EKSISTENSI DAN KETUNGGALAN PENYELESAIAN PERSAMAAN DIFERENSIAL ORDE SATU

SKRIPSI

Diajukan untuk Memenuhi Salah Satu Syarat
Memperoleh Gelar Sarjana Pendidikan
Program Studi Pendidikan Matematika

Oleh :

William Junior
NIM.081414029

PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA
JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
UNIVERSITAS SANATA DHARMA
YOGYAKARTA
2012

SKRIPSI

EKSISTENSI DAN KETUNGGALAN PENYELESAIAN
PERSAMAAN DIFERENSIAL ORDE SATU

Oleh :

William Junior
NIM.081414029

Telah disetujui oleh :

Pembimbing

Ch. Enny Murwaningtyas, S.Si., M.Si

Tanggal, 23 Agustus 2012

SKRIPSI

EKSISTENSI DAN KETUNGGALAN PENYELESAIAN PERSAMAAN DIFERENSIAL ORDE SATU

Dipersiapkan dan ditulis oleh

William Junior
NIM.081414029

Telah dipertahankan di depan Panitia Penguji
pada tanggal 30 Agustus 2012
dan dinyatakan memenuhi syarat

Susunan Panitia Penguji

Nama Lengkap		Tanda Tangan
Ketua	: Drs. A. Atmadi, M.Si	....
Sekretaris	: Dr. Marcellinus Andy Rudhito, S. Pd	....
Anggota	: Ch. Enny Murwaningtyas, S.Si., M.Si	....
Anggota	: Veronika Fitri Rianasari, S.Pd., M.Sc	....
Anggota	: Dr. Marcellinus Andy Rudhito, S. Pd	....

Yogyakarta, 30 Agustus 2012
Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan
Universitas Sanata Dharma
Dekan,

Rohandi, Ph.D

HALAMAN PERSEMBAHAN

Empat tahun yang kulalui di Universitas Sanata Dharma
Bukanlah suatu perjalanan yang singkat
Empat tahun ku menuntut ilmu, mencari pengalaman,
Mencari teman, sahabat dan jati diri
Kini, empat tahun itu telah usai
Telah kutuntaskan kewajiban dan hak belajarku
Setiap jam, hari, minggu, bulan dan tahun yang kulalui
Akan menjadi kenangan yang berharga bagiku

Tulisan ini hanyalah bagian kecil dari perjuangan empat tahun
Tulisan ini mungkin belum dapat mewakili apa yang kuperoleh
Namun, tulisan yang tidak sempurna ini, mewakili semangatku
Semangatku yang tetap hidup selama kuliah di Universitas ini
Semangat untuk memulai dan mengakhiri studiku.

Akhirnya, semua yang telah kudapat selama ini, termasuk karya ini
Kupersembahkan untuk Tuhan Yang Maha Esa, Papa dan Mamaku
Kakak dan Adikku, saudara-saudara yang telah mendukungku
Sahabat dan teman-temanku
Dan kupersembahkan pula untuk almamaterku, Universitas Sanata Dharma

Terimakasih Sanata Dharma
William Junior
~ 08 1414 029 ~

Yogyakarta, Agustus 2012

PERNYATAAN KEASLIAN KARYA

Saya nyatakan dengan sesungguhnya bahwa skripsi yang saya tulis ini tidak memuat karya atau bagian karya orang lain, kecuali yang telah disebutkan dalam kutipan dan daftar pustaka, sebagaimana layaknya karya ilmiah.

Yogyakarta, 30 Agustus 2012

Penulis,

William Junior

ABSTRAK

William Junior, 2012. Eksistensi dan Ketunggalan Penyelesaian Persamaan Diferensial Orde-Satu. Skripsi. Program Studi Pendidikan Matematika, Jurusan Pendidikan Matematika dan Ilmu pengetahuan alam, Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Universitas Sanata Dharma, Yogyakarta.

Persamaan Diferensial Orde-Satu merupakan salah satu jenis persamaan diferensial yang diklasifikasikan berdasarkan tingkatan derivatif tertinggi dari fungsi-fungsinya. Orde satu berarti persamaan diferensial tersebut mengandung fungsi dengan tingkatan derivatif tertinggi yaitu satu. Secara umum, persamaan diferensial orde-satu dituliskan dalam bentuk $x' = f(t,x)$ dan diprasyarati dengan masalah nilai awal / kondisi awal yaitu $x(t_0) = x_0$.

Masalah yang seringkali dibahas dalam persamaan diferensial adalah eksistensi dari penyelesaian persamaan diferensial, ketunggalan penyelesaiannya dan cara memperoleh penyelesaiannya. Cara memperoleh penyelesaian persamaan diferensial orde-satu bergantung pada jenis persamaan diferensial yang dibahas. Ada beberapa jenis persamaan diferensial orde-satu, dan yang akan dibahas dalam skripsi ini adalah persamaan diferensial linear orde-satu, persamaan diferensial dengan variabel terpisah dan persamaan diferensial eksak.

Untuk eksistensi dan ketunggalan penyelesaian persamaan diferensial orde-satu, telah ada teorema yang menjaminnya. Secara singkat, persamaan diferensial yang mempunyai tepat satu penyelesaian adalah persamaan diferensial yang fungsinya kontinu dan diprasyarati dengan kondisi awal. Dalam pembuktian teorema eksistensi dan ketunggalan tersebut, akan digunakan prinsip kekonvergenan barisan, dengan barisannya adalah $x_n(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(s, x_{n-1}(s)\big)\,ds$, dengan $n = 1, 2, \ldots$. Pembuktian dimulai dengan membuktikan bahwa semua fungsi $x_n(t)$ kontinu dalam $|t - t_0| \le \delta$ dan bahwa $x(t) = \lim_{n\to\infty} x_n(t)$ ada dalam kekonvergenan seragam barisan tersebut. Kemudian diakhiri dengan membuktikan ketunggalannya.

ABSTRACT

William Junior, 2012. Existence and Uniqueness of Solution for First order Differential Equation. Thesis. Mathematics Education Study Program, Mathematics and Science Education Department, Faculty of Teacher Training and Education, Sanata Dharma University, Yogyakarta.

The First-order Differential Equation is one types of differential equations which classified by the highest derivative order of the function inside. First-order means that the highest derivative order of functions in the equation is the first derivative. Commonly, First-order Differential Equation is express by $x' = f(t,x)$ with initial value problem / initial condition, that is $x(t_0) = x_0$.

The problems talks in differential equation are the existence of the solution, uniqueness of the solution, and the construction of the solution. Construction of the solution is depending on the types of differential equation. There are some types of the first-order differential equation, and which will be discussed in this thesis are the linear equation of the first order, the equation with separable variables, and exact differential equations.

About the existence and uniqueness of solution, there is a theorem which guarantee. In short, first-order differential equation which has unique solution is an equation consists of continuous function and require with initial condition. To prove the existence and uniqueness theorem for the first-order differential equation, we need to know about convergence principles of sequence, with the sequence is $x_n(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f\left(s, x_{n-1}(s)\right) ds$, with $n = 1, 2, \ldots$. The proof is start with proving that all the functions $x_n(t)$ are continuous on $|t - t_0| \leq \delta$ and that $x(t) = \lim_{n\to\infty} x_n(t)$ exist in the sense of uniform convergence. And the proof is ends with proving the uniqueness of the solution.

LEMBAR PERSETUJUAN
PUBLIKASI KARYA ILMIAH UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS

Yang bertanda tangan di bawah ini, saya Mahasiswa Universitas Sanata Dharma :

Nama : William Junior

Nomor Mahasiswa : 081414029

Demi pengembangan ilmu pengetahuan, saya memberikan kepada perpustakaan Universitas Sanata Dharma karya ilmiah saya yang berjudul :

EKSISTENSI DAN KETUNGGALAN PENYELESAIAN
PERSAMAAN DIFERENSIAL ORDE SATU

beserta perangkat yang diperlukan (bila ada). Dengan demikian saya memberikan kepada perpustakaan Universitas Sanata Dharma baik untuk menyimpan, mengalihkan dalam bentuk media lain, mengolahnya dalam bentuk pangkalan data, mendistribusikan secara terbatas dan mempublikasikan di internet atau media lain untuk keperluan akademis tanpa meminta ijin dari saya maupun memberikan royalty kepada saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis.

Demikian pernyataan ini yang saya buat dengan sebenarnya.

Dibuat di Yogyakarta
Pada tanggal 30 bulan Agustus tahun 2012

Yang menyatakan

William Junior

KATA PENGANTAR

Puji syukur kehadirat Tuhan Yesus Kristus karena penulis dapat menyelesaikan skripsi dengan judul "Eksistensi dan Ketunggalan Penyelesaian Persamaan Diferensial Orde Satu". Skripsi ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat memperoleh gelar Sarjana Pendidikan pada Program Studi Pendidikan Matematika, Jurusan Pendidikan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan di Universitas Sanata Dharma Yogyakarta.

Selama penyusunan skripsi ini banyak kesulitan yang dialami penulis. Namun dengan bantuan berbagai pihak, semua kesulitan tersebut dapat teratasi. Oleh karena itu, pada kesempatan ini dengan sepenuh hati penulis ingin menyampaikan ucapan terimakasih kepada :

1. Tuhan Yesus Kristus yang selalu menjaga dan menuntun langkahku.
2. Papa dan Mama yang selalu memberikan dukungan, nasehat, semangat, perhatian doa dan cinta kepadaku dari awal studi hingga saat ini.
3. Kakak Andrea Pratama, yang telah menjadi keluarga terdekatku selama kuliah dan memberikan semangat, perhatian dan dukungan penuh selama kuliah.
4. Adik Alessandro, yang juga telah memberikan semangat dan dukungan.
5. Ibu Ch. Enny Murwaningtyas, S.Si., M.Si selaku dosen pembimbing yang dengan tulus dan sabar telah membimbing penulis selama penyusunan skripsi ini. Terimakasih atas segala masukan dan motivasinya selama ini.

6. Bapak Drs. A. Mardjono, yang telah mencurahkan perhatian lebih kepada saya, yang tidak pernah lelah untuk memberikan nasehat dan masukan demi perkembangan diri saya.
7. (alm) Bapak Susento, yang telah mengajarkan saya berpenampilan layaknya seorang guru dan mengajarkan banyak hal diluar materi kuliah. Semoga engkau tenang di sana.
8. Bapak M. Andy Rudhito dan Ibu Veronika Fitri, yang telah menjadi penguji tugas akhir saya, terimakasih atas bimbingannya selama ini.
9. Segenap dosen JPMIPA, khususnya dosen-dosen Pendidikan Matematika, Universitas Sanata Dharma, yang telah mendidik saya selama lebih kurang 4 tahun.
10. Ibu Henny dan Bapak Sugeng, yang telah menjadi teman saya selama kuliah, terimakasih atas pelayanannya yang selalu memuaskan.
11. Teman-teman seperjuanganku selama kuliah di Pendidikan Matematika, khususnya angkatan 2008, yang tidak bisa kusebutkan satu per satu, atas kebersamaan selama kurang lebih 4 tahun, semangat dan perhatian yang kalian berikan.
12. Kakak-kakak angkatan di Pendidikan Matematika, yang telah memberi arahan ketika aku membutuhkan.
13. Adik-adik angkatan di Pendidikan Matematika, yang telah menjadi adik-adikku yang mengesankan selama ini.
14. Teman-temanku di luar Pendidikan Matematika, yang telah menjadi temanku di luar duniaku sebagai mahasiswa Pendidikan Matematika.

15. Teman-teman seperjuangan di HMJP.MIPA 2009 dan 2010, BEMU 2012, dan HMPS Pendidikan Matematika 2012, terimakasih untuk kebersamaan kita dalam mengembangkan diri dan bakti kepada Universitas.

Penulis

BAB I

PENDAHULUAN

A. Latar Belakang

Persamaan Diferensial merupakan salah satu mata kuliah yang diajarkan di tingkat universitas. Berbagai hal mengenai Persamaan Diferensial dipelajari, mulai dari pengertian, klasifikasi hingga cara-cara menyelesaikan persamaan diferensial tersebut.

Persamaan diferensial adalah persamaan yang memuat derivatif atau turunan dari satu atau lebih fungsi. Persamaan diferensial dapat diklasifikasikan dengan beberapa macam cara. Dilihat dari banyaknya variabel bebas yang dimiliki, persamaan diferensial dapat dibagi menjadi dua, yaitu Persamaan Diferensial Biasa dan Persamaan Diferensial Parsial.

Persamaan Diferensial Biasa merupakan persamaan yang fungsi-fungsinya bergantung hanya pada satu variabel. Bentuk umum persamaan diferensial biasa adalah

$$F\left(t, x, x', \cdots, x^{(n)}\right) = 0$$

dengan t menyatakan variabel bebas dan x menyatakan variabel tak bebas. Berikut adalah contoh dari persamaan diferensial biasa.

1. $x'' + 4x = (t^2 + 1)^3$
2. $x' + tx = 3$

Persamaan Diferensial Parsial merupakan persamaan diferensial yang fungsi-fungsinya bergantung pada dua atau lebih variabel bebas. Berikut adalah contoh dari persamaan diferensial parsial :

1. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$
2. $\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} = 1 + 2x$

Persamaan Diferensial juga dapat diklasifikasikan berdasarkan tingkatan derivatif tertinggi dari fungsi-fungsinya. Jika persamaan diferensial mengandung fungsi dengan tingkatan derivatif tertinggi sama dengan satu, maka disebut Persamaan Diferensial Orde Satu (Tingkat Satu). Jika mengandung fungsi dengan tingkatan derivatif tertinggi sama dengan dua, maka disebut Persamaan Diferensial Orde Dua (Tingkat Dua). Sehingga, jika persamaan diferensial mengandung fungsi dengan tingkatan derivatif tertinggi sama dengan n, maka disebut Persamaan Diferensial Orde-n (Tingkat ke-n)

Pada persamaan diferensial orde satu sendiri, dikenal beberapa jenis persamaan diferensial, yaitu Persamaan Diferensial Linear Tingkat Satu, Persamaan Diferensial dengan Variabel Terpisah, dan Persamaan Diferensial Eksak. Dalam menyelesaikan Persamaan Diferensial Orde Satu, perlu diperhatikan jenis-jenis persamaan diferensial yang disajikan. Penyelesaian suatu persamaan diferensial orde satu seringkali disajikan dalam bentuk umum yang disebut dengan Keluarga Penyelesaian. Pada tahapan yang lebih lanjut, persamaan diferensial orde satu, baik secara umum maupun secara khusus untuk jenir-jenisnya, diprasyarati dengan Masalah Nilai Awal (MNA), sehingga persamaan diferensial tersebut memiliki tepat satu penyelesaian.

Karena itu, penulis perlu mengetahui dan mempelajari teorema yang menjamin eksistensi dan ketunggalan penyelesaian persamaan diferensial orde satu tersebut.

B. Rumusan Masalah

Pokok-pokok permasalahan yang akan dibahas adalah :

1. Persamaan diferensial orde satu yang bagaimanakah yang mempunyai penyelesaian tunggal?
2. Bagaimana bukti dari teorema yang menjamin eksistensi dan ketunggalan penyelesaian persamaan diferensial orde satu?

C. Tujuan Penulisan

Tujuan penulisan skripsi ini adalah :

1. Memahami bentuk persamaan diferensial biasa orde satu yang dijamin eksistensi dan ketunggalan penyelesaiannya.
2. Mengetahui teorema yang menjamin eksistensi dan ketunggalan penyelesaian persamaan diferensial biasa orde satu.

D. Manfaat Penulisan

Manfaat pembahasan topik ini bagi penulis adalah penulis menjadi lebih memahami tentang kepastian adanya penyelesaian untuk suatu persamaan diferensial.

E. Metode Penulisan

Metode yang digunakan adalah metode studi pustaka yaitu mempelajari buku-buku yang berkaitan dengan Persamaan Diferensial serta teorema eksistensi dan ketunggalan penyelesaian persamaan diferensial, sehingga di dalam skripsi ini tidak ditemukan hal-hal yang baru.

F. Sistematika Penulisan

Dalam bab I, dibahas tentang latar belakang penulisan, rumusan masalah, tujuan penulisan, manfaat penulisan dan sistematika penulisan.

Dalam bab II, dibahas tentang teori-teori yang dibutuhkan untuk pembuktian teorema pada bab 3. Landasan teori ini disusun secara sistematis, dimana teori yang mendasari teori lainnya akan disusun terlebih dahulu. Supremum-infimum ditempatkan di awal sebagai dasar pembicaraan himpunan, dilanjutkan dengan limit fungsi sebagai awalan dari kekontinuan fungsi. Kemudian akan dibahas mengenai derivatif dan integral, yang berkaitan erat dengan persamaan diferensial. Selanjutnya akan dibahas tentang kekonvergenan barisan serta deret.

Dalam bab III, berbicara mengenai teorema-teorema eksistensi dan ketunggalan penyelesaian persamaan diferensial, baik berdasarkan jenis persamaan diferensialnya maupun secara umum. Teorema eksistensi dan ketunggalan tersebut akan dibuktikan menggunakan prinsip kekonvergenan barisan dengan barisannya adalah $x_n(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(s, x_{n-1}(s)\big)\, ds$. Dengan membuktikan bahwa barisan tersebut konvergen, maka persamaan diferensial yang diberikan selalu memiliki tepat satu penyelesaian.

Dalam bab IV, diuraikan tentang kesimpulan yang diperoleh dari pembahasan bab-bab sebelumnya serta menjawab rumusan masalah yang disajikan dalam bab I.

BAB II

LANDASAN TEORI

Persamaan diferensial adalah persamaan yang memuat derivatif atau diferensial dari satu fungsi atau lebih. Fungsi yang dimaksud adalah fungsi yang kontinu. Fungsi merupakan aturan pengawanan yang mengawankan setiap anggota A dengan anggota B secara tunggal, dengan A dan B himpunan tak kosong. Selanjutnya, dalam bab ini, akan dibahas tentang pengertian-pengertian, definisi-definisi dan teori-teori terkait supremum dan infimum suatu himpunan, limit fungsi, kekontinuan fungsi, derivatif dan integral, barisan dan deret; yang mendukung pembuktian teorema keujudan dan ketunggalan.

A. Supremum dan Infimum

Definisi 2.1

i. Himpunan $A \subset \mathbb{R}$, dengan $\mathbb{R}$ adalah himpunan bilangan real, dikatakan terbatas ke atas jika ada bilangan real $\mathcal{k}$ sehingga berlaku

$$a \leq \mathcal{k}$$

untuk setiap $a \in A$; $\mathcal{k}$ disebut batas atas *(upper bound)* himpunan A

ii. Himpunan $A \subset \mathbb{R}$ dikatakan terbatas ke bawah jika ada bilangan real ℓ sehingga berlaku

$$\ell \leq a$$

untuk setiap $a \in A$; ℓ disebut batas bawah *(lower bound)* himpunan A

iii. Himpunan $A \subset \mathbb{R}$ dikatakan terbatas *(bounded)* jika ia terbatas ke atas dan terbatas ke bawah.

Definisi 2.2

i. Jika A himpunan terbatas ke atas dengan $\mathcal{k}$ sebagai batas atasnya, maka setiap bilangan real $\mathcal{k}_1$ dengan $\mathcal{k}_1 \geq \mathcal{k}$ merupakan batas atas pula, karena

$$a \leq \mathcal{k} \leq \mathcal{k}_1$$

untuk setiap $a \in A$. Oleh karena itu, jika A merupakan himpunan terbatas ke atas, maka ia mempunyai batas atas yang paling kecil yang disebut batas atas terkecil (supremum/sup). Supremum himpunan A dituliskan dengan $sup(A)$.

ii. Jika A himpunan terbatas ke bawah dengan ℓ sebagai batas bawahnya, maka setiap bilangan real ℓ_1 dengan $\ell_1 \leq \ell$ merupakan batas bawah, karena

$$\ell_1 \leq \ell \leq a$$

untuk setiap $a \in A$. Oleh karena itu, jika A merupakan himpunan terbatas ke bawah, maka ia mempunyai batas bawah yang paling besar yang disebut batas bawah terbesar (infimum/inf). Infimum himpunan A dituliskan dengan $inf(A)$.

B. Limit dan Kekontinuan Fungsi

Seperti yang telah dikatakan dalam pengantar di atas, fungsi dalam persamaan diferensial adalah fungsi yang kontinu. Untuk mengetahui kekontinuan suatu fungsi, terlebih dahulu perlu diketahui limit dari fungsi tersebut.

Definisi 2.3

Jika $p \in \mathbb{R}$ dan bilangan $\delta > 0$, maka himpunan

$$N_\delta(p) = (p - \delta, p + \delta)$$
$$= \{x \in \mathbb{R}\,;\, p - \delta < x < p + \delta\}$$

disebut persekitaran (*neighborhood*) titik p, dan δ disebut jari-jari (radius) persekitaran.

Contoh 2.1

$\left(\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}\right)$ merupakan persekitaran titik 1 dengan jari-jari persekitaran $\delta = \frac{1}{2}$.

$\left(\frac{1}{4}, 1\frac{1}{4}\right)$ merupakan persekitaran titik 1 dengan jari-jari persekitaran $\delta = \frac{1}{4}$.

(a, b) merupakan persekitaran titik $\frac{\mathrm{a}+b}{2}$ dengan jari-jari persekitaran $\delta = \frac{b-\mathrm{a}}{2}$.

Teorema 2.1

Setiap selang terbuka (u, v) yang memuat p memuat suatu persekitaran titik p dan sebaliknya setiap persekitaran titik p memuat suatu selang terbuka (u, v) yang memuat p.

Bukti :

Diberikan selang (u, v) dengan $p \in (u, v)$. Ambil bilangan $\delta = min\,\{p - u, v - p\}$.

Mudah dipahami bahwa $\delta > 0$ dan $N_\delta(p) = (p - \delta, p + \delta) \subset (u, v)$. Sebaliknya, ambil sebarang $\delta > 0$ dan $N_\delta(p) = (p - \delta, p + \delta)$ persekitaran titik p. Untuk (u, v) dengan $p - \delta < u < p < v < p + \delta$ berlaku $p \in (u, v) \subset N_\delta(p)$. ■

Definisi 2.4

Bilangan $p \in \mathbb{R}$ disebut titik limit himpunan $A \subset \mathbb{R}$ jika untuk setiap bilangan $\delta > 0$ berlaku $N_\delta(p) \cap A - \{p\} \neq \emptyset$.

Definisi 2.5

Diketahui fungsi $f: A = D_f \subset \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ dan a titik limit himpunan D_f. Jika ada bilangan $l \in \mathbb{R}$ sehingga untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan $\delta > 0$ sehingga jika $x \neq a$ dan $x \in D_f \cap N_\delta(a)$ berakibat $f(x) \in N_\varepsilon(l)$, dikatakan $f(x)$ berlimit l untuk $x \longmapsto a$ dan dituliskan dengan $\lim_{x\to a} f(x) = l$.

Seperti telah diketahui bahwa $x \neq a$ dan $x \in D_f \cap N_\delta(a)$ jika dan hanya jika $x \in D_f$ dan $0 < |x - a| < \delta$, demikian pula $f(x) \in N_\varepsilon(l)$ jika dan hanya jika $|f(x) - l| < \varepsilon$.

Definisi 2.6

(i) Fungsi $f: D_f \subset \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ dikatakan kontinu di $a \in D_f$ jika

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

Secara lengkap : Fungsi $f: D_f \subset \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ dikatakan kontinu di $a \in D_f$, dengan a titik limit D_f, jika untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan $\delta > 0$ sehingga jika $x \in D_f \cap N_\delta(a)$ berakibat $f(x) \in N_\varepsilon\big(f(a)\big)$.

(ii) Fungsi f dikatakan kontinu pada (*continuous on*) $B \subset D_f$ jika f kontinu di setiap $x \in B$.

Poin (i) pada Definisi 2.6 mengatakan bahwa dikarenakan $x \in D_f \cap N_\delta(a)$ jika dan hanya jika $x \in D_f$ dan $|x-a| < \delta$, demikian pula $f(x) \in N_\varepsilon\big(f(a)\big)$ jika dan hanya jika $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Contoh 2.2

1. Diberikan fungsi f yaitu $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$. Akan ditunjukkan bahwa

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2$$

Dan fungsi $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ tidak kontinu di 1.

Karena rumus fungsi f adalah $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ maka

$$D_f = \left\{x \in \mathbb{R};\ f(x) = \frac{x^2-1}{x-1} \in \mathbb{R}\right\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R};\ x \neq 1\} = \mathbb{R} - \{1\}$$

dengan $1 \notin D_f$ tetapi 1 merupakan titik limit D_f sebab untuk setiap bilangan $\eta > 0$ berlaku $D_f \cap N_\eta(1) = (\mathbb{R} - \{1\}) \cap (1-\eta, 1+\eta) \neq \emptyset$. Membuktikan $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2$ berarti untuk sebarang bilangan $\varepsilon > 0$ ditunjukkan ada nilai $\delta > 0$ sehingga untuk setiap $x \neq 1, x \in D_f$ dan $|x - 1| < \delta$ berlaku

$$|f(x) - 2| = \left|\frac{x^2-1}{x-1} - 2\right| < \varepsilon.$$

Karena $x \neq 1, x \in D_f$ atau $|x-1| \neq 0$, menjadi

$$\left|\frac{(x-1)(x+1)}{x-1} - 2\right| < \varepsilon$$

$$\left|\frac{(x+1)}{1}-2\right|<\varepsilon$$

$$|x+1-2|=|x-1|<\varepsilon.$$

Jadi, dapat diambil kesimpulan bahwa jika ada bilangan $\delta>0$ dengan $\delta\leq\varepsilon$ berlaku

$$|f(x)-2|=\left|\frac{x^2-1}{x-1}-2\right|<\varepsilon$$

asalkan $x\neq 1, x\in D_f$ dan $|x-1|<\delta$; dengan demikian terbukti bahwa

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=2.$$

Fungsi f tak kontinu di 1 sebab $\lim_{x\to 1} f(x)=2\neq f(1)$.

C. Derivatif (Turunan)

Setelah membicarakan tentang limit dan kekontinuan fungsi, akan dibahas tentang turunan fungsi yang masih erat kaitannya dengan limit. Secara sederhana, dikatakan bahwa jika suatu fungsi mempunyai limit, maka fungsi tersebut terdiferensial (terturunkan) di c. Secara lebih jelas, turunan akan dibahas dalam subbab berikut.

Definisi 2.7

Jika diketahui fungsi $f: D_f\subset\mathbb{R}\longmapsto\mathbb{R}$ dan $c\in D_f$ dan c titik-limit himpunan D_f, maka nilai

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}$$

jika ada, disebut derivatif *(derivative)* fungsi f di c dan dituliskan dengan $f'(c)$, atau $\frac{df}{dx}(c)$, atau $Df(c)$.

Contoh 2.3

Diberikan $f(x) = x^2 + 5x$, akan dicari $f'(c)$.

$$\begin{aligned} f'(c) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{(c+h)^2+5(c+h)]-[c^2+5c]}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{(c^2+2ch+h^2)+5c+5h]-[c^2+5c]}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{2ch+h^2+5h]}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{[2c+h+5]\cdot h}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} [2c+h+5]. \end{aligned}$$

Karena $h \to 0$, maka

$$f'(c) = 2c + 5.$$

Contoh 2.3 mengatakan bahwa jika $f(x) = x^2 + 5x$, diperoleh derivatif fungsi f ada di setiap titik c yaitu $f'(c) = 2c + 5$.

Contoh 2.4

Diberikan $f(x) = \sin x$, akan dicari $f'(c)$.

Untuk setiap $c \in D_f = \mathbb{R}$ diperoleh

$$f'(c) = \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(c+h) - \sin c}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sin c \cdot \cos h + \cos c \cdot \sin h - \sin c}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \left(-\sin c \frac{1-\cos h}{h} + \cos c \frac{\sin h}{h}\right)$$

$$= (-\sin c)\left[\lim_{h\to 0} \frac{1-\cos h}{h}\right] + (\cos c)\left[\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h}\right].$$

Karena $\lim\limits_{h\to 0} \frac{1-\cos h}{h} = 0$ dan $\lim\limits_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$, maka

$$f'(c) = (-\sin c) \cdot 0 + (\cos c) \cdot 1 = \cos c.$$

Contoh 2.4 mengatakan bahwa jika $f(x) = \sin x$, diperoleh derivatif fungsi f ada di setiap titik c yaitu $f'(c) = \cos c$.

Teorema 2.2

Andaikan f dan g fungsi-fungsi yang dapat didiferensialkan, maka $(f \cdot g)'(x) = f(x) \cdot g'(x) + g(x) \cdot f'(x)$ yakni

$$D[f(x) \cdot g(x)] = f(x) \cdot Dg(x) + g(x) \cdot Df(x).$$

Bukti :

Andaikan $F(x) = f(x) \cdot g(x)$, maka

$F(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h}$

$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)\cdot g(x+h) - f(x)\cdot g(x)}{h}$

$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)\cdot g(x+h) - f(x+h)\cdot g(x) + f(x+h)\cdot g(x) - f(x)\cdot g(x)}{h}$

$= \lim_{h\to 0} \left[f(x+h) \frac{g(x+h)-g(x)}{h} + g(x) \frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right]$

$= \lim\limits_{h\to 0} f(x+h) \cdot \lim\limits_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} + g(x) \cdot \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$$F(x) = f(x) \cdot g'(x) + g(x) \cdot f'(x). \qquad \blacksquare$$

Teorema 2.3 (Teorema Rolle)

Jika fungsi $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ mempunyai sifat-sifat

(i) f kontinu pada $[a, b]$

(ii) $f'(a)$ ada untuk setiap $x \in (a, b)$

(iii) $f(a) = f(b) = 0$

maka terdapat $x_0 \in (a, b)$ sehingga $f'(x_0) = 0$.

Bukti :

Jika $f(x) = 0$ untuk setiap $x \in (a, b)$ maka bukti selesai. Jika ada $t \in (a, b)$ sehingga $f(t) \neq 0$, maka ada dua kemungkinan yaitu $f(x) > 0$ untuk setiap $t \in (a, b)$ atau $f(x) < 0$ untuk setiap $t \in (a, b)$. Jika $f(x) > 0$ untuk setiap $t \in (a, b)$ dan karena f kontinu pada $[a, b]$, maka ada $x_0 \in (a, b)$ sehingga

$$f(x_0) = sup\big(f(x)\big); x \in (a, b). \tag{2.1}$$

Tinggal memperlihatkan bahwa $f'(x_0) = 0$

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Tidak mungkin $f'(x_0) > 0$, sebab untuk $h > 0$ dan cukup kecil diperoleh $f(x_0 + h) - f(x_0) > 0$ atau $f(x_0 + h) > f(x_0)$ yang merupakan suatu kontradiksi terhadap (2.1). juga tidak mungkin $f'(x_0) < 0$, sebab untuk $h < 0$ dan $|h|$ cukup kecil diperoleh $f(x_0 + h) - f(x_0) > 0$ atau $f(x_0 + h) > f(x_0)$ yang merupakan suatu kontradiksi terhadap (A). Jadi satu-satunya kemungkinan adalah $f'(x_0) = 0$. Bukti sejalan jika $f(x_0) < 0$ untuk setiap $x \in (a, b)$. $\blacksquare$

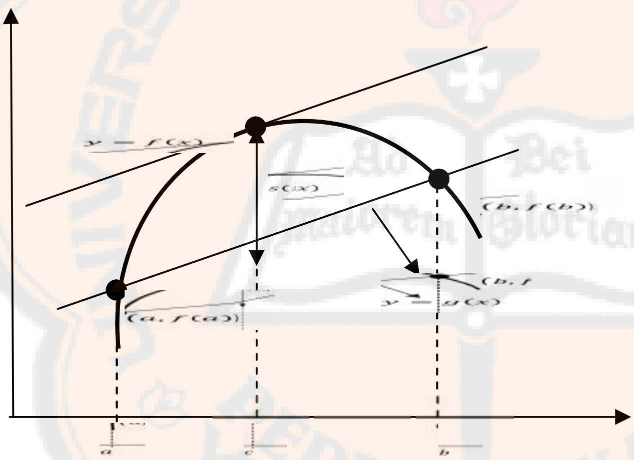
Teorema 2.4 (Teorema Nilai Rata-rata I)

Jika f kontinu pada selang tertutup dan $f'(x)$ ada untuk setiap $x \in (a,b)$, maka terdapat paling sedikit satu bilangan $c \in (a,b)$ sehingga

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c).$$

Bukti :

Untuk keperluan pembuktian, teorema tersebut diwujudkan dalam bentuk gambar yang memuat grafik $y = f(x), y = g(x)$, dan $s(x) = f(x) - g(x)$.



Diketahui fungsi $s(x) = f(x) - g(x)$

$g(x)$ adalah garis yang melalui titik $\big(a, f(a)\big)$ dan $\big(b, f(b)\big)$, sehingga mempunyai persamaan

$$\frac{y - f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{x-a}{b-a}$$

$$y - f(a) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot (x-a). \qquad (2.2)$$

Karena $y = g(x)$, maka persamaan (2.2) menjadi

$$g(x) - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a)$$

$$g(x) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot (x - a). \tag{2.3}$$

Dengan melakukan substitusi $g(x)$ pada persamaan (2.3) ke persamaan $s(x) = f(x) - g(x)$, diperoleh

$$s(x) = f(x) - \left(f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a)\right)$$

$$s(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot (x - a).$$

Untuk $x = a$ dan $x = b$, $s(x) = 0$. Untuk $x \in (a, b)$, $s(x)$ dapat diturunkan menjadi

$$s(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot x + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot a$$

$$s'(x) = f'(x) - 0 - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot 1 + 0$$

$$s'^{(x)} = f'^{(x)} - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Jelas bahwa $s(x)$ kontinu pada selang $[a, b]$, karena merupakan selesih dua fungsi kontinu. $s'(x)$ juga ada untuk setiap $x \in (a, b)$. Dan telah diperoleh bahwa Untuk $x = a$ dan $x = b$, $s(x) = 0$, dengan kata lain $s(a) = s(b) = 0$. Maka menurut Teorema Rolle, terdapat $c \in (a, b)$ sehingga $s'(c) = 0$, jadi

$$s'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \qquad \blacksquare$$

D. Integral

Integral atau yang biasa disebut dengan anti-turunan merupakan pembalikan dari diferensial suatu fungsi. Integral yang akan dibahas dalam subbab berikut adalah Integral Riemann.

Definisi 2.8

Fungsi $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ dikatakan terintegral Riemann pada $[a, b]$ jika ada bilangan A sehingga untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan $\delta > 0$ sehingga jika P partisi $P = \{a = x_0, x_1, \cdots, x_n = b\}$ pada $[a, b]$ dengan $\|P\| < \delta$ berakibat

$$\left| A - \sum_{i=1}^{n} f(x_i{}^*)\Delta_i x \right| < \varepsilon.$$

Bilangan A disebut integral Riemann fungsi f pada $[a, b]$.

Dengan cara lain, Definisi 2.8 mengatakan bahwa andaikan f suatu fungsi yang didefinisikan pada selang tertutup $[a, b]$. Jika

$$\lim_{\|P\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i{}^*)\Delta_i x$$

ada, maka dikatakan f terintegralkan pada $[a, b]$. Bilangan A pada Definisi 2.6 dapat ditulis sebagai $\int_a^b f(x)dx$ yang selanjutnya disebut sebagai integral Riemann (Integral tentu) f dari a ke b, yang diberikan oleh $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i{}^*)\Delta_i x$

Beberapa hal yang perlu diingat terkait definisi di atas, yaitu :

$x_i{}^* \in [x_{i-1}, x_i]$, dengan $[x_{i-1}, x_i]$ adalah selang-bagian ke-i. $x_i{}^*$ diambil sebarang.

$\Delta_i x = x_i - x_{i-1}$ disebut panjang selang-bagian ke-i

$\|P\| = maks\{\Delta_i x; i = 1,2,\cdots,n\}$ disebut norma partisi P

$\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta_i x$ juga bisa dituliskan dalam bentuk $S(f;P)$

Himpunan semua fungsi yang terintegral Riemann pada selang tertutup $[a,b]$ ditulis dengan

$$R[a,b]$$

Jadi, jika f terintegral Riemann pada $[a,b]$ dituliskan dengan

$$f \in R[a,b]$$

Definisi 2.9

$S(f;P) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta_i x$ disebut jumlah Riemann fungsi f pada $[a,b]$

$L(f;P) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta_i x$ disebut jumlah Darboux bawah fungsi f pada $[a,b]$, dengan $m_i = inf\{f(x); x \in [x_{i-1}, x_i]\}$

$U(f;P) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta_i x$ disebut jumlah Darboux atas fungsi f pada $[a,b]$ dengan $M_i = sup\{f(x); x \in [x_{i-1}, x_i]\}$

Teorema 2.5

Jika f terintegral Riemann pada $[a,b]$ maka nilai integralnya tunggal

Bukti :

Jika A_1 dan A_2 nilai integral Riemann fungsi f pada $[a,b]$ maka untuk bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan $\delta_1 > 0$ dan $\delta_2 > 0$ sehingga jika partisi $P_1 = \{a = x_0, x_1, \cdots, x_n = b\}$ dan $P_2 = \{a = Y_0, Y_1, \cdots, Y_m = b\}$ pada $[a,b]$ dengan $\|P_1\| < \delta_1$ dan $\|P_2\| < \delta_2$ berturut-turut berakibat

$$\left|A_1 - \sum_{i=1}^{n} f(x_i{}^*)\Delta_i x\right| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{dan} \quad \left|A_2 - \sum_{k=1}^{n} f(Y_k{}^*)\Delta_k Y\right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Ambil $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ dan partisi $P_1 = \{a = z_0, z_1, \cdots, z_s = b\}$ dengan $\|P\| < \delta$ dan $z_i{}^* \in [z_{i-1}, z_i]$. Karena $\|P\| < \delta_i$ (untuk $i = 1,2$) diperoleh

$$|A_1 - A_2| \leq \left|A_1 - \sum_{i=1}^{s} f(z_i{}^*)\Delta_i z\right| + \left|\sum_{i=1}^{s} f(z_i{}^*)\Delta_i z - A_2\right|$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon$$

Hal ini berarti $A_1 = A_2$ ■

Teorema 2.6

Jika fungsi $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ terintegral Riemann pada $[a, b]$, maka f terbatas pada $[a, b]$.

Bukti :

Andaikan fungsi f tak terbatas ke atas pada $[a, b]$, maka untuk setiap bilangan asli n terdapat $t_n \in [a, b]$ sehingga

$$f(t_n) > n$$

Untuk setiap partisi $P = \{a = x_0, x_1, \cdots, x_n = b\}$, tentu $t_n \in \{x_{k-1}, x_k\}$ untuk suatu k dan himpunan

$$S(f) = \left\{\sum_{i=1}^{n} f(x_i{}^*)\Delta_i x \,; x_i{}^* \in [x_{i-1}, x_i], i = 1,2,3, \cdots, n\right\}$$

tak terbatas sebab $x_i{}^*$ dapat diganti t_n jika $t_n \in \{x_{k-1}, x_k\}$.

Hal ini berarti

$$\lim_{\|P\| \to 0} S(f; P) = +\infty$$

(tidak ada) yang dengan kata lain fungsi f tak terintegral Riemann pada $[a, b]$ ■

Teorema 2.7

$R[a, b]$ merupakan ruang linear untuk setiap α ∈ $\mathbb{R}$ dan $f, g \in R[a, b]$ berakibat $\alpha f, f + g \in R[a, b]$.

Lebih lanjut

(i) $\int_a^b \alpha f = \alpha \int_a^b f$

(ii) $\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g$

Bukti :

Karena $f, g \in R[a, b]$ maka, menurut Teorema 2.6, fungsi f dan fungsi g masing-masing terbatas pada $[a, b]$.

Namakan

$$M_f = \{sup|f(x)|; x \in [a, b]\}, \qquad M_g = \{sup|g(x)|; x \in [a, b]\}$$

dan

$$M = maks\,\{|\alpha|, M_f, M_g, 1\}$$

Karena $f, g \in R[a, b]$, maka untuk bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan $\delta > 0$ sehingga jika P partisi $P = \{a = x_0, x_1, \cdots, x_n = b\}$ pada $[a, b]$ dengan $\|P\| < \delta$ berakibat

$$\left|\int_a^b f - S(f; P)\right| < \frac{\varepsilon}{M + 1} \text{ dan } \left|\int_a^b g - S(f; P)\right| < \frac{\varepsilon}{M + 1}$$

Diperoleh

(i) $\left|\alpha \int_a^b f - S(\alpha f; P)\right| = \left|\alpha \int_a^b f - \alpha S(f; P)\right|$

$$= |\alpha| \left| \int_a^b f - S(f;P) \right| < \frac{\varepsilon}{M+1} < \varepsilon$$

Dengan kata lain terbukti bahwa $\alpha f \in R[a,b]$ dan

$$\int_a^b \alpha f = \alpha \int_a^b f$$

(ii) $\left|\left(\int_a^b f + \int_a^b g\right) - S(f+g;P)\right| = \left|\left(\int_a^b f + \int_a^b g\right) - S(f;P) + S(g;P)\right|$

$$< \left| \int_a^b f - S(f;P) \right| + \left| \int_a^b g - S(f;P) \right|$$

$$< \frac{\varepsilon}{M+1} + \frac{\varepsilon}{M+1} < 2\varepsilon.$$

Dengan kata lain terbukti bahwa $f + g \in R[a,b]$ dan

$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g \qquad \blacksquare$$

Teorema 2.8

Diberikan interval $I = [a,b], c \in I$, dan $f: I \to \mathbb{R}$ terbatas, $f \in R[a,b]$ jika dan hanya jika $f \in R[a,c], f \in R[c,b]$. Dalam hal ini

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Bukti :

Syarat perlu : karena $f \in R[a,b]$ maka untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat partisi P pada $[a,b]$ sehingga

(i) $$U(f;P) - L(f;P) < \varepsilon$$

Bentuk $P' = P \cup \{c\}$. Jelas bahwa $P \subset P'$ dan $P_1{}' \cup P_2{}'$ dengan $P_1{}' = P' \cap [a,c]$ partisi pada $[a,c]$ dan $P_2{}' = P' \cap [c,b]$ partisi pada $[c,b]$. Oleh karena itu diperoleh

(ii) $$L(f;P) \leq L(f;P') = L(f;P_1{}') + L(f;P_2{}')$$

$$\leq U(f;P_1{}') + U(f;P_2{}') = \leq U(f;P)$$

Dari (i) dan (ii) diperoleh

$$\{U(f;P_1{}') - L(f;P_1{}')\} + \{U(f;P_2{}') - L(f;P_2{}')\}$$

$$= U(f;P') - L(f;P') \leq U(f;P) - L(f;P) < \varepsilon$$

yang berakibat

$U(f;P_1{}') - L(f;P_1{}') < \varepsilon$ dan $U(f;P_2{}') - L(f;P_2{}') < \varepsilon$

Dengan kata lain terbukti bahwa $f \in R[a,c]$ dan $f \in R[c,b]$

Lebih lanjut

$$\int_a^b f = inf\{U(f;P'); P' \in \pi[a,b]\}$$

$$= inf\{U(f;P_1{}') + U(f;P_2{}'); P_1{}' \in \pi[a,c] \& P_2{}' \in \pi[c,b]\}$$

$$= inf\{U(f;P_1{}');P_1{}' \in \pi[a,c]\} + inf\{U(f;P_2{}');P_2{}' \in \pi[c,b]\}$$

$$= \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Syarat cukup : karena $f \in R[a,c]$ dan $f \in R[c,b]$ maka nilai-nilai limit berikut ada :

$$\int_a^c f = \lim_{\|P_1\| \to 0} S(f;P_1) \text{ dan } \int_c^b f = \lim_{\|P_2\| \to 0} S(f;P_2)$$

Dengan P_1 partisi pada $[a,c]$ dan P_2 partisi pada $[c,b]$.

Jelas bahwa $P = P_1 \cup P_2$ partisi pada$[a,b]$. Oleh karena itu

$$\int_a^b f = \lim_{\|P\| \to 0} S(f;P) + \lim_{\|P\| \to 0} S(f;P_1 \cup P_2)$$

$$= \lim_{\|P_1\| \to 0} S(f;P_1) + \lim_{\|P_2\| \to 0} S(f;P_2)$$

$$= \int_a^c f + \int_c^b f \qquad \blacksquare$$

Teorema 2.9

Jika f kontinu pada [a, b] dan F sebarang anti-turunan dari f di sana, maka

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Bukti :

Andaikan $P: a = x_0 < x_1 < \cdots, < x_{n-1}, < x_n = b$ adalah partisi sebarang dari $[a, b]$. Maka dengan manipulasi aljabar, dapat diperoleh

$$F(b) - F(a) = F(x_n) - F(x_{n-1}) + F(x_{n-1}) - F(x_{n-2}) + \cdots + F(x_1) - F(x_0)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} [F(x_i) - F(x_{i-1})]$$

Menurut Teorema nilai rata-rata untuk Turunan yang diterapkan pada F pada selang $[x_{i-1}, x_i]$,

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = F(x_i{}^*)(x_i - x_{i-1}) = f(x_i{}^*)\Delta_i x$$

untuk suatu pilihan $x_i{}^*$ dalam selang terbuka (x_{i-1}, x_i). Jadi,

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i{}^*)\Delta_i x$$

Ruas kiri persamaan di atas akan menghasilkan sebuah konstanta, sedangkan ruas kanan adalah jumlah Riemann untuk f pada $[a, b]$. jika kedua ruas diambil limitnya untuk $|P| \to 0$, akan diperoleh

$$F(b) - F(a) = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i{}^*)\Delta_i x = \int_a^b f(x)dx. \qquad \blacksquare$$

Definisi 2.10

Jika $f \in R[a, b]$, fungsi $F: [a, b] \to \mathbb{R}$ dengan rumus $F(0) = 0$ dan

$$F(x) = \int_a^x f\, dx \quad \text{untuk setiap } x \in (a, b]$$

disebut primitif *(primitive)* Riemann fungsi f pada $[a, b]$.

Teorema 2.10

Jika $f \in R[a,b]$ dan f kontinu di $t \in [a,b]$ maka fungsi primitifnya : $F(0) = 0$ dan

$$F(x) = \int_a^x f\,dx$$

terdiferensial di t dan $F'(t) = f(t)$

Bukti :

Fungsi f kontinu di t, jadi untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan $\delta > 0$ sehingga jika $u \in (t-\delta, t+\delta) \cap [a,b]$ berakibat

$$|f(u) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Oleh karena itu diperoleh, untuk $0 < |x-t| < \delta$ atau $x \in (t-\delta, t+\delta)$,

$$\left|\frac{F(x)-F(t)}{x-t} - f(t)\right| = \left|\frac{F(x)-F(t)}{x-t} - \frac{f(t)(x-t)}{x-t}\right|$$

$$= \frac{1}{x-t}|F(x) - F(t) - f(t)(x-t)|$$

Menurut Teorema 2.5,$F(x) - F(t) = \int_t^x f(u)du$, akibatnya

$$= \left|\frac{1}{x-t}\left\{\int_t^x f(u)du - f(t)(x-t)\right\}\right|$$

Karena $(x-t) = \int_t^x 1du$, maka diperoleh

$$\left|\frac{1}{x-t}\left\{\int_t^x f(u)du - f(t)(x-t)\right\}\right| = \left|\frac{1}{x-t}\left\{\int_t^x f(u)du - f(t)\int_t^x 1du\right\}\right|$$

$$= \left| \frac{1}{x-t} \left\{ \int_t^x f(u)du - \int_t^x f(t)du \right\} \right|.$$

Menurut teorema 2.7 (ii), persamaan menjadi

$$\left| \frac{1}{x-t} \left\{ \int_t^x f(u)du - \int_t^x f(t)du \right\} \right| = \left| \frac{1}{x-t} \int_t^x \{f(u) - f(t)\}du \right|$$

$$\leq \left| \frac{1}{x-t} \right| \int_t^x |f(u) - f(t)|du$$

$$< \left| \frac{1}{x-t} \right| \left| \int_t^x \frac{\varepsilon}{2} du \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Dengan kata lain terbukti bahwa $F'(t) = f(t)$. ■

E. Kekonvergenan Barisan

Barisan bilangan real adalah fungsi dari $\mathbb{N}$ ke $\mathbb{R}$, dengan $\mathbb{N}$ adalah himpunan semua bilangan asli. Artinya, jika f suatu barisan bilangan, nilai f di n dituliskan dengan

$$f(n) = a_n$$

dan barisan tersebut dituliskan dengan

$$\{a_n\} \text{ atau } \{a_1, a_2, \cdots\}.$$

Bilangan $a_n = f(n)$ disebut unsur ke-n barisan itu.

Contoh 2.5

1. $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ adalah barisan bilangan real dengan unsur ke-n berbentuk

$$a_n = \frac{n}{n+1}.$$

2. $\{2n+1\}$ adalah barisan bilangan real dengan unsur ke-n berbentuk

$$a_n = 2n + 1.$$

Definisi 2.11

Bilangan real L dikatakan limit dari barisan bilangan real $\{a_n\}$, ditulis $\lim_{n\to\infty} a_n = L$, jika dan hanya jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli $\mathbb{N}_\varepsilon$ sedemikian sehingga jika $n \geq \mathbb{N}_\varepsilon$, maka $|a_n - L| < \varepsilon$. Barisan berlimit A disebut juga barisan konvergen ke A.

Teorema 2.11

Setiap barisan bilangan real yang konvergen adalah terbatas.

Bukti :

Ambil sebarang barisan bilangan real $\{a_n\}$ yang konvergen. Jadi, ada bilangan real k sehingga untuk setiap bilangan real $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli n_0 sehingga jika $n \geq n_0$ berlaku

$$|a_n - k| < \varepsilon$$

Ambil ε tetap. Dan menurut sifat ketaksamaan segitiga diperoleh

$$|a_n| - |k| \leq |a_n - k| < \varepsilon$$

$$|a_n| - |k| < \varepsilon$$

Masing-masing ruas dijumlahkan dengan $|k|$, maka diperoleh

$$|a_n| < |k| + \varepsilon$$

untuk setiap $n \geq n_0$. Selanjutnya diambil bagian

$$M = maks\,\{a_1, a_2, \cdots, a_{n_0-1}, |k| + \varepsilon\}.$$

Dapat dipahami bahwa

$$|a_n| < M$$

untuk setiap n. ■

Teorema 2.12

Jika barisan bilangan real $\{a_n\}$ konvergen untuk $n \to \infty$ maka limitnya tunggal.

Bukti :

Andaikan $\{a_n\}$ mempunyai limit k dan l dengan $k \neq l$. Maka $|k - l| > 0$. Ambil $|k - l| = r$ dan $\varepsilon < \frac{r}{2}$. Karena $\lim_{n\to\infty} a_n = k$, maka menurut Definisi 2.9, hampir semua suku dari barisan berada di dalam interval terbuka $(k - \varepsilon, k + \varepsilon)$ dan hanya sebanyak suku yang banyaknya finit (berhingga) berada di luar interval ini. Mengingat kedua interval terbuka $(k - \varepsilon, k + \varepsilon)$ dan $(l - \varepsilon, l + \varepsilon)$ saling asing, hal ini berarti interval terbuka $(l - \varepsilon, l + \varepsilon)$ hanya memuat suku-suku dari barisan yang banyaknya finit, sehingga l bukanlah limit barisan itu. ■

Dalam mempelajari barisan, juga dikenal Kriteria Cauchy yang berbicara tentang kekonvergenan barisan, berikut ini akan dibahas mengenai Barisan Cauchy.

Definisi 2.12

Barisan bilangan real $\{a_n\}$ disebut barisan Cauchy atau barisan fundamental jika untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli n_0 sehingga berlaku

$$|a_m - a_n| < \varepsilon$$

untuk setiap $m, n \geq n_0$

Teorema 2.13

Setiap barisan bilangan real yang konvergen merupakan barisan Cauchy.

Bukti :

Misalkan barisan bilangan real konvergen ke l. Maka, menurut definisi 2.9, diberikan sebarang $\varepsilon > 0$, terdapat bilangan asli n_0 sehingga berlaku

$$|a_n - l| < \frac{\varepsilon}{2}$$

untuk setiap $n \geq n_0$. Jadi, jika diambil bilangan asli $m, n \geq n_0$, maka diperoleh :

$$|a_m - a_n| = |(a_m - l) + (l - a_n)|$$

$$|(a_m - l) + (l - a_n)| \leq |a_m - l| + |l - a_n|$$

$$|a_m - l| + |l - a_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

atau

$$|a_m - a_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

untuk setiap $m, n \geq n_0$. Karena $\varepsilon > 0$ adalah sebarang, maka barisan $\{a_n\}$ adalah barisan Cauchy. ■

Setelah berbicara tentang barisan bilangan real, akan dibicarakan tentang deret yang mempunyai hubungan cukup erat dengan barisan. Deret dapat didefinisikan sebagai jumlahan yang banyak sukunya dapat tak terhingga. Jika u_k sebagai suku ke-k suatu deret, maka deret tersebut dapat ditulis sebagai

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_k + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} u_k$$

$u_1, u_2, u_3, \cdots, u_k, \cdots$ disebut suku-suku deret.

Jumlah n suku pertama, atau yang juga disebut jumlah-bagian n suku pertama, dari deret tersebut adalah

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n$$

Dengan demikian terbentuk barisan $\{s_n\}$ yang disebut barisan jumlah-bagian. Sehingga mudah dipahami bahwa

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} u_k = \lim_{n \to \infty} S_n$$

Secara lengkap didefinisikan dalam definisi berikut.

Definisi 2.14

Barisan $\{s_n\}$ dengan $s_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n$ dinamakan barisan jumlah-bagian dari deret $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$. Bila barisan $\{s_n\}$ konvergen, maka deret $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ dikatakan konvergen. Sedangkan $\lim_{n \to \infty} s_n = s$ disebut jumlah deret, ditulis $s = \sum_{k=1}^{n} u_k$

Secara matematis ditulis sebagai

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} u_k = \lim_{n \to \infty} S_n = s.$$

Teorema 2.14

Deret $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ konvergen jika dan hanya jika

(i) untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli n_0 sehingga untuk setiap $n \geq n_0$ berakibat

$$\left|\sum_{k>n} u_k\right| < \varepsilon.$$

(ii) $\{S_n\}$ merupakan barisan Cauchy.

Bukti :

(i) Deret $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ konvergen, katakanlah ke , jika dan hanya jika $\lim_{n\to\infty} S_n = s$ jika dan hanya jika untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli n_0 sehingga untuk setiap $n \geq n_0$ berakibat $|S_n - s| < \frac{\varepsilon}{2}$.

$$\left|\sum_{k>n} u_k\right| = \left|\sum_{k=1}^{\infty} u_k - \sum_{k=1}^{n} u_k\right| = \left|\sum_{k=1}^{\infty} u_k - S_n\right|$$

$$= |s - S_n| < \varepsilon.$$

(ii) Ambil dua bilangan asli $m, n \geq n_0$. Diperoleh, dengan menggunakan hasil terakhir

$$|S_m - S_n| \leq |S_m - s| + |s - S_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

dan terbukti $\{S_n\}$ merupakan barisan Cauchy. Sebaliknya, jika $\{S_n\}$ merupakan barisan Cauchy berarti untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli n_0 sehingga untuk setiap $m, n \geq n_0$ berakibat

$$|S_m - S_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Menurut Teorema 2.13, barisan $\{S_n\}$ konvergen, katakanlah ke s ; jadi $\lim_{n\to\infty} S_n = s$ atau diperoleh

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} u_k = \lim_{n\to\infty} S_n = s. \qquad \blacksquare$$

Selanjutnya akan dibicarakan tentang barisan dan deret fungsi. Jika diketahui suatu fungsi $x_n: A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, maka diperoleh barisan $\{x_n\}$ yang disebut barisan fungsi. Jika A adalah domain fungsi x_n untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, maka untuk setiap $t \in A$ diperoleh barisan bilangan real $\{x_n(t)\}$.

Definisi 2.14

Diketahui fungsi $x_n: A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$

i. Barisan fungsi $\{x_n\}$ dikatakan konvergen di titik $t \in A$ jika barisan bilangan real $\{x_n(t)\}$ konvergen.

ii. Barisan fungsi $\{x_n\}$ dikatakan konvergen pada $A \subset D$ jika barisan bilangan real $\{x_n(t)\}$ konvergen untuk setiap $t \in A$. Dengan kata lain, barisan fungsi $\{x_n\}$ konvergen titik demi titik ke fungsi f pada A.

Jika barisan fungsi $\{x_n\}$ konvergen pada $A \subset D$ maka untuk setiap $t \in A$ terdapat bilangan $x(t) \in \mathbb{R}$ sehingga

$$\lim_{n\to\infty} x_n(t) = x(t).$$

Oleh karena itu terbentuklah fungsi $x_n: A \subset D \to \mathbb{R}$ sehingga untuk setiap $t \in A$ barisan bilangan real $\{x_n(t)\}$ konvergen ke bilangan real $\{x(t)\}$. Dalam hal ini dikatakan barisan fungsi $\{x_n\}$ konvergen ke fungsi f pada A atau barisan fungsi $\{x_n\}$ konvergen ke f di setiap $t \in A$. Dari penjabaran di atas, diperoleh teorema berikut.

Teorema 2.15

Barisan fungsi $\{x_n\}$ konvergen ke fungsi x pada A jika untuk setiap $t \in A$ dan $\varepsilon > 0$ terdapat $N = \mathbb{N}(t, \varepsilon)$ sedemikian sehingga untuk setiap $n \geq N$ berlaku $|x_n(t) - x(t)| < \varepsilon$.

Definisi 2.15

Barisan fungsi $\{x_n\}$ konvergen seragam ke fungsi x pada A jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $N \in \mathbb{N}(\varepsilon)$ sedemikian sehingga untuk setiap $n \geq N$ dan $t \in A$ berlaku $|x_n(t) - x(t)| < \varepsilon$.

Contoh 2.6

1. Diberikan barisan $x_n(t) = t^n$

   Barisan bilangan $\{x_n(t)\}$ konvergen ke 0 untuk setiap $t \in [0,1)$, sebab untuk setiap $t \in [0,1)$ berlaku

   $$|x_n(t) - 0| = |t^n - 0| = |t^n|$$

   $$= t^n \begin{cases} < \varepsilon & \text{untuk } t = 0 \text{ dan setiap bilangan asli } n \\ < \varepsilon & \text{untuk } t \in (0,1) \text{ dan } n \geq N_0 \end{cases}$$

   Dengan n merupakan bilangan asli pertama yang lebih besar dari ${}^t\log \varepsilon$. Lebih lanjut, untuk $t = 1$ barisan bilangan $\{x_n(t)\}$ juga konvergen ke 1.

   Dari hasil manipulasi di atas mudah dipahami bahwa

i. Barisan fungsi $\{x_n\}$ konvergen ke fungsi f titik demi titik pada $[0,1]$ dengan

$$x(t)\begin{cases}0 & \text{untuk } t \in [0,1) \\ 1 & \text{untuk } t = 1\end{cases}$$

ii. Nilai bilangan $n = n(t,\varepsilon) > {}^{t}\log \varepsilon$ bergantung pada t dan ε.

Namun, barisan fungsi $\{x_n\}$ tidak konvergen seragam ke f karena $n = n(t,\varepsilon) = {}^{t}\log \varepsilon$ selalu bergantung pada bergantung pada t dan ε.

2. Diberikan barisan $g_k(t) = \frac{t^k}{k}$. Barisan bilangan $\{g_k(t)\}$ konvergen ke 0 untuk setiap $t \in [0,1]$, sebab untuk setiap $t \in [0,1]$ berlaku

$$|g_k(t) - 0| = \left|\frac{t^k}{k} - 0\right| = \frac{t^k}{k} < \frac{1}{k} < \varepsilon$$

asalkan $k > \frac{1}{\varepsilon}$ atau $k \geq n$ dengan n merupakan bilangan asli pertama yang lebih besar daripada bilangan $\frac{1}{\varepsilon}$.

Kesimpulan :

i. Barisan fungsi $\{g_k\}$ konvergen ke fungsi g pada $[0,1]$ dengan $g(t) = 0$ untuk setiap $t \in [0,1]$

ii. Dapat dipilih bilangan asli n yang hanya bergantung pada ε saja, tak bergantung pada $t \in [0,1]$, sehingga untuk setiap $k \geq n$ dan $t \in [0,1]$ berakibat

$$|g_k(t) - g(t)| = \left|\frac{t^k}{k} - 0\right| < \varepsilon$$

Kesimpulan ii di atas, menunjukkan bahwa barisan fungsi $\{g_k\}$ konvergen ke fungsi g pada $[0,1]$.

Definisi 2.16

Diketahui fungsi $x_n: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Barisan fungsi $\{x_n\}$ disebut barisan Cauchy pada $A \subset D$ jika untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat $N \in \mathbb{N}$, yang tak bergantung pada $x \in A$ sehingga untuk setiap $m,n \geq N$ dan $t \in A$ berlaku $|x_n(t) - x_m(t)| < \varepsilon$.

Definisi 2.16 mengatakan bahwa barisan fungsi $\{x_n\}$ merupakan barisan Cauchy pada A jika dan hanya jika untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat $N \in \mathbb{N}$, yang tak bergantung pada $t \in A$ sehingga untuk setiap $m, n \geq$ berlaku

$$\|x_n - x_m\| = sup\{|x_n(t) - x_m(t)|; t \in A\} < \varepsilon.$$

Sebagai konsekuensi langsung dari Definisi 2.14 adalah teorema berikut ini.

Teorema 2.16

Barisan fungsi $\{x_n\}$ merupakan barisan Cauchy pada A jika dan hanya jika barisan fungsi $\{x_n\}$ konvergen seragam pada A.

Bukti :

Syarat perlu : $\{x_n\}$ merupakan barisan Cauchy pada A bila dan hanya bila untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $N \in \mathbb{N}$ yang tak bergantung pada $t \in A$ sehingga untuk setiap $m,n \geq N$ berlaku $\|x_n - x_m\| = sup\{|x_n(t) - x_m(t)|; t \in A\} < \varepsilon$.

Hal ini berarti untuk setiap $t \in A$ barisan bilangan $\{x_n(t)\}$ merupakan barisan Cauchy. Oleh karena itu ia konvergen, katakanlah ke bilangan $x(t)$. Dengan demikian terdefinisi fungsi $x: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dengan

$$\lim_{n \to \infty} x_n(t) = x(t)$$

untuk setiap $t \in A$. Lebih lanjut, untuk $t \in A$ membiarkan $m \to \infty$ dan $n \geq N$ berlaku

$$|x_n(t) - x(t)| = \lim_{m \to \infty} |x_n(t) - x_m(t)| < \varepsilon.$$

Dengan kata lain $\{x_n\}$ konvergen seragam ke fungsi x pada A

Syarat cukup : Jika $\{x_n\}$ konvergen seragam ke fungsi x pada A, maka untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat $N \in \mathbb{N}$ yang tak bergantung pada $t \in A$ sehingga untuk setiap $n \geq N$ berakibat

$$|x_n(t) - x(t)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Hal ini mengakibatkan, untuk setiap $m, n \geq N$ dan $t \in A$ berlaku

$$|x_n(t) - x_m(t)| \leq |x_n(t) - x(t)| + |x(t) - x_m(t)|$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon.$$

Ini berarti $\{x_n\}$ merupakan barisan Cauchy pada A. ∎

Definisi 2.17

Diketahui fungsi $x, u_k: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ untuk setiap $k \in \mathbb{N}$

(i) Deret fungsi

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k = u_1 + u_2 + \cdots$$

dikatakan konvergen ke fungsi f di $x_0 \in D$ jika deret bilangan

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(t_0) = u_1(t_0) + u_2(t_0) + \cdots$$

konvergen ke $x(t_0)$.

(ii) Deret fungsi

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k = u_1 + u_2 + \cdots$$

dikatakan konvergen ke fungsi f pada $A \subset D$ jika untuk setiap $t \in A$ deret bilangan

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) = u_1(t) + u_2(t) + \cdots$$

konvergen ke $x(t)$.

(iii) Deret fungsi

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k = u_1 + u_2 + \cdots$$

dikatakan konvergen seragam ke fungsi f pada A jika barisan jumlah bagian fungsi $\{S_n\}$ konvergen seragam ke fungsi f pada A.

Teorema 2.17

Diketahui fungsi $u_k : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ untuk setiap $k \in \mathbb{N}$. Deret fungsi

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k$$

konvergen seragam pada $A \subset D$ jika terdapat deret bilangan suku positif

$$\sum_{k=1}^{\infty} M_k$$

yang konvergen dan $|u_k(t)| \leq M_k$ untuk setiap $t \in A$ dan $k \in \mathbb{N}$.

Bukti :

Deret $\sum_{k=1}^{\infty} M_k$ konvergen jika dan hanya jika ia merupakan barisan Cauchy, artinya untuk setiap untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli n_0 sehingga untuk setiap $m, n \geq n_0$ berakibat

$$|S_m - S_n| \leq M_{n-1} + M_{n-2} + \cdots + M_m < \varepsilon$$

dengan $S_n = \sum_{k=1}^{n} M_k$. Karena n_0 hanya bergantung pada ε saja, sehingga apabila $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ dan $m, n \geq n_0$ (anggap $m > n$) diperoleh

$$\begin{aligned} |S_m(t) - S_n(t)| &\leq |u_{n-1}(t) + u_{n-2}(t) + \cdots + u_m(t)| \\ &< |u_{n-1}(t)| + |u_{n-2}(t)| + \cdots + |u_m(t)| \\ &\leq M_{n-1} + M_{n-2} + \cdots + M_m < \varepsilon \end{aligned}$$

untuk setiap $t \in A$. Jadi terbukti bahwa, menurut Definisi 2.17, deret fungsi $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ konvergen seragam pada A. ■

BAB III

PENYELESAIAN PERSAMAAN DIFERENSIAL ORDE SATU

Pada bab ini akan dibicarakan mengenai Persamaan Diferensial, khususnya Persamaan Diferensial Orde Satu beserta jenis-jenisnya. Pokok pembicaraan pada bab ini adalah pembuktian teorema eksistensi dan ketunggalan penyelesaian persamaan diferensial orde satu.

Persamaan diferensial (PD**)** adalah persamaan yang memuat derivatif dari satu atau lebih fungsi. Derivatif dari suatu fungsi dapat ditulis dengan beberapa cara. Jika x adalah suatu fungsi dalam t, ditulis $\left(x(t)\right)$, maka derivatif dari x dapat ditulis sebagai $\frac{dx}{dt}$, $x'(t)$, atau x'. Untuk derivatif kedua, dituliskan sebagai $\frac{d^2x}{dt}$, $x''(t)$, atau x''. Begitu pula untuk derivatif ketiga hingga seterusnya, sehingga untuk derivatif ke-*n* dituliskan sebagai $\frac{d^nx}{dt}$, dengan n merupakan tingkatan derivatif yang diekspresikan dengan bilangan asli 1, 2, 3, dst. Derivatif ke-*n* dari fungsi x dapat ditulis juga sebagai $x^{(n)}(t)$, atau $x^{(n)}$, dengan n merupakan tingkatan derivatif yang bisa juga diekspresikan dengan banyaknya tanda aksen $(')$.

Beberapa contoh persamaan diferensial disajikan dalam Contoh 3.1 berikut :

Contoh 3.1

i. $\frac{dx}{dt} = e^{2t}$

ii. $dx = (x^2 + t)dt$

iii. $x" + 4x = (t^2 + 1)^3$

iv. $x" - (x')^3 + x = \sin t$

Definisi 3.1

Tingkat persamaan diferensial adalah tingkat derivatif tertinggi yang muncul dalam persamaan.

Dengan menggunakan Definisi 3.1, Contoh 3.1 dapat dengan mudah diklasifikasikan tingkatannya. Persamaan pada contoh i dan ii pada Contoh 3.1 merupakan PD tingkat satu, sebab tingkat derivatif tertinggi yang muncul dalam persamaan tersebut adalah derivatif pertama. Persamaan pada contoh iii dan iv dalam Contoh 3.1 merupakan PD tingkat dua, sebab tingkat derivatif tertinggi yang muncul dalam persamaan tersebut adalah derivatif kedua.

Definisi 3.2

Penyelesaian Persamaan Diferensial tingkat-n pada interval $a \leq t \leq b$ adalah suatu fungsi $x(t)$ yang mempunyai semua turunan yang diperlukan, yang jika digantikan pada $x,\ x', x'',\ \cdots, x^{(n)}$ menjadikan persamaan diferensial itu suatu identitas.

Maksud dari "fungsi $x(t)$ yang mempunyai semua turunan yang diperlukan" pada Definisi 3.2 adalah fungsi $x(t)$ dapat diturunkan (didiferensialkan) sedemikian hingga diperoleh fungsi turunan ke- n yang dibutuhkan.

Untuk membuktikan bahwa suatu fungsi adalah suatu penyelesaian persamaan diferensial yang diketahui, perlu diperlihatkan bahwa fungsi itu memenuhi persamaan diferensial.

Contoh 3.2

Akan ditunjukkan bahwa $x = 2 + e^{-t}$ adalah penyelesaian dari $x' + x - 2 = 0$ serta batas-batas penyelesaiannya.

Dengan melakukan diferensial (menurunkan) fungsi $x = 2 + e^{-t}$ terhadap t, dapat diperoleh $x' = -e^{-t}$. Dengan memasukkan x dan x' ke dalam $x' + x - 2 = 0$, akan diperoleh

$-e^{-t} + (2 + e^{-t}) - 2 = 0.$

Karena ruas kiri identik dengan nol untuk semua x, maka fungsi $x = 2 + e^{-t}$ adalah penyelesaian dari $x' + x - 2 = 0$ dengan batas-batas penyelesaiannya adalah $(-\infty, +\infty)$.

Dalam Contoh 3.2, yang pada akhirnya terbukti bahwa $x = 2 + e^{-t}$ adalah penyelesaian dari $x' + x - 2 = 0$, fungsi $x = 2 + e^{-t}$ dapat diturunkan (didiferensialkan) terhadap t sedemikian hingga diperoleh suatu fungsi turunan yaitu $x' = -e^{-t}$ yang kemudian dibutuhkan untuk melakukan manipulasi aljabar selanjutnya.

Definisi 3.3

1. Suatu fungsi real $x = x(t)$ disebut pernyelesaian eksplisit persamaan diferensial $\mathrm{F}(\mathrm{t}, \mathrm{x}, \mathrm{x}', \cdots, \mathrm{x}^{(\mathrm{n})}) = 0$ pada $[a, b]$ jika

$$\mathrm{F}\left(\mathrm{t}, \mathrm{x}(\mathrm{t}), \mathrm{x}'(\mathrm{t}), \cdots, \mathrm{x}^{(\mathrm{n})}(\mathrm{t})\right) = 0 \qquad \text{pada } [a, b].$$

2. Suatu relasi $\mathrm{g}(\mathrm{t}, \mathrm{x}) = 0$ disebut penyelesaian implisit dari persamaan diferensial $F(t, x, x', \cdots, x^{(n)}) = 0$ pada $[a, b]$ jika $g(t, x) = 0$ menentukan sekurang-kurangnya satu fungsi real x pada $[a, b]$ sedemikian rupa sehingga x= $x(t)$ adalah penyelesaian eksplisit pada interval ini.

Persamaan diferensial biasanya mempunyai tak hingga banyak penyelesaian. Misalnya, persamaan diferensial $x' + x - 2 = 0$ mempunyai tak hingga banyak penyelesaian yang berbentuk $x = 2 + ce^{-t}$, dengan c adalah konstanta real. Penyelesaian seperti itu disebut Keluarga Penyelesaian ; satu penyelesaian diperoleh untuk satu nilai parameter c. Keluarga Penyelesaian diberi nama menurut banyak parameter dalam keluarga. Sehingga $x = 2 + ce^{-t}$ disebut keluarga berparameter-satu. Dengan cara yang sama, $x = c_1 + c_2 t$ disebut keluarga berparameter-dua.

Diperlukan ketelitian saat menentukan banyaknya parameter dalam keluarga penyelesaian. Misalnya, fungsi $x = c_1 e^{3t} + c_2 e^{3t}$ sekilas terlihat seperti keluarga berparameter-dua, tetapi perhatikan bahwa

$$x = c_1 e^{3t} + c_2 e^{3t} = (c_1 + c_2) e^{3t}$$

yang dengan mengandaikan $c = c_1 + c_2$, keluarga itu tereduksi menjadi keluarga berparameter-satu. Jika suatu keluarga penyelesaian dikatakan keluarga berparameter-*n*, maka ada *n* konstanta dasar yang tidak dapat direduksi dengan manipulasi aljabar menjadi lebih rendah daripada *n* konstanta.

Definisi 3.4

Suatu keluarga berparameter-*n* dari penyelesaian persamaan diferensial tingkat-*n* disebut penyelesaian umum dari persamaan diferensial jika semua penyelesaian persamaan diferensial dapat diperoleh dari keluarga berparameter-*n*.

Definisi 3.5

Suatu penyelesaian persamaan diferensial tingkat-*n* yang diperoleh dari penyelesaian umum dengan menentukan nilai *n* parameter disebut penyelesaian khusus.

Contoh 3.3

Penyelesaian umum dari $x' + x = 1$ adalah keluarga berparameter-satu $x = 1 + ce^{-t}$.

Akan dicari penyelesaian khusus yang grafiknya melalui titik pangkal.

Grafik fungsi penyelesaian harus melalui titik pangkal, yang berarti bahwa $x = 1 + ce^{-t}$ harus sedemikian sehingga $x = 0$ bila $t = 0$. Dengan melakukan substitusi $x = 0$ dan $t = 0$ ke dalam penyelesaian umum, diperoleh $0 = 1 + c$.

Jadi, $c = -1$ dan penyelesaian khusus adalah

$$x = 1 - e^{-t}.$$

Contoh 3.4

Diketahui bahwa $x = c_1e^{2t} + c_2e^{-t}$ adalah penyelesaian umum dari persamaan diferensial tingkat dua $x" - x' - 2x = 0$, akan dicari penyelesaian khusus yang memenuhi syarat $x(0) = 2$ dan $x'(0) = -1$.

Diketahui $x = c_1e^{2t} + c_2e^{-t}$, maka turunan pertamanya adalah

$$x' = 2c_1e^{2t} - c_2e^{-t}.$$

Untuk mendapatkan nilai c_1 dan c_2, substitusi $t = 0, x = 2$ dan $t = 0, x' = -1$ ke dalam persamaan penyelesaian yang umum dan turunannya.

Hasilnya adalah

$x = c_1e^{2t} + c_2e^{-t}$

$2 = c_1e^0 + c_2e^0$

$2 = c_1 + c_2$ ....(1)

dan

$-1 = 2c_1e^0 - c_2e^0$

$-1 = 2c_1 - c_2$ ....(2)

Dari persamaan (1) dan (2) di atas, dengan metode eliminasi diperoleh $c_1 = \frac{1}{3}$ dan $c_2 = \frac{5}{3}$. Jadi, penyelesaian khusus adalah

$$x = \frac{1}{3}e^{2t} + \frac{5}{3}e^{-t}.$$

Titik pangkal yang ditentukan pada soal Contoh 3.2 dan syarat pada soal Contoh 3.3 disebut sebagai masalah nilai awal / kondisi awal. Dengan adanya masalah nilai awal, penyelesaian yang diperoleh merupakan penyelesaian khusus.

Selanjutnya akan dibahas mengenai jenis-jenis persamaan diferensial orde satu beserta penyelesaian umum dan khususnya, serta teorema-teorema yang menjamin eksistensi dan ketunggalan penyelesaian persamaan diferensial orde satu baik secara khusus jenis per jenisnya maupun persamaan diferensial orde satu secara umum.

A. Persamaan Diferensial Orde Satu

Persamaan diferensial orde satu adalah persamaan diferensial yang memuat derivatif dengan pangkat tertingginya satu. Berikut akan dibahas mengenai jenis-jenis persamaan diferensial orde satu yaitu PD linear tingkat satu, PD dengan variabel terpisah dan PD eksak.

1. Persamaan Diferensial Linear Tingkat Satu

Persamaan diferensial linear tingkat satu, dituliskan sebagai

$$\frac{dx}{dt} = a(t)x + b(t), \quad t \in (t_1, t_2).$$

Untuk seterusnya $\frac{dx}{dt}$ dituliskan sebagai x', sehingga persamaan diferensial linear tingkat satu menjadi

$$x' = a(t)x + b(t), \quad t \in (t_1, t_2) \tag{3.1}$$

dengan $a(t)$ dan $b(t)$ adalah fungsi-fungsi dalam t saja dan keduanya diandaikan kontinu pada (t_1, t_2). Persyarati (3.1) dengan kondisi awal

$$x(t_0) = x_0\,, \qquad x_0 \in \mathbb{R}\,. \tag{3.2}$$

Contoh 3.5

Persamaan diferensial

$$\frac{dx}{dt} = tx + 5t$$

termasuk persamaan diferensial linear dengan

$$a(t) = t \text{ dan } b(t) = 5t.$$

Persamaan diferensial tersebut juga dapa ditulis sebagai $x' = tx + 5t$.

Untuk memperoleh penyelesaian dari persamaan diferensial linear orde satu, ada beberapa langkah yang perlu diikuti, yaitu :

1. tulis persamaan diferensial dalam bentuk $x' - a(t)x = b(t)$;
2. tulis $a(t)$ dan hitung $v(t) = e^{\int a(t)dt}$, $v(t)$ adalah faktor integrasi;
3. kalikan faktor integrasi dengan persamaan $x' - a(t)x = b(t)$; dan
4. integralkan kedua ruas persamaan baru dan selesaikan ke x.

Sebagai contoh, soal pada Contoh 3.5 akan dicari penyelesaiannya.

Contoh 3.6

Persamaan linear $x' = tx + 5t$ pada Contoh 3.5 dapat ditulis dalam bentuk $x' - tx = 5t$

Dari soal diketahui bahwa $a(t) = t$ dan $b(t) = 5t$. Selanjutnya, dicari

$$v(t) = e^{\int a(t)dt}$$

$$v(t) = e^{\int tdt}$$

$$v(t) = e^{\frac{1}{2}t^2}.$$

Kalikan $v(t) = e^{\frac{1}{2}t^2}$ dengan $x' = tx + 5t$, maka diperoleh

$$e^{\frac{1}{2}t^2} \cdot x' - e^{\frac{1}{2}t^2} \cdot tx = e^{\frac{1}{2}t^2} \cdot 5t$$

$$e^{\frac{1}{2}t^2} \cdot \frac{dx}{dt} - e^{\frac{1}{2}t^2} \cdot tx = e^{\frac{1}{2}t^2} \cdot 5t$$

$$e^{\frac{1}{2}t^2} dx - \left(e^{\frac{1}{2}t^2} \cdot tx\right) dt = \left(e^{\frac{1}{2}t^2} \cdot 5t\right) dt$$

$$e^{\frac{1}{2}t^2} dx = \left(e^{\frac{1}{2}t^2} \cdot tx\right) dt + \left(e^{\frac{1}{2}t^2} \cdot 5t\right) dt$$

$$e^{\frac{1}{2}t^2} dx = e^{\frac{1}{2}t^2} t \cdot (x+5) dt.$$

Lakukan pembagian dengan $\left(e^{\frac{1}{2}t^2} \cdot (x+5)\right)$, sehingga diperoleh

$$\frac{dx}{(x+5)} = tdt.$$

Integralkan kedua ruas, maka diperoleh

$$\int \frac{dx}{(x+5)} = \int tdt$$

$$\ln(x+5) = \frac{1}{2}t^2 + c$$

$$x + 5 = e^{\frac{1}{2}t^2 + c}$$

$$x = e^{\frac{1}{2}t^2 + c} - 5$$

dengan c sebarang konstanta.

$x = e^{\frac{1}{2}t^2 + c} - 5$ adalah penyelesaian umum dari persamaan diferensial linear orde satu $x' = tx + 5t$

Jika pada soal diberikan kondisi awal misalnya $x(2) = -4$, maka penyelesaian khusus dapat dicari. Caranya sebagai berikut.

Substitusikan kondisi awal ke penyelesaian umum, sehingga diperoleh

$$x(2) = e^{\frac{1}{2}(2)^2+c} - 5$$

$$-4 = e^{\frac{1}{2}(4)+c} - 5$$

$$1 = e^{2+c}.$$

Nilai e^{2+c} akan sama dengan 1 jika

$$2 + c = 0$$

maka, $c = -2$

Dengan melakukan substitusi nilai $c = -2$ ke $x = e^{\frac{1}{2}t^2+c} - 5$, diperoleh penyelesaian khusus untuk persamaan diferensial $x' = tx + 5t$, dengan kondisi awal $x(2) = -4$, yaitu $x = e^{\frac{1}{2}t^2-2} - 5$.

Teorema 3.1

Jika $x^{'} = a(t)x + b(t)$ dengan $a(t)$ dan $b(t)$ pada interval (t_1, t_2), maka ada tepat satu penyelesaian untuk persamaan $x^{'} = a(t)x + b(t)$ yang terdefinisi di (t_1, t_2) dan memenuhi $x(t_0) = x_0$.

Bukti :

Untuk mendapatkan penyelesaian dari permasalahan tersebut, perlu dimisalkan bahwa penyelesaian itu ada pada interval yang memuat t_0. Persamaan (3.1) dapat ditulis dalam bentuk

$$x^{'} - a(t)x = b(t)$$

dan perkalian dengan faktor integrasi $e^{-\int_{t_0}^{t} a(s)ds}$ menghasilkan

$$x' \cdot e^{-\int_{t_0}^{t} a(s)ds} - a(t)x \cdot e^{-\int_{t_0}^{t} a(s)ds} = b(t) \cdot e^{-\int_{t_0}^{t} a(s)ds}. \quad (3.3)$$

Dengan menggunakan Teorema 2.2, yaitu $d(uv) = u'v + uv'$, dengan $u = x(t)$ dan $v = e^{-\int_{t_0}^{t} a(s)ds}$, maka diperoleh

$$\frac{d}{dt}\left\{x(t)e^{-\int_{t_0}^{t} a(s)ds}\right\} = x' \cdot e^{-\int_{t_0}^{t} a(s)ds} + x(t) \cdot \left(-a(t)\right) \cdot e^{-\int_{t_0}^{t} a(s)ds}$$

$$\frac{d}{dt}\left\{x(t)e^{-\int_{t_0}^{t} a(s)ds}\right\} = x' \cdot e^{-\int_{t_0}^{t} a(s)ds} - x(t) \cdot a(t) \cdot e^{-\int_{t_0}^{t} a(s)ds}$$

dengan $x = x(t)$.

Akibatnya persamaan (3.3) dapat ditulis sebagai

$$\frac{d}{dt}\left\{x(t) \cdot e^{-\int_{t_0}^{t} a(s)ds}\right\} = e^{-\int_{t_0}^{t} a(s)ds} b(t) . \quad (3.4)$$

Integralkan (3.4) dari t_0 hingga t, dengan t termasuk dalam interval yang didefinisikan untuk $x(t)$, maka diperoleh

$$\int_{t_0}^{t} \frac{d}{dt}\left\{x(t) \cdot e^{-\int_{t_0}^{t} a(s)ds}\right\} = \int_{t_0}^{t} e^{-\int_{t_0}^{u} a(s)ds} b(u)du$$

$$x(t) \cdot e^{-\int_{t_0}^{t} a(s)ds}\Big]_{t_0}^{t} = \int_{t_0}^{t} e^{-\int_{t_0}^{u} a(s)ds} b(u)du$$

$$x(t)e^{-\int_{t_0}^{t} a(s)ds} - x(t_0)e^{-\int_{t_0}^{t_0} a(s)ds} = \int_{t_0}^{t} e^{-\int_{t_0}^{u} a(s)ds} b(u)du$$

$$x(t)e^{-\int_{t_0}^{t} a(s)ds} - x(t_0) \cdot e^{0} = \int_{t_0}^{t} e^{-\int_{t_0}^{u} a(s)ds} b(u)du$$

$$x(t)e^{-\int_{t_0}^{t} a(s)ds} - x(t_0) \cdot 1 = \int_{t_0}^{t} e^{-\int_{t_0}^{u} a(s)ds} b(u)du$$

$$x(t)e^{-\int_{t_0}^{t} a(s)ds} - x(t_0) = \int_{t_0}^{t} e^{-\int_{t_0}^{u} a(s)ds} b(u)du. \tag{3.5}$$

Jika persamaan (3.2) disubstitusikan ke persamaan (3.5), diperoleh

$$x(t)e^{-\int_{t_0}^{t} a(s)ds} - x_0 = \int_{t_0}^{t} e^{-\int_{t_0}^{u} a(s)ds} b(u)du$$

$$x(t)e^{-\int_{t_0}^{t} a(s)ds} = x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{-\int_{t_0}^{u} a(s)ds} b(u)du$$

$$x(t) = e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds} \left\{x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{-\int_{t_0}^{u} a(s)ds} b(u)du\right\} \tag{3.6}$$

$$x(t) = x_0 e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds} + e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds} \cdot \int_{t_0}^{t} e^{-\int_{t_0}^{u} a(s)ds} b(u)du$$

$$x(t) = x_0 e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds} + \int_{t_0}^{t} e^{\int_{u}^{t} a(s)ds} b(u)du. \tag{3.7}$$

Berdasarkan Teorema 2.5, yang mengatakan bahwa nilai integral dari suatu fungsi adalah tunggal, maka nilai $e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds}$ dan $\int_{t_0}^{t} e^{-\int_{t_0}^{u} a(s)ds} b(u)du$ dalam Rumusan (3.6) adalah tunggal. Hal ini mengakibatkan $x(t)$ yang diperoleh dari Rumusan (3.6) adalah tunggal ditentukan oleh (3.1) dan (3.2).

Dengan $t = t_0$, (3.6) akan menjadi

$$x(t) = e^{\int_{t_0}^{t_0} a(s)ds} \left\{x_0 + \int_{t_0}^{t_0} e^{-\int_{t_0}^{t_0} a(s)ds} b(u)du\right\} \tag{3.8}$$

Berdasarkan Teorema 2.9, $\int_{t_0}^{t_0} a(s)ds$ akan sama dengan 0, sebab

$\int_{t_0}^{t_0} a(s)ds = A(t_0) - A(t_0) = 0$. Akibatnya persamaan (3.8) menjadi

$$x(t_0) = e^0 \left\{ x_0 + \int_{t_0}^{t_0} e^0 \, b(u)du \right\}$$

$$x(t_0) = e^0\{x_0 + 0\}$$

$$x(t_0) = x_0 \; .$$

Ini menunjukkan bahwa (3.6) memenuhi kondisi awal (3.2).

Selanjutnya, untuk memperlihatkan bahwa $x(t)$ yang diperoleh pada (3.6) memenuhi (3.1), lakukan pendiferensialan (3.6) terhadap t, sehingga akan diperoleh

$$x'(t) = a(t) \cdot e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds} \left\{ x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{-\int_{t_0}^{u} a(s)ds} \, b(u)du \right\}$$

$$+ \, e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds} \cdot e^{-\int_{t_0}^{t} a(s)ds} \cdot b(t). \qquad (3.9)$$

Persamaan (3.9) mengandung $e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds} \left\{ x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{-\int_{t_0}^{u} a(s)ds} \, b(u)du \right\}$ yang tidak lain adalah $x(t)$ pada persamaan (3.6), sehingga jika dioperasikan akan diperoleh

$$x'(t) = a(t)x(t) + e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds} \cdot e^{-\int_{t_0}^{t} a(s)ds} \cdot b(t) \qquad (3.10)$$

Andaikan $\int_{t_0}^{t} a(s)ds = k$, maka $e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds} \cdot e^{-\int_{t_0}^{t} a(s)ds} = e^k \cdot e^{-k} = e^{k-k} = e^0$.

Akibatnya persamaan (3.10) menjadi

$$x'(t) = a(t) \cdot x(t) + e^0 \cdot b(t)$$

$$x'(t) = a(t) \cdot x(t) + b(t). \qquad \blacksquare$$

Persamaan $x'(t) = a(t) \cdot x(t) + b(t)$ tidak lain adalah persamaan diferensial linear orde satu sebagaimana tertulis dalam persamaan (3.1).

2. Persamaan Diferensial dengan variabel terpisah

Bentuk umum persamaan diferensial dengan variabel terpisah adalah

$$x' = f(t)g(x) \tag{3.11}$$

Disebut persamaan diferensial dengan variabel terpisah karena variabel-variabelnya dapat dipisahkan, sehingga (3.11) yang ekuivalen dengan

$$\frac{dx}{dt} = f(t)g(x)$$

akan menjadi

$$\frac{dx}{g(x)} = f(t)dt \tag{3.12}$$

Dan penyelesaian umum untuk persamaan (3.12) dapat diperoleh dengan langsung mengintegralkan kedua sisi persamaan tersebut.

Contoh 3.7

1. Selesaikanlah persamaan diferensial berikut

$$\frac{dx}{dt} = \frac{t}{x}$$

Penyelesaian :

Soal $\frac{dx}{dt} = \frac{t}{x}$ dapat diubah bentuknya menjadi

$$x\,dx = tdt$$

Sehingga soal menjadi persamaan diferensial variabel terpisah, akibatnya soal dapat dengan mudah diselesaikan yaitu dengan mengintegralkan masing-masing ruas.

$$\int x\,dx = \int tdt$$

$$\frac{1}{2}x^2 + A = \frac{1}{2}t^2 + B$$

Dengan A dan B adalah sebarang konstanta.

$$\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}t^2 = C$$

Dengan $C = A - B$, C sebarang konstanta.

$\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}t^2 = C$ merupakan penyelesaian umum dari persamaan diferensial $\frac{dx}{dt} = \frac{t}{x}$.

2. Tentukan penyelesaian khusus dari persamaan diferensial $\frac{dx}{dt} = \frac{t}{x}$, jika $x'(2) = 6$.

   Penyelesaian :

   Bentuk $x'(t)$ dapat dituliskan sebagai $\frac{dx}{dt}$, sehingga $x'(t) = \frac{dx}{dt}$.

   $x'(2) = 6$ berarti ketika t pada persamaan $\frac{dx}{dt} = \frac{t}{x}$ disubstitusi dengan $t = 2$, maka $\frac{dx}{dt} = 2$. Sehingga

$$x'(2) = \frac{2}{x}$$

$$6 = \frac{2}{x}$$

$$x = \frac{4}{6}$$

$$x = \frac{2}{3}$$

Dari soal nomor 1 Contoh 3.7, telah diperoleh penyelesaian umum dari $\frac{dx}{dt} = \frac{t}{x}$ adalah $\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}t^2 = C$. Dengan melakukan substitusi $t = 2, x = \frac{2}{3}$ ke penyelesaian umum tersebut akan diperoleh

$$\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}t^2 = C$$

$$\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 - \frac{1}{2} \cdot (2)^2 = C$$

$$C = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{9} - \frac{1}{2} \cdot 4$$

$$C = \frac{2}{9} - 2 = -\frac{16}{9}$$

Dengan mengganti $C = -\frac{16}{9}$ ke penyelesaian umum, diperoleh penyelesaian khusus dari persamaan diferensial $\frac{dx}{dt} = \frac{t}{x}$ dengan kondisi awal $x'(2) = 6$ yaitu $\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}t^2 = -\frac{16}{9}$

Kepastian akan adanya penyelesaian bagi persamaan diferensial dengan variabel terpisah yang diprasyarati oleh kondisi awal, tertuang dalam teorema berikut.

Teorema 3.2

Jika diberikan persamaan $x' = f(t)g(x)$, dengan :

a. $f(t)$ adalah fungsi kontinu pada interval (t_1, t_2), dan

b. $g(x)$ adalah fungsi kontinu pada interval (x_1, x_2).

maka ada tepat satu penyelesaian $x(t)$ untuk persamaan tersebut, yang memenuhi kondisi awal $x(t_0) = x_0$, dan terdefinisi dalam persekitaran t_0. Penyelesaiannya adalah

$$x(t) = G^{-1}\left(G(x_0) + \int_{t_0}^{t} f(s)ds\right) \tag{3.13}$$

dengan $G(u)$ adalah primitif dari fungsi $\frac{1}{g(u)}$ pada interval (t_1, t_2) dan G^{-1} adalah invers dari G.

Bukti :

Andaikan ada fungsi $x(t)$ yang terdefinisi dalam persekitaran t_0 dan memenuhi (3.11) :

$$x'(t) = f(t)g\big(x(t)\big).$$

Sejauh $g(x) \neq 0$, persamaan terakhir tersebut di atas akan ekuivalen dengan

$$\frac{x'(t)}{g\big(x(t)\big)} = f(t)$$

atau

$$\frac{dx(t)}{g\big(x(t)\big)} = f(t)dt$$

Misalkan $u = x(t)$, maka persamaan menjadi

$$\frac{du}{g(u)} = f(t)dt$$

Integralkan dari t_0 dan t, dengan t termasuk dalam persekitaran t_0 dimana penyelesaiannya terdefinisi, maka diperoleh

$$\int_{x_0}^{x(t)} \frac{du}{g(u)} = \int_{t_0}^{t} f(s)ds \tag{3.14}$$

dengan memperhatikan kondisi awal (3.2) dan permisalan $u = x(t)$ pada pengintegralan pertama.

Karena $G(u)$ primitif dari $\frac{1}{g(u)}$ maka ada

$$G'(u) = \frac{1}{g(u)}, u \in (x_1, x_2). \quad (3.15)$$

sehingga (3.14) akan menjadi

$$\int_{x_0}^{x(t)} G'(u)du = \int_{t_0}^{t} f(s)ds$$

$$G(x(t)) - G(x_0) = \int_{t_0}^{t} f(s)ds .$$

$$G(x(t)) = G(x_0) + \int_{t_0}^{t} f(s)ds . \quad (3.16)$$

Persamaan (3.16) dapat ditulis dalam bentuk

$$x(t) = G^{-1}\left(G(x_0) + \int_{t_0}^{t} f(s)ds \right)$$

yang tidak lain adalah persamaan (3.13).

Karena (3.13) memuat G, yang tidak tunggal dalam (3.15), maka tidak dapat disimpulkan bahwa penyelesaiannya tunggal. Untuk menunjukkan bahwa (3.13) adalah penyelesaian tunggal, kita andaikan $H(u)$ adalah primitif yang lain dari fungsi $\frac{1}{g(u)}$, maka ada

$$H(x(t)) = H(x_0) + \int_{t_0}^{t} f(s)ds \quad (3.17)$$

yang ekuivalen dengan (3.16). Kemudian diperoleh

$$x(t) = H^{-1}\left(H(x_0) + \int_{t_0}^{t} f(s)ds\right). \quad (3.18)$$

Karena $G(u)$ naik monoton pada selang (x_1, x_2) maka inversnya yaitu G^{-1} adalah tunggal. Dengan kata lain, $x(t)$ pada persamaan (3.18) dan (3.13) adalah sama, apapun fungsi primitif yang dipilih untuk $\frac{1}{g(u)}$, sehingga dapat disimpulkan bahwa ada penyelesaian tunggal untuk (3.11). ■

3. Persamaan Diferensial Eksak

Persamaan diferensial orde satu yang berbentuk

$$M(t,x)dt + N(t,x)dx = 0 \tag{3.19}$$

dikatakan eksak jika ada fungsi $F(t,x)$ sedemikian sehingga :

$$dF(t,x) = M(t,x)dt + N(t,x)dx \tag{3.20}$$

ada dalam domain yang diberikan.

Dengan kata lain, Persamaan diferensial orde satu yang berbentuk

$$M(t,x)dt + N(t,x)dx = 0$$

dikatakan eksak jika $M(t,x)dt + N(t,x)dx$ adalah diferensial total suatu fungsi $F(t,x)$.

Karena $M(t,x)dt + N(t,x)dx = 0$ dan $dF(t,x) = M(t,x)dt + N(t,x)dx$, maka persamaan eksak dapat ditulis dalam bentuk $dF = 0$, sehingga penyelesaiannya dalam bentuk implisit dapat ditulis $F(t,x) = C$.

Contoh berikut akan memberi penjelasan yang lebih jelas.

Contoh 3.8

Andaikan diferensial total disajikan oleh $dF = 3t(tx-2)dt + (t^3 + 2x)dx$.

Akan dicari $F(t,x)$.

Karena dF adalah diferensial total dari F, maka berlaku

$$\frac{\partial F}{\partial t} = 3t(tx - 2)$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} = 3t^2x - 6t$$

dan

$$\frac{\partial F}{\partial x} = t^3 + 2x.$$

Dengan mengintegralkan $\frac{\partial F}{\partial t} = 3t^2x - 6t$ terhadap t dan memandang x sebagai konstan, diperoleh

$$\int \frac{\partial F}{\partial t} = (3t^2x - 6t)\,dt$$

$$F(t,x) = t^3x - 3t^2 + C(x)$$

$C(x)$ pengganti fungsi sebarang karena x dipandang sebagai konstan pada derivatif parsial itu. Dengan melakukan penurunan fungsi pada persamaan $F(t,x) = t^3x - 3t^2 + C(x)$ terhadap x, diperoleh

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial\left(x - 3t^2 + C(x)\right)}{\partial x}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = t^3 + c'(x)$$

Sebelumnya, telah diperoleh bahwa $\frac{\partial F}{\partial x} = t^3 + 2x$, oleh karena itu diperoleh hubungan antara $\frac{\partial F}{\partial x} = t^3 + c'(x)$ dan $\frac{\partial F}{\partial x} = t^3 + 2x$ yaitu

$$t^3 + c'(x) = t^3 + 2x$$

$$c'(x) = 2x$$

Sehingga dapat diperoleh $C(x) = x^2 + k$, k sebarang konstanta, dan oleh karena itu

$$F(t,x) = t^3x - 3t^2 + C(x)$$

$$F(t,x) = t^3x - 3t^2 + x^2 + k$$

Fungsi dalam persamaan $F(t,x) = t^3x - 3t^2 + x^2 + k$ merupakan penyelesaian implisit dari persamaan diferensial $dF = 3t(tx - 2)dt + (t^3 + 2x)dx$.

Teorema 3.3

Andaikan persamaan $M(t,x)dt + N(t,x)dx = 0$ dengan $M(t,x)$, $N(t,x)$, $\frac{\partial M}{\partial x}$, dan $\frac{\partial N}{\partial t}$ kontinu dalam persekitaran titik (t_0, x_0).

Jika

$$\frac{\partial M(t,x)}{\partial x} = \frac{\partial N(t,x)}{\partial t} \tag{3.21}$$

pada persekitaran yang diberikan dan $N(t_0, x_0) \neq 0$, maka ada tepat satu penyelesaian $x(t)$ untuk persamaan $M(t,x)dt + N(t,x)dx = 0$, yang memenuhi kondisi awal $x(t_0) = x_0$, dan terdefinisi dalam persekitaran t_0.

Bukti :

Diberikan persamaan $M(t,x)dt + N(t,x)dx = 0$, andaikan $\frac{\partial M(t,x)}{\partial x} = \frac{\partial N(t,x)}{\partial t}$.

Persamaan $M(t,x)dt + N(t,x)dx = 0$ dapat ditulis sebagai

$$dF(t,x) = M(t,x)dt + N(t,x)dx.$$

Dengan kata lain, $M(t,x)dt + N(t,x)dx$ adalah diferensial total dari fungsi $F(t,x)$. Diferensial total dari fungsi $F(t,x)$ yaitu $dF(t,x)$ dapat ditulis sebagai dF, maka diperoleh

$$dF = M(t,x)dt + N(t,x)dx.$$

Integralkan kedua ruas persamaan di atas, maka diperoleh

$$\int dF = \int_{t_0}^{t} M(\tau, x)d\tau + \int_{x_0}^{x} N(t_0, \xi)d\xi.$$

Karena dF adalah diferensial total dari fungsi $F(t,x)$, maka $\int dF$ adalah $F(t,x)$, akibatnya diperoleh

$$F(t,x) = \int_{t_0}^{t} M(\tau, x)d\tau + \int_{x_0}^{x} N(t_0, \xi)d\xi \qquad (3.22)$$

dengan (t,x) ada pada persekitaran titik (t_0, x_0), dimana $M(t,x)$ dan $N(t,x)$ diberikan.

Persamaan (3.19) dan (3.20) menyatakan bahwa $M(t,x)dt + N(t,x)dx = 0$ dan $dF(t,x) = M(t,x)dt + N(t,x)dx$, sehingga dapat dipahami bahwa $F(t,x) = C$ dengan C sebarang konstanta, sebab turunan dari sebuah konstanta adalah 0.

Penjelasan lebih lanjut adalah sebagai berikut :

$F(t,x) = C$ merupakan penyelesaian yang harus memenuhi kondisi awal $x(t_0) = x_0$, sehingga ada $F(t_0, x_0) = C$. Akibatnya diperoleh persamaan

$$F(t,x) = C$$

$$F(t,x) = F(t_0, x_0)$$

$$F(t,x) - F(t_0, x_0) = 0 \qquad (3.23)$$

Menurut definisi penyelesaian implisit, persamaan (3.23) merupakan solusi dari persamaan diferensial, dikarenakan $F(t,x) - F(t_0, x_0) = 0$ menentukan fungsi $x = x(t)$ pada persekitaran titik (t_0, x_0). Persamaan (3.23) pasti menghasilkan fungsi $x = x(t)$, sebab diketahui bahwa $\frac{\partial F}{\partial x} = N \neq 0$. Dengan kata lain, ada suatu fungsi $F(t,x) = C$ sedemikian sehingga $\frac{\partial F}{\partial x} = N \neq 0$. Fungsi $x(t)$ tunggal karena diprasyarati dengan kondisi awal. $x = x(t)$ memenuhi (3.23), sehingga juga memenuhi (3.19). $x = x(t)$ juga memenuhi kondisi awal. ■

B. Eksistensi dan Ketunggalan.

Pada bagian sebelumnya telah dibahas bahwa penyelesaian persamaan diferensial secara umum disebut Keluarga Penyelesaian. Jika soal atau masalah persamaan diferensial tersebut diberi syarat, maka penyelesaiannnya disebut Penyelesaian Khusus. Untuk menyelesaikan suatu persamaan diferensial, mula-mula perlu ditunjukkan bahwa setiap persamaan diferensial selalu mempunyai penyelesaian. Pada bagian ini akan dibahas mengenai teorema yang "menjamin" adanya penyelesaian dari suatu persamaan diferensial orde satu.

Seperti telah dikatakan sebelumnya, persamaan diferensial orde satu adalah persamaan diferensial yang memuat derivatif dengan pangkat tertingginya satu. Penyelesaian persamaan diferensial orde satu secara umum dijamin eksistensinya melalui lemma berikut ini.

Lemma 3.1

Diberikan persamaan diferensial tingkat satu $x' = f(t, x)$ dengan kondisi awal $x(t_0) = x_0$ dan andaikan $f(t, x)$ kontinu di D : $|t - t_0| \leq a$ dan $|x - x_0| \leq b$

Maka, ada $x = x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds$ merupakan penyelesaian bagi persamaan diferensial tersebut dan $x(t)$ kontinu dalam interval $I = \{t; |t - t_0| \leq \delta \leq a\}$.

Bukti :

Diberikan persamaan diferensial tingkat satu

$$x' = f(t,x) \tag{3.24}$$

dengan kondisi awal

$$x(t_0) = x_0 \tag{3.25}$$

dan $f(t,x)$ kontinu pada

$$D: \; |t - t_0| \leq a \text{ dan } |x - x_0| \leq b.$$

Andaikan bahwa $x = x(t)$ adalah penyelesaian untuk (3.24) dan (3.25), dan terdefinisi pada persekitaran $t = t_0$ yaitu $I = \{t; |t - t_0| \leq \delta \leq a\}$.

Integralkan kedua sisi (3.24) dari t_0 hingga sebarang $t \in I$. Akan diperoleh

$$\int_{t_0}^{t} x'(s)ds = \int_{t_0}^{t} f(s,x(s))\, ds$$

$$x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^{t} f(s,x(s))ds\,.$$

Dengan memperhatikan kondisi awal pada (3.25), maka persamaan di atas menjadi

$$x(t) - x_0 = \int_{t_0}^{t} f(s,x(s))ds$$

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,x(s))ds. \tag{3.26}$$

$x(t)$ pada persamaan (3.26), merupakan penyelesaian dari (3.24) dan (3.25) ■

Untuk menunjukkan bahwa (3.26) adalah solusi untuk (3.24) dan (3.25), dapat dilakukan dengan pendiferensialan (3.26) terhadap t.

$$\frac{d(x(t))}{dt} = \frac{d(x_0)}{dt} + \frac{d\left(\int_{t_0}^{t} f(s,x(s))ds\right)}{dt}$$

$$x'(t) = 0 + f\big(t, x(t)\big)$$

$$x'(t) = f\big(t, x(t)\big)$$

atau dapat ditulis sebagai

$$x' = f(t, x).$$

Berdasarkan Lemma 3.1, diketahui bahwa ada solusi untuk $x' = f(t,x)$ dengan kondisi awal $x(t_0) = x_0$ yang diekspresikan dalam bentuk $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(s, x(s)\big)ds$. Dengan menggunakan Lemma 3.1 dapat dibuktikan teorema eksistensi untuk persamaan diferensial tingkat satu yang memenuhi syarat. Untuk menyelesaikan persamaan (3.26), digunakan pendekatan dengan kekonvergenan barisan fungsi. Untuk itu, diandaikan bahwa $\{x_n(t)\}$ suatu barisan fungsi dengan

$$x_n(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(s, x_{n-1}(s)\big)\, ds, \qquad n = 1, 2, \ \dots \tag{3.27}$$

dengan $x_0(t) \equiv x_0$, $t \in [t_0 - a, t_0 + a]$

Teorema 3.4

Diberikan persamaan diferensial orde satu $x' = f(t,x)$ dan andaikan bahwa :

1. fungsi $f(t,x)$ kontinu di $D: |t - t_0| \leq a$ dan $|x - x_0| \leq b$
2. untuk setiap pasang $(t,x), (t,y) \in D$, berlaku

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leq L|x - y| \tag{3.28}$$

dengan $L > 0$ adalah konstanta yang diberikan.

Maka, ada tepat satu penyelesaian $x = x(t)$ untuk $x' = f(t,x)$, yang juga memenuhi kondisi awal $x(t_0) = x_0$ dan terdefinisikan pada interval

$$|t - t_0| \leq \delta = min\left\{a, \frac{b}{M}\right\} \tag{3.29}$$

dengan $M = sup|f(t,x)|$, $(t,x) \in D$

Selain itu, $x(t)$ adalah limit barisan $\{x_n(t)\}$ pada (3.27), seragam di $|t - t_0| \leq \delta$.

Bukti :

Perlu dibuktikan bahwa semua fungsi $x_n(t)$ kontinu di $|t - t_0| \leq \delta$, kemudian menunjukkan bahwa $x(t)$ adalah limit barisan $\{x_n(t)\}$ atau dengan kata lain, menunjukkan bahwa barisan $\{x_n(t)\}$ konvergen seragam ke $x(t)$. Dan terakhir akan ditunjukkan bahwa $x(t)$ adalah solusi tunggal untuk $x' = f(t,x)$ dengan kondisi awal $x(t_0) = x_0$

(i) Pertama, akan dibuktikan bahwa semua fungsi $x_n(t)$ kontinu di $|t - t_0| \leq \delta$.

Pembuktian menggunakan prinsip induksi matematika.

Persamaan (3.27) menyatakan bahwa $x_n(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(s, x_{n-1}(s)\big)\, ds$, dengan $n = 1, 2, \ldots$ dan $x_0(t) = x_0$, $t \in [t_0 - a, t_0 + a]$.

Untuk $n = 1$ ada :

$$x_1(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(s, x_0(s)\big) ds \qquad (3.30)$$

Perhatikan bahwa $x_0 \equiv x_0(t)$ terdefinisi dalam $t \in [t_0 - a, t_0 + a]$ dan $\int_{t_0}^{t} f\big(s, x_0(s)\big) ds$ juga terdefinisi dalam $t \in [t_0 - a, t_0 + a]$. Ini berarti $x_1(t)$ kontinu pada $|t - t_0| \leq a$. Karena $\delta = min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}$, dan berdasarkan Definisi 2.6, akibatnya $|t - t_0| \leq \delta$. Dalam hal ini , berarti dipilih $\delta = a$.

Selain itu, $x_1(t)$ kontinu pada D juga berarti

$$|x_1(t) - x_0| \leq b$$

Dan berdasarkan Definisi 2.6, $x_1(t)$ kontinu berarti $|x_1(t) - x_0| \leq \varepsilon$. Dalam hal ini, dipilih $\varepsilon = b$

Karena $|t - t_0| \leq \delta = min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}$, dan $a < \frac{b}{M}$maka diperoleh

$$|t - t_0| \leq \delta \leq \frac{b}{M}$$

$$M|t - t_0| \leq M\delta \leq b = \varepsilon$$

Sehingga diperoleh

$$|x_1(t) - x_0| \leq M|t - t_0| \leq M\delta \leq b. \tag{3.31}$$

Selanjutnya, andaikan bahwa $x_{k-1}(t)$ kontinu pada $|t - t_0| \leq \delta$ dan

$$|x_{k-1}(t) - x_0| \leq b.$$

Untuk $n = k$, ada

$$x_k(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x_{k-1}(s))ds$$

Menurut persamaan (3.27), $x_k(t)$ kontinu pada $|t - t_0| \leq \delta$ dan

$$|x_k(t) - x_0| \leq M|t - t_0| \leq M\delta \leq b \qquad (3.32).$$

Terbukti bahwa $x_n(t)$ benar untuk $n = 1$, juga untuk $n = k - 1$ dan $n = k$. Sehingga menurut prinsip induksi matematika, ini berarti bahwa semua fungsi $x_n(t)$ kontinu di $|t - t_0| \leq \delta$.dan nilai fungsinya berada dalam interval $|x - x_0| \leq b$.

(ii) Selanjutnya akan dibuktikan bahwa barisan $\{x_n(t)\}$ konvergen seragam pada $|t - t_0| \leq \delta$.

Sebelumnya, pada persamaan (3.30) ada $x_1(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x_0(s))ds$.

Untuk $n = 2$, persamaan (3.27) menjadi

$$x_2(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x_1(s))ds \tag{3.33}$$

Dari (3.30) dan (3.33) diperoleh

$$|x_2(t) - x_1(t)| = \left|\left(x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x_1(s))ds\right) - \left(x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x_0(s))ds\right)\right|$$

$$|x_2(t) - x_1(t)| = \left|\int_{t_0}^{t} f(s, x_1(s))ds - \int_{t_0}^{t} f(s, x_0(s))ds\right|$$

$$|x_2(t) - x_1(t)| = \left|\int_{t_0}^{t} \left(f(s, x_1(s)) - f(s, x_0(s))\right) ds\right|$$

$$|x_2(t) - x_1(t)| \leq \left|\int_{t_0}^{t} |f(s, x_1(s)) - f(s, x_0)| ds\right|$$

Karena (3.28), persamaan di atas menjadi

$$|x_2(t) - x_1(t)| \leq L \left|\int_{t_0}^{t} |x_1(s) - x_0| ds\right| \tag{3.34}$$

Mengingat (3.31),

$$|x_2(t) - x_1(t)| \leq LM \int_{t_0}^{t} |s - t_0| ds$$

$$|x_2(t) - x_1(t)| \leq LM \left[\frac{1}{2}s^2 - t_0 \cdot s\right]_{t_0}^{t}$$

$$|x_2(t) - x_1(t)| \leq LM \left(\left(\frac{1}{2}t^2 - t_0 \cdot t\right) - \left(\frac{1}{2}{t_0}^2 - {t_0}^2\right)\right)$$

$$|x_2(t) - x_1(t)| \leq LM \left(\frac{1}{2}t^2 - t_0 \cdot t + \frac{1}{2}{t_0}^2\right)$$

$$|x_2(t) - x_1(t)| \leq LM \frac{1}{2}(t^2 - 2 \cdot t_0 \cdot t + {t_0}^2)$$

$$|x_2(t) - x_1(t)| \leq LM \frac{|t - t_0|^2}{2} \leq LM \frac{\delta^2}{2}$$

atau

$$|x_2(t) - x_1(t)| \leq LM \frac{|t - t_0|^2}{2!} \leq LM \frac{\delta^2}{2!} \tag{3.35}$$

Andaikan ada pertidaksamaan

$$|x_n(t) - x_{n-1}(t)| \leq ML^{n-1} \frac{|t - t_0|^n}{n!} \leq ML^{n-1} \frac{\delta^n}{n!} \tag{3.36}$$

sedemikian sehingga memenuhi $|x_{n+1}(t) - x_n(t)|$.

Dengan mengoperasikan (3.27) dan

$$x_{n+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(s, x_n(s)\big)ds$$

diperoleh

$$|x_{n+1}(t) - x_n(t)| = \left|\left(x_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(s, x_n(s)\big)ds\right) - \left(x_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(s, x_{n-1}(s)\big)ds\right)\right|$$

$$|x_{n+1}(t) - x_n(t)| = \left|\int_{t_0}^{t} f\big(s, x_n(s)\big)ds - \int_{t_0}^{t} f\big(s, x_{n-1}(s)\big)ds\right|$$

$$|x_{n+1}(t) - x_n(t)| = \left|\int_{t_0}^{t} \Big(f\big(s, x_n(s)\big) - f\big(s, x_{n-1}(s)\big)\Big)\, ds\right|$$

$$|x_{n+1}(t) - x_n(t)| \leq \left|\int_{t_0}^{t} \left|f\big(s, x_n(s)\big) - f\big(s, x_{n-1}(s)\big)\right| ds\right|$$

Berdasarkan (3.28), diperoleh

$$|x_{n+1}(t) - x_n(t)| \leq L\left|\int_{t_0}^{t} |x_n(s) - x_{n-1}(s)| ds\right|$$

$$|x_{n+1}(t) - x_n(t)| \leq L[x_n(s)\cdot s - x_{n-1}(s)\cdot s]_{t_0}^{t}$$

$$|x_{n+1}(t) - x_n(t)| \leq L|(x_n(t)\cdot t - x_{n-1}(t)\cdot t) - (x_n(t_0)\cdot t_0 - x_{n-1}(t_0)\cdot t_0)|$$

$$|x_{n+1}(t) - x_n(t)| \leq L|x_n(t) - x_{n-1}(t)||t - t_0|$$

Berdasarkan (3.36) diperoleh

$$|x_{n+1}(t) - x_n(t)| \leq L\left(ML^{n-1}\frac{|t - t_0|^n}{n!}\right)|t - t_0|$$

$$|x_{n+1}(t) - x_n(t)| \leq ML^n \frac{|t-t_0|^{n+1}}{(n+1)!} \leq ML^n \frac{\delta^{n+1}}{(n+1)!} \qquad (3.37)$$

Perhatikan bahwa (3.37) sama dengan (3.36), dengan $n+1$ sebagai n. Akibatnya, pertidaksamaan (3.36) berlaku untuk $n = 1, 2, 3, \cdots$ Pertidaksamaan (3.36) dapat ditulis dalam bentuk

$$|x_n(t) - x_{n-1}(t)| \leq \frac{M}{L}\frac{(L\delta)^n}{n!} \tag{3.38}$$

untuk $n = 1, 2, 3, \cdots$ dan $|t - t_0| \leq \delta$.

Perhatikan bahwa

$$x_n(t) = x_0 + [x_1(t) - x_0] + \cdots + [x_n(t) - x_{n-1}(t)]$$

atau dapat juga ditulis sebagai

$$x_n(t) = x_0 + \sum_{k=1}^{n}[x_k(t) - x_{k-1}(t)]$$

menunjukkan bahwa barisan $\{x_n(t)\}$ dan deret

$$x_0 + \sum_{n=1}^{\infty}[x_n(t) - x_{n-1}(t)]$$

memiliki sifat konvergen yang sama yaitu $x_n(t) - x_{n-1}(t)$.

Dari (3.38), $\{x_n(t)\}$ merupakan barisan Cauchy sebab ada $|x_n(t) - x_{n-1}(t)| \leq \frac{M}{L}\frac{(L\delta)^n}{n!}$, untuk $n = 1, 2, 3, \cdots$, dengan $\varepsilon > \frac{M}{L}\frac{(L\delta)^n}{n!}$, sehingga ada $|x_n(t) - x_{n-1}(t)| < \varepsilon$.

Karena $\{x_n(t)\}$ merupakan barisan Cauchy, maka deret $\sum_{k=1}^{n}[x_k(t) - x_{k-1}(t)]$ konvergen. Dan berdasarkan kriteria kekonvergenan Weierstrass, deret yang mempunyai bentuk umum $x_n(t) - x_{n-1}(t)$, konvergen seragam pada $|t - t_0| \leq \delta$.

Begitu pula dengan barisan $\{x_n(t)\}$ yang juga konvergen seragam pada $|t - t_0| \leq \delta$. Mengingat $x(t) = \lim_{n\to\infty} x_n(t)$ yang juga dapat ditulis sebagai $|x_n(t) - x(t)| < \varepsilon$, dengan mengambil $\varepsilon = \frac{1}{L}$ dan menurut (3.5) dapat diperoleh

$$|f(t, x_n(t)) - f(t, x(t))| \leq |x_n(t) - x(t)| < \frac{1}{L}$$

$$|f(t, x_n(t)) - f(t, x(t))| \leq L|x_n(t) - x(t)|$$

maka bagian kiri pertidaksamaan di atas, dapat dinyatakan dengan

$$\lim_{n\to\infty} f(t, x_n(t)) = f(t, x(t)) \tag{3.39}$$

yang konvergen seragam ke $|t - t_0| \leq \delta$.

Perhatikan bahwa $\lim_{n\to\infty} x_n(t) = x(t)$ dan $\lim_{n\to\infty} f(t, x_n(t)) = f(t, x(t))$, maka untuk $n \to \infty$, (3.27) menjadi

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds$$

Yang tidak lain adalah persamaan (3.26). Akibatnya, paling sedikit ada satu penyelesaian kontinu untuk (3.24) dan (3.25).

(iii) Selanjutnya, akan dibuktikan bahwa penyelesaian tersebut adalah tunggal. Untuk itu, kita andaikan ada sebuah penyelesaian lain yaitu

$$y(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds \tag{3.40}$$

pada $|t - t_0| \leq \delta$ sedemikian sehingga $y(t) \equiv x(t)$.

Dari (3.27) dan (3.40), diperoleh

$$|y(t) - x_n(t)| = \left|\left(x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds\right) - \left(\left(x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x_{n-1}(s))ds\right)\right)\right|$$

$$|y(t) - x_n(t)| = \left|\int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds - \int_{t_0}^{t} f(s, x_{n-1}(s))ds\right|$$

$$|y(t) - x_n(t)| = \left| \int_{t_0}^{t} \left(f(s, y(s)) - f(s, x_{n-1}(s)) ds \right) \right|$$

$$|y(t) - x_n(t)| \leq \left| \int_{t_0}^{t} \left| f(s, y(s)) - f(s, x_{n-1}(s)) \right| ds \right|$$

karena (3.28), pertidaksamaan menjadi

$$|y(t) - x_n(t)| \leq L \left| \int_{t_0}^{t} |y(s) - x_{n-1}(s)| ds \right| \qquad n = 1,2, \cdots \tag{3.41}$$

Untuk $n = 1$, ada

$$|y(t) - x_1(t)| \leq L \left| \int_{t_0}^{t} |y(s) - x_0| ds \right|$$

$$|y(t) - x_1(t)| \leq L[y(s). s - x_0 \cdot s]_{t_0}^{t}$$

$$|y(t) - x_1(t)| \leq L|(y(t). t - x_0 \cdot t) - (y(t). t_0 - x_0 \cdot t_0)|$$

$$|y(t) - x_1(t)| \leq L|y(t) - x_0||t - t_0|$$

Karena $y(t)$ adalah solusi maka $|y(t) - x_0| \leq b$ pada $|t - t_0| < \delta$, pertidaksamaan menjadi

$$|y(t) - x_1(t)| \leq bL|t - t_0| \tag{3.42}$$

pada $|t - t_0| < \delta$.

Andaikan

$$|y(t) - x_n(t)| \leq bL^n \frac{|t - t_0|^n}{n!} \tag{3.43}$$

pada $|t - t_0| < \delta$.

Untuk $n = k$, (3.43) menjadi

$$|y(t) - x_k(t)| \leq bL^k \frac{|t - t_0|^k}{k!} \tag{3.44}$$

pada $|t - t_0| < \delta$.

Untuk $n = k + 1$, ada

$$|y(t) - x_{k+1}(t)| \leq L\left|\int_{t_0}^{t} |y(s) - x_k(s)| ds\right| \tag{3.45}$$

$$|y(t) - x_{k+1}(t)| \leq L[y(s).s - x_k \cdot s]_{t_0}^{t}$$

$$|y(t) - x_{k+1}(t)| \leq L|(y(t).t - x_k \cdot t) - (y(t).t_0 - x_k \cdot t_0)|$$

$$|y(t) - x_{k+1}(t)| \leq L|y(t) - x_k||t - t_0|$$

Berdasarkan (3.44) dan (3.45), diperoleh

$$|y(t) - x_{k+1}(t)| \leq L\left(bL^k \frac{|t - t_0|^k}{k!}\right)|t - t_0|$$

$$|y(t) - x_{k+1}(t)| \leq bL^{k+1} \frac{|t-t_0|^{k+1}}{(k+1)!} \tag{3.46}$$

Akibatnya, (3.43) berlaku untuk $n = 1,2,\cdots$ dan bagian kiri (3.43) dapat dituliskan sebagai

$$|y(t) - x_n(t)|$$

$$|x_n(t) - y(t)|$$

$$\lim_{n\to\infty} f(t, x_n(t)) = f(t, y(t))$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n(t) = y(t)$$

Sebelumnya, telah diketahui bahwa $\lim_{n\to\infty} x_n(t) = x(t)$. Ini berarti $y(t) = x(t)$, dan itu membuktikan ketunggalan penyelesaian untuk (3.24) dan (3.25).

Dengan demikian terbukti bahwa ada tepat satu penyelesaian untuk persamaan diferensial orde satu $x' = f(t, x)$ dengan kondisi awal $x(t_0) = x_0$, yaitu $x = x(t)$ ■

BAB IV

PENUTUP

Persamaan diferensial orde satu secara umum ditulis sebagai $x' = f(t,x)$. Apabila persamaan diferensial tersebut tidak diprasyarati dengan kondisi awal, maka penyelesaiannya berupa keluarga penyelesaian. Sedangkan jika diprasyarati dengan kondisi awal $x(t_0) = x_0$, penyelesaiannya berupa penyelesaian khusus. Dengan kata lain, penyelesaiannya adalah tunggal.

Untuk menjamin eksistensi dan ketunggalan penyelesaian persamaan diferensial orde-satu, ada teorema yang berbunyi :

Diberikan persamaan diferensial orde satu $x^{'} = f(t,x)$ dan andaikan bahwa :

1. fungsi $f(t,x)$ kontinu di D: $|t - t_0| \leq a$ dan $|x - x_0| \leq b$
2. untuk setiap pasang $(t,x), (t,y) \in D$, berlaku

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leq L|x - y|$$

dengan $L > 0$ adalah konstanta yang diberikan.

Maka, ada tepat satu penyelesaian $x = x(t)$ untuk $x^{'} = f(t,x)$, yang juga memenuhi kondisi awal $x(t_0) = x_0$ dan terdefinisikan pada interval

$$|t - t_0| \leq \delta = min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}$$

dengan $M = sup|f(t,x)|$, $(t,x) \in D$

Selain itu, $x(t)$ adalah limit barisan $\{x_n(t)\}$ dengan $x_n(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(s, x_{n-1}(s)\big)\, ds$, seragam di $|t - t_0| \leq \delta$.

Pembuktian teorema sendiri dibagi dalam tiga tahapan yaitu membuktikan bahwa semua fungsi $x_n(t)$ kontinu di $|t - t_0| \leq \delta$, kemudian menunjukkan bahwa $x(t)$ adalah limit barisan $\{x_n(t)\}$ atau dengan kata lain, menunjukkan bahwa barisan $\{x_n(t)\}$ konvergen seragam ke $x(t)$. Dan terakhir akan ditunjukkan bahwa $x(t)$ adalah solusi tunggal untuk $x' = f(t, x)$ dengan kondisi awal $x(t_0) = x_0$

Pembuktian teorema tersebut memanfaatkan definisi dan teorema yang berkaitan, seperti definisi dan teorema tentang supremum-infimum, limit dan kekontinuan fungsi, derivatif-integral, kekonvergenan barisan, serta barisan dan deret fungsi.

Pada akhirnya, teorema ini terbukti dan dapat disimpulkan bahwa setiap persamaan diferensial orde satu yang fungsi di dalamnya merupakan fungsi kontinu dan persamaan diprasyarati dengan kondisi awal, maka ada tepat satu penyelesaian untuk persamaan diferensial tersebut.

DAFTAR PUSTAKA

Corduneanu, C. (1969). *Principles of Differential and Integral Equations.* NewYork: Chelsea Publishing Company

Robert Jr, Charles E. (2010). *Ordinary Differential Equation.* United State: CRC Press

Tutoyo, A. (1991). *Diktat Persamaan Diferensial*. Yogyakarta: Universitas Sanata Dharma

Kusumah, Yaya S. (1989). *Persamaan Diferensial*. Jakarta: P2LPTK Dikti

Purcell, Edwin J and Dale Varberg. (1987). *Kalkulus dan Geometri Analitis (Jilid 1).* Jakarta: Erlangga

Krants, Steven G. (2005). *Real Analysis and Foundations (second edition).* United State: CRC Press

Darmawijaya, S. *Pengantar Analisis Real*. Yogyakarta: Tim Basic Science Dikti