

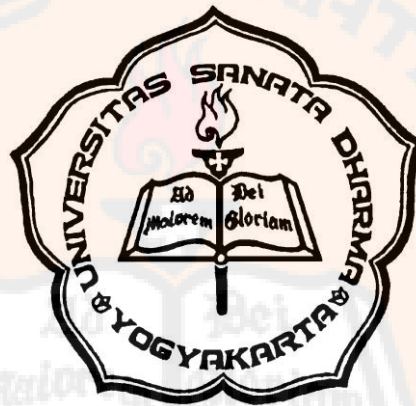
PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

**PELABELAN TOTAL TAK AJAIB TITIK PADA GRAF SIKEL  
DENGAN TAMBAHAN DUA ANTING**

**SKRIPSI**

Diajukan untuk Memenuhi Salah Satu Syarat Memperoleh Gelar Sarjana Pendidikan

Program Studi Pendidikan Matematika



Oleh:

**Rini Andriyani**

**NIM : 101414050**

**PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA**

**JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM**

**FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN**

**UNIVERSITAS SANATA DHARMA**

**YOGYAKARTA**

**2014**

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

**PELABELAN TOTAL TAK AJAIB TITIK PADA GRAF SIKEL  
DENGAN TAMBAHAN DUA ANTING**

**SKRIPSI**

Diajukan untuk Memenuhi Salah Satu Syarat Memperoleh Gelar Sarjana Pendidikan

Program Studi Pendidikan Matematika



Oleh:

**Rini Andriyani**

**NIM : 101414050**

**PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA**

**JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM**

**FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN**

**UNIVERSITAS SANATA DHARMA**

**YOGYAKARTA**

**2014**

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

**SKRIPSI**

**PELABELAN TOTAL TAK AJAIB TITIK PADA GRAF SIKEL  
DENGAN TAMBAHAN DUA ANTING**

Oleh:

Rini Andriyani

NIM: 101414050

Telah disetujui oleh:

Pembimbing



Dominikus Arif Budi Prasetyo, S.Si., M.Si.

Tanggal : 6 Oktober 2014

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

**SKRIPSI**

**PELABELAN TOTAL TAK AJAIB TITIK PADA GRAF SIKEL  
DENGAN TAMBAHAN DUA ANTING**

Dipersiapkan dan ditulis oleh:

Rini Andriyani

NIM : 101414050

Telah dipertahankan di depan Panitia Penguji pada tanggal 15 Oktober 2014  
dan dinyatakan memenuhi syarat

Susunan Panitia Penguji

Nama Lengkap

Tanda Tangan

Ketua : Dr. Marcelinus Andy Rudhito, S.Pd.

Sekretaris : Ch. Enny Murwaningtyas, S.Si., M.Si.

Anggota : Dominikus Arif Budi Prasetyo, S.Si., M.Si.

Anggota : Dr. Marcelinus Andy Rudhito, S.Pd.

Anggota : Veronika Fitri Rianasari, S.Pd., M.Sc.

Yogyakarta, 15 Oktober 2014

Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan  
Universitas Sanata Dharma  
Dekan,



Rohandi, Ph.D.

**HALAMAN PERSEMBAHAN**

*Scientia Potentia est.*  
*Sir Francis Bacon*

*There is no great genius without a mixture of madness.*  
*Aristotles*

**Persembahan Skripsiku sebelum Thesisku :**

**Allah Bapa Yang Maha Kuasa**

**Kedua Orang Tuaku**

**Simbah Putri dan Kakung**

**Kakakku**

**Adik-adik, Kawan-kawan dan Almameterku**

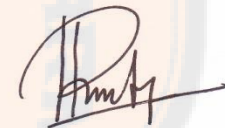
# PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

## PERNYATAAN KEASLIAN KARYA

Saya menyatakan dengan sesungguhnya bahwa skripsi yang saya tulis ini tidak memuat karya atau bagian dari orang lain, kecuali yang telah disebutkan dalam kutipan dan daftar pustaka, sebagaimana layaknya karya ilmiah.

Yogyakarta, 15 Oktober 2014

Penulis,



Rini Andriyani

# PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

## LEMBAR PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI KARYA ILMIAH UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS

Yang bertanda tangan di bawah ini, saya mahasiswa Universitas Sanata Dharma:

Nama : Rini Andriyani

NIM : 101414050

Demi pengembangan ilmu pengetahuan, saya memberikan kepada Perpustakaan Universitas Sanata Dharma karya ilmiah saya yang berjudul:

**Pelabelan Total Tak Ajaib Titik pada Graf Sikel**

**dengan Tambahan Dua Anting**

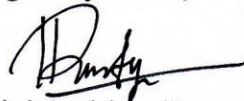
Dengan demikian saya memberikan kepada Perpustakaan Universitas Sanata Dharma hak untuk menyimpan, mengalihkan dalam bentuk media lain, mengelolanya dalam bentuk pangkalan data, mendistribusikan secara terbatas, dan mempublikasikannya di internet atau media lain untuk kepentingan akademis tanpa perlu meminta ijin dari saya maupun memberikan royalti kepada saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya.

Dibuat di Yogyakarta

Pada Tanggal : 15 Oktober 2014

Yang menyatakan,



(Rini Andriyani)

## ABSTRAK

**Rini Andriyani, 2014. *Pelabelan Total Tak Ajaib Titik pada Graf Sikel dengan Tambahan Dua Anting*. Program Studi Pendidikan Matematika, Jurusan Pendidikan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Universitas Sanata Dharma, Yogyakarta.**

Pelabelan total tak ajaib titik pada suatu graf  $G$  adalah pemetaan satu-satu (*bijektif*) dari  $V(G) \cup E(G)$  ke himpunan bilangan bulat positif  $\{1, 2, 3, \dots, p + q\}$ , sedemikian hingga himpunan bobot titik dari semua titik di graf  $G$  adalah  $\{a, a + d, a + 2d, \dots, a + (p - 1)d\}$ , dimana  $p$  adalah banyaknya unsur di  $V$  dan  $q$  adalah banyaknya unsur di  $E$ . Tujuan dari skripsi ini untuk mengetahui apakah graf sikel dengan tambahan dua anting memenuhi pelabelan total tak ajaib titik dan bagaimana cara pelabelannya sehingga mempunyai bentuk barisan aritmatika yaitu suku pertama dan beda.

Penelitian ini menyelidiki bagaimana pelabelan total tak ajaib titik pada suatu graf sikel dengan tambahan dua anting dengan  $p \geq 3$ ,  $d = 1$  dan  $d = 2$  untuk  $p$  ganjil sehingga memiliki pola pada suku pertama dan beda yang akan membentuk suatu barisan aritmatika naik. Penelitian ini merupakan penelitian pustaka yang mengkaji beberapa buku, jurnal dan hasil penelitian sebelumnya untuk mendapatkan teori-teori yang mendukung.

Dari hasil analisa diperoleh bahwa sifat pelabelan total tak ajaib titik dimiliki oleh graf sikel dengan tambahan dua anting  $C_p + 2A_1$ , serta memenuhi batasan dan pola pelabelannya. Untuk  $C_p + 2A_1$  dengan  $p \geq 3$  terdapat pelabelan total tak ajaib titik dengan suku pertama  $2p + 6$  dan beda 1, serta untuk  $C_p + 2A_1$  dengan  $p \geq 3$  dan  $p$  ganjil terdapat pelabelan total tak ajaib titik dengan suku pertama  $\frac{3p+11}{2}$  dan beda 2.

Kata Kunci : graf, pelabelan graf, graf sikel dengan tambahan dua anting,  
pelabelan total tak ajaib titik



## ABSTRACT

**Rini Andriyani, 2014. *Vertex Antimagic Total Labeling on the Cycle Graph with Two Extra Arm*. Mathematics Education Study Program, Mathematics and Science Education Department, Faculty of Teachers Training and Education, Sanata Dharma University, Yogyakarta.**

Vertex antimagic total labeling on graph  $G$  is one by one mapping (bijective) from  $V(G) \cup E(G)$  to the set of positive integers  $\{1, 2, 3, \dots, p + q\}$ , so that the set of vertex weight out of all the vertices in graph  $G$  is  $\{a, a + d, a + 2d, \dots, a + (p - 1)d\}$ , where  $p$  is the number of elements in  $V$  and  $q$  is the number of elements in  $E$ . This paper aims to prove that cycle graph with two extra arm as a new graph, imply vertex antimagic total labeling and how to labeling the arithmetic sequences are, those are the first tribal and the different tribal.

This research observed how the vertex antimagic total labeling on graph cycle with two extra arm with  $p \geq 3$ ,  $d = 1$  and  $d = 2$  for  $p$  odd so that the patterns in the first and the different tribal will construct an arithmetic sequence up. This research examined several books, journals and the results of previous research to obtain the supporting theories.

From the result of the analysis showed that the graph cycle with two extra arm  $C_p + 2A_1$  have characteristic of vertex antimagic total labeling, as well as comply with the limits and labeling patterns. For  $C_p + 2A_1$  with  $p \geq 3$  there is have vertex antimagic total labeling with first tribal  $2p + 6$  and different 1, as well as for  $C_p + 2A_1$  with  $p \geq 3$  and  $p$  odd there is have vertex antimagic total labeling labeling with the first tribal  $\frac{3p+11}{2}$  and different tribal 2.

**Keywords :** graph, graph labeling, graph cycle with two extra arm, vertex antimagic total labeling

## KATA PENGANTAR

Puji dan syukur ke hadirat Tuhan Yang Maha Kuasa atas segala kasih, rahmat dan berkat-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi dengan judul “Pelabelan Total Tak Ajaib Titik pada Graf Sikel dengan Tambahan Dua Anting” ini. Skripsi ini diajukan untuk memenuhi salah satu syarat memperoleh gelar saerjana pendidikan pada Program Studi Pendidikan Matematika, Jurusan Pendidikan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Fakultass Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Universitas Sanata Dharma, Yogyakarta.

Skripsi ini dapat tersusun berkat bimbingan dan bantuan serta dukungan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, pada kesempatan kali ini penulis menyampaikan terima kasih kepada:

1. Bapak Dominikus Arif Budi Prasetyo, S.Si., M.Si. selaku Dosen Pembimbing skripsi yang sudah meluangkan waktu dan dengan sabar membimbing selama penulis menyusun skripsi ini.
2. Bapak Rohandi, Ph.D selaku Dekan Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Sanata Dharma.
3. Bapak Dr. M. Andy Rudhito, S.Pd., selaku Ketua Jurusan dan Kaprodi Pendidikan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, FKIP, Universitas Sanata Dharma.

## PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

4. Ibu Ch. Enny Murwaningtyas, S.Si., M.Si., selaku Dosen Pembimbing Akademik yang telah memberikan bimbingan selama penulis belajar di sini.
5. Seluruh Dosen Program Studi Pendidikan Matematika yang telah banyak memberikan ilmu pengetahuan dan bekal keterampilan.
6. Segenap Staf Sekretariat JPMIPA yang telah membantu dalam hal administrasi kampus selama penulis belajar di sini.
7. Kedua orang tua penulis, Bapak Sarjana dan Ibu R.M.E Rubinah, serta Kakakku Riyan Wahyudi yang telah memberikan dukungan dan doa.
8. Teman-teman Program Studi Pendidikan Matematika Angkatan 2010 yang telah berbagi hari-hari yang menyenangkan serta semangat dan dukungan untuk terus maju.
9. Semua pihak yang tidak dapat disebutkan satu per satu, terima kasih atas bantuan dan saran yang berguna selama penulisan skripsi ini.

Akhir kata, penulis berharap kiranya skripsi ini dapat bermanfaat bagi para pembaca.

Penulis,

Rini Andriyani

**DAFTAR ISI**

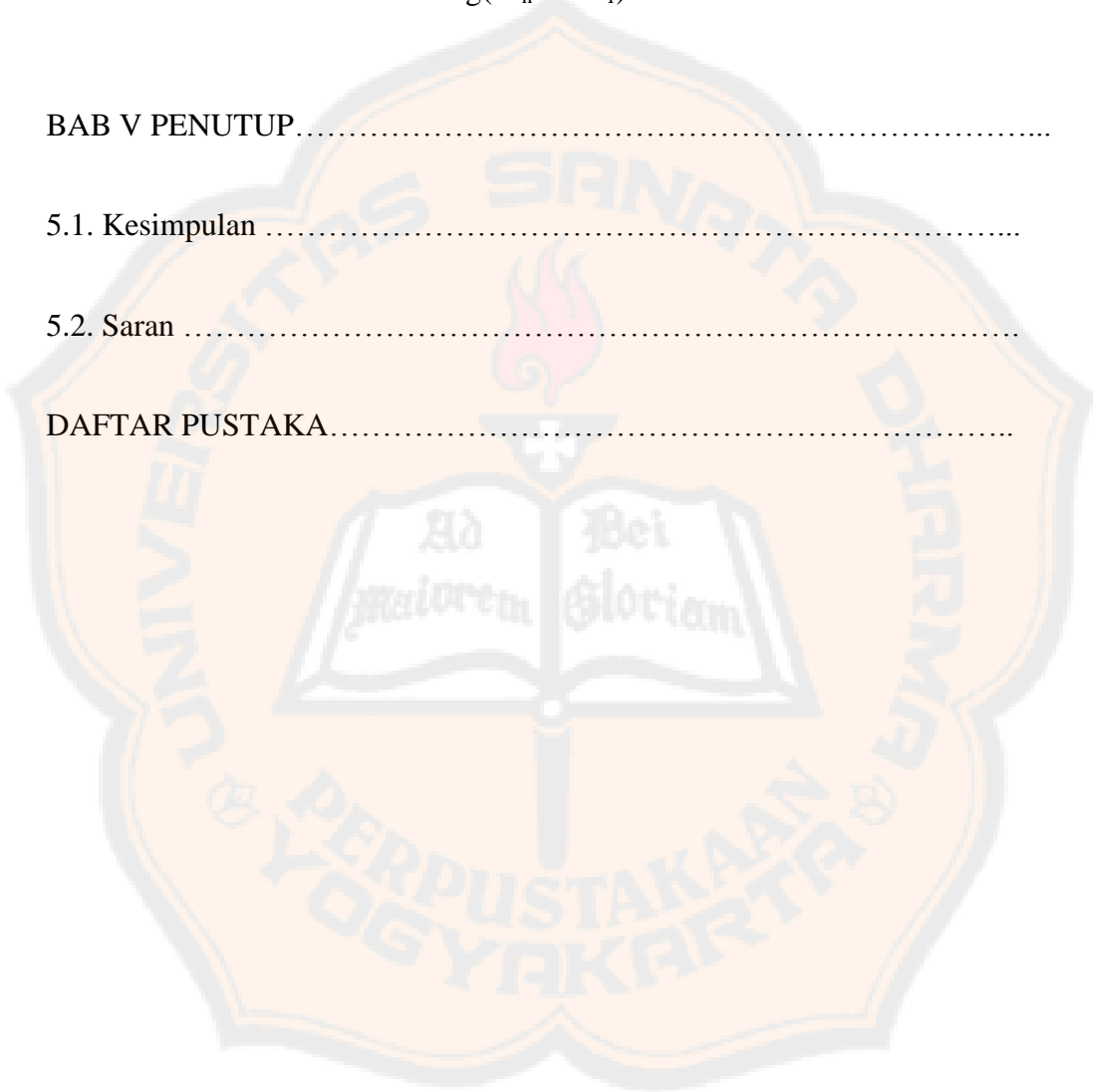
HALAMAN JUDUL .....	i
HALAMAN PERSETUJUAN PEMBIMBING.....	ii
LEMBAR PENGESAHAN .....	iii
HALAMAN PERSEMBAHAN .....	iv
PERNYATAAN KEASLIAN KARYA.....	v
PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI KARYA ILMIAH .....	vi
ABSTRAK .....	vii
<i>ABSTRACT</i> .....	viii
KATA PENGANTAR .....	ix
DAFTAR ISI .....	xi
DAFTAR GAMBAR .....	xiv
DAFTAR NOTASI .....	xvii
BAB I PENDAHULUAN .....	1
1.1 Latar Belakang .....	1

# PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

1.2 Rumusan Masalah .....	6
1.3 Tujuan dan Manfaat Penelitian .....	7
1.4 Batasan Masalah .....	8
1.5 Metodologi Penelitian .....	8
1.6 Sistematika Penelitian .....	9
<b>BAB II LANDASAN TEORI .....</b>	<b>11</b>
2.1 Pengertian Graf.....	11
2.2 Istilah – istilah Graf .....	12
2.3 Jenis – Jenis Graf.....	17
2.4 Kerangka Berpikir.....	22
<b>BAB III PELABELAN.....</b>	<b>24</b>
3.1 Pelabelan Graf .....	24
3.2 Pelabelan Graf Sikel ( <i>Cycle Graph</i> ) dengan Tambahan Satu Anting .....	27
3.3 Pelabelan Graf Sikel ( <i>Cycle graph</i> ) dengan Tambahan Dua Anting .....	28
3.4 Perhitungan Dasar Tentang Pelabelan Total Tak Ajaib Titik .....	30

# PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

BAB IV HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN .....	31
4.1 Pelabelan Total Tak Ajaib Titik pada Graf Sikel dengan Tambahkan Dua Anting( $C_n + 2A_1$ ).....	31
BAB V PENUTUP.....	64
5.1. Kesimpulan .....	64
5.2. Saran .....	65
DAFTAR PUSTAKA.....	66



DAFTAR GAMBAR

	<b>Halaman</b>
Gambar 1.1 Jembatan Konigsberg dan Grafnya .....	1
Gambar 1.2 Penerapan Graf pada Ikatan Kimia.....	2
Gambar 1.2 Jaringan Jalan Raya di Provinsi Jawa Tengah .....	2
Gambar 1.4 Persegi Ajaib 4 x 4.....	5
Gambar 2.1 Graf $G$ .....	12
Gambar 2.2 Graf $G_1$ .....	12
Gambar 2.3 Graf $G_2$ .....	13
Gambar 2.4 Graf $G_3$ .....	14
Gambar 2.5 Graf $G_4$ .....	14
Gambar 2.6 Graf $G_5$ .....	15
Gambar 2.7 Graf $G_6$ dan $G_7$ .....	16
Gambar 2.8 $K_4$ adalah Graf Planar .....	17
Gambar 2.9 $K_5$ bukan Graf Planar.....	17
Gambar 2.10 Graf $G_8$ , $G_9$ , dan $G_{10}$ .....	18

## PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

Gambar 2.11 Graf $G_{11}$ dan $G_{12}$ .....	19
Gambar 2.12 Graf $G_{13}$ dan $G_{14}$ .....	20
Gambar 2.13 Graf Lengkap.....	21
Gambar 2.14 Graf Sikel.....	22
Gambar 3.1 <i>VMTL</i> pada $C_5$ dengan $h = 14$ .....	25
Gambar 3.2 (11,1) <i>VATL</i> .....	26
Gambar 3.3 Graf Sikel dengan Tambahan Satu Anting.....	27
Gambar 3.4 (10,1) <i>VATL</i> pada $C_3 + A_1$ .....	28
Gambar 3.5 Graf Sikel dengan Tambahan Dua Anting.....	29
Gambar 3.6 Contoh Pelabelan graf Sikel dengan Tambahan Dua Anting ( $C_3 + 2A_1$ ) .....	29
Gambar 4.1 Graf Sikel dengan tambahan dua anting ( $C_p + 2A_1$ ) .....	32
Gambar 4.2 (a) Ilustrasi Konstruksi Pelabelan pada Graf Sikel dengan Tambahan Dua Anting untuk $p=3$ dan $d=1$ .....	40
Gambar 4.2 (b) Ilustrasi Konstruksi Pelabelan pada graf sikel dengan tambahan dua anting untuk $d=1$ .....	40



## PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

Gambar 4.2 (c) Ilustrasi Konstruksi Bobot pada graf sikel dengan tambahan dua anting untuk $d=1$ .....	41
Gambar 4.3 (12,1) $VATL$ pada $C_3 + 2A_1$ .....	43
Gambar 4.4 (14,1) $VATL$ pada $C_4 + 2A_1$ .....	44
Gambar 4.5 (16,1) $VATL$ pada $C_5 + 2A_1$ .....	45
Gambar 4.6 (18,1) $VATL$ pada $C_6 + 2A_1$ .....	47
Gambar 4.7 (20,1) $VATL$ pada $C_7 + 2A_1$ .....	48
Gambar 4.8 (a) Ilustrasi Konstruksi Pelabelan pada graf sikel dengan tambahan dua anting untuk $d=2$ .....	51
Gambar 4.8 (b) Ilustrasi Konstruksi Bobot pada graf sikel dengan tambahan dua anting untuk $d=2$ .....	53
Gambar 4.9 (10,2) $VATL$ pada $C_3 + 2A_1$ .....	55
Gambar 4.10 (13,2) $VATL$ pada $C_5 + 2A_1$ .....	56
Gambar 4.11 (16,2) $VATL$ pada $C_7 + 2A_1$ .....	58
Gambar 4.12 (19,2) $VATL$ pada $C_9 + 2A_1$ .....	59
Gambar 4.13 (22,2) $VATL$ pada $C_{11} + 2A_1$ .....	61

## DAFTAR NOTASI

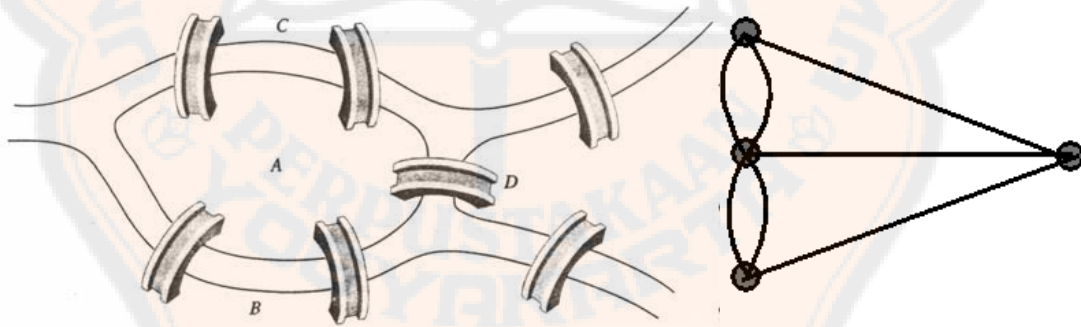
$U$	gabungan himpunan
$C_p$	sikel dengan $p$ titik
$S_w$	jumlahan bobot titik
$S_v$	jumlahan label-label titik
$S_e$	jumlahan label-label sisi
$w_f(v_i)$	bobot untuk titik $v_i$

## BAB I

### PENDAHULUAN

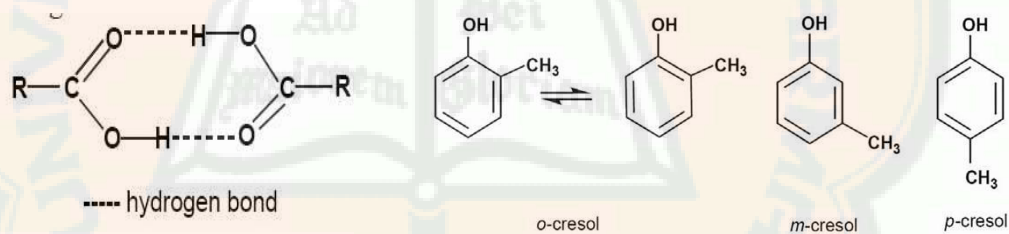
#### 1.1 Latar Belakang

Graf merupakan salah satu cabang matematika yang saat ini berkembang. Teori graf diperkenalkan oleh Leonard Euler pada tahun 1736 ketika dia kembali mendiskusikan mungkin atau tidaknya melintasi semua jembatan Königsberg yang ada di kota Kaliningrat-Rusia hanya dengan melewati satu kali. Solusi yang diusulkan atas permasalahan tersebut berupa titik dan sisi yang kemudian dikenal sebagai teori graf (Munir, 2001).

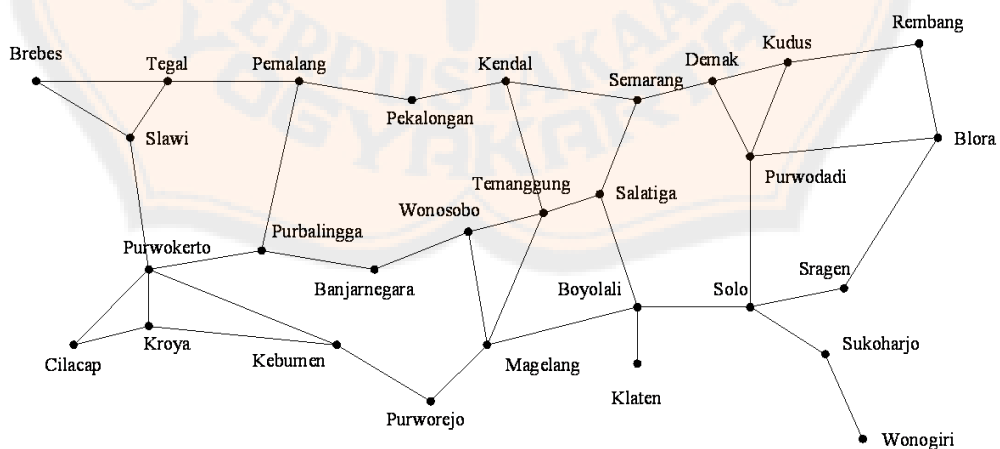


Gambar 1.1 Jembatan Königsberg dan Grafnya

Contoh penerapan graf dalam kehidupan sehari-hari antara lain permasalahan menentukan jalur terpendek maupun pada sebuah rangkaian listrik. Dalam kehidupan sehari-hari graf biasa digunakan untuk mempresentasikan objek-objek diskrit dan hubungan antara objek-objek tersebut. Ada banyak sekali contoh penggunaan graf di dalam kehidupan, contohnya saja dalam pembuatan peta, dimana satu kota dihubungkan dengan kota lain apabila terdapat jalan atau sarana transportasi yang menghubungkan kedua kota tersebut. Selain itu juga graf dapat kita temukan dalam visualisasi silsilah keluarga yang menggunakan pohon keturunan. Pohon merupakan salah satu contoh graf khusus. Penerapan teori graf yang sering kita jumpai rangkaian listrik, isomer ikatan kimia dan sebagainya.



**Gambar 1.2 Penerapan Graf pada Ikatan Kimia**



**Gambar 1.2 Jaringan Jalan Raya di Provinsi Jawa Tengah**

Pelabelan pada graf sikel dengan tambahan dua anting dapat diaplikasikan pada permasalahan bagaimana menghubungkan satu orang dengan yang lain pada saat orang tersebut berada pada tempat yang berjauhan dengan menggunakan *Handy Talky*. Dalam hal ini, titik dinyatakan sebagai orang yang sedang memegang *Handy Talky* dengan frekuensi tertentu. Sisi dinyatakan sebagai jarak antara satu orang pada suatu tempat dengan orang lain pada tempat yang berbeda di mana jarak tersebut akan dihitung sedemikian sehingga jarak dapat berubah menjadi frekuensi jarak antara satu orang pada tempat tertentu dengan orang lain pada tempat lain. Bobot titik dinyatakan sebagai jumlah frekuensi dari titik dan sisi yang berhubungan dengan titik tersebut sehingga frekuensi pada bobot tersebut dapat berhubungan dengan frekuensi pada bobot yang lain tetapi dengan suatu aturan tertentu. Di mana dalam hal ini aturan yang berlaku, titik diluar sikel hanya dapat berhubungan dengan titik di dalam sikel dan setiap titik pada sikel hanya dapat berhubungan dengan titik kanan dan kirinya.

Salah satu pelabelan dari graf adalah pelabelan graf (*graph labeling*). Dalam hal ini, graf yang akan dipakai adalah terbatas, sederhana dan tidak berarah. Graf  $G$  merupakan gabungan himpunan tak kosong titik-titik (*vertices*)  $V = V(G)$  dan himpunan sisi-sisi (*edges*)  $E = E(G)$  dengan jumlah vertex  $|V| = p$  dan jumlah edge  $|E| = q$ . Suatu pelabelan graf memetakan setiap elemen dari graf tersebut yaitu titik (*vertex*) dan sisi (*edge*) atau keduanya ke himpunan bilangan, biasanya bilangan bulat positif. Jenis dari pelabelan (*labeling*) biasanya bergantung pada

domainnya, yaitu titik disebut pelabelan titik (*vertex labeling*), sisi disebut pelabelan sisi (*edge labeling*), atau keduanya disebut total labeling. Dalam penelitian ini domain yang dipakai adalah titik dan sisi, sehingga disebut pelabelan total (*total labeling*).

Ide awal pelabelan (*labeling*) ajaib dengan cara menggeneralisasikan ide dari persegi ajaib (*magic square*). Persegi ajaib adalah suatu persegi dengan ukuran  $n \times n$  petak di mana setiap baris, kolom dan diagonal memiliki jumlah yang sama. Persegi ajaib sudah dikenal oleh matematikawan Cina sejak 650 Sebelum Masehi. Ada kemungkinan sudah dikenal oleh matematikawan Arab sejak abad ke-7. Berawal dari pembuatan persegi ajaib inilah muncul ide untuk menggunakan graf yaitu yang disebut pelabelan ajaib (*magic labeling*).

Pelabelan ajaib merupakan pemetaan bijektif dari  $V(G) \cup E(G)$  ke himpunan bilangan bulat berurutan dari satu sampai dengan jumlah titik dan sisinya. Pelabelan ajaib titik (*vertex magic labeling*) merupakan pelabelan ajaib dengan jumlah label-labelnya yang berhubungan dengan suatu titik tetap. Pelabelan total ajaib titik (*vertex magic total labeling*) pertama kali diperkenalkan oleh MacDougall, dkk (1999). Pelabelan total ajaib titik didefinisikan sebagai pemetaan bijektif  $V(G) \cup E(G)$  ke himpunan bilangan bulat mulai dari satu sampai dengan jumlah titik dan sisi sedemikian sehingga jumlah label pada suatu sisi dan label pada titik-titik yang saling menempel tersebut sama dengan suatu nilai konstan bilangan bulat positif dan tidak tergantung pada pilihan sisinya. Jumlah label -

label yang bersesuaian dengan suatu titik  $r$  disebut bobot dari titik  $s$ , sehingga pada pelabelan total ajaib titik berlaku bobot untuk setiap titik tetap disimbolkan dengan  $h$  dan bilangan  $h$  disebut sebagai konstanta ajaib (*magic constant*) untuk pelabelan tersebut.

16	2	3	13
5	11	10	8
9	7	6	12
4	14	15	1

**Gambar 1.4 Persegi Ajaib 4 x 4**

Konsep graf tak ajaib (*antimagic graph*) diperkenalkan oleh Hartsfield dan Ringel (1990). Menurut mereka, pelabelan tak ajaib (*antimagic labeling*) merupakan pelabelan sisi dari suatu graf dengan bilangan bulat  $\{1, 2, 3, \dots, q\}$  sehingga bobot setiap titiknya berbeda. Selanjutnya Bodendiek dan Walther (1993) mendefinisikan konsep  $(a, d)$  *antimagic labeling* sebagai suatu pelabelan sisi dengan bobot titik-titiknya membentuk suatu barisan aritmatika naik dengan suku pertama  $a$  dan beda  $d$ .

Martin Baca, dkk. (2003) telah mengkaji beberapa kasus mengenai  $(a, d)$  *vertex antimagic total labeling*. Mereka telah menunjukkan keberlakuan *vertex antimagic total labeling* (*VATL*) untuk *path* (lintasan), graf *Petersen*, graf sikel ganjil dan beberapa bentuk dan perluasan lainnya. Selain itu Martin Baca, dkk.

juga menunjukkan beberapa bentuk graf yang tidak memenuhi *VATL*. Dominicus Arif Budi Prasetyo (2008) juga telah menunjukkan keberlakuan *VATL* pada *multigraph* yaitu pada *multicycle* ( $mC_p$ ) dan *multicomplete bipartite*. Cosmas Wenny Septian (2011) telah menunjukkan keberlakuan *VATL* pada Graf Sikel dengan tambahan satu anting. Benedictus Dwi yulianto (2012) telah menunjukkan keberlakuan *Strong Edge Magic Total Labeling* pada Graf Sikel dengan tambahan dua anting. Ryan Sanjaya (2013) telah menunjukkan keberlakuan *Super Edge Antimagic Total Labeling* pada Graf Multisikel.

Berdasarkan hasil penelitian-penelitian sebelumnya, penulis mengembangkan hasil penelitian yang berkaitan dengan graf total tak ajaib titik, yakni menyelidiki keberlakuan  $(a, d)$  *VATL* pada graf sikel dengan tambahan dua anting.

## 1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah penulis paparkan sebelumnya, maka rumusan masalah yang akan dibahas pada tugas akhir ini adalah:

1. Apakah graf sikel dengan tambahan dua anting ( $C_p + 2A_1$ ) dengan  $p \geq 3$  dan  $d = 1$  memenuhi pelabelan total tak ajaib titik? Serta bagaimana bentuk barisan, yaitu suku pertama dan beda dari pelabelan total tak ajaib titik pada graf sikel dengan tambahan dua anting ( $C_p + 2A_1$ ) dengan  $p \geq 3$ ?
2. Apakah graf sikel dengan tambahan dua anting ( $C_p + 2A_1$ ) dengan  $p \geq 3$  dan  $p$  ganjil serta  $d = 2$  memenuhi pelabelan total tak ajaib titik? Jika iya,



bagaimana bentuk barisan, yaitu suku pertama dan beda dari pelabelan total tak ajaib titik pada graf sikel dengan tambahan dua anting ( $C_p + 2A_1$ ) dengan  $p \geq 3$  dan  $p$  ganjil?

### 1.3 Tujuan dan Manfaat Penelitian

Tujuan penelitian ini adalah:

1. Mengetahui pelabelan pada graf sikel dengan tambahan dua anting ( $C_p + 2A_1$ ) dengan  $p \geq 3$  dan  $d = 1$  yang memenuhi pelabelan total tak ajaib titik serta bentuk barisan, yaitu suku pertama dan beda dari pelabelan total tak ajaib titik pada graf sikel dengan tambahan dua anting ( $C_p + 2A_2$ ) dengan  $p \geq 3$ .
2. Mengetahui pelabelan pada graf sikel dengan tambahan dua anting ( $C_p + 2A_2$ ) dengan  $p \geq 3$  dan  $p$  ganjil serta  $d = 2$  yang memenuhi pelabelan total tak ajaib titik dan bentuk barisan, yaitu suku pertama dan beda dari pelabelan total tak ajaib titik pada graf sikel dengan tambahan dua anting ( $C_p + 2A_1$ ) dengan  $p \geq 3$  dan  $p$  ganjil.

Manfaat dari penelitian ini adalah :

1. Menambah jenis graf baru yang memenuhi pelabelan total tak ajaib titik pada graf sikel dengan tambahan dua anting ( $C_p + 2A_1$ ).
2. Menambah pengetahuan tentang pelabelan total tak ajaib titik pada graf sikel dengan tambahan dua anting ( $C_p + 2A_1$ ).

#### 1.4 Batasan Masalah

Materi yang digunakan pada skripsi ini adalah graf terbatas, sederhana dan tidak berarah. Untuk  $VATL$  pada graf sikel dengan tambahan dua anting ( $C_p + 2A_1$ ) dengan  $d = 1$  berlaku untuk  $p \geq 3$ . Sedangkan untuk  $VATL$  pada graf sikel dengan tambahan dua anting ( $C_p + 2A_1$ ) dengan  $d = 2$  hanya berlaku untuk  $p \geq 3$  dan  $p$  ganjil.

#### 1.5 Metodologi Penelitian

Penelitian ini adalah penelitian pustaka (*Library Research*). Penelitian ini dilakukan dengan beberapa langkah pengerjaan yang menjadi pedoman untuk mencapai tujuan penelitian.

1. Langkah pertama kali adalah melakukan kajian terhadap buku-buku teori graf dan jurnal atau makalah yang topik tentang pelabelan pada graf dan sifat  $VATL$  pada graf sikel ( $C_p$ ).
2. Langkah kedua adalah membangun graf sikel tak ajaib titik baru dari graf sikel yaitu graf sikel dengan tambahan dua anting. Langkah ini dilakukan dengan meneliti keberlakuan  $VATL$  pada graf sikel, mulai dari  $C_3$ ,  $C_5$ ,  $C_7$ , sampai dengan  $C_p$ .
3. Langkah ketiga adalah menentukan suku pertama dan beda dari  $(a, d)$   $VATL$  yang berlaku pada graf sikel dengan tambahan dua anting.

- Langkah keempat adalah menentukan rumusan untuk titik dan sisi dari graf sikel dengan tambahan dua anting yang memenuhi sifat *VATL*.

## 1.6 Sistematika Penulisan

Untuk mempermudah penulis dalam membaca dan mengkaji, maka sistematika penulisan dibagi menjadi lima bagian, yaitu:

### BAB I : PENDAHULUAN

Pada bab ini dijelaskan tentang latar belakang, rumusan masalah, tujuan dan manfaat penulisan, metode penelitian, kerangka berpikir dan sistematika penulisan.

### BAB II : KAJIAN PUSTAKA

Pada bab ini dijelaskan tentang dasar graf, beberapa istilah dalam graf, dan jenis-jenis graf.

### BAB III : PELABELAN

Pada bab ini dijelaskan tentang pelabelan dasar graf, pelabelan graf dengan tambahan satu anting dan graf sikel dengan tambahan dua anting.

### BAB IV : PEMBAHASAN

Pada bab ini dijelaskan mengenai pembahasan tentang pelabelan total tak ajaib titik pada graf sikel dengan tambahan dua anting ( $C_p + 2A_1$ ), perhitungan dasar untuk menentukan batasan  $a$  dan  $d$  dari suatu graf sikel dengan tambahan dua anting ( $C_p + 2A_1$ ), serta untuk  $d = 1$  dan  $d = 2$ .

## BAB V : PENUTUP

Pada bab ini dijelaskan tentang kesimpulan dari pembahasan yang telah diuraikan pada bab sebelumnya dan saran-saran yang berkaitan dengan pembahasan.



## BAB II

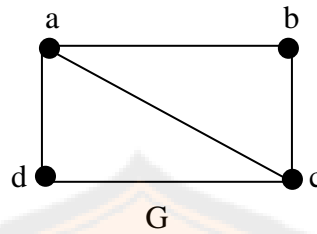
### LANDASAN TEORI

Dalam mempelajari teori graf terdapat beberapa teori dasar untuk mendukung pembuktian dan mempermudah pemahaman. Beberapa teori dasar meliputi pengertian graf, beberapa istilah dalam graf, dan jenis-jenis graf. Berikut ini disajikan pengertian graf, beberapa istilah pada graf dan jenis-jenis graf:

#### 2.1 Pengertian Graf

Graf  $G$  didefinisikan sebagai pasangan himpunan  $(V, E)$ , yang dalam hal ini  $V$  adalah himpunan berhingga dan tidak kosong dari simpul – simpul (*vertices* atau *node*), dapat ditulis dengan  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  dan  $E$  adalah himpunan sisi (*edges*) yang menghubungkan sepasang simpul, dapat ditulis dengan  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  atau dapat ditulis singkat dengan notasi  $G = (V, E)$  (Munir, 2001).

Simpul graf dapat dinomori dengan huruf, seperti  $v, w, \dots$ , dengan bilangan asli  $1, 2, 3, \dots$  atau gabungan keduanya. Sedangkan sisi yang menghubungkan simpul  $v_i$  dengan simpul  $v_j$  dinyatakan dengan pasangan  $(v_i, v_j)$  atau dengan lambang  $e_1, e_2, \dots$ . Dengan kata lain, jika  $e$  adalah sisi yang menghubungkan simpul  $v_i$  dengan simpul  $v_j$ , maka  $e$  dapat ditulis sebagai  $e = (v_i, v_j)$ .



Gambar 2.1 Graf G

Gambar 2.1 merupakan contoh Graf G yang mempunyai 4 titik dan 5 sisi.

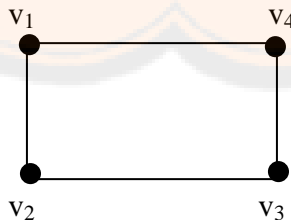
**2.2 Isitilah- Istilah Graf**

Dalam mempelajari tentang graf terdapat beberapa istilah yang berkaitan dengan graf. Berikut ini didefinisikan beberapa istilah pada graf:

Diberikan definisi tentang *adjacent*, *incident*, *derajat* dan gelang (*loop*), serta sisi ganda.

**Definisi 2.1 (Munir, 2001)**

Dua buah simpul dikatakan berdekatan (*adjacent*) bila keduanya terhubung secara langsung. Dapat ditulis dengan notasi  $e = (v_i, v_j) \in E(G)$  dimana  $v_i \neq v_j$

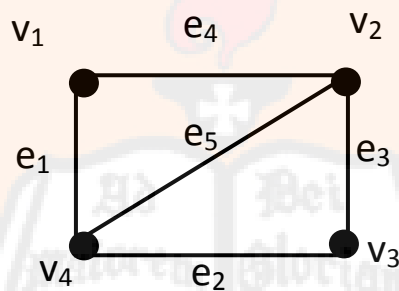


Gambar 2.2 Graf G<sub>1</sub>

Pada Gambar 2.2, titik  $v_1$  dan  $v_2$  berdampingan (*adjacent*). Selain itu, titik  $v_1$  dan  $v_3$  bukan titik yang berdampingan karena tidak ada sisi yang menghubungkan keduanya.

**Definisi 2.2 (Munir, 2001)**

Untuk sembarang sisi  $e = (v_i, v_j)$  dikatakan  $e$  bersisian (*incident*) dengan titik  $v_i$  dan  $e$  bersisian dengan titik  $v_j$ .

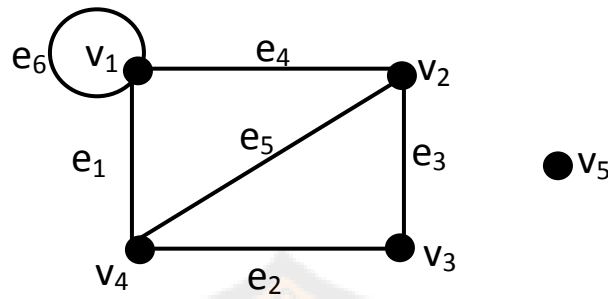


**Gambar 2.3 Graf  $G_2$**

Pada Gambar 2.3 Graf  $G_2$  sisi  $e_5$  bersisian (*incident*) dengan titik  $v_2$  dan  $v_4$ . Sedangkan  $e_2$  tidak bersisian dengan  $v_2$ .

**Definisi 2.3 (Munir, 2001)**

Derajat (*degree*) adalah jumlah sisi yang bersisian dengan titik tersebut dan dapat dituliskan dengan notasi  $d(v)$ . Titik dengan derajat nol disebut titik terisolasi (*isolated vertex*), sedangkan titik dengan derajat dua disebut gelang (*loop*).

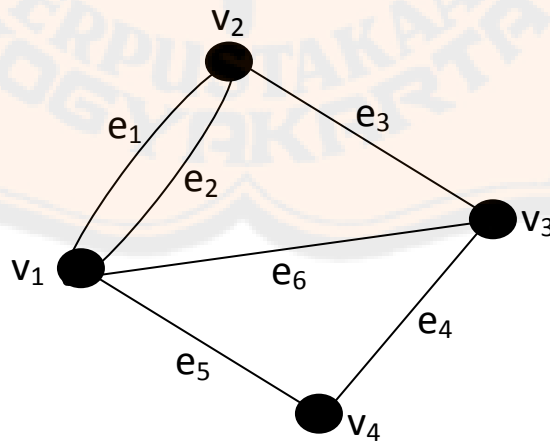


Gambar 2.4 Graf  $G_3$

Pada Gambar 2.4, derajat (*degree*) titik  $v_2$  adalah tiga, karena ada tiga sisi yang bersisian dengan titik  $v_2$ . Sedangkan derajat  $v_3$  adalah dua. Untuk titik  $v_5$ , derajatnya adalah nol sehingga disebut titik terisolasi (*isolated vertex*). Sisi  $e_6$  disebut sebagai gelang (*loop*) karena titik-titik di ujung-ujungnya adalah sama yaitu  $v_1$ .

**Definisi 2.4 (Munir, 2001)**

Misal terdapat beberapa sisi berbeda pada graf yang menghubungkan pasangan titik yang sama, maka graf yang demikian dapat dikatakan mempunyai sisi ganda (*multiple edge*).



Gambar 2.5 Graf  $G_4$



Pada Gambar 2.5 Graf  $G_4$ , graf  $G_4$  memuat sisi ganda yaitu sisi  $e_1$  dan  $e_2$  karena menghubungkan dua titik yang sama yaitu  $v_1$  dan  $v_2$ .

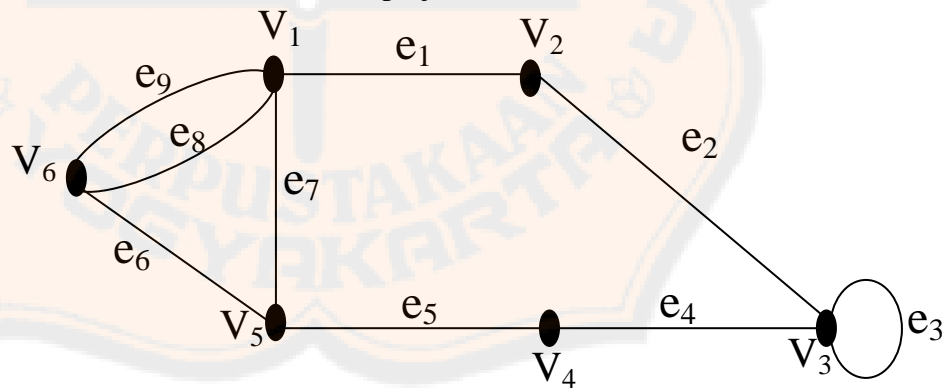
Berikut diberikan Definisi tentang *walk*, *trail*, dan *path*.

**Definisi 2.5 ( West, D., 2001)**

Suatu *walk* pada graf  $G$  adalah suatu urutan yang terdiri atas titik-titik dan sisi-sisi bergantian, dimana setiap sisi insiden dengan titik terdekat, dengan diawali dan diakhiri pada suatu titik.

Suatu *walk* yang setiap sisinya berbeda maka *walk* itu disebut *trail*. Suatu *trail* yang setiap titiknya berbeda disebut lintasan (*path*). Panjang lintasan adalah banyak sisi dalam lintasan tersebut.

Dibawah ini diberikan contoh untuk memperjelas Definisi 2.5



**Gambar 2.6 Graf  $G_5$**

Pada graf  $G_5$  terdapat :

*Walk* :  $v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_3, v_3, e_4, v_4$ .

*Trail* :  $v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_3, v_3, e_4, v_4$ .

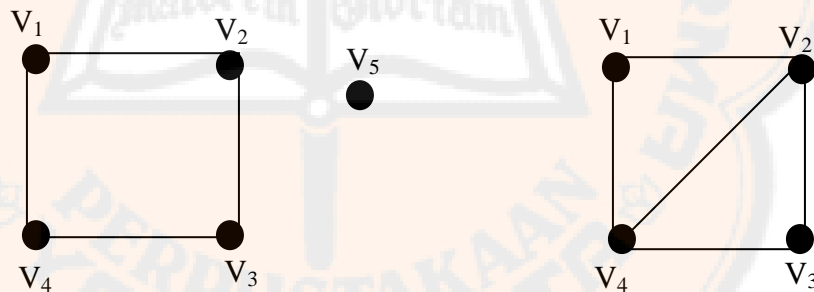
*Path* :  $v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_4, v_4$ .

Berikut diberikan Definisi tentang graf terhubung (*connected graph*) dan graf tak terhubung (*disconnected graph*).

**Definisi 2.6 (Munir, 2001)**

Suatu graf  $G$  disebut graf terhubung, jika untuk setiap pasang titik  $v_i$  dan titik  $v_j$  dalam himpunan  $V$  terdapat lintasan dari  $v_i$  ke  $v_j$  ( yang juga harus berarti ada lintasan dari  $v_j$  dan  $v_i$  ). Jika tidak, maka graf  $G$  disebut graf tak terhubung.

Di bawah ini diberikan contoh untuk memperjelas Definisi 2.6



**Gambar 2.7 Graf G<sub>6</sub> dan G<sub>7</sub>**

Graf  $G_6$  pada gambar diatas merupakan graf tak terhubung karena tidak terdapat sisi yang menghubungkan titik  $v_5$  dengan titik  $v_1, v_2, v_3, v_4$ , sedangkan graf  $G_7$  merupakan graf terhubung karena setiap titik terhubung oleh suatu sisi.

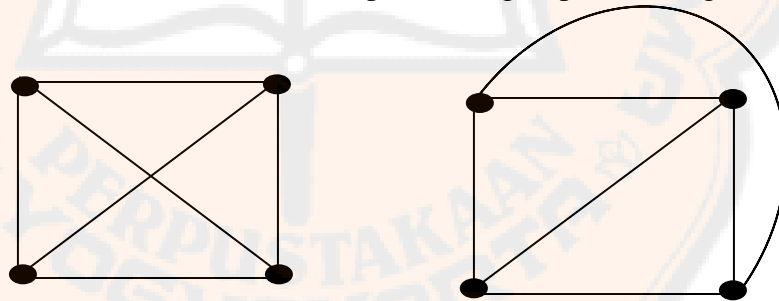
### 2.3 Jenis – jenis Graph

Berdasarkan sifatnya graf dapat dikelompokkan menjadi beberapa jenis bergantung pada sudut pandang pengelompokannya. Pengelompokan graf dapat dipandang berdasarkan ada tidaknya sisi ganda, berdasarkan banyak titik, atau berdasarkan orientasi arah pada sisi.

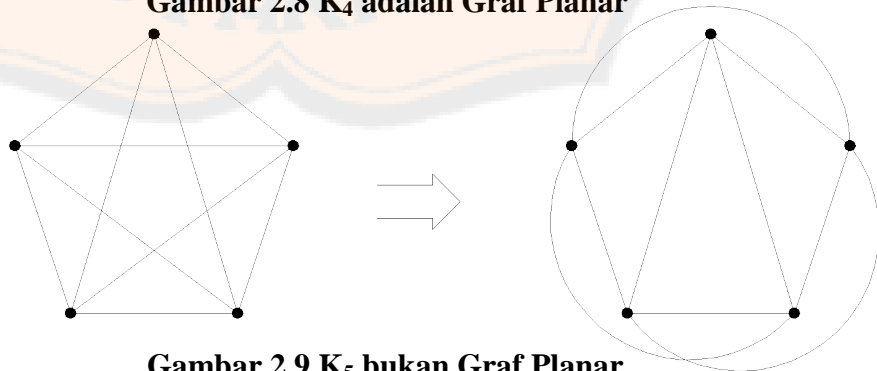
#### 2.3.1 Graf Planar ( *Planar Graph* ) dan Graf Bidang ( *Plane Graph* )

Graf planar adalah suatu graf yang digambar dalam bidang datar dengan sisi – sisinya tidak ada yang saling memotong. Jika tidak, ia disebut graf tak-planar. Semua graf sikel merupakan graf planar dan graf lengkap  $K_1, K_2, K_3, K_4$  merupakan graf planar. Tetapi graf lengkap  $K_n$  untuk  $n \geq 5$  merupakan graf tak-planar (Munir, 2001).

Di bawah ini diberikan beberapa contoh graf planar dan graf bidang.



Gambar 2.8  $K_4$  adalah Graf Planar



Gambar 2.9  $K_5$  bukan Graf Planar

Pada gambar 2.9  $K_5$  bukan graf planar karena terdapat sisi yang berpotongan pada titik yang tidak bersisian.

2.3.2 Berdasarkan ada tidaknya gelang atau sisi ganda pada suatu graf,

maka graf dikelompokkan menjadi dua jenis (Munir, 2001), yaitu:

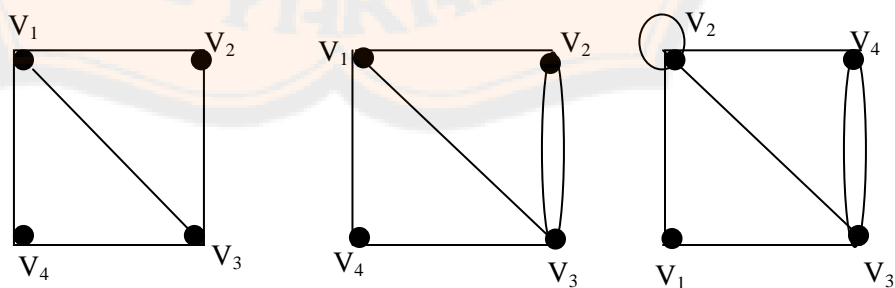
1. Graf sederhana (*simple graph*)

Graf sederhana adalah graf yang tidak mengandung gelang maupun sisi-ganda.

2. Graf tak-sederhana (*unsimple graph*)

Graf tak-sederhana adalah graf yang mengandung sisi ganda atau gelang. Ada dua macam graf tak-sederhana, yaitu graf ganda (*multigraph*) dan graf semu (*pseudograph*). Graf ganda adalah graf yang mengandung sisi ganda. Graf semu adalah graf yang mengandung sisi ganda dan gelang.

Di bawah ini diberikan contoh untuk graf sederhana dan graf tak sederhana.



Gambar 2.10 Graf  $G_8$ ,  $G_9$ , dan  $G_{10}$

Graf  $G_8$  pada Gambar 2.10 merupakan graf sederhana,

Graf  $G_9$  pada Gambar 2.10 merupakan graf ganda,

Graf  $G_{10}$  pada Gambar 2.10 merupakan graf semu.

2.3.3 Berdasarkan banyak titik pada suatu graf, maka secara umum graf dapat dikelompokkan menjadi dua jenis (Munir, 2001 ), yaitu :

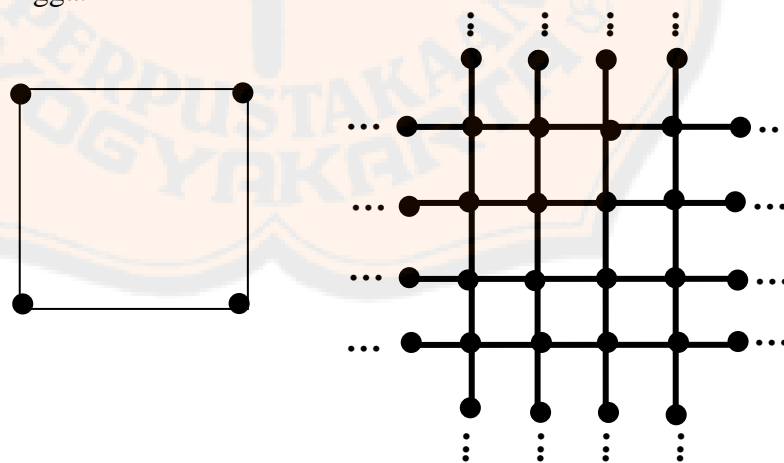
1. Graf berhingga (*finite graph*)

Graf berhingga adalah graf yang banyak titik/*vertex*nya  $n$  berhingga.

2. Graf tak-berhingga (*unfinite graph*)

Graf tak-berhingga adalah graf yang banyak titik/*vertex*nya tidak berhingga.

Dibawah ini diberikan contoh untuk graf berhingga dan graf tak-berhingga.



Gambar 2.11 Graf  $G_{11}$  dan  $G_{12}$

Graf  $G_{11}$  pada Gambar 2.11 merupakan graf berhingga,

Graf  $G_{12}$  pada Gambar 2.11 merupakan graf tak berhingga.

2.3.4 Berdasarkan orientasi arah pada sisi, maka secara umum graf dikelompokkan menjadi dua jenis (Munir, 2001), yaitu :

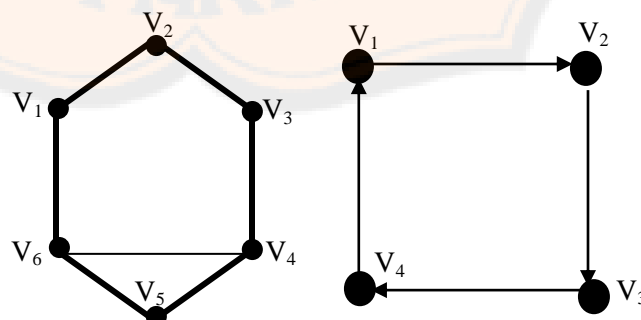
1. Graf berarah (*directed graph*)

Graf berarah adalah graf yang setiap sisinya diberikan orientasi arah. Pada graf berarah  $(v_j, v_k)$  dan  $(v_k, v_j)$  menyatakan dua sisi yang berbeda, dengan kata lain  $(v_j, v_k) \neq (v_k, v_j)$ . Untuk sisi  $(v_j, v_k)$  titik  $v_j$  dinamakan titik asal (*initial vertex*) dan titik  $v_k$  dinamakan titik terminal (*terminal vertex*).

2. Graf tak-berarah (*undirected graph*)

Graf tak-berarah adalah graf yang sisinya tidak mempunyai orientasi arah. Pada graf tak berarah, urutan pasangan titik yang dihubungkan oleh sisi tidak diperhatikan. Jadi  $(v_j, v_k) = (v_k, v_j)$  adalah sisi yang sama.

Dibawah ini diberikan contoh untuk graf berarah dan graf tak berarah.



Gambar 2.12 Graf  $G_{13}$  dan  $G_{14}$

Graf  $G_{13}$  pada gambar 2.12 merupakan graf tak berarah,

Graf  $G_{14}$  pada gambar 2.12 merupakan graf berarah.

2.3.5 Terdapat beberapa jenis graf sederhana secara khusus. Berikut ini didefinisikan beberapa graf khusus (Munir, 2001) :

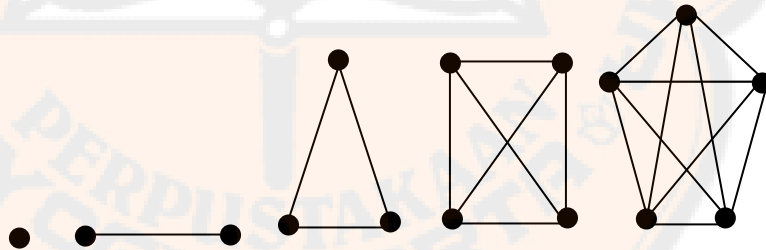
1. Graf lengkap (*complete graph*)

Graf lengkap merupakan graf sederhana dimana setiap titik yang berdekatan dihubungkan dengan tepat satu sisi ke semua titik lainnya. Graf lengkap dengan  $n$  buah titik dilambangkan dengan  $K_n$ .

Banyak sisi pada sebuah graf lengkap yang terdiri dari  $n - 1$  buah titik

adalah  $\frac{1}{2}n(n - 1)$  sisi.

Dibawah ini diberikan beberapa contoh graf lengkap.



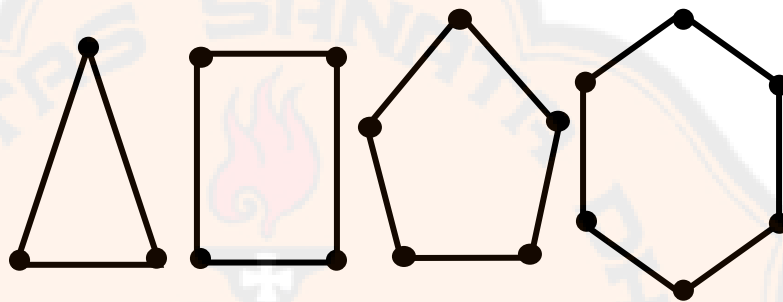
**Gambar 2.13 Graf Lengkap**

Pada gambar 2.13 diatas gambar graf berturut - turut dari kiri adalah graf lengkap dengan  $n = 1, 2, 3, 4, 5,$  dan  $6$ . Dituliskan  $K_1, K_2, K_3, K_4,$  dan  $K_5$ .

## 2. Graf Sikel (*Cycle Graph*)

Graf *cycle* merupakan graf sederhana yang berawal dan berakhir pada vertex yang sama. Graf sikel dengan  $p$  titik dilambangkan dengan  $C_p$ .

Dibawah ini diberikan beberapa contoh graf sikel.



**Gambar 2.14 Graf Sikel**

Pada Gambar 2.14 berturut-turut dari kiri adalah graf sikel dengan  $p = 3, 4, 5$ , dan  $6$ , dituliskan  $C_3$ ,  $C_4$ ,  $C_5$ , dan  $C_6$ .

## 3. Antingan

Antingan pada graf sikel merupakan satu titik yang ditambahkan diluar graf dan adjacent dengan satu titik pada graf sikel tersebut.

## 2.4 Kerangka Berpikir

Sejauh ini sudah mempelajari beberapa teori dan deinisi yang berkaitan dengan graf, pelabelan graf baru yang dibuat oleh peneliti berdasarkan apa yang telah dipelajari dan akan diselidiki apakah graf baru yang telah dibuat memenuhi



sifat  $(a,d)$  VATL dan bagaimana bentuk barisan yaitu suku pertama dan beda dari

$(a , d)$  VATL.



## BAB III

### PELABELAN

#### 3.1 Pelabelan Graf ( *Graph labeling* )

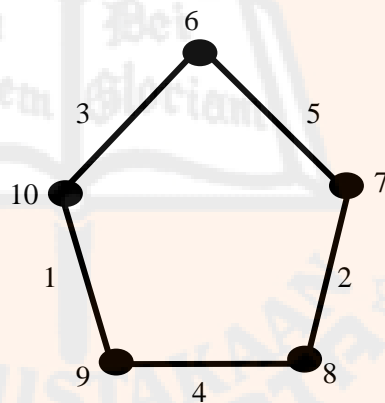
Pelabelan graf adalah pemetaan bijektif yang memetakan semua elemen dari graf tersebut ke dalam suatu himpunan bilangan bulat positif. Terdapat beberapa macam pelabelan graf, yakni pelabelan sisi, pelabelan titik, dan pelabelan total. Pelabelan sisi adalah pelabelan yang domainnya himpunan sisi. Pelabelan titik adalah pelabelan yang domainnya himpunan dari titik. Pelabelan total adalah pelabelan yang domainnya titik dan sisi.

Dalam pelabelan graf terdapat bobot yang akan dihitung. Bobot adalah jumlahan dari label-label pada setiap elemen graf. Dalam pelabelan graf terdapat dua jenis pelabelan menurut jumlah dari setiap bobotnya yaitu pelabelan ajaib ( *magic labeling* ) dan pelabelan tak ajaib ( *antimagic labeling* ). Pelabelan ajaib adalah suatu pelabelan yang jumlah setiap bobotnya sama. Pelabelan tak ajaib adalah suatu pelabelan yang jumlah setiap bobotnya berbeda. Dalam penelitian ini digunakan pelabelan total tak ajaib titik dalam pengkajian masalah yaitu pelabelan pada graf sikel khususnya pada graf sikel dengan tambahan dua anting.

Berikut ini diberikan beberapa definisi tentang pelabelan.

**Definisi 3.1 (Wallis, 2001)**

*Vertex magic total labeling (VMTL)* dari  $(p, q)$  graf  $G$  adalah pemetaan bijektif  $f : V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, p + q\}$  sedemikian sehingga untuk setiap  $u \in V(G)$  berlaku  $f(u) + \sum f(uv) = h$  untuk semua  $v \in V(G)$  yang berdekatan dengan  $u$ . Bilangan  $h$  disebut konstanta ajaib. Graf yang memenuhi pelabelan total ajaib titik (*vertex magic total labeling*) disebut graf total ajaib titik (*vertex magic total graph*).



**Gambar 3.1 VMTL pada  $C_5$  dengan  $h = 14$**

Gambar 3.1 merupakan contoh *VMTL* pada  $C_5$ . Bobot setiap titik adalah sama, yaitu 14. Bobot  $v_1$  adalah  $9 + 1 + 4 = 14$ , Bobot  $v_2$  adalah  $8 + 4 + 2 = 14$ , Bobot  $v_3$  adalah  $7 + 2 + 5 = 14$ , Bobot  $v_4$  adalah  $6 + 5 + 3 = 14$ , bobot  $v_5$  adalah  $10 + 3 + 1 = 14$ . Jadi contoh pelabelan pada gambar diatas disebut *VMTL* pada  $C_5$  dengan  $h = 14$ .

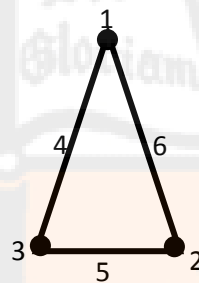
**Definisi 3.2 (Baca, dkk., 2003)**

Suatu pemetaan bijektif  $f : V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1,2,3, \dots, p + q\}$  disebut pelabelan total tak ajaib titik dari  $(p, q)$ -graf  $G$  jika bobot dari titik  $w_f(u) = f(u) + \sum f(uv)$ , untuk setiap  $u \in V(G)$  dan  $v \in V(G)$  yang berdekatan dengan  $u$  berbeda.

**Definisi 3.3 (Baca, dkk., 2003)**

Suatu pemetaan bijektif  $f : V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1,2,3, \dots, p + q\}$  disebut  $(a, d)$  VATL dari  $(p, q)$ -graf  $G$  jika bobot dari titik-titiknya membentuk suatu barisan aritmatika naik dengan suku pertama  $a$  dan  $d$ .

$$W = \{ w_f(u) \mid u \in V \} = \{ a, a + d, a + 2d, \dots, a + (p - 1)d \}$$



**Gambar 3.2 (11,1) VATL pada  $C_3$**

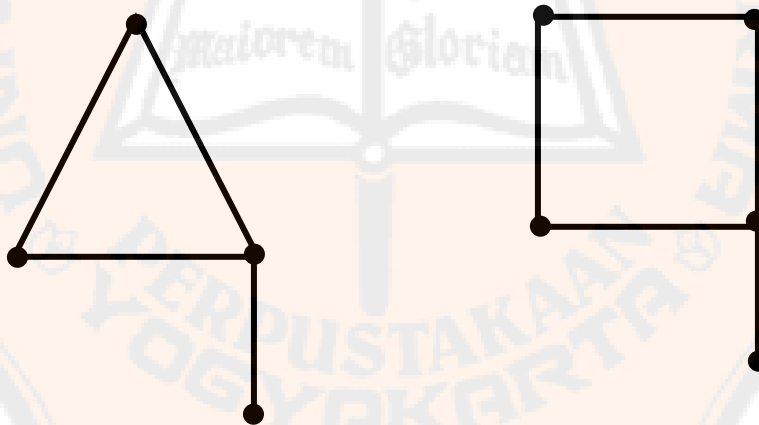
Gambar 3.2 merupakan contoh pelabelan VATL pada  $C_3$  yang sesuai dengan definisi 3.3. setiap titik dan sisi diberi label dengan bilangan bulat positif  $\{1,2,3, \dots, p + q\}$  dengan  $p$  dan  $q$  berturut-turut merupakan jumlah titik dan jumlah sisi. Pada gambar 3.2 bobot terkecil titiknya adalah  $4 + 1 + 6 = 11$  yaitu bobot pada titik dengan label 1. Bobot dari dua titik yang lain adalah  $4 + 3 + 5 = 12$  yaitu bobot pada titik dengan label 3 dan  $6 + 2 + 5 = 13$  yaitu bobot pada titik dengan

label 2, sehingga membentuk barisan aritmatika naik 11,12,13. Karena bobot terkecil adalah 11 dan beda dari bobot titik yang lain adalah 1, maka contoh pada gambar 2.16 disebut (11,1) VATL pada  $C_3$ .

### 3.2 Graf Sikel (Cycle Graph) dengan Tambahan Satu Anting

Graf sikel dengan tambahan satu anting merupakan perkembangan graf sikel  $C_p$  yang ditambahkan satu titik diluar  $C_p$  dan satu titik tersebut adjacent dengan satu titik pada graf sikel.

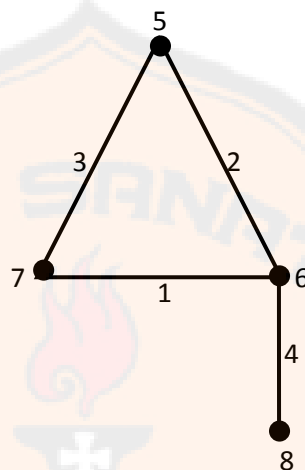
Berikut diberikan beberapa contoh graf sikel dengan tambahan satu anting ( $C_p + A_1$ ).



**Gambar 3.3 Graf Sikel dengan Tambahan Satu Anting**

Gambar 3.3 merupakan gambar graf sikel dengan tambahan satu anting  $C_3 + A_1, C_4 + A_1$ .

Di bawah ini merupakan contoh pelabelan graf sikel dengan tambahan satu anting  $(10, 1)$  dengan  $p = 3$  (Septian, 2011).



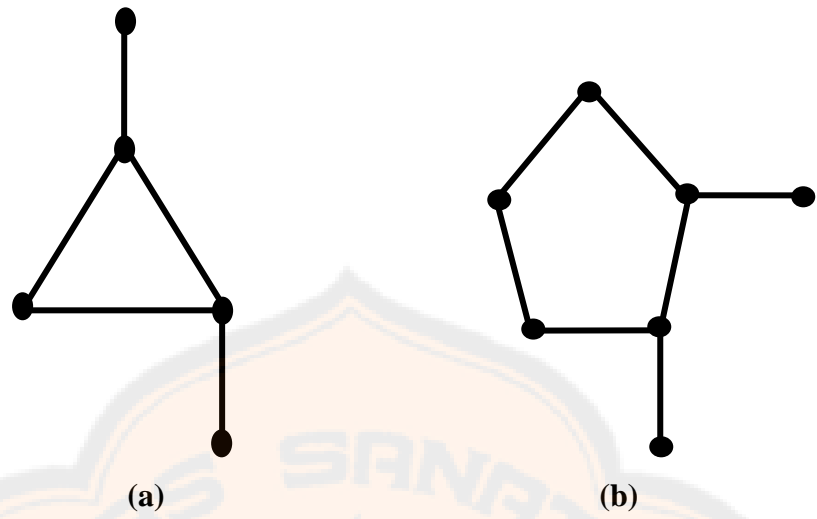
**Gambar 3.4 (10,1) VATL pada  $C_3 + A_1$**

Pada gambar 2.18 bobot vertexnya adalah  $w_f(v_1) = 5 + 2 + 3 = 10$ ,  $w_f(v_3) = 7 + 3 + 1 = 11$ ,  $w_f(v_4) = 8 + 4 = 12$ ,  $w_f(v_2) = 6 + 1 + 4 + 2 = 13$ .

### 3.3 Graf Sikel (*Cycle graph*) dengan Tambahan Dua Anting

Graf sikel dengan tambahan dua anting merupakan perkembangan dari graf sikel  $C_p$  yang ditambahkan dua titik di luar  $C_p$  dan dua titik tersebut adjacent dengan dua atau satu titik pada graf sikel.

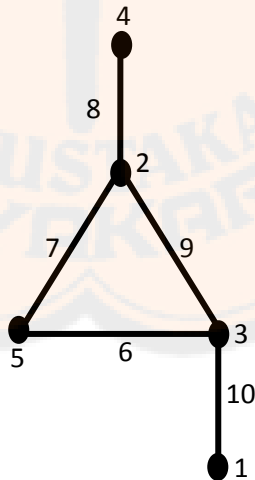
Graf sikel dengan tambahan dua anting dilambangkan dengan  $C_p + 2A_1$ . Banyaknya titik dan sisi yang terdapat pada graf sikel dengan tambahan dua anting  $2p + 4$ .



**Gambar 3.5 Graf Sikel dengan Tambahan Dua Anting**

Gambar 3.5 merupakan gambar graf sikel dengan tambahan dua anting (a)  $C_3 + 2A_1$  dan (b)  $C_4 + 2A_1$ .

Di bawah ini merupakan contoh Pelabelan Total Ajaib Sisi Kuat pada Graf Sikel dengan Tambahan Dua Anting untuk  $p = 3$  dan  $k = 14$  (Benny, 2012).



**Gambar 3.6 Contoh Pelabelan Total Ajaib Sisi Kuat pada Graf Sikel dengan Tambahan Dua Anting ( $C_3 + 2A_1$ ).**

### 3.4 Perhitungan Dasar Tentang Pelabelan Total Tak Ajaib Titik

Pelabelan total tak ajaib titik merupakan pemetaan bijektif setiap titik dan sisi ke bilangan bulat positif mulai dari satu sampai dengan jumlah total titik dan sisi  $f: V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, p+q\}$  dimana  $p$  adalah jumlah titik dan  $q$  adalah jumlah sisi (Baca, dkk., 2003).

Pada pelabelan total tak ajaib titik setiap label dihitung satu kali dan label sisi dihitung dua kali akibatnya:

$$S_w = S_v + 2 S_e$$

Dimana  $S_w$  adalah jumlah semua bobot titik,  $S_v$  adalah jumlah semua label titik, dan  $S_e$  adalah jumlah semua label sisi (Baca, dkk., 2003).

Bobot setiap titik dihitung dengan cara menjumlahkan label dari titik tersebut dengan label pada semua sisi yang bersisian dengan titik tersebut. Bobot dari setiap titik dilambangkan dengan  $w_f(v_i)$ .



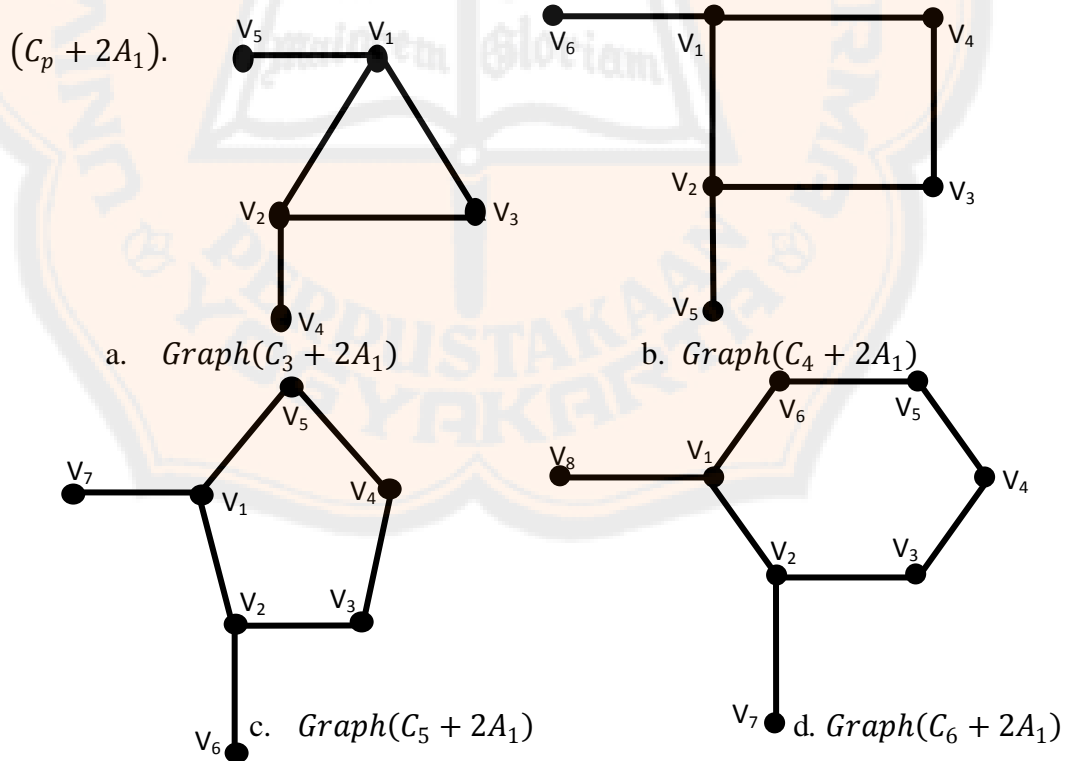
BAB IV

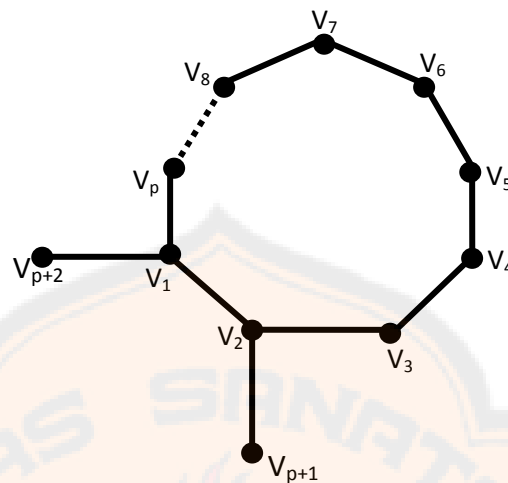
HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN

6.1 Pelabelan Total Tak Ajaib Titik pada Graf Sikel dengan Tambahan Dua Anting ( $C_p + 2A_1$ )

Graf sikel dengan tambahan dua anting merupakan perkembangan dari graf sikel  $C_p$  yang ditambahkan dua titik di luar  $C_p$  dan dua titik tersebut adjacent dengan dua atau satu titik pada graf sikel.

Berikut ini beberapa contoh graf sikel dengan tambahan dua anting





e.  $Graph(C_p + 2A_1)$

**Gambar 4.1 Graf Sikel dengan tambahan dua anting ( $C_p + 2A_1$ )**

Pada graf sikel dengan tambahan dua anting ( $C_p + 2A_1$ ) dapat dilihat pada Gambar 4.1, setiap sikel terdapat  $p$  buah titik dan  $p$  buah sisi dan dua buah titik di luar sikel yang dihubungkan langsung dengan dua buah sisi ke graf tersebut. Dalam hal ini, titik dan sisi yang menjadi anting terakhir atau kedua pada graf sikel adalah titik ke  $p + 2$  dan sisi ke  $p + 2$  sehingga jumlah total dari titik dan sisi pada graf sikel dengan tambahan dua anting ( $C_p + 2A_1$ ) adalah  $2p + 4$ .

Pada pelabelan total tak ajaib titik setiap label titik dihitung satu kali dan label sisi dihitung dua kali akibatnya:

$$S_w = S_v + 2 S_e$$

$$a + (a + d) + (a + 2d) + \dots + (a + (p + 1)d) = S_v + S_e + S_e$$

$$a + (a + d) + \dots + (a + (p + 1)d) = 1 + 2 + \dots + (2p + 4) + S_e$$

$$(p + 2)a + (1 + 2 + \dots + (p + 1))d = 1 + 2 + \dots + (2p + 4) + S_e$$

$$(p + 2)a + \left(\frac{(p + 1)(p + 2)}{2}\right)d = (p + 2)(2p + 5) + S_e \dots \dots \dots (1)$$

Pelabelan dimulai dari angka 1 sampai dengan jumlah total titik dan sisi, maka bobot terkecil adalah 3, ambil label-labelnya 1 dan 2 atau  $a = 1 + 2 \geq 3$ . Label tersebut diambil dari jumlah label satu titik dan satu sisi yang bersisian dengan titik tersebut yaitu pada anting dari graf.

Bobot titik yang paling besar adalah

$$a + (p + 1)d \leq (2p + 4) + (2p + 3) + (2p + 2) + (2p + 1)$$

$$a + (p + 1)d \leq 8p + 10$$

untuk  $a = 3$ , diperoleh

$$3 + (p + 1)d \leq 8p + 10$$

$$(p + 1)d \leq 8p + 7$$

$$d \leq \frac{8p + 7}{p + 1} = 7, \dots \text{ dan } 7 < \frac{8p + 7}{p + 1} < 8$$

sehingga untuk sebarang  $p \geq 3p$  diperoleh  $a \geq 3$  dan  $d \leq 7$ .

Bobot titik yang paling besar adalah  $a + (p + 1)d \leq 8p + 10$

1. Untuk  $d = 1$

Dengan nilai  $d = 1$  diperoleh

$$a + (p + 1)d \leq 8p + 10$$

$$a + (p + 1)1 \leq 8p + 10$$

$$a \leq 8p - p + 10 - 1$$

$$a \leq 7p + 9$$

Jadi untuk  $d = 1$  batasan nilai  $a$  adalah  $3 \leq a \leq 7p + 9$

2. Untuk  $d = 2$

Dengan nilai  $d = 2$  diperoleh

$$a + (p + 1)d \leq 8p + 10$$

$$a + (p + 1)2 \leq 8p + 10$$

$$a \leq 8p - 2p + 10 - 2$$

$$a \leq 6p + 8$$

Jadi untuk  $d = 2$  batasan nilai  $a$  adalah  $3 \leq a \leq 6p + 8$

3. Untuk  $d = 3$

Dengan nilai  $d = 3$  diperoleh

$$a + (p + 1)d \leq 8p + 10$$

$$a + (p + 1)3 \leq 8p + 10$$

$$a \leq 8p - 3p + 10 - 3$$

$$a \leq 5p + 7$$

Jadi untuk  $d = 3$  batasan nilai  $a$  adalah  $3 \leq a \leq 5p + 7$

4. Untuk  $d = 4$

Dengan nilai  $d = 4$  diperoleh

$$a + (p + 1)d \leq 8p + 10$$

$$a + (p + 1)4 \leq 8p + 10$$

$$a \leq 8p - 4p + 10 - 4$$

$$a \leq 4p + 6$$

Jadi untuk  $d = 4$  batasan nilai  $a$  adalah  $3 \leq a \leq 4p + 6$

5. Untuk  $d = 5$

Dengan nilai  $d = 5$  diperoleh

$$a + (p + 1)d \leq 8p + 10$$

$$a + (p + 1)5 \leq 8p + 10$$

$$a \leq 8p - 5p + 10 - 5$$

$$a \leq 3p + 5$$

Jadi untuk  $d = 5$  batasan nilai  $a$  adalah  $3 \leq a \leq 3p + 5$

6. Untuk  $d = 6$

Dengan nilai  $d = 6$  diperoleh

$$a + (p + 1)d \leq 8p + 10$$

$$a + (p + 1)6 \leq 8p + 10$$

$$a \leq 8p - 6p + 10 - 6$$

$$a \leq 2p + 4$$

Jadi untuk  $d = 6$  batasan nilai  $a$  adalah  $3 \leq a \leq 2p + 4$

Apabila  $d = 6$  maka nilai  $a$  yang paling besar adalah 2, sedangkan  $a$  tidak boleh kurang dari 3. Jadi, untuk  $d = 6$  tidak memenuhi.

7. Untuk  $d = 7$

Dengan nilai  $d = 7$  diperoleh

$$a + (p + 1)d \leq 8p + 10$$

$$a + (p + 1)7 \leq 8p + 10$$

$$a \leq 8p - 7p + 10 - 7$$

$$a \leq p + 3$$

Jadi untuk  $d = 7$  batasan nilai  $a$  adalah  $3 \leq a \leq p + 3$

Apabila  $d = 7$  maka nilai  $a$  yang paling besar adalah 0, sedangkan  $a$  tidak boleh kurang dari 3. Jadi, untuk  $d = 7$  tidak memenuhi.

Label untuk sisi adalah himpunan bilangan positif  $\{1, 2, 3, \dots, p + 2\}$  dan label untuk titik adalah himpunan bilangan positif  $\{p + 2, p + 3, \dots, 2p + 4\}$ .

Karena pelabelan untuk sisi adalah himpunan bilangan positif  $\{1, 2, 3, \dots, p + 2\}$ , sehingga diperoleh:

$$S_e = 1 + 2 + 3 + \dots + (p + 2)$$

$$= \frac{(p + 2)(p + 3)}{2} \dots \dots \dots (2)$$

Substitusi persamaan (2) ke persamaan (1), sehingga diperoleh:

$$(p+2)a + \left(\frac{(p+1)(p+2)}{2}\right)d = (p+2)(2p+5) + S_e$$

$$(p+2)a + \left(\frac{(p+1)(p+2)}{2}\right)d = (p+2)(2p+5) + \frac{(p+2)(p+3)}{2}$$

$$(p+2)a + \left(\frac{(p+1)}{2}\right)d = (p+2) \left\{ \left( (2p+5) + \frac{(p+3)}{2} \right) \right\}$$

$$a + \left(\frac{(pd+d)}{2}\right) = (2p+5) + \frac{(p+3)}{2}$$

$$\frac{2a}{2} + \frac{pd+d}{2} = \frac{4p+10}{2} + \frac{p+3}{2}$$

$$2a + pd + d = 4p + 10 + p + 3$$

$$2a = 4p - pd - d + p + 13$$

$$a = \frac{p(5-d) - d + 13}{2}$$

$$\text{Jadi nilai } a = \frac{p(5-d) - d + 13}{2}$$

**6.1.1** Telah ditunjukkan pada penjabaran sebelumnya bahwa

$$a = \frac{p(5-d) - d + 13}{2}, \text{ sehingga untuk } d = 1, p \geq 3, \text{ maka :}$$

$$a = \frac{p(5-d) - d + 13}{2}$$

$$a = \frac{p(5-1)-1+13}{2}$$

$$a = \frac{4p+12}{2}$$

$$a = 2p + 6$$

Jadi pada graf sikel dengan dua anting terdapat  $(2p + 6, 1)$  *VATL* untuk  $p \geq 3$ .

Di atas telah dikatakan jika label untuk sisi adalah himpunan bilangan bulat positif  $\{1, 2, 3, \dots, p + 2\}$  dan label untuk titik adalah himpunan bilangan bulat positif  $\{p + 2, p + 3, \dots, 2p + 4\}$ . Ini berakibat nilai  $d$  yang memenuhi hanya 1, 2, 3, 4, dan 5 karena untuk  $p = 3$  dan  $d = 6$  dan  $d = 7$  maka nilai  $a$  yang paling besar adalah 2. Nilai  $a = 2$  tidak memenuhi, karena di atas telah dijelaskan bahwa nilai  $a$  yang memenuhi harus  $a \geq 3$ .

Untuk nilai  $d = 1$ ;

Konstruksi label titik graf sikel dengan tambahan dua anting sebagai berikut:

Untuk  $p = 3$

$$f(v_i) = 2p + (i - 1) \quad ; i = 1, 2, 3.$$

$$f(v_i) = 2p + 3 \quad ; i = p + 1$$



$$f(v_i) = 2p + 4 \quad ; i = p + 2$$

Untuk  $p = 4, 5, \dots$

$$f(v_i) = 2p + (i - 1) \quad ; i = 1, 2, 3.$$

$$f(v_i) = (2p - 1) + (i - p) \quad ; i = 4, 5, 6, \dots, p$$

$$f(v_i) = 2p + 3 \quad ; i = p + 1$$

$$f(v_i) = 2p + 4 \quad ; i = p + 2$$

Label sisi sebagai berikut:

Untuk  $p = 3$

$$f(e_{1,2}) = 2$$

$$f(e_{2,3}) = 1$$

$$f(e_{p,1}) = 3$$

Untuk  $p = 4, 5, \dots$

$$f(e_{i,i+1}) = p + \frac{7 - (2i + 1)}{2} \quad ; i = 3, 4, 5, \dots, p - 1$$

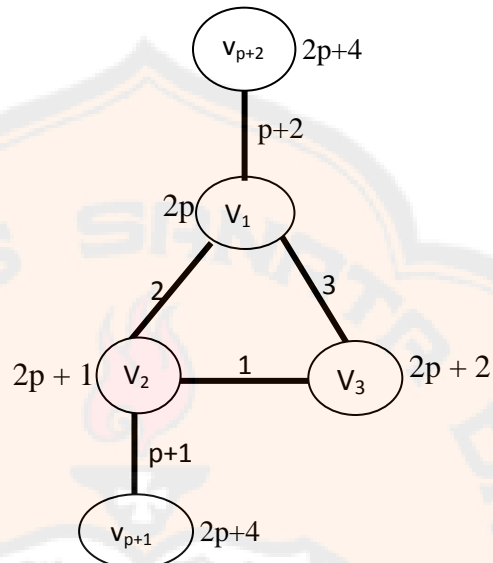
$$f(e_{p,1}) = 3$$

$$f(e_{2,p+1}) = p + 1$$

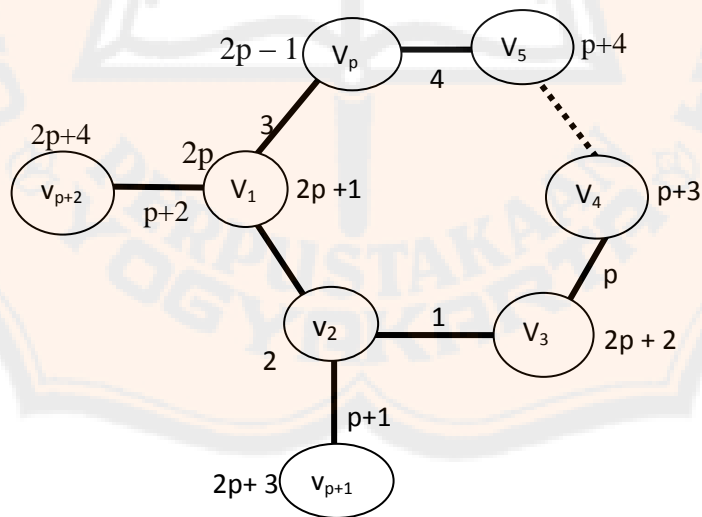
$$f(e_{1,p+2}) = p + 2$$

$$f(e_{1,2}) = 2$$

$$f(e_{2,3}) = 1$$



**Gambar 4.2 (a) Ilustrasi Konstruksi Pelabelan pada Graf Sikel dengan Tambahan Dua Anting untuk  $p=3$  dan  $d=1$**



**Gambar 4.2 (b) Ilustrasi Konstruksi Pelabelan pada Graf Sikel dengan Tambahan Dua Anting untuk  $d=1$**

Dari ilustrasi konstruksi pelabelan yang telah dipaparkan sebelumnya di dapat bobot dari setiap titik sebagai berikut :

$$w_f(v_1) = 2p + (p + 2) + 2 + 3 = 3p + 7$$

$$w_f(v_2) = 2 + (2p + 1) + (p + 1) + 1 = 3p + 5$$

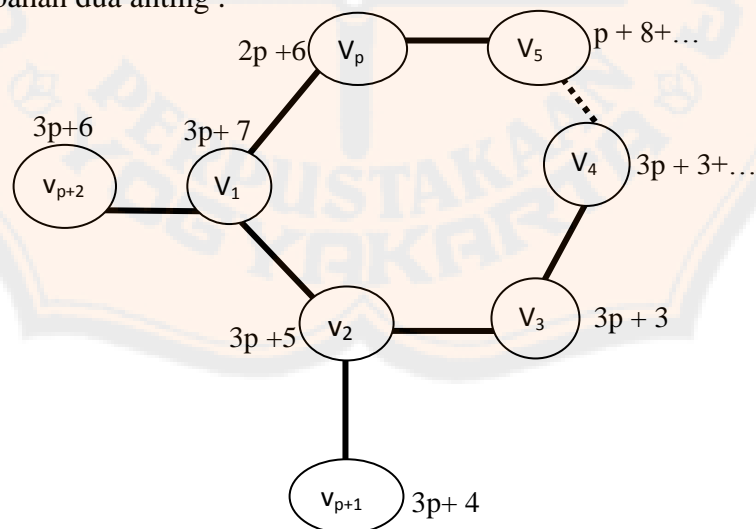
$$w_f(v_3) = 1 + (2p + 2) + p = 3p + 3$$

$$w_f(v_p) = 4 + (2p - 1) + 3 = 2p + 6$$

$$w_f(v_{p+1}) = (p - 1) + (2p - 1) = 3p + 4$$

$$w_f(v_{p+2}) = (p + 2) + (2p + 4) = 3p + 6$$

Berikut disajikan gambar ilustrasi untuk bobot pada graf sikel dengan tambahan dua anting :



**Gambar 4.2 (c) Ilustrasi Konstruksi Bobot pada Graf Sikel dengan Tambahan Dua Anting untuk d=1**

Dari gambar ilustrasi 4.2(c) didapat bentuk barisan aritmatika sebagai berikut:

$$(2p + 6), (2p + 7), \dots, (3p + 4), (3p + 6), (3p + 7)$$

Jumlah deret aritmatika pada gambar ilustrasi 4.2(c) adalah

$$S_w = (2p + 6) + (2p + 7) + \dots + (3p + 4) + (3p + 6) + (3p + 7)$$

$$S_w = \frac{p}{2}(2a + (p - 1)d)$$

$$S_w = \frac{(p + 2)}{2}((2(2p + 6)) + ((p + 2) - 1)1)$$

$$S_w = \frac{(p + 2)}{2}((4p + 12) + (p + 1))$$

$$S_w = \frac{(p + 2)}{2}((5p + 13))$$

Pada pelabelan total tak ajaib titik setiap label titik dihitung satu kali dan label sisi dihitung dua kali akibatnya:

$$S_w = S_v + 2 S_e$$

$$S_w = 1 + 2 + \dots + (2p + 4) + (1 + 2 + \dots + (p + 2))$$

$$S_w = ((p + 2)(2p + 5)) + \left(\frac{(p + 2)(p + 3)}{2}\right)$$

$$S_w = \left(\frac{2(p + 2)(2p + 5)}{2}\right) + \left(\frac{(p + 2)(p + 3)}{2}\right)$$

$$S_w = \left(\frac{p+2}{2}\right)((4p+10) + (p+3))$$

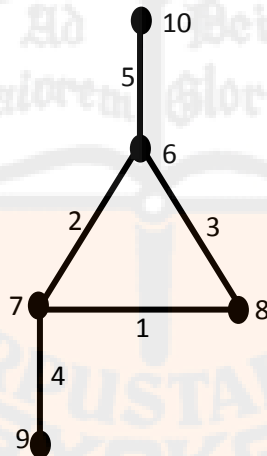
$$S_w = \left(\frac{p+2}{2}\right)((5p+13))$$

Karena jumlah bobot pada deret aritmatika dengan  $d = 1$  sama dengan jumlah bobot umum pada pelabelan total tak ajaib titik maka dapat dikatakan bahwa konstruksi pelabelan titik dan pelabelan sisi pada pernyataan sebelumnya berlaku untuk  $p \geq 3$ .

**Contoh 4.1:**

**Pelabelan graf sikel dengan tambahan dua anting untuk  $a = 12, p = 3$  dan**

**$d = 1$**



**Gambar 4.3 (12,1) VATL pada  $C_3 + 2A_1$**

Pelabelan titik:

Pelabelan sisi:

$$f(v_1) = 2(3) + (1-1) = 6$$

$$f(e_{1,2}) = 2$$

$$f(v_2) = 2(3) + (2-1) = 7$$

$$f(e_{2,3}) = 1$$

$$f(v_3) = 2(3) + (3 - 1) = 8$$

$$f(e_{3,1}) = 3$$

$$f(v_4) = 2(3) + 3 = 9$$

$$f(e_{1,5}) = 3 + 2 = 5$$

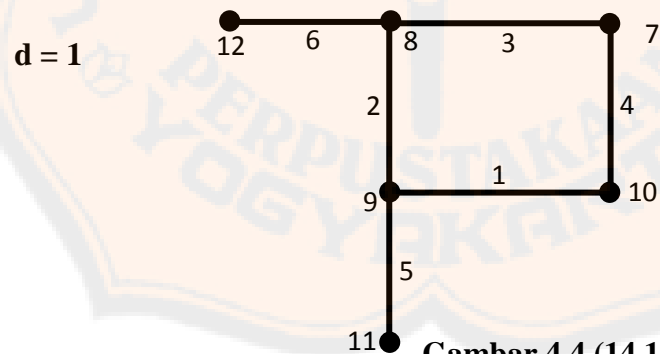
$$f(v_5) = 2(3) + 4 = 10$$

$$f(e_{2,4}) = 3 + 1 = 4$$

Dapat diketahui dari Gambar 4.3 bahwa bobot-bobot dari setiap titik adalah  $w_f(v_1) = 5 + 6 + 2 + 3 = 16$ ,  $w_f(v_2) = 1 + 2 + 7 + 4 = 14$ ,  $w_f(v_3) = 1 + 3 + 8 = 12$ ,  $w_f(v_4) = 9 + 4 = 13$ ,  $w_f(v_5) = 10 + 5 = 15$ , sehingga membentuk suatu barisan aritmatika naik 12, 13, 14, 15, 16. Dengan bobot terkecil dari titik adalah 12 dan beda dari setiap bobot titik adalah 1 sehingga dapat ditulis (12,1) VATL pada  $C_3 + 2A_1$ .

**Contoh 4.2:**

**Pelabelan graf sikel dengan tambahan dua anting untuk  $a = 14$ ,  $p = 4$  dan**



**Gambar 4.4 (14,1) VATL pada  $C_4 + 2A_1$**

Pelabelan titik :

Pelabelan sisi:

$$f(v_1) = 2(4) + (1 - 1) = 8$$

$$f(e_{1,2}) = 2$$

$$f(v_2) = 2(4) + (2 - 1) = 9$$

$$f(e_{2,3}) = 1$$

$$f(v_3) = 2(4) + (3 - 1) = 10$$

$$f(e_{3,4}) = 4 + \frac{7 - (2(3) + 1)}{2} = 4$$

$$f(v_4) = (2(4) - 1) + (4 - 4) = 7 \quad f(e_{4,1}) = 3$$

$$f(v_5) = 2(4) + 3 = 11$$

$$f(e_{1,6}) = 4 + 2 = 6$$

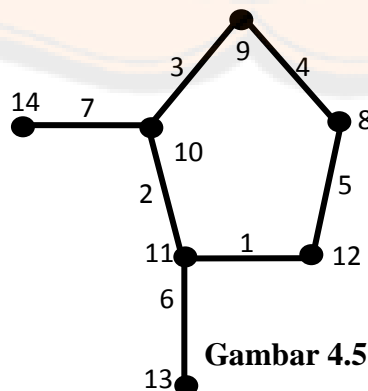
$$f(v_6) = 2(4) + 4 = 12$$

$$f(e_{2,5}) = 4 + 1 = 5$$

Dapat diketahui dari Gambar 4.4 bahwa bobot dari setiap titik adalah  $w_f(v_1) = 8 + 6 + 3 + 2 = 19$ ,  $w_f(v_2) = 2 + 9 + 1 + 5 = 17$ ,  $w_f(v_3) = 1 + 10 + 4 = 15$ ,  $w_f(v_4) = 4 + 7 + 3 = 14$ ,  $w_f(v_5) = 5 + 11 = 16$ ,  $w_f(v_6) = 6 + 12 = 18$ , sehingga membentuk suatu barisan aritmatika naik 14, 15, 16, 17, 18, dan 19. Dengan bobot terkecil dari titik adalah 14 dan beda dari setiap bobot titik adalah 1 sehingga dapat ditulis  $(14,1)$  VATL pada  $C_4 + 2A_1$ .

**Contoh 4.3 :**

**Pelabelan graf sikel dengan tambahan dua anting untuk  $a = 16$ ,  $p = 5$  dan  $d = 1$**



**Gambar 4.5 (16,1) VATL pada  $C_5 + 2A_1$**

Pelabelan titik :

$$f(v_1) = 2(5) + (1 - 1) = 10$$

$$f(v_2) = 2(5) + (2 - 1) = 11$$

$$f(v_3) = 2(5) + (3 - 1) = 12$$

$$f(v_4) = (2(5) - 1) + (4 - 5) = 8$$

$$f(v_5) = (2(5) - 1) + (5 - 5) = 9$$

$$f(v_6) = 2(5) + 3 = 13$$

$$f(v_7) = 2(5) + 4 = 14$$

Pelabelan sisi:

$$f(e_{1,2}) = 2$$

$$f(e_{2,3}) = 1$$

$$f(e_{3,4}) = 5 + \frac{7 - (2(3) + 1)}{2} = 5$$

$$f(e_{4,5}) = 5 + \frac{7 - (2(4) + 1)}{2} = 4$$

$$f(e_{5,1}) = 3$$

$$f(e_{1,7}) = 5 + 2 = 7$$

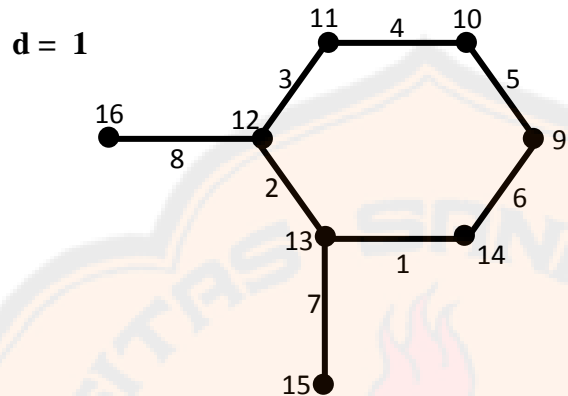
$$f(e_{2,6}) = 5 + 1 = 6$$

Dapat diketahui dari Gambar 4.5 bahwa bobot dari setiap titik adalah  $w_f(v_1) = 3 + 10 + 7 + 2 = 22$ ,  $w_f(v_2) = 2 + 11 + 1 + 6 = 20$ ,  $w_f(v_3) = 1 + 12 + 5 = 18$ ,  $w_f(v_4) = 5 + 8 + 4 = 17$ ,  $w_f(v_5) = 4 + 9 + 3 = 16$ ,  $w_f(v_6) = 6 + 13 = 19$ ,  $w_f(v_7) = 14 + 7 = 21$ , sehingga membentuk suatu barisan aritmatika naik 16, 17, 18, 19, 20, 21, dan 22. Dengan bobot terkecil dari titik adalah 16 dan beda dari setiap bobot titik adalah 1 sehingga dapat ditulis  $(16,1)$  VATL pada  $C_5 + 2A_1$



**Contoh 4.4:**

Pelabelan graf sikel dengan tambahan dua anting untuk  $a = 18, p = 6$  dan



**Gambar 4.6 (18,1) VATL pada  $C_6 + 2A_1$**

Pelabelan titik :

Pelabelan sisi:

$$f(v_1) = 2(6) + (1 - 1) = 12$$

$$f(e_{1,2}) = 2$$

$$f(v_2) = 2(6) + (2 - 1) = 13$$

$$f(e_{2,3}) = 1$$

$$f(v_3) = 2(6) + (3 - 1) = 14$$

$$f(e_{3,4}) = 6 + \frac{7 - (2(3) + 1)}{2} = 6$$

$$f(v_4) = (2(6) - 1) + (4 - 6) = 9$$

$$f(e_{4,5}) = 6 + \frac{7 - (2(4) + 1)}{2} = 5$$

$$f(v_5) = (2(6) - 1) + (5 - 6) = 10$$

$$f(e_{5,6}) = 6 + \frac{7 - (2(5) + 1)}{2} = 4$$

$$f(v_6) = (2(6) - 1) + (6 - 6) = 11 \quad f(e_{6,1}) = 3$$

$$f(v_7) = 2(6) + 3 = 15$$

$$f(e_{1,8}) = 6 + 2 = 8$$

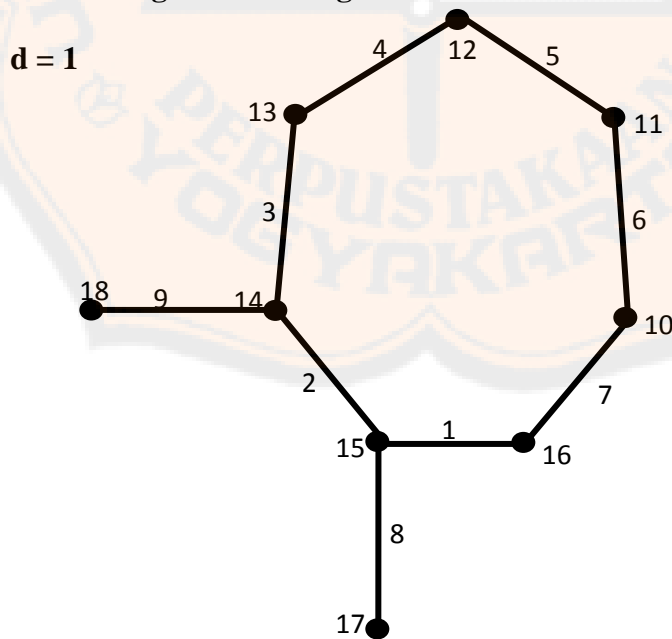
$$f(v_8) = 2(6) + 4 = 16$$

$$f(e_{2,7}) = 6 + 1 = 7$$

Dapat diketahui dari Gambar 4.6 bahwa bobot dari setiap titik adalah  $w_f(v_1) = 3 + 8 + 12 + 2 = 25$ ,  $w_f(v_2) = 2 + 13 + 7 + 1 = 23$ ,  $w_f(v_3) = 1 + 14 + 6 = 21$ ,  $w_f(v_4) = 6 + 9 + 5 = 20$ ,  $w_f(v_5) = 5 + 10 + 4 = 19$ ,  $w_f(v_6) = 4 + 11 + 3 = 18$ ,  $w_f(v_7) = 7 + 15 = 22$ ,  $w_f(v_8) = 8 + 16 = 24$ , sehingga membentuk suatu barisan aritmatika naik 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, dan 25. Dengan bobot terkecil dari titik adalah 18 dan beda dari setiap bobot titik adalah 1 sehingga dapat ditulis  $(18,1)$  VATL pada  $C_6 + 2A_1$ .

**Contoh 4.5:**

**Pelabelan graf sikel dengan tambahan dua anting untuk  $a = 20$ ,  $p = 7$  dan  $d = 1$**



**Gambar 4.7  $(20,1)$  VATL pada  $C_7 + 2A_1$**

Pelabelan titik :

$$f(v_1) = 2(7) + (1 - 1) = 14$$

$$f(v_2) = 2(7) + (2 - 1) = 15$$

$$f(v_3) = 2(7) + (3 - 1) = 16$$

$$f(v_4) = (2(7) - 1) + (4 - 7) = 10$$

$$f(v_5) = (2(7) - 1) + (5 - 7) = 11$$

$$f(v_6) = (2(7) - 1) + (6 - 7) = 12$$

$$f(v_7) = (2(7) - 1) + (7 - 7) = 14$$

$$f(v_8) = 2(7) + 3 = 17$$

$$f(v_9) = 2(7) + 4 = 18$$

Pelabelan sisi:

$$f(e_{1,2}) = 2$$

$$f(e_{2,3}) = 1$$

$$f(e_{3,4}) = 7 + \frac{7 - (2(3) + 1)}{2} = 7$$

$$f(e_{4,5}) = 7 + \frac{7 - (2(4) + 1)}{2} = 6$$

$$f(e_{5,6}) = 7 + \frac{7 - (2(5) + 1)}{2} = 5$$

$$f(e_{6,7}) = 7 + \frac{7 - (2(6) + 1)}{2} = 4$$

$$f(e_{7,1}) = 3$$

$$f(e_{1,9}) = 7 + 2 = 9$$

$$f(e_{2,8}) = 7 + 1 = 8$$

Dapat diketahui dari Gambar 4.7 bahwa bobot dari setiap titik adalah

$$w_f(v_1) = 3 + 14 + 9 + 2 = 28, w_f(v_2) = 2 + 15 + 8 + 1 = 26, w_f(v_3) = 1 + 16$$

$$+ 7 = 24, w_f(v_4) = 7 + 10 + 6 = 23, w_f(v_5) = 6 + 11 + 5 = 22, w_f(v_6) = 5 + 12$$

$$+ 4 = 21, w_f(v_7) = 4 + 13 + 3 = 20, w_f(v_8) = 8 + 17 = 25, w_f(v_9) = 9 + 18 =$$

27, sehingga membentuk suatu barisan aritmatika naik 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, dan 28. Dengan bobot terkecil dari titik adalah 20 dan beda dari setiap bobot titik adalah 1 sehingga dapat ditulis (20,1) VATL pada  $C_7 + 2A_1$ .

**6.1.2** Telah ditunjukkan sebelumnya bahwa  $a = \frac{p(5-d)-d+13}{2}$ , sehingga untuk

$d = 2, p \geq 3$ , dan  $p$  ganjil maka :

$$a = \frac{p(5-d)-d+13}{2}$$

$$a = \frac{p(5-d)-d+13}{2}$$

$$a = \frac{p(5-2)-2+13}{2}$$

$$\text{Jadi nilai } a = \frac{3p+11}{2}$$

Jadi pada graf sikel dengan dua anting terdapat  $(\frac{3p+11}{2}, 2)$  VATL untuk

$p \geq 3$  dan  $p$  ganjil.

Konstruksi pelabelan graf sikel dengan tambahan dua anting untuk titik sebagai berikut:

Untuk  $p = 3, 5, 7, \dots$

$$f(v_i) = \begin{cases} p+i+2 & ; i = 1, 2, 3 \\ (2p+3) + \frac{4-i}{2} & ; i = p+1 \\ (2p+4) + \frac{5-i}{2} & ; i = p+2 \end{cases}$$

$$f(v_i) = \begin{cases} (2p + i) + (4 + i) \cdot (2) ; i = 4, 5, \dots, \frac{p + 3}{2} \\ (2p + 1) + (5 - i) ; i = \frac{p + 5}{2}, \frac{p + 7}{2}, \dots, p \end{cases}$$

Sedangkan pelabelan sisinya sebagai berikut :

Untuk  $p = 3, 5, 7, \dots$

$$f(e_{1,2}) : 3$$

$$f(e_{3,p+1}) : 1$$

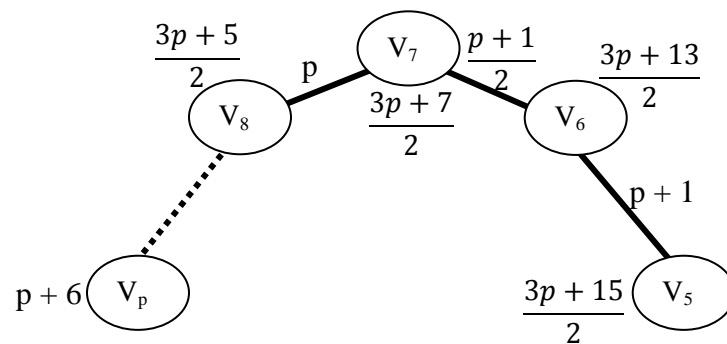
$$f(e_{1,p+2}) : 2$$

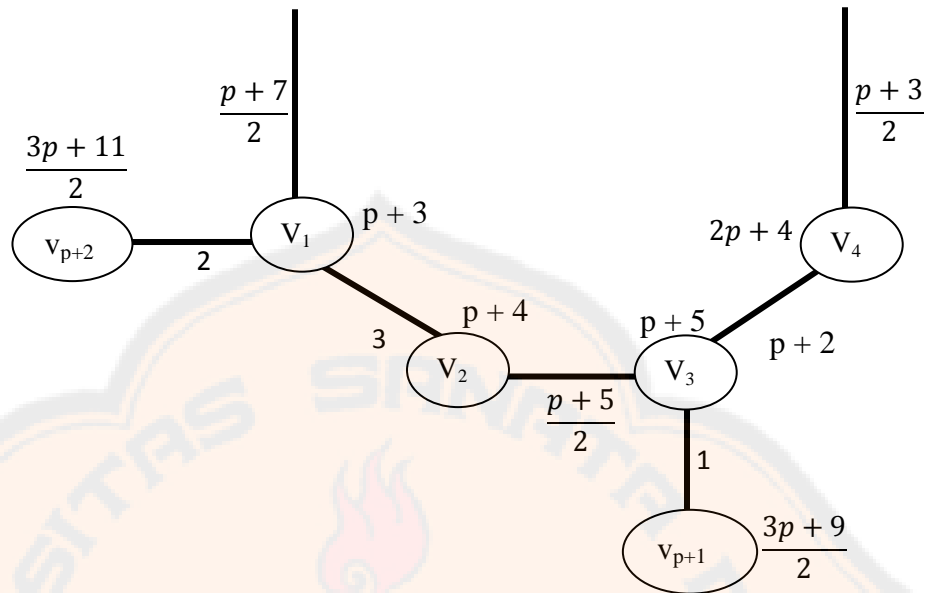
$$f(e_{p,1}) : \frac{p + 7}{2}$$

$$f(e_{i,i+1}) \begin{cases} \frac{p+5}{2} + \frac{2-i}{2} & ; i = 2, 4, \dots, p - 1 \\ (p + 2) + \frac{3-i}{2} & ; i = 3, 5, \dots, p - 2 \end{cases}$$

**Gambar 4.8 (a) Ilustrasi Konstruksi Pelabelan pada Graf Sikel**

**dengan Tambahan Dua Anting untuk  $d=2$**





Dari ilustrasi konstruksi pelabelan yang telah dipaparkan sebelumnya di dapat bobot dari setiap titik sebagai berikut:

$$w_f(v_1) = \frac{p+7}{2} + (p+3) + 2 + 3 = \frac{3p+23}{2}$$

$$w_f(v_2) = 3 + (p+4) + \frac{p+5}{2} = \frac{3p+19}{2}$$

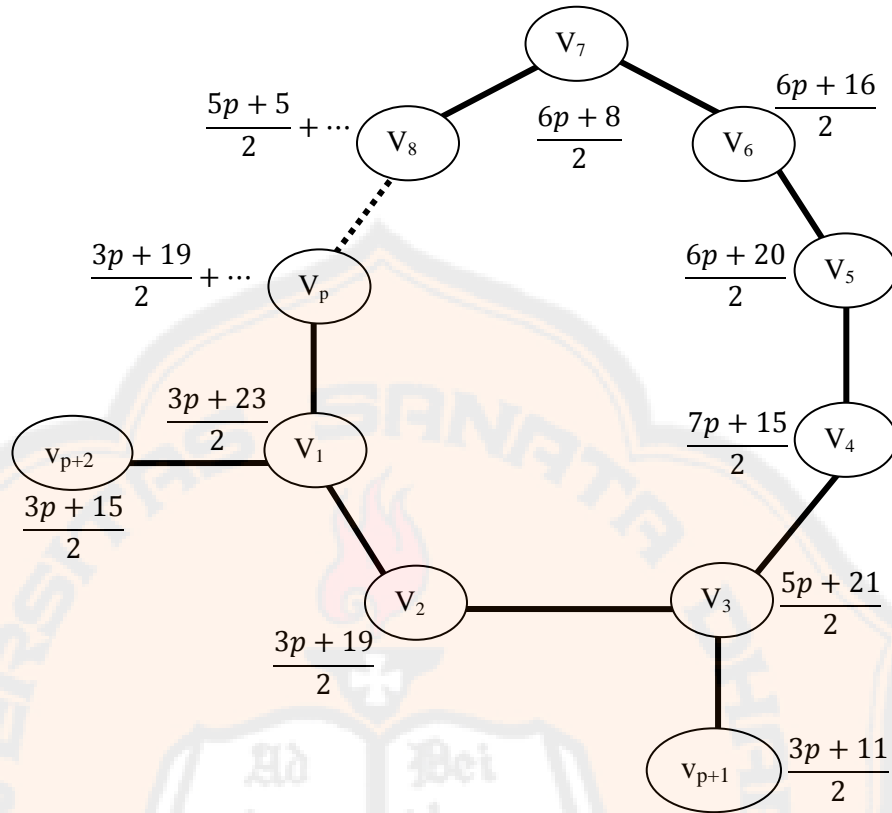
$$w_f(v_3) = \frac{p+5}{2} + (p+5) + 1 + (p+2) = \frac{5p+21}{2}$$

$$w_f(v_4) = (p+2) + (2p+4) + \frac{p+3}{2} = \frac{7p+15}{2}$$

⋮

$$w_f(v_{p+1}) = 1 + \frac{3p+9}{2} = \frac{3p+11}{2}$$

$$w_f(v_{p+2}) = 2 + \frac{3p+11}{2} = \frac{3p+15}{2}$$



**Gambar 4.8 (b) Ilustrasi Konstruksi Bobot pada Graf Sikel dengan Tambahan Dua Anting untuk  $d=2$**

Dari gambar ilustrasi 4.8(b) didapat bentuk barisan sebagai berikut:

$$\left(\frac{3p + 11}{2}\right), \left(\frac{3p + 15}{2}\right), \left(\frac{3p + 19}{2}\right), \left(\frac{3p + 23}{2}\right), \dots, \left(\frac{7p + 15}{2}\right)$$

Jumlah deret aritmatika pada gambar ilustrasi 4.8(b) adalah

$$S_w = \left(\frac{3p + 11}{2}\right) + \left(\frac{3p + 15}{2}\right) + \left(\frac{3p + 19}{2}\right) + \dots + \left(\frac{7p + 15}{2}\right)$$

$$S_w = \frac{p}{2}(2a + (p - 1)d)$$

$$S_w = \frac{(p+2)}{2} \left( \left( 2 \left( \frac{3p+11}{2} \right) \right) + ((p+2) - 1)2 \right)$$

$$S_w = \frac{(p+2)}{2} ((3p+11) + (2p+2))$$

$$S_w = \frac{(p+2)}{2} ((5p+13))$$

Pada pelabelan total tak ajaib titik setiap label titik dihitung satu kali dan label sisi dihitung dua kali akibatnya:

$$S_w = S_v + 2 S_e$$

$$S_w = 1 + 2 + \dots + (2p+4) + (1 + 2 + \dots + (p+2))$$

$$S_w = ((p+2)(2p+5)) + \left( \frac{(p+2)(p+3)}{2} \right)$$

$$S_w = \left( \frac{2(p+2)(2p+5)}{2} \right) + \left( \frac{(p+2)(p+3)}{2} \right)$$

$$S_w = \left( \frac{p+2}{2} \right) ((4p+10) + (p+3))$$

$$S_w = \left( \frac{p+2}{2} \right) ((5p+13))$$

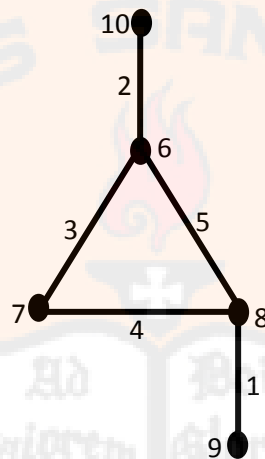
Karena jumlah bobot pada deret aritmatika dengan  $d = 2$  sama dengan jumlah bobot umum pada pelabelan total tak ajaib titik maka dapat dikatakan



bahwa konstruksi pelabelan titik dan pelabelan sisi pada pernyataan sebelumnya berlaku untuk  $p \geq 3$ .

**Contoh 4.6:**

**Pelabelan graf sikel dengan tambahan dua anting untuk  $a = 10, p = 3$  dan  $d = 2$**



**Gambar 4.9 (10,2) VATL pada  $C_3 + 2A_1$**

Pelabelan titik:

$$f(v_1) = 3 + 1 + 2 = 6$$

$$f(v_2) = 3 + 2 + 2 = 7$$

$$f(v_3) = 3 + 3 + 2 = 8$$

$$f(v_4) = (2(3) + 3) + \frac{4-4}{2} = 9$$

Pelabelan sisi :

$$f(e_{1,2}) = 3$$

$$f(e_{2,3}) = \frac{3+5}{2} + \frac{2-2}{2} = 4$$

$$f(e_{3,1}) = \frac{3+7}{2} = 5$$

$$f(e_{3,4}) = 1$$

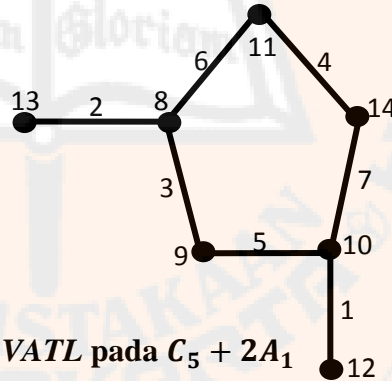
$$f(v_5) = (2(3) + 4) + \frac{5-5}{2} = 10 \quad f(e_{1,5}) = 2$$

Dapat diketahui dari Gambar 4.9 bahwa bobot dari setiap titik adalah  $w_f(v_1) = 6 + 5 + 2 + 3 = 16$ ,  $w_f(v_2) = 7 + 3 + 4 = 14$ ,  $w_f(v_3) = 8 + 4 + 5 + 1 = 18$ ,  $w_f(v_4) = 9 + 1 = 10$ ,  $w_f(v_5) = 10 + 2 = 12$ , sehingga membentuk suatu barisan aritmatika naik 10, 12, 14, 16, dan 18. Dengan bobot terkecil dari titik adalah 10 dan beda dari setiap bobot titik adalah 2 sehingga dapat ditulis  $(10,2)$  VATL pada  $C_3 + 2A_1$ .

**Contoh 4.7:**

**Pelabelan graf sikel dengan tambahan dua anting untuk  $a = 13$ ,  $p = 5$  dan**

**$d = 2$**



**Gambar 4.10  $(13,2)$  VATL pada  $C_5 + 2A_1$**

Pelabelan titik:

Pelabelan sisi:

$$f(v_1) = 5 + 1 + 2 = 8$$

$$f(e_{1,2}) = 3$$

$$f(v_2) = 5 + 2 + 2 = 9$$

$$f(e_{2,3}) = \frac{5+5}{2} + \frac{2-2}{2} = 5$$

$$f(v_3) = 5 + 3 + 2 = 10 \qquad f(e_{3,4}) = (5 + 2) + \frac{3-3}{2} = 7$$

$$f(v_4) = (2(5) + 4) + (4 - 4) \cdot (2) = 14 \qquad f(e_{4,5}) = \frac{5+5}{2} + \frac{2-4}{2} = 4$$

$$f(v_5) = (2(5) + 1) + (5 - 5) = 11 \qquad f(e_{5,1}) = \frac{5+7}{2} = 6$$

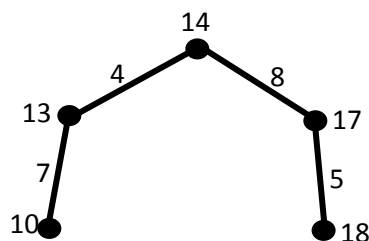
$$f(v_6) = (2(5) + 3) + \frac{4-6}{2} = 12 \qquad f(e_{3,6}) = 1$$

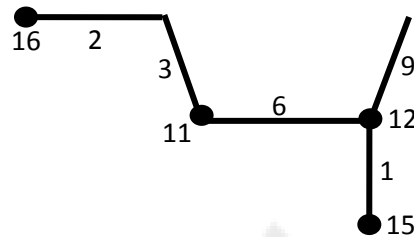
$$f(v_7) = (2(5) + 4) + \frac{5-7}{2} = 13 \qquad f(e_{1,7}) = 2$$

Dapat diketahui dari Gambar 4.10 bahwa bobot dari setiap titik adalah  $w_f(v_1) = 8 + 6 + 3 + 2 = 19$ ,  $w_f(v_2) = 9 + 3 + 5 = 17$ ,  $w_f(v_3) = 10 + 5 + 1 + 7 = 23$ ,  $w_f(v_4) = 14 + 7 + 4 = 25$ ,  $w_f(v_5) = 11 + 4 + 6 = 21$ ,  $w_f(v_6) = 12 + 1 = 13$ ,  $w_f(v_7) = 13 + 2 = 15$ , sehingga membentuk suatu barisan aritmatika naik 13, 15, 17, 19, 21, 23, dan 25. Dengan bobot terkecil dari titik adalah 13 dan beda dari setiap bobot titik adalah 2 sehingga dapat ditulis  $(13,2) \text{ VATL}$  pada  $C_5 + 2A_1$ .

**Contoh 4.8:**

**Pelabelan graf sikel dengan tambahan dua anting untuk  $a = 16$ ,  $p = 7$  dan  $d = 2$**





Gambar 4.11 (16,2) VATL pada  $C_7 + 2A_1$

Pelabelan titik:

Pelabelan sisi:

$$f(v_1) = 7 + 1 + 2 = 10$$

$$f(e_{1,2}) = 3$$

$$f(v_2) = 7 + 2 + 2 = 11$$

$$f(e_{2,3}) = \frac{7+5}{2} + \frac{2-2}{2} = 6$$

$$f(v_3) = 7 + 3 + 2 = 12$$

$$f(e_{3,4}) = (7+2) + \frac{3-3}{2} = 9$$

$$f(v_4) = (2(7) + 4) + (4 - 4) \cdot (2) = 18$$

$$f(e_{4,5}) = \frac{7+5}{2} + \frac{2-4}{2} = 5$$

$$f(v_5) = (2(7) + 5) + (4 - 5) \cdot (2) = 17$$

$$f(e_{5,6}) = (7+2) + \frac{3-5}{2} = 8$$

$$f(v_6) = (2(7) + 1) + (5 - 6) = 14$$

$$f(e_{6,7}) = \frac{7+5}{2} + \frac{2-6}{2} = 4$$

$$f(v_7) = (2(7) + 1) + (5 - 7) = 13$$

$$f(e_{7,1}) = \frac{7+7}{2} = 7$$

$$f(v_8) = (2(7) + 3) + \frac{4-8}{2} = 15$$

$$f(e_{3,6}) = 1$$

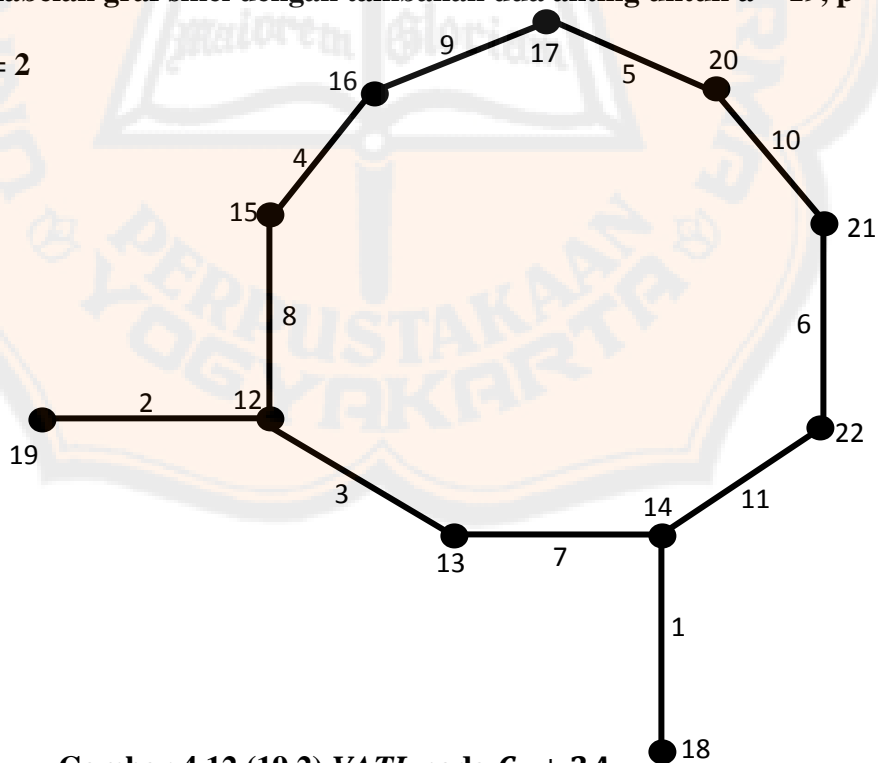
$$f(v_9) = (2(7) + 4) + \frac{5-9}{2} = 16$$

$$f(e_{1,9}) = 2$$

Dapat diketahui dari Gambar 4.11 bahwa bobot dari setiap titik-titiknya adalah  $w_f(v_1) = 10 + 7 + 3 + 2 = 22$ ,  $w_f(v_2) = 11 + 3 + 6 = 20$ ,  $w_f(v_3) = 12 + 9 + 1 + 6 = 28$ ,  $w_f(v_4) = 18 + 9 + 5 = 32$ ,  $w_f(v_5) = 17 + 5 + 8 = 30$ ,  $w_f(v_6) = 14 + 8 + 4 = 26$ ,  $w_f(v_7) = 13 + 4 + 7 = 24$ ,  $w_f(v_8) = 15 + 1 = 16$ ,  $w_f(v_9) = 16 + 2 = 18$ , sehingga membentuk suatu barisan aritmatika naik 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, dan 32. Dengan bobot terkecil dari titik adalah 16 dan beda dari setiap bobot titik adalah 2 sehingga dapat ditulis  $(16,2)$  VATL pada  $C_7 + 2A_1$ .

**Contoh 4.9:**

**Pelabelan graf sikel dengan tambahan dua anting untuk  $a = 19$ ,  $p = 9$  dan  $d = 2$**



**Gambar 4.12  $(19,2)$  VATL pada  $C_9 + 2A_1$**

Pelabelan titik:

$$f(v_1) = 9 + 1 + 2 = 12$$

$$f(v_2) = 9 + 2 + 2 = 13$$

$$f(v_3) = 9 + 3 + 2 = 14$$

$$f(v_4) = (2(9) + 4) + (4 - 4) \cdot (2) = 22$$

$$f(v_5) = (2(9) + 5) + (4 - 5) \cdot (2) = 21$$

$$f(v_6) = (2(9) + 6) + (4 - 6) \cdot (2) = 20$$

$$f(v_7) = (2(9) + 1) + (5 - 7) = 17$$

$$f(v_8) = (2(9) + 1) + (5 - 8) = 16$$

$$f(v_9) = (2(9) + 1) + (5 - 9) = 15$$

$$f(v_{10}) = (2(9) + 3) + \frac{4-10}{2} = 18$$

Pelabelan sisi:

$$f(e_{1,2}) = 3$$

$$f(e_{2,3}) = \frac{9+5}{2} + \frac{2-2}{2} = 7$$

$$f(e_{3,4}) = (9+2) + \frac{3-3}{2} = 11$$

$$f(e_{4,5}) = \frac{9+5}{2} + \frac{2-4}{2} = 6$$

$$f(e_{5,6}) = (9+2) + \frac{3-5}{2} = 10$$

$$f(e_{6,7}) = \frac{9+5}{2} + \frac{2-6}{2} = 5$$

$$f(e_{7,8}) = (9+2) + \frac{3-7}{2} = 9$$

$$f(e_{8,9}) = \frac{9+5}{2} + \frac{2-8}{2} = 4$$

$$f(e_{9,1}) = \frac{9+7}{2} = 8$$

$$f(e_{3,10}) = 1$$

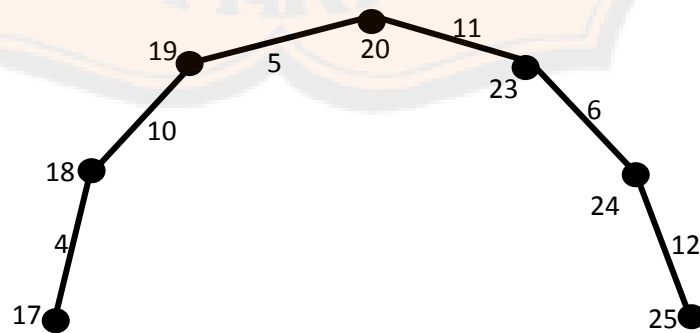
$$f(v_{11}) = (2(9) + 4) + \frac{5-11}{2} = 19 \qquad f(e_{1,11}) = 2$$

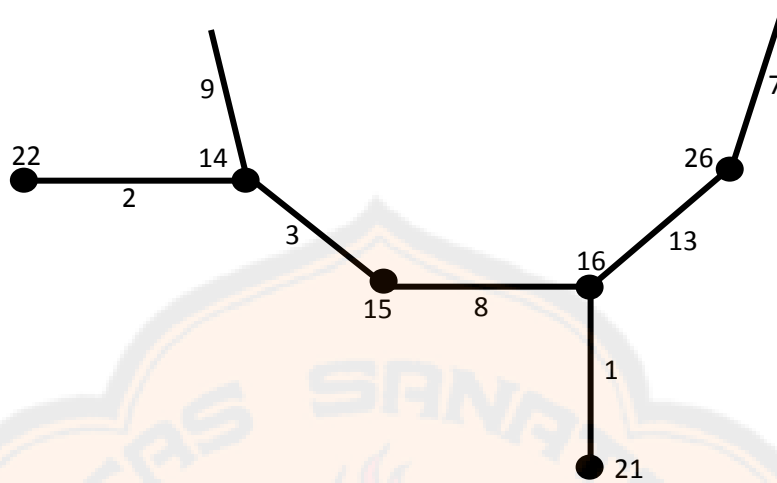
Dapat diketahui dari Gambar 4.12 bahwa bobot dari setiap titik adalah  $w_f(v_1) = 12 + 8 + 2 + 3 = 25$ ,  $w_f(v_2) = 13 + 3 + 7 = 23$ ,  $w_f(v_3) = 14 + 7 + 1 + 11 = 33$ ,  $w_f(v_4) = 22 + 11 + 6 = 39$ ,  $w_f(v_5) = 21 + 10 + 6 = 37$ ,  $w_f(v_6) = 20 + 10 + 5 = 35$ ,  $w_f(v_7) = 17 + 9 + 5 = 31$ ,  $w_f(v_8) = 16 + 9 + 4 = 39$ ,  $w_f(v_9) = 15 + 8 + 4 = 27$ ,  $w_f(v_{10}) = 18 + 1 = 19$ ,  $w_f(v_{11}) = 19 + 2 = 21$ , sehingga membentuk suatu barisan aritmatika naik 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 37, dan 39. Dengan bobot terkecil dari titik adalah 19 dan beda dari setiap bobot titik adalah 2 sehingga dapat ditulis  $(19,2)$  VATL pada  $C_9 + 2A_1$ .

**Contoh 4.10 :**

**Pelabelan graf sikel dengan tambahan dua anting untuk  $a = 22$ ,  $p = 11$  dan  $d = 2$**

**Gambar 4.13  $(22,2)$  VATL pada  $C_{11} + 2A_1$**





Pelabelan titik:

$$f(v_1) = 11 + 1 + 2 = 14$$

$$f(v_2) = 11 + 2 + 2 = 15$$

$$f(v_3) = 11 + 3 + 2 = 16$$

$$f(v_4) = (2(11) + 4) + (4 - 4) \cdot (2) = 26$$

$$f(v_5) = (2(11) + 5) + (4 - 5) \cdot (2) = 25$$

$$f(v_6) = (2(11) + 6) + (4 - 6) \cdot (2) = 24$$

$$f(v_7) = (2(11) + 7) + (4 - 7) \cdot (2) = 23$$

Pelabelan sisi:

$$f(e_{1,2}) = 3$$

$$f(e_{2,3}) = \frac{11+5}{2} + \frac{2-2}{2} = 8$$

$$f(e_{3,4}) = (11+2) + \frac{3-3}{2} = 13$$

$$f(e_{4,5}) = \frac{11+5}{2} + \frac{2-4}{2} = 7$$

$$f(e_{5,6}) = (11+2) + \frac{3-5}{2} = 12$$

$$f(e_{6,7}) = \frac{11+5}{2} + \frac{2-6}{2} = 6$$

$$f(e_{7,8}) = (11+2) + \frac{3-7}{2} = 11$$



$$f(v_8) = (2(11) + 1) + (5 - 8) = 20 \quad f(e_{8,9}) = \frac{11+5}{2} + \frac{2-8}{2} = 5$$

$$f(v_9) = (2(11) + 1) + (5 - 9) = 19 \quad f(e_{9,10}) = (11+2) + \frac{3-9}{2} = 10$$

$$f(v_{10}) = (2(11) + 1) + (5 - 10) = 18 \quad f(e_{10,11}) = \frac{11+5}{2} + \frac{2-10}{2} = 4$$

$$f(v_{11}) = (2(11) + 1) + (5 - 11) = 17 \quad f(e_{11,1}) = \frac{11+7}{2} = 9$$

$$f(v_{12}) = (2(11) + 3) + \frac{4-12}{2} = 21 \quad f(e_{3,12}) = 1$$

$$f(v_{13}) = (2(11) + 4) + \frac{5-13}{2} = 22 \quad f(e_{1,13}) = 2$$

Dapat diketahui dari Gambar 4.13 bahwa bobot dari setiap titik adalah

$w_f(v_1) = 14 + 9 + 2 + 3 = 28$ ,  $w_f(v_2) = 15 + 8 + 3 = 26$ ,  $w_f(v_3) = 16 + 8 + 1 + 13 = 38$ ,  $w_f(v_4) = 26 + 13 + 7 = 46$ ,  $w_f(v_5) = 25 + 12 + 7 = 44$ ,  $w_f(v_6) = 24 + 12 + 6 = 42$ ,  $w_f(v_7) = 23 + 11 + 6 = 40$ ,  $w_f(v_8) = 20 + 11 + 5 = 36$ ,  $w_f(v_9) = 19 + 10 + 5 = 34$ ,  $w_f(v_{10}) = 18 + 10 + 4 = 32$ ,  $w_f(v_{11}) = 17 + 9 + 4 = 30$ ,  $w_f(v_{12}) = 21 + 1 = 22$ ,  $w_f(v_{13}) = 22 + 2 = 24$ , sehingga membentuk suatu barisan aritmatika naik 22, 24, 26, 28, 30, 32, 34, 36, 38, 40, 42, 44, dan 46. Dengan bobot terkecil dari titik adalah 22 dan beda dari setiap bobot titik adalah 2 sehingga dapat ditulis  $(22,1)$  VATL pada  $C_{11} + 2A_1$ .

## BAB V

### PENUTUP

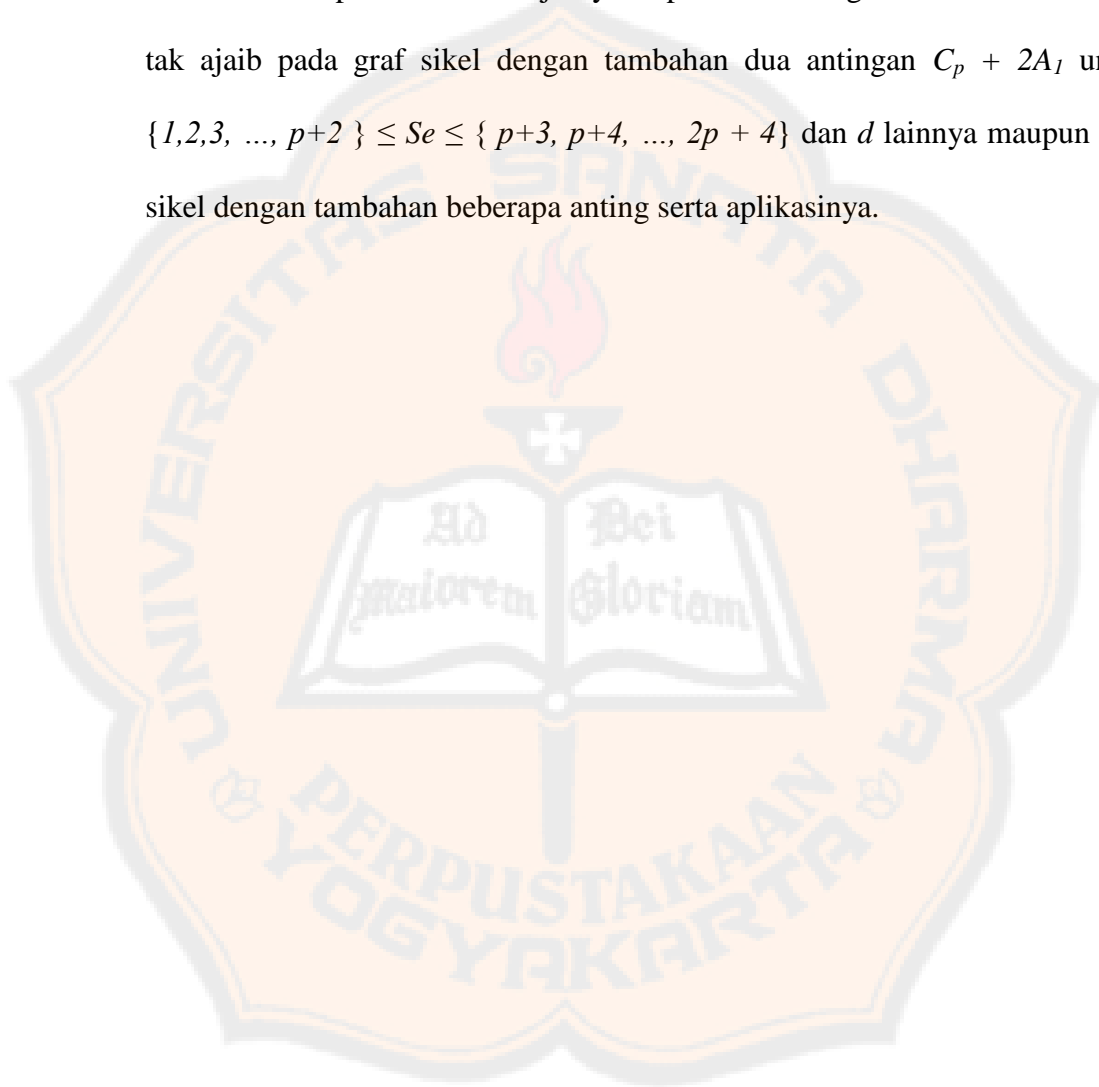
#### 5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil penelitian yang telah dilakukan, dapat disimpulkan bahwa graf sikel dengan tambahan dua anting  $C_p + 2A_1$  mempunyai sifat pelabelan total tak ajaib titik (VATL). Beberapa sifat pelabelan total tak ajaib titik pada graf sikel dengan tambahan dua anting adalah sebagai berikut:

1. Setiap graf sikel dengan tambahan dua anting mempunyai  $(a, d)$  VATL untuk  $p \geq 3$  dan  $d = 1$ . Jika label untuk sisi adalah himpunan bilangan bulat positif  $\{1, 2, 3, \dots, p+2\}$  dan label untuk titiknya adalah himpunan bilangan bulat positif  $\{p+3, p+4, \dots, 2p+4\}$  maka nilai  $a$  adalah  $\frac{p(5-d)-d+13}{2}$ . Pada graf sikel dengan tambahan dua anting  $C_n + 2A_1$  terdapat  $(2p+6, 1)$  VATL untuk  $p \geq 3$ .
2. Setiap graf sikel dengan tambahan dua anting mempunyai  $(a, d)$  VATL untuk  $p \geq 3$  dan  $p$  ganjil serta  $d = 2$ . Jika label untuk sisi adalah himpunan bilangan bulat positif  $\{1, 2, 3, \dots, p+2\}$  dan label untuk titiknya adalah himpunan bilangan bulat positif  $\{p+3, p+4, \dots, 2p+4\}$  maka nilai  $a$  adalah  $\frac{p(5-d)-d+13}{2}$ . Pada graf sikel dengan dua anting terdapat  $(\frac{3p+11}{2}, 2)$  VATL untuk  $p \geq 3$  dan berlaku untuk  $p$  ganjil.

## 2.2 Saran

Untuk penelitian selanjutnya dapat dikembangkan keberlakuan total tak ajaib pada graf sikel dengan tambahan dua antingan  $C_p + 2A_1$  untuk  $\{1, 2, 3, \dots, p+2\} \leq Se \leq \{p+3, p+4, \dots, 2p+4\}$  dan  $d$  lainnya maupun graf sikel dengan tambahan beberapa anting serta aplikasinya.



**DAFTAR PUSTAKA**

Baca, M., dkk. (2003). “*Vertex Antimagic Total Labeling of Graph*”,  
Discuss Math. Graph Theory.

Munir, Rinaldi. (2001). *Matematika Diskrit*. Bandung: Informatika Bandung.

Wallis, W.D. (2001). *Magic Graph*, Birkhauser.

Wenny., Cosmas. (2011). “*Vertex Antimagic Total Labeling on cycle graph with one extra arm*”, Skripsi. Yogyakarta: Universitas Sanata Dharma.

West, D.B. (2001). *An Introduction to Graph theory, Second Edition*, Urbana  
Prentice Hall: Mathematics Department, University of Illinois.

Yuliyanto, B.D. (2012). “*The Strong Edge Magic Total Labeling on Cycle Graph with Two Extra Arm*”, Skripsi. Yogyakarta: Universitas Sanata Dharma.