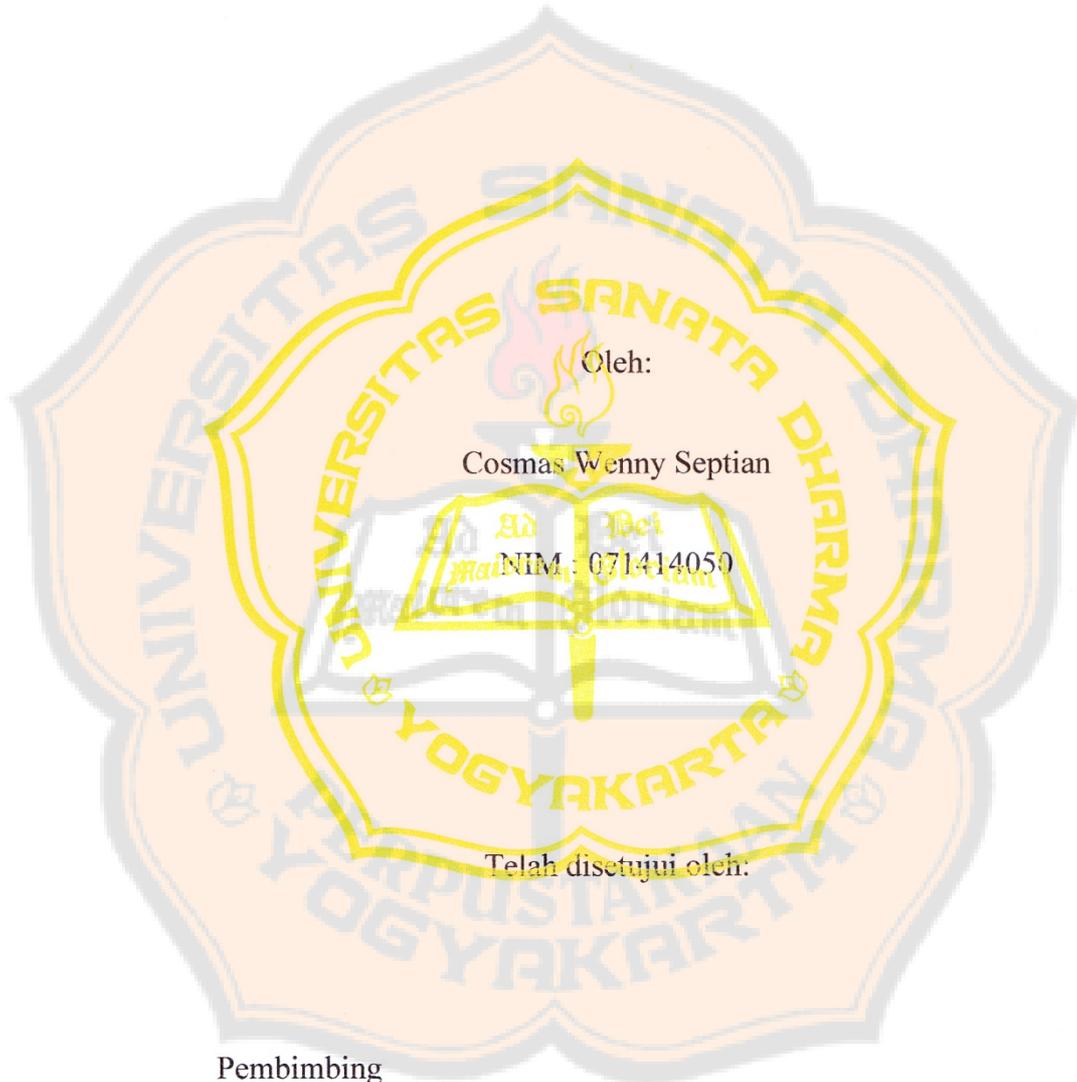
071414050

**PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA  
JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN  
UNIVERSITAS SANATA DHARMA  
YOGYAKARTA  
2012**

SKRIPSI

PELABELAN TOTAL TAK AJAIB TITIK PADA GRAF SIKEL

DENGAN TAMBAHAN SATU ANTING



D. Arif Budi Prasetyo, S.Si., M.Si.

Tanggal: 6 Desember 2011

SKRIPSI

PELABELAN TOTAL TAK AJAIB TITIK PADA GRAF SIKEL

DENGAN TAMBAHAN SATU ANTING

Dipersiapkan dan ditulis oleh:

Cosmas Wenny Septian

NIM : 071414050

Telah dipertahankan di depan Panitia Penguji pada tanggal 12 Januari 2012 dan

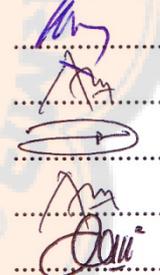
dinyatakan memenuhi syarat

Susunan Panitia Penguji

Nama Lengkap

Ketua	Drs. Aufridus Atmadi, M.Si.
Sekretaris	Dr. Marcellinus Andy Rudhito, S.Pd.
Anggota	D. Arif Budi Prasetyo, S.Si., M.Si.
Anggota	Dr. Marcellinus Andy Rudhito, S.Pd.
Anggota	Ch. Enny Murwaningtyas, S.Si., M.Si.

Tanda Tangan



Yogyakarta, 12 Januari 2012

Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan

Universitas Sanata Dharma

Dekan,

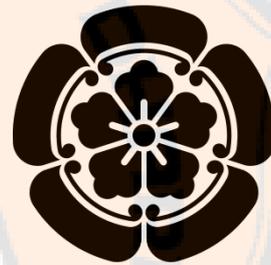


(R. Rohandi, Ph.D.)

**HALAMAN PERSEMBAHAN**

*People who are successful will take advantage of the mistakes  
he did, and will try again to perform in a different way.*

*~Dale Carnegie ~*



*I dedicate this thesis with much love to:*

*My Parents, F. Winarto and C. Sumini  
And My Grandpa Redo W. and My Grandma Tukiye  
And My Sister E. Irene and My Brother P. Noor  
also My Lovely Girlfriend Fransisca H. T.*

**PERNYATAAN KEASLIAN KARYA**

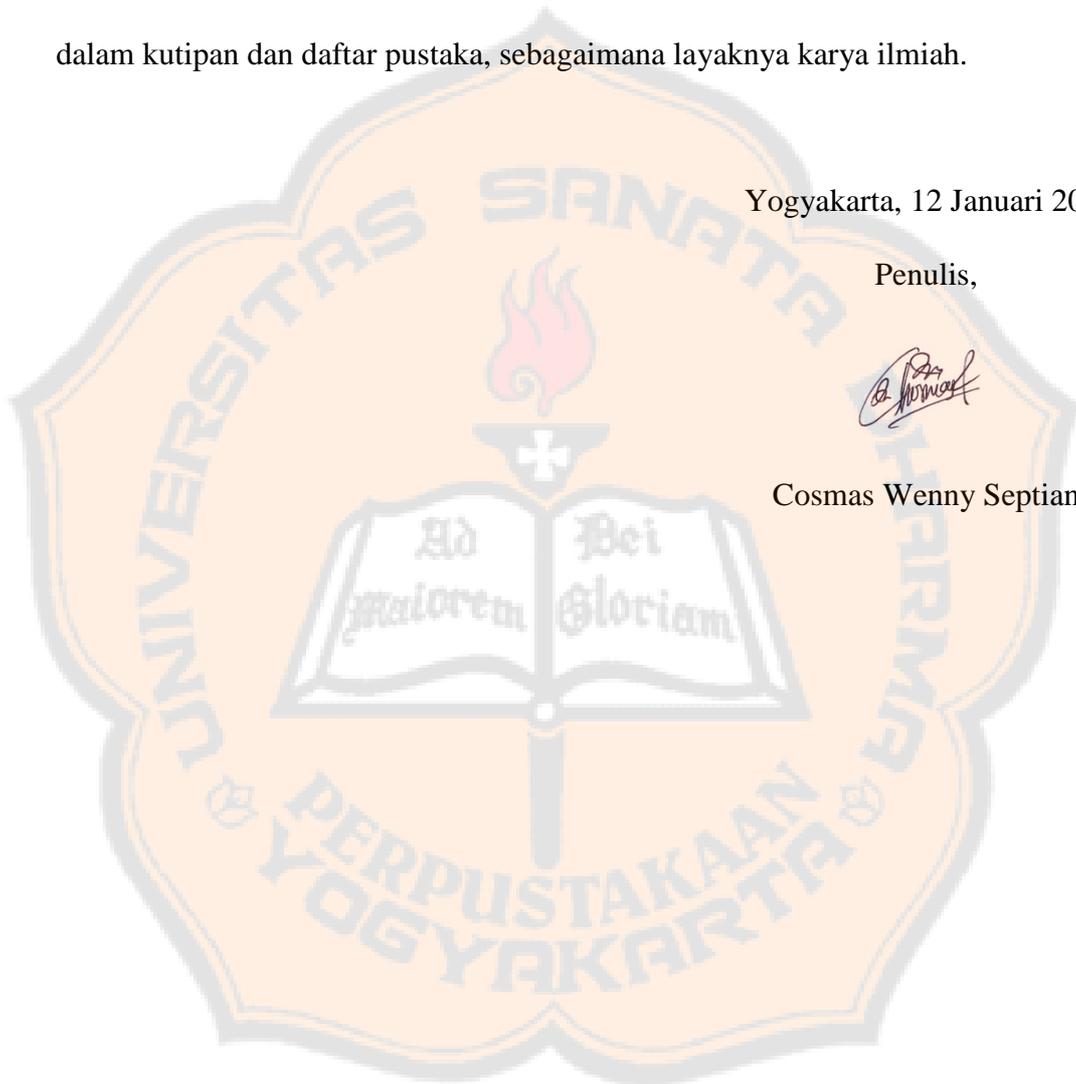
Saya menyatakan dengan sesungguhnya bahwa skripsi yang saya tulis ini tidak memuat karya atau bagian dari orang lain, kecuali yang telah disebutkan dalam kutipan dan daftar pustaka, sebagaimana layaknya karya ilmiah.

Yogyakarta, 12 Januari 2012

Penulis,



Cosmas Wenny Septian



**LEMBAR PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI KARYA ILMIAH  
UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS**

Yang bertanda tangan di bawah ini, saya mahasiswa Universitas Sanata Dharma:

Nama : Cosmas Wenny Septian

NIM : 071414050

Demi pengembangan ilmu pengetahuan, saya memberikan kepada Perpustakaan Universitas Sanata Dharma karya ilmiah saya yang berjudul:

**Pelabelan Total Tak Ajaib Titik Pada Graf Sikel**

**Dengan Tambahkan Satu Anting**

Dengan demikian saya memberikan kepada Perpustakaan Universitas Sanata Dharma hak untuk menyimpan, mengalihkan dalam bentuk media lain, mengelolanya dalam bentuk pangkalan data, mendistribusikan secara terbatas, dan mempublikasikannya di Internet atau media lain untuk kepentingan akademis tanpa perlu meminta ijin dari saya maupun memberikan royalti kepada saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya.

Dibuat di Yogyakarta

Pada Tanggal : 12 Januari 2012

Yang menyatakan,



(Cosmas Wenny Septian)

ABSTRAK

**Cosmas Wenny Septian, 2011. *Pelabelan Total Tak Ajaib Titik Pada Graf Sikel Dengan Tambahan Satu Anting*. Program Studi Pendidikan Matematika, Jurusan Pendidikan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Universitas Sanata Dharma, Yogyakarta.**

Skripsi ini mengkaji tentang graf dan pelabelan graf (*graph labeling*). Teori graf diperkenalkan oleh Leonard Euler pada tahun 1736. Pelabelan graf merupakan salah satu bidang dalam graf yang berkembang saat ini. Salah satu jenis pelabelan graf yaitu  $(a, d)$  *vertex antimagic total labeling*. Definisi dari  $(a, d)$  *vertex antimagic total labeling* pada graf  $G=(V,E)$  adalah pemetaan satu-satu (*bijektif*) dari  $V(G) \cup E(G)$  ke himpunan bilangan bulat positif  $\{1, 2, \dots, p + q\}$ , sedemikian hingga himpunan bobot titik dari semua titik di  $G$  adalah  $\{a, a + d, a + 2d, \dots, a + (p - 1)d\}$ . Dimana  $p$  adalah banyaknya unsur di  $V$  dan  $q$  adalah banyaknya unsur di  $E$ . Skripsi ini bertujuan untuk membuktikan bahwa graf baru yaitu graf sikel dengan tambahan satu anting  $C_p + A_1$  memenuhi  $(a, d)$  *vertex antimagic total labeling* dan mengetahui bagaimana bentuk barisan yaitu suku pertama dan beda dari  $(a, d)$  *vertex antimagic total labeling*.

Dalam skripsi ini dibahas mengenai *vertex antimagic total labeling*. Skripsi ini mengkaji beberapa jurnal, makalah, dan hasil penelitian sebelumnya untuk mendapatkan teori-teori yang mendukung. Tujuan dari skripsi ini adalah untuk meneliti sejauh mana graf sikel dengan tambahan satu anting  $C_p + A_1$  memenuhi  $(a, d)$  *vertex antimagic total labeling*.

Dari hasil analisa diperoleh bahwa sifat *vertex antimagic total labeling* dimiliki oleh graf sikel dengan tambahan satu anting  $C_p + A_1$  dengan  $p \geq 3$  dan  $p$  ganjil. Hasil dari penelitian ini diperoleh bahwa graf sikel dengan tambahan satu anting  $C_p + A_1$  memenuhi  $(a, d)$  *vertex antimagic total labeling*, batasan dan pola pelabelannya. Untuk  $C_p + A_1$  dengan  $p \geq 3$  dan  $p$  ganjil terdapat  $(2p+4, 1)$  *vertex antimagic total labeling* dan juga  $(p+4, 3)$  *vertex antimagic total labeling*.

Kata Kunci : graf, pelabelan graf, graf sikel dengan tambahan satu anting, *vertex antimagic total labeling*

ABSTRACT

**Cosmas Wenny Septian, 2011. *Vertex Antimagic Total Labeling on the Cycle Graph with One Extra Arm*. Mathematics Education Study Program, Mathematics and Science Education Department, Faculty of Teachers Training and Education, Sanata Dharma University, Yogyakarta.**

This research studies graph and graph labeling. Graph theory was introduced by Leonard Euler in 1736. Graph labeling is one of the current developing fields in graph theories. One type of graph labeling is  $(a, d)$  vertex antimagic total labeling. The definition of  $(a, d)$  vertex antimagic total labeling on the graph  $G=(V,E)$  is one by one mapping (bijective) from  $V(G) \cup E(G)$  to the set of integers  $\{1, 2, \dots, p + q\}$ , so that the set of vertex weight out of all the vertices in  $G$  is  $\{a, a + d, a + 2d, \dots, a + (p - 1)d\}$ , where  $p$  is the number of elements in  $V$ , and  $q$  is the number of elements in  $E$ . This research aims to prove that cycle graph with one extra arm  $C_p + A_1$ , as a new graph, imply  $(a, d)$  vertex antimagic total labeling and to investigate how the squences are, those are the first tribal and the different tribal of  $(a, d)$  vertex antimagic total labeling.

This research discusses *vertex antimagic total labeling*. It studies several journals, papers, and previous researches to obtain the supporting theories. The purpose of this research is to observe how far a cycle graph with one extra arm  $C_p + A_1$  imply  $(a, d)$  vertex antimagic total labeling.

From the result of analysis, the researcher found that the cycle graph with one extra arm  $C_p + A_1$  possesses the feature *vertex antimagic total labeling*, with  $p \geq 3$  and  $p$  is odd number. The result of this research shows that the cycle graph with one extra arm  $C_p + A_1$  imply  $(a, d)$  vertex antimagic total labeling, the limitation, and the labeling pattern. There are  $(2p+4, 1)$  vertex antimagic total labeling and  $(p+4, 3)$  vertex antimagic total labeling for  $C_p + A_1$  with  $p \geq 3$  and  $p$  is odd number.

Keywords : graph, graph labeling, cycle graph with one extra arm, vertex antimagic total labeling

## KATA PENGANTAR

Puji syukur penulis panjatkan kepada Tuhan Yesus Kristus, karena hanya atas berkat dan karunia-Nyalah penulis dapat menyelesaikan penulisan skripsi ini dengan baik dan tepat waktu. Dalam penulisan skripsi ini, tentunya penulis dibantu oleh banyak pihak.

Pada kesempatan ini, penulis dengan penuh rasa syukur mengucapkan terima kasih kepada:

1. Bapak D. Arif Budi Prasetyo, S.Si., M.Si., selaku Dosen Pembimbing yang sudah meluangkan waktu dan dengan sabar membimbing penulis dalam menyusun skripsi ini.
2. Bapak Dr. Marcellinus Andy Rudhito, S.Pd., selaku Kepala Program Studi Pendidikan Matematika.
3. Bapak Drs. Th. Sugiarto, M.T., selaku Dosen Pembimbing Akademik yang telah memberikan bimbingan selama penulis belajar di sini;
4. Segenap Dosen JPMIPA yang telah membantu dan memberi dukungan selama penulis menempuh kuliah, sehingga pada akhirnya penulis dapat selesai tepat waktu.
5. Segenap Staf Sekretariat JPMIPA yang telah membantu dalam hal administrasi kampus selama penulis belajar di sini.
6. Siska, Erlin, Dhita, Puji, Anggun yang selalu menemani dalam perjuanganku.

## PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

7. Cicil, Rani, Tiwik, Ria, Candra, Devi, Eko, Antok, dan teman-teman P.Mat angkatan 2007 yang menyejajarkan langkahnya untuk menemaniku dalam menjalani kuliah dan menyelesaikan skripsi ini.
8. Eko, Antok, Kikid, Tian, anak-anak kos Kalkulus yang menjadi penyemangatku. Siska dan teman-teman yang selalu mengingatkanku untuk selalu melibatkan Yesus dalam setiap langkah hidupku.
9. Semua pihak yang tidak dapat disebutkan satu persatu, yang telah membantu sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.

Akhirnya penulis berharap semoga skripsi ini dapat berguna bagi para pembaca.

Penulis,  
Cosmas Wenny Septian

DAFTAR ISI

	<b>Halaman</b>
HALAMAN JUDUL.....	i
HALAMAN PERSETUJUAN PEMBIMBING .....	ii
LEMBAR PENGESAHAN .....	iii
LEMBAR PERSEMBAHAN .....	iv
PERNYATAAN KEASLIAN KARYA .....	v
PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI KARYA ILMIAH .....	vi
ABSTRAK.....	vii
ABSTRACT.....	viii
KATA PENGANTAR .....	ix
DAFTAR ISI.....	xi
DAFTAR GAMBAR .....	xiii
DAFTAR NOTASI.....	xv
BAB I PENDAHULUAN.....	1
1.1 Latar Belakang .....	1
1.2 Perumusan Masalah .....	6
1.3 Tujuan dan Manfaat Penelitian .....	6
1.4 Sistematika Penelitian .....	7
BAB II KAJIAN PUSTAKA DAN KAJIAN TEORI.....	9
2.1 Teori Graf.....	9
2.2 Pelabelan Graf.....	22

# PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

2.3 Graph Sikel ( <i>Cycle graph</i> ) dengan Tambahan Satu Anting.....	26
2.4 KerangkaPikir .....	28
<b>BAB III METODE PENELITIAN.....</b>	<b>29</b>
3.1 Metode Penelitian.....	29
3.2 Tahap Penelitian.....	29
3.3 Bagan Alir Penelitian .....	30
<b>BAB IV HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN.....</b>	<b>32</b>
4.1 Perhitungan Dasar Tentang Vertex Antimagic Total Labeling.....	32
4.2 Pelabelan Total Tak Ajaib Titik pada Graf Sikel dengan Tambahan Satu Anting ( $C_p + A_1$ ) .....	33
<b>BAB V PENUTUP.....</b>	<b>56</b>
5.1 Kesimpulan .....	56
5.2 Saran.....	57
<b>DAFTAR PUSTAKA .....</b>	<b>58</b>

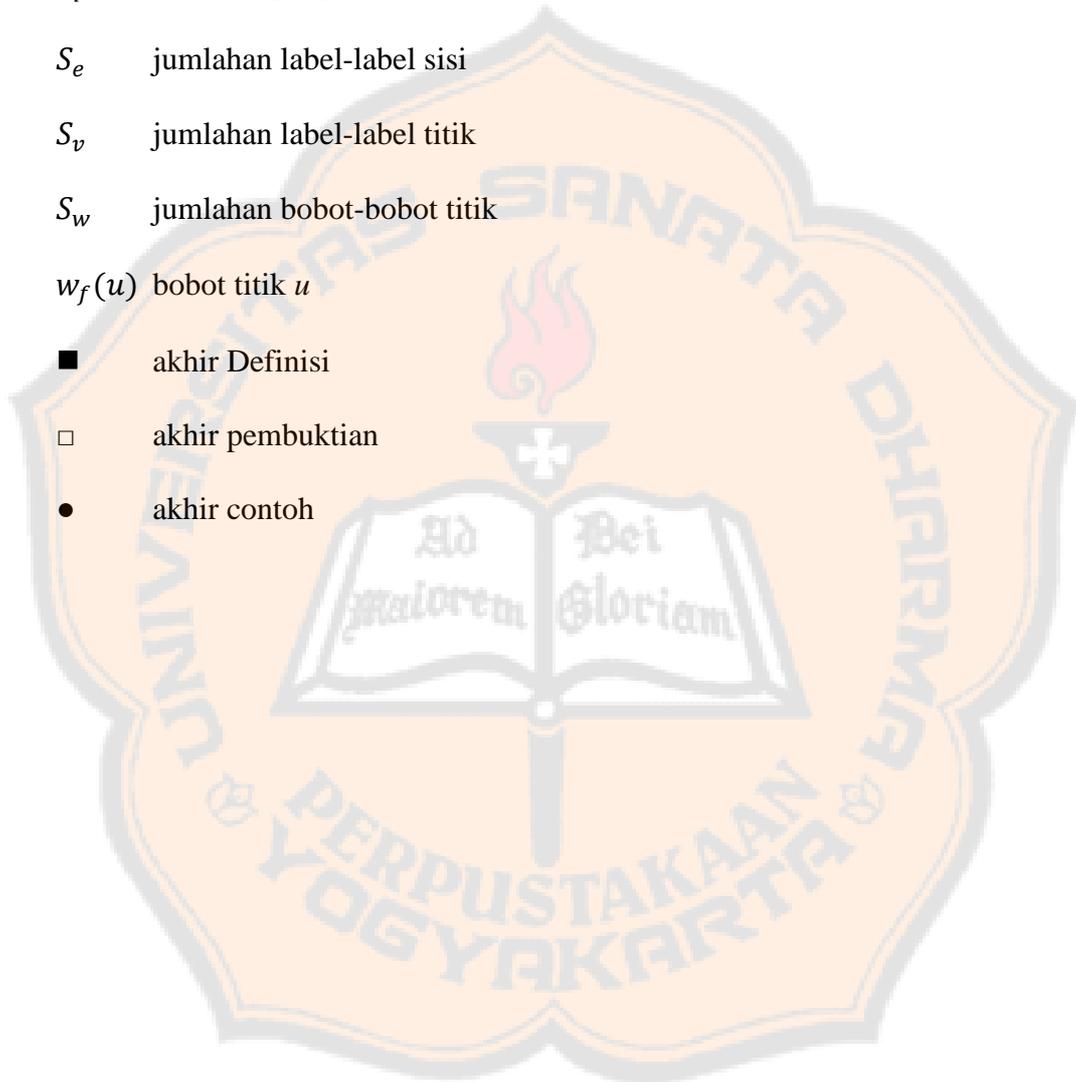
DAFTAR GAMBAR

		<b>Halaman</b>
Gambar 1.1	Jembatan Königsberg dan Grafnya .....	1
Gambar 1.2	Peta Jaringan Jalan Raya di Provinsi Jawa Tengah .....	2
Gambar 1.3	Penerapan Graf pada Ikatan Kimia .....	2
Gambar 1.4	Persegi Ajaib 4x4 .....	4
Gambar 2.1	Graf $G_1$ .....	11
Gambar 2.2	Graf $G_2$ .....	13
Gambar 2.3	Graf $G_3$ dan $G_4$ .....	14
Gambar 2.4	Graf $G_5$ , $G_6$ , dan $G_7$ .....	15
Gambar 2.5	Graf $G_8$ dan $G_9$ .....	16
Gambar 2.6	Graf $G_{10}$ dan $G_{11}$ .....	17
Gambar 2.7	Graf Lengkap .....	18
Gambar 2.8	Graf Sikel .....	19
Gambar 2.9	Graf Roda .....	19
Gambar 2.10	Graf Teratur .....	20
Gambar 2.11	$K_4$ adalah Graf Planar .....	21
Gambar 2.12	$K_5$ bukan Graf Planar .....	21
Gambar 2.13	Graf Bipartit .....	22
Gambar 2.14	$VMTL$ pada $C_5$ dengan $h = 14$ .....	24
Gambar 2.15(a)	$(7, 2)$ $VATL$ pada $C_3$ .....	25
Gambar 2.15(b)	$(11, 2)$ $VATL$ pada $C_4$ .....	25

Gambar 2.16	(11, 1) VATL pada $C_3$ .....	27
Gambar 2.17(a)	Graf $C_3 + A_1$ .....	28
Gambar 2.17(b)	Graf $C_5 + A_1$ .....	28
Gambar 3.1	Bagan Alir Penelitian .....	31
Gambar 4.1	Graf Sikel dengan tambahan satu anting ( $C_p + A_1$ ) .....	33
Gambar 4.2	Ilustrasi Konstruksi Pelabelan .....	40
Gambar 4.3	(10, 1) VATL pada $C_3 + A_1$ .....	42
Gambar 4.4	(14, 1) VATL pada $C_5 + A_1$ .....	43
Gambar 4.5	(7, 3) VATL pada $C_3 + A_1$ .....	47
Gambar 4.6	(9, 3) VATL pada $C_5 + A_1$ .....	49
Gambar 4.7	(11, 3) VATL pada $C_7 + A_1$ .....	51
Gambar 4.8	(13, 3) VATL pada $C_9 + A_1$ .....	53

## DAFTAR NOTASI

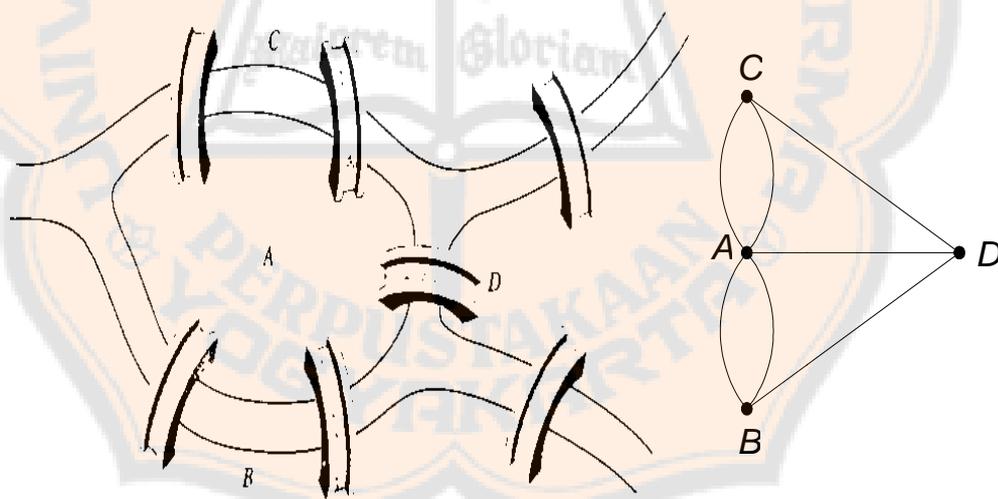
- $U$  gabungan himpunan
- $C_p$  sikel dengan  $p$  titik
- $S_e$  jumlahan label-label sisi
- $S_v$  jumlahan label-label titik
- $S_w$  jumlahan bobot-bobot titik
- $w_f(u)$  bobot titik  $u$
- akhir Definisi
  - akhir pembuktian
  - akhir contoh



**BAB I**  
**PENDAHULUAN**

**1.1 Latar Belakang**

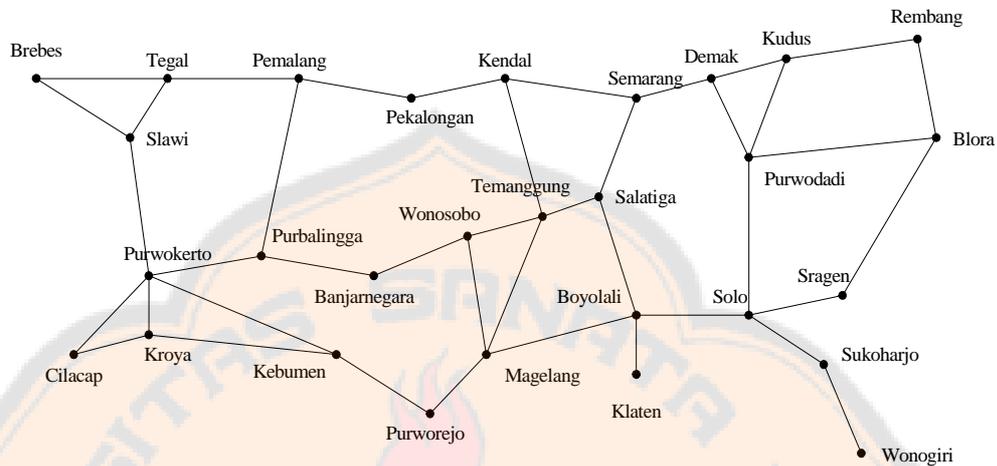
Graf merupakan salah satu cabang matematika yang saat ini berkembang. Teori graf diperkenalkan oleh Leonard Euler pada tahun 1736 ketika dia kembali mendiskusikan mungkin atau tidaknya melintasi semua jembatan Königsberg yang ada di kota Kaliningrat-Rusia hanya dengan melewatinya satu kali. Solusi yang diusulkannya atas permasalahan tersebut berupa titik dan sisi yang kemudian dikenal sebagai teori graf. (Suryadi, 1996).



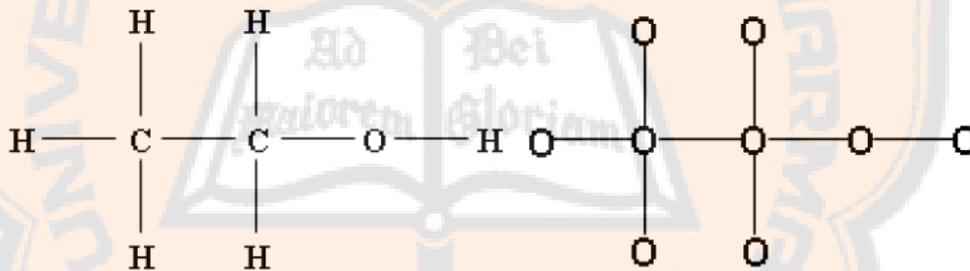
**Gambar 1.1 Jembatan Königsberg dan Grafnya**

Dalam kehidupan sehari-hari graf biasa digunakan untuk mempresentasikan objek-objek diskrit dan hubungan antara objek-objek tersebut. Sebagai contoh adalah graf sebagai gambar yang menyatakan peta jaringan jalan raya yang menghubungkan sejumlah kota di Provinsi Jawa

Tengah. Penerapan teori graf yang sering kita jumpai seperti rangkaian listrik, isomer ikatan kimia, dan sebagainya.



**Gambar 1.2 Peta Jaringan Jalan Raya di Provinsi Jawa Tengah**



(a) Ethanol ( $C_2H_5OH$ )

(b) Graf untuk ( $C_2H_5OH$ )

**Gambar 1.3 Penerapan Graf pada Ikatan Kimia**

Dalam dunia kimia teori graf mempunyai kegunaan yang amat penting. Kita mengenal ikatan-ikatan kimia seperti  $H_2SO_4$ ,  $H_2O$ ,  $CO_2$ , dan  $CH_4$ . Sebagai contoh, karbon dioksida mempunyai sebuah atom karbon yang dikaitkan terhadap 2 atom oksigen. Demikian pula dalam Ethanol ( $C_2H_5OH$ ), sebuah atom karbon dikaitkan pada 3 atom hidrogen, sedangkan atom karbon lainnya dikaitkan dengan atom karbon pertama, 2 atom hidrogen dan sebuah

atom oksigen. atom oksigennya dikaitkan dengan sebuah atom hidrogen, selain dengan sebuah atom karbon. Dapat dilihat pada Gambar 1.3 (a).

Konstruksi  $C_2H_5OH$  seperti pada Gambar 1.3 (a) termasuk ikatan kimia yang cukup rumit. Dalam teori graf ikatan kimia ini dapat dinyatakan dengan graf pada Gambar 1.3 (b). Dalam graf tersebut banyaknya sisi yang menghubungkan sebuah titik menyatakan valensi dari tiap-tiap atom yang berkorespondensi.

Salah satu bagian dari graf adalah pelabelan graf (*graph labeling*). Dalam hal ini, graf yang akan dipakai adalah terbatas, sederhana dan tidak berarah. Graf  $G$  merupakan gabungan himpunan tak kosong titik-titik (*vertices*)  $V=V(G)$  dan himpunan sisi-sisi (*edges*)  $E=E(G)$  dengan jumlah *vertex*  $|V|=p$  dan jumlah *edge*  $|E|=q$ . Suatu pelabelan graf memetakan setiap elemen dari graf tersebut yaitu titik (*vertex*) atau sisi (*edge*) atau keduanya ke himpunan bilangan, biasanya bilangan bulat positif. Jenis dari pelabelan (*labeling*) biasanya bergantung pada domainnya, yaitu titik disebut pelabelan titik (*vertex labeling*), sisi disebut pelabelan sisi (*edge labeling*), atau keduanya disebut *total labeling* (Prasetyo, 2008). Dalam penelitian ini domain yang dipakai adalah titik dan sisi, sehingga disebut pelabelan total (*total labeling*).

Penulis memperkenalkan pelabelan (*labeling*) dengan cara menggeneralisasi ide dari persegi ajaib (*magic square*). Persegi ajaib adalah suatu persegi dengan ukuran  $n \times n$  petak di mana setiap baris, kolom dan diagonal memiliki jumlah yang sama. Persegi ajaib sudah dikenal oleh

matematikawan Cina sejak 650 Sebelum Masehi. Ada kemungkinan sudah dikenal oleh matematikawan Arab sejak abad ke-7. Berawal dari pembuatan persegi ajaib inilah muncul ide untuk menggunakannya pada graf yaitu yang disebut pelabelan ajaib (*magic labeling*).

9	6	3	16
4	15	10	5
14	1	8	11
7	12	13	2

Gambar 1.4 Persegi Ajaib 4x4

Gambar 1.4 di atas merupakan salah satu contoh persegi ajaib dengan ukuran  $4 \times 4$ . Pemberian angka pada persegi ajaib  $4 \times 4$  dimulai dari 1 sampai dengan 16. Jumlah dari setiap baris, kolom, dan diagonalnya adalah 34.

Pelabelan ajaib merupakan pemetaan bijektif dari  $V(G) \cup E(G)$  ke himpunan bilangan bulat berurutan mulai dari satu sampai dengan jumlah titik dan sisinya. Pelabelan ajaib titik (*vertex magic labeling*) merupakan pelabelan ajaib dengan jumlah label-label yang berhubungan dengan suatu titik tetap. Pelabelan total ajaib titik (*vertex magic total labeling*) pertama kali diperkenalkan oleh MacDougall, dkk (1999). Pelabelan total ajaib titik didefinisikan sebagai pemetaan bijektif  $V(G) \cup E(G)$  ke himpunan bilangan bulat mulai dari satu sampai dengan jumlah titik dan sisi sedemikian sehingga

untuk setiap titik  $u \in V$  memenuhi  $f(u) + \sum f(uv) = h$  dengan  $v$  semua titik yang terhubung langsung (*adjacent*) dengan  $u$  dan  $v \in V$  dan  $h$  tetap/konstan. Jumlahan label-label yang bersesuaian dengan suatu titik  $u$  disebut bobot dari titik  $u$ , sehingga pada pelabelan total ajaib titik berlaku bobot untuk setiap titik tetap/konstan disimbolkan dengan  $h$  dan bilangan  $h$  disebut sebagai konstanta ajaib (*magic constant*) untuk pelabelan tersebut.

Konsep tentang graf tak ajaib (*antimagic graph*) diperkenalkan oleh Hartsfield dan Ringel (1990). Menurut mereka pelabelan tak ajaib (*antimagic labeling*) merupakan pelabelan sisi dari suatu graf dengan bilangan bulat  $\{1, 2, 3, \dots, q\}$  sehingga bobot setiap titiknya berbeda. Selanjutnya Bodendiek dan Walther (1993) mendefinisikan konsep  $(a, d)$  *antimagic labeling* sebagai suatu pelabelan sisi dengan bobot titik-titiknya membentuk suatu barisan aritmetika naik dengan suku pertama  $a$  dan beda  $d$ .

Martin Baca, dkk. (2003) telah mengkaji beberapa kasus mengenai  $(a, d)$  *vertex antimagic total labeling*. Mereka telah menunjukkan keberlakuan *vertex antimagic total labeling* (VATL) untuk *path* (lintasan), graf *Petersen*, graf sikel ganjil dan beberapa bentuk dan perluasan lainnya. Selain itu Martin Baca, dkk. juga menunjukkan beberapa bentuk graf yang tidak memenuhi VATL. Dominikus Arif Budi Prasetyo (2008) juga telah menunjukkan keberlakuan VATL pada *multigraph* yaitu pada *multicycle* ( $mC_p$ ) dan *multicomplete bipartite*.

Berdasarkan hasil dari penelitian-penelitian yang dilakukan sebelumnya, penulis mengembangkan hasil yang sudah ditunjukkan Martin

Baca, dkk. (2003) yakni menyelidiki keberlakuan  $(a, d)$  VATL pada graf sikel dengan tambahan satu anting  $(C_p + A_1)$  untuk  $p \geq 3$  dan  $p$  ganjil.

### 1.2 Perumusan Masalah

Suatu pelabelan total tak ajaib titik (VATL) dilakukan dengan memberikan label pada semua titik dan sisi dengan bilangan  $\{1, 2, 3, \dots, p+q\}$  dan bobot setiap titiknya berbeda. Sedangkan pada  $(a, d)$  VATL, bobot titik tidak hanya berbeda tetapi juga membentuk suatu barisan aritmatika naik dengan suku pertama  $a$  dan beda  $d$ .

Dalam penelitian ini akan dirumuskan graf yang dibangun sedemikian hingga memenuhi  $(a, d)$  VATL. Graf tersebut adalah graf sikel dengan tambahan satu anting  $(C_p + A_1)$  dengan  $p \geq 3$  dan  $p$  ganjil, serta akan diteliti sejauh mana memenuhi  $(a, d)$  VATL dari graf tersebut.

### 1.3 Tujuan dan Manfaat Penelitian

Tujuan penelitian ini adalah :

1. Apakah graf sikel dengan tambahan satu anting  $(C_p + A_1)$  dengan  $p \geq 3$  dan  $p$  ganjil memenuhi  $(a, d)$  VATL?
2. Bagaimanakah bentuk barisan, yaitu suku pertama dan beda dari  $(a, d)$  VATL dari graf sikel dengan tambahan satu anting  $(C_p + A_1)$  dengan  $p \geq 3$  dan  $p$  ganjil tersebut?

Manfaat dari penelitian ini adalah menambah jenis graf baru yang memenuhi  $(a, d)$  VATL dan menambah wawasan tentang  $(a, d)$  VATL serta memperlihatkan sisi lain dari belajar matematika yang lebih menyenangkan.

#### 1.4 Sistematika Penulisan

Untuk mempermudah penulis sekaligus pembaca dalam mengkaji skripsi ini, maka sistematika penulisannya dibagi menjadi empat bagian yaitu:

##### BAB I: PENDAHULUAN

Pada bab ini dijelaskan tentang latar belakang, rumusan masalah, tujuan dan manfaat penulisan, dan sistematika penulisan.

##### BAB II: KAJIAN PUSTAKA

Pada bab ini dijelaskan tentang definisi dasar graf, beberapa istilah dalam graf, jenis-jenis graf, pelabelan graf, dan graf sikel dengan tambahan satu anting.

##### BAB III: METODE PENELITIAN

Meliputi jenis penelitian dan langkah – langkah penelitian, serta bagan alir penelitian.

##### BAB IV: PEMBAHASAN

Pada bab ini, dijelaskan tentang pembahasan mengenai pelabelan total tak ajaib titik pada graf sikel dengan tambahan satu anting  $(C_p + A_1)$ , perhitungan dasar (*basic counting*) untuk menentukan batasan suku pertama  $a$  dan beda  $d$  dari pelabelan total tak ajaib titik pada graf sikel dengan tambahan satu anting  $(C_p + A_1)$ , serta pembahasan mengenai nilai  $a$  dan  $d$  yang dapat diperumum untuk pelabelan total tak ajaib titik pada graf sikel dengan tambahan satu anting  $(C_p + A_1)$  dengan  $p \geq 3$  dan  $p$  ganjil untuk  $d = 1$  dan  $d = 3$ .

## BAB V: PENUTUP

Pada bab ini dijelaskan tentang kesimpulan dari pembahasan yang telah diuraikan pada bab sebelumnya dan saran-saran yang berkaitan dengan pembahasan.



## BAB II

### KAJIAN PUSTAKA DAN LANDASAN TEORI

#### 2.1 Teori Graf

Dalam mempelajari graf terdapat beberapa teori dasar untuk mendukung pembuktian dan mempermudah pemahaman. Beberapa teori dasar meliputi pengertian graf, beberapa istilah dalam graf, dan jenis-jenis graf. Berikut ini disajikan pengertian graf, beberapa istilah pada graf dan jenis-jenis graf :

##### 1. Pengertian Graf

Graf  $G$  didefinisikan sebagai himpunan pasangan terurut  $G = (V, E)$  dengan  $V$  adalah himpunan berhingga titik-titik dan  $E$  adalah himpunan dari pasangan titik-titik di  $V$ . Selanjutnya anggota  $V$  disebut titik dan anggota  $E$  disebut sisi. Secara grafis, titik digambarkan dengan titik dan sisi digambarkan dengan ruas garis yang menghubungkan dua titik. Banyaknya unsur di  $V$  disebut *order* dari  $G$  dilambangkan dengan  $|V| = p$  dan banyaknya unsur di  $E$  disebut ukuran (*size*) dari  $G$  dilambangkan dengan  $|E| = q$ . Secara geometris graf dapat digambarkan sebagai sekumpulan titik di dalam bidang dua dimensi yang dihubungkan dengan sekumpulan sisi (Prasetyo, 2008).

2. Beberapa istilah pada Graf

Dalam mempelajari tentang graf terdapat beberapa istilah yang berkaitan dengan graf. Berikut ini didefinisikan beberapa istilah pada graf :

Berikut diberikan Definisi tentang *adjacent*, *incident*, derajat dan gelang (*loop*), serta sisi ganda.

**Definisi 2.1.1 (Wiitala, S. A., 1987)**

Misal pada graf  $G$  terdapat dua titik  $v_i$  dan  $v_j$ , dua buah titik pada  $G$  dikatakan berdekatan (*adjacent*) bila keduanya terhubung langsung dengan sebuah sisi. Dapat ditulis dengan notasi  $e = (v_i, v_j) \in E(G)$  dimana  $v_i \neq v_j$ . ■

**Definisi 2.1.2 (Wiitala, S. A., 1987)**

Diberikan graf  $G$  dan  $\{v_i, v_j\} \in V(G)$  jika  $e = (v_i, v_j) \in E(G)$  maka dikatakan  $e$  bersisian (*incident*) dengan titik  $v_i$  atau  $e$  bersisian dengan titik  $v_j$ . ■

**Definisi 2.1.3 (Wiitala, S. A., 1987)**

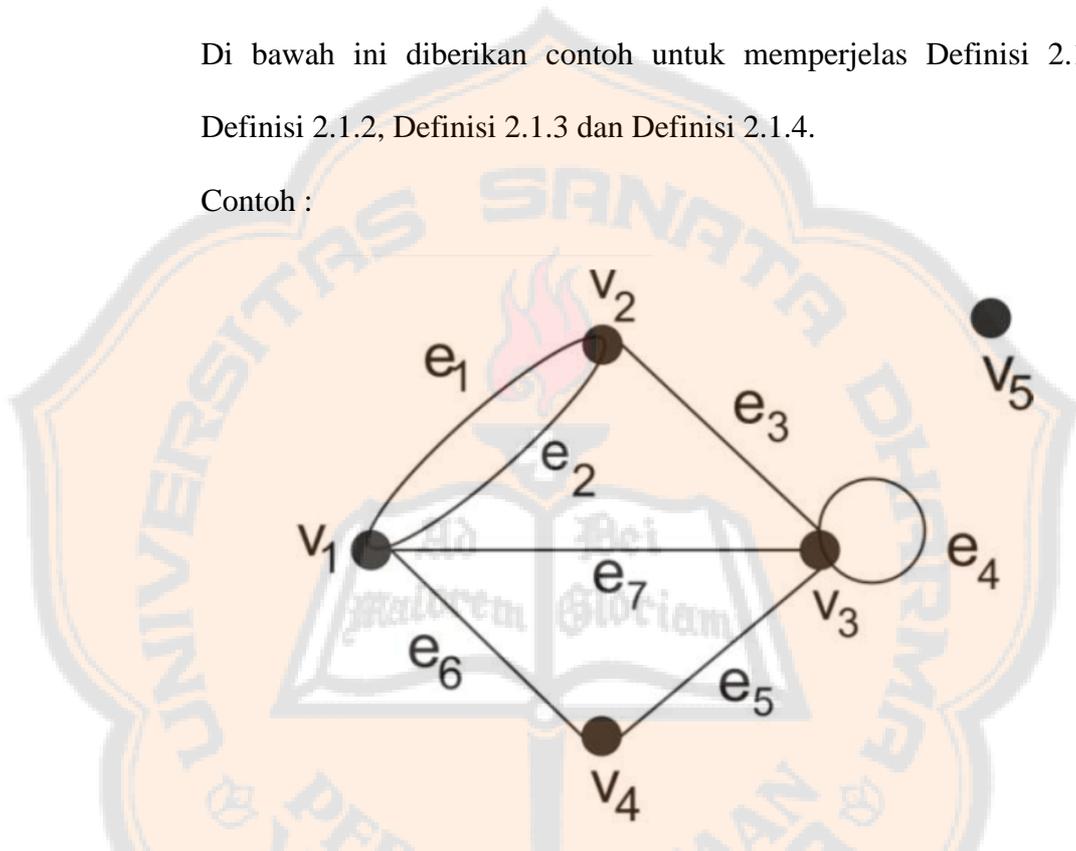
Derajat (*degree*) sebuah titik  $v$  pada sebuah graf  $G$  yang dituliskan dengan  $der(v)$  adalah banyak sisi yang bersisian pada  $v$ , dengan kata lain banyak sisi yang memuat  $v$  sebagai titik ujung. Titik dengan derajat nol disebut titik terisolasi (*isolated vertex*), sedangkan titik dengan derajat dua disebut gelang (*loop*). ■

**Definisi 2.1.4 (Wiitala, S. A., 1987)**

Misal terdapat beberapa sisi berbeda pada graf yang menghubungkan pasangan titik yang sama, maka graf yang demikian dapat dikatakan mempunyai sisi ganda (*multiple edge*). ■

Di bawah ini diberikan contoh untuk memperjelas Definisi 2.1.1, Definisi 2.1.2, Definisi 2.1.3 dan Definisi 2.1.4.

Contoh :



**Gambar 2.1 Graf  $G_1$**

Graf  $G_1$  memuat himpunan titik  $V(G_1) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$  dan himpunan sisi  $E(G_1) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$ .

- (i) Pada graf  $G_1$ , titik  $v_2$  dan  $v_3$  merupakan titik yang berdekatan, sedangkan titik  $v_2$  dan  $v_4$  bukan merupakan titik yang berdekatan.
- (ii) Pada graf  $G_1$ , sisi  $e_3$  bersisian dengan titik  $v_2$  dan  $v_3$ , tetapi tidak terdapat sisi yang bersisian dengan titik  $v_2$  dan  $v_4$ .

(iii) Pada graf  $G_1$ ,  $der(v_3) = 5$ ,  $der(v_4) = 2$ , dan  $der(v_5) = 0$ .

(iv) Pada graf  $G_1$ , memuat sisi ganda yaitu sisi  $e_1$  dan  $e_2$ . •

Berikut diberikan Definisi tentang *walk*.

**Definisi 2.1.5 (West, D., 2009)**

Suatu *walk* pada graf  $G$  adalah suatu urutan yang terdiri atas titik-titik dan sisi-sisi bergantian, dimana setiap sisi insiden dengan titik terdekat, dengan diawali dan diakhiri pada suatu titik. ■

Berikut diberikan Definisi tentang *trail*.

**Definisi 2.1.6 (West, D., 2009)**

Suatu *walk* yang setiap sisinya berbeda maka *walk* itu disebut *trail*.

Suatu *trail* yang setiap titiknya berbeda disebut lintasan (*path*).

Panjang lintasan adalah banyak sisi dalam lintasan tersebut. ■

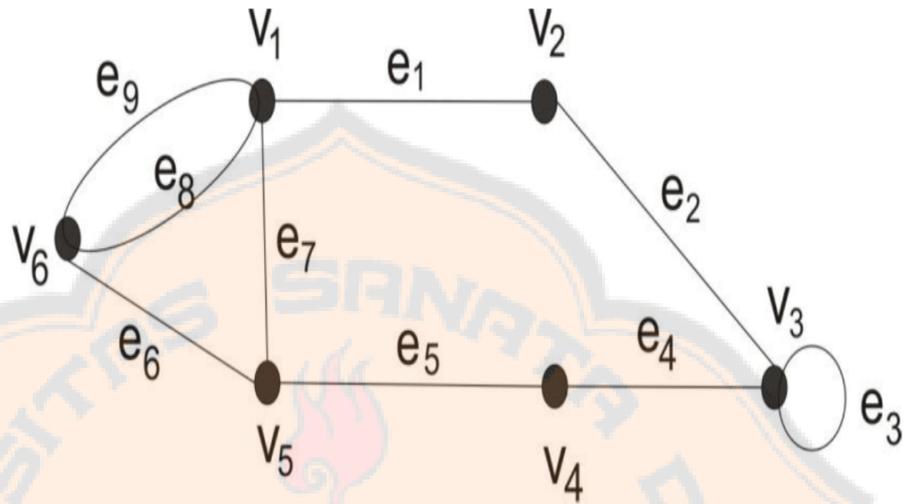
Berikut diberikan Definisi tentang *closed trail*.

**Definisi 2.1.7 (West, D., 2009)**

Suatu *walk* tertutup dalam graf  $G$  jika semua sisinya berbeda, maka *walk* itu disebut *trail* tertutup (*closed trail*). ■

Di bawah ini diberikan contoh untuk memperjelas Definisi 2.1.5, Definisi 2.1.6 dan Definisi 2.1.7.

Contoh :



Gambar 2.2 Graf  $G_2$

Pada graf  $G_2$  terdapat :

*Walk* :  $v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_3, v_3, e_4, v_4$

*Trail* :  $v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_3, v_3, e_4, v_4$

*Path* :  $v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_4, v_4$

*Closed trail* :  $v_1, e_7, v_5, e_6, v_6, e_8, v_1$  •

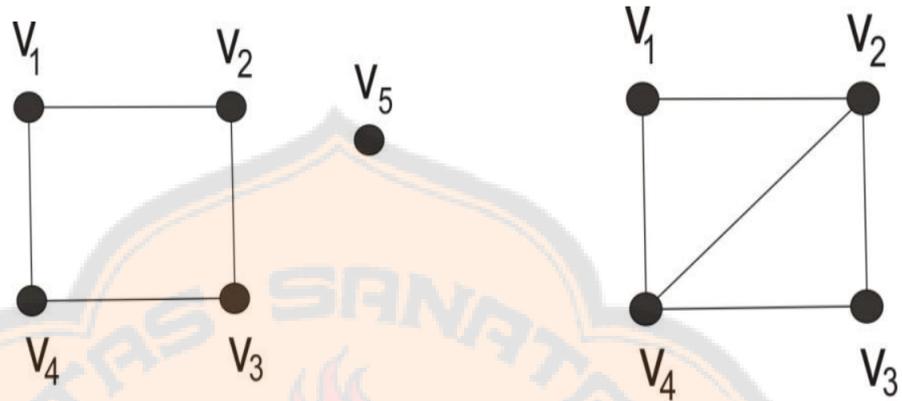
Berikut diberikan Definisi tentang graf terhubung (*connected graph*) dan graf tak terhubung (*disconnected graph*).

**Definisi 2.1.6 (Wiitala, S. A., 1987)**

Suatu graf  $G$  disebut graf terhubung, jika untuk setiap pasang titik  $v_i$  dan titik  $v_j$ ,  $v_i \neq v_j$ , di dalam himpunan  $V$  terdapat lintasan dari  $v_i$  ke  $v_j$ . Jika tidak, maka graf  $G$  disebut graf tak terhubung. ■

Di bawah ini diberikan contoh untuk memperjelas Definisi 2.1.6.

Contoh :



Gambar 2.3 Graf  $G_3$  dan  $G_4$

Graf  $G_3$  pada gambar 2.3 merupakan graf tak terhubung karena tidak terdapat sisi yang menghubungkan titik  $v_5$  dengan titik  $v_1, v_2, v_3, v_4$ , sedangkan graf  $G_4$  merupakan graf terhubung karena setiap titik terhubung oleh suatu sisi. •

### 3. Jenis-jenis Graph

Berdasarkan sifatnya graf dapat dikelompokkan menjadi beberapa jenis bergantung pada sudut pandang pengelompokannya. Pengelompokan graf dapat dipandang berdasarkan ada tidaknya sisi ganda, berdasarkan banyak titik, atau berdasarkan orientasi arah pada sisi.

Berdasarkan ada tidaknya gelang atau sisi ganda pada suatu graf, maka graf dikelompokkan menjadi dua jenis, yaitu :

1. Graf sederhana (*simple graph*)

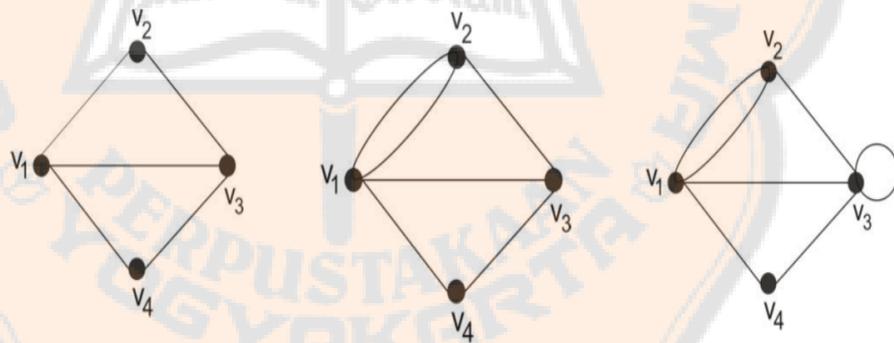
Graf sederhana adalah graf yang tidak mengandung gelang maupun sisi-ganda.

2. Graf tak-sederhana (*unsimple graph*)

Graf tak-sederhana adalah graf yang mengandung sisi ganda atau gelang. Ada dua macam graf tak-sederhana, yaitu graf ganda (*multigraph*) dan graf semu (*pseudograph*). Graf ganda adalah graf yang mengandung sisi ganda. Graf semu adalah graf yang mengandung sisi ganda dan gelang.

Di bawah ini diberikan contoh untuk graf sederhana dan graf tak sederhana.

Contoh :



**Gambar 2.4 Graf  $G_5$ ,  $G_6$ , dan  $G_7$**

Graf  $G_5$  pada Gambar 2.4 merupakan graf sederhana.

Graf  $G_6$  pada Gambar 2.4 merupakan graf ganda.

Graf  $G_7$  pada Gambar 2.4 merupakan graf semu. ●

Berdasarkan banyak titik pada suatu graf, maka secara umum graf dapat dikelompokkan menjadi dua jenis, yaitu :

1. Graf berhingga (*finite graph*)

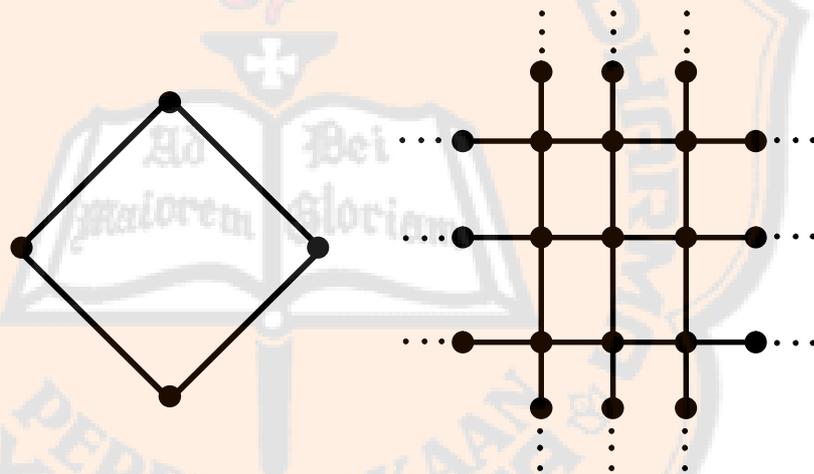
Graf berhingga adalah graf yang banyak titik/*vertex*nya  $n$ , berhingga.

2. Graf tak-berhingga (*unfinite graph*)

Graf tak-berhingga adalah graf yang banyak titik/*vertex*nya tidak berhingga.

Di bawah ini diberikan contoh untuk graf berhingga dan graf tak-berhingga.

Contoh :



Gambar 2.5 Graf  $G_8$  dan  $G_9$

Graf  $G_8$  pada Gambar 2.5 merupakan graf berhingga.

Graf  $G_9$  pada Gambar 2.5 merupakan graf tak berhingga. •

Berdasarkan orientasi arah pada sisi, maka secara umum graf dikelompokkan menjadi dua jenis, yaitu :

1. Graf tak-berarah (*undirected graph*)

Graf tak-berarah adalah graf yang sisinya tidak mempunyai orientasi arah. Pada graf tak berarah, urutan pasangan titik yang

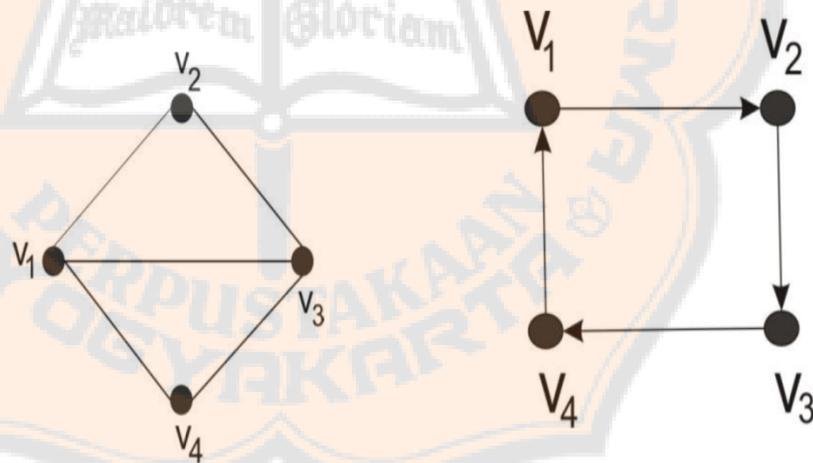
dihubungkan oleh sisi tidak diperhatikan. Jadi  $(v_j, v_k) = (v_k, v_j)$  adalah sisi yang sama.

2. Graf berarah (*directed graph*)

Graf berarah adalah graf yang setiap sisinya diberikan orientasi arah. Pada graf berarah  $(v_j, v_k)$  dan  $(v_k, v_j)$  menyatakan dua sisi yang berbeda, dengan kata lain  $(v_j, v_k) \neq (v_k, v_j)$ . Untuk sisi  $(v_j, v_k)$  titik  $v_j$  dinamakan titik asal (*initial vertex*) dan titik  $v_k$  dinamakan titik terminal (*terminal vertex*).

Di bawah ini diberikan contoh untuk graf tak-berarah dan graf berarah.

Contoh :



Gambar 2.6 Graf  $G_{10}$  dan  $G_{11}$

Graf  $G_{10}$  pada Gambar 2.6 merupakan graf tak berarah.

Graf  $G_{11}$  pada Gambar 2.6 merupakan graf berarah. •

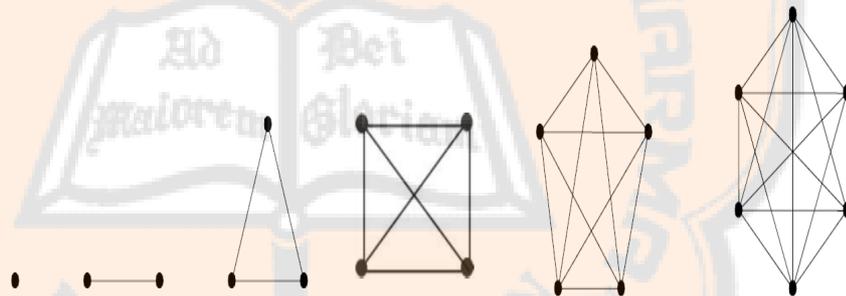
Terdapat beberapa jenis graf sederhana khusus. Berikut ini didefinisikan beberapa graf khusus yang sering ditemukan :

1. Graf Lengkap (*Complete Graph*)

Graf lengkap merupakan graf sederhana yang setiap titiknya terhubung langsung (oleh satu sisi) ke semua titik lainnya. Dengan kata lain, setiap titiknya bertetangga. Graf lengkap dengan  $n$  buah titik dilambangkan dengan  $K_n$ . Banyak sisi pada sebuah graf lengkap yang terdiri dari  $n$  buah titik adalah  $n(n - 1) / 2$  sisi.

Di bawah ini diberikan beberapa contoh graf lengkap.

Contoh :



**Gambar 2.7 Graf Lengkap**

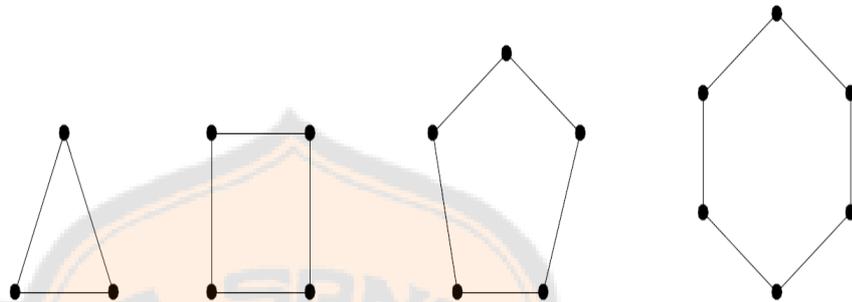
Pada Gambar 2.7 di atas gambar graf berturut-turut dari kiri adalah graf lengkap dengan  $n = 1, 2, 3, 4, 5,$  dan  $6$ . Dituliskan  $K_1, K_2, K_3, K_4, K_5,$  dan  $K_6$ .

2. Graf Sikel (*Cycle Graph*)

Graf lingkaran merupakan graf sederhana yang setiap titiknya mempunyai dua sisi yang insiden. Graf sikel dengan  $p$  titik dilambangkan dengan  $C_p$ .

Di bawah ini diberikan beberapa contoh graf sikel.

Contoh :



**Gambar 2.8 Graf Sikel**

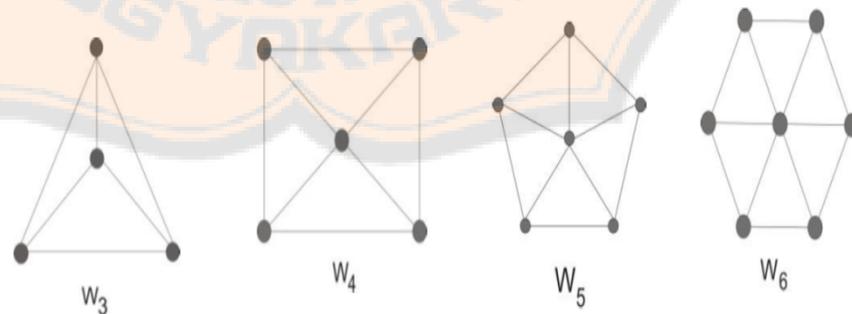
Pada Gambar 2.8 berturut-turut dari kiri adalah graf sikel dengan  $p = 3, 4, 5,$  dan  $6$ . Dituliskan  $C_3, C_4, C_5,$  dan  $C_6$ .

3. Graf Roda (*Wheels Graph*)

Graf roda merupakan graf yang diperoleh dengan cara menambahkan satu titik pada graf sikel  $C_p$ , dan menghubungkan titik baru tersebut dengan semua titik pada graf sikel tersebut.

Di bawah ini diberikan beberapa contoh graf roda.

Contoh :



**Gambar 2.9 Graf Roda**

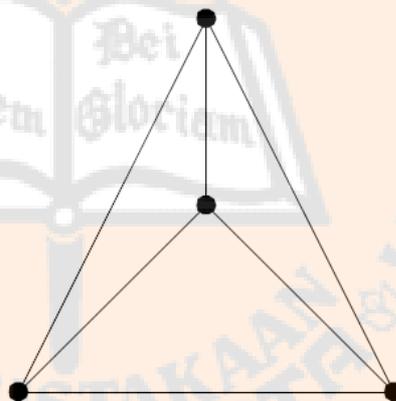
Pada Gambar 2.9 berturut-turut dari kiri adalah graf roda yang terbentuk dari graf siklus dengan  $p = 3, 4, 5,$  dan  $6$ . Dituliskan dengan  $W_3, W_4, W_5,$  dan  $W_6$ . •

4. Graf Teratur (*Regular Graph*)

Graf teratur merupakan graf yang setiap titiknya mempunyai derajat yang sama. Apabila derajat setiap titik pada graf teratur adalah  $r$ , maka graf tersebut dinamakan graf teratur berderajat  $r$ . Banyak sisi pada graf teratur dengan  $n$  titik adalah  $2nr$  sisi.

Di bawah ini diberikan contoh graf teratur.

Contoh :



**Gambar 2.10 Graf Teratur**

Gambar 2.10 merupakan graf teratur dengan  $r = 3$ . •

5. Graf Planar (*Planar Graph*) dan Graf Bidang (*Plane Graph*)

Suatu graf disebut graf planar jika graf tersebut dapat digambarkan pada bidang datar sedemikian sehingga tidak ada sisi-sisinya yang berpotongan kecuali di titik dimana keduanya insiden.

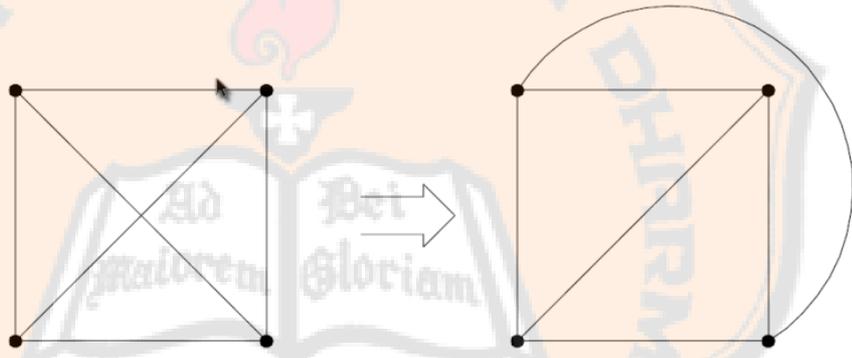
Di bawah ini diberikan beberapa contoh graf planar dan graf bidang.

Contoh :

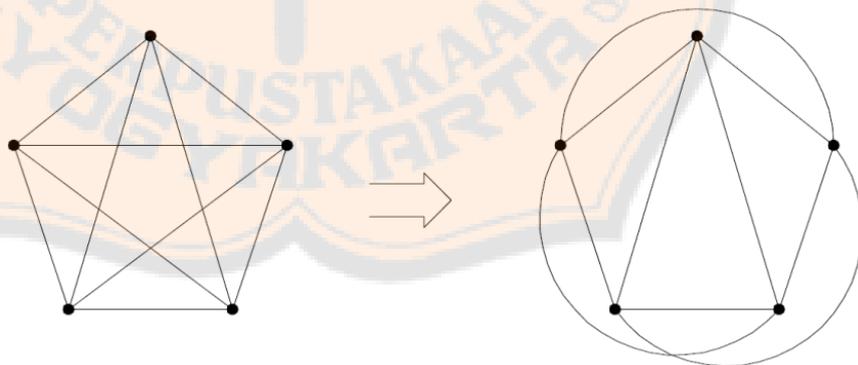
- Semua graf sikel merupakan graf planar
- Graf lengkap  $K_1, K_2, K_3, K_4$  merupakan graf planar

Tetapi graf lengkap  $K_n$  untuk  $n \geq 5$  merupakan graf tak-planar.

Graf planar yang digambarkan dengan sisi-sisi yang tidak saling berpotongan dinamakan graf bidang.



**Gambar 2.11  $K_4$  adalah Graf Planar**



**Gambar 2.12  $K_5$  bukan Graf Planar**

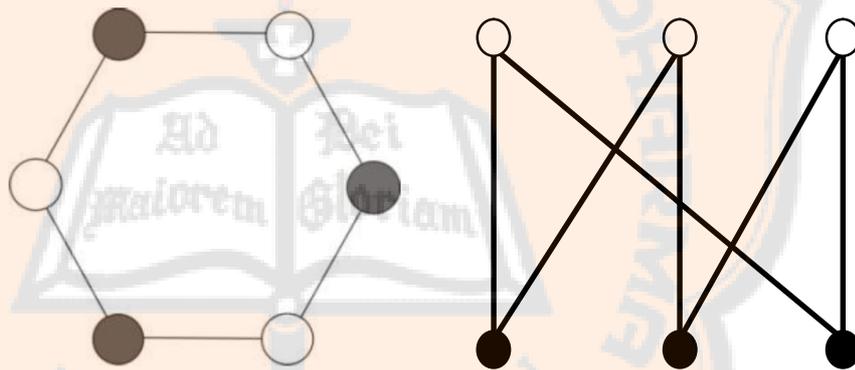
Pada Gambar 2.12  $K_5$  bukan graf planar karena terdapat sisi yang berpotongan pada titik yang tidak bersisian. ●

6. Graf Bipartit (*Bipartite Graph*)

Suatu graf sederhana  $G$  disebut bipartit jika himpunan titik  $V$ -nya dapat dipartisi menjadi dua himpunan tak kosong yang tak beririsan  $V_1$  dan  $V_2$  sedemikian hingga setiap sisi hubung dalam graf menghubungkan suatu titik di  $V_1$  dengan titik di  $V_2$  (sedemikian hingga tak ada sisi hubung di dalam  $G$  menghubungkan dua titik di  $V_1$  maupun di  $V_2$ ).

Di bawah ini diberikan contoh graf bipartit.

Contoh :



**Gambar 2.13 Graf Bipartit**

Dari Gambar 2.1.3  $C_6$  adalah bipartit karena setiap sisinya menghubungkan dua titik dari himpunan yang berbeda. •

**2.2 Pelabelan Graf (*Graph Labeling*)**

Pelabelan graf adalah pemetaan bijektif yang memetakan semua elemen dari graf tersebut ke dalam suatu himpunan bilangan bulat positif (non-negatif). Terdapat beberapa macam pelabelan graf, yaitu pelabelan yang domainnya himpunan dari titik yang disebut dengan pelabelan titik, pelabelan

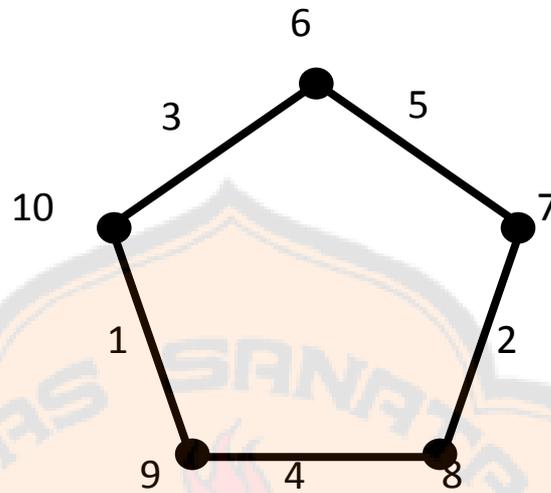
yang domainnya himpunan sisi yang disebut dengan pelabelan sisi, serta pelabelan yang domainnya titik dan sisi yang disebut dengan pelabelan total.

Dalam mengevaluasi graf terdapat bobot yang akan dihitung. Bobot adalah jumlahan dari label-label pada setiap elemen graf. Pada pelabelan graf terdapat dua jenis pelabelan menurut jumlah dari setiap bobotnya yaitu pelabelan ajaib (*magic labeling*) dan pelabelan tak ajaib (*antimagic labeling*). Pelabelan ajaib adalah suatu pelabelan yang jumlah setiap bobotnya sama/konstan, sedangkan pelabelan tak ajaib adalah suatu pelabelan yang jumlah setiap bobotnya berbeda. Pada penelitian ini akan digunakan pelabelan total tak ajaib titik dalam pengkajian masalah yaitu pelabelan pada graf sikel. Berikut ini diberikan beberapa definisi tentang pelabelan.

**Definisi 2.2.1 (Wallis, 2001)**

*Vertex magic total labeling (VMTL)* dari  $(p, q)$ -graf,  $G$ , adalah pemetaan bijektif  $f: V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, p + q\}$  sedemikian sehingga untuk setiap  $u \in V(G)$  berlaku  $f(u) + \sum f(uv) = h$  untuk semua  $v \in V(G)$  yang berdekatan dengan  $u$ . Bilangan  $h$  disebut konstanta ajaib. Graf yang memenuhi pelabelan total ajaib titik (*vertex magic total labeling*) disebut graf total titik ajaib (*vertex magic total graph*). ■

Contoh :



**Gambar 2.14 VMTL pada  $C_5$  dengan  $h = 14$**

Gambar 2.14 merupakan contoh VMTL pada  $C_5$ . Bobot setiap titik adalah sama/konstan, yaitu 14. Bobot  $v_1$  adalah  $9 + 1 + 4 = 14$ , bobot  $v_2$  adalah  $8 + 4 + 2 = 14$ , bobot  $v_3$  adalah  $7 + 2 + 5 = 14$ , bobot  $v_4$  adalah  $6 + 5 + 3 = 14$  dan bobot  $v_5$  adalah  $10 + 3 + 1 = 14$ . Jadi contoh pelabelan pada Gambar 2.15 disebut VMTL pada  $C_5$  dengan  $h = 14$ . •

**Definisi 2.2.2 (Baca, dkk., 2003)**

Suatu pemetaan bijektif  $f: V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, p + q\}$  disebut pelabelan total tak ajaib titik dari  $(p, q)$ -graf  $G$  jika bobot dari titik  $w_f(u) = f(u) + \sum f(uv)$ , untuk setiap  $u \in V(G)$  dan  $v \in V(G)$  yang berdekatan dengan  $u$  berbeda. ■

Jika bobot titik pada pelabelan total tak ajaib titik membentuk suatu barisan aritmetika naik dengan suku pertama  $a$  dan beda  $d$  maka pelabelannya disebut  $(a, d)$  VATL.

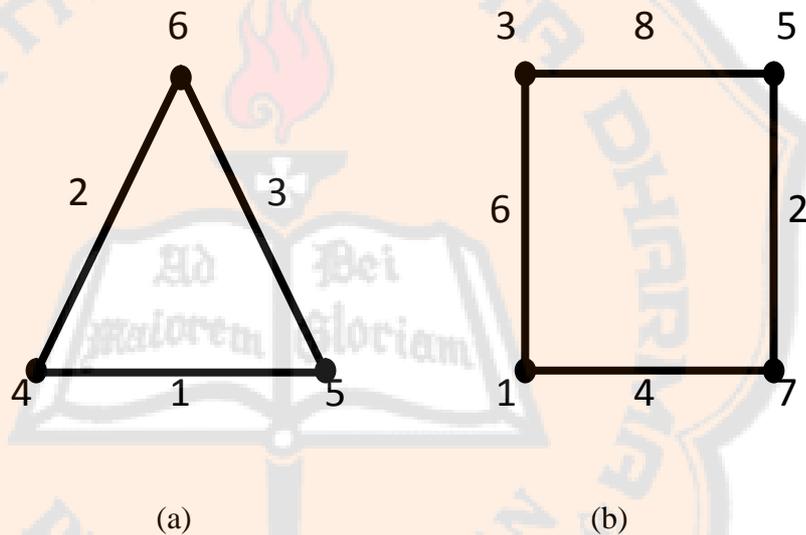
**Definisi 2.2.3 (Baca, dkk., 2003)**

Suatu pemetaan bijektif  $f: V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, p + q\}$  disebut  $(a, d)$  VATL dari  $(p, q)$ -graf  $G$  jika bobot dari titik-titiknya membentuk suatu barisan aritmetika naik dengan suku pertama  $a$  dan beda  $d$ .

■

$$W = \{w_f(u) | u \in V\} = \{a, a + d, a + 2d, \dots, a + (p - 1)d\}$$

Contoh :



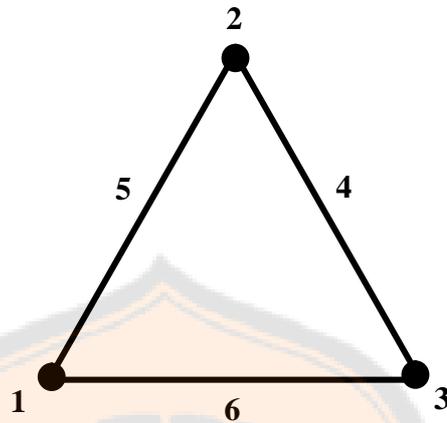
**Gambar 2.15 (7, 2) VATL pada  $C_3$  (a) dan (11, 2) VATL pada  $C_4$  (b)**

Gambar 2.15 di atas merupakan contoh pelabelan VATL pada  $C_3$  dan  $C_4$  yang sesuai dengan Definisi 2.3. Setiap titik dan sisi diberi label dengan bilangan bulat positif  $\{1, 2, 3, \dots, p + q\}$  dengan  $p$  dan  $q$  berturut-turut merupakan jumlah titik dan jumlah sisi. Pada gambar 2.15 (a), bobot terkecil dari titik-titik adalah  $4 + 1 + 2 = 7$  yaitu bobot pada titik dengan label 4. Bobot dari dua titik yang lain adalah  $5 + 1 + 3 = 9$  yaitu bobot pada titik dengan label 5 dan  $6 + 2 + 3 = 11$  yaitu bobot pada titik dengan label 6, sehingga

membentuk barisan aritmetika naik 7, 9, dan 11. Karena bobot terkecil titik adalah 7 dan beda dari bobot titik yang lain adalah 2, maka contoh pada Gambar 2.15 (a) disebut  $(7, 2)$  VATL pada  $C_3$ . Demikian juga pada Gambar 2.15 (b) dapat dihitung bobot dari titiknya adalah  $1 + 4 + 6 = 11$  yaitu bobot pada titik dengan label 1,  $7 + 4 + 2 = 13$  yaitu bobot pada titik dengan label 7,  $5 + 2 + 8 = 15$  yaitu bobot pada titik dengan label 5, dan  $3 + 8 + 6 = 17$  yaitu bobot pada titik dengan label 3, sehingga membentuk barisan aritmetika naik dengan suku pertama 11 dan beda 2. Jadi contoh pelabelan pada Gambar 2.15 (b) disebut  $(11, 2)$  VATL pada  $C_4$ . •

### 2.3 Graf Sikel (*Cycle graph*) dengan Tambahan Satu Anting

Graf sikel merupakan graf sederhana yang setiap titiknya berderajat dua, atau graf dengan lintasan tertutup. Graf sikel dengan  $p$  titik dilambangkan dengan  $C_p$ . Pada graf sikel dapat dilakukan  $(a, d)$  VATL (Baca, dkk., 2003). Hasil penelitian yang dilakukan oleh Baca, dkk. salah satunya adalah setiap sikel ganjil,  $C_p$  dengan  $p \geq 3$  terdapat  $(3p + 2, 1)$  VATL (Baca, dkk., 2003). Ilustrasi hasil penelitian dari Baca, dkk. adalah sebagai berikut :



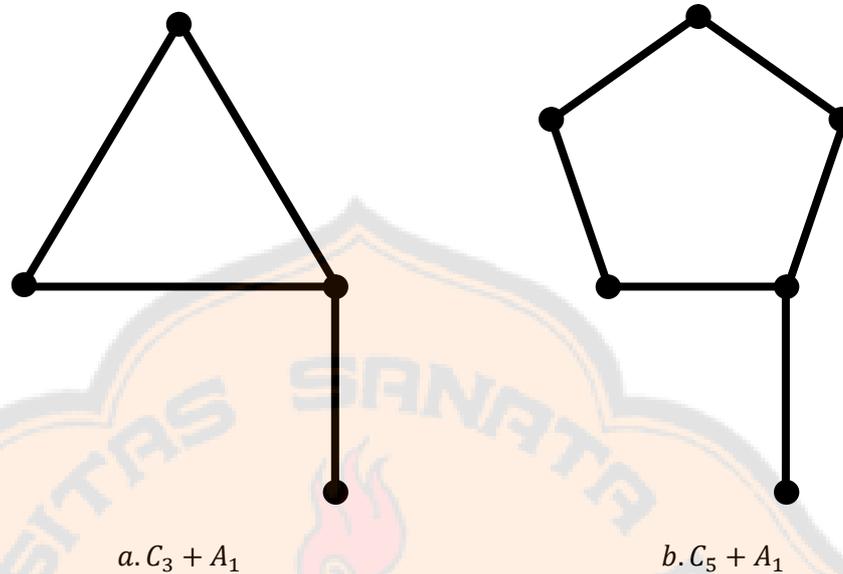
**Gambar 2.16**  $(11, 1)$  VATL pada  $C_3$

Gambar 2.16 di atas merupakan contoh pelabelan VATL pada  $C_3$ . Bobot terkecil dari titiknya adalah  $2 + 4 + 5 = 11$  yaitu bobot pada titik dengan label 2. Bobot dari dua titik yang lain adalah  $1 + 5 + 6 = 12$  yaitu bobot pada titik dengan label 1 dan  $3 + 4 + 6 = 13$  yaitu bobot pada titik dengan label 3, sehingga membentuk barisan aritmetika naik 11, 12, dan 13. Karena bobot terkecil titik adalah 11 dan beda dari bobot titik yang lain adalah 1, maka contoh pada Gambar 2.16 disebut  $(11, 1)$  VATL pada  $C_3$ .

Graf sikel dengan tambahan satu anting merupakan graf sikel  $C_p$  yang ditambahkan satu titik diluar  $C_p$  dan satu sisi yang menghubungkan titik tersebut dengan  $C_p$ . Berikut ini merupakan contoh gambar dari graf sikel dengan tambahan satu anting  $(C_p + A_1)$ .

Berikut diberikan beberapa contoh graf sikel dengan tambahan satu anting  $(C_p + A_1)$ .

Contoh :



**Gambar 2.17 Graf  $C_3 + A_1$  (a) dan Graf  $C_5 + A_1$  (b)**

Pada Gambar 2.17 (a) disebut graf  $C_3 + A_1$  karena banyak titik dari graf tersebut adalah 3. Sedangkan (b) disebut graf  $C_5 + A_1$  karena banyak titik dari graf tersebut adalah 5. •

#### 2.4 Kerangka Berpikir

Selama ini sudah mempelajari beberapa teori dan Definisi yang berkaitan dengan graf, pelabelan graf dan graf baru yang dibuat oleh peneliti. Berdasarkan apa yang telah dipelajari pada bagian 2.1 sampai dengan 2.3 diatas akan diselidiki apakah graf baru yang telah dibuat memenuhi sifat  $(a, d)$   $VATL$  dan bagaimana bentuk barisan yaitu suku pertama dan beda dari  $(a, d)$   $VATL$ .

## BAB III

### METODE PENELITIAN

#### 3.1 Metode Penelitian

Penelitian ini adalah penelitian pustaka (*Library Research*). Penelitian ini dilakukan dengan beberapa langkah kerja yang menjadi pedoman untuk mencapai tujuan penelitian. Langkah pertama kali adalah melakukan kajian terhadap buku-buku teori graf dan jurnal atau makalah yang memuat topik tentang pelabelan pada graf dan sifat *VATL* pada graf sikel ( $C_p$ ).

Langkah kedua adalah membangun graf titik tak ajaib baru dari graf sikel yaitu graf sikel dengan tambahan satu anting. Langkah ini dilakukan dengan meneliti keberlakuan *VATL* pada graf sikel, mulai dari  $C_3, C_5, C_7$ , sampai dengan  $C_p$ .

Langkah ketiga adalah menentukan rumusan pelabelan untuk titik dan sisi dari graf sikel dengan tambahan satu anting yang memenuhi sifat *VATL*. Langkah terakhir adalah menentukan suku pertama dan beda dari  $(a, d)$  *VATL* yang berlaku pada graf sikel dengan tambahan satu anting.

#### 3.2 Tahap Penelitian

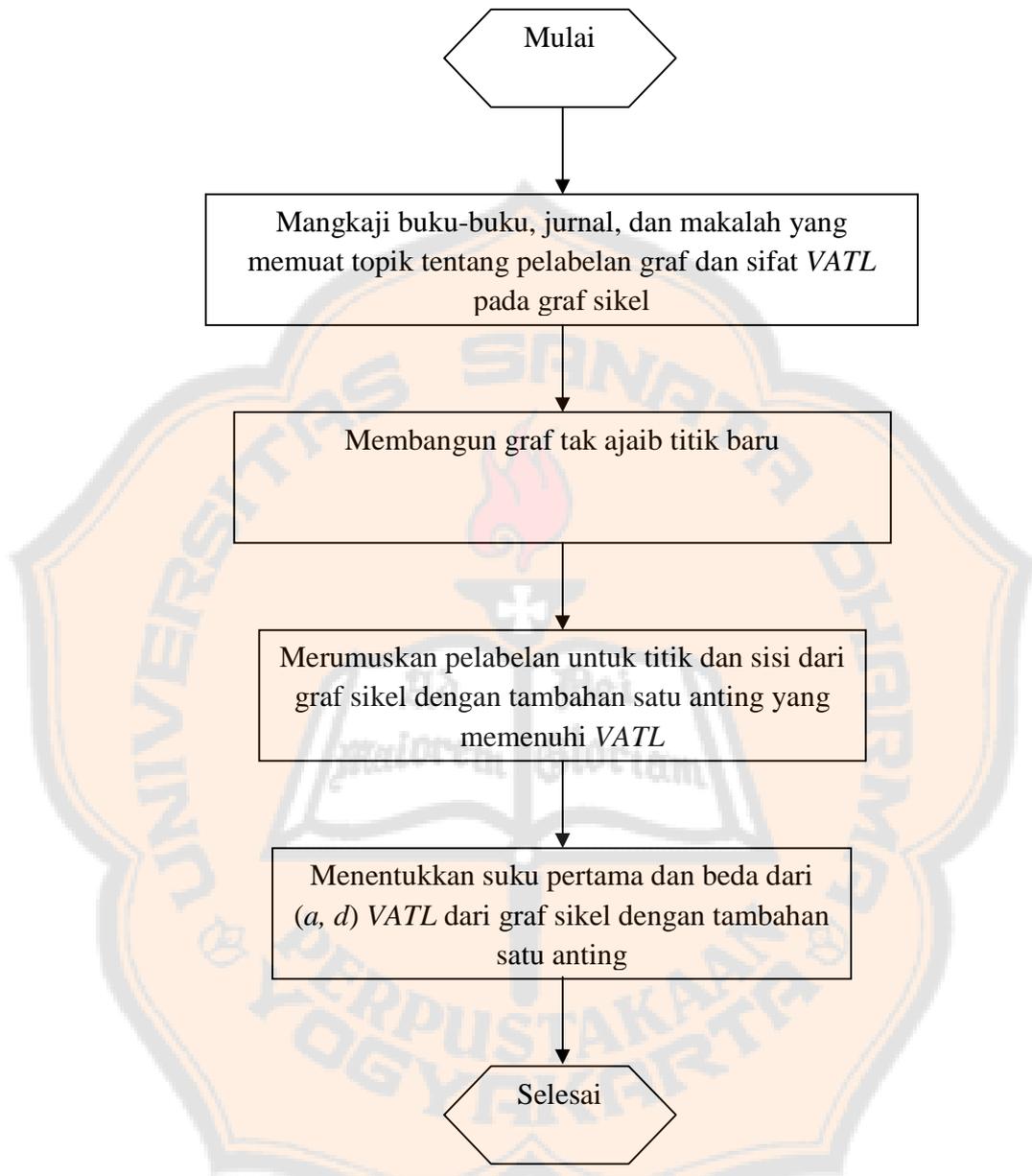
Penelitian ini menggunakan pendekatan kualitatif, sehingga pola pembahasan dimulai dari hal-hal khusus (*induktif*) menuju pada suatu generalisasi

yang bersifat umum (*deduktif*). Secara garis besar langkah penelitian ini sebagai berikut.

1. Mengumpulkan berbagai literatur yang berhubungan dengan topik.
2. Mempelajari topik.
3. Menganalisa sifat-sifat VATL.
4. Membangun graf tak ajaib titik baru.
5. Menganalisa graf tersebut.
6. Menentukan rumusan pelabelan untuk titik dan sisi dari graf tersebut.
7. Menentukan suku pertama dan beda dari  $(a, d)$  VATL dari graf tersebut.

### 3.3 Bagan Alir Penelitian

Bagan alir dari penelitian ini dapat dilihat pada Gambar 3.1.



**Gambar 3.1 Bagan Alir Penelitian**

## BAB IV

### HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN

Hasil dari penelitian ini dibagi menjadi dua bagian, yaitu perhitungan dasar tentang pelabelan total tak ajaib titik, dan pelabelan total tak ajaib titik pada graf sikel dengan tambahan satu anting ( $C_p + A_1$ ).

#### 4.1 Perhitungan Dasar Tentang Pelabelan Total Tak Ajaib Titik

Pelabelan total tak ajaib titik merupakan pemetaan bijektif dari setiap titik dan sisi ke bilangan bulat positif mulai dari satu sampai dengan jumlah total titik dan sisi  $f: V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, p + q\}$  dimana  $p$  adalah jumlah titik dan  $q$  adalah jumlah sisi (Baca, dkk., 2003).

Pada pelabelan total tak ajaib titik setiap label titik dihitung satu kali dan label sisi dihitung dua kali akibatnya :

$$S_w = S_v + 2S_e$$

Dimana  $S_w$  adalah jumlah semua bobot titik,  $S_v$  adalah jumlah semua label titik, dan  $S_e$  adalah jumlah semua label sisi (Baca, dkk., 2003).

Bobot setiap titik dihitung dengan cara menjumlahkan label dari titik tersebut dengan label pada semua sisi yang bersisian dengan titik tersebut.

Bobot dari setiap titik dilambangkan dengan  $w_f(v_i)$ .

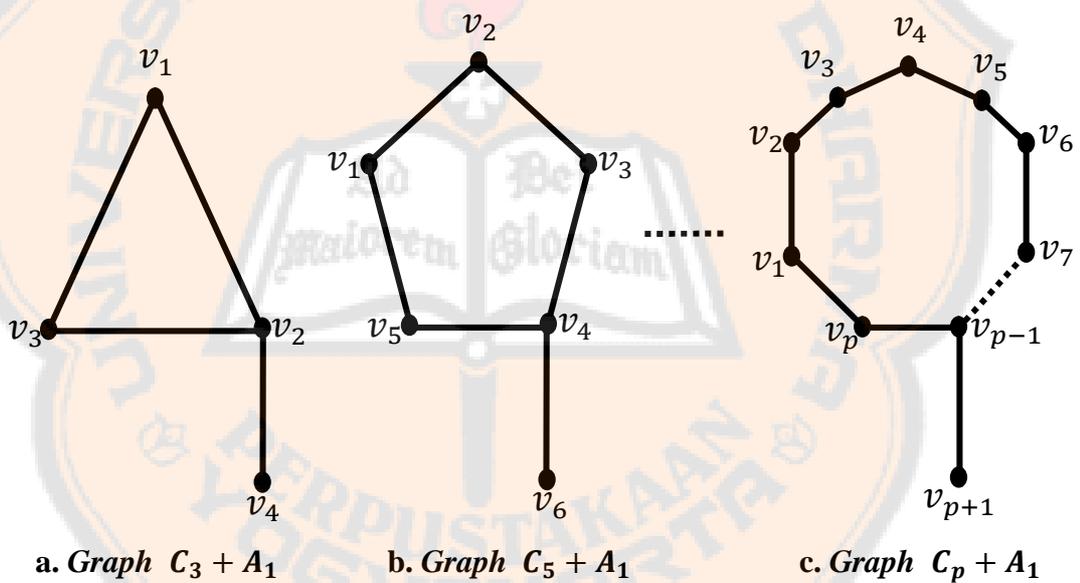
$$w_f(v_i) = \begin{cases} f(x_i) + f(x_i x_{i+1}) + f(x_n x_i), & i = 1 \\ f(x_i) + f(x_i x_{i+1}) + f(x_{i-1} x_i), & i = 2, \dots, n - 2 \\ f(x_i) + f(x_i x_{i+1}) + f(x_{i-1} x_i) + f(x_{n+1} x_i), & i = n - 1 \\ f(x_i) + f(x_i x_{i+1}) + f(x_n x_i), & i = n \end{cases}$$

**4.2 Pelabelan Total Tak Ajaib Titik pada Graf Sikel dengan Tambahan Satu**

**Anting ( $C_p + A_1$ )**

Graf sikel dengan tambahan satu anting ( $C_p + A_1$ ) merupakan perkembangan bentuk dari graf sikel yaitu graf sikel yang ditambahkan satu titik diluar  $C_p$  dan satu sisi yang menghubungkan titik tersebut dengan graf sikel tersebut.

Berikut ini beberapa contoh dari graf sikel dengan tambahan satu anting ( $C_p + A_1$ ).



**Gambar 4.1 Graf sikel dengan tambahan satu anting ( $C_p + A_1$ )**

Pada graf sikel dengan tambahan satu anting ( $C_p + A_1$ ) dapat dilihat pada Gambar 4.1, setiap sikel terdapat  $p$  buah titik dan  $p$  buah sisi dan satu buah titik di luar sikel yang dihubungkan langsung dengan sebuah sisi ke graf sikel tersebut. Dalam hal ini titik dan sisi yang menjadi anting untuk graf sikel

merupakan titik ke  $p+1$  dan sisi ke  $p+1$ , sehingga jumlah total dari titik dan sisi pada graf sikel dengan tambahan satu anting  $(C_p + A_1)$  adalah  $2p+2$ .

Pada pelabelan total tak ajaib titik setiap label titik dihitung satu kali dan label sisi dihitung dua kali akibatnya :

$$\begin{aligned}
 S_v + 2S_e &= S_w \\
 S_v + 2S_e &= a + (a + d) + (a + 2d) + \dots + (a + pd) \\
 S_v + S_e + S_e &= a + (a + d) + (a + 2d) + \dots + (a + pd) \\
 1 + 2 + \dots + (2p + 2) + S_e &= (p + 1)a + (1 + 2 + \dots + n)d \\
 (p + 1)(2p + 3) + S_e &= (p + 1)a + \left(\frac{p(p + 1)}{2}\right)d \quad (4.1)
 \end{aligned}$$

Berikut ini beberapa teorema tentang batas nilai  $a$  dan  $d$  agar graf sikel dengan tambahan satu anting  $(C_p + A_1)$  mempunyai  $(a, d)$  VATL untuk semua  $p \geq 3$ .

**Teorema 4.2.1**

Setiap graf sikel dengan tambahan satu anting  $(C_p + A_1)$  mempunyai  $(a, d)$  VATL dengan  $a \geq 3$  dan  $d \leq 8$  untuk semua  $p \geq 3$ .

**Bukti :**

Karena pelabelan dimulai dari angka 1 sampai dengan jumlah total titik dan sisi, maka bobot titik terkecil adalah 3, ambil label – labelnya 1 dan 2 atau  $a = 1 + 2 \geq 3$ . Label tersebut diambil dari jumlahan label satu titik dan satu sisi yang bersisian dengan titik tersebut yaitu pada anting dari graf sikel.

Bobot titik yang paling besar adalah

$$a + pd \leq (2p + 2) + (2p + 1) + 2p + (2p - 1) \\ \leq 8p + 2$$

Bobot titik yang paling besar ini diperoleh dari jumlahan satu titik dan tiga buah sisi yang bersisian dengan titik tersebut, dua sisi pada *cycle* dan satu sisi pada anting dari graf sikel. Karena jumlah total titik dan sisi adalah  $2p+2$  maka bobot terbesarnya dihitung mundur mulai dari jumlah total titik dan sisi, sehingga diperoleh  $(2p+2) + (2p+1) + 2p + (2p-1)$ .

Untuk  $a = 3$  diperoleh

$$3 + pd \leq 8p + 2$$

$$pd \leq 8p - 1$$

$$d \leq \frac{8p - 1}{p} \approx 8$$

Jadi untuk sebarang  $p \geq 3$  diperoleh  $a \geq 3$  dan  $d \leq 8$ . □

Selanjutnya dicari batasan dari  $a$  sehingga graf sikel dengan tambahan satu anting  $(C_p + A_1)$  dapat diberi label. Karena dari hasil diatas diperoleh  $d \leq 8$ , maka ada 8 kemungkinan untuk nilai  $d$ , yaitu  $d = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,$  dan  $8$ . Bobot titik yang paling besar adalah  $a + pd \leq 8p + 2$ .

1. Untuk  $d = 1$

Bobot titik yang paling besar adalah  $a + pd \leq 8p + 2$ .

Dengan nilai  $d = 1$  diperoleh

$$a + p \leq 8p + 2$$

$$a \leq 7p + 2$$

Jadi untuk  $d = 1$  batasan nilai  $a$  adalah  $3 \leq a \leq 7p + 2$ .

2. Untuk  $d = 2$

Bobot titik yang paling besar adalah  $a + pd \leq 8p + 2$ .

Dengan nilai  $d = 2$  diperoleh

$$a + 2p \leq 8p + 2$$

$$a \leq 6p + 2$$

Jadi untuk  $d = 2$  batasan nilai  $a$  adalah  $3 \leq a \leq 6p + 2$ .

3. Untuk  $d = 3$

Bobot titik yang paling besar adalah  $a + pd \leq 8p + 2$ .

Dengan nilai  $d = 3$  diperoleh

$$a + 3p \leq 8p + 2$$

$$a \leq 5p + 2$$

Jadi untuk  $d = 3$  batasan nilai  $a$  adalah  $3 \leq a \leq 5p + 2$ .

4. Untuk  $d = 4$

Bobot titik yang paling besar adalah  $a + pd \leq 8p + 2$ .

Dengan nilai  $d = 4$  diperoleh

$$a + 4p \leq 8p + 2$$

$$a \leq 4p + 2$$

Jadi untuk  $d = 4$  batasan nilai  $a$  adalah  $3 \leq a \leq 4p + 2$ .

5. Untuk  $d = 5$

Bobot titik yang paling besar adalah  $a + pd \leq 8p + 2$ .

Dengan nilai  $d = 5$  diperoleh

$$a + 5p \leq 8p + 2$$

$$a \leq 3p + 2$$

Jadi untuk  $d = 5$  batasan nilai  $a$  adalah  $3 \leq a \leq 3p + 2$ .

6. Untuk  $d = 6$

Bobot titik yang paling besar adalah  $a + pd \leq 8p + 2$ .

Dengan nilai  $d = 6$  diperoleh

$$a + 6p \leq 8p + 2$$

$$a \leq 2p + 2$$

Jadi untuk  $d = 6$  batasan nilai  $a$  adalah  $3 \leq a \leq 2p + 2$ .

7. Untuk  $d = 7$

Bobot titik yang paling besar adalah  $a + pd \leq 8p + 2$ .

Dengan nilai  $d = 7$  diperoleh

$$a + 7p \leq 8p + 2$$

$$a \leq p + 2$$

Jadi untuk  $d = 7$  batasan nilai  $a$  adalah  $3 \leq a \leq p + 2$ .

8. Untuk  $d = 8$

Bobot titik yang paling besar adalah  $a + pd \leq 8p + 2$ .

Dengan nilai  $d = 8$  diperoleh

$$a + 8p \leq 8p + 2$$

$$a \leq 2$$

Batas nilai  $a$  tersebut tidak memenuhi untuk sebarang  $p \geq 3$  karena

Teorema 4.2.1 mengharuskan nilai  $a \geq 3$ .

Berikut ini diberikan pula teorema tentang nilai  $a$  jika label untuk titik dan sisi sudah tertentu.

**Teorema 4.2.2**

Jika label untuk sisi adalah himpunan bilangan bulat positif  $\{1, 2, \dots, p + 1\}$  dan label untuk titik adalah himpunan bilangan bulat positif  $\{p + 2, p + 3, \dots, 2p + 2\}$  maka nilai  $a$  adalah  $\frac{p(5-d)}{2} + 4$ .

**Bukti :**

Karena label untuk sisi adalah himpunan bilangan bulat positif  $\{1, 2, \dots, p + 1\}$ , sehingga diperoleh :

$$S_e = 1 + 2 + \dots + (p + 1) = \frac{(p + 1)(p + 2)}{2} \tag{4.2}$$

Substitusi (4.2) ke persamaan (4.1), diperoleh :

$$(p + 1)(2p + 3) + S_e = (p + 1)a + \left(\frac{p(p + 1)}{2}\right) d$$

$$(p + 1)(2p + 3) + \frac{(p + 1)(p + 2)}{2} = (p + 1)a + \left(\frac{p(p + 1)}{2}\right) d$$

$$(2p + 3) + \frac{(p + 2)}{2} = a + \left(\frac{p}{2}\right) d$$

$$4p + 6 + p + 2 = 2a + pd$$

$$5p + 8 = 2a + pd$$

$$2a = 5p - pd + 8$$

$$a = \frac{5p - pd + 8}{2}$$

$$a = \frac{p(5 - d)}{2} + 4 \tag{4.3}$$

Sehingga nilai  $a$  adalah  $\frac{p(5-d)}{2} + 4$ . □

Teorema 4.2.2 menyatakan bahwa jika label untuk sisi adalah himpunan bilangan bulat positif  $\{1, 2, \dots, p + 1\}$  dan label untuk titik adalah himpunan bilangan bulat positif  $\{p + 2, p + 3, \dots, 2p + 2\}$  maka nilai  $a$  adalah  $\frac{p(5-d)}{2} + 4$ . Ini berakibat nilai  $d$  yang memenuhi hanya 1, 2, 3, 4, dan 5 karena untuk  $d = 6$  dan  $d = 7$  maka nilai  $a$  paling besar adalah 2, sedangkan Teorema 4.2.1 mengharuskan  $a \geq 3$ .

Selain itu Teorema 4.2.2 juga berakibat bahwa untuk jumlah titik ganjil nilai  $d$  yang memenuhi hanya 1, 3, dan 5, karena untuk  $d = 2$  dan  $d = 4$  nilai  $(5 - d)$  adalah genjil, jika jumlah titik ganjil maka nilai  $a$  adalah bilangan pecahan ini bertentangan dengan Definisi 2.2.3 tentang  $(a, d)$  VATL yang mengharuskan nilai  $a$  adalah bilangan bulat sehingga membentuk suatu barisan aritmatika.

Selanjutnya pada skripsi ini hanya akan dibahas pelabelan total tak ajaib titik pada graf sikel dengan tambahan satu anting  $(C_p + A_1)$  untuk nilai  $d = 1$  dan  $d = 3$ . Untuk  $d = 5$  peneliti belum dapat menemukan keberlakuannya pada graf sikel dengan tambahan satu anting  $(C_p + A_1)$ . Berikut ini diberikan teorema yang menunjukkan bahwa  $C_p + A_1$  mempunyai VATL untuk  $d = 1$  dan  $d = 3$ .

Berikut ini diberikan Teorema yang menunjukkan bahwa  $C_p + A_1$  mempunyai VATL untuk  $d = 1$ .

**Teorema 4.2.3**

Pada graf sikel dengan tambahan satu anting  $(C_p + A_1)$  terdapat  $(2p+4, 1)$  VATL untuk  $p \geq 3$  dan  $p$  ganjil.

**Bukti :**

Konstruksi graf sikel dengan tambahan satu anting  $(C_p + A_1)$  dengan label titik sebagai berikut :

$$f(x_i) = i + (p + 1) \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, p + 1$$

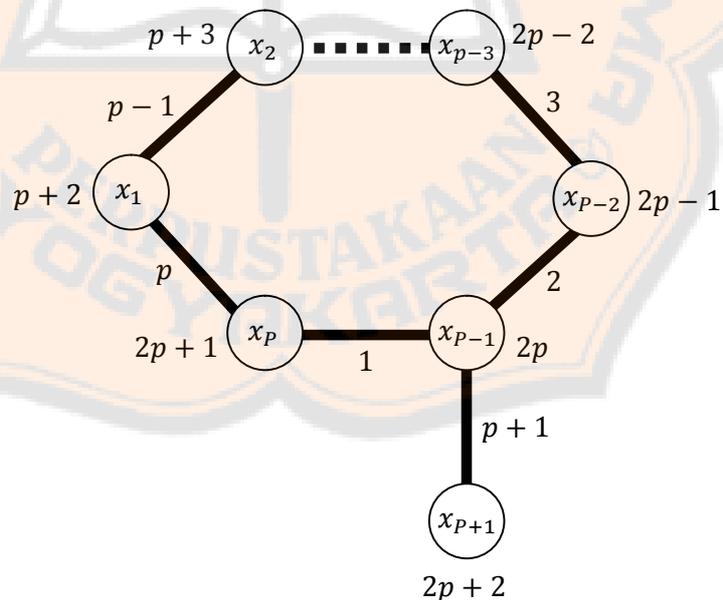
Sedangkan label dari sisi adalah sebagai berikut :

$$f(x_i x_{i+1}) = p - i \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, p - 1$$

$$f(x_p x_1) = p$$

$$f(x_{p-1} x_{p+1}) = p + 1$$

Ilustrasi dari konstruksi pelabelan diatas adalah sebagai berikut :



**Gambar 4.2 Ilustrasi Konstruksi Pelabelan**

Dari konstruksi pelabelan di atas, terlihat bahwa label untuk sisi merupakan bilangan bulat positif mulai dari 1 sampai dengan  $p+1$  dan label untuk titik merupakan bilangan bulat positif mulai dari  $p+2$  sampai dengan  $2p+2$ , label untuk sisi kecil sedangkan label untuk titik besar karena label untuk sisi paling besar hanya  $p+1$  sedangkan label terkecil untuk titik adalah  $p+2$ .

Karena label untuk sisi adalah bilangan bulat positif  $\{1, 2, \dots, p+1\}$  dan label untuk titik adalah bilangan bulat positif  $\{p+2, p+3, \dots, 2p+2\}$ , sehingga menurut Teorema 4.2.2 maka nilai  $a$  adalah

$$a = \frac{p(5-d)}{2} + 4$$

Untuk  $d = 1$ , maka persamaan diatas menjadi

$$a = \frac{p(5-d)}{2} + 4$$

$$a = \frac{p(5-1)}{2} + 4$$

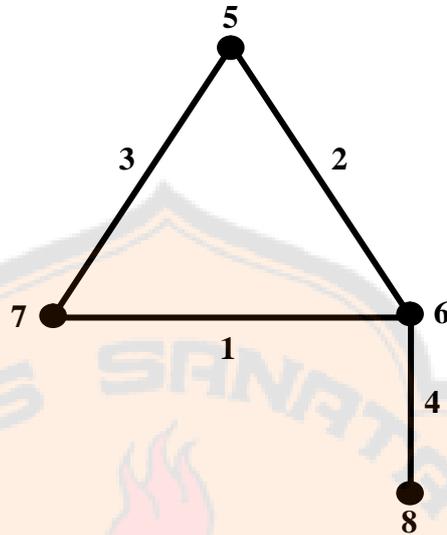
$$a = \frac{4p}{2} + 4$$

$$a = 2p + 4$$

Jadi terbukti bahwa pada graf sikel dengan tambahan satu anting  $(C_p + A_1)$  terdapat  $(2p+4, 1)$  VATL untuk  $p \geq 3$  dan  $p$  ganjil. □

Sebagai ilustrasi dari Teorema 4.2.3 diberikan contoh pelabelan untuk beberapa graf sikel dengan tambahan satu anting  $(C_p + A_1)$  dengan  $p$  ganjil dan  $p \geq 3$ .

**Contoh 1 :**



**Gambar 4.3 (10, 1) VATL pada  $C_3 + A_1$**

Gambar 4.3 merupakan contoh pelabelan graf siklus dengan tambahan satu anting untuk  $C_3 + A_1$ , karena  $p = 3$  maka pelabelannya adalah (10, 1)

VATL. Cara pelabelan titik dan sisinya adalah sebagai berikut :

Untuk pelabelan titik :

$$f(x_1) = 1 + (3 + 1) = 5$$

$$f(x_2) = 2 + (3 + 1) = 6$$

$$f(x_3) = 3 + (3 + 1) = 7$$

$$f(x_4) = 4 + (3 + 1) = 8$$

Untuk pelabelan sisi :

$$f(x_1x_2) = 3 - 1 = 2$$

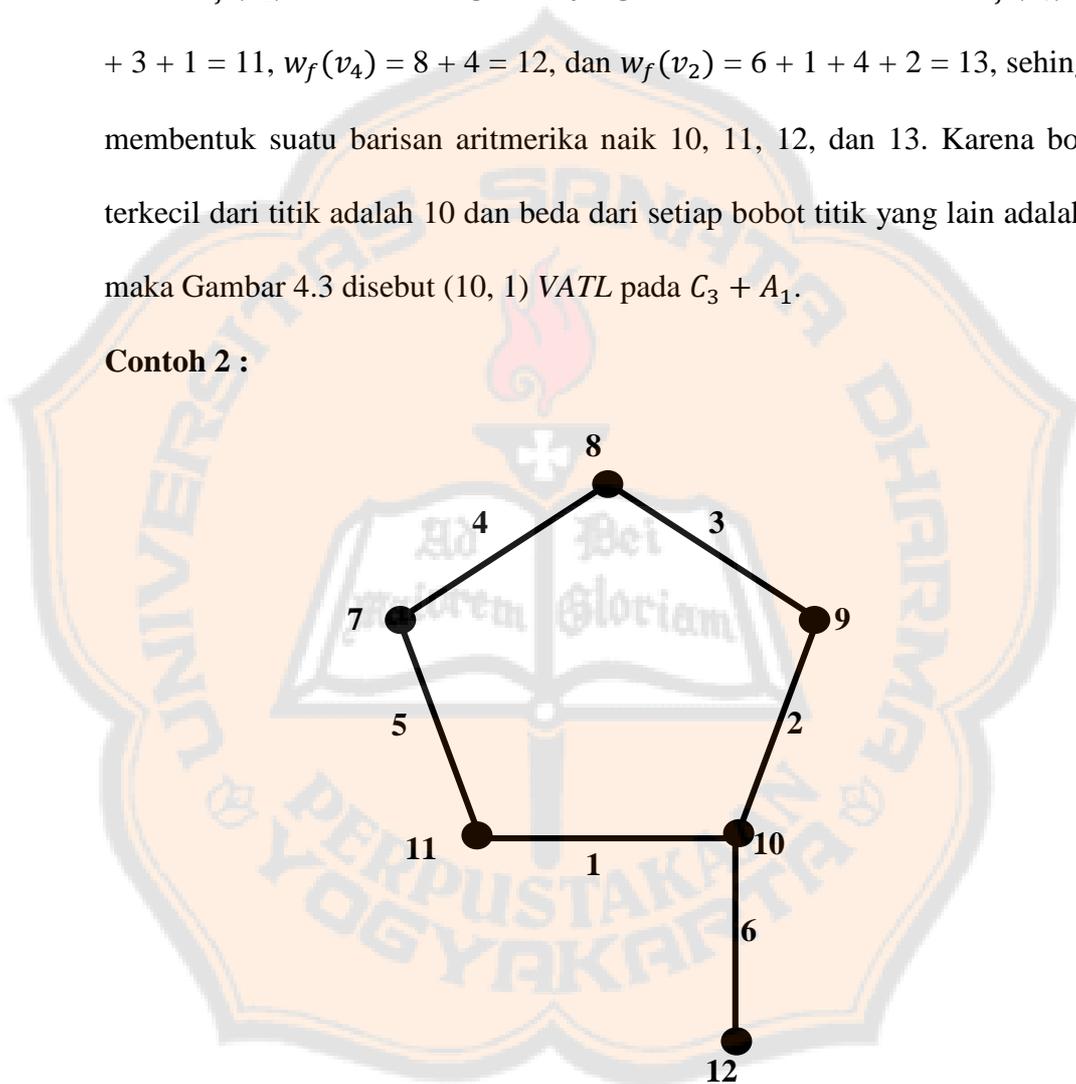
$$f(x_2x_3) = 3 - 2 = 1$$

$$f(x_3x_1) = 3$$

$$f(x_2x_4) = 4$$

Pada Gambar 4.3 bobot terkecil dari titiknya adalah  $5 + 2 + 3 = 10$  yaitu bobot pada titik dengan label 5 atau bobot titik ke-1, untuk selanjutnya ditulis  $w_f(v_1)$ . Bobot dari tiga titik yang lain berturut-turut adalah  $w_f(v_3) = 7 + 3 + 1 = 11$ ,  $w_f(v_4) = 8 + 4 = 12$ , dan  $w_f(v_2) = 6 + 1 + 4 + 2 = 13$ , sehingga membentuk suatu barisan aritmerika naik 10, 11, 12, dan 13. Karena bobot terkecil dari titik adalah 10 dan beda dari setiap bobot titik yang lain adalah 1, maka Gambar 4.3 disebut  $(10, 1)$  VATL pada  $C_3 + A_1$ .

**Contoh 2 :**



**Gambar 4.4 (14, 1) VATL pada  $C_5 + A_1$**

Gambar 4.4 merupakan contoh pelabelan graf siklus dengan tambahan satu anting untuk  $C_5 + A_1$ , karena  $p = 5$  maka pelabelannya adalah  $(14, 1)$  VATL. Cara pelabelan titik dan sisinya adalah sebagai berikut :

Untuk pelabelan titik :

$$f(x_1) = 1 + (5 + 1) = 7$$

$$f(x_2) = 2 + (5 + 1) = 8$$

$$f(x_3) = 3 + (5 + 1) = 9$$

$$f(x_4) = 4 + (5 + 1) = 10$$

$$f(x_5) = 5 + (5 + 1) = 11$$

$$f(x_6) = 6 + (5 + 1) = 12$$

Untuk pelabelan sisi :

$$f(x_1x_2) = 5 - 1 = 4$$

$$f(x_2x_3) = 5 - 2 = 3$$

$$f(x_3x_4) = 5 - 3 = 2$$

$$f(x_4x_5) = 5 - 4 = 1$$

$$f(x_5x_1) = 5$$

$$f(x_4x_6) = 6$$

Pada Gambar 4.4 bobot terkecil dari titiknya adalah  $9 + 2 + 3 = 14$  yaitu bobot pada titik dengan label 9 atau bobot titik ke-3, untuk selanjutnya ditulis  $w_f(v_3)$ . Bobot dari titik yang lain berturut-turut adalah  $w_f(v_2) = 8 + 3 + 4 = 15$ ,  $w_f(v_1) = 7 + 5 + 4 = 16$ ,  $w_f(v_5) = 11 + 5 + 1 = 17$ ,  $w_f(v_6) = 12 + 6 = 18$ , dan  $w_f(v_4) = 10 + 1 + 6 + 2 = 19$ , sehingga membentuk suatu barisan aritmerika naik 14, 15, 16, 17, 18 dan 19. Karena bobot terkecil dari titik adalah 14 dan beda dari setiap bobot titik yang lain adalah 1, maka Gambar 4.4 disebut  $(14, 1)$  VATL pada  $C_5 + A_1$ .

Teorema selanjutnya diberikan untuk menunjukkan bahwa  $C_p + A_1$  juga mempunyai VATL untuk  $d = 3$ .

**Teorema 4.2.4**

Pada graf sikel dengan tambahan satu anting ( $C_p + A_1$ ) terdapat  $(p+4, 3)$  VATL untuk  $p \geq 3$  dan  $p$  ganjil.

**Bukti :**

Konstruksi graf sikel dengan tambahan satu anting ( $C_p + A_1$ ) dengan label titik sebagai berikut :

Untuk  $p = 3$

$$f(x_i) = \begin{cases} 2 + i & ; i = p \text{ dan } p + 1 \\ 2p + 2 & ; i = p - 1 \\ (2p + 2) - i & ; i = 1 \end{cases}$$

Untuk  $p = 5, 7, 9, 11, \dots$

$$f(x_i) = \begin{cases} 2p & ; i = p \\ 2p + 2 & ; i = p - 1 \\ p + 3 & ; i = p + 1 \\ (p + 2) + \left(i - \frac{p - 3}{2}\right) \cdot (2) & ; i = \frac{p - 3}{2}, \frac{p - 1}{2}, \dots, p - 2 \\ (2p - 2) + (i - 1) \cdot (-2) & ; i = 1, 2, \dots, \frac{p - 5}{2} \text{ untuk } p > 5 \end{cases}$$

Sedangkan label dari sisi adalah sebagai berikut :

Untuk  $p = 3$

$$f(x_i x_{i+1}) = (p + 2) - i \quad ; i = 1 \text{ dan } 2$$

$$f(x_p x_1) = p - 1$$

$$f(x_{p-1} x_{p+1}) = 1$$

Untuk  $p = 5, 7, 9, 11, \dots$

$$f(x_i x_{i+1}) = \begin{cases} p & ; i = p - 1 \\ p + 1 & ; i = p - 2 \\ 2 + \left(i - \frac{p-3}{2}\right) \cdot (2) & ; i = \frac{p-3}{2}, \frac{p-1}{2}, \dots, p - 3 \\ 3 + \left(i - \frac{p-5}{2}\right) \cdot (-2) & ; i = 1, 2, \dots, \frac{p-5}{2} \text{ untuk } p > 5 \end{cases}$$

$$f(x_p x_1) = n - 2$$

$$f(x_{p-1} x_{p+1}) = 1$$

Dari konstruksi pelabelan di atas, terlihat bahwa label untuk sisi merupakan bilangan bulat positif mulai dari 1 sampai dengan  $p+1$  dan label untuk titik merupakan bilangan bulat positif mulai dari  $p+2$  sampai dengan  $2p+2$ , label untuk sisi kecil sedangkan label untuk titik besar karena label untuk sisi paling besar hanya  $p+1$  sedangkan label terkecil untuk titik adalah  $p+2$ .

Karena label untuk sisi adalah bilangan bulat positif  $\{1, 2, \dots, p + 1\}$  dan label untuk titik adalah bilangan bulat positif  $\{p + 2, p + 3, \dots, 2p + 2\}$ , sehingga menurut Teorema 4.2.2 maka nilai  $a$  adalah

$$a = \frac{p(5 - d)}{2} + 4$$

Untuk  $d = 3$ , maka persamaan diatas menjadi

$$a = \frac{p(5 - 3)}{2} + 4$$

$$a = \frac{p(5 - 3)}{2} + 4$$

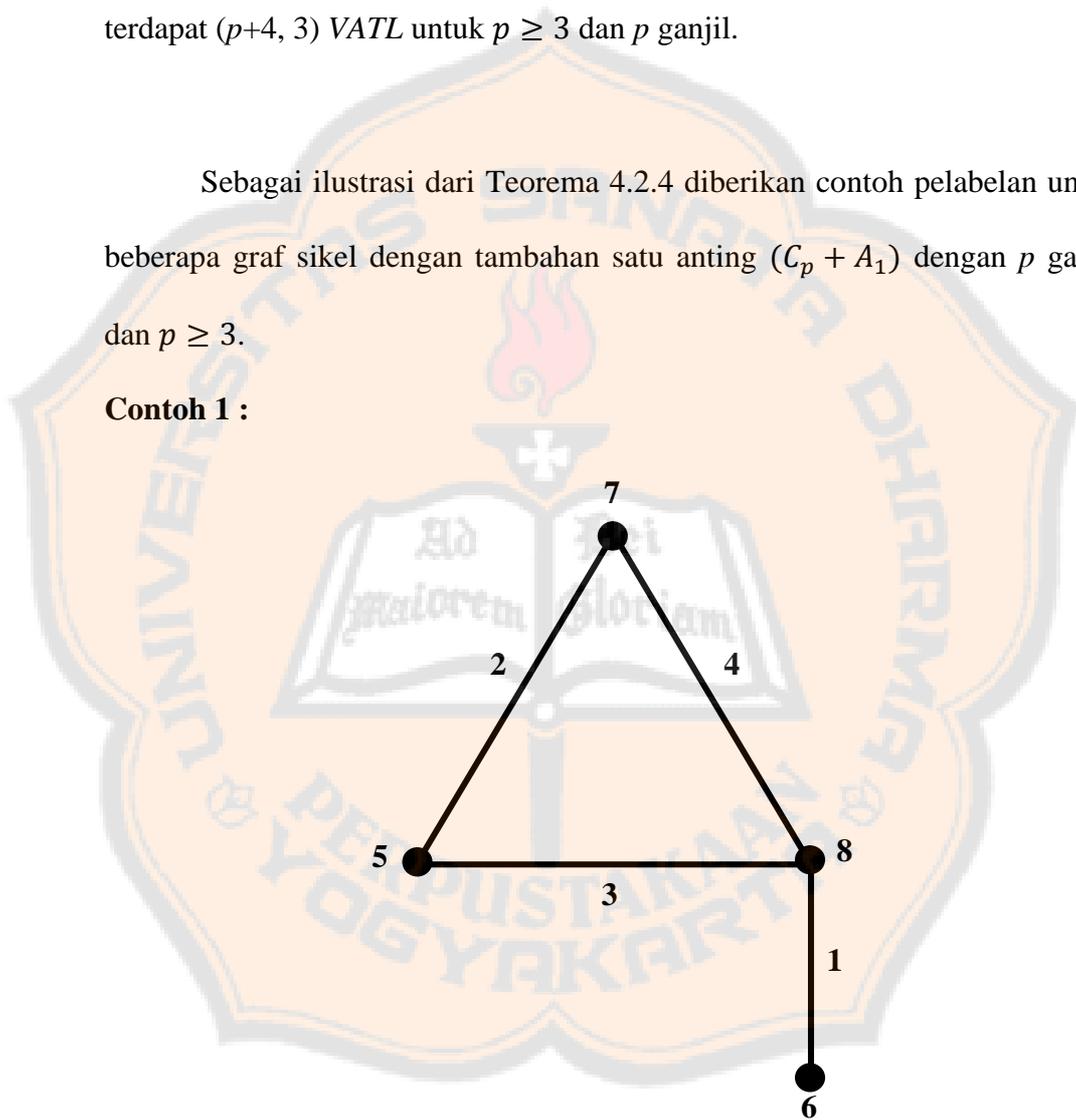
$$a = \frac{2p}{2} + 4$$

$$a = p + 4$$

Jadi terbukti bahwa pada graf sikel dengan tambahan satu anting ( $C_p + A_1$ ) terdapat  $(p+4, 3)$  VATL untuk  $p \geq 3$  dan  $p$  ganjil.  $\square$

Sebagai ilustrasi dari Teorema 4.2.4 diberikan contoh pelabelan untuk beberapa graf sikel dengan tambahan satu anting ( $C_p + A_1$ ) dengan  $p$  ganjil dan  $p \geq 3$ .

**Contoh 1 :**



**Gambar 4.5**  $(7, 3)$  VATL pada  $C_3 + A_1$

Gambar 4.5 merupakan contoh pelabelan graf sikel dengan tambahan satu anting untuk  $C_3 + A_1$ , karena  $p = 3$  maka pelabelannya adalah  $(7, 3)$  VATL. Cara pelabelan titik dan sisinya adalah sebagai berikut :

Untuk pelabelan titik :

$$f(x_1) = (2(3) + 2) - 1 = 7$$

$$f(x_2) = (2(3) + 2) = 8$$

$$f(x_3) = 2 + 3 = 5$$

$$f(x_4) = 2 + 4 = 6$$

Untuk pelabelan sisi :

$$f(x_1x_2) = (3 + 2) - 1 = 4$$

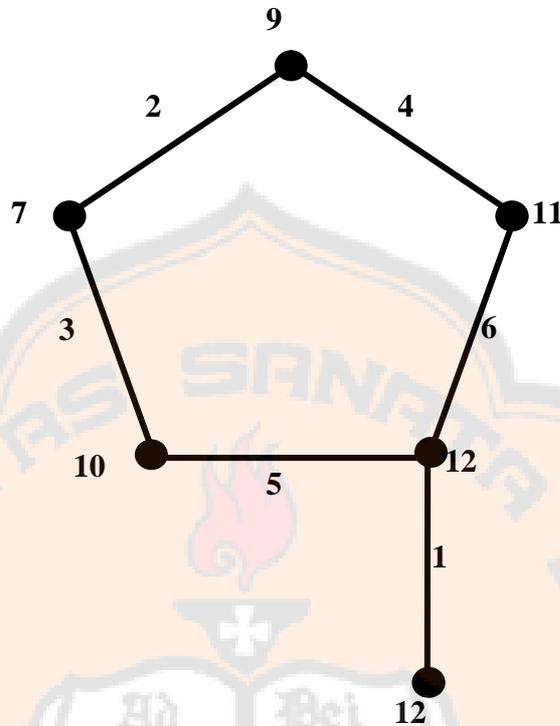
$$f(x_2x_3) = (3 + 2) - 2 = 3$$

$$f(x_3x_1) = 3 - 1 = 2$$

$$f(x_2x_4) = 1$$

Pada Gambar 4.5 bobot terkecil dari titiknya adalah  $6 + 1 = 7$  yaitu bobot pada titik dengan label 6 atau bobot titik ke-4, untuk selanjutnya ditulis  $w_f(v_4)$ . Bobot dari tiga titik yang lain berturut-turut adalah  $w_f(v_3) = 5 + 3 + 2 = 10$ ,  $w_f(v_1) = 7 + 4 + 2 = 13$ , dan  $w_f(v_2) = 8 + 1 + 4 + 3 = 16$ , sehingga membentuk suatu barisan aritmerika naik 7, 10, 13, dan 16. Karena bobot terkecil dari titik adalah 7 dan beda dari setiap bobot titik yang lain adalah 3, maka Gambar 4.5 disebut  $(7, 3)$  VATL pada  $C_3 + A_1$ . •

Contoh 2 :



Gambar 4.6 (9, 3) VATL pada  $C_5 + A_1$

Gambar 4.6 merupakan contoh pelabelan graf siklus dengan tambahan satu anting untuk  $C_5 + A_1$ , karena  $p = 5$  maka pelabelannya adalah (9, 3) VATL. Cara pelabelan titik dan sisinya adalah sebagai berikut :

Untuk pelabelan titik :

$$f(x_1) = (5 + 2) + \left( \frac{5 - 3}{2} - \frac{5 - 3}{2} \right) \cdot (2) = 7$$

$$f(x_2) = (5 + 2) + \left( \frac{5 - 1}{2} - \frac{5 - 3}{2} \right) \cdot (2) = 9$$

$$f(x_3) = (5 + 2) + \left( 3 - \frac{5 - 3}{2} \right) \cdot (2) = 11$$

$$f(x_4) = 2(5) + 2 = 12$$

$$f(x_5) = 2(5) = 10$$

$$f(x_6) = 5 + 3 = 8$$

Untuk pelabelan sisi :

$$f(x_1x_2) = 2 + \left( \frac{5-3}{2} - \frac{5-3}{2} \right) \cdot (2) = 2$$

$$f(x_2x_3) = 2 + \left( \frac{5-1}{2} - \frac{5-3}{2} \right) \cdot (2) = 4$$

$$f(x_3x_4) = 5 + 1 = 6$$

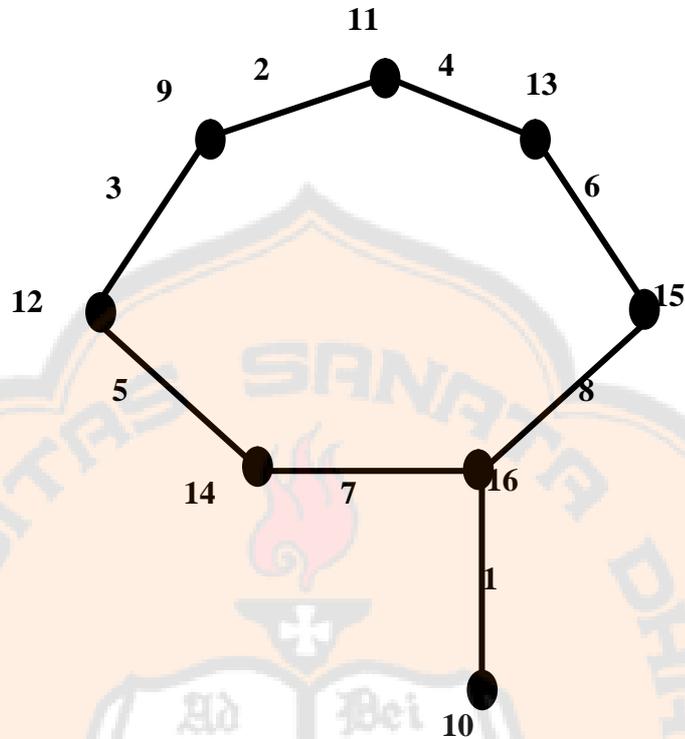
$$f(x_4x_5) = 5$$

$$f(x_5x_1) = 5 - 2 = 3$$

$$f(x_4x_6) = 1$$

Pada Gambar 4.6 bobot terkecil dari titiknya adalah  $8 + 1 = 9$  yaitu bobot pada titik dengan label 8 atau bobot titik ke-6, untuk selanjutnya ditulis  $w_f(v_6)$ . Bobot dari titik yang lain berturut-turut adalah  $w_f(v_1) = 7 + 3 + 2 = 12$ ,  $w_f(v_2) = 9 + 2 + 4 = 15$ ,  $w_f(v_5) = 10 + 5 + 3 = 18$ ,  $w_f(v_3) = 11 + 6 + 4 = 21$ , dan  $w_f(v_4) = 12 + 1 + 6 + 5 = 24$ , sehingga membentuk suatu barisan aritmerika naik 9, 12, 15, 18, 21 dan 24. Karena bobot terkecil dari titik adalah 9 dan beda dari setiap bobot titik yang lain adalah 3, maka Gambar 4.6 disebut (9, 3) VATL pada  $C_5 + A_1$ .

Contoh 3 :



Gambar 4.7 (11, 3) VATL pada  $C_7 + A_1$

Gambar 4.7 merupakan contoh pelabelan graf sikel dengan tambahan satu anting untuk  $C_7 + A_1$ , karena  $p = 7$  maka pelabelannya adalah (11, 3) VATL. Cara pelabelan titik dan sisinya adalah sebagai berikut :

Untuk pelabelan titik :

$$f(x_1) = (2(7) - 2) + (1 - 1).(-2) = 12$$

$$f(x_2) = (7 + 2) + \left(\frac{7-3}{2} - \frac{7-3}{2}\right). (2) = 9$$

$$f(x_3) = (7 + 2) + \left(\frac{7-1}{2} - \frac{7-3}{2}\right). (2) = 11$$

$$f(x_4) = (7 + 2) + \left(\frac{7+1}{2} - \frac{7-3}{2}\right). (2) = 13$$

$$f(x_5) = (7 + 2) + \left(5 - \frac{7-3}{2}\right) \cdot (2) = 15$$

$$f(x_6) = 2(7) + 2 = 16$$

$$f(x_7) = 2(7) = 14$$

$$f(x_8) = 7 + 3 = 10$$

Untuk pelabelan sisi :

$$f(x_1x_2) = 3 + \left(1 - \frac{7-5}{2}\right) \cdot (-2) = 3$$

$$f(x_2x_3) = 2 + \left(\frac{7-3}{2} - \frac{7-3}{2}\right) \cdot (2) = 2$$

$$f(x_3x_4) = 2 + \left(\frac{7-1}{2} - \frac{7-3}{2}\right) \cdot (2) = 4$$

$$f(x_4x_5) = 2 + \left(4 - \frac{7-3}{2}\right) \cdot (2) = 6$$

$$f(x_5x_6) = 7 + 1 = 8$$

$$f(x_6x_7) = 7$$

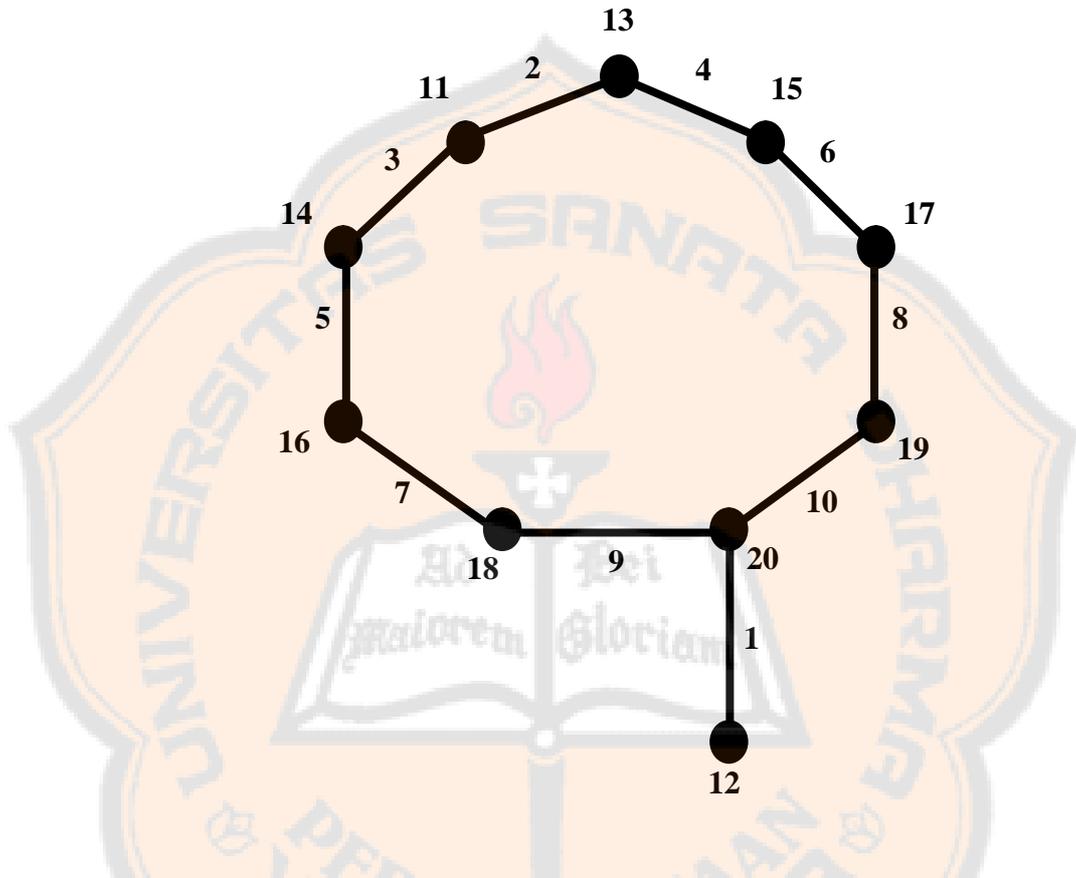
$$f(x_7x_1) = 7 - 2 = 5$$

$$f(x_5x_8) = 1$$

Pada Gambar 4.7 bobot terkecil dari titiknya adalah  $10 + 1 = 11$  yaitu bobot pada titik dengan label 10 atau bobot titik ke-8, untuk selanjutnya ditulis  $w_f(v_8)$ . Bobot dari titik yang lain berturut-turut adalah  $w_f(v_2) = 9 + 3 + 2 = 14$ ,  $w_f(v_3) = 11 + 2 + 4 = 17$ ,  $w_f(v_1) = 12 + 5 + 3 = 20$ ,  $w_f(v_4) = 13 + 6 + 4 = 23$ ,  $w_f(v_7) = 14 + 5 + 7 = 26$ ,  $w_f(v_5) = 15 + 6 + 8 = 29$ , dan  $w_f(v_6) = 16 + 1 + 7 + 8 = 32$ , sehingga membentuk suatu barisan aritmerika naik 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29 dan 32. Karena bobot terkecil dari titik adalah 11 dan beda dari

setiap bobot titik yang lain adalah 3, maka Gambar 4.7 disebut  $(11, 3)$  VATL pada  $C_7 + A_1$ .

**Contoh 4 :**



**Gambar 4.8  $(13, 3)$  VATL pada  $C_9 + A_1$**

Gambar 4.8 merupakan contoh pelabelan graf sikel dengan tambahan satu anting untuk  $C_9 + A_1$ , karena  $p = 9$  maka pelabelannya adalah  $(13, 3)$  VATL. Cara pelabelan titik dan sisinya adalah sebagai berikut :

Untuk pelabelan titik :

$$f(x_1) = (2(9) - 2) + (1 - 1) \cdot (-2) = 16$$

$$f(x_2) = (2(9) - 2) + (2 - 1) \cdot (-2) = 14$$

$$f(x_3) = (9 + 2) + \left( \frac{9 - 3}{2} - \frac{9 - 3}{2} \right) \cdot (2) = 11$$

$$f(x_4) = (9 + 2) + \left(\frac{9-1}{2} - \frac{9-3}{2}\right) \cdot (2) = 13$$

$$f(x_5) = (9 + 2) + \left(5 - \frac{9-3}{2}\right) \cdot (2) = 15$$

$$f(x_6) = (9 + 2) + \left(6 - \frac{9-3}{2}\right) \cdot (2) = 17$$

$$f(x_7) = (9 + 2) + \left(7 - \frac{9-3}{2}\right) \cdot (2) = 19$$

$$f(x_8) = 2(9) + 2 = 20$$

$$f(x_9) = 2(9) = 18$$

$$f(x_{10}) = 9 + 3 = 12$$

Untuk pelabelan sisi :

$$f(x_1x_2) = 3 + \left(1 - \frac{9-5}{2}\right) \cdot (-2) = 5$$

$$f(x_2x_3) = 3 + \left(2 - \frac{9-5}{2}\right) \cdot (-2) = 3$$

$$f(x_3x_4) = 2 + \left(\frac{9-3}{2} - \frac{9-3}{2}\right) \cdot (2) = 2$$

$$f(x_4x_5) = 2 + \left(\frac{9-1}{2} - \frac{9-3}{2}\right) \cdot (2) = 4$$

$$f(x_5x_6) = 2 + \left(5 - \frac{9-3}{2}\right) \cdot (2) = 6$$

$$f(x_6x_7) = 2 + \left(6 - \frac{9-3}{2}\right) \cdot (2) = 8$$

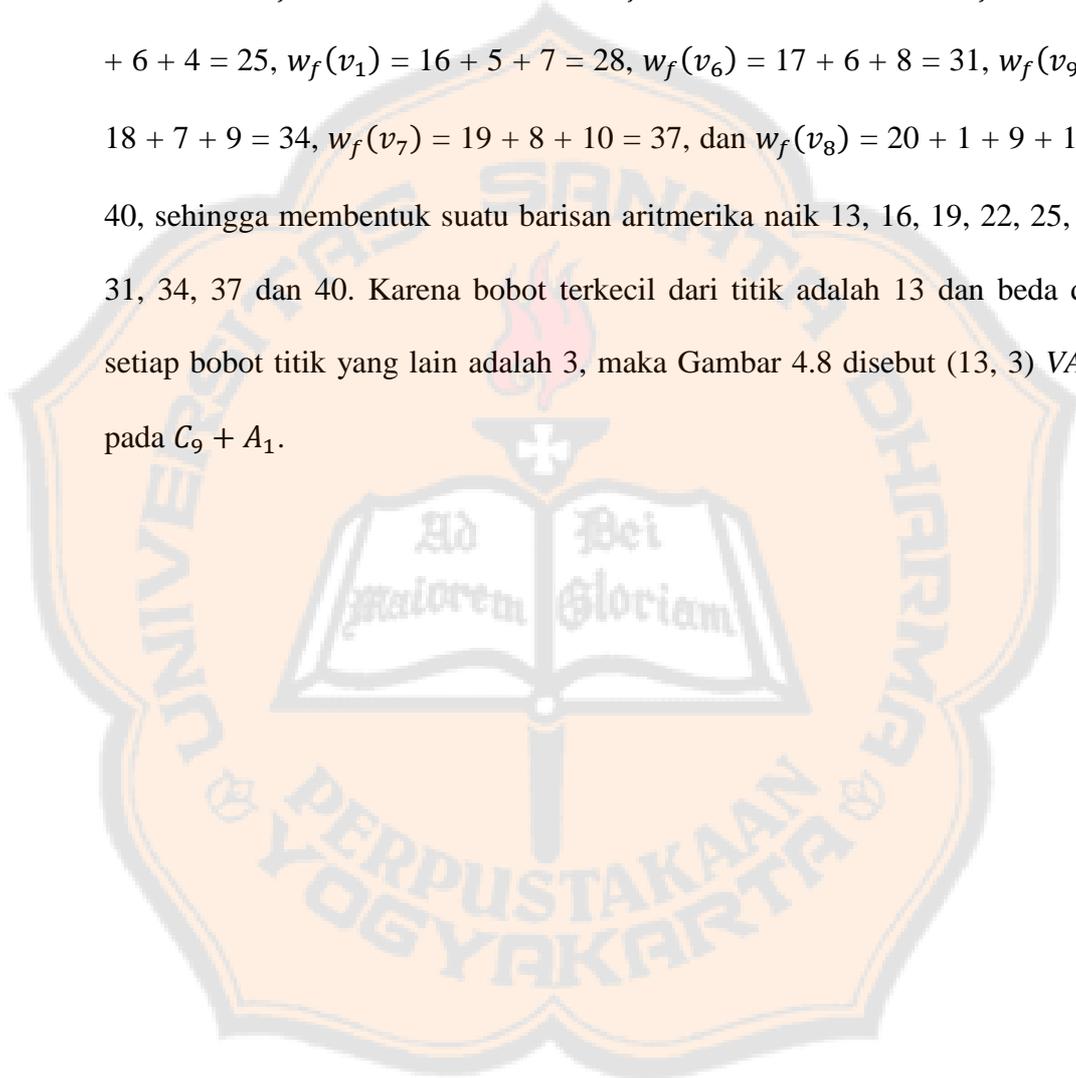
$$f(x_7x_8) = 9 + 1 = 10$$

$$f(x_8x_9) = 9$$

$$f(x_9x_{10}) = 7$$

$$f(x_{10}x_1) = 1$$

Pada Gambar 4.8 bobot terkecil dari titiknya adalah  $12 + 1 = 13$  yaitu bobot pada titik dengan label 12 atau bobot titik ke-10, untuk selanjutnya ditulis  $w_f(v_{10})$ . Bobot dari titik yang lain berturut-turut adalah  $w_f(v_3) = 11 + 3 + 2 = 16$ ,  $w_f(v_4) = 13 + 2 + 4 = 19$ ,  $w_f(v_2) = 14 + 5 + 3 = 22$ ,  $w_f(v_5) = 15 + 6 + 4 = 25$ ,  $w_f(v_1) = 16 + 5 + 7 = 28$ ,  $w_f(v_6) = 17 + 6 + 8 = 31$ ,  $w_f(v_9) = 18 + 7 + 9 = 34$ ,  $w_f(v_7) = 19 + 8 + 10 = 37$ , dan  $w_f(v_8) = 20 + 1 + 9 + 10 = 40$ , sehingga membentuk suatu barisan aritmerika naik 13, 16, 19, 22, 25, 28, 31, 34, 37 dan 40. Karena bobot terkecil dari titik adalah 13 dan beda dari setiap bobot titik yang lain adalah 3, maka Gambar 4.8 disebut  $(13, 3)$  VATL pada  $C_9 + A_1$ .



## BAB V

### PENUTUP

#### 5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil dari penelitian yang telah dilakukan, dapat disimpulkan bahwa graf siklus dengan tambahan satu anting  $C_p + A_1$  mempunyai sifat pelabelan total tak ajaib titik (VATL). Beberapa sifat pelabelan total tak ajaib titik pada graf siklus dengan tambahan satu anting  $C_p + A_1$  adalah sebagai berikut :

1. Setiap graf siklus dengan tambahan satu anting  $C_p + A_1$  mempunyai  $(a, d)$  VATL dengan  $a \geq 3$  dan  $d \leq 8$  untuk semua  $p \geq 3$ .
2. Jika label untuk sisi adalah himpunan bilangan bulat positif  $\{1, 2, 3, \dots, p + 1\}$  dan label untuk titiknya adalah himpunan bilangan bulat positif  $\{p + 2, p + 3, \dots, 2p + 2\}$  maka nilai dari  $a$  adalah  $\frac{p(5-d)}{2} + 4$ .
3. Untuk  $p \geq 3$  dan  $p$  ganjil, nilai dari  $d$  yang memenuhi hanya  $d = 1, 3,$  dan  $5$ , sedangkan untuk nilai  $d = 2$  dan  $4$  hanya untuk  $p \geq 3$  dan  $p$  genap. Nilai  $d = 6, 7,$  dan  $8$  tidak memenuhi untuk  $p \geq 3$ , baik untuk  $p$  genap maupun  $p$  ganjil.
4. Pada graf siklus dengan tambahan satu anting  $C_p + A_1$  terdapat  $(2p + 4, 1)$  VATL untuk  $p \geq 3$  dan  $p$  ganjil.
5. Pada graf siklus dengan tambahan satu anting  $C_p + A_1$  terdapat  $(p + 4, 3)$  VATL untuk  $p \geq 3$  dan  $p$  ganjil.

## 5.2 Saran

Untuk penelitian selanjutnya dapat dikembangkan keberlakuan pelabelan total tak ajaib titik pada graf sikel dengan tambahan satu anting  $C_p + A_1$  untuk  $p$  genap dan untuk nilai  $d$  yang lain maupun graf sikel dengan tambahan beberapa anting.



**DAFTAR PUSTAKA**

- Baca, M., dkk. (2003). “*Vertex Antimagic Total Labeling of Graph*”, *Discuss Math. Graph Theory*.
- Miryawati, L., Ratnasari, L., & Sumanto, Y.D. (2009). “*L(2,1) Labeling on Regular Tilling of The Plane and Outerplanar Graph*”, *Skripsi*. Semarang: Universitas Diponegoro.
- Prasetyo, D.A.B. (2008). “*Vertex Antimagic Total Labeling pada Multicycle dan Multicomplete Bipartite*”, *Thesis Math*. Surabaya: Institut Teknologi Sepuluh Nopember.
- Suryadi, D. (1996). *Matematika Diskrit*. Jakarta: Universitas Terbuka.
- Sutarno, H., Priatna, N., & Nurjanah (2005). *Matematika Diskrit*. Malang: UM Press.
- Sugeng, K. A. (2005). “*Magic and Antimagic Graphs*”, *Thesis. Math*. Victoria: School of Information Technology and Mathematical Sciences, University of Ballarat, Australia.
- Wallis, W.D. (2001). *Magic Graph*, Birkhauser.
- West, D.B. (2001). *An Introduction to Graph Theory, Second Edition*, Prentice Hall: Mathematics Departement, University of Illinois. Urbana.
- Wiitala, S.A. (1987). *Discrete Matematics : A Unified Approach*, New York: MacGraw-Hill, Inc.