PELABELAN TOTAL AJAIB SISI KUAT PADA GRAF SIKEL DENGAN TAMBAHAN DUA ANTING

Skripsi

Diajukan untuk Memenuhi Salah Satu Syarat Memperoleh Gelar Sarjana Program Studi Pendidikan Matematika pada Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan

Oleh:

Benedictus Dwi Yuliyanto

08 1414 068

PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA

JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN

UNIVERSITAS SANATA DHARMA

YOGYAKARTA

2012

SKRIPSI

PELABELAN TOTAL AJAIB SISI KUAT PADA GRAF SIKEL DENGAN TAMBAHAN DUA ANTING

Oleh:

Benedictus Dwi Yuliyanto

NIM : 08 1414 068

Telah disetujui oleh:

Pembimbing

D. Arif Budi Prasetyo, S.Si., M.Si. tanggal: 2 Juli 2012

SKRIPSI

PELABELAN TOTAL AJAIB SISI KUAT PADA GRAF SIKEL DENGAN TAMBAHAN DUA ANTING

Dipersiapkan dan disusun oleh :

Benedictus Dwi Yuliyanto
NIM : 081414068

Telah dipertahankan di depan Panitia Penguji
pada tanggal 23 Juli 2012
dan dinyatakan telah memenuhi syarat

Susunan Panitia Penguji

	Nama Lengkap	Tanda Tangan
Ketua	: Drs. Aufridus Atmadi, M.Si.	....
Sekretaris	: Dr. M. Andy Rudhito, S.Pd.	....
Anggota	: D. Arif Budi Prasetyo, S.Si., M.Si.	....
Anggota	: Dr. M. Andy Rudhito, S.Pd.	....
Anggota	: Ch. Enny Murwaningtyas, S.Si., M.Si.	....

Yogyakarta, 23 Juli 2012
Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan
Universitas Sanata Dharma
Dekan FKIP,

Rohandi, Ph.D.

HALAMAN PERSEMBAHAN

He carried me to reach my time was up.,

He led me to feel my moment is weak.,

thank you Lord for all You have done

I dedicate this thesis to people who are very my loved:
My parents, Mario Subiyanto and Christina Sarasni
beloved grandfather Yohanes Sadji Ciptotanyono
My brother Albertus Magnus Bayu Pratomo
And my beloved is very love Elisabeth Evi Alviah

PERNYATAAN KEASLIAN KARYA

Saya menyatakan dengan sesungguhnya bahwa skripsi yang saya tulis ini tidak memuat karya atau bagian dari karya orang lain, kecuali yang telah disebutkan dalam kutipan dan daftar pustaka, sebagaimana layaknya karya ilmiah.

Yogyakarta, 23 Juli 2012

Penulis

Benedictus Dwi Yuliyanto

LEMBAR PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI KARYA ILMIAH UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS

Yang bertanda tangan di bawah ini, saya mahasiswa Universitas Sanata Dharma:

Nama : Benedictus Dwi Yuliyanto

NIM : 08 1414 068

Demi pengembangan ilmu pengetahuan, saya memberikan kepada Perpustakaan Universitas Sanata Dharma karya ilmiah saya yang berjudul:

Pelabelan Total Ajaib Sisi Kuat pada Graf Sikel
dengan Tambahan Dua Anting

Dengan demikian saya memberikan kepada Universitas Sanata Dharma hak untuk menyiapkan, mengalihkan dalam bentuk media lain, mengelola dalam bentuk pangkalan data, mendistribusikan secara terbatas, dan mempublikasikan di internet atau media lain untuk kepentingan akademis tanpa perlu meminta izin dari saya maupun memberi royalty kepada saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya.

Dibuat di Yogyakarta

Pada Tanggal: 23 Juli 2012

Yang menyatakan,

(Benedictus Dwi Yuliyanto)

ABSTRAK

Benedictus Dwi Yuliyanto, 2012. Pelabelan Total Ajaib Sisi Kuat pada Graf Sikel dengan Tambahan Dua Anting. Program Studi Pendidikan Matematika, Jurusan Pendidikan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Universitas Sanata Dharma, Yogyakarta.

Skripsi ini mengkaji tentang graf, pelabelan graf (*graph labeling*), dan penggunakan program Turbo Pascal untuk pelabelan graf. Teori graf pertama kali diperkenalkan oleh Leonard Euler pada tahun 1736. Salah satu topik dalam graf yang mendapat banyak perhatian adalah pelabelan graf. Salah satu jenis pelabelan graf yaitu pelabelan total ajaib sisi kuat (*strong edge magic total labeling*). Pelabelan ajaib merupakan pemetaan bijektif dengan menggabungkan himpunan titik pada graf dengan himpunan sisi pada graf ke himpunan bilangan bulat $1,2,3,\dots,a+b$ dengan a banyak titik dan b banyak sisi. Sebuah graf memiliki pelabelan total sisi ajaib kuat jika label-label pada titiknya merupakan urutan bilangan bulat positif $1,2,3,\dots,a$ dengan a banyaknya titik. Graf yang dapat dilabeli secara total ajaib kuat dinamakan dengan graf total sisi ajaib kuat. Skripsi ini bertujuan untuk membuktikan bahwa graf baru yaitu graf sikel dengan tambahan dua anting $(C_a + 2A_1)$ memenuhi pelabelan total ajaib sisi kuat (*strong edge magic total labeling*).

Dalam skripsi ini dibahas mengenai pelabelan total ajaib sisi kuat (*strong edge magic total labeling*) dan penggunaan program turbo pascal untuk membantu pelabelan. Skripsi ini mengkaji beberapa jurnal, makalah, dan hasil penelitian sebelumnya untuk mendapatkan teori-teori yang mendukung. Tujuan dari skripsi ini adalah memahami algoritma konstanta ajaib yang terbentuk dan algoritma pelabelan total ajaib sisi kuat pada graf sikel dengan tambahan dua anting $(C_a + 2A_1)$, serta membuat program menggunakan Turbo Pascal untuk mempermudah melakukan pelabelan total ajaib sisi kuat pada graf sikel dengan tambahan dua anting $(C_a + 2A_1)$.

Dari hasil analisa diperoleh bahwa graf sikel dengan tambahan dua anting $(C_a + 2A_1)$ memenuhi pelabelan total ajaib sisi kuat (*strong edge magic total labeling*). Hasil dari penelitian ini diperoleh bahwa graf sikel dengan tambahan dua anting $(C_a + 2A_1)$ memiliki konstanta ajaib pada interval $\frac{5a+9}{2} < k < \frac{5a+17}{2}$ untuk $a \geq 3$, pola pelabelannya, serta program dari turbo pascal untuk membantu pelabelan.

Kata Kunci : graf, pelabelan graf, graf sikel dengan tambahan dua anting, *strong edge magic total labeling*, program turbo pascal

ABSTRACT

Benedictus Dwi Yuliyanto, 2012. The Strong Edge Magic Total Labeling on Cycle Graph with Two Extra Arms. Mathematics Education Study Program, Mathematics and Science Education Department, Faculty of Teachers Training and Education, Sanata Dharma University, Yogyakarta.

This thesis is examined on a graph, graph labeling, and the use of Turbo Pascal program for the labeling of a graph. Graph theory was first introduced by Leonard Euler in 1736. One of the topics in the graph that gets a lot of attention is the labeling of a graph. One type of graph labeling is strong edge magic total labeling. Magic labeling is a bijective mapping by combining the set of points on the graph with the set on the side of the graph to the set of integers $1,2,3,\dots,a+b$ with a lot of points and lots of side b . A graph has the magic total labeling if the labels strong at its points is a sequence of positive integers $1,2,3,\dots,a$ with a number of points. Labeled graph that can be called by the powerful magic total graph total side strong magic. This thesis aims to prove that the new graph is a cycle graph with two extra arms $(C_a + 2A_1)$ satisfy strong edge magic total labeling.

In this thesis discussed strong edge magic total labeling and the use of turbo pascal program to help labeling. This thesis examines several journals, papers, and the results of previous studies to obtain theories that support. The purpose of this thesis is to understand the algorithm a constant miracle that form and algorithm labeling of total magic hand firmly on the cycle graph with two extra arms $(C_a + 2A_1)$, and create a program using Turbo Pascal to facilitate the conduct of labeling total magic hand firmly on the cycle graph with two extra arms $(C_a + 2A_1)$.

From the analysis results obtained by the the cycle graph with two extra arms $(C_a + 2A_1)$, satisfy the strong magic total labeling (strong edge magic total labeling). The results of this study found that the cycle graph with two extra arms $(C_a + 2A_1)$, has a magic constant in the interval $\frac{5a+9}{2} < k < \frac{5a+17}{2}$ for $a \geq 3$, the pattern of labeling, as well as of turbo pascal program to help labeling.

Key words: graph, graph labeling, cycle graph with two extra arms, strong edge magic total labeling, turbo pascal program

KATA PENGANTAR

Puji dan syukur penulis panjatkan kepada Tuhan Yang Maha Esa, karena hanya dengan berkat dan karunia-Nya, serta campur tangan-Nya, penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul "Pelabelan Total Ajaib Sisi Kuat pada Graf Sikel dengan Tambahan Dua Anting" dengan baik dan tepat waktu.

Pada kesempatan ini penulis juga ingin mengucapkan rasa terima kasih kepada:

1. Bapak Dominikus Arif Budi Prasetyo, S.Si., M.Si., selaku dosen pembimbing yang sudah meluangkan waktu dan dengan sabar membimbing penulis, sehingga skripsi ini dapat diselesaikan dengan baik.
2. Bapak Dr. Marcellinus Andy Rudhito, S.Pd., selaku Kepala Program Studi Pendidikan Matematika.
3. Bapak Prof. Suwarsono selaku Dosen Pembimbing Akademik.
4. Segenap Dosen JPMIPA yang telah membantu dan memberikan dukungan setelah penulis menempuh kuliah, sehingga akhirnya penulis dapatmenyelesaikan studi dengan tepat waktu.
5. Segenap Staf Sekretariat JPMIPA yang telah membantu dalam hal administrasi kampus selama penulis melakukan studi di sini.
6. Kedua orang tua yaitu Bapak Mario Subiyanto dan Christina Sarasni, yang selalu memberikan dukungan serta doa yang melimpah kepada penulis sehingga skripsi ini dapat diselesaikan tepat waktu.

7. Segenap keluarga, terutama Simbah Yohanes Sadji Tjiptotanyono dan Mas Albertus Magnus Bayu Pratomo yang selalu memberi semangat, motivasi, serta inspirasi kepada penulis sehingga penulis mampu menyelesaikan studi dengan baik.
8. Kekasihku Elisabeth Evi Alviah, yang selalu memberikan semangat serta nasehat-nasehat yang sangat berguna bagi penulis selama menjalankan studi.
9. Mas Weni dan Marcel, yang mau meluangkan waktunya untuk membantu penulis dalam menyelesaikan skripsi ini.
10. Semua teman seperjuangan dari program studi Pendidikan Matematika angkatan 2008 yang memberikan dukungan kepada penulis selama studi.
11. Semua pihak yang tidak dapat disebutkan satu persatu, yang telah membantu sehingga penilis dapat menyelesaikan skripsi ini.

Akhirnya penulis berharap semoga skripsi ini dapat berguna bagi para pembaca.

Penulis,

Benedictus Dwi Yuliyanto

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR TABEL

DAFTAR NOTASI

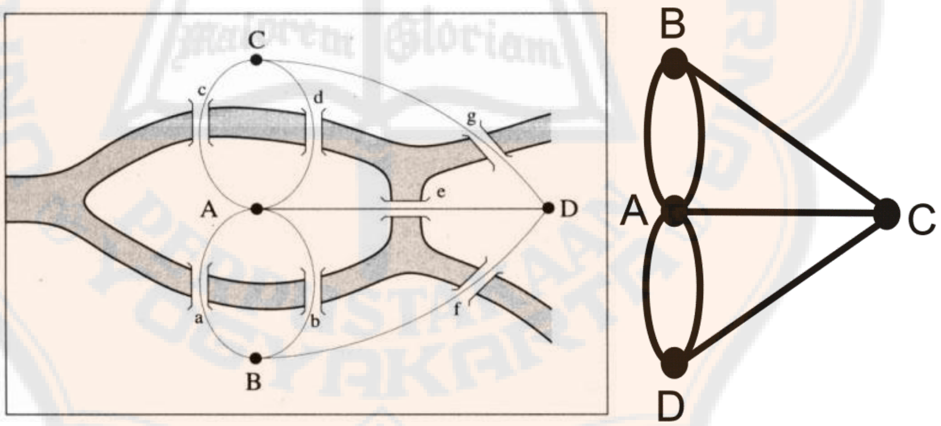
$\cup$	Gabungan himpunan
C_a	Sikel dengan a titik
$f_{(v_i)}$	label titik ke-i
$f_{(v_i)}f_{(v_{i+1})}$	label dari sisi ke-$v_{(i)}v_{(i+1)}$
$f(x)$	label titik x
$f(y)$	label titik y
$f(xy)$	label sisi xy
S_e	Jumlah label-label sisi
S_v	Jumlah label-label titik
S_w	Jumlah bobot-bobot sisi
$Wf(e_i)$	Bobot dari setiap sisi
A_1	Tambahan satu anting pada graf sikel
$2A_1$	tambahan dua anting pada graf sikel
■	akhir Definisi
□	akhir pembuktian
●	akhir contoh

BAB I

PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang

Teori graf pertama kali diperkenalkan oleh Leonard Euler pada tahun 1736. Ketika itu dia memikirkan kemungkinan untuk melewati empat daerah yang terhubung dengan tujuh jembatan di atas sungai Pregel di kota Kaliningrat, Rusia, tepat satu kali dan kembali ke tempat semula. Masalah jembatan Konigsberg tersebut dapat dinyatakan dalam istilah graf (*graph*) dengan menentukan keempat daerah tersebut sebagai titik (*vertex*) dan ketujuh jembatan tersebut sebagai sisi (*edge*) yang mengubungkan pasangan titik yang sesuai (Suryadi,1996).

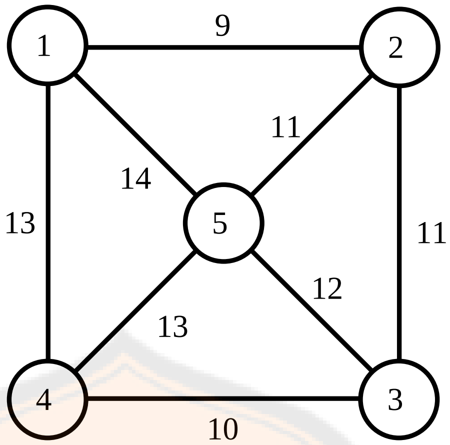


Gambar 1.1 Jembatan Konigsberg dan Grafnya

Beberapa contoh penerapan graf dalam kehidupan sehari-hari antara lain, dalam permasalahan menentukan jalur terpendek (*shortest path problem*), selain itu penerapan graf juga sering dijumpai pada sebuah rangkaian listrik.

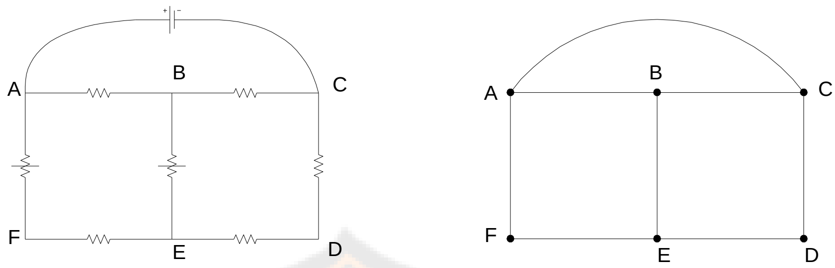
Shortest path problem adalah sebuah permasalahan untuk menemukan sebuah jalan terpendek antara dua tempat. Dalam graf dua tempat tersebut disebut dengan titik (*vertex*) dan sebuah jalan tersebut disebut dengan sisi (*edge*). Jadi jika masalah tersebut dibawa kedalam graf, *shortest path problem* merupakan permasalahan untuk menemukan sisi antara dua titik, dimana bobot dari unsur pokok diminimalisasi.

Salah satu contoh *shortest path problem* adalah *travelling salesman*. Misal, seorang petugas kantor telepon berkeliling untuk mengumpulkan koin pada telepon umum yang dipasang di berbagai tempat. Berangkat dari kantornya, ia mendatangi satu demi satu telepon umum tersebut, dan akhirnya kembali ke kantor lagi. Masalahnya adalah bagaimana rute perjalanan agar waktu yang diperlukan merupakan waktu minimum. Jika masalah tersebut dimodelkan dalam graf, maka kantor serta telepon umum tersebut dianggap sebagai titik, sedangkan jalan yang menghubungkan tempat tersebut dianggap sebagai sisi. Pada setiap sisi dibubuhkan bilangan, dimana bilangan tersebut menyatakan lamanya perjalanan yang dinyatakan oleh ruas tersebut. Misal kantor dinyatakan sebagai titik 1, dan misal ada 4 telepon umum yang dinyatakan sebagai titik 2, 3, 4, dan 5 (Suryadi, 1996). Sehingga graf dari pemisalan tersebut dapat di gambar sebagai berikut:



Gambar 1.2 Graf *Travelling Salesman*

Di bidang fisika permasalahan yang terdapat pada suatu rangkaian listrik dapat diselesaikan dengan bantuan graf dan matriks. Dalam hal ini graf digunakan untuk menggambarkan suatu rangkaian listrik dan graf yang digunakan adalah suatu graf terhubung berorientasi. Dari graf berorientasi tersebut dapat dibentuk suatu himpunan sikel fundamental dan himpunan potongan fundamental. Dari kedua himpunan tersebut dapat dibentuk suatu matriks insidensi sikel ruas dan matriks insidensi potongan ruas. Kemudian dibentuk suatu matriks resistensi dari matriks insidensi sikel ruas dan vektor tegangan yang berpadanan dengan sumber tegangan sedemikian hingga membentuk suatu persamaan loop. Dengan menggunakan persamaan loop tersebut, persamaan-persamaan yang dibutuhkan untuk mencari arus dan tegangan elemen sebagai penyelesaian dari permasalahan suatu rangkaian listrik dalam bidang fisika (Selfiana: 2011).



Gambar 1.3 Rangkaian Listrik dan Grafnya

Salah satu topik dalam graf yang mendapat banyak perhatian adalah pelabelan graf (*graph labeling*). Dengan objek kajian berupa graf yang secara umum direpresentasikan oleh titik dan sisi serta himpunan bagian bilangan asli yang disebut label. Pelabelan graf muncul pertama kali pada pertengahan tahun 1960-an.

Graf G merupakan gabungan himpunan tak kosong titik-titik (*vertices*) $V = V(G)$ dan himpunan sisi-sisi (*edges*) $E = E(G)$ dengan jumlah titik $|V| = a$ dan jumlah sisi $|E| = b$. Berdasarkan elemen-elemen yang dilabeli atau berdasarkan domainnya, jenis pelabelan pada graf dibagi menjadi tiga, yaitu pada titik disebut pelabelan titik (*vertex labeling*), pada sisi disebut pelabelan sisi (*edge labeling*), dan pada titik dan sisi disebut pelabelan total (*total labeling*). Pada penelitian ini, domain yang digunakan adalah titik dan sisi, sehingga disebut pelabelan total.

Pelabelan ajaib merupakan pemetaan bijektif dengan menggabungkan himpunan titik pada graf dengan himpunan sisi pada graf $(V(G) \cup E(G))$ ke himpunan bilangan bulat $1,2,3, \dots, a + b$ dengan a banyak titik dan b banyak sisi.

Pelabelan ajaib sisi (*edge magic labeling*) adalah pelabelan sejumlah sisi dan titik sedemikian sehingga jumlah label pada suatu sisi dan label pada titik-titik yang saling menempel tersebut sama dengan suatu nilai konstan bilangan bulat positif, dan tidak bergantung pada pilihan sisinya.

Penelitian mengenai pelabelan ajaib graf terus berkembang, sehingga kemudian Wallis (2001: 17) mengkaji dan memperkenalkan istilah *strong edge-magic total labeling* atau pelabelan total sisi ajaib kuat. Sebuah graf memiliki pelabelan total sisi ajaib kuat jika label-label pada titiknya merupakan urutan bilangan bulat positif $1,2,3,\ldots,a$ dengan a banyaknya titik. Graf yang dapat dilabeli secara total ajaib kuat dinamakan dengan graf total sisi ajaib kuat.

Berdasarkan hasil dari penelitian-penelitian sebelumnya, penulis mengembangkan hasil penelitian yang berkaitan dengan graf total sisi ajaib kuat, yaitu memahami algoritma konstantan ajaib yang terbentuk pada graf sikel dengan tambahan dua anting $(C_a + 2A_1)$ dan algoritma pelabelan total sisi ajaib kuat pada graf sikel dengan tambahan dua anting $(C_a + 2A_1)$. Serta peneliti menyusun program menggunakan Turbo Pascal untuk melakukan pelabelan pada graf sikel dengan tambahan dua anting $(C_a + 2A_1)$.

1.2. Perumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka perumusan masalah yang di bahas pada tugas akhir ini adalah:

1. Apakah graf sikel dengan tambahan dua anting $(C_a + 2A_1)$ memenuhi pelabelan total sisi ajaib kuat? Jika iya, bagaimana interval dari konstanta ajaib yang terbentuk?
2. Bagaimana rumus untuk menentukan pelabelan total sisi ajaib kuat pada graf sikel dengan tambahan dua anting $(C_a + 2A_1)$?

2.1. Pembatasan Masalah

Pada tugas akhir ini, graf yang digunakan adalah terbatas, sederhana, dan tak berarah. Dikhususkan untuk graf sikel (*cycle graph*) dengan tambahan dua anting $(C_a + 2A_1)$ untuk $a \geq 3$ dan a ganjil. Pada graf sikel yang digunakan dua anting ditempelkan pada dua titik yang berdekatan (*adjacent*), yang berturut-turut dinamakan v_1 dan v_2, kemudian dua anting tersebut berturut-turut dinamakan v_{a+1} dan v_{a+2}. Sedangkan pelabelan yang digunakan adalah pelabelan total ajaib sisi kuat (*strong edge-magic total labeling*).

2.2. Tujuan dan Manfaat Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah:

1. Mengetahui pelabelan yang dapat digunakan pada graf sikel dengan tambahan dua anting $(C_a + 2A_1)$, serta mengetahui interval dari konstanta ajaib yang terbentuk.

2. Mengetahui bagaimana rumus untuk menentukan pelabelan total sisi ajaib kuat pada graf sikel dengan tambahan dua anting $(C_a + 2A_1)$.

Manfaat dari penelitian ini adalah:

1. Menambah jenis graf baru yang memenuhi pelabelan total ajaib sisi kuat pada graf sikel dengan tambahan dua anting $(C_a + 2A_1)$.
2. Menambah pengetahuan mengenai pelabelan total ajaib kuat pada graf sikel dengan tambahan dua anting $(C_a + 2A_1)$.
3. Dapat memberi label pada graf sikel dengan tambahan dua anting $(C_a + 2A_1)$ dengan menggunakan program dari Turbo Pascal yang telah disusun.
4. Memperlihatkan sisi lain dari belajar matematika yang menyenangkan.

4.1. Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan akan dibagi menjadi lima bagian, yaitu:

BAB I: PENDAHULUAN

Pada bab ini dijelaskan mengenai latar belakang, perumusan masalah, pembatasan masalah, tujuan dan manfaat penelitian, dan sistematika penulisan.

BAB II: KAJIAN PUSTAKA

Pada bab ini dijelaskan mengenai definisi dasar graf, beberapa istilah dalam graf, jenis-jenis graf, pelabelan graf, graf sikel dengan tambahan satu anting, graf sikel dengan tambahan dua anting, diagram alir (*flowchart*), dan Turbo Pascal.

BAB III: METODE PENELITIAN

Bab ini meliputi jenis penelitian dan langkah-langkah penelitian, serta bagan alir penelitian.

BAB IV: PEMBAHASAN

Pada bab ini dijelaskan mengenai pembahasan tentang pelabelan total ajaib sisi kuat pada graf sikel dengan tambahan dua anting $(C_a + 2A_1)$ untuk $a \geq 3$, perhitungan dasar (*basic counting*) untuk menentukan konstanta ajaib yang terbentuk dari perhitungan tersebut, serta pembahasan mengenai nilai konstanta ajaib yang dapat diperumum untuk pelabelan total ajaib sisi kuat pada graf sikel dengan tambahan dua anting $(C_a + 2A_1)$ untuk $a \geq 3$. Penyusunan program Turbo Pascal guna mempermudah dalam melakukan pelabelan graf sikel dengan tambahan dua anting $(C_a + 2A_1)$ yang memenuhi sifat pelabelan total ajaib sisi kuat.

BAB V: PENUTUP

Pada bab ini dijelaskan mengenai kesimpulan dari pembahasan yang telah diuraikan pada bab sebelumnya serta beberapa saran yang berkaitan dengan pembahasan tersebut.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA DAN LANDASAN TEORI

2.1. Teori Graf

Dalam mempelajari graf terdapat beberapa teori dasar, diantaranya: pengertian graf, beberapa istilah dalam graf, dan jenis-jenis graf. Berikut disajikan mengenai beberapa teori dasar tersebut.

1. Pengertian Graf

   Graf G didefinisikan sebagai himpunan pasangan terurut $G = (V, E)$ dengan V adalah himpunan berhingga titik-titik dan E adalah himpunan dari pasangan titik-titik di V. Selanjutnya anggota V disebut titik dan anggota E disebut sisi. Secara grafis, titik digambarkan dengan titik dan sisi digambarkan dengan ruas garis yang menghubungkan dua titik. Banyaknya unsur di V disebut *order* dari G dilambangkan dengan $|V| = a$ dan banyaknya unsur di E disebut ukuran (*size*) dari G dilambangkan dengan $|E| = b$. Secara geometris graf dapat digambarkan sebagai sekumpulan titik di dalam bidang dua dimensi yang dihubungkan dengan sekumpulan sisi (Prasetyo,2008).

2. Beberapa Istilah tentang Graf

Berikut didefinisikan beberapa istilah tentang graf:

Definisi tentang berdekatan (*adjacent*), bersisisan (*incident*), derajat (*degree*) dan gelang (*loop*) serta sisi berganda (*multiple edge*) (Wiitala S.A. 1987).

Definisi 2.1.1

Misal terdapat dua buah titik v_i dan v_j pada graf G, dua buah titik tersebut dikatakan berdekatan bila terdapat sebuah sisi yang menghubungkan kedua titik tersebut. Dapat ditulis dengan notasi $e = (v_i, v_j) \in E(G)$ dimana $v_i \neq v_j$. ■

Definisi 2.1.2

Diberikan graf G dan $\{v_i, v_j\} \in V(G)$ jika $e = (v_i, v_j) \in E(G)$ maka dikatakan e bersisian dengan titik v_i dan e bersisian dengan titik v_j. ■

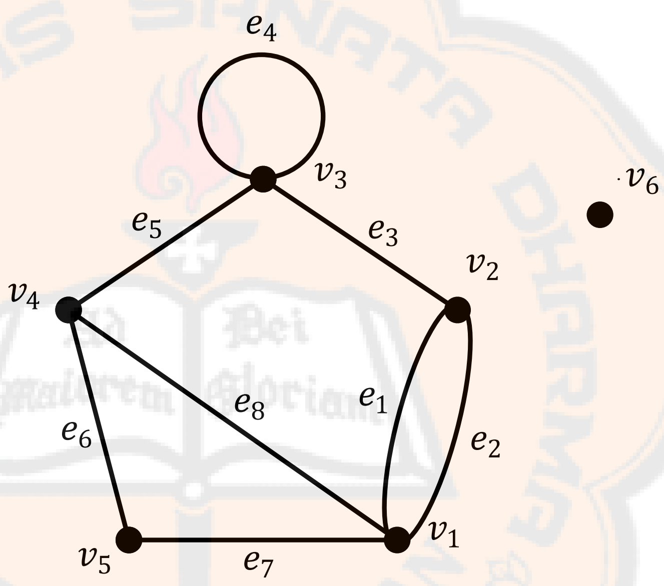
Definisi 2.1.3

Derajat sebuah titik v pada sebuah graf G adalah banyak sisi yang bersisihan pada v, biasa ditulis $der(v)$. Dengan kata lain banyak sisi yang memuat titik v sebagai titik ujung. Sisi dengan derajat nol disebut titik terisolasi (*isolated vertex*), sedangkan titik dengan derajat dua disebut gelang (*loop*). ■

Definisi 2.1.4

Misal pada sebuah graf G terdapat beberapa sisi yang menghubungkan dua buah titik yang sama, maka graf tersebut dikatakan mempunyai sisi ganda. ■

Contoh untuk memperjelas Definisi 2.1.1, Definisi 2.1.2, Definisi 2.1.3, dan Definisi 2.1.4.



Gambar 2.1 Graf G_1

Graf G_1memuat himpunan titik $V(G_1) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ dan himpunan sisi $E(G_1) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\}$.

(i) Pada graf G_1, titik v_1 dan v_5 merupakan titik yang berdekatan, sedangkan titik v_1 dan v_3 bukan merupakan titik yang berdekatan.

(ii) Pada graf G_1, e_7 bersisian dengan titik v_1 dan v_5, tetapi tidak terdapat sisi yang bersisian dengan titik v_1 dan v_3.

(iii) Pada graf G_1, $der(v_3) = 4$, $der(v_5) = 2$, dan $der(v_6) = 0$.

(iv) Pada graf G_1, memuat sisi ganda yaitu sisi e_1 dan e_2. ●

Definisi tentang *walk*, *trail*, dan *closed trail* (West, D.B. 2001).

Definisi 2.1.5

Suatu *walk* yang pada graf G adalah suatu urutan yang terdiri atas titik-titik dan sisi-sisi bergantian, dimana setiap sisi bersisian dengan titik terdekat, dengan diawali dan diakhiri pada suatu titik. ■

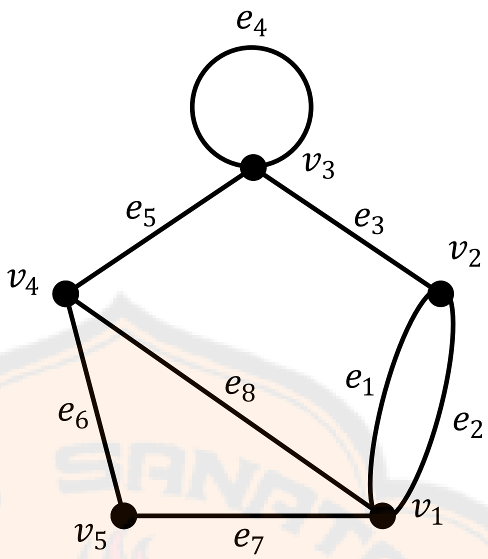
Definisi 2.1.6

Suatu *walk* yang setiap sisinya berbeda maka walk tersebut disebut *trail*. Suatu *trail* yang setiap titiknya berbeda disebut lintasan (*path*). Panjang lintasan adalah banyak sisi dalam lintasan tersebut. ■

Definisi 2.1.7

Suatu *walk* tertutup dalam graf G jika semua sisinya berbeda, maka *walk* itu disebut trail tertutup (*closed trail*). ■

Contoh untuk memperjelas Definisi 2.1.5, Definisi 2.1.6, dan Definisi 2.1.7.



Gambar 2.2 Graf G_2

Graf G_2memuat himpunan titik $V(G_1) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ dan himpunan sisi $E(G_1) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\}$.

Pada graf G_2terdapat:

(i) *Walk* : $v_1, e_1, v_2, e_3, v_3, e_4, v_3, e_5, v_4$

(ii) *Trail* : $v_1, e_1, v_2, e_3, v_3, e_4, v_3, e_5, v_4$

(iii) *Path* : $v_1, e_1, v_2, e_3, v_3, e_5, v_4$

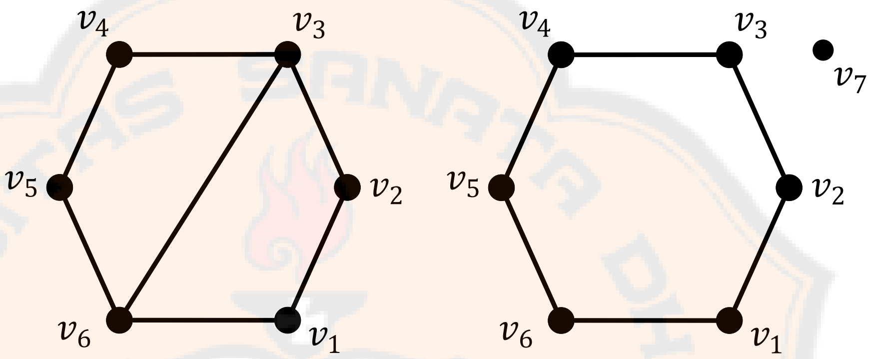
(iv) *Closed trail* : $v_1, e_8, v_4, e_6, v_5, e_7, v_1$ ●

Definisi tentang graf terhubung (*connected graph*) dan graf tak terhubung (*disconnected graph*) (Wiitala S.A. 1987).

Definisi 2.1.8

Suatu Graf G disebut graf terhubung, jika untuk setiap pasang titik v_i dan titik v_j, $v_i \neq v_j$, di dalam himpunan V terdapat lintasan dari v_i ke v_j. Jika tidak, maka Graf G disebut graf tak terhubung. ■

Contoh untuk memperjelas Definisi 2.1.8.



Gambar 2.3 Graf G_3 dan Graf G_4

Graf G_3 pada gambar 2.3 merupakan graf terhubung, karena setiap titik terhubung pada suatu sisi. Sedangkan graf G_4 pada gambar diatas merupakan graf tak terhubung, karena tidak terdapat sisi yang menghubungkan v_7 dengan titik-titik v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, dan v_6.

3. Jenis-jenis Graf

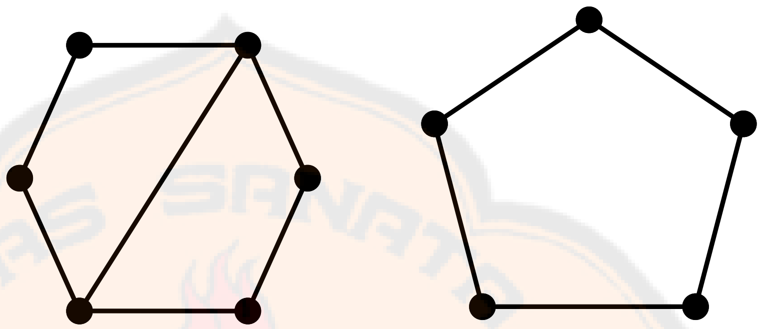
Graf dapat dikelompokkan menjadi beberapa jenis berdasarkan sifat-sifatnya. Pengelompokan tersebut antaralain berdasarkan ada tidaknya sisi ganda, berdasarkan banyaknya titik, atau berdasarkan orientasi arah pada sisi.

Berdasarkan ada tidaknya sisi ganda atau gelang pada suatu graf, maka graf dikelompokkan menjadi dua jenis, yaitu:

a. Graf sederhana (*simple graph*)

Graf sederhana adalah graf yang tidak mengandung sisi ganda atau gelang.

Contoh:

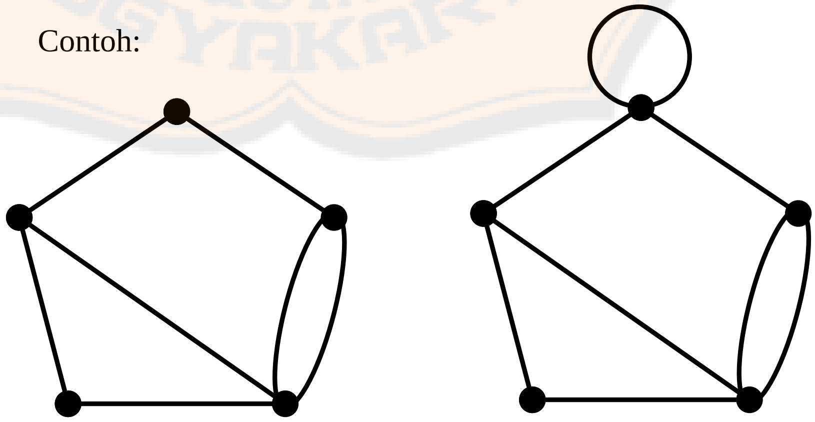


Gambar 2.4 Graf Sederhana

b. Graf tak sederhana (*unsimple graph*)

Graf tak sederhana adalah graf yang mengandung sisi ganda atau gelang. Graf tak sederhana dibagi menjadi dua macam, yaitu graf ganda (*multigraph*) dan graf semu (*pseudograph*). Graf ganda adalah graf yang mengandung sisi ganda. Graf semu adalah graf yang mengandung sisi ganda dan gelang.

Contoh:



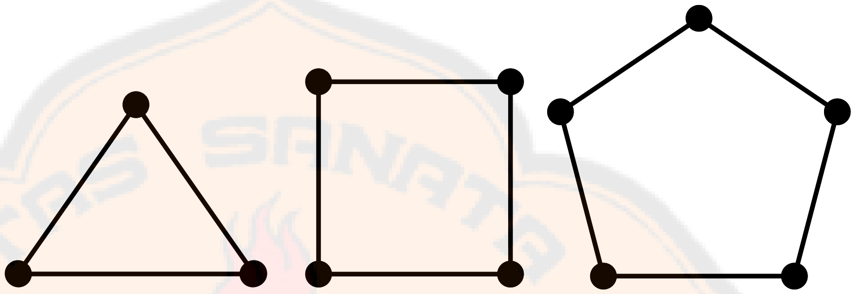
Gambar 2.5 Graf Ganda dan Graf Semu

Berdasarkan banyak titik pada suatu graf, maka secara umum graf dapat dikelompokkan menjadi dua, yaitu:

a. Graf berhingga (*finite graph*)

Graf berhingga adalah graf yang banyak titiknya a, berhingga.

Contoh:

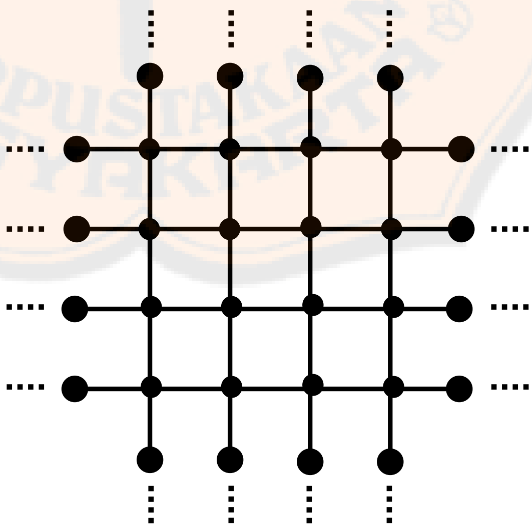


Gambar 2.6 Graf Berhingga

b. Graf tak berhingga (*unfinite graph*)

Graf tak berhingga adalah graf yang banyak titiknya tidak berhingga.

Contoh:



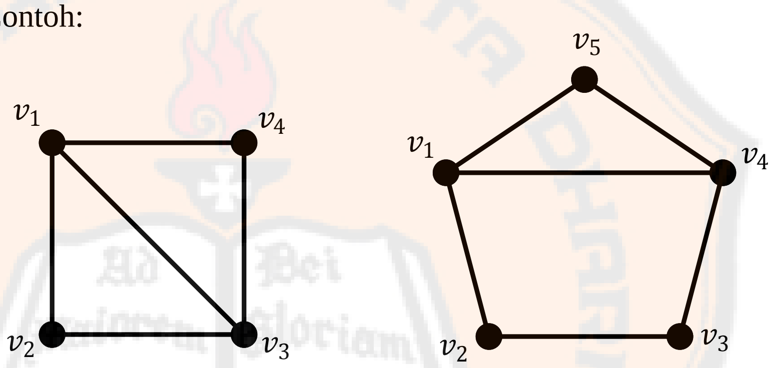
Gambar 2.7 Graf Tak Berhingga

Berdasarkan orientasi arah pada sisi, maka secara umum graf dikelompokkan menjadi dua jenis, yaitu:

a. Graf tak berarah

Graf tak berarah adalah graf yang sisinya tidak mempunyai orientasi arah. Dengan kata lain, urutan dari titik-titik yang dihubungkan oleh sisi tidak diperhatikan. Jadi (v_i, v_j) dan (v_j, v_i) merupakan sisi yang sama.

Contoh:

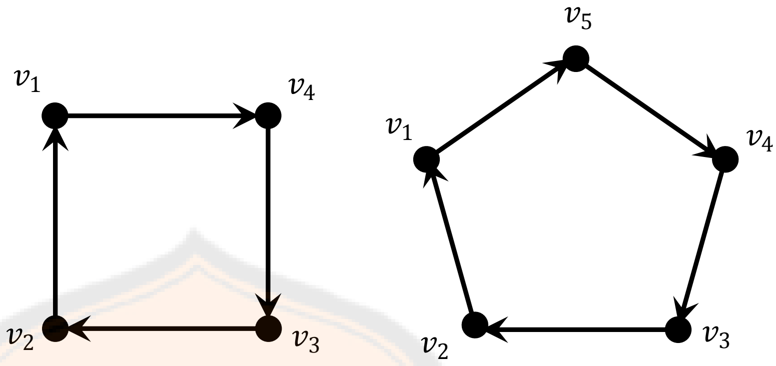


Gambar 2.8 Graf Tak Berarah

b. Graf berarah

Graf berarah adalah graf yang setiap sisinya mempunyai orientasi arah. Pada graf berarah (v_i, v_j) dan (v_j, v_i) merupakan dua sisi yang berbeda, dengan kata lain $(v_i, v_j) \neq (v_j, v_i)$. Pada sisi (v_i, v_j), titik v_i dinamakan titik asal (*initial vertex*) dan titik v_j dinamakan titik terminal (*terminal vertex*), sedangkan pada sisi (v_j, v_i), titik asalnya adalah titik v_j dan titik terminalnya adalah titik v_i.

Contoh:



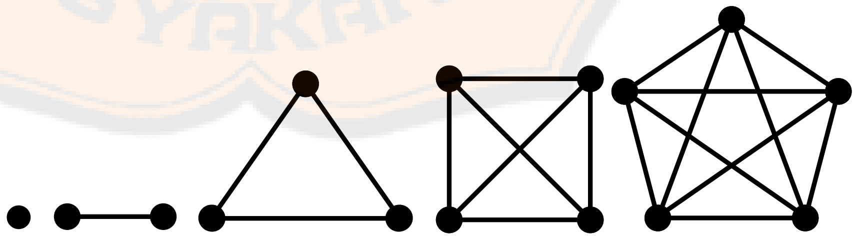
Gambar 2.9 Graf Berarah

Terdapat beberapa jenis graf sederhana khusus, antara lain:

a. Graf Lengkap (*Complete Graph*)

Graf lengkap adalah graf sederhana yang setiap titiknya bertetangga, atau setiap titiknya terhubung langsung ke semua titik lainnya oleh satu sisi. Graf lengkap dengan a buah titik dilambangkan dengan K_a dan banyaknya sisi pada sebuah graf lengkap dengan a buah titik adalah $a(a-1)/2$.

Contoh:

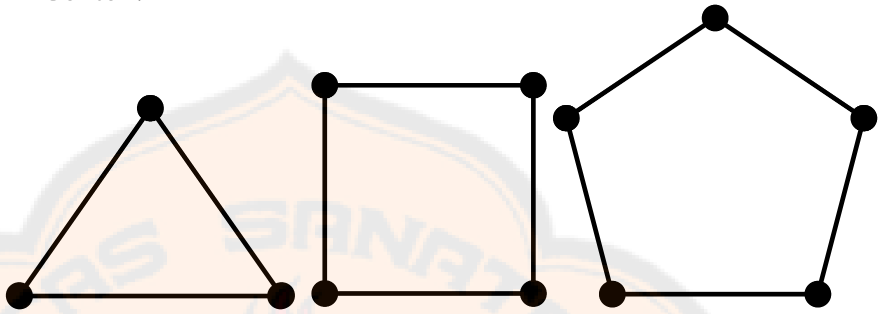


Gambar 2.10 Graf Lengkap

b. Graf Sikel (*Cycle Graph*)

Graf sikel adalah graf sederhana yang setiap titiknya bersisian. Graf sikel dengan a buah titik dilambangkan dengan C_a.

Contoh:

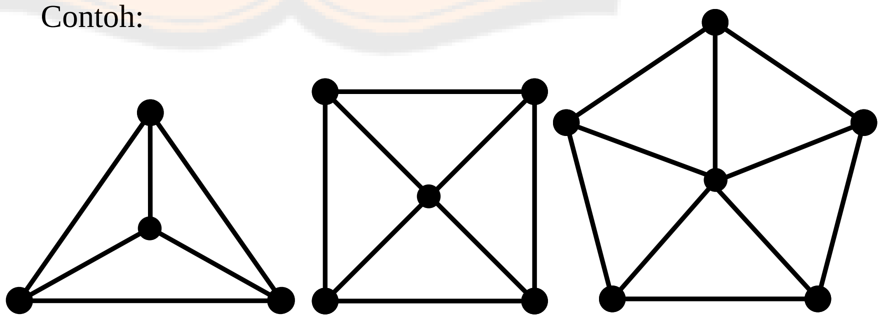


Gambar 2.11 Graf Sikel

c. Graf Roda (*Wheels Graph*)

Graf roda adalah graf sederhana yang diperoleh dengan cara menambahkan satu titik pada graf sikel C_a, dan menghubungkan satu titik tersebut dengan sebuah sisi ke semua titik yang ada pada graf sikel. Graf roda dengan a buah titik dilambangkan dengan W_a dan banyaknya sisi pada sebuah graf roda dengan a buah titik adalah $2(a-1)$.

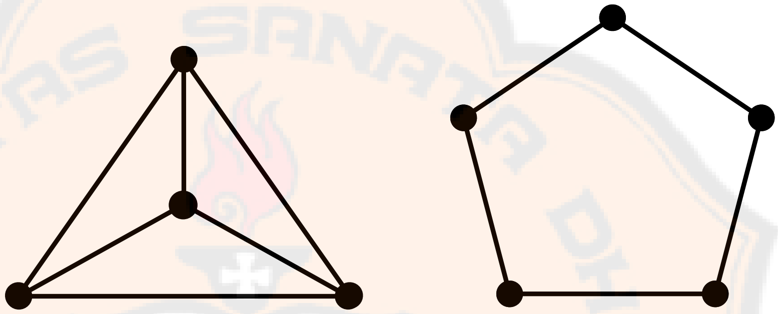
Contoh:



Gambar 2.12 Graf Roda

d. Graf Teratur (*Regular Graph*)

Graf teratur adalah graf sederhana yang setiap titiknya mempunyai derajat yang sama. Apabila derajat dari setiap titik pada graf teratur adalah d, maka graf tersebut dinamakan dengan graf teratur berderajat d. Banyaknya sisi pada sebuah graf teratur dengan a buah titik adalah $(ad)/2$.

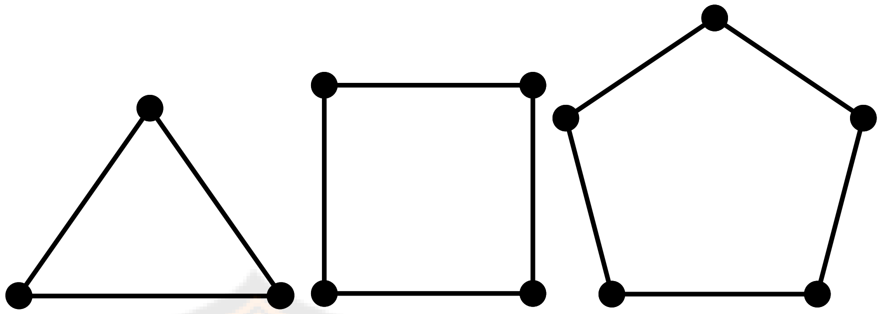


Gambar 2.13 Graf Teratur

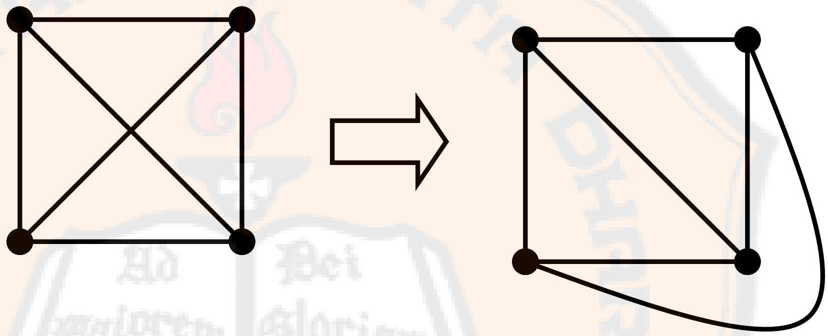
e. Graf Planar (*Planar Graph*) dan Graf Bidang (*Plane Graph*)

Jika suatu graf dapat digambarkan pada bidang datar sedemikian sehingga tidak ada sisi-sisi yang berpotongan kecuali di titik dimana keduanya bersisian maka graf tersebut disebut graf planar. Graf planar yang digambarkan dengan sisi-sisi yang tidak saling berpotongan dinamakan graf bidang. Semua graf sikel merupakan graf planar dan ada graf lengkap K_1, K_2, K_3, K_4 yang merupakan graf planar. Tetapi untuk graf lengkap K_a dengan $a \geq 5$ bukan merupakan graf planar.

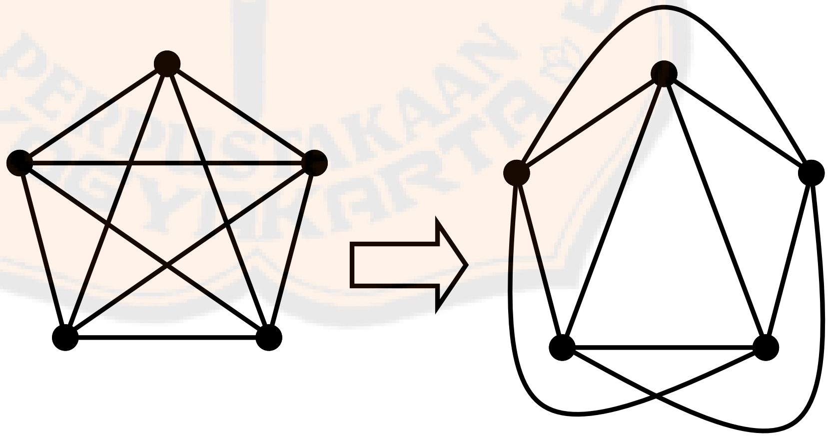
Contoh:



Gambar 2.14 Graf Sikel yang juga merupakan Graf Planar



Gambar 2.15 Graf Lengkap yang juga merupakan Graf Planar

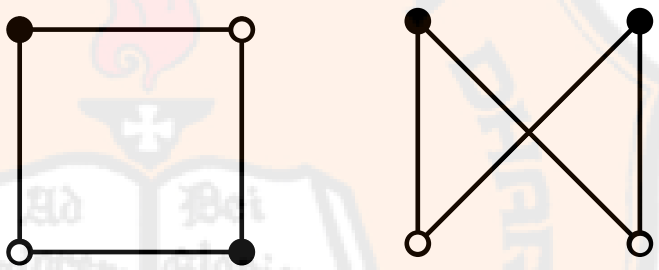


Gambar 2.16 Graf Lengkap yang bukan merupakan Graf Planar

f. Graf Bipartit (*Bipartite Graph*)

Jika suatu graf G mempunyai himpunan titik V yang dapat dipartisi menjadi dua himpunan tak kosong dan bersisihan V_1 dan V_2 sedemikian hingga setiap sisi hubung dalam graf menghubungkan suatu titik di V_1 dengan titik di V_2, atau tidak ada sisi hubung di dalam G yang menghubungkan dua titik di V_1 maupun di V_2 maka graf tersebut disebut bipartit.

Contoh:



Gambar 2.17 Graf Bipartit

2.2. Pelabelan Graf (*Graph Labeling*)

Pelabelan graf adalah pemetaan bijektif yang memetakan semua elemen dari graf tersebut (titik dan sisi) ke dalam suatu himpunan bilangan bulat positif. Terdapat beberapa pelabelan, antara lain pelabelan titik, pelabelan sisi, dan pelabelan total. Pelabelan titik adalah pelabelan yang domainya himpunan dari titik, pelabelan sisi adalah pelabelan yang domainnya himpunan dari sisi, sedangkan pelabelan total adalah pelabelan yang domainnya titik dan sisi.

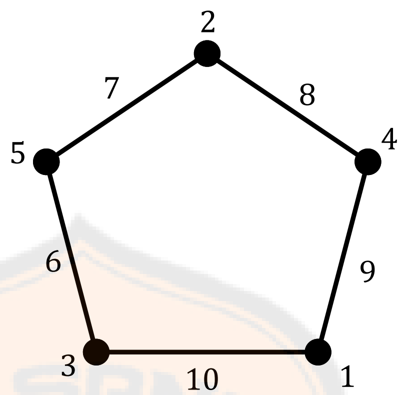
Pada pelabelan graf, terdapat bobot yang dapat dihitung. Bobot adalah jumlah dari label-label pada setiap elemen graf. Oleh karena itu, terdapat dua jenis pelabelan graf menurut jumlah dari setiap bobotnya, yaitu pelabelan tak ajaib (*antimagic labeling*) dan pelabelan ajaib (*magic labeling*). Pelabelan tak ajaib adalah pelabelan yang jumlah setiap bobotnya berbeda, sedangkan pelabelan ajaib adalah pelabelan yang jumlah setiap bobotnya bernilai sama (konstan). Dalam penelitian ini akan digunakan pelabelan total ajaib sisi kuat (*strong edge magic total labeling*).

Pelabelan total sisi ajaib pada graf G adalah pemetaan satu-satu λ dari $V(G) \cup E(G)$ ke bilangan bulat positif $1,2,\dots,a+b$, dimana $a = |V(G)|$ dan $b = |E(G)|$, dengan sifat tersebut, diberikan untuk setiap sisi (xy),

$$\lambda(x) + \lambda(xy) + \lambda(y) = k$$

untuk beberapa konstanta k. Dengan kata lain, $Wf(e_i) = k$ untuk setiap pilihan dari sisi e_i. k disebut dengan konstanta ajaib (*magic constants*) dari G. (Wallis., 2001).

Contoh:



Gambar 2.18 Pelabelan Total Sisi Ajaib pada Graf Sikel C_5 dengan $k = 14$

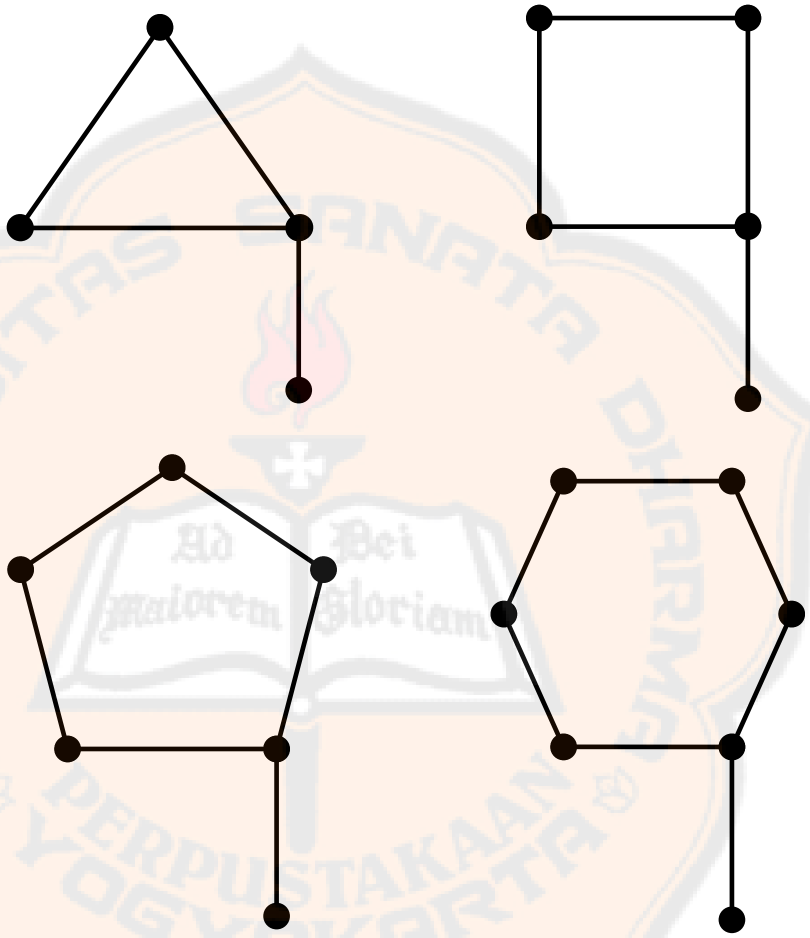
Pada gambar 2.18 bobot V_1V_2 adalah $1 + 9 + 4 = 14$, bobot V_2V_3 adalah $4 + 8 + 2 = 14$, bobot V_3V_4 adalah $2 + 7 + 5 = 14$, bobot V_4V_5 adalah $5 + 6 + 3 = 14$, dan bobot V_5V_1 adalah $3 + 10 + 1 = 14$. Sehingga contoh pelabelan pada gambar diatas disebut pelabelan total ajaib sisi pada C_5 dengan $k = 14$. ●

2.3. Graf Sikel (*Cycle Graph*) dengan Tambahan Satu Anting

Graf sikel adalah graf sederhana yang setiap titiknya berderajat dua, atau graf dengan lintasan tertutup. Graf sikel dengan a titik dilambangkan dengan C_a.

Graf sikel dengan tambahan satu anting, merupakan perkembangan dari graf sikel C_a yang ditambahkan satu titik di luar C_a dan satu sisi yang menghubungkan titik tersebut dengan C_a. Graf sikel dengan tambahan satu anting dilambangkan dengan $C_a + A_1$. Banyak titik dan sisi yang terdapat pada graf sikel dengan tambahan satu anting adalah $2a + 2$ (Septian,2011).

Contoh:



Gambar 2.19 Graf Sikel dengan Tambahan Satu Anting

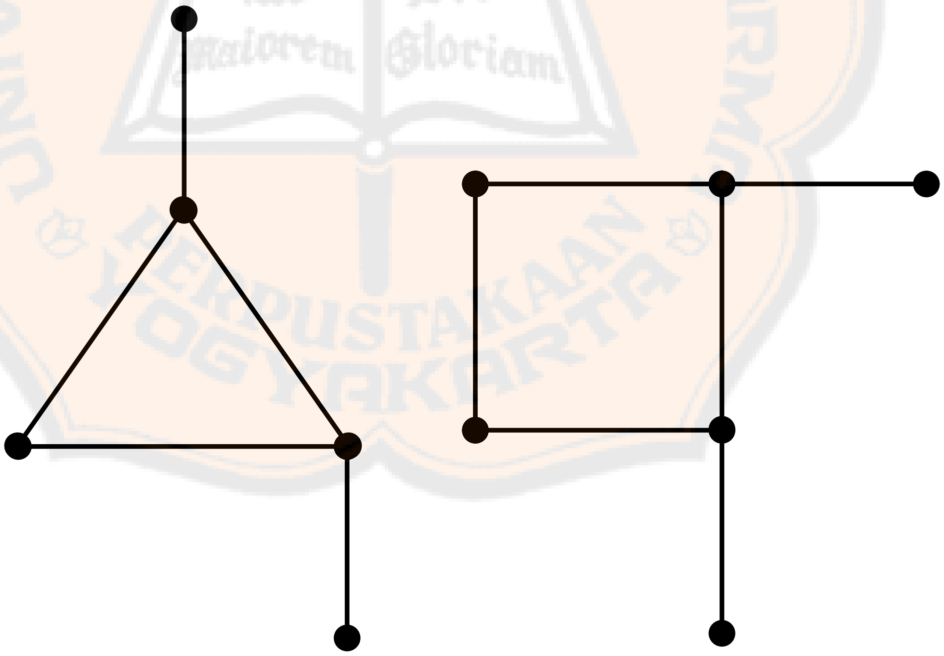
Gambar 2.19 merupakan gambar graf sikel dengan tambahan satu anting $C_3 + A_1$, $C_4 + A_1$, $C_5 + A_1$, dan $C_6 + A_1$.

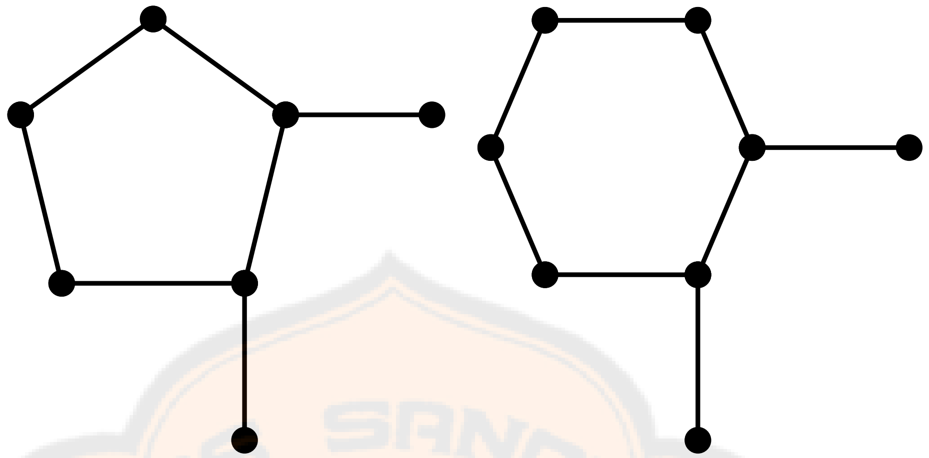
2.4. Graf Sikel (*Cycle Graph*) dengan Tambahan Dua Anting

Graf sikel dengan tambahan dua anting merupakan perkembangan dari graf sikel C_a yang ditambahkan dua titik di luar C_a dan dua sisi yang menghubungkan masing-masing titik tersebut dengan C_a atau perkembangan dari graf sikel dengan tambahan satu anting $C_a + A_1$ yang ditambahkan satu titik lain di luar $C_a + A_1$ dan satu sisi yang menghubungkan titik tersebut dengan $C_a + A_1$.

Graf sikel dengan tambahan dua anting dilambangkan dengan $C_a + 2A_1$. Banyaknya titik dan sisi yang terdapat pada graf sikel dengan tambahan dua anting adalah $2a + 4$.

Contoh:





Gambar 2.20 Graf Sikel dengan Tambahan Dua Anting

Gambar 2.20 merupakan gambar graf sikel dengan tambahan dua anting $C_3 + 2A_1$, $C_4 + 2A_1$, $C_5 + 2A_1$, dan $C_6 + 2A_1$.

2.5. Turbo Pascal

2.5.1. Bagan Alir (*Flowchart*)

Bagan alir (*flowchart*) adalah suatu gambaran yang menyatakan arus logika dari data yang akan diproses dalam suatu program dari awal sampai akhir (Jogiyanto, 2005).

1. Jenis-jenis *Flowchart*

   Secara umum, *flowchart* dibedakan menjadi lima jenis, yaitu:

   a. *Flowchart* sistem

      Flowchart sistem adalah bagan-bagan dengan simbol-simbol tertentu pada suatu sistem pengolahan data yang menggambarkan urutan prosedur dan proses-proses suatu data dalam suatu media menjadi data dalam media lain.

b. *Flowchart* dokumen

Flowchart dokumen atau bagan alir formulir atau *paper flowchart* adalah bagan alir yang menunjukkan arus dari laporan dan formulir termasuk tembus-tembusannya.

c. *Flowchart* skematik

Flowchart skematik adalah bagan alir yang mirip dengan bagan alir sistem yaitu menggambarkan prosedur didalam sistem.

d. *Flowchart* proses

Flowchart proses adalah bagan alir yang berguna bagi analisis sistem untuk menggambarkan proses dalam suatu prosedur, bagan alir ini biasanya banyak digunakan diteknik industri.

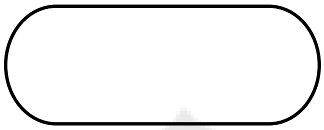
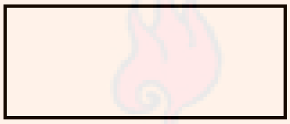
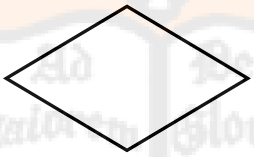
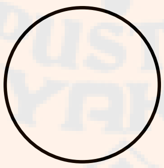
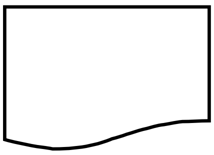
e. *Flowchart* program

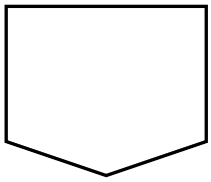
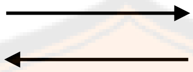
Flowchart program adalah simbol-simbol tertentu yang menggambarkan urutan kegiatan/proses dan hubungan antara proses secara mendetail didalam suatu program dari awal sampai akhir.

2. Simbol-simbol *Flowchart* Program

Berikut diberikan table yang berisi simbol-simbol yang terdapat pada *flowchart* program, antara lain:

Tabel 2.1 Simbol-simbol pada *Flowchart Program*

No.	Simbol	Keterangan
1.		Simbol *Terminator*, digunakan untuk menunjukkan awal dan akhir dari program.
2.		Simbol *Preparation*, digunakan untuk memberikan nilai awal pada suatu variabel.
3.		Simbol *Processing*, digunakan untuk pengolahan aritmatika dan pemindahan data
4.		Simbol *Decision*, digunakan untuk mewakili operasi perbandingan logika.
5.		Simbol *Data*, digunakan untuk mencetal keluaran atau memasukkan data.
6.		Simbol *Connector*, digunakan sebagai penghubung bila diagram alur terputus dalam satu halaman.
7.		Simbol *Predefined Procces*, digunakan untuk proses yang detailnya dijelaskan terpisah.
8.		Simbol *Document*, digunakan untuk mencetak hasil atau nilai dari suatu variabel ke printer.

9.		Simbol *off-page Connector*, digunakan untuk menunjukkan hubungan arus proses yang terputus dengan pindahan halaman.
10.		Simbol garis alir, digunakan untuk menunjukkan alur dari proses.

2.5.2. Turbo Pascal

Pascal adalah bahasa tingkat tinggi (*hight level language*) yang orientasinya pada segala tujuan, dirancang oleh Proffesor Niklaus Wirth dari Technical University di Zurich, Switzerland. Nama Pascal diambil sebagai penghargaan terhadap Blaise Pascal, ahli matematik dan philosophi terkenal abad 17 dari Perancis (Jogiyanto, 2005:1).

Salah satu struktur yang terdapat pada program turbo pascal struktur pengulangan. Berikut diberikan beberapa struktur pengulangan beserta contohnya :

1. FOR

   Perulangan dengan statement FOR digunakan untuk mengulang statemen atau satu blok statement berulang kali, sejumlah yang ditentukan. Bentuk umum ; for variabel := nilai awal to nilai akhir do statement; atau for variabel := nilai awal downto nilai akhir do statement;

Contoh:

```
program fortodo;
uses wincrt;
var i: integer;
      a:string[30];
begin
     clrscr;
     write('kata='); readln(a);
     for i:=1 to 5 do
       begin
        writeln(a);
       end;
     readln;
end.
```

Running program dari contoh program tersebut adalah:

```
kata=pascal
pascal
pascal
pascal
pascal
pascal
pascal
pascal
```

Gambar 2.21 *Running Program* Contoh Program For

2. WHILE-DO

Statement WHILE-DO digunakan untuk melakukan perulangan selama kondisi/statement yang ditentukan terpenuhi atau computer akan berhenti melakukan pengulangan jika kondisi/statement yang dperlukan tidak terpenuhi.

Contoh:

```
program whiledo;
uses wincrt;
```

```
var b : integer;
      a : integer;
begin;
  write('Nilai B=');
  readln(b); a:=1;
  writeln('Print a dengan While:');
    while a<=b do
      begin writeln (a);
        a:=a+1;
      end;
  readln;
end.
```

Pada contoh program tersebut, kondisi/statement yang diinginkan adalah jika a kuran atau samadengan nilai b (nilai a adalah “1”), maka komputer tetap melakukan pengulangan cetak nilai a sebanyak b. Jadi jika diberikan nilai b adalah tujuh maka program akan mengeluarkan *output* seperti gambar berikut.

Gambar 2.22 *Running Program* Contoh Program While-Do

3. REPEAT……UNTIL

   Struktur repeat……until digunakan untuk mengulang statement-statement atau blok statement sampai kondisi yang diseleksi terpenuhi.

Contoh:

```
Program repeatuntil;
    Uses wincrt;
    Var a     : Integer;
        i     : real;
    Begin
      repeat
         repeat
         write('masukkan nilai a = ');readln(a);
         i:=(a-1)/ 2;
         until(i>0.5);
      i:=(a-1)mod 2;
      until(i=0);
    End.
```

Pada contoh program repeat….until tersebut hasil yang diminta adalah untuk nilai a ganjil dan a lebih dari samadengan tiga. Jika nilai a yang dimasukkan tidak sesuai dengan syarat yang ditentukan, maka program akan meminta *input* yang lain. Namun jika nilai a yang dimasukkan sesuai dengan syarat yang ditentukan, maka program akan berhenti. Berikut diberikan *running program* dari contoh program tersebut.

```
masukkan nilai a = 1
masukkan nilai a = 4
masukkan nilai a = 8
masukkan nilai a = 7
```

Gambar 2.23 *Running Program* Contoh Program Repeat Until

Pada gambar 2.23 ditunjukkan bahwa program akan terus berjalan jika nilai a yang diberikan tidak sesuai syarat yang sudah ditentukan yaitu nilai a ganjil dan lebih besar samadengan tiga.

2.6. Kerangka Berpikir

Sejauh ini telah mempelajari beberapa teori dan definisi mengenai graf, pelabelan graf, graf baru yang dibuat oleh peneliti, *flowchart*, dan Turbo Pascal. Berdasarkan apa yang telah dipelajari tersebut akan diselidiki apakah graf baru yang telah dibuat memenuhi sifat k konstanta ajaib dan bagaimana bentuk atau pola untuk melabeli suatu graf tersebut. Serta akan ditunjukkan aplikasi turbo pascal dalam pelabelan total sisi ajaib kuat pada graf sikel dengan tambahan dua anting.

BAB III

METODE PENELITIAN

3.1. Metode Penelitian

Penelitian ini adalah penelitian pustaka (*Library Research*). Tercapainya tujuan dari penelitian ini dilakukan dengan beberapa langkah kerja. Langkah pertama adalah melakukan kajian terhadap buku-buku mengenai teori graf dan Turbo Pascal serta jurnal atau makalah yang memuat topik mengenai pelabelan pada graf dan mengenai penyusunan program menggunakan Turbo Pascal.

Langkah kedua adalah membangun graf sisi ajaib baru dari graf sikel yaitu graf sikel dengan tambahan dua anting $(C_a + 2A_1)$.

Langkah ketiga adalah menentukan pola dari konstanta ajaib (*magic constant*) yang terbentuk dengan menggunakan perhitungan dasar (*basic counting*).

Langkah keempat adalah menentukan rumus pelabelan untuk titik dan sisi dari graf sikel dengan tambahan dua anting $(C_a + 2A_1)$. Langkah terakhir adalah menyusun program menggunakan Turbo Pascal untuk melakukan pelabelan pada graf sikel dengan tambahan dua anting $(C_a + 2A_1)$.

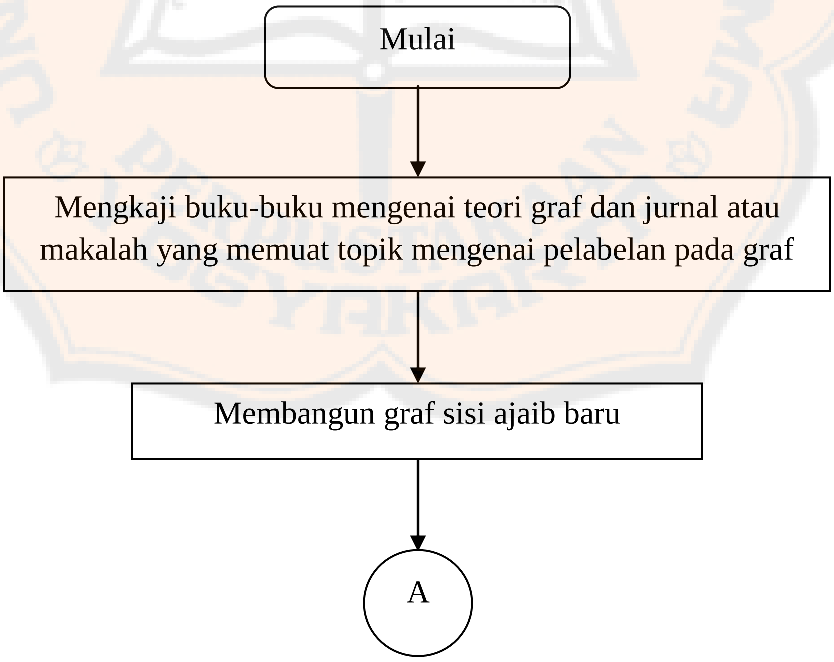
3.2. Tahap Penelitian

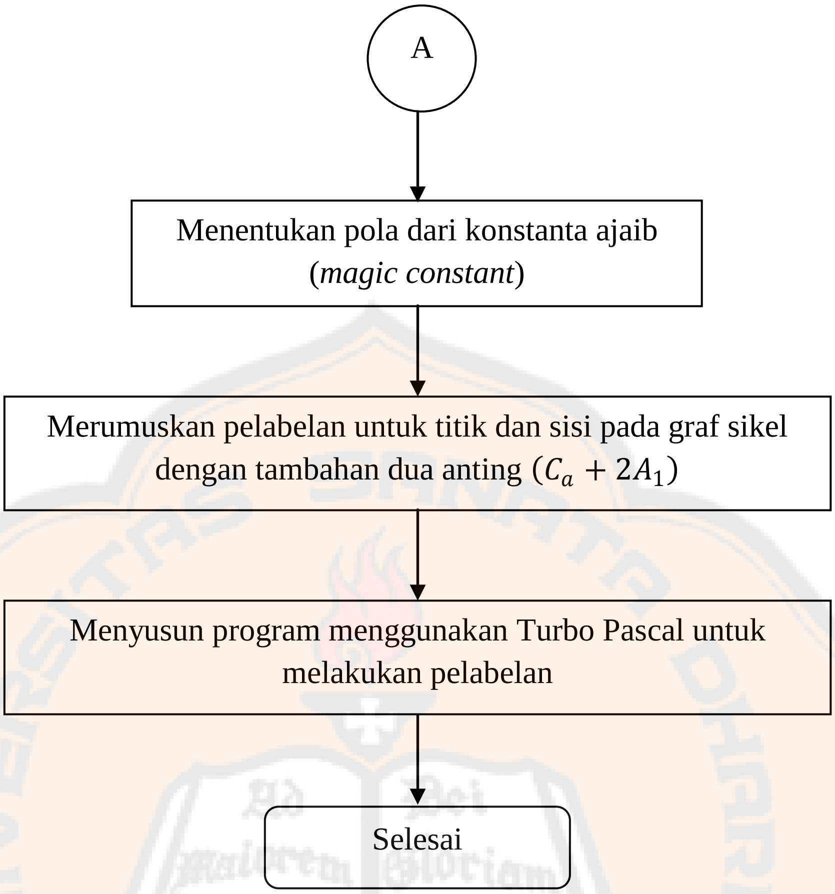
Penelitian ini menggunakan pendekatan kualitatif, dengan pembahasan dari hal khusus menuju ke hal yang umum. Secara garis besar, langkah-langkah dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Mengumpulkan berbagai literatur mengenai topik yang akan di bahas.
2. Mempelajari topik.
3. Membangun graf sisi ajaib baru.
4. Menganalisa graf tersebut.
5. Menentukan pola dari konstanta ajaib yang terbentuk dari pelabelan graf tersebut.
6. Menentukan rumusan pelabelan untuk titik dan sisi graf tersebut.
7. Menyusun program menggunakan Turbo Pascal untuk melakukan pelabelan.

3.3. Bagan Alir Penelitian

Berikut adalah bagan alir dari penelitian ini.




A
Menentukan pola dari konstanta ajaib (*magic constant*)
Merumuskan pelabelan untuk titik dan sisi pada graf sikel dengan tambahan dua anting $(C_a + 2A_1)$
Menyusun program menggunakan Turbo Pascal untuk melakukan pelabelan
Selesai

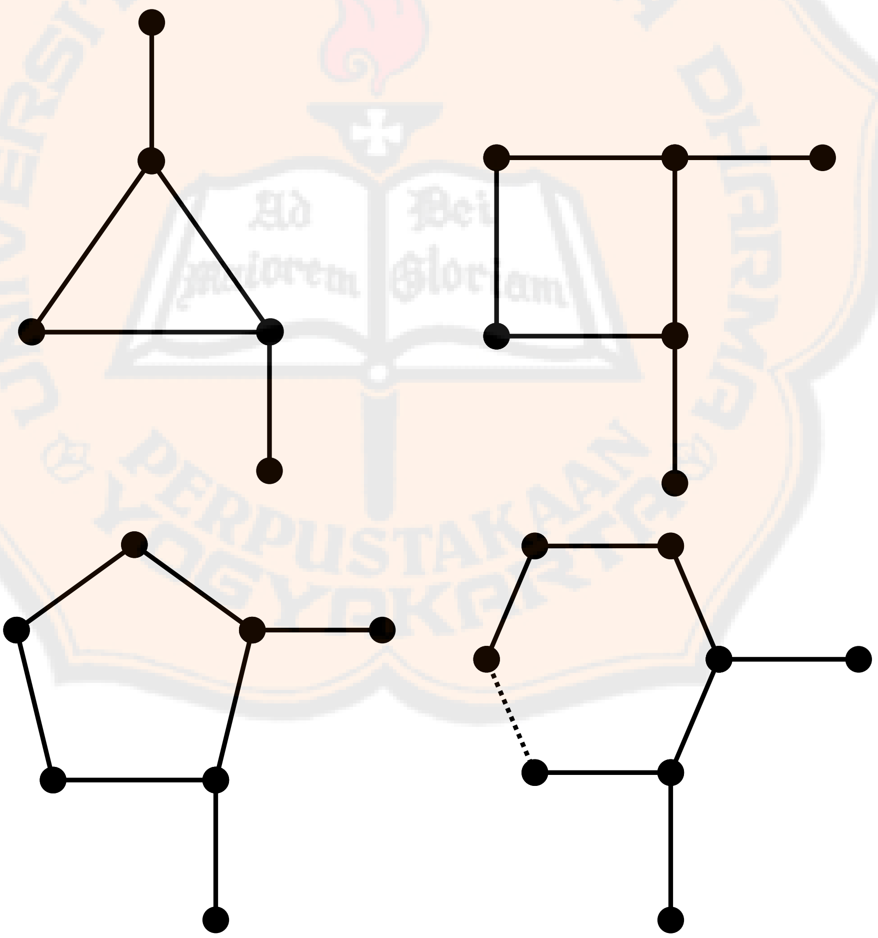
BAB IV

HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN

4.1. Graf Sikel dengan Tambahan Dua Anting ($C_a + 2A_1$)

Graf sikel dengan tambahan dua anting dilambangkan dengan $C_a + 2A_1$. Banyaknya titik dan sisi yang terdapat pada graf sikel dengan tambahan dua anting adalah $2a + 4$.

Contoh:



Gambar 4.1 Graf Sikel dengan Tambahan Dua Anting

Gambar 4.1 merupakan gambar graf sikel dengan tambahan dua anting $C_3 + 2A_1$, $C_4 + 2A_1$, $C_5 + 2A_1$, dan $C_a + 2A_1$.

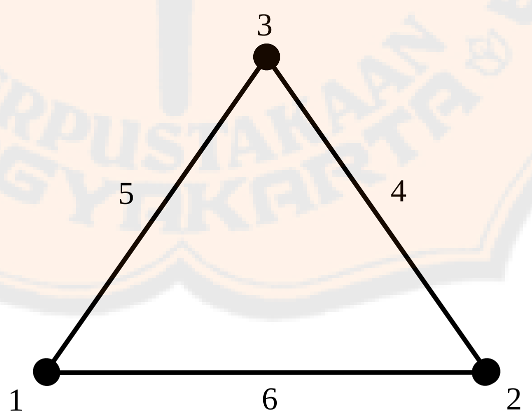
4.2. Perhitungan Dasar Tentang Pelabelan Total Ajaib Sisi

Pelabelan total sisi ajaib pada graf G adalah pemetaan satu-satu y dari $V(G) \cup E(G)$ ke bilangan bulat positif $1, 2, \dots, a + b$, dimana $a = |V(G)|$ dan $b = |E(G)|$, dari penjelasan tersebut maka berlaku untuk setiap sisi (xy),

$$f(x) + f(xy) + f(y) = k$$

untuk suatu konstanta k. Dengan kata lain, $Wf(xy) = k$ untuk setiap pilihan dari sisi xy. Selanjutnya k disebut dengan konstanta ajaib (*magic constants*) dari G. (Wallis., 2001).

Berikut contoh pelabelan total sisi ajaib dari C_3



Gambar 4.2 Pelabelan Total Sisi Ajaib dari C_3 dengan $k = 9$

Dari beberapa pengertian tersebut, dapat juga dikatakan bahwa pada pelabelan total ajaib sisi pada graf sikel setiap label titik dihitung dua kali dan label sisi dihitung satu kali akibatnya:

$$S_w = 2S_v + S_e$$

Dimana S_w adalah jumlah semua bobot sisi, S_v adalah jumlah semua label titik, dan S_e adalah jumlah semua label sisi.

Bobot dari setiap sisi dihitung dengan cara menjumlahkan label dari sisi tersebut dengan label pada titik pangkal dan label pada titik ujung yang membentuk sisi tersebut.

Bobot dari setiap sisi dilambangkan dengan $W_f(e_i)$

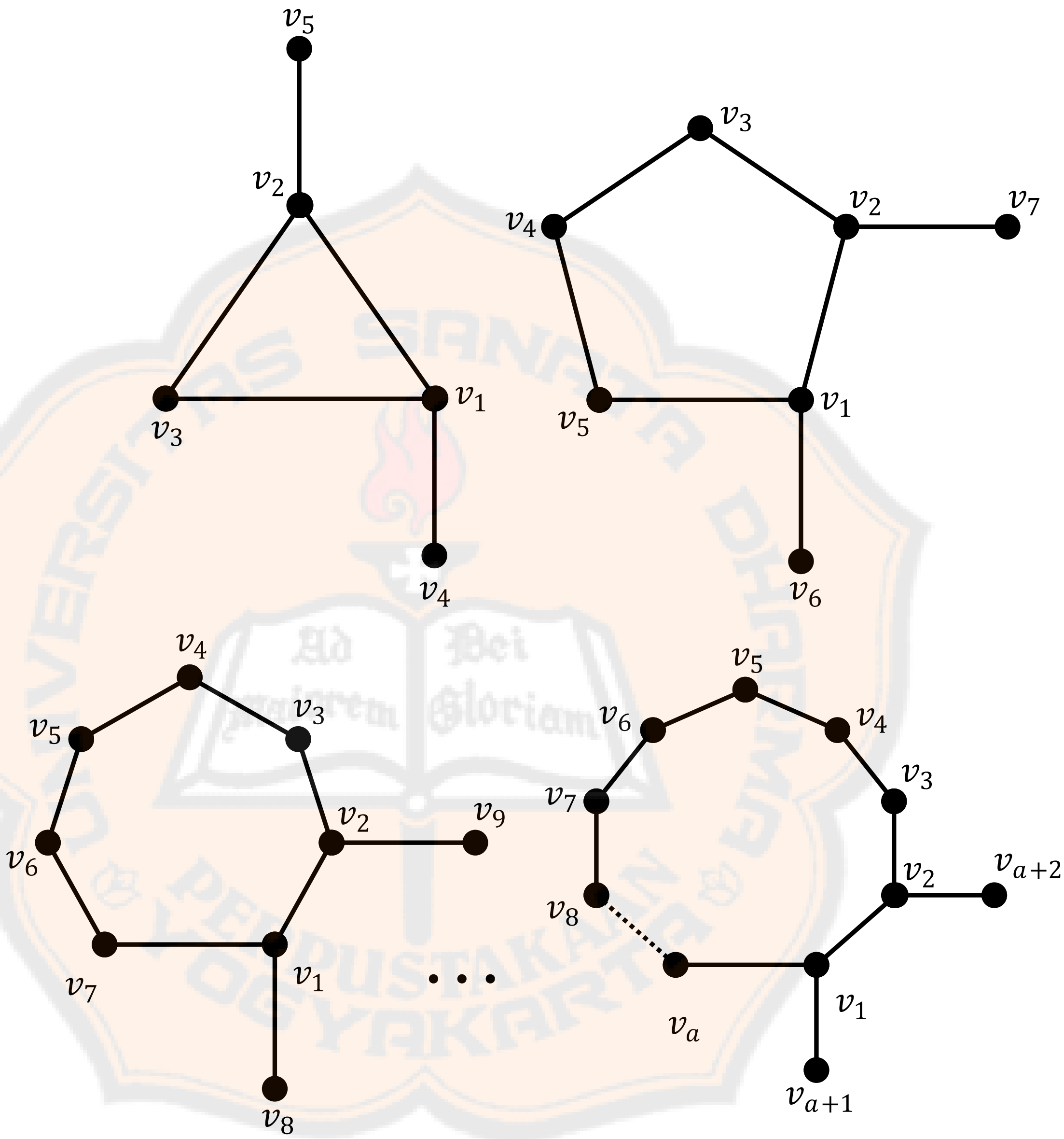
$$W_f(e_i) = \begin{cases} f_{(v_i)} + f_{(v_i)} f_{(v_{i+1})} + f_{(v_{i+1})} & i = 1,2,\dots,a-1 \\ f_{(v_i)} + f_{(v_i)} f_{(v_1)} + f_{(v_1)} & i = a \text{ dan } a+1 \\ f_{(v_i)} + f_{(v_i)} f_{(v_2)} + f_{(v_2)} & i = a+2 \end{cases}$$

4.3. Pelabelan Total Ajaib Sisi Kuat (*Strong Edge Magic Total Labeling*) pada Graf Sikel dengan Tambahan Dua Anting ($C_a + 2A_1$)

Pelabelan total sisi ajaib dikatakan kuat (*strong*) jika label-label pada titiknya merupakan urutan bilangan bulat $1,2,\dots,a$, dengan a adalah banyaknya titik pada sebuah graf (Wallis., 2001).

Graf sikel dengan tambahan dua anting ($C_a + 2A_1$) merupakan perkembangan bentuk dari graf sikel yaitu graf sikel dengan tambahan satu anting ($C_a + A_1$).

Berikut ini beberapa contoh dari graf sikel dengan tambahan dua anting $(C_a + 2A_1)$.



Gambar 4.3 Graf Sikel dengan Tambahan Dua Anting

Pada graf sikel dengan tambahan dua anting $(C_a + 2A_1)$, setiap sikel terdapat a buah titik dan a buah sisi dan dua buah titik di luar sikel yang dihubungkan langsung dengan dua buah sisi ke graf tersebut. Dalam hal ini, titik dan sisi yang menjadi anting terakhir atau kedua pada graf sikel adalah titik ke $a + 2$ dan sisi ke $a + 2$ sehingga jumlah total dari titik dan sisi pada graf sikel dengan tambahan dua anting $(C_a + 2A_1)$ adalah $2a + 4$.

Pada pelabelan total ajaib sisi kuat terdapat label titik yang dihitung satu kali karena titik tersebut hanya bersisian dengan satu sisi, dihitung dua kali karena titik tersebut bersisian dengan dua sisi, dan dihitung tiga kali karena titik tersebut bersisian dengan tiga sisi. Dengan kata lain, semua titik pasti bersisian dengan satu sisi dan ada titik yang bersisian dengan dua atau tiga sisi. Sedangkan label sisi dihitung satu kali, akibatnya:

$$S_w = S_v + \left(S_v - (V_{a+1} + V_{a+2})\right) + (V_1 + V_2) + S_e$$

Dimana S_w merupakan $(a + 2)k$ atau penjumlahan berulang dari k sebanyak $(a + 2)$, k adalah konstanta ajaib, S_v merupakan semua titik yang dihitung satu kali, $(S_v - (V_{a+1} + V_{a+2}))$ merupakan titik-titik yang dihitung dua kali, $(V_1 + V_2)$ merupakan titik-titik yang dihitung tiga kali, dan S_e merupakan label sisi yang dihitung satu kali, sehingga berakibat:

$$S_w = S_v + \left(S_v - (V_{a+1} + V_{a+2})\right) + (V_1 + V_2) + S_e$$

$$(a + 2)k = S_v + (S_v + S_e) + (V_1 + V_2) - (V_{a+1} + V_{a+2})$$

$$(a + 2)k = S_v + \left(1 + 2 + 3 + \cdots + (2a + 4)\right) + (V_1 + V_2) - (V_{a+1} + V_{a+2})$$

$$(a + 2)k = S_v + (a + 2)(2a + 5) + (V_1 + V_2) - (V_{a+1} + V_{a+2}) \qquad \textbf{(4.1)}$$

Berikut ini diberikan teorema mengenai nilai k jika label untuk titik dan sisi sudah tertentu.

Teorema 4.2.1

Jika label untuk titik adalah himpunan bilangan bulat positif $(1,2,3,\dots,a+2)$ dan label untuk sisi adalah himpunan bilangan bulat positif $(a+3, a+4, a+5, \dots, 2a+4)$ maka nilai k berada pada interval

$$\frac{5a+9}{2} < k < \frac{5a+17}{2}$$

Bukti:

Karena label untuk titik adalah himpunan bilangan bulat positif $(1,2,3,\dots,a+2)$, sehingga diperoleh:

$$S_v = 1+2+3+\cdots+(a+2)$$

$$= \tfrac{1}{2}(a+2)(a+3) \qquad \textbf{(4.2)}$$

Substitusi **(4.2)** ke persamaan **(4.1)**, sehingga diperoleh:

$$(a+2)k = S_v + (a+2)(2a+5) + (V_1+V_2) - (V_{a+1}+V_{a+2})$$

$$(a+2)k = \tfrac{1}{2}(a+2)(a+3) + (a+2)(2a+5) + (V_1+V_2) - (V_{a+1} + V_{a+2})$$

$$2(a+2)k = (a+2)(a+3) + 2(a+2)(2a+5) + 2((V_1 + V_2) - (V_{a+1}+V_{a+2}))$$

$$2(a+2)k = (a+2)(5a+13) + 2((V_1+V_2) - (V_{a+1}+V_{a+2}))$$

$$k = \frac{(a+2)(5a+13)}{2(a+2)} + \frac{2((V_1+V_2)-(V_{a+1}+V_{a+2}))}{2(a+2)}$$

$$k = \frac{(5a+13)}{2} + \frac{((V_1+V_2)-(V_{a+1}+V_{a+2}))}{(a+2)}$$

Substitusi **(4.2)** ke persamaan **(4.1)** menghasilkan persamaan **(4.3)**, yaitu:

$$k = \frac{(5a + 13)}{2} + \frac{((V_1 + V_2) - (V_{a+1} + V_{a+2}))}{(a + 2)} \qquad \mathbf{(4.3)}$$

Terdapat dua kemungkinan untuk memberi label titik-titik (V_1, V_2) dan (V_{a+1}, V_{a+2}) pada persamaan **(4.3)**, yaitu:

Jika titik V_1 dan V_2 diberi label titik terkecil yaitu 1 dan 2, sedangkan titik V_{a+1} dan V_{a+2} diberi label titik terbesar yaitu $(a + 1)$dan $(a + 2)$, maka:

$$k = \frac{(5a + 13)}{2} + \frac{((V_1 + V_2) - (V_{a+1} + V_{a+2}))}{(a + 2)}$$

$$k = \frac{(5a + 13)}{2} + \frac{(1 + 2) - ((a + 1) + (a + 2))}{(a + 2)}$$

$$k = \frac{(5a + 13)}{2} + \frac{3 - (2a + 3)}{(a + 2)}$$

$$k = \frac{(5a + 13)}{2} - \frac{2a}{(a + 2)}$$

$$k = \frac{5a^2 + 19a + 26}{2a + 4}$$

Jika titik V_1 dan V_2 diberi label titik terbesar yaitu $(a + 1)$ dan $(a + 2)$, sedangkan titik V_{a+1} dan V_{a+2} diberi label titik terkecil yaitu 1 dan 2, maka:

$$k = \frac{(5a + 13)}{2} + \frac{((V_1 + V_2) - (V_{a+1} + V_{a+2}))}{(a + 2)}$$

$$k = \frac{(5a + 13)}{2} + \frac{((a + 1) + (a + 2)) - (1 + 2)}{(a + 2)}$$

$$k = \frac{(5a+13)}{2} + \frac{(2a+3)-3}{(a+2)}$$

$$k = \frac{(5a+13)}{2} + \frac{2a}{(a+2)}$$

$$k = \frac{5a^2+27a+26}{2a+4}$$

Jadi nilai k (konstanta ajaib) yang terbentuk terletak pada interval:

$$\frac{5a^2+19a+26}{2a+4} \le k \le \frac{5a^2+27a+26}{2a+4} \qquad (\mathbf{4.4a})$$

Jika dibawa dalam bentuk yang lebih sederhana, maka intervalnya menjadi:

$$\frac{5a+9}{2} + \frac{8}{2a+4} \le k \le \frac{5a+17}{2} - \frac{8}{2a+4} \qquad (\mathbf{4.4b})$$

Karena nilai $\frac{8}{2a+4}$ untuk $a \geq 3$ selalu kurang dari satu , maka kita dapat menghilangkan nilai $\frac{8}{2a+4}$ dari pertidaksamaan **(4.4b)**, sehingga interval dari konstanta ajaib yang terbentuk adalah: □

$$\frac{5a+9}{2} < k < \frac{5a+17}{2} \qquad (\mathbf{4.5})$$

Teorema 4.2.1 menyatakan bahwa jika label untuk titik adalah himpunan bilangan bulat positif $(1,2,3,\ldots,a+2)$ dan label untuk sisi adalah himpunan bilangan bulat positif $(a+3, a+4, a+5, \ldots, 2a+4)$ maka nilai k berada pada interval $\frac{5a+9}{2} < k < \frac{5a+17}{2}$. Sehingga nilai k yang terletak pada interval $\frac{5a+9}{2} < k < \frac{5a+17}{2}$ berlaku pada graf sikel dengan tambahan dua anting $(C_a + 2A_1)$ untuk $a \geq 3$.

Berikut diberikan tabel 4.1 yang menyatakan hubungan antara nilai a dan nilai k yang terbentuk.

Tabel 4.1 Interval nilai k

a ganjil			a genap		
a	Interval nilai k	Kemungkinan nilai k	a	Interval nilai k	Kemungkinan nilai k
3	$12 < k < 16$	$13, 14, 15$	4	$14{,}5 < k < 18{,}5$	$15, 16, 17, 18$
5	$17 < k < 21$	$18, 19, 20$	6	$19{,}5 < k < 23{,}5$	$20, 21, 22, 23$
7	$22 < k < 26$	$23, 24, 25$	8	$24{,}5 < k < 28{,}5$	$25, 26, 27, 28$
9	$27 < k < 31$	$28, 29, 30$	10	$29{,}5 < k < 33{,}5$	$30, 31, 32, 33$
11	$32 < k < 36$	$33, 34, 35$	12	$34{,}5 < k < 38{,}5$	$35, 36, 37, 38$

Selanjutnya pada skripsi ini hanya akan dibahas mengenai pelabelan total ajaib sisi kuat pada graf sikel dengan tambahan dua anting $(C_a + 2A_1)$ untuk $a \geq 3$ dan a ganjil dengan pola tertentu yaitu pada saat $a = 3$ nilai $k = 14$, $a = 5$ nilai $k = 19$, $a = 7$ nilai $k = 24$, $a = 9$ nilai $k = 29$, $a = 11$ nilai $k = 34$, dan seterusnya. Sehingga dapat dirumuskan nilai $k = \frac{5a+13}{2}$. Nilai $k = \frac{5a+13}{2}$ terletak pada interval $\frac{5a+9}{2} < k < \frac{5a+17}{2}$. Peneliti tidak melakukan penelitian untuk pelabelan total ajaib sisi kuat pada graf sikel dengan tambahan dua anting $(C_a + 2A_1)$ untuk $a \geq 3$ dan a genap, serta pelabelan total ajaib sisi kuat pada graf sikel dengan tambahan dua anting $(C_a + 2A_1)$ untuk $a \geq 3$ dan a ganjil dengan pola yang lain.

Berikut akan diberikan contoh pelabelan untuk beberapa graf sikel dengan tambahan dua anting $(C_a + 2A_1)$ dengan $a \geq 3$ dan a ganjil dengan $k = \frac{5a+13}{2}$.

Konstruksi graf sikel dengan tambahan dua anting $(C_a + 2A_1)$ dengan label titik sebagai berikut:

$$\begin{cases} f(v_1) = \frac{a+3}{2} & \\ f(v_2) = 2 & \\ f(v_i) = \dfrac{(a+4)+i}{2} & ; i = 3, 5, 7, \dots, a \\ f(v_i) = \dfrac{i+2}{2} & ; i = 4, 6, 8, \dots, a-1 \\ f(v_{a+1}) = 1 & \\ f(v_{a+2}) = \dfrac{a+5}{2} & \end{cases}$$

Sedangkan label untuk sisi adalah sebagai berikut:

$$\begin{cases} f(v_1 v_2) = 2a + 3 & \\ f(v_i v_{i+1}) = (2a+3) - i & ;\ i = 2, 3, \dots, a-1 \\ f(v_a v_1) = a + 3 & \\ f(v_1 v_{a+1}) = 2a + 4 & \\ f(v_2 v_{a+2}) = 2a + 2 & \end{cases}$$

Konstruksi tersebut merupakan contoh pelabelan graf sikel dengan tambahan dua anting $(C_a + 2A_1)$ sehingga jumlah total dari titik dan sisi pada graf sikel dengan tambahan dua anting $(C_a + 2A_1)$ tersebut adalah $2a + 4$.

Berikut ditunjukan bahwa bobot dari setiap sisi yang dirumuskan pada konstruksi pelabelan memenuhi rumus dari konstanta ajaib $k = \frac{5a+13}{2}$:

1. Bobot sisi $f(v_1v_2)$

$$f(v_1) + f(v_1v_2) + f(v_2) = \frac{a+3}{2} + 2a + 3 + 2$$
$$= \frac{a+3+4a+10}{2}$$
$$= \frac{5a+13}{2}$$

2. Bobot sisi $f(v_iv_{i+1})$ dengan ; $i = \ a-1$

$$f(v_{a-1}) + f(v_{a-1}v_a) + f(v_a) = \frac{(a-1)+2}{2} + (2a+3) - (a-1) + \frac{(a+4)+(a)}{2}$$
$$= \frac{a+1}{2} + a + 4 + \frac{2a+4}{2}$$
$$= \frac{a+1+2a+8+2a+4}{2}$$
$$= \frac{5a+13}{2}$$

3. Bobot sisi $f(v_av_1)$

$$f(v_a) + f(v_av_1) + f(v_1) = \frac{(a+4)+(a)}{2} + a + 3 + \frac{a+3}{2}$$
$$= \frac{2a+4+2a+6+a+3}{2}$$
$$= \frac{5a+13}{2}$$

4. Bobot sisi $f(v_1 v_{a+1})$

$$f(v_1) + f(v_1 v_{a+1}) + f(v_{a+1}) = \frac{a+3}{2} + 2a + 4 + 1$$

$$= \frac{a + 3 + 4a + 8 + 2}{2}$$

$$= \frac{5a + 13}{2}$$

5. Bobot sisi $f(v_2 v_{a+2})$

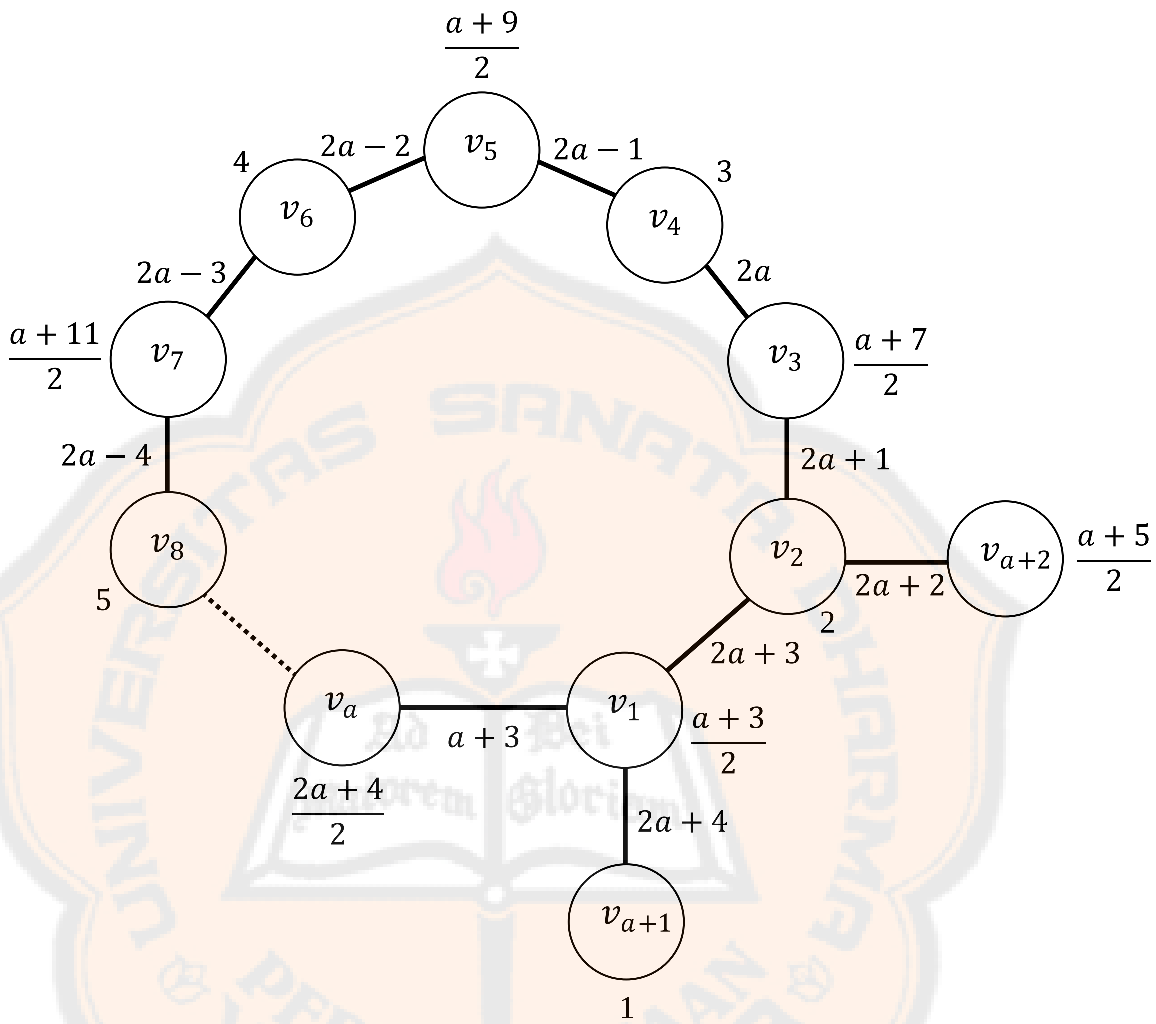
$$f(v_2) + f(v_2 v_{a+2}) + f(v_{a+2}) = 2 + 2a + 2 + \frac{a+5}{2}$$

$$= \frac{4 + 4a + 4 + a + 5}{2}$$

$$= \frac{5a + 13}{2}$$

Dari pembuktian tersebut setiap bobot sisi pada graf sikel dengan tambahan dua anting $(C_a + 2A_1)$ mempunyai nilai $k = \frac{5a+13}{2}$.

Berikut adalah ilustrasi dari pelabelan graf sikel tersebut:

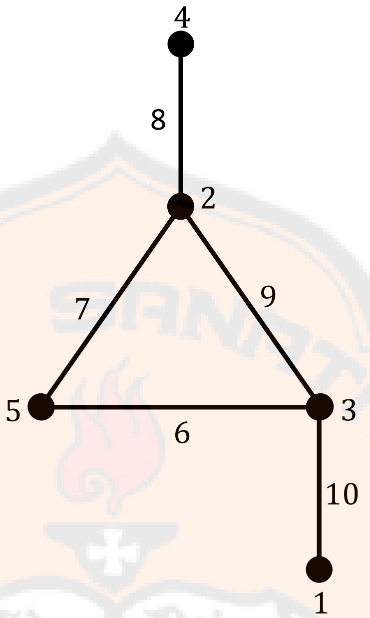


Gambar 4.4 Ilustrasi Pelabelan Graf Sikel dengan Tambahan Dua Anting

$(C_a + 2A_1)$

Contoh konstruksi graf sikel dengan tambahan dua anting $(C_a + 2A_1)$ dengan label titik dan label sisi.

untuk $a = 3$,



Gambar 4.5 Contoh Pelabelan Graf Sikel dengan Tambahan Dua Anting $(C_a + 2A_1)$ untuk $a = 3$ atau $(C_3 + 2A_1)$

Gambar 4.5 merupakan contoh pelabelan graf sikel dengan tambahan dua anting dengan $a = 3$ $(C_3 + 2A_1)$, karena $a = 3$ maka jumlah total dari titik dan sisi pada graf sikel dengan tambahan dua anting $(C_a + 2A_1)$ tersebut adalah $2a + 4 = 2(3) + 4 = 10$.

Untuk pelabelan titik:

$$f(v_1) = \frac{(3) + 3}{2} = 3$$

$$f(v_2) = 2$$

$$f(v_3) = \frac{\left((3) + 4\right) + (3)}{2} = 5$$

$$f(v_4) = 1$$

$$f(v_5) = \frac{(3)+5}{2} = 4$$

Untuk pelabelan sisi:

$f(v_1v_2) = 2(3) + 3 = 9$

$f(v_2v_3) = (2(3) + 3) - 2 = 7$

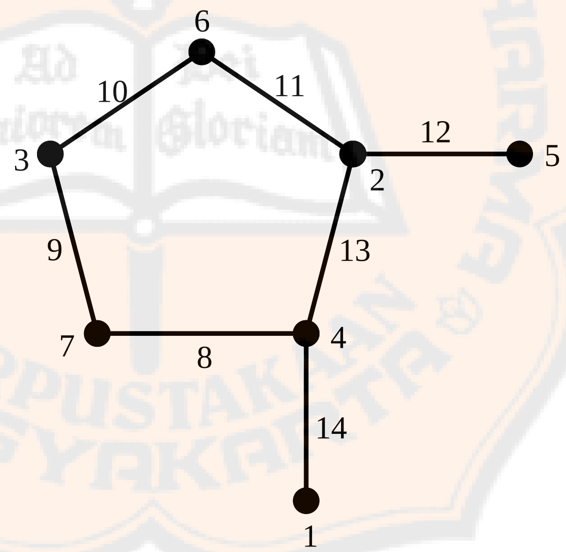
$f(v_3v_1) = (3) + 3 = 6$

$f(v_1v_4) = 2(3) + 4 = 10$

$f(v_2v_5) = 2(3) + 2 = 8$

Dengan konstanta ajaib $k = \frac{5(3)+13}{2} = 14$.

untuk $a = 5$,



Gambar 4.6 Contoh Pelabelan Graf Sikel dengan Tambahan Dua Anting

$(C_a + 2A_1)$ untuk $a = 5$ atau $(C_5 + 2A_1)$

Gambar 4.6 merupakan contoh pelabelan graf sikel dengan tambahan dua anting dengan $a = 5$ $(C_5 + 2A_1)$, karena $a = 5$ maka jumlah total dari titik dan sisi pada graf sikel dengan tambahan dua anting $(C_a + A_2)$ tersebut adalah $2a + 4 = 2(5) + 4 = 14$.

Untuk pelabelan titik:

$$f(v_1) = \frac{(5) + 3}{2} = 4$$

$$f(v_2) = 2$$

$$f(v_3) = \frac{\big((5) + 4\big) + 3}{2} = 6$$

$$f(v_4) = \frac{(4) + 2}{2} = 3$$

$$f(v_5) = \frac{\big((5) + 4\big) + (5)}{2} = 7$$

$$f(v_6) = 1$$

$$f(v_7) = \frac{(5) + 5}{2} = 5$$

Untuk pelabelan sisi:

$$f(v_1v_2) = 2(5) + 3 = 13$$

$$f(v_2v_3) = (2(5) + 3) - 2 = 11$$

$$f(v_3v_4) = (2(5) + 3) - 3 = 10$$

$$f(v_4v_5) = (2(5) + 3) - 4 = 9$$

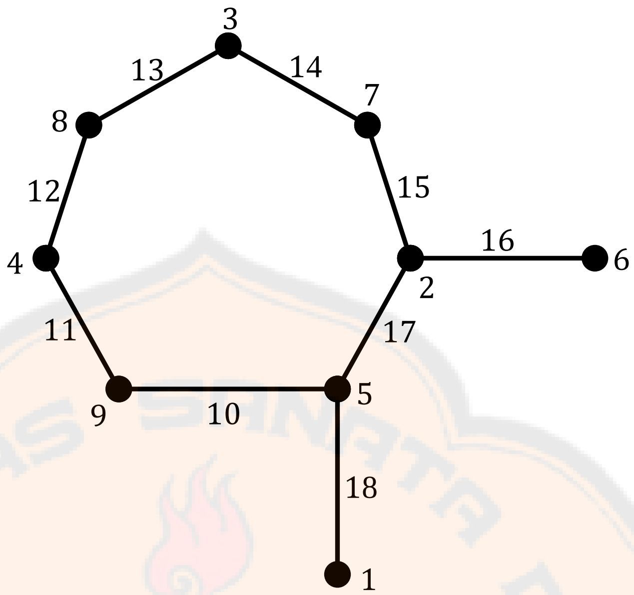
$$f(v_5v_1) = (5) + 3 = 8$$

$$f(v_1v_6) = 2(5) + 4 = 14$$

$$f(v_2v_7) = 2(5) + 2 = 12$$

Dengan konstanta ajaib $k = \frac{5(5)+13}{2} = 19$. ●

untuk $a = 7$,



Gambar 4.7 Contoh Pelabelan Graf Sikel dengan tambahan dua anting $(C_a + 2A_1)$ untuk $a = 7$ atau $(C_7 + 2A_1)$

Gambar 4.7 merupakan contoh pelabelan graf sikel dengan tambahan dua anting dengan $a = 7$ $(C_7 + 2A_1)$, karena $a = 7$ maka jumlah total dari titik dan sisi pada graf sikel dengan tambahan dua anting $(C_a + 2A_1)$ tersebut adalah $2a + 4 = 2(7) + 4 = 18$.

Untuk pelabelan titik:

$$f(v_1) = \frac{(7) + 3}{2} = 5$$

$$f(v_2) = 2$$

$$f(v_3) = \frac{\left((7) + 4\right) + 3}{2} = 7$$

$$f(v_4) = \frac{(4) + 2}{2} = 3$$

$$f(v_5) = \frac{\big((7) + 4\big) + 5}{2} = 8$$

$$f(v_6) = \frac{(6) + 2}{2} = 4$$

$$f(v_7) = \frac{\big((7) + 4\big) + 7}{2} = 9$$

$$f(v_8) = 1$$

$$f(v_9) = \frac{(7) + 5}{2} = 6$$

Untuk pelabelan sisi:

$$f(v_1 v_2) = 2(7) + 3 = 17$$

$$f(v_2 v_3) = (2(7) + 3) - 2 = 15$$

$$f(v_3 v_4) = (2(7) + 3) - 3 = 14$$

$$f(v_4 v_5) = (2(7) + 3) - 4 = 13$$

$$f(v_5 v_6) = (2(7) + 3) - 5 = 12$$

$$f(v_6 v_7) = (2(7) + 3) - 6 = 11$$

$$f(v_7 v_1) = (7) + 3 = 10$$

$$f(v_1 v_8) = 2(7) + 4 = 18$$

$$f(v_2 v_9) = 2(7) + 2 = 16$$

Dengan konstanta ajaib $k = \frac{5(7)+13}{2} = 24$. ●

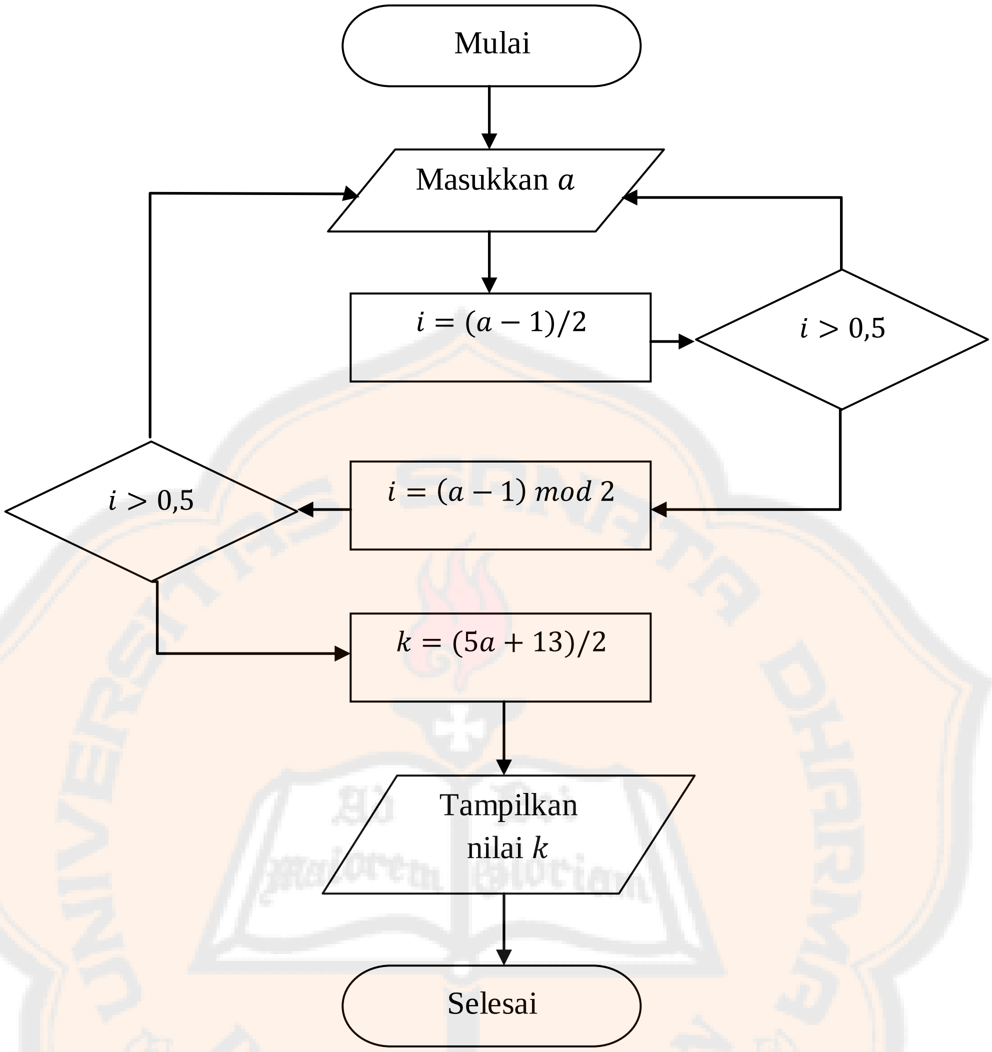
4.4. Turbo Pascal

4.4.1. Diagram Alir (*Flowchart*) Program Turbo Pascal untuk Pelabelan Total Ajaib Sisi Kuat (*Strong Edge Magic Total Labeling*) pada Graf Sikel dengan Tambahan Dua Anting $(C_a + 2A_1)$

Pada skripsi ini, peneliti juga membuat flowchart guna menyusun program menggunakan Turbo Pascal untuk pelabelan total ajaib sisi kuat (*strong edge magic total labeling*) pada graf sikel dengan tambahan dua anting $(C_a + 2A_1)$. *Flowchart* program merupakan langkah-langkah (instruksi-instruksi) program yang menceritakan kejadian suatu proses satu dengan proses lainya dalam suatu program secara mendetail yang diwakilkan dalam bentuk simbol atau bagan.

Berikut diberikan beberapa *flowchart* program guna membantu penyusunan program menggunakan Turbo Pascal untuk pelabelan total ajaib sisi kuat (*strong edge magic total labeling*) pada graf sikel dengan tambahan dua anting $(C_a + 2A_1)$.

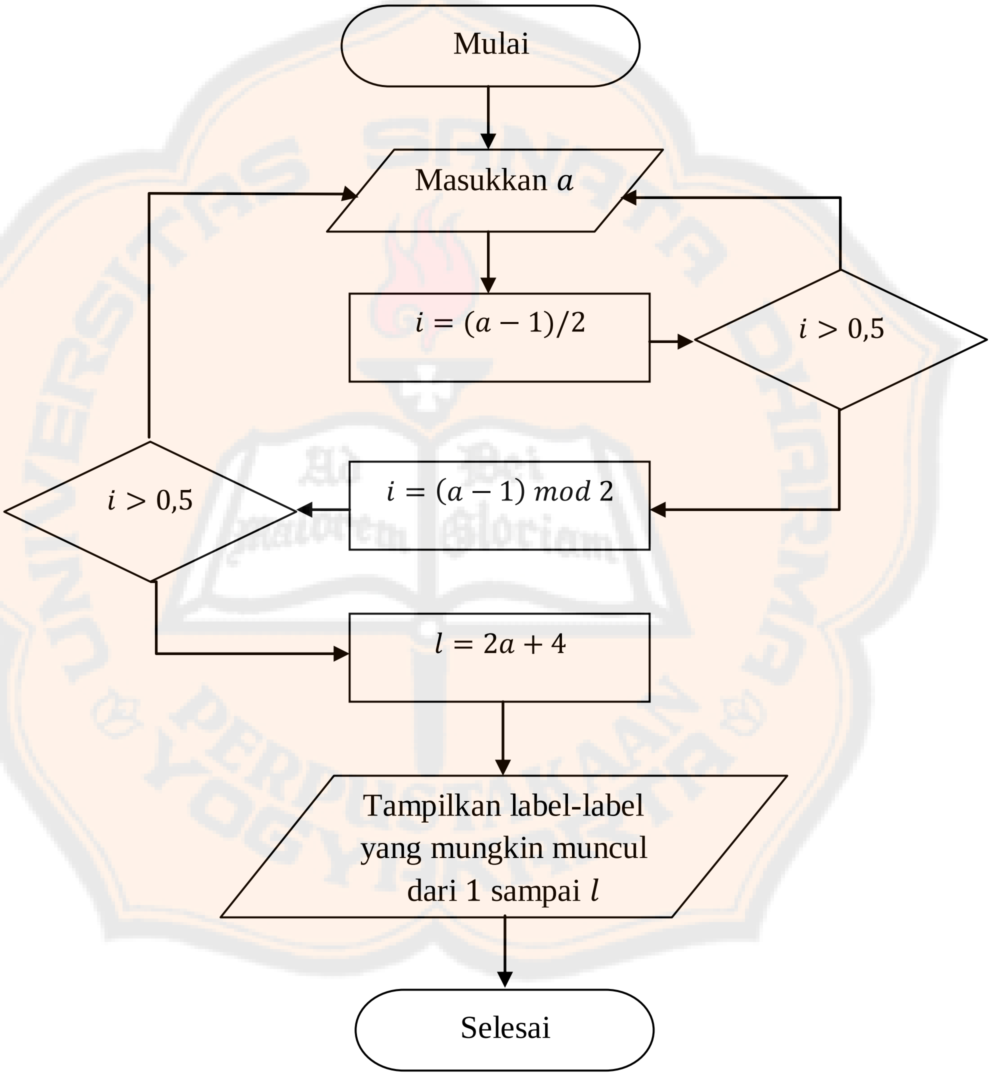
Flowchart program untuk mencari konstanta ajaib pada pelabelan total ajaib sisi kuat (*strong edge magic total labeling*) pada graf sikel dengan tambahan dua anting $(C_a + 2A_1)$.



Gambar 4.8 *Flowchart* Program untuk Mencari Nilai k

Berdasarkan *flowchart* program pada gambar 4.8, *input dari* program tersebut adalah nilai a, sedangkan *output*-nya adalah nilai dari konstanta ajaib yang terdapat pada pelabelan total ajaib sisi kuat (*strong edge magic total labeling*) pada graf sikel dengan tambahan dua anting ($C_a + 2A_1$).

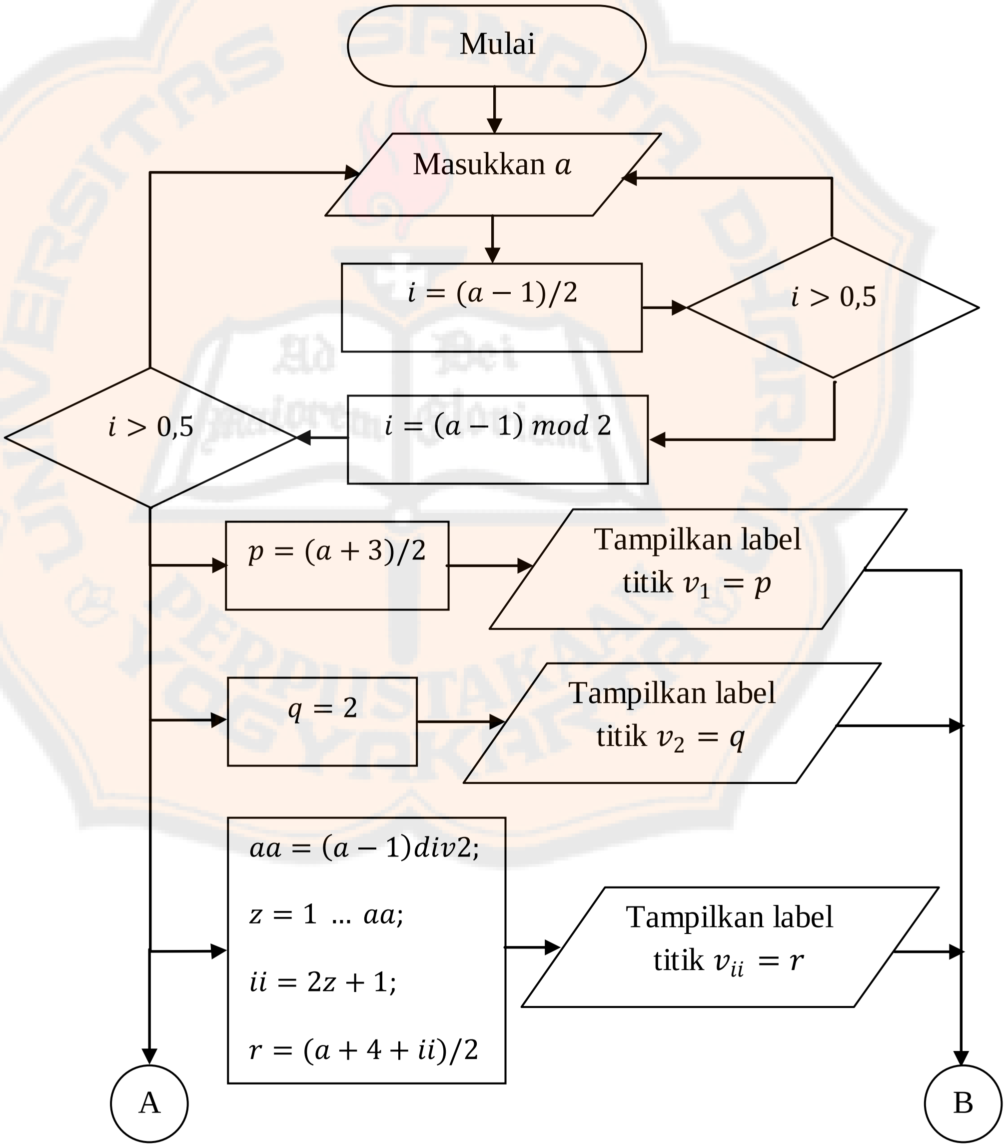
Flowchart program untuk mencari label-label yang mungkin muncul pada pelabelan total ajaib sisi kuat (*strong edge magic total labeling*) pada graf sikel dengan tambahan dua anting $(C_a + 2A_1)$.

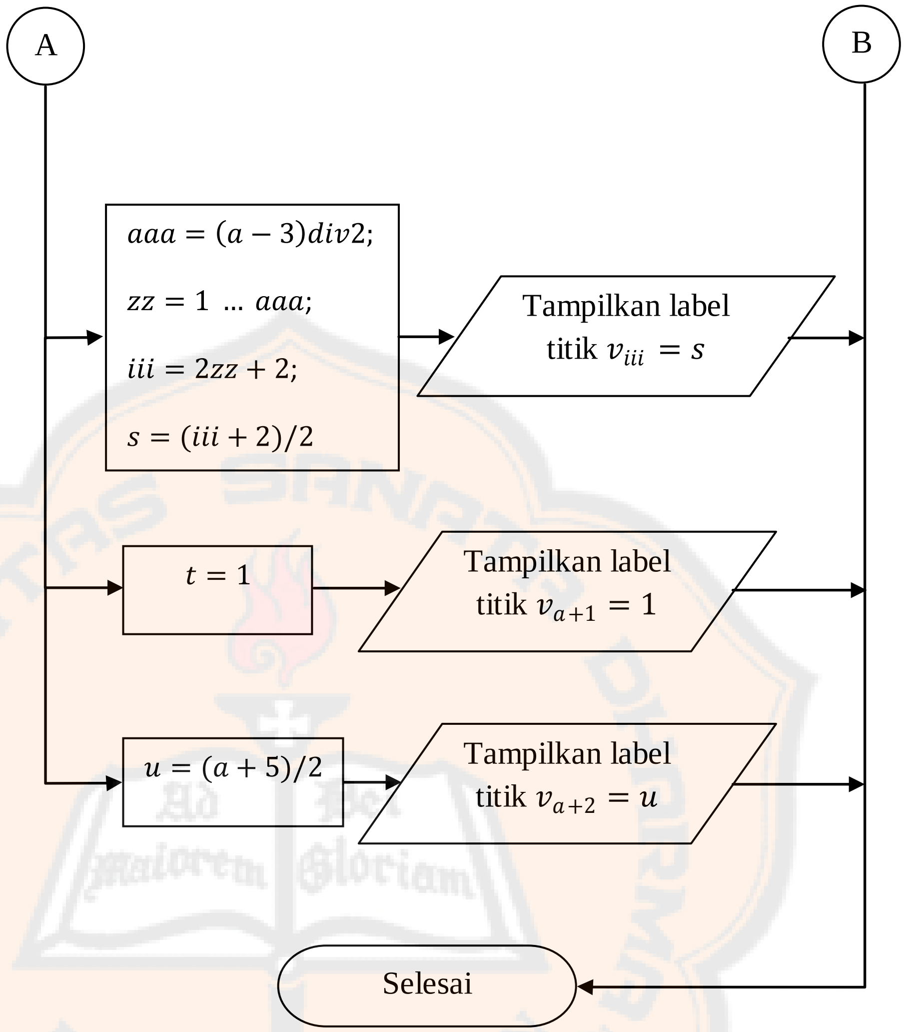


Gambar 4.9 *Flowchart* Program Label-label yang Mungkin Muncul

Berdasarkan *flowchart* program pada gambar 4.9, *input dari* program tersebut adalah nilai a, sedangkan *output*-nya adalah label-label yang mungkin muncul pada pelabelan total ajaib sisi kuat (*strong edge magic total labeling*) pada graf sikel dengan tambahan dua anting $(C_a + 2A_1)$.

Flowchart program untuk memberi label titik pada pelabelan total ajaib sisi kuat (*strong edge magic total labeling*) pada graf sikel dengan tambahan dua anting $(C_a + 2A_1)$.

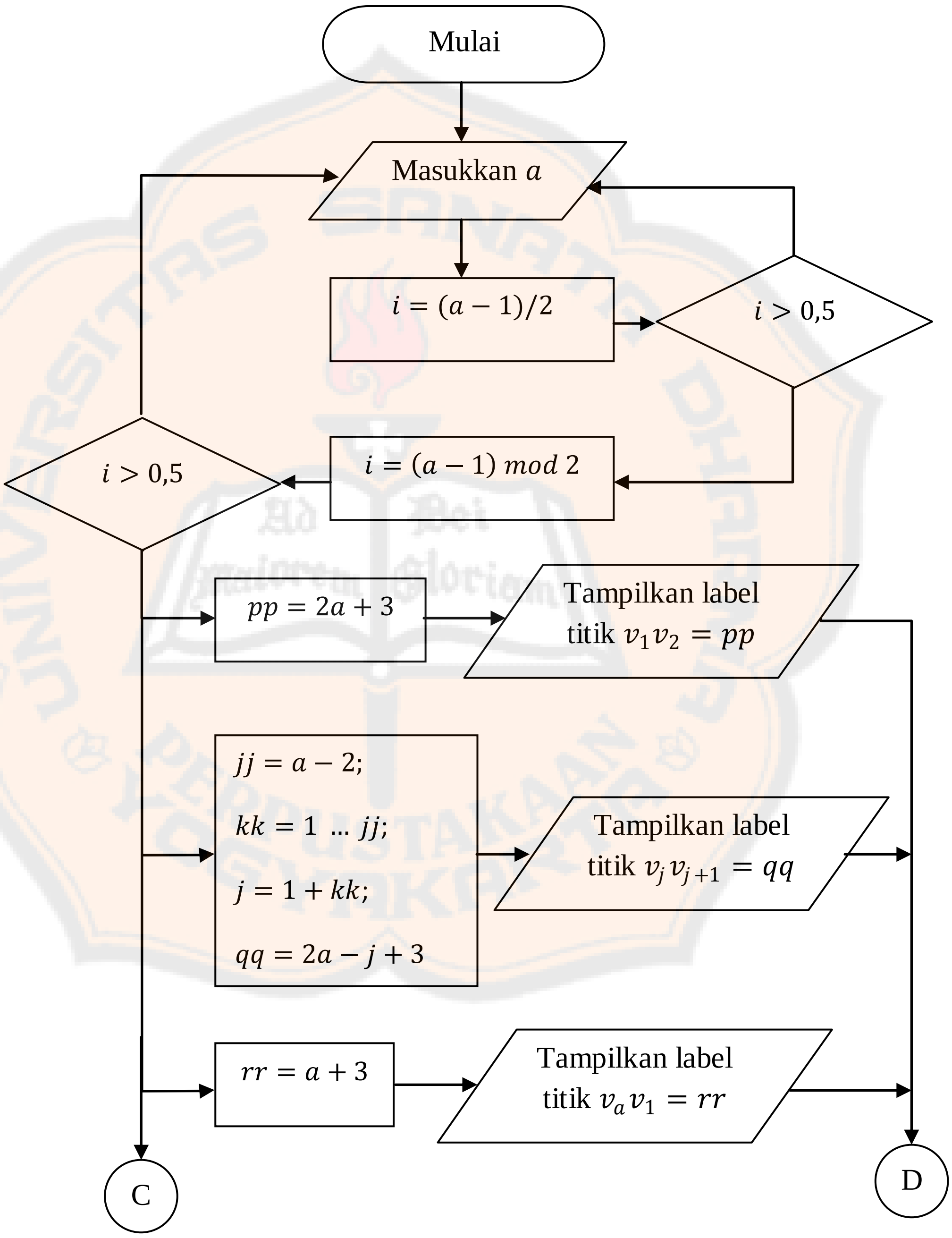


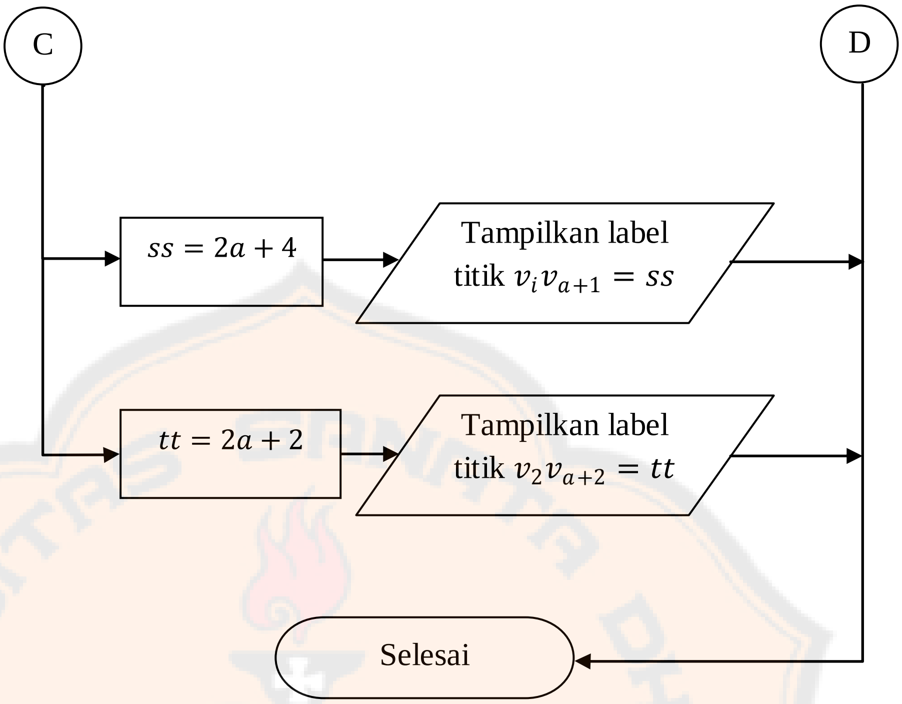


Gambar 4.10 *Flowchart* Program Label untuk Titik

Berdasarkan *flowchart* program pada gambar 4.10, *input dari* program tersebut adalah nilai a, sedangkan *output*-nya adalah label-label untuk titik pada pelabelan total ajaib sisi kuat (*strong edge magic total labeling*) pada graf sikel dengan tambahan dua anting $(C_a + 2A_1)$.

Flowchart program untuk memberi label sisi pada pelabelan total ajaib sisi kuat (*strong edge magic total labeling*) pada graf sikel dengan tambahan dua anting ($C_a + 2A_1$).





Gambar 4.11 *Flowchart* Program Label untuk Sisi

Berdasarkan *flowchart* program pada gambar 4.11, *input dari* program tersebut adalah nilai a, sedangkan *output*-nya adalah label-label untuk sisi pada pelabelan total ajaib sisi kuat (*strong edge magic total labeling*) pada graf sikel dengan tambahan dua anting $(C_a + 2A_1)$.

4.4.2. Program Turbo Pascal untuk Pelabelan Total Ajaib Sisi Kuat (*Strong Edge Magic Total Labeling*) pada Graf Sikel dengan Tambahan Dua Anting $(C_a + 2A_1)$

Pada skripsi ini, peneliti menyusun program menggunakan Turbo Pascal untuk membantu melakukan pelabelan total ajaib sisi kuat (*strong edge magic total labeling*) pada graf sikel dengan tambahan dua anting $(C_a + 2A_1)$.

Berikut diberikan susunan program menggunakan Turbo Pascal untuk pelabelan total ajaib sisi kuat (*strong edge magic total labeling*) pada graf sikel dengan tambahan dua anting $(C_a + 2A_1)$.

Program untuk mencari konstanta ajaib pada pelabelan total ajaib sisi kuat (*strong edge magic total labeling*) pada graf sikel dengan tambahan dua anting $(C_a + 2A_1)$.

```
Program pelabelan_graf_dengan_tambahan_dua_anting;
Uses wincrt;
Var a      : Integer;
i,k     : real;
Begin
        writeln('KONSTANTA AJAIB');
        writeln;

        repeat
    repeat
        write('Jika a = ');readln(a);
        i:=(a-1)/ 2;
    until(i>0.5);
    i:=(a-1)mod 2;
        until(i=0);
        writeln;
        k:=(5*a+13)/2;
        writeln('maka nilai k = ',k:1:0);
End.
```

Program untuk mencari label-label yang mungkin muncul pada pelabelan total ajaib sisi kuat (*strong edge magic total labeling*) pada graf sikel dengan tambahan dua anting $(C_a + 2A_1)$.

```
Program pelabelan_graf_dengan_tambahan_dua_anting;
Uses wincrt;
Var a,m,l   : Integer;
i           : real;
Begin
        writeln('LABEL-LABEL YANG MUNGKIN MUNCUL');
        writeln;

       repeat
    repeat
        write('Jika a = ');readln(a);
        i:=(a-1)/ 2;
    until(i>0.5);
    i:=(a-1)mod 2;
        until(i=0);
        writeln;
        l:=2*a+4;
        writeln('Maka nilai label - label yang mungkin adalah :');
    for m:= 1 to l do
    begin
    write(m:3);
    end;
End.
```

Program untuk memberi label titik pada pelabelan total ajaib sisi kuat (*strong edge magic total labeling*) pada graf sikel dengan tambahan dua anting $(C_a + 2A_1)$.

```
Program pelabelan_graf_dengan_tambahan_dua_anting;
Uses wincrt;
Var a,q,t,z,zz,aa,aaa    : Integer;
i,p,r,s,u,ii,iii         : real;

Begin
        writeln('LABEL TITIK');
        writeln;
        repeat
        repeat
                write('Jika a = ');readln(a);
                i:=(a-1)/ 2;
```

```
        until(i>0.5);
        i:=(a-1)mod 2;
        until(i=0);
        writeln;
        writeln('Maka label-label untuk titiknya adalah');
        p:=(a+3)/2;
        writeln('v[1]   = ',p:1:0);
        q:=2;
        writeln('v[2]   = ',q);
        aa:=(a-1) div 2;
    for z:= 1 to aa do
    begin
        ii:=2*z+1;
        r:=(a+4+ii)/2;
        writeln('v[',ii:1:0,']   =',r:2:0);
    end;
        aaa:=(a-3) div 2;
    for zz:= 1 to aaa do
    begin
        iii:=2*zz+2;
        s:=(iii+2)/2;
        writeln('v[',iii:1:0,']   =',s:2:0);
    end;
        t:=1;
        writeln('v[',a+1,']   = ',t);
        u:=(a+5)/2;
        writeln('v[',a+2,']   = ',u:1:0);
End.
```

Program untuk memberi label sisi pada pelabelan total ajaib sisi kuat (*strong edge magic total labeling*) pada graf sikel dengan tambahan dua anting ($C_a + 2A_1$).

```
Program pelabelan_graf_dengan_tambahan_dua_anting;
Uses wincrt;
Var a,pp,qq,rr,ss,tt,j,jj,kk : Integer;
i                            : real;
Begin
writeln('LABEL SISI');
writeln;

        repeat
        repeat
                write('Jika a = ');readln(a);
                i:=(a-1)/ 2;
        until(i>0.5);
```

```
        i:=(a-1)mod 2;
        until(i=0);
        writeln;
        writeln('Maka label-label untuk sisinya adalah');
        pp:=2*a+3;
        writeln('v[1]v[2]  = ',pp);
        jj:=a-2;
    for kk:=1 to jj do
    begin
        j:=1+kk;
        qq:=2*a-j+3;
        writeln('v[',j,']v[',j+1,']  = ',qq);
    end;
        rr:=a+3;
        writeln('v[',a,']v[1]  = ',rr);
        ss:=2*a+4;
        writeln('v[1]v[',a+1,']  = ',ss);

        tt:=2*a+2;
        writeln('v[2]v[',a+2,']  = ',tt);
End.
```

Berdasarkan pemrograman Turbo Pascal diatas, *input dari* program tersebut adalah nilai a yaitu untuk nilai $a \geq 3$, sedangkan *output*-nya adalah nilai dari konstanta ajaib, label-label yang mungkin muncul, label-label untuk titik, dan label-label untuk sisi pada pelabelan total ajaib sisi kuat (*strong edge magic total labeling*) pada graf sikel dengan tambahan dua anting $(C_a + 2A_1)$.

Berikut diberikan *running program* dari susunan program yang sudah dibuat menggunakan Turbo Pascal untuk pelabelan total ajaib sisi kuat (*strong edge magic total labeling*) pada graf sikel dengan tambahan dua anting $(C_a + 2A_1)$.

Running program untuk mencari konstanta ajaib, label-label yang mungkin muncul, label-label untuk titik, dan label-label untuk sisi pada pelabelan total ajaib sisi kuat (*strong edge magic* *total labeling*) pada graf sikel dengan tambahan dua anting $(C_a + 2A_1)$ diberikan syarat untuk nilai $a \geq 3$.

```
KONSTANTA AJAIB

Jika a = 1
Jika a = 2
Jika a = 4
Jika a = 6
Jika a = 12
Jika a = _
```

Gambar 4.12 *Running Program* nilai a

Pada gambar 4.12 ditunjukkan jika diberikan nilai $a \ngeq 3$, maka program akan melakukan perulangan sampai *input* sesuai dengan syarat yang ditentukan, yaitu nilai $a \geq 3$.

Running program untuk mencari konstanta ajaib pada pelabelan total ajaib sisi kuat (*strong edge magic total labeling*) pada graf sikel dengan tambahan dua anting $(C_a + 2A_1)$.

```
KONSTANTA AJAIB

Jika a = 1
Jika a = 2
Jika a = 4
Jika a = 6
Jika a = 12
Jika a = 5

maka nilai k = 19
```

Gambar 4.13 *Running Program* Mencari Konstanta Ajaib

Pada gambar 4.13 ditunjukkan *running program* untuk mencari konstanta ajaib dengan nilai $a = 5$ maka didapat nilai $k = 19$, dengan menggunakan perhitungan manual atau rumus yang sudah didapat pada pembahasan sebelumnya yaitu $k = \frac{5a+13}{2}$, diperoleh nilai k untuk $a = 5$ adalah $k = \frac{5(5)+13}{2} = 19$.

Running program untuk mencari label-label yang mungkin muncul pada pelabelan total ajaib sisi kuat (*strong edge magic total labeling*) pada graf sikel dengan tambahan dua anting $(C_a + 2A_1)$.

```
LABEL-LABEL YANG MUNGKIN MUNCUL

Jika a = 5

Maka nilai label - label yang mungkin adalah :
   1  2  3  4  5  6  7  8  9 10 11 12 13 14
```

Gambar 4.14 *Running Program* Label-label yang Mungkin Muncul

Pada gambar 4.14 ditunjukkan *running program* untuk mencari label-label yang mungkin muncul dengan nilai $a = 5$.

Running program untuk memberi label titik pada pelabelan total ajaib sisi kuat (*strong edge magic total labeling*) pada graf sikel dengan tambahan dua anting $(C_a + 2A_1)$.

```
LABEL TITIK

Jika a = 5

Maka label-label untuk titiknya adalah
v[1]    = 4
v[2]    = 2
v[3]    = 6
v[5]    = 7
v[4]    = 3
v[6]    = 1
v[7]    = 5
```

Gambar 4.15 *Running Program* Label untuk Titik

Pada gambar 4.15 ditunjukkan *running program* untuk memberi label titik dengan nilai $a = 5$.

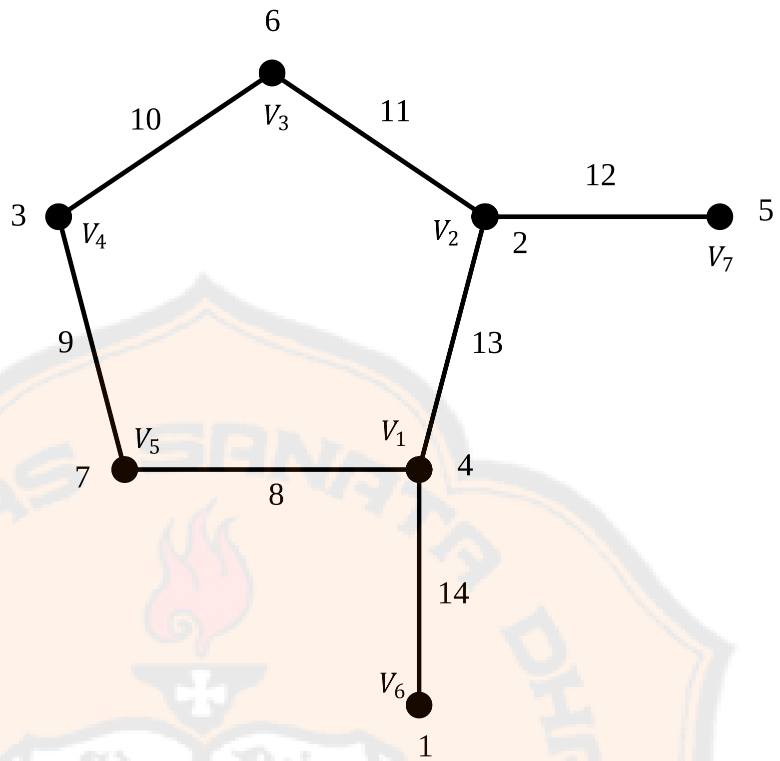
Running program untuk memberi label sisi pada pelabelan total ajaib sisi kuat (*strong edge magic total labeling*) pada graf sikel dengan tambahan dua anting $(C_a + 2A_1)$.

```
LABEL SISI

Jika a = 5

Maka label-label untuk sisinya adalah
v[1]v[2]  = 13
v[2]v[3]  = 11
v[3]v[4]  = 10
v[4]v[5]  = 9
v[5]v[1]  = 8
v[1]v[6]  = 14
v[2]v[7]  = 12
```

Gambar 4.16 *Running Program* Label untuk Sisi

Pada gambar 4.16 ditunjukkan *running program* untuk memberi label sisi dengan nilai $a = 5$.

Berikut diberikan gambaran pelabelan total ajaib sisi kuat (*strong edge magic total labeling*) pada graf sikel dengan tambahan dua anting $(C_a + 2A_1)$ dengan nilai $a = 5$.



Gambar 4.17 Pelabelan Graf Sikel dengan Tambahan Dua Anting

$(C_a + 2A_1)$ untuk $a = 5$ atau $(C_5 + 2A_1)$

BAB V

PENUTUP

Pada bab ini peneliti menyajikan kesimpulan berdasarkan hasil penelitian yang telah di peroleh dan di bahas pada bab sebelumnya. Peneliti juga menyampaikan beberapa saran yang berkaitan dengan hasil penelitian.

5.1. Kesimpulan

Berdasarkan hasil dari penelitian yang telah dilakukan, dapat disimpulkan bahwa:

1. Graf sikel dengan tambahan dua anting $(C_a + 2A_1)$ mempunyai pelabelan total ajaib sisi kuat dengan nilai k berada pada interval $\frac{5a+9}{2} < k < \frac{5a+17}{2}$.
2. Suatu rumus pelabelan titik yang diperoleh pada graf sikel dengan tambahan dua anting $(C_a + 2A_1)$ adalah:

$$\begin{cases} f(v_1) = \frac{a+3}{2} \\ f(v_2) = 2 \\ f(v_i) = \dfrac{(a+4)+i}{2} & ; i = 3, 5, 7, \dots, a \\ f(v_i) = \dfrac{i+2}{2} & ; i = 4, 6, 8, \dots, a-1 \\ f(v_{a+1}) = 1 \\ f(v_{a+2}) = \dfrac{a+5}{2} \end{cases}.$$

3. Suatu rumus pelabelan sisi pada graf sikel dengan tambahan dua anting $(C_a + 2A_1)$ adalah:

$$\begin{cases} f(v_1v_2) = 2a + 3 & \\ f(v_iv_{i+1}) = (2a+3) - i & ;\ i = 2, 3, \dots, a-1 \\ f(v_av_1) = a + 3 & \\ f(v_1v_{a+1}) = 2a + 4 & \\ f(v_2v_{a+2}) = 2a + 2 & . \end{cases}$$

5.2. Saran

Berdasarkan hasil penelitian, peneliti memberikan saran sebagai masukan bagi para pembaca guna mengembangkan hasil dari penelitian yang ada. Saran-saran tersebut antara lain:

1. Untuk penelitian selanjutnya dapat diselidiki ketunggalan rumus pelabelan total ajaib sisi kuat pada graf sikel dengan tambahan dua anting $(C_a + 2A_1)$ untuk $a \geq 3$ dan a ganjil.
2. Dilakukan penelitian untuk pelabelan total sisi ajaib kuat pada graf sikel dengan tambahan dua anting $(C_a + 2A_1)$ untuk $a \geq 3$ dan a genap.
3. Dapat dikembangkan pembuatan program untuk pelabelan graf yang akan diteliti, misalnya program yang dibuat disertai dengan gambar untuk menunjukkan graf yang dimaksud.

DAFTAR PUSTAKA

Jogiyanto, H.M. (2005). Turbo Pascal. Jilid I. Edisi III, Yogyakarta: Andy Ofset.

Prasetyo, D.A.B.(2008). "Vertex Antimagic Total Labeling pada Multicycle dan Multicomplete Bipartite", Thesis Math. Surabaya: Institut Teknologi Sepuluh Nopember.

Selfiana, K.E. (2011), "Analisis Rangkaian Listrik dengan Graf dan Matriks", Skripsi Matematika. Yogyakarta: Universitas Sanata Dharma.

Septian, C.W. (2011), "Pelabelan Total Tak Ajaib Titik pada Graf Sikel dengan Tambahan Satu Anting", Skripsi Matematika. Yogyakarta: Universitas Sanata Dharma.

Suryadi, D. (1996). Matematika Diskrit. Jakarta: Universitas Terbuka.

Suryadi, H.S. (1996). Teori Graf Dasar. Edisi I, Jakarta: Gunadarma.

Wallis, W.D. (2001). Magic Graph, Birkhauser.

West, D.B. (2001). An Introduction to Graph Theory, Second Edition, Prentice Hall: Mathematics Departement, University of Illinois. Urbana.

Wiitala, S.A. (1987). Discrete Matematics: A Unified Approach, New York: MacGraw-Hill, Inc.