MASALAH ANGKUTAN

SKRIPSI

oleh

Yoly Ramadhany

NIM : 86414007

NIRM : 875027100006

FAKULTAS

PENDIDIKAN MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

IKIP SANATA DHARMA

YOGYAKARTA

1991

MASALAH ANGKUTAN

SKRIPSI

Diajukan Untuk Memenuhi Salah Satu Syarat
Memperoleh Gelar Sarjana
Pendidikan Matematika

oleh

Yoly Ramadhany
NIM : 8 6 4 1 4 0 0 7
NIRM : 8 7 5 0 2 7 1 0 0 0 0 6

FAKULTAS
PENDIDIKAN MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
IKIP SANATA DHARMA
YOGYAKARTA
1991

Persembahan untuk yang tercinta :

Yost, Lies dan Neng

S K R I P S I

MASALAH ANGKUTAN

Oleh

Yoly Ramadhany

NIM : 86414007

NIRM : 865027100006

telah diperiksa, dibaca dan disetujui

oleh para pembimbing

Pembimbing I

Drs. B. Susanta tanggal 30-5-1991

Pembimbing II

Dra. Salmah tanggal 30-5-1991

S K R I P S I

MASALAH ANGKUTAN

yang dipersiapkan dan disusun oleh

Yoly Ramadhany

NIM : 86414007

NIRM :865027100006

telah dipertahankan di depan Dewan Penguji

pada tanggal 2 Mei 1991

dan dinyatakan telah memenuhi syarat

DEWAN PENGUJI

Ketua	: Dr. St. Suwarsono	,...........
Anggota	: Drs. B. Susanta	,...........
Anggota	: Dra. Salmah	,...........
Anggota	: Drs. A. Tutoyo, M.Sc.	,...........
Anggota	: Dr. F. Susilo, SJ.	,...........

Yogyakarta, 31 Mei 1991

Fakultas Pendidikan Matematika

dan Ilmu Pengetahuan Alam

IKIP Sanata Dharma

Dekan

Dr. St. Suwarsono

KATA PENGANTAR

Skripsi berjudul MASALAH ANGKUTAN disusun dalam rangka memenuhi salah satu syarat untuk mencapai gelar Sarjana Pendidikan Matematika.

Bagi penulis, penyusunan skripsi ini merupakan kesempatan yang sangat baik untuk belajar menghasilkan karya ilmiah. Banyak kesulitan yang dialami, sejak saat mulai merumuskan usulan masalah yang hendak dibahas sampai saat-saat terakhir menyiapkan pengetikan skripsi ini. Namun dengan menghadapi berbagai kesulitan itu, banyak hal yang dapat dijadikan pelajaran bagi penulis.

Dalam skripsi ini dibahas seluk-beluk masalah angkutan sebagai kejadian khusus dari masalah program linear. Dibahas pula beberapa masalah lain yang erat kaitannya dengan masalah angkutan, yaitu masalah angkutan yang diperluas, masalah transshipment, dan masalah penugasan.

Tak lupa penulis mengucapkan terima kasih kepada Dr. St. Suwarsono, selaku Dekan Fakultas Pendidikan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam dan Ketua Jurusan Pendidikan Matematika IKIP Sanata Dharma, yang telah memberikan dorongan dan pengarahan pertama kali kepada penulis untuk mulai merumuskan masalah yang hendak dijadikan pokok pembahasan skripsi

Banyak terima kasih saya ucapkan kepada Drs.B.Susanta selaku pembimbing I, dan Dra. Salmah selaku pembimbing II, yang dengan tekun dan bijaksana telah memberikan pengarahan dari awal sampai terselesaikannya skripsi ini.

Tidak lupa penulis mengucapkan terima kasih kepada rekan-rekan dan siapa saja yang telah memberikan bantuan serta dorongan sehingga skripsi ini dapat terselesaikan.

Akhirnya, jika dalam skripsi ini terdapat kesalahan, hal itu merupakan keterbatasan penulis. Semua isi skripsi ini menjadi tanggung jawab penulis. Segala kritik dan saran akan penulis terima dengan hati terbuka.

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

ABSTRAK

Masalah angkutan sebagai model Riset Operasi, adalah kejadian khusus dari program linear. Oleh karena itu masalah angkutan dapat diselesaikan dengan menggunakan metode simpleks, tetapi karena struktur masalahnya yang khusus, masalah angkutan ini dapat diselesaikan dengan metode tersendiri, yaitu dengan metode angkutan yang jauh lebih mudah dan efisien dibandingkan dengan metode simpleks. Yang dicari dalam masalah angkutan adalah mengalokasikan barang dari sumber ke tujuan sedemikian hingga semua kapasitas sumber terpakai dan semua kebutuhan tujuan terpenuhi, sedangkan sasaran utamanya adalah meminimalkan ongkos total angkutan.

Beberapa masalah lain yang erat kaitannya dengan masalah angkutan adalah : masalah angkutan yang diperluas, masalah transshipment dan masalah penugasan. Dalam masalah angkutan yang diperluas, ada sedikit perbedaan dengan masalah angkutan dalam hal data, yaitu koefisien perubah x_{ij} dalam masalah angkutan yang diperluas tidak selalu bernilai 1. Masalah transshipment yang merupakan perluasan masalah angkutan, menyangkut banyak rute dari tiap sumber dan tiap tujuan. Dalam masalah penugasan, yang merupakan kejadian khusus dari masalah angkutan, setiap fasilitas hanya dapat mengerjakan tepat satu tugas. Masing-masing masalah ini mempunyai metode penyelesaian tersendiri.

BAB I

PENDAHULUAN

Alasan Pemilihan Judul

Masalah angkutan (transportation problem) yang merupakan kejadian khusus dari program linear adalah salah satu bentuk matematika terapan yang tergolong baru berkembang di negara kita. Masalah angkutan ini menarik perhatian dan minat penulis, karena banyak masalah dalam kehidupan sehari-hari yang dapat diselesaikan dengan menggunakan metode angkutan. Selain itu penulis juga berminat untuk memperdalam materi masalah angkutan yang pernah diperoleh dalam kuliah.

Metode Penulisan

Sesuai dengan tingkat pengetahuan penulis, skripsi ini ditulis dengan menggunakan metode studi literatur. Jadi belum ada penelitian masalah angkutan ini yang bersifat eksperimental.

Latar Belakang

Dalam beberapa tahun terakhir ini terjadi perkembangan yang pesat dalam bidang matematika terapan. Dewasa ini matematika terapan tidak terbatas pada bidang Fisika dan Teknik saja, tetapi juga dalam bidang Ekonomi, Biologi, Farmasi, dan lain-lain. Matematika menjadi alat penting dalam metode kuantitatifnya dan merupakan dasar dalam perkembangan teori mereka. Untuk dapat menerapkan atau menggunakan matematika secara benar, maka penyusunan model matematis menjadi kunci utamanya.

Salah satu tujuan disusunnya model matematis adalah untuk menentukan nilai optimal dari suatu besaran akibat bervariasinya nilai besaran-besaran lain yang terlibat dalam permasalahan yang dibahas. Model matematis di sini merupakan suatu bentuk model dalam permasalahan optimisasi. Optimisasi suatu masalah yang kuantitatif tidak lain berarti mencari ekstremnya, yaitu maksimum atau minimumnya. Jadi dalam model optimisasi jelas harus ada fungsi sasaran yang akan dioptimalkan. Penyelesaian yang memenuhi semua kendala yang ada disebut penyelesaian fisibel (feasible solution), dan penyelesaian fisibel yang mengoptimalkan fungsi sasaran disebut penyelesaian optimal. Biasanya masalah optimisasi yang berkaitan dengan pengambilan keputusan (decision making) banyak dibahas dalam buku-buku tentang riset operasi (Operation Research), tetapi pembahasannya hanya secara teknis saja. Pembahasan yang bersifat teoritis (memuat landasan teorinya) umumnya banyak dibahas dalam buku-buku tentang program linear.

Model optimisasi terbagi atas dua kelompok, yaitu model deterministik, yang nilai-nilai koefisien dan parameternya sudah pasti; dan model probabilistik atau stokastik, yang nilai koefisiennya disajikan dengan besar probabilitasnya. Salah satu model optimisasi yang deterministik adalah program linear.

Dalam suatu masalah program linear ada tiga komponen yang mendasar, yaitu :

1. Fungsi sasaran yang linear, yang akan dioptimalkan, dan umumnya berbentuk :

$$F(X) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad , \; j=1,2,\ldots,n$$

dengan x_j = perubah struktural

c_j = koefisien ongkos

2. Kendala-kendala struktural yang linear, yang berbentuk :

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \begin{Bmatrix} \le \\ = \\ \ge \end{Bmatrix} b_i \qquad , \; \begin{matrix} i=1,2,\ldots,m \\ j=1,2,\ldots,n \end{matrix}$$

dengan a_{ij} = koefisien struktural

b_i = konstanta yang menyatakan kapasitas maksimal atau syarat minimal sumber

3. Kendala-kendala tidak negatif yang berbentuk :

$$x_j \ge 0 \qquad , \; j=1,2,\ldots,n$$

Seperti sudah dikatakan pada awal bab ini, masalah angkutan adalah bagian dari masalah program linear. Ketiga komponen dasar yang terdapat dalam masalah program linear juga terdapat dalam masalah angkutan. Hanya saja masalah angkutan memiliki beberapa kekhususan, yaitu :

1. Koefisien struktural a_{ij} terbatas bernilai 0 dan 1
2. Ada kehomogenan unit di antara kendala-kendala
3. Semua kendala struktural berbentuk persamaan

Jadi suatu masalah program linear dapat direduksi menjadi masalah angkutan, jika ketiga kekhususan di atas dipenuhi. Sasaran masalah angkutan adalah mengalokasikan barang dari sumber (origin) ke tujuan (destination) sedemikian hingga semua kapasitas sumber terpakai dan semua kebutuhan tujuan terpenuhi, sedangkan sasaran utamanya adalah meminimalkan ongkos total pengiriman.

Ruang Lingkup

Secara garis besar tulisan ini terbagi atas tiga bagian, yaitu Pendahuluan, Isi dan Penutup, yang secara keseluruhan diuraikan menjadi delapan bab. Pendahuluan ditulis dalam Bab I, sedangkan Penutup pada Bab VIII. Isi dari tulisan ini dimuat dalam Bab II sampai Bab VII, yang secara ringkas dapat diuraikan sebagai berikut :

Masalah angkutan dengan bentuk setimbang, sebagai pembicaraan pokok dalam tulisan ini, secara keseluruhan dibahas dalam Bab II, Bab III dan Bab IV. Pembahasan ini dimulai dari perumusan masalah angkutan, yang kemudian dilanjutkan dengan pembahasan mengenai masalah angkutan sebagai masalah program linear, yang memperlihatkan penerapan metode simpleks dalam masalah angkutan. Sebagai lanjutan dari kedua pembahasan ini adalah uraian tentang algoritma angkutan dan beberapa kasus yang dapat terjadi dalam masalah angkutan.

Dalam Bab V dibicarakan masalah angkutan yang diperluas (generalize transportation problem), yang meliputi perumusan matematis dan beberapa konsep dasar, serta penentuan penyelesaian awal dan uji optimalitasnya.

Masalah transshipment yang merupakan perluasan masalah angkutan yang menyangkut banyak rute dari tiap sumber dan tiap tujuan dibicarakan dalam Bab VI. Masalah penugasan (assignment problem), yang merupakan kejadian khusus dari masalah angkutan, dengan setiap fasilitas hanya dapat mengerjakan tepat satu tugas, dibicarakan dalam Bab VII.

Materi Prasyarat

Beberapa materi prasyarat yang diperlukan dalam pembahasan tulisan ini adalah teori simpleks dalam program linear dan matriks.

BAB II

PERUMUSAN MASALAH ANGKUTAN

2.1 Gambaran Masalah dan Perumusan Matematis

Suatu masalah angkutan dapat digambarkan sebagai berikut :

Diketahui ada sejumlah produk sejenis yang tersedia pada beberapa sumber (misalnya pabrik) yang berbeda, dan akan dikirimkan ke beberapa tempat tujuan (misalnya gudang) yang berbeda. Diketahui pula ongkos pengiriman untuk setiap unit produk dari masing-masing sumber ke masing-masing tujuan. Diasumsikan bahwa ongkos pengiriman itu berbanding lurus dengan banyaknya unit produk yang dikirim. Suatu tempat tujuan dapat menerima produk dari satu atau lebih sumber, karena semua produk sejenis. Dengan memperhatikan keterbatasan sumber dan kebutuhan minimal tujuan, sasaran masalah ini adalah menentukan banyaknya unit produk yang harus dikirim dari masing-masing sumber ke masing-masing tujuan, sedemikian hingga ongkos total pengiriman minimal.

Andaikan ada m sumber O_1, O_2, ... ,O_m, dan n tujuan D_1, D_2, ... ,D_n. Jumlah maksimal unit produk yang tersedia pada sumber i adalah a_i, jumlah minimal unit produk yang dibutuhkan oleh tujuan j adalah b_j, dan banyaknya unit produk yang dikirimkan dari sumber i ke tujuan j adalah x_{ij}. Tersedia jalur pengiriman dari tiap sumber ke tiap tujuan. Oleh karena itu seluruhnya ada mn buah x_{ij}

yang berbeda, dengan $x_{ij} \geq 0$ untuk setiap i,j. Produk yang dikirim dari suatu sumber tidak mungkin lebih dari jumlah yang tersedia pada sumber itu. Produk yang diterima oleh suatu tujuan tidak boleh kurang dari jumlah yang dibutuhkan oleh tempat itu. Kebutuhan dari setiap tujuan dapat dipenuhi hanya bila jumlah total penawaran tidak kurang dari jumlah total permintaan.

Jika c_{ij} adalah ongkos pengiriman untuk suatu unit produk dari sumber i ke tujuan j, maka perumusan matematis masalah angkutan dengan m sumber dan n tujuan adalah menentukan $x_{ij} \geq 0$ untuk semua i,j sedemikian hingga : meminimalkan ongkos total

$$z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \, x_{ij} \quad , \; c_{ij} \geq 0 \qquad (2-1)$$

yang memenuhi

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq a_i \quad , \quad a_i > 0 \quad , \quad i = 1,2,\ldots,m \qquad (2-2)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geq b_j \quad , \quad b_j > 0 \quad , \quad j = 1,2,\ldots,n \qquad (2-3)$$

dengan ketentuan $\sum^{m} a_i \geq \sum^{n} b_j$ (2-4)

Dalam perumusan di atas kendala (2-2) disebut kendala sumber, dan kendala (2-3) disebut kendala tujuan. Ini adalah suatu bentuk masalah program linear dalam mn perubah dengan m+n kendala. Oleh karena itu masalah ini dapat diselesaikan dengan metode simpleks. Untuk membentuk tabel simpleks semua kendala harus dijadikan bentuk persamaan terlebih dulu, dengan menambah perubah kelonggaran (slack variable) $S_1, S_2, \ldots, S_m$ berturut-turut untuk setiap i pada (2-2), dan perubah semu (artificial variable) $A_1, A_2, \ldots, A_n$

berturut-turut untuk setiap j pada (2-3). Dengan demikian an semua kendala menjadi bentuk persamaan. Perubah kelonggaran $S_1, S_2, \dots, S_m$ berturut-turut menyatakan kapasitas semu dari sumber-sumber $O_1, O_2, \dots, O_m$, dan koefisien ongkos untuk perubah kelonggaran adalah nol. Perubah semu $A_1, A_2, \dots, A_n$ berturut-turut menyatakan kebutuhan semu dari tujuan-tujuan $D_1, D_2, \dots, D_n$, dan koefisien ongkos untuk perubah semu adalah M, dengan M adalah suatu bilangan positip yang cukup besar. Tabel simpleks awal untuk masalah angkutan dengan m sumber dan n tujuan adalah :

Program	Ongkos/unit	Kuantitas	c_{11}	c_{12}	...	c_{1n}	c_{21}	c_{22}	...	c_{2n}	...	c_{m1}	c_{m2}	...	c_{mn}	0	0	...	0	M	...	M
			x_{11}	x_{12}	...	x_{1n}	x_{21}	x_{22}	...	x_{2n}	...	x_{m1}	x_{m2}	...	x_{mn}	S_1	S_2	...	S_m	A_1	...	A_n
S_1	0	a_1	1	1	...	1	0	0	...	0	...	0	0	...	0	1	0	...	0	0	...	0
S_2	0	a_2	0	0	...	0	1	1	...	1	...	0	0	...	0	0	1	...	0	0	...	0
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮		⋮	⋮	⋮		⋮		⋮	⋮		⋮	⋮	⋮		⋮	⋮		⋮
S_m	0	a_m	0	0	...	0	0	0	...	0	...	1	1	...	1	0	0	...	1	0	...	0
A_1	M	b_1	1	0	...	0	1	0	...	0	...	1	0	...	0	0	0	...	0	1	...	0
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮		⋮	⋮	⋮		⋮		⋮	⋮		⋮	⋮	⋮		⋮	⋮		⋮
A_n	M	b_n	0	0	...	1	0	0	...	1	...	0	0	...	1	0	0	...	0	0	...	1

Tabel 2-1

Apabila tabel simpleks awal untuk suatu masalah program linear berbentuk seperti tabel 2-1, maka masalah itu dapat digolongkan sebagai masalah angkutan. Iterasi selanjutnya dari tabel 2-1 di atas akan menghasilkan penyelesaian optimal untuk masalah ini.

<u>Contoh 2.1</u> : Tabel simpleks awal untuk masalah angkutan dengan dua sumber dan empat tujuan :

Program	Ongkos/unit	Kuantitas	c_{11}	c_{12}	c_{13}	c_{14}	c_{21}	c_{22}	c_{23}	c_{24}	0	0	M	M	M	M
			x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}	S_1	S_2	A_1	A_2	A_3	A_4
S_1	0	a_1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
S_2	0	a_2	0	0	0	0	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0
A_1	M	b_1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0
A_2	M	b_2	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0
A_3	M	b_3	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0
A_4	M	b_4	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1

Tabel 2-2

Beberapa contoh kasus yang dapat digolongkan sebagai masalah angkutan :

1. Sebuah perusahaan roti memproduksi suatu roti istimewa dari kedua pabriknya. Pabrik A memproduksi roti sebanyak 1500 buah, pabrik B memproduksi sebanyak 800 buah. Oleh perusahaan ini, roti-roti tersebut akan dijual di keempat toko roti yang dimilikinya. Toko 1 membutuhkan roti sebanyak 500 buah, toko 2 sebanyak 450 buah, toko 3 sebanyak 750 buah dan toko 4 sebanyak 600 buah. Ongkos pengiriman roti-roti ini dari kedua pabrik ke masing-masing toko roti telah ditetapkan. Dalam hal ini perusahaan menghadapi masalah bagaimana mengirimkan roti-rotinya dari pabrik ke masing-masing toko roti, sedemikian hingga ongkos total pengiriman minimal.

2. Suatu perusahaan membutuhkan 4 orang sekretaris, 5 orang kasir dan 7 orang penjual. Para pelamar yang diterima dibagi menjadi dua kelompok menurut latar belakang pendidikannya, yaitu ada 10 orang lulusan akademi dan 6 orang lulusan SMA. Berdasarkan hal ini perusahaan tersebut telah menetapkan gaji bulanan dari setiap

kelompok untuk masing-masing posisi pekerjaan. Masalah yang dihadapi perusahaan ini adalah bagaimana menempatkan para pelamar ini pada masing-masing posisi pekerjaan sedemikian hingga gaji bulanan total minimal.

Contoh 1 cukup jelas sebagai masalah angkutan, tetapi contoh 2 sama sekali tidak ada hubungannya dengan perihal angkutan dalam pengertian sehari-hari. Meskipun demikian masalah pada contoh 2 tersebut tetap dapat digolongkan sebagai masalah angkutan dengan dua sumber (dua kelompok pelamar: lulusan SMA dan lulusan akademi) dan tiga tujuan (tiga kelompok pekerjaan : sekretaris, kasir dan penjual), dengan :

a_i : banyaknya pelamar kategori i

b_j : banyaknya orang yang dibutuhkan untuk menempati posisi j

c_{ij} : gaji bulanan pelamar kategori i pada posisi j

x_{ij} : banyaknya pelamar kategori i yang sebaiknya ditempatkan pada posisi j

Jadi masalah apa pun yang memenuhi pola masalah angkutan dapat digolongkan sebagai masalah angkutan, meskipun masalah itu sama sekali tidak ada hubungannya dengan perihal angkutan dalam pengertian sehari-hari.

2.2 Kesetimbangan dalam Masalah Angkutan

Ada tiga kejadian yang mungkin timbul dalam masalah angkutan, yaitu :

<u>Kejadian 1</u> : $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$

Dalam kejadian ini kapasitas total sumber sama dengan kebutuhan total tujuan, sehingga kejadian ini disebut <u>kejadian setimbang</u>.

<u>Kejadian 2</u> : $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$

Dalam kejadian ini kapasitas total sumber melampaui kapasitas total tujuan, atau dengan kata lain ada <u>kelebihan produksi</u>. Kejadian ini digolongkan sebagai <u>kejadian tidak setimbang</u>.

<u>Kejadian 3</u> : $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$

Dalam kejadian ini kapasitas total sumber kurang dari kapasitas total tujuan, atau dengan kata lain ada <u>kekurangan produksi</u>, sehingga masalahnya menjadi tidak fisibel. Kejadian ini juga tergolong sebagai <u>kejadian tidak setimbang</u>.

Selanjutnya, dalam tulisan ini terutama yang dibicarakan adalah masalah angkutan dengan kejadian setimbang. Kejadian- kejadian tidak setimbang selalu dapat dikembalikan ke bentuk kejadian setimbang. Algoritma angkutan yang dibahas dalam tulisan ini adalah untuk masalah angkutan dengan kejadian setimbang.

<u>Teorema 2.1</u> : Masalah angkutan akan berbentuk kejadian setimbang bila dan hanya bila semua kendala struktural berbentuk persamaan.

<u>Bukti</u> :

a) Jika (2-2) dijumlahkan atas i, dengan i = 1,...,m, maka menjadi $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le \sum_{i=1}^{m} a_i$

Jika (2-3) dijumlahkan atas j, dengan j = 1,...,n, maka menjadi $\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \ge \sum_{j=1}^{n} b_j$

Jika kejadiannya setimbang, yaitu $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j = \alpha$,

maka $\alpha \le \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \le \alpha$. Hal ini berarti $\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = \alpha$.

Oleh karena itu jika $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{i=1}^{m} a_i$, maka kendala sumber harus berbentuk persamaan, karena tidak mungkin ada tanda ">" dalam kendala sumber. Begitu pula jika $\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} b_j$, maka kendala tujuan harus berbentuk persamaan, karena tidak mungkin ada tanda "<" dalam kendala tujuan. Jadi jika $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$ maka $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i$ dan $\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j$.

b) Jika semua kendala berbentuk persamaan, yaitu $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i$ dan $\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j$, maka $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{i=1}^{m} a_i$ dan $\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} b_j$. Dari sini dipenuhi bahwa $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$. Jadi jika $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i$ dan $\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j$ maka $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$.

Dari teorema 2.1 diperoleh perumusan matematis masalah angkutan untuk kejadian setimbang dengan m sumber dan n tujuan, yaitu :

Menentukan $x_{ij} \ge 0$ untuk semua i,j sedemikian hingga

$$z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, x_{ij} \quad , \; c_{ij} \ge 0 \qquad (2\text{-}5)$$

yang memenuhi

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad , \; a_i > 0 \quad , \quad i = 1,2,\ldots,m \qquad (2\text{-}6)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad , \quad b_j > 0 \quad , \quad j = 1,2,\ldots,n \tag{2-7}$$

dengan ketentuan $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$ (2-8)

Persamaan (2-6) dan (2-7) dapat ditulis menjadi :

$$\begin{array}{llllllll}
x_{11}+x_{12}+\ldots+x_{1n} & & & & & & & = a_1 \\
 & x_{21}+x_{22}+\ldots+x_{2n} & & & & & & = a_2 \\
 & & \ddots & & & & & \vdots \\
 & & & x_{m1}+x_{m2}+\ldots+x_{mn} & & & & = a_m \\
x_{11} & + x_{21} + & & \ldots & + x_{m1} & & & = b_1 \\
 & \ddots & & & & & & \vdots \\
 & x_{1n} + & & x_{2n} + & \ldots & + x_{mn} & & = b_n
\end{array} \tag{2-9}$$

Persamaan-persamaan dalam (2-9) dapat ditulis dalam bentuk matriks AX = B, dengan

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ \vdots \\ x_{1n} \\ \vdots \\ x_{m1} \\ \vdots \\ x_{mn} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \\ b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \tag{2-10}$$

$$A = \left[\begin{array}{ccccccc}
\underbrace{1\ 1 \ldots 1}_{n \text{ kolom}} & 0\ 0 \ldots 0 & \ldots & 0\ 0 \ldots 0 \\
0\ 0 \ldots 0 & 1\ 1 \ldots 1 & \ldots & 0\ 0 \ldots 0 \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
0\ 0 \ldots 0 & 0\ 0 \ldots 0 & \ldots & 1\ 1 \ldots 1 \\
1\ 0 \ldots 0 & 1\ 0 \ldots 0 & \ldots & 1\ 0 \ldots 0 \\
0\ 1 \ldots 0 & 0\ 1 \ldots 0 & \ldots & 0\ 1 \ldots 0 \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
0\ 0 \ldots 1 & 0\ 0 \ldots 1 & \ldots & 0\ 0 \ldots 1
\end{array}\right]
\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} m \text{ baris} \\
\left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} n \text{ baris}
\end{array}$$

$$\underbrace{\hspace{12em}}_{mn \text{ kolom}}$$

Matriks koefisien A secara ringkas dapat ditulis menjadi :

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} 1_n & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1_n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1_n & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1_n \\ I_n & I_n & I_n & \dots & I_n \end{bmatrix}}_{mn \text{ kolom}} \begin{matrix} \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} m \text{ baris} \\ \} \; n \text{ baris} \end{matrix} \qquad (2\text{-}11)$$

Matriks koefisien A berordo (m+n) x (mn), dengan :

1_n = vektor baris dengan n komponen yang seluruh elemennya 1

0 = vektor baris dengan n komponen yang seluruh elemennya 0

I_n = matriks satuan ordo n

<u>Contoh 2.2</u> : untuk suatu masalah angkutan dengan dua sumber dan empat tujuan, AX = B menjadi :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \\ x_{14} \\ x_{21} \\ x_{22} \\ x_{23} \\ x_{24} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}$$

Tampak bahwa kendala-kendala dalam masalah angkutan mempunyai bentuk khusus. Semua koefisien tak nol dari x_{ij} bernilai satu, dan sembarang x_{ij} yang tak nol muncul dalam tepat dua kendala, satu dalam kendala sumber dan satu dalam kendala tujuan. Keistimewaan ini mengakibatkan masalah angkutan dapat diselesaikan dengan cara tersendiri yang jauh lebih mudah dan efisien daripada dengan metode simpleks.

2.3 Metode Angkutan

Metode angkutan terdiri atas tiga langkah dasar. Penyelesaian dengan metode angkutan ini dikerjakan pada tabel angkutan. Tabel angkutan dari suatu masalah angkutan dengan m sumber dan n tujuan berbentuk :

Sumber	Tujuan						Kapasitas sumber
	D_1	D_2	...	D_j	...	D_n	a_i
O_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	...	c_{1j} x_{1j}	...	c_{1n} x_{1n}	a_1
O_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	...	c_{2j} x_{2j}	...	c_{2n} x_{2n}	a_2
⋮	⋮	⋮	...	⋮	...	⋮	⋮
O_i	c_{i1} x_{i1}	c_{i2} x_{i2}	...	c_{ij} x_{ij}	...	c_{in} x_{in}	a_i
⋮	⋮	⋮	...	⋮	...	⋮	⋮
O_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	...	c_{mj} x_{mj}	...	c_{mn} x_{mn}	a_m
b_j	b_1	b_2	...	b_j	...	b_n	$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$

Tabel 2-3

Sebagai masalah khusus dari program linear, maka metode angkutan mempunyai tiga langkah dasar sebagaimana terdapat dalam program linear. Tiga langkah dasar dalam metode angkutan :

Langkah 1 : Menentukan suatu penyelesaian awal sedemikian hingga diperoleh suatu penyelesaian fisibel basis (basic feasible solution). Sel-sel yang bernilai $x_{ij}>0$ dalam tabel angkutan disebut sel isi, yaitu sel yang digunakan sebagai jalur pengiriman. Sedangkan sel yang bernilai $x_{ij}=0$

disebut sel kosong, yaitu sel yang tidak digunakan sebagai jalur pengiriman. Dalam tabel angkutan biasanya nilai $x_{ij}=0$ tidak ditulis.

Langkah 2 : Mengadakan pengujian optimalitas, seperti halnya pada metode simpleks, yaitu dengan menentukan bilangan kontrol $c'_{ij} = z_{ij} - c_{ij}$ pada tiap-tiap sel kosong. Jika penyelesaian sudah optimal, maka ongkos total minimal tercapai. Sebaliknya jika belum, dilanjutkan dengan langkah 3.

Langkah 3 : Menentukan penyelesaian fisibel basis baru dengan memajukan penyelesaian fisibel basis sebelumnya. Setelah diperoleh penyelesaian fisibel basis baru, langkah 2 dan 3 diulangi lagi sampai diperoleh penyelesaian optimal.

BAB III

MASALAH ANGKUTAN (SETIMBANG) SEBAGAI MASALAH PROGRAM LINEAR

3.1 Sifat-sifat Matriks Koefisien A

Matriks koefisien A seperti dalam (2-11) dapat juga ditulis dalam bentuk $A = (p_{11}, p_{12}, \ldots, p_{1n}, p_{21}, \ldots, p_{2n}, \ldots, p_{ij}, \ldots, p_{m1}, \ldots, p_{mn})$.

$$p_{11} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \hline 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad p_{12} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \hline 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad p_{21} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \hline 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad p_{mn} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \hline 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} m \text{ baris} \\ \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} n \text{ kolom} \end{array}$$

Masing-masing p_{ij} adalah vektor kolom dengan m+n komponen dan hanya ada dua komponen p_{ij} yang bukan 0, melainkan 1. Oleh karena itu p_{ij} dapat ditulis sebagai :

$$p_{ij} = e_i + e_{m+j} \tag{3-1}$$

dengan e_k adalah vektor satuan dalam E^{m+n}, dengan komponen ke-k adalah +1.

Dari (2-11) tampak bahwa penjumlahan m vektor baris pertama dari A menghasilkan 1_{mn}, yaitu vektor baris dengan mn komponen yang semua komponennya adalah 1. Penjumlahan n vektor baris terakhir juga menghasilkan 1_{mn}. Jumlah m vektor baris pertama dikurangi jumlah n vektor baris terakhir menghasilkan vektor nol dengan mn komponen. Oleh karena itu rank matriks A pasti kurang dari m+n.

<u>Teorema 3.1</u> : Rank matriks A adalah m+n-1.

<u>Bukti</u> :

Dibentuk matriks D dari matriks A dengan mengambil kolom ke-n, 2n, ..., mn, 1, 2, ..., n-1 dan baris ke-1, 2, ..., m+n-1.

$$D = \begin{array}{l} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \hline 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\0\\\vdots\\0\end{array}}\right\}\text{m baris} \\ \left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\0\\\vdots\\0\end{array}}\right\}\text{n-1 baris} \end{array} \\ \qquad \underbrace{\hphantom{0\;0\;\ldots\;0}}_{\text{m kolom}} \quad \underbrace{\hphantom{0\;0\;\ldots\;0}}_{\text{n-1 kolom}} \end{array} \qquad (3\text{-}2)$$

dan $|D| = 1$. Matriks D adalah matriks bujursangkar berordo m+n-1, maka r(A) = m+n-1.

Andaikan vektor-vektor baris sumber dari A, yaitu m vektor baris pertama dinyatakan dengan s^i, i=1,...,m; dan vektor-vektor baris tujuan, yaitu n vektor baris terakhir dinyatakan dengan d^j, j=1,...,n. Relasi yang menyatakan dependensi linear antara vektor-vektor baris dalam A dapat ditulis sebagai :

$$\sum_{i=1}^{m} s^i - \sum_{j=1}^{n} d^j = 0 \qquad (3\text{-}3)$$

Tampak bahwa koefisien dari setiap vektor baris adalah +1 atau -1. Ini berarti bahwa sembarang vektor baris dari A dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari m+n-1 vektor baris sisanya. Contoh : vektor baris s^1 dapat dinyatakan sebagai $s^1 = \sum_{j=1}^{n} d^j - \sum_{i=2}^{m} s^i$. Jadi sembarang baris dari A dapat dicoret dan sisanya adalah matriks berordo (m+n-1)x(mn) yang mempunyai rank m+n-1. Hal ini terjadi karena ada paling sedikit satu himpunan m+n-1 vektor baris yang independen linear dan oleh (3-3) satu baris sisanya dapat menggantikan sembarang vektor baris lain dalam himpunan independen linear itu. Himpunan yang baru juga akan independen linear.

Dependensi linear seperti di atas juga dipenuhi untuk vektor-vektor baris dari sembarang matriks R berordo (m+n)xk, yang dibentuk dengan memilih sembarang $k \le mn$ kolom dari A. Bila vektor-vektor baris sumber dalam R dinyatakan sebagai s^i dan vektor-vektor baris tujuan dinyatakan sebagai d^j, maka (3-3) juga dipenuhi oleh R. Sebenarnya (3-3) juga dipenuhi oleh setiap vektor p_{ij}. Andaikan R dibentuk dari m+n-1 kolom yang independen linear dari A. Rank R = m+n-1. Dari (3-3) diketahui bahwa sembarang vektor baris dalam R adalah kombinasi linear dari m+n-1 vektor baris sisanya, maka setiap himpunan m+n-1 vektor baris dalam R juga independen linear. Ini berarti jika suatu baris sembarang dari R dicoret, maka matriks sisanya yang berordo m+n-1 akan nonsingular. Sama halnya jika suatu matriks R berordo (m+n)x(m+n-1) yang dibentuk dari m+n-1 kolom dari A, dan jika ada satu minor berordo m+n-1 dalam R yang determinannya tidak nol, maka semua (m+n-1) minor dalam R yang berordo m+n-1, determinannya juga tidak nol.

<u>Teorema 3.2</u> : Matriks A bersifat <u>unimodular</u>, yaitu setiap determinan minor A hanya dapat bernilai ± 1 atau 0.

<u>Bukti</u> :

Andaikan A_k adalah submatriks berordo k yang dibentuk dari sembarang k kolom yang berbeda dan k baris yang berbeda dari A. Masing-masing kolom A_k mungkin memuat dua buah elemen 1, sebuah elemen 1 atau sama sekali tidak memuat elemen 1. Jika A_k berisi satu atau lebih kolom yang semua elemennya 0, maka $|A_k|=0$. Jika setiap kolom A_k memuat dua buah elemen 1, maka untuk setiap kolom A_k, sebuah elemen 1 terdapat pada baris sumber dan elemen 1 yang lain pada baris tujuan. Selisih dari jumlah vektor-vektor baris sumber dan jumlah vektor-vektor baris tujuan akan berupa suatu vektor nol. Oleh karena itu vektor-vektor baris dalam A_k tidak independen linear, sehingga $|A_k|=0$. Jika ada paling sedikit satu kolom yang hanya memuat sebuah elemen 1, maka akan diperoleh $|A_k| = \pm|A_{k-1}|$, dengan A_{k-1} adalah minor A berordo k-1. Cara yang sama dapat dikerjakan pada A_{k-1}, sehingga akan diperoleh $|A_{k-1}| = 0$ atau $|A_{k-1}| = \pm|A_{k-2}|$, dan seterusnya. Elemen-elemen A hanya 0 dan 1, sehingga $|A_1|=0$ atau 1. Dari sini terbukti bahwa setiap determinan minor dari A hanya bernilai ±1 atau 0.

3.2 Penerapan Metode Simpleks dalam Masalah Angkutan

Dalam tabel simpleks masalah angkutan (tabel 2-1), semua kendala tetap berjumlah m+n. Dari m+n kendala tersebut ada sebuah kendala yang berlebih (redundant). Oleh karena itu penyelesaian optimal akan memuat sebuah vektor semu dalam basis, dengan nilai nol. Teorema 3.1 menyatakan r(A)=m+n-1, maka suatu penyelesaian optimal untuk masalah angkutan dengan m sumber dan n tujuan paling banyak memuat m+n-1 buah $x_{ij} > 0$.

<u>Teorema 3.3</u> : Jika $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$, maka masalah angkutan selalu mempunyai suatu penyelesaian fisibel.

<u>Bukti</u> :

$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j = \alpha$,

maka $x_{ij} = \dfrac{a_i b_j}{\alpha}$ adalah penyelesaian fisibel untuk semua i,j. (3-4)

Masing-masing $x_{ij} \geq 0$ dan (2-6) dipenuhi, karena

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \frac{a_i b_j}{\alpha} = \frac{a_i \sum_{j=1}^{n} b_j}{\alpha} = a_i$$

dan (2-7) dipenuhi, karena

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = \sum_{i=1}^{m} \frac{a_i b_j}{\alpha} = \frac{b_j \sum_{i=1}^{m} a_i}{\alpha} = b_j$$

Andaikan ada suatu penyelesaian fisibel basis untuk sistem persamaan AX=B, dan *B* adalah matriks basis berordo (m+n) yang terdiri dari m+n-1 buah p_{ij} dan sebuah vektor semu q yang bernilai nol. *B* adalah suatu matriks baru yang dibentuk dari A dengan mengambil m+n vektor kolom dari A yang independen linear. Setiap p_{ij} dalam A dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari m+n-1 vektor basis dalam *B*. Suatu himpunan vektor-vektor basis untuk masalah angkutan akan merupakan suatu himpunan m+n-1 vektor A yang independen linear.

Andaikan $p^{B}_{\alpha\beta}$ adalah suatu vektor dari suatu himpunan vektor-vektor basis yang bersesuaian dengan perubah basis $x^{B}_{\alpha\beta}$. Setiap vektor p_{ij} dari A dapat ditulis sebagai :

$$p_{ij} = \sum_{\alpha\beta} y_{ij}^{\alpha\beta}\, p_{\alpha\beta}^{B} \qquad (3\text{-}5)$$

dengan $\sum_{\alpha\beta}$ berarti penjumlahan itu dikerjakan pada vektor-vektor basis. Vektor semu q tidak perlu ditulis dalam (3-5) karena nilainya nol, sehingga $y_{ij}^{q}=0$ untuk semua i,j. Jadi suatu baris yang semua elemennya nol dalam tabel simpleks, bersesuaian dengan vektor semu.

<u>Teorema 3.4</u> : Setiap $y_{ij}^{\alpha\beta}$ bernilai ±1 atau 0.

<u>Bukti</u> :

Persamaan (3-5) adalah suatu himpunan m+n persamaan linear dalam m+n-1 anu, yaitu $y_{ij}^{\alpha\beta}$. Jika R adalah suatu matriks yang dibentuk dari m+n-1 kolom independen linear dari A, maka R $y_{ij}^{\alpha\beta} = p_{ij}$. Suatu baris sembarang dari R dapat dicoret dan akan menghasilkan matriks nonsingular. Diambil persamaan ke-i dari (3-5). Dalam komponen ke-i dari p_{ij} terdapat sebuah elemen 1. Setelah persamaan ke-i dikeluarkan, diperoleh himpunan yang baru dari persamaan-persamaan tersebut. Persamaan-persamaan itu dapat ditulis T $y_{ij} = e_{j+m-1}$, dengan e_{j+m-1} adalah vektor satuan yang terdiri atas m+n-1 komponen, dan T diperoleh dari R dengan menghapus baris i. Jika sebuah baris yang memuat sebuah elemen 1 dari p_{ij} dicoret, maka yang ada tinggal sebuah vektor satuan. T adalah matriks nonsingular, maka

$$y_{ij} = T^{-1} e_{j+m-1} = \rho_{j+m-1} \qquad (3\text{-}6)$$

dengan ρ_{j+m-1} adalah kolom ke-(j+m-1) dari T^{-1}. Setiap komponen ρ_{j+m-1} adalah determinan minor berordo m+n-2 dari T dibagi dengan |T| , dan |T|≠0. |T| dan minor-minor T juga merupakan minor-minor A. Oleh karena itu setiap elemen dari ρ_{j+m-1} adalah ± 1 atau 0. Jadi setiap $y_{ij}^{\alpha\beta}$ bernilai ± 1 atau 0.

Untuk melangkah dari suatu tabel simpleks ke tabel simpleks selanjutnya, perlu dicari vektor yang masuk basis dan vektor yang harus diganti. Rumus transformasi untuk perubah basis adalah :

$$\hat{x}^{B}_{\alpha\beta} = x^{B}_{\alpha\beta} - \frac{y^{\alpha\beta}_{st}}{y^{uv}_{st}} \; x^{B}_{uv} \quad , \alpha\beta \neq uv \qquad (3\text{-}7a)$$

$$\hat{x}_{st} = \frac{x^{B}_{uv}}{y^{uv}_{st}} \qquad (3\text{-}7b)$$

dengan p_{st} adalah vektor yang masuk basis dan p^{B}_{uv} adalah vektor yang diganti. Tanda ˆ artinya besaran dalam tabel baru. Dari teorema 3.4 pastilah $y^{\alpha\beta}_{st} = \pm 1$ atau 0 ; dan $y^{uv}_{st} = 1$, karena y^{uv}_{st} adalah unsur kunci yang harus positif. Dengan demikian diperoleh $\hat{x}^{B}_{\alpha\beta} = \hat{x}^{B}_{\alpha\beta}$ atau $\hat{x}^{B}_{\alpha\beta} = \hat{x}^{B}_{\alpha\beta} \pm x^{B}_{uv}$. Nilai yang baru dari perubah ini kini berupa penjumlahan atau pengurangan.

<u>Teorema 3.5</u> : Jika a_i dan b_j dari (2-6) dan (2-7) bernilai bulat, maka semua $x_{ij} > 0$ dalam penyelesaian optimal juga bernilai bulat.

<u>Bukti</u> :

Jika a_i dan b_j bernilai bulat maka dalam tabel simpleks awal perubah basis untuk penyelesaian fisibel basis akan bernilai bulat. Rumus transformasi untuk perubah basis hanya berbentuk penjumlahan atau pengurangan, maka perubah basis dalam penyelesaian basis optimal bernilai bulat.

Teorema 3.5 juga dapat dianggap sebagai akibat dari sifat unimodularitas matriks A.

Keistimewaan nilai $y_{ij}^{\alpha\beta}$ mengakibatkan (3-5) dapat ditulis sebagai :

$$p_{ij} = \sum_{\alpha\beta} (\pm)\, p_{\alpha\beta}^{B} \qquad (3\text{-}8)$$

dengan menghapus $y_{ij}^{\alpha\beta}$ yang bernilai nol. Koefisien dari masing-masing $p_{\alpha\beta}^{B}$ adalah ±1. Tiap-tiap vektor p_{ij} dan $p_{\alpha\beta}^{B}$ berbentuk seperti (3-1), maka dalam (3-8) pasti ada sebuah $p_{\alpha\beta}^{B}$ dengan bentuk $p_{iu}^{B} = e_i + e_{m+u}$ yang koefisiennya +1, sehingga ada elemen 1 dalam komponen ke-i dari p_{ij}. Kemudian jika $u \neq j$, dalam (3-8) pasti ada sebuah $p_{\alpha\beta}^{B}$ dengan bentuk $p_{vu}^{B} = e_v + e_{m+u}$ yang koefisiennya -1, sehingga elemen 1 dalam komponen ke-(m+u) dari p_{iu}^{B} akan terhapus. Jika cara ini diteruskan, maka dalam beberapa langkah yang tidak lebih dari m+n-1, akan diperoleh sebuah $p_{\alpha\beta}^{B}$ dengan bentuk $p_{vj}^{B} = e_v + e_{m+j}$ yang koefisiennya +1. Elemen 1 dalam komponen ke-w akan menghapus komponen ke-w dari vektor yang tepat sebelumnya, yang koefisiennya -1. Komponen ke-(m+j) dari p_{vj}^{B} akan menghapus komponen ke-(m+j) dari p_{ij}. Bentuk p_{ij} dalam vektor basis menjadi sangat sederhana, dan dapat ditulis :

$$p_{ij} = p_{iu}^{B} - p_{vu}^{B} + p_{vt}^{B} - \ldots - p_{vs}^{B} + p_{vj}^{B} \qquad (3\text{-}9)$$

Bentuk (3-9) dimulai dan diakhiri dengan tanda (+). Tanda (+) dan (-) selalu berselang-seling, maka sejumlah ganjil vektor-vektor basis yang tidak nol selalu dapat menyatakan setiap vektor dari A.

Contoh 3.1 :

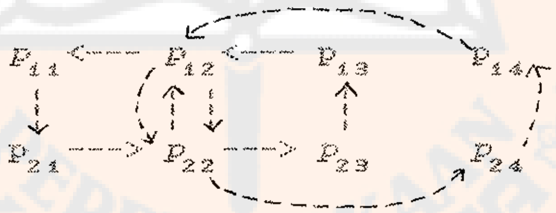
Pada matriks A dari contoh 2.2, vektor-vektor $p_{11}, p_{12}, p_{22},$

p_{23} dan p_{24} adalah independen linear. Di sini pengambilan vektor-vektor tersebut tidak sembarang. Maka dari itu setiap vektor dalam A dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari kelima vektor itu. Vektor p_{21}, p_{13} dan p_{14} tidak termasuk kelima vektor di atas, maka ketiga vektor ini dapat dinyatakan sebagai :

$$p_{21} = p_{22} - p_{12} + p_{11}$$
$$p_{13} = p_{12} - p_{22} + p_{23}$$
$$p_{14} = p_{12} - p_{22} + p_{24}$$

Pada contoh ini tampak bahwa tidak setiap vektor basis muncul dalam setiap pernyataan, tetapi masing-masing vektor basis pasti muncul paling tidak dalam satu dari ketiga pernyataan di atas.

Masih dari contoh 3.1, dibentuk suatu matriks simbolik dari p_{ij} di bawah ini, dengan vektor-vektor basis dicetak miring.



Dapat dibuat suatu loop yang menghubungkan setiap p_{ij} yang bukan basis dengan vektor-vektor basis yang tidak nol dalam bentuk (3-9).

Penulisan p_{ij} sebagai suatu matriks seperti di atas sangat penting. Dalam matriks $[p_{ij}]$ dapat cepat ditemukan suatu kombinasi linear dari vektor-vektor basis bagi p_{ij} yang bukan basis. Jika p_{ij} bukan vektor basis, untuk menemukan suatu kombinasi linear bagi p_{ij}, dimulai dengan p_{ij} itu sendiri, lalu masih pada baris i dicari suatu vektor basis p^B_{iu} sedemikian hingga ada vektor basis lain pada kolom u pada matriks itu. Koefisien p^B_{iu} adalah +1. Kemudian pada kolom u, dari p^B_{iu} menuju vektor basis p^B_{vu} sedemikian hingga ada vektor basis lain pada baris v. Koefisien p^B_{vu} adalah -1. Setelah itu sampailah pada vektor basis p^B_{vt} sedemikian hingga masih ada vektor basis lain pada kolom t. Koefisien p^B_{vt} adalah +1. Begitu seterusnya. Akhirnya loop ini harus berakhir pada vektor basis p^B_{vj} yang terletak pada kolom yang sama dengan p^B_{ij}, dan koefisien p^B_{vj} adalah +1. Dengan cara ini (3-9) diperoleh tanpa harus menghitung $y^{\alpha\beta}_{ij}$ secara eksplisit.

Jika pada langkah pertama mencari loop ini, dari p_{ij} ditemukan vektor basis p^B_{sj} pada kolom yang sama dengan p_{ij} sedemikian hingga ada vektor basis lain pada baris s, maka dengan cara seperti di atas akan diperoleh loop yang sama. Hanya saja arah lintasannya berlawanan dengan arah lintasan loop yang diperoleh dengan cara sebelumnya. Perlu diperhatikan bahwa tidak semua lintasan yang diperoleh dengan cara ini akan dapat menutup loop, tetapi pasti ada satu lintasan yang akan menutup loop. Pembicaraan tentang loop ini akan ditegaskan lagi pada bab IV.

Dalam tabel simpleks, untuk menentukan vektor yang masuk basis perlu dihitung nilai $z_j - c_j$, yang disebut koefisien kontrol. Dalam masalah angkutan, koefisien kontrol $z_j - c_j$ dilambangkan dengan c'_{ij}, yang disebut ongkos kesempatan (opportunity cost) vektor p_{ij} yang bukan basis. Jika $c^B_{\alpha\beta}$ adalah ongkos yang bersesuaian dengan vektor basis $p^B_{\alpha\beta}$, maka :

$$c'_{ij} = \sum_{\alpha\beta} y_{ij}^{\alpha\beta} \, c_{\alpha\beta}^{B} - c_{ij} \qquad (3\text{-}10a)$$

atau $$c'_{ij} = \sum_{\alpha} (\pm) c_{\alpha\beta}^{B} - c_{ij} \qquad (3\text{-}10b)$$

Untuk vektor p_{ij} dari (3-9), dapat ditulis :

$$c'_{ij} = c_{iu}^{B} - c_{vu}^{B} + c_{vt}^{B} - \ldots - c_{vs}^{B} + c_{vj}^{B} - c_{ij} \qquad (3\text{-}11)$$

Jika c_{ij} disusun dalam suatu matriks $[c_{ij}]$ seperti pada matriks $[p_{ij}]$, maka semua c'_{ij} dapat dihitung dengan cara yang sama seperti menghitung p_{ij} , yaitu dengan mencari suatu loop yang menghubungkan c_{ij} dengan vektor-vektor basis $c_{\alpha\beta}^{B}$. Untuk contoh 3.1 diperoleh :

$$c'_{21} = c_{22} - c_{12} + c_{11} - c_{21}$$

$$c'_{13} = c_{12} - c_{22} + c_{23} - c_{13}$$

$$c'_{14} = c_{12} - c_{22} + c_{24} - c_{14}$$

BAB IV

ALGORITMA ANGKUTAN

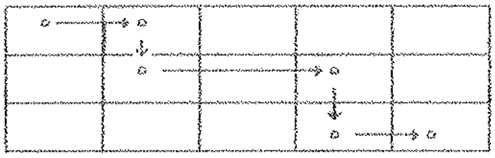
4.1 Konsep-konsep Dasar dalam Tabel Angkutan

Untuk menyelesaikan suatu masalah angkutan dengan metode angkutan, lebih dahulu harus dibuat tabel angkutan seperti tabel 2-3, karena algoritma angkutan dikerjakan pada tabel tersebut. Dalam tabel 2-3 terdapat tidak lebih dari m+n-1 buah $x_{ij}>0$, maka vektor p_{ij} yang bersesuaian dengan x_{ij} akan dependen linear. Yang akan dimasukkan dalam tabel hanyalah nilai perubah basis.

Di bawah ini ada beberapa definisi istilah yang akan digunakan dalam pembahasan :

Definisi 4.1 : Suatu lintasan berarah (directed path) dari sel (i,j) ke sel (v,w) dalam tabel angkutan adalah suatu himpunan berurutan dari sel-sel {(i,j), (i,k), (q,k), (q,r),..., (v,w)} atau {(i,j), (s,j), (s,t),..., (v,w)}, sedemikian hingga setiap dua sel yang bersebelahan dalam himpunan berurutan itu terletak pada baris atau kolom yang sama, sedangkan setiap tiga sel yang bersebelahan tidak terletak pada baris atau kolom yang sama. Masing-masing sel, kecuali mungkin yang terakhir, hanya muncul sekali dalam himpunan berurutan itu.

Gambar suatu lintasan berarah dari sel (1,1) ke sel (3,5):



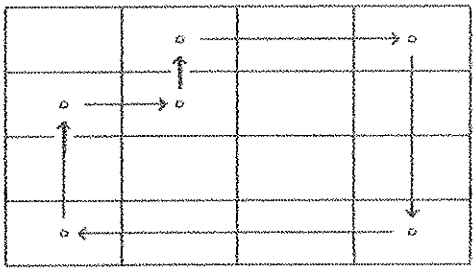
Gambar 4-1

Definisi 4.2 : Suatu cabang berarah (directed branch) adalah suatu segmen garis yang menghubungkan dua buah pasangan berurutan dari sel-sel yang terletak pada baris atau kolom yang sama dalam tabel angkutan. Sel pertama disebut titik awal cabang dan sel kedua disebut titik akhir cabang.

Suatu lintasan mungkin terdiri atas hanya satu atau beberapa cabang. Jika terdiri atas beberapa cabang, maka lintasan itu dapat dianggap sebagai suatu deretan cabang-cabang. Dalam gambar 4-1, lintasan berarah dari sel (1,1) ke sel (3,5) terdiri atas lima cabang. Titik akhir dari suatu cabang adalah titik awal dari cabang yang tepat berikutnya. Tiap-tiap cabang tegak lurus dengan cabang yang tepat berikutnya.

Definisi 4.3 : Suatu loop berarah (directed loop) dalam tabel angkutan adalah suatu lintasan berarah sedemikian hingga sel pertama sama dengan sel terakhir dan cabang pertama tegak lurus cabang terakhir.

Contoh gambar suatu loop :



Gambar 4-2

Dalam himpunan berurutan yang membentuk suatu loop selalu ada sejumlah genap sel-sel yang berbeda. Vektor-vektor p_{ij} dari matriks A (lihat Bab III) yang bersesuaian dengan sel-sel dalam suatu loop adalah dependen linear. Untuk memperlihatkan hal ini, dimulai dengan sembarang sel dalam loop, dan ditetapkan koefisien +1 untuk vektor yang bersesuaian dengan sel terpilih itu. Dari sel itu pindah ke sel berikutnya, yang terletak pada baris atau kolom yang sama dengan sel pertama, dan ditetapkan koefisien -1 untuk vektor yang bersesuaian dengan sel kedua ini. Cara ini dikerjakan berulang-ulang dengan menetapkan koefisien +1 dan -1 secara berselang-seling untuk vektor-vektor yang bersesuaian dengan sel-sel yang dipilih. Akhirnya akan diperoleh suatu dependensi linear vektor-vektor yang bersesuaian dengan sel-sel dalam loop, seperti misalnya:

$$p_{ij} - p_{rj} + p_{rs} - \cdots + p_{vj} - p_{iw} = 0$$

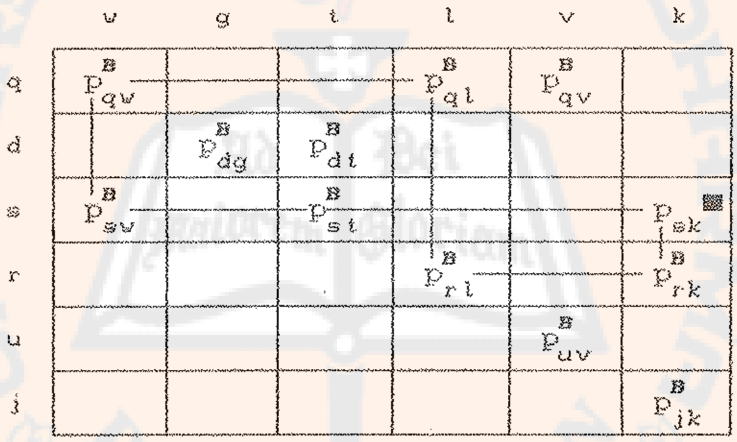
Suatu relasi dependensi linear dari vektor-vektor p_{ij} pasti berbentuk seperti (3-9) dan dari definisi 4.3 tampak bahwa sel-sel yang bersesuaian dengan himpunan berurutan vektor-vektor dependen linear $\{p_{ij},\ p^{B}_{iu},\ p^{B}_{vu}, \ldots,\ p^{B}_{vj}, p_{ij}\}$ membentuk suatu loop dalam tabel angkutan. Oleh karena itu setiap himpunan vektor yang tidak membentuk loop adalah independen linear. Jadi suatu himpunan vektor basis dari A adalah suatu himpunan m+n-1 vektor sedemikian hingga sel-sel dalam tabel angkutan yang bersesuaian dengan vektor-vektor ini tidak membentuk suatu loop. Sel-sel yang demikian disebut sel-sel basis.

Definisi 4.4 : Suatu himpunan sel dalam tabel angkutan disebut terhubung jika ada suatu lintasan berarah yang menghubungkan setiap sel dalam himpunan itu dengan sel lainnya dalam himpunan itu juga.

Teorema 4.1 : Sel-sel dalam tabel angkutan yang bersesuaian dengan m+n-1 vektor basis adalah terhubung.

Bukti :

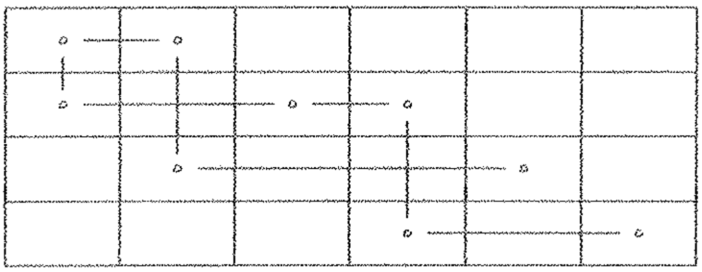
Andaikan tidak ada lintasan yang menghubungkan sel (s,t) dan (u,v) yang bersesuaian dengan vektor basis p^B_{st} dan p^B_{uv}. Lintasan yang ada hanya menghubungkan sel-sel basis sisanya. Andaikan vektor p_{sk} dependen linear dengan vektor-vektor basis, maka ada suatu loop yang menghubungkan sel (s,k) dengan sel-sel basis. Ini berarti ada suatu lintasan berarah yang menghubungkan hanya sel-sel basis. Lintasan itu akan menghubungkan sel-sel basis yang bersesuaian dengan vektor-vektor basis p^B_{sv} dan p^B_{rk}. Jika $p^B_{sv} \neq p^B_{st}$ maka vektor-vektor itu dapat dihubungkan dengan suatu cabang. Pasti ada vektor basis lain dalam baris r atau kolom k. Andaikan vektor basis dalam baris r adalah p^B_{rv}, maka jika $p^B_{rv} \neq p^B_{uv}$, vektor-vektor itu dapat dihubungkan dengan suatu cabang. Sebaliknya jika vektor basis dalam baris r itu tidak pada kolom v, misalnya vektor basis itu adalah p^B_{rl}, maka dengan cara menghubungkan setiap dua vektor basis yang terletak pada baris atau kolom yang sama pasti akan sampai pada suatu vektor basis yang terletak pada baris u atau vektor basis yang terletak pada kolom v. Hal ini pasti terjadi, karena tidak mungkin p^B_{uv} merupakan satu-satunya vektor basis pada baris u dan sekaligus pada kolom v. Dengan demikian pasti ada cabang yang menghubungkan p^B_{uv} dengan p^B_{uf} jika $p^B_{uv} \neq p^B_{uf}$, atau ada cabang yang menghubungkan p^B_{uv} dengan p^B_{qv} jika $p^B_{uv} \neq p^B_{qv}$ (gambar 4-3). Kenyataan ini menimbulkan kontradiksi dengan pengandaian semula. Jadi terbukti bahwa sel-sel basis adalah terhubung.



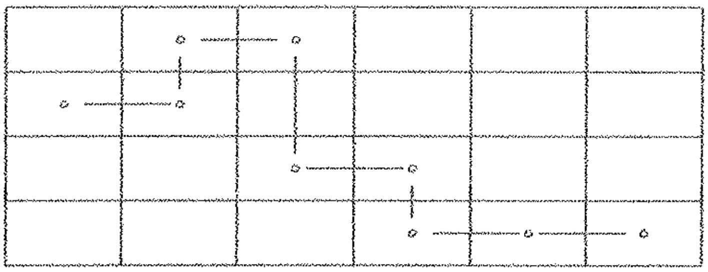
Gambar 4-3

<u>Definisi 4.5</u> : Suatu <u>pohon</u> (tree) dalam tabel angkutan adalah suatu himpunan terhubung dari sel-sel tanpa loop.

Contoh gambar suatu pohon :



Gambar 4-4



Gambar 4-5

Suatu himpunan m+n-1 sel-sel basis dalam tabel angkutan membentuk suatu pohon, atau vektor-vektor yang bersesuaian dengan m+n-1 sel dalam setiap pohon akan membentuk suatu basis. Suatu pohon yang terdiri atas m+n-1 sel disebut pohon basis, dan mempunyai paling sedikit satu sel di setiap baris atau kolom dalam tabel angkutan. Gambar 4-4 dan 4-5 menunjukkan pohon-pohon basis untuk suatu masalah angkutan dengan empat sumber dan enam tujuan.

4.2 Penentuan Penyelesaian Awal

Langkah pertama yang harus dikerjakan untuk menyelesaikan suatu masalah angkutan dengan algoritma angkutan adalah menentukan suatu penyelesaian awal dalam tabel angkutan, sedemikian hingga diperoleh suatu penyelesaian fisibel basis.

4.2.1 Langkah Dasar dalam Penentuan Penyelesaian Awal

Langkah-langkah dasar untuk mendapatkan suatu penyelesaian awal adalah sebagai berikut :

1. Jika dengan suatu metode tertentu sudah dipilih sembarang perubah x_{ij} sebagai suatu perubah basis dan ditetapkan nilai x_{ij} ini sebesar mungkin sampai memenuhi kendala baris i atau kolom j, dengan x_{ij} = min (a_i, b_j).

Nilai x_{ij} ini ditulis pada sel (i,j).

2. Jika $a_i<b_j$, maka $x_{ij} = a_i$ dan baris i menjadi jenuh; artinya kendala baris i terpenuhi. Baris i dapat dicoret atau tidak diperhatikan lagi dalam pengisisan selanjutnya, dan semua perubah dalam baris i selain x_{ij} adalah bukan basis. Nilai pada kolom j kini berkurang menjadi b_j-a_i.

   Jika $a_i>b_j$, maka $x_{ij} = b_j$ dan kolom j menjadi jenuh. Kolom j dapat dicoret atau tidak diperhatikan lagi dalam pengisisan selanjutnya, dan semua perubah dalam kolom j selain x_{ij} adalah bukan basis. Nilai pada baris i kini berkurang menjadi a_i-b_j.

   Jika $a_i=b_j$, maka akan terjadi kemerosotan (degeneracy). Hal ini akan dibicarakan tersendiri dalam subbab 4.6.

3. Cara 1 dan 2 diulangi dalam tabel yang telah tereduksi itu, sampai semua baris dan kolom menjadi jenuh.

Sesungguhnya secara umum, sel-sel yang akan diisi dipilih dengan bebas, asalkan tidak melanggar langkah-langkah dasar. Metode-metode penentuan penyelesaian awal yang diberikan di sini dimaksudkan agar penyusunan tabel awal sistematis, dan proses menuju optimal cepat (kecuali metode sudut barat laut).

<u>Teorema 4.2</u> : Penentuan penyelesaian awal dengan langkah dasar akan menghasilkan suatu penyelesaian basis.

<u>Bukti</u> :

Penentuan penyelesaian awal dengan langkah dasar ini menghasilkan tidak lebih dari m+n-1 buah $x_{ij}>0$, karena setelah m+n-1 langkah, m+n-1 kendala akan terpenuhi dan satu kendala sisanya otomatis akan terpenuhi. Selanjutnya akan diperlihatkan bahwa tidak ada loop melalui m+n-1 sel yang bersesuaian dengan m+n-1 buah $x_{ij}>0$ ini. Andaikan pada langkah ke-k diperoleh suatu $x_{ij}>0$, dan sel (i,j) bersama-sama dengan beberapa atau semua dari k-1 sel yang bersesuaian dengan perubah bernilai positif yang diperoleh sebelumnya, membentuk suatu loop. Andaikan loop tersebut dapat disebut sebagai himpunan berurutan {(i,j),(i,r),(s,r), ...,(v,u), (v,j), (i,j)}. Andaikan sebelum menentukan suatu nilai positif bagi x_{ij}, sudah ada nilai positif bagi x_{ir} sedemikian hingga kolom r menjadi jenuh. Ini berarti bahwa sebelumnya sudah ada suatu nilai positif bagi x_{sr}, sehingga baris s menjadi jenuh. Dengan cara ini dapat disimpulkan bahwa kolom j menjadi jenuh dengan adanya penetapan suatu nilai positif bagi x_{vj}. Jika masih ditetapkan suatu nilai positif bagi x_{ij}, maka akan terjadi kontradiksi, karena sebenarnya kolom j sudah jenuh. Jadi tidak ada loop yang dapat dibentuk, dan diperoleh suatu penyelesaian fisibel basis.

4.2.2 Beberapa Metode Penentuan Penyelesaian Awal

Ada beberapa metode yang dapat digunakan untuk menentukan suatu penyelesaian fisibel basis awal, dan semua metode ini mengikuti aturan yang ada pada langkah dasar.

1. <u>Metode sudut barat laut (Northwest-corner rule)</u>

   Pengisian dimulai dengan sel (1,1), dengan menentukan $x_{11}=\min(a_1,b_1)$ sedemikian hingga baris 1 atau kolom 1 menjadi jenuh. Jika $a_1 > b_1$, maka pengisian berpindah ke sel (1,2), dan ditentukan x_{12} = min $(a_1 - b_1, b_2)$. Jika $a_1 < b_1$, pengisisan berpindah ke sel (2,1), dan ditentukan x_{21} = min $(a_2, b_1 - a_1)$. Cara ini dilakukan berulang-ulang dengan berpindah ke sel sebelah kanan dari sel sebelumnya atau ke sel sebelah bawah dari sel sebelumnya, sampai diperoleh suatu nilai positif untuk x_{mn}. Penentuan penyelesaan fisibel basis awal dengan metode ini mungkin jauh dari optimal, karena tidak memperhitungkan ongkos.

<u>Contoh 4.1</u> :

Ada suatu masalah angkutan dengan tiga sumber dan empat tujuan. Data mengenai kapasitas tiap sumber, kebutuhan tiap tujuan dan ongkos pengiriman setiap unit barang dari masing-masing sumber ke masing-masing tujuan termuat dalam tabel 4-1.

O_i \ D_j	1	2	3	4	a_i
1	2	1	5	4	70
2	3	2	4	2	40
3	6	4	2	3	40
b_j	35	40	50	25	150

Tabel 4-1

Ditetapkan x_{11}=min (35,70)=35, sehingga kolom 1 menjadi jenuh. Pengisian berpindah ke sel (1,2) dengan menetapkan x_{12}=min (70-35,40)=35, sehingga baris 1 jenuh. Selanjutnya pengisian berpindah ke sel (2,2) dengan x_{22} = min (40,40-35)=5, sehingga kolom 2 jenuh. Berikutnya pada sel (2,3) diisikan x_{23}=min (40-5,50)=35 maka baris

2 menjadi jenuh. Pada sel (3,3) ditetapkan x_{33}=min (40, 50-35)=25, sehingga sekaligus baris 3 dan kolom 4 jenuh. Tabel 4-2 adalah tabel awal untuk masalah angkutan ini dengan 3+4-1=6 buah x_{ij}>0.

$O_i \backslash D_j$	1	2	3	4	a_i
1	35 [2]	35 [1]	[5]	[4]	70
2	[3]	5 [2]	35 [4]	[2]	40
3	[6]	[4]	15 [2]	25 [3]	40
b_j	35	40	50	25	150

Tabel 4-2

2. <u>Metode kolom minimum</u>

Dimulai dengan kolom 1 dari tabel. Pada kolom 1 ini dipilih ongkos terkecil (minimum). Andaikan ongkos terkecil itu terdapat pada baris r maka x_{r1}=min (a_r, b_1). Jika $x_{r1}=b_1$ maka kolom 1 menjadi jenuh. Kolom 1 dapat dicoret dan pengisian selanjutnya dilakukan pada kolom 2. Jika $x_{r1}=a_r$ maka baris r yang jenuh. Baris r dicoret dan kemudian dicari lagi ongkos terkecil berikutnya pada kolom 1 itu. Andaikan itu terdapat pada baris s, maka x_{s1} = min (a_s, b_1-a_r). Cara ini diteruskan sampai kolom 1 jenuh. Jika ada lebih dari satu ongkos terkecil pada suatu kolom, dapat dipilih salah satu secara sembarang. Jika kolom 1 sudah jenuh, pengisian dilakukan pada kolom 2, dengan cara yang sama. Begitu seterusnya sampai kolom n jenuh.

<u>Contoh 4.2</u> :

Untuk contoh ini tetap digunakan data dari tabel 4-1. Pada kolom 1, ongkos terkecil adalah c_{11}=2, maka x_{11}=

min (70,35)=35, sehingga kolom 1 jenuh. Pada kolom 2 ongkos terkecil adalah c_{12}=1, maka x_{12}=min (70-35,40) = 35, baris 1 kini jenuh. Ongkos terkecil berikutnya pada kolom 2 adalah c_{22}=2, maka x_{22}= min (40,40-35) =5, kolom 2 jenuh. Pada kolom 3, c_{33}=2 adalah ongkos terkecil, maka x_{33}= min (40,50)=40, baris 3 kini jenuh. Pilihan berikutnya adalah sel (2,3) dengan x_{23} = min (40-5,50-40) = 10, kolom 3 kini jenuh. Pengisian terakhir jatuh pada sel (2,4) dengan x_{24}= min (40-10-5,25) =25. Akhirnya baik baris 2 maupun kolom 4 kini jenuh. Penyelesaian awal ini tampak seperti pada tabel 4-3.

O_i \ D_j	1	2	3	4	a_i
1	35 [2]	35 [1]	[5]	[4]	70
2	[3]	5 [2]	10 [4]	25 [2]	40
3	[6]	[4]	40 [2]	[3]	40
b_j	35	40	50	25	150

Tabel 4-3

3. <u>Metode baris minimum</u>

Dimulai dengan baris 1, dipilih ongkos terkecil pada baris 1 ini. Andaikan itu terjadi pada kolom r, maka x_{1r}=min (a_1,b_r). Jika x_{1r}=a_1, maka baris 1 jenuh. Pengisian berikutnya dilakukan pada baris 2. Jika x_{1r}=b_r, maka kolom r yang jenuh, kemudian dicari lagi ongkos terkecil selanjutnya pada baris 1 ini. Andaikan itu ada pada kolom s, maka x_{1s}=min (a_1-b_r,b_s). Cara ini diteruskan sampai baris 1 jenuh, baru berpindah ke baris 2. Jika ada lebih dari satu ongkos terkecil pada suatu baris, dapat dipilih salah satu secara sembarang.

Begitu seterusnya sampai baris m jenuh.

Contoh 4.3 :

Data tetap seperti pada tabel 4-1. Pada baris 1, $c_{12}=1$ adalah ongkos terkecil, maka ditetapkan x_{12}=min (70,40) =40, sehingga kolom 2 kini jenuh. Ongkos terkecil berikutnya pada baris ini adalah c_{11}, maka x_{11}=min (70-40,35)=30, barulah baris 1 menjadi jenuh. Pada baris 2, ongkos terkecil terdapat pada sel (2,4), maka x_{24}=min (40,25)=25, sehingga kolom 4 menjadi jenuh. Masih pada baris 2, ongkos terkecil berikutnya adalah $c_{21}=3$, maka x_{21}=min (40-25,35-30)=5, sehingga kolom 1 yang jenuh. Sel yang tersisa pada baris 2 ini adalah sel (2,3), maka ditetapkan x_{23}=min (40-25-5,50)=10, barulah baris 2 jenuh. Terakhir adalah sel (3,3) dengan x_{33}=min (40,50-10)=40, sehingga baris 3 dan kolom 3 sekaligus jenuh. Tabel 4-4 adalah tabel awalnya.

$O_i \backslash D_j$	1	2	3	4	a_i
1	30 $\boxed{2}$	40 $\boxed{1}$	$\boxed{5}$	$\boxed{4}$	70
2	5 $\boxed{3}$	$\boxed{2}$	10 $\boxed{4}$	25 $\boxed{2}$	40
3	$\boxed{6}$	$\boxed{4}$	40 $\boxed{2}$	$\boxed{3}$	40
b_j	35	40	50	25	150

Tabel 4-4

4. Metode matriks minimum

Dari keseluruhan tabel ditentukan ongkos terkecil. Andaikan ini terdapat pada sel (i,j), maka ditetapkan x_{ij}=min (a_i,b_j). Jika $a_i<b_j$, maka $x_{ij}=a_i$, sehingga baris i menjadi jenuh. Kebutuhan kolom j kini menjadi b_j-a_i. Jika $a_i>b_j$, maka $x_{ij}=b_j$, sehingga kolom j jenuh.

Kapasitas baris i kini menjadi $a_i - b_j$, kemudian dicari lagi sel dengan ongkos terkecil berikutnya. Jika ada lebih dari satu ongkos terkecil, dapat dipilih salah satu secara sembarang. Cara ini diteruskan sampai diperoleh m+n-1 buah sel isi dengan $x_{ij}>0$. Metode matriks minimum ini relatif lebih mudah dan prosesnya lebih cepat jika dibandingkan dengan metode baris minimum atau metode kolom minimum.

Contoh 4.4 :

Data tetap seperti pada tabel 4-1. Ongkos terkecil yang terdapat pada tabel itu adalah $c_{12}=1$, maka $x_{12}=$min (70,40) = 40., sehingga kolom 2 jenuh. Ongkos terkecil berikutnya terdapat pada sel (1,1), (2,4) dan (3,3). Secara sembarang dipilih sel (2,4) dengan $x_{24}=$min (40,25)=25, sehingga kolom 4 jenuh. Masih ada dua sel dengan ongkos terkecil berikutnya, yaitu sel (1,1) dan (3,3). Secara sembarang dipilih sel (1,1) dan $x_{11}=$min (70-40,35) = 30, sehingga baris 1 kini jenuh. Selanjutnya ditetapkan $x_{33}=$min (40,50)=40, sehingga baris 3 jenuh. Masih tersisa dua sel dengan ongkos masing-masing c_{21}= 3 dan $c_{23}=4$, maka dipilih sel (2,1) dengan x_{21} = min (40-25, 35-30) = 5, sehingga kolom 1 jenuh. Terakhir ditetapkan $x_{23}=$min (40-25-5,50-40)=10, sehingga baris 2 dan kolom 3 sekaligus jenuh. Tabel awalnya nya tampak seperti tabel 4-4.

5. Metode Vogel (Vogel's Approximation Method)

Untuk tiap baris dihitung selisih dua ongkos terkecil. Begitu pula untuk tiap kolom. Dengan cara demikian akan diperoleh m buah selisih dua ongkos terkecil untuk baris dan n buah selisih dua ongkos terkecil untuk kolom. Selisih untuk tiap baris ditulis pada kolom di sebelah kanan tabel, dan selisih untuk tiap kolom ditulis pada baris di bawah tabel. Dari m+n selisih pada pengisian pertama ini, dipilih selisih yang terbesar. Andaikan itu terdapat pada kolom j, kemudian dicari ongkos terkecil pada kolom j itu. Jika c_{ij} adalah ongkos terkecil pada kolom j, maka ditetapkan x_{ij} = min (a_i, b_j). Baris i atau kolom j dicoret, tergantung mana yang jenuh di antara keduanya. Cara ini diulangi untuk setiap pengisian berikutnya. Jika ada lebih dari satu selisih terbesar, dapat dipilih salah satu secara sembarang.

Contoh 4.5 :

Data tetap seperti pada tabel 4-1. Dari m+n = 3+4 = 7 selisih dua ongkos terkecil pada tiap baris dan kolom, ternyata selisih tebesar adalah $c_{23}-c_{33}$ = 2, terdapat pada kolom 3. Sel (3,3) adalah sel dengan ongkos terkecil pada kolom 3 ini, maka ditetapkan x_{33}=min (40,50) =40, sehingga baris 3 jenuh. Selisih terbesar berikutnya adalah $c_{14}-c_{24}$=2, terdapat pada kolom 4. Ongkos terkecil pada kolom 4 ini ada pada sel (2,4), maka x_{24}=min (40,25)=25. Kolom 4 kini jenuh. Pada pengisian ketiga semua selisih yang tersisa bernilai sama, maka secara sembarang dipilih baris 1 dan x_{12}=min (70,40)=40. Kolom 2 jenuh. Selisih terbesar yang ada kini adalah $c_{13}-c_{11}$=3 pada baris 1 maka x_{11}=min (70-40, 35)=30, sehingga baris 1 jenuh. Pilihan berikutnya adalah sel (2,3) dengan x_{23} = min (40-25,50-40)=10, sehingga kolom 3 jenuh. Terakhir ditetapkan x_{21} = min (40-25-10, 35-30)=5. Sekaligus baris 2 dan kolom 1 jenuh. Tabel awalnya tampak seperti tabel 4-4.

6. Metode Russell (Russell's Approximation Method)

Ditentukan ongkos terbesar untuk tiap-tiap baris dan tiap-tiap kolom. Andaikan $\bar{u}_i$ adalah ongkos terbesar pada baris i, dan $\bar{v}_j$ adalah ongkos terbesar pada kolom j. Untuk setiap sel (i,j), dihitung $\Delta_{ij} = c_{ij} - \bar{u}_i - \bar{v}_j$. Dari mn buah Δ_{ij} yang diperoleh pada pengisian pertama, dipilih Δ_{ij} yang terkecil, kemudian ditetapkan nilai x_{ij}=min (a_i, b_j) pada sel dengan Δ_{ij} terkecil itu. Jika ada lebih dari satu Δ_{ij} terkecil, dapat dipilih secara sembarang. Cara ini diulangi untuk setiap pengisian berikutnya. Dilihat dari segi penyusunan tabel awal, metode ini agak panjang.

Contoh 4.6 :

Tabel 4-5 memuat data dari suatu masalah angkutan dengan empat sumber dan lima tujuan.

$O_i \backslash D_j$	1	2	3	4	5	a_i
1	6	2	8	7	5	40
2	4	3	7	5	9	70
3	2	1	3	6	4	60
4	5	6	4	8	3	30
b_j	30	60	50	40	20	200

Tabel 4-5

$O_i \backslash D_j$	1	2	3	4	5	$\bar{u}_i$
1	-8	-12	-8	-11	-12	8
2	-9	-12	-10	-12	-9	9
3	-10	-11	-11	-8	-11	6
4	-9	-8	-12	-8	-14	8
$\bar{v}_j$	6	6	8	8	9	

Tabel 4-6

Perhitungan nilai $\bar{u}_i$, $\bar{v}_j$ dan $\Delta_{ij}=c_{ij}-\bar{u}_i-\bar{v}_j$ terdapat pada tabel 4-6. Pada tabel 4-6, Δ_{ij} terkecil terdapat pada sel (4,5), maka x_{45}=min (30,20)=20, sehingga kolom 5 jenuh. Kini ada empat sel dengan Δ_{ij} terkecil berikutnya. Secara sembarang dipilih sel (4,3) dengan x_{43} = min (30-20,50)=10, sehingga baris 4 jenuh. Selanjutnya secara sembarang dipilih sel (2,4), karena Δ_{24}=-12 adalah Δ_{ij} terkecil bersama-sama dengan Δ_{12} dan Δ_{22}. Ditetapkan x_{24} = min (70,40)=40, sehingga kolom 4 jenuh. Masih ada dua sel dengan Δ_{ij} terkecil, yaitu sel (1,2) dan (2,2) dengan Δ_{12} = Δ_{22} = -12. Sel (1,2) terpilih secara sembarang dengan x_{12} = min (40,60)=40. Baris 1 kini jenuh. Kini Δ_{22} = -12 menjadi yang terkecil, maka x_{22}=min (70-40,60-40)=20. Kolom 2 jenuh. Pilihan berikutnya adalah sel (3,3) dengan x_{33}=min (60, 50-10) = 40. Kolom 3 kini jenuh. Selanjutnya dipilih sel (3,1) dengan x_{31}=min (60-40,30) = 20, sehingga baris 3 jenuh. Terakhir ditetapkan x_{21} = min (70-40-20, 30-20) = 10, sehingga baris 2 dan kolom 1 sekaligus jenuh. Tabel awalnya tampak seperti tabel 4-7, dengan 8 buah x_{ij}>0.

$O_i \backslash D_j$	1	2	3	4	5	a_i
1	[6]	40 [2]	[8]	[7]	[5]	40
2	10 [4]	20 [3]	[7]	40 [5]	[9]	70
3	20 [2]	[1]	40 [3]	[6]	[4]	60
4	[5]	[6]	10 [4]	[8]	20 [3]	30
b_j	30	60	50	40	20	200

Tabel 4-7

7. <u>Metode frekuensi</u>

Untuk setiap baris dan kolom ditentukan nilai rata-rata ongkosnya. Andaikan f_i adalah nilai rata-rata ongkos pada baris i, dengan $f_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{c_{ij}}{n}$, dan k_j adalah nilai rata-rata ongkos pada kolom j, dengan $k_j = \sum_{j=1}^{m} \frac{c_{ij}}{m}$. Selanjutnya untuk setiap sel (i,j) dihitung $F_{ij} = c_{ij} - f_i - k_j$. Dari mn buah F_{ij} yang diperoleh pada pengisian pertama, dipilih F_{ij} terkecil dan kemudian ditetapkan nilai $x_{ij} = \min(a_i, b_j)$ pada sel dengan F_{ij} terkecil itu. Jika ada beberapa F_{ij} terkecil dapat dipilih salah satu secara sembarang. Cara ini diulangi untuk setiap pengisian berikutnya, sampai diperoleh m+n-1 buah $x_{ij} > 0$. Dilihat dari segi penyusunan tabel awal, metode ini agak panjang.

<u>Contoh 4.7</u> :

Tabel 4-8 memuat data untuk suatu masalah angkutan dengan tiga sumber dan empat tujuan. Tabel 4-9 memuat perhitungan nilai f_i, k_j dan F_{ij}.

$O_i \backslash D_j$	1	2	3	4	a_i
1	3	1	2	4	130
2	3	4	7	11	280
3	2	6	5	3	290
b_j	250	150	200	100	700

Tabel 4-8

$O_i \backslash D_j$	1	2	3	4	f_i
1	-2,2	-5,2	-5,2	-4,5	2,5
2	-5,95	-5,95	-3,95	-1,25	6,25
3	-4,7	-1,7	-3,7	-7	4
k_j	2,7	3,7	4,7	6	

Tabel 4-9

$O_i \backslash D_j$	1	2	3	4	a_i
1	$\boxed{3}$	$\boxed{1}$	130 $\boxed{2}$	$\boxed{4}$	130
2	250 $\boxed{3}$	30 $\boxed{4}$	$\boxed{7}$	$\boxed{11}$	280
3	$\boxed{2}$	120 $\boxed{6}$	70 $\boxed{5}$	100 $\boxed{3}$	290
b_j	250	150	200	100	700

Tabel 4-10

Dalam tabel 4-9, F_{ij} terkecil adalah F_{34}=-7, maka ditetapkan x_{34}=min (290,100)=100, sehingga kolom 4 jenuh. Berikutnya ada dua F_{ij} terkecil yang sama yaitu F_{21} dan F_{22}. Secara sembarang dipilih F_{21}, maka x_{21}= min (280, 250) = 250, sehingga kolom 1 jenuh. Kini F_{22} menjadi yang terkecil, maka x_{22}=min (280-250,150)= 30, sehingga baris 2 jenuh. Pada tabel sisanya, kini ada dua F_{ij} terkecil yaitu F_{12} dan F_{13}. Dipilih F_{13} secara sembarang, maka x_{13}=min (130,200)= 130, sehingga baris 1 jenuh. Pilihan selanjutnya adalah sel (3,3) dengan x_{33} = min (290-100,200-130)=70, sehingga kini kolom 3 yang jenuh. Terakhir ditetapkan x_{32}=min (290-100-70,150-30) =120, yang mengakibatkan baris 3 dan kolom 2 sekaligus jenuh. Tabel 4-10 adalah tabel awalnya, dengan 6 buah $x_{ij}>0$.

Dari keenam metode penentuan penyelesaian awal yang memperhitungkan ongkos, yaitu metode kolom minimum sampai metode frekuensi, masing-masing ada kelebihan dan kekurangannya. Oleh karena itu tidak dapat dianggap metode yang satu lebih baik dari yang lain, tetapi untuk penyelesaian secara manual lebih baik digunakan metode yang mudah dan cepat dilihat dari segi penyusunan tabel awalnya, seperti metode matriks minimum atau metode Vogel. Adapun alasan teoritis untuk penyusunan masing-masing metode yang memperhitungkan ongkos, dalam buku-buku acuan (literatur) tidak ada.

Dari ketujuh metode penentuan penyelesaian awal, metode sudut barat laut adalah metode yang paling ringkas secara numeris.

4.3 Uji Optimalitas

Untuk mengetahui apakah suatu penyelesaian fisibel basis sudah optimal, harus ditentukan dulu nilai ongkos kesempatan c'_{ij} untuk vektor-vektor p_{ij} yang bukan basis. Dalam masalah angkutan, ongkos kesempatan c'_{ij} dihitung untuk setiap sel kosong, yaitu sel yang bukan basis dalam tabel angkutan.

Definisi 4.5 : Ongkos kesempatan c'_{ij} adalah besarnya penyusutan nilai z yang terjadi bila dalam sel (i,j) diisi satu unit alokasi.

Dari definisi 4.5 dapat ditulis :

$$c'_{ij} = -\Delta z$$

dengan $\Delta z = \tilde{z}-z$, $\tilde{z}$ adalah nilai z (ongkos total angkutan) yang diperoleh bila sel (i,j) diisi dengan satu unit alokasi. Jadi bila $\Delta z<0$ maka $c'_{ij}>0$, artinya bila sel (i,j) diisi satu unit alokasi sedemikian hingga nilai z turun, maka $c'_{ij}>0$. Sebaliknya bila $\Delta z>0$ maka $c'_{ij}<0$, artinya bila sel (i,j) diisi satu unit alokasi sedemikian hingga nilai z naik ,maka $c'_{ij}<0$.

Dengan demikian dalam masalah angkutan dengan kasus minimal, suatu penyelesaian fisibel basis dianggap optimal bila semua $c'_{ij}\leq 0$. Jika ada $c'_{ij}>0$ maka penyelesaian fisibel basis belum optimal, dan nilai z masih dapat direduksi.

Untuk menghitung ongkos kesempatan c'_{ij}, ada dua metode yang dapat digunakan, yaitu :

1. Metode batu loncatan (Stepping-stone method)

Dalam metode ini, untuk menghitung c'_{ij} bagi sel (i,j) yang bersesuaian dengan vektor p_{ij} yang bukan basis, lebih dahulu dicari suatu loop yang menghubungkan sel (i,j) dengan sel-sel basis. Andaikan himpunan berurutan dari sel-sel tersebut adalah :

$$\{(i,j),(i,r),(u,r),\ldots,(s,w),(s,j),(i,j)\}$$

Dari (3-11), maka diperoleh :

$$c'_{ij} = c^{B}_{ir}-c^{B}_{ur}+\ldots-c^{B}_{sw}+c^{B}_{sj}-c_{ij} \qquad (4-1)$$

Nilai c'_{ij} yang diperoleh dituliskan pada sel (i,j).

Agar tidak membingungkan, penulisan nilai perubah basis $x_{ij}>0$ dibedakan dengan nilai c'_{ij}. Dalam tulisan ini nilai $x_{ij}>0$ ditulis dengan angka jenis besar (standar).

Contoh 4.8 :

Akan diuji optimalitas penyelesaian fisibel basis pada tabel 4-4. Pada tabel itu sel-sel (1,3),(1,4),(2,2),(3,1),(3,2) dan (3,4) adalah sel-sel bukan basis, maka akan dihitung nilai c'_{ij} pada sel-sel itu. Dapat dicari adanya suatu loop yang menghubungkan masing-masing sel bukan basis tersebut dengan sel-sel basis. Dengan demikian dapat dihitung :

$c'_{13} = c_{11}-c_{21}+c_{23}-c_{13} = 2-3+4-5 = -2$

$c'_{14} = c_{11}-c_{21}+c_{24}-c_{14} = 2-3+2-4 = -3$

$c'_{22} = c_{12}-c_{11}+c_{21}-c_{22} = 1-2+3-2 = 0$

$c'_{31} = c_{21}-c_{23}+c_{33}-c_{31} = 3-4+2-6 = -5$

$c'_{32} = c_{33}-c_{23}+c_{21}-c_{11}+c_{12}-c_{32} = 2-4+3-2+1-4 = -4$

$c'_{34} = c_{33}-c_{23}+c_{24}-c_{34} = 2-4+2-3 = -3$

Ternyata semua $c'_{ij} \leq 0$, maka penyelesaian fisibel basis ini sudah optimal. Jika nilai c'_{ij} yang diperoleh ini dituliskan dalam tabel 4-4, maka akan tampak seperti di bawah ini.

O_i \ D_j	1	2	3	4	a_i
1	30 [2]	40 [1]	-2 [5]	-3 [4]	70
2	5 [3]	0 [2]	10 [4]	25 [2]	40
3	-5 [6]	-4 [4]	40 [2]	-3 [3]	40
b_j	35	40	50	25	150

Tabel 4-11

2. <u>Metode MODI (Modified distribution method)</u>

Dengan metode ini perhitungan c'_{ij} menjadi lebih sederhana daripada dengan metode batu loncatan. Andaikan $c^B_{ir}, c^B_{qr}, c^B_{qt}, \ldots, c^B_{vs}, c^B_{wj}$ adalah m+n-1 ongkos yang bersesuaian dengan perubah-perubah dalam penyelesaian fisibel basis suatu masalah angkutan dengan m sumber dan dan n tujuan. Kini dianggap ongkos-ongkos tersebut dapat dinyatakan sebagai:

$$\begin{aligned} c^B_{ir} &= u_i + v_r \\ c^B_{qr} &= u_q + v_r \\ c^B_{qt} &= u_q + v_t \\ &\vdots \\ c^B_{vs} &= u_v + v_s \\ c^B_{wj} &= u_w + v_j \end{aligned} \qquad (4\text{-}2)$$

Bentuk (4-2) dapat dianggap sebagai suatu himpunan m+n-1 persamaan linear yang simultan dengan m+n perubah u_α , v_β. Salah satu dari u_α , v_β dapat diberi nilai sembarang, dan kemudian nilai m+n-1 perubah sisanya dapat ditemukan. Persamaan-persamaan ini sangat mudah diselesaikan, karena dapat diselesaikan secara bertu-rutan. Misalnya : jika diambil $u_i=0$, maka $v_r = c^B_{ir}$, $u_q=c^B_{qr}-c^B_{ir}$, dan seterusnya. Dalam penyelesaian persamaan-persamaan di atas diperoleh m buah u_α dan n buah v_β, sedemikian hingga ada sebuah u_α yang bersesuaian masing-masing baris dan sebuah v_β yang bersesuaian dengan masing-masing kolom dalam tabel angkutan. Setelah semua u_α dan v_β ditentukan, maka semua c'_{ij} untuk setiap sel kosong dapat ditentukan dengan cara :

Dari (3-11) diperoleh $c'_{ij} = c^{B}_{ir} - c^{B}_{qr} + \ldots - c^{B}_{vs} + c^{B}_{vj} - c_{ij}$

Dari (4-2) diperoleh $c'_{ij} = u_i + v_r - u_q - v_r + \ldots - u_v - v_s + u_v + v_j - c_{ij}$ (4-3)

Maka, $c'_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}$ (4-4)

Jadi untuk setiap sel (i,j) yang bukan basis, c'_{ij} dihitung dengan rumus (4-40). Sebaiknya dalam tabel, u_α ditulis pada kolom tambahan di sebelah kanan tabel dan v_β ditulis pada baris tambahan di bawah tabel.

Contoh 4.9 :

Tabel 4-12a adalah tabel penyelesaian awal suatu masalah angkutan dengan empat sumber dan lima tujuan, yang diperoleh dengan metode matriks minimum.

$O_i \backslash D_j$	1	2	3	4	5	a_i
1	90 [8]	[2]	40 [7]	[4]	[5]	130
2	[6]	[3]	[4]	100 [2]	[6]	100
3	[6]	[7]	[6]	[4]	110 [4]	110
4	20 [5]	100 [1]	[9]	40 [3]	10 [3]	170
b_j	110	100	40	140	120	510

Tabel 4-12a

$O_i \backslash D_j$	1	2	3	4	5	a_i	u_i
1	90 [8]	2 [2]	40 [7]	2 [4]	1 [5]	130	3
2	-2 [6]	-3 [3]	-1 [4]	100 [2]	-4 [6]	100	-1
3	0 [6]	-5 [7]	-1 [6]	0 [4]	110 [4]	110	1
4	20 [3]	100 [1]	-5 [9]	40 [3]	10 [3]	170	0
b_j	110	100	40	140	120	510	
v_j	5	1	4	3	3		

Tabel 4-12b

Ongkos-ongkos dalam basis adalah $c_{11}, c_{13}, c_{24}, c_{35}, c_{41}$, c_{42}, c_{44} dan c_{45}. Himpunan persamaan linear yang simultan yang akan diselesaikan adalah :

$$c_{11} = u_1+v_1=8 \qquad c_{41} = u_4+v_1=5$$
$$c_{13} = u_1+v_3=7 \qquad c_{42} = u_4+v_2=1$$
$$c_{24} = u_2+v_4=2 \qquad c_{44} = u_4+v_4=3$$
$$c_{35} = u_3+v_5=4 \qquad c_{45} = u_4+v_5=3$$

Jika diambil $u_4=0$, maka diperoleh $v_1=5$, $v_2=1$, $v_4=3$, $v_5=3$, $u_1=3$, $u_2=-1$, $u_3=1$ dan $v_3=4$. Perhitungan c'_{ij} untuk sel-sel kosong adalah :

$$c'_{12} = u_1+v_2-c_{12}= 3+1-2=2 \qquad c'_{25} = u_2+v_5-c_{25}= -1+3-6=-4$$
$$c'_{14} = u_1+v_4-c_{14}= 3+3-4=2 \qquad c'_{31} = u_3+v_1-c_{31}= 1+5-6=0$$
$$c'_{15} = u_1+v_5-c_{15}= 3+3-5=1 \qquad c'_{32} = u_3+v_2-c_{32}= 1+1-7=-5$$
$$c'_{21} = u_2+v_1-c_{21}= -1+5-6=-2 \qquad c'_{33} = u_3+v_3-c_{33}= 1+4-6=-1$$
$$c'_{22} = u_2+v_2-c_{22}= -1+1-3=-3 \qquad c'_{34} = u_3+v_4-c_{34}= 1+3-4=0$$
$$c'_{23} = u_2+v_3-c_{23}= -1+4-4=-1 \qquad c'_{43} = u_4+v_3-c_{43}= 0+4-9=-5$$

Ternyata ada tiga buah $c'_{ij}>0$, yaitu $c'_{12}=2$, $c'_{14}=2$ dan $c'_{15}=1$, maka penyelesaian fisibel basis ini belum optimal. Tabel 4-12b memuat nilai-nilai perubah basis (yang ditulis dengan angka jenis besar) dan nilai-nilai c'_{ij} untuk perubah bukan basis.

Sebelum dibicarakan bagaimana caranya memajukan suatu penyelesaian fisibel basis yang belum optimal,akan disinggung sedikit tentang dual masalah angkutan, yang erat kaitannya dengan apa yang baru saja dibicarakan di atas. Sesungguhnya u_i, v_j pada metode MODI yang dibicaraakan di atas adalah perubah-perubah untuk dual masalah angkutan. Dual dari (2-5), (2-6) dan (2-7) dapat ditulis sebagai :

$$u_i+v_j \le c_{ij} \quad , \quad i=1,\ldots,m \quad , \quad j=1,\ldots,n \qquad (4\text{-}5)$$

dan memaksimalkan $z = \sum_{i=1}^{m} a_i u_i + \sum_{j=1}^{n} b_j v_j$ (4-6)

Masalah dual ini mempunyai mn kendala dan m+n perubah. Nilai perubah dual yang diperoleh dari (4-2) tidak memenuhi kendala-kendala dual jika penyelesaian primalnya tidak optimal. Jika $x_{ij}>0$ maka $u_i+v_j=c_{ij}$. Ini sesuai dengan dalil dual, yaitu jika dalam primal perubah ke-k >0, maka dalam dalam dual kendala ke-k berbentuk persamaan.

4.4 Memajukan Penyelesaian Fisibel Basis

Jika dalam uji optimalitas ada $c'_{ij}>0$, maka penyelesaian fisibel basis belum optimal, dan nilai z masih dapat direduksi lagi. Seperti dalam metode simpleks, untuk menentukan vektor yang masuk basis, perlu dicari :

$$c'_{st} = \text{maks } c'_{ij} \quad , \quad \text{untuk } c'_{ij}>0 \qquad (4\text{-}7)$$

Ini berarti vektor p_{st} yang masuk basis dan x_{st} akan bernilai positif. Vektor yang diganti atau keluar basis ditentukan dari :

$$\min \frac{x^B_{\alpha\beta}}{y^{\alpha\beta}_{st}} \quad , \quad y^{\alpha\beta}_{st} >0 \qquad (4\text{-}8)$$

dengan $y^{\alpha\beta}_{st}$ bernilai +1. Rumus (4-8) diambil dari kunci II dalam metode simpleks. Perubah basis yang dipilih adalah $x^B_{\alpha\beta}$ dengan nilai terkecil dari semua $x^B_{\alpha\beta}$ yang $c^B_{\alpha\beta}$-nya mempunyai koefisien +1 dalam (4-1). Dengan kata lain, untuk menemukan perubah yang diganti dari basis, terlebih dahulu harus ditentukan suatu loop yang menghubungkan sel (s,t) dengan sel-sel basis. Dari sel-sel basis dalam loop yang koefisien $c^B_{\alpha\beta}$-nya +1 dipilih $x^B_{\alpha\beta}$ dengan nilai terkecil. Alasan pemilihan itu adalah seandainya tidak dipilih yang terkecil,maka jika ada alokasi yang lebih kecil lagi, akan menghasilkan perubah yang bernilai negatif. Andaikan $x^B_{\alpha\beta}$ terkecil itu disebut x^B_{qr}.

Sekarang nilai perubah basis untuk penyelesaian basis baru mudah dihitung, yaitu :

$$\hat{x}_{st} = x^B_{qr} \qquad (4\text{-}9a)$$

untuk $x^B_{\alpha\beta}$ dalam loop yang melingkupi (s,t) yang koefisien $c^B_{\alpha\beta}$-nya +1 berlaku :

$$\hat{x}^B_{\alpha\beta} = x^B_{\alpha\beta} - x^B_{qr} \qquad (4\text{-}9b)$$

untuk $x^B_{\alpha\beta}$ dalam loop yang melingkupi (s,t) yang koefisien $c^B_{\alpha\beta}$-nya -1 berlaku :

$$\hat{x}^B_{\alpha\beta} = x^B_{\alpha\beta} + x^B_{qr} \qquad (4\text{-}9c)$$

untuk $x^B_{\alpha\beta}$ yang tidak dalam loop berlaku :

$$\hat{x}^B_{\alpha\beta} = x^B_{\alpha\beta} \qquad (4\text{-}9d)$$

Rumus-rumus di atas diperoleh dari rumus transformasi metode simpleks. Dengan demikian suatu tabel angkutan baru untuk penyelesaian basis baru sudah dapat dibuat. Setelah itu masih harus diuji optimalitas penyelesaian basis baru ini dengan menghitung nilai c'_{ij} untuk setiap sel kosongnya. Perlu diketahui bahwa dalam masalah angkutan dengan kasus minimal ini tidak akan terjadi suatu penyelesaian tidak terbatas (unbounded solution), karena batas bawah ongkos total adalah nol.

<u>Contoh 4.10</u> : Penyelesaian fisibel basis dalam tabel 4-12b belum optimal, karena ada $c'_{ij}>0$. Oleh karena itu penyelesaian basis ini masih dapat dimajukan dengan memasukkan vektor yang bersesuaian dengan $c'_{ij}>0$ yang paling besar. Dalam tabel 4-12b ada tiga sel dengan $c'_{ij}>0$ yaitu $c'_{12}=2$, $c'_{14}=2$ dan $c'_{15}=1$. Nilai $c'_{ij}>0$ terbesar adalah 2,

yaitu c'_{12} dan c'_{14}. Dari dua c'_{ij} yang sama itu secara sembarang dipilih c'_{12}. Dengan demikian vektor p_{12} yang akan masuk basis. Untuk menentukan vektor yang diganti, dibuat loop yang menghubungkan sel (1,2) dengan sel-sel basis. Himpunan berurutan dari sel-sel yang membentuk loop itu adalah {(1,2),(1,1),(4,1),(4,2),(1,2)}. Sel-sel basis dalam loop yang koefisien $c^B_{\alpha\beta}$-nya +1 adalah (1,1) dengan $x_{11}=90$ dan (4,2) dengan $x_{42}=100$. Koefisien c_{41} adalah -1. Jadi vektor yang diganti adalah p^B_{11}. Dengan demikian diperoleh :

$\hat{x}_{12}=x_{11}=90$ $\qquad$ $\hat{x}_{42}=x_{42}-x_{11}=100-90=10$

$\hat{x}_{11}=x_{11}-x_{11}=90-90=0$ $\qquad$ $\hat{x}_{41}=x_{41}+x_{11}=20+90=110$

Nilai perubah basis yang lain yang tidak dalam loop tetap. Dalam tabel baru (tabel 4-13a) nilai $\hat{x}_{11}=0$ tidak ditulis, karena vektor p_{11} sudah bukan vektor basis lagi.

O_i \ D_j	1	2	3	4	5	a_i	u_i
1	-2 [8]	90 [2]	40 [7]	0 [4]	-1 [5]	130	1
2	-2 [6]	-3 [3]	1 [4]	100 [2]	-4 [6]	100	-1
3	0 [6]	-5 [7]	1 [6]	0 [4]	110 [4]	110	1
4	110 [5]	10 [1]	-3 [9]	40 [3]	10 [3]	170	0
b_j	110	100	40	140	120	510	
v_j	5	1	6	3	3		

Tabel 4-13a

$O_i \backslash D_j$	1	2	3	4	5	a_i	u_i
1	-1 [8]	100 [2]	30 [7]	1 [4]	0 [5]	130	2
2	-2 [6]	-4 [3]	10 [4]	90 [2]	-4 [6]	100	-1
3	0 [6]	-6 [7]	0 [6]	0 [4]	110 [4]	110	1
4	110 [5]	-1 [1]	-4 [9]	60 [3]	10 [3]	170	0
b_j	110	100	40	140	120	510	
v_j	5	0	5	3	3		

Tabel 4-13b

Dengan uji optimalitas MODI, ternyata penyelesaian fisibel basis dalam tabel 4-13a juga belum optimal, karena ada $c'_{23}=1>0$ dan $c'_{33}=1>0$. Dipilih vektor p_{23} yang bersesuaian dengan c'_{23} yang akan masuk basis, dan dengan membuat loop yang menghubungkan vektor p_{23} dengan vektor-vektor basis diketahui bahwa vektor p^B_{42} yang akan diganti. Dengan demikian diperoleh penyelesaian fisibel basis baru seperti dalam tabel 4-13b, yang ternyata juga belum optimal. Untuk memajukan basis agar diperoleh penyelesaian basis baru yang lebih baik, maka vektor p_{14} harus masuk basis dan vektor p^B_{13} yang ke luar. Penyelesaian basis baru tampak seperti tabel 4-13c, dan ternyata sudah optimal, karena semua $c'_{ij} \leq 0$. Diperoleh ongkos total minimal angkutan z = 2(100)+4(30)+4(40)+2(60)+4(110)+5(110)+3(50)+ 3(10) = 1770.

$O_i \backslash D_j$	1	2	3	4	5	a_i	u_i
1	-2 $\boxed{8}$	100 $\boxed{2}$	-1 $\boxed{7}$	30 $\boxed{4}$	-1 $\boxed{5}$	130	1
2	-2 $\boxed{6}$	-3 $\boxed{3}$	40 $\boxed{4}$	60 $\boxed{2}$	-4 $\boxed{6}$	100	-1
3	0 $\boxed{6}$	-5 $\boxed{7}$	0 $\boxed{6}$	0 $\boxed{4}$	110 $\boxed{4}$	110	1
4	110 $\boxed{5}$	0 $\boxed{1}$	-4 $\boxed{9}$	50 $\boxed{3}$	10 $\boxed{3}$	170	0
b_j	110	100	40	140	120	510	
v_j	5	1	5	3	3		

Tabel 4-13c

4.5 Alternatif Penyelesaian Optimal

Suatu penyelesaian optimal untuk suatu masalah angkutan tidak selalu merupakan penyelesaian yang tunggal, karena mungkin masih ada penyelesaian optimal yang lain. Jika dalam suatu tabel optimal yang sudah dicapai ternyata ada sel kosong dengan ongkos kesempatan nol, maka ada penyelesaian optimal lain dengan ongkos total angkutan sama dengan ongkos total angkutan untuk penyelesaian optimal yang pertama. Hal ini dapat terjadi, karena jika vektor p_{ij} yang bersesuaian dengan sel yang ongkos kesempatannya $c'_{ij}=0$ dimasukkan sebagai basis, maka ongkos total tidak akan berubah lagi. Yang berubah hanyalah distribusinya. Cara menentukan alternatif penyelesaian optimal sama seperti cara memajukan basis, yaitu pertama-tama mencari loop yang menghubungkan sel dengan $c'_{ij}=0$ ini dengan sel-sel basis.

<u>Contoh 4.1</u> : Telah diuji bahwa penyelesaian fisibel basis dalam tabel 4-13c sudah optimal, dengan ongkos total minimal 1770. Tampak dalam pengujian optimal itu ada sel-

sel, yaitu sel (3,1), (3,3), (3,4) dan (4,2) yang ongkos kesempatannya nol. Ini berarti dengan memasukkan salah satu vektor dari vektor-vektor p_{31}, p_{33}, p_{34} atau p_{42} sebagai basis akan diperoleh alternatif penyelesaian optimal dengan ongkos total minimal 1770 juga. Andaikan dipilih vektor p_{34} yang akan masuk basis. Dengan membuat loop yang menghubungkan sel (3,4) dengan sel-sel basis (3,5), (4,5) dan (4,4), diketahui vektor p^B_{44} dengan $x^B_{44}=50$ yang akan diganti. Diperoleh tabel optimal alternatif seperti tabel 4-14.

O_i \ D_j	1	2	3	4	5	a_i	u_i
1	-2 $\boxed{8}$	100 $\boxed{2}$	-1 $\boxed{7}$	30 $\boxed{4}$	-1 $\boxed{5}$	130	4
2	-2 $\boxed{6}$	-3 $\boxed{3}$	40 $\boxed{4}$	60 $\boxed{2}$	-4 $\boxed{6}$	100	2
3	0 $\boxed{6}$	-5 $\boxed{7}$	0 $\boxed{6}$	50 $\boxed{4}$	60 $\boxed{4}$	110	4
4	110 $\boxed{5}$	0 $\boxed{1}$	-4 $\boxed{9}$	0 $\boxed{3}$	60 $\boxed{3}$	170	3
b_j	110	100	40	140	120	510	
v_j	2	-2	2	0	0		

Tabel 4-14

4.6 Kemerosotan (Degeneracy)

Telah disebutkan di muka bahwa suatu penyelesaian fisibel basis masalah angkutan dengan m sumber dan n tujuan terdiri atas m+n-1 buah $x_{ij}>0$. Jika terjadi banyaknya $x_{ij}>0$ kurang dari m+n-1, maka masalah angkutan itu disebut merosot (degenerate). Tidak seperti dalam masalah program linear, dalam masalah angkutan kemerosotan mendapat perhatian penting, karena penyelesaian yang merosot mengakibatkan ketidakmampuan untuk mengatur pengembangan semua sel yang bukan basis menjadi basis. Dalam suatu penyelesaian basis yang merosot, yaitu dengan jumlah sel basis kurang dari m+n-1, tidak dapat dibentuk suatu pohon basis.

Kemerosotan dalam masalah angkutan dapat timbul pada waktu menentukan penyelesaian awal (pada tabel awal) atau pada waktu proses iterasi untuk menentukan basis berikutnya (pada tabel antara). Kemerosotan yang timbul pada waktu menentukan penyelesaian awal disebabkan adanya $x_{ij}= a_i=b_j$, sehingga secara bersamaan baris i dan kolom j menjadi jenuh. Kemerosotan yang timbul pada tabel antara disebabkan adanya lebih dari satu vektor basis yang terpaksa diganti, padahal hanya satu vektor yang akan masuk basis.

Jika dengan menggunakan suatu metode tertentu diperoleh suatu penyelesaian awal yang merosot, maka untuk menghindarinya dapat digunakan metode lain sedemikian hingga penyelesaian awal yang diperoleh tidak merosot ; atau tetap digunakan metode itu dengan melanggar sedikit aturannya asalkan tidak terjadi kemerosotan. Misalnya : pada tabel 4-15, $c_{12}=1$ adalah ongkos terkecil. Dengan menggunakan metode matriks minimum seharusnya sel (1,2) diisi terlebih dahulu, tetapi jika diisikan x_{12} = min (400,400)= 400 pada sel (1,2) itu secara bersamaan baris 1 dan kolom 2 jenuh. Untuk menghindari hal itu, pengisian pertama dilakukan pada sel (1,3), dengan $c_{13}=2$ adalah ongkos terkecil setelah $c_{12}=1$, dengan $x_{13}=100$ yang menjadikan hanya kolom 3 saja yang jenuh. Setelah itu baru diisikan $x_{12}= 300$, sehingga hanya baris 1 yang jenuh. Pengisian selanjutnya diisikan pada sel (2,3) dengan $x_{23}=150$, kemudian yang terakhir pada sel (2,2) dengan x_{22}=100. Penyelesaian awal yang diperoleh tidak merosot.

$O_i \backslash D_j$	1	2	3	a_i
1	[4]	100 [1]	100 [2]	400
2	150 [3]	100 [7]	[5]	250
b_j	150	400	100	600

Tabel 4-15

Jika kemerosotan terjadi pada tabel antara, yang disebabkan adanya lebih dari satu, misalnya ada k (k>1) yang ternyata keluar basis, maka cara mengatasinya adalah dengan mengalokasikan suatu nilai ε>0 pada k-1 sel yang baru saja kosong, dengan sifat :

$$\begin{aligned} \varepsilon + a &= a \\ a - \varepsilon &= a \qquad (4\text{-}10) \\ \varepsilon - \varepsilon &= 0 \end{aligned}$$

Dalam hal ini ε dianggap sebagai alokasi semu dan juga merupakan nilai perubah basis. Dengan demikian akan tetap ada m+n-1 perubah basis, sehingga dari m+n-1 sel basis tetap dapat dibentuk pohon basis. Bila pada penyelesaian optimal masih memuat ε, maka ε tersebut tidak disertakan, karena ε adalah alokasi fiktif.

<u>Contoh 4.12</u> : Tabel 4-16a adalah tabel awal dari suatu masalah angkutan dengan enam sumber dan empat tujuan, yang diperoleh dengan sudut barat laut.

$O_i \backslash D_j$	1	2	3	4	5	6	a_i	u_i
1	30 [2]	20 [1]	-2 [3]	-4 [3]	-1 [2]	-4 [5]	50	-3
2	0 [3]	30 [2]	10 [2]	-4 [4]	-1 [3]	-2 [4]	40	-2
3	2 [3]	-1 [5]	10 [4]	40 [2]	10 [4]	3 [1]	60	0
4	-1 [4]	0 [2]	0 [2]	-1 [1]	20 [2]	10 [2]	30	-2
b_j	30	50	20	40	30	10	180	
v_j	5	4	4	2	4	4		

Tabel 4-16a

$O_i \backslash D_j$	1	2	3	4	5	6	a_i	u_i
1	30 [2]	20 [1]	-2 [3]	-4 [3]	-1 [2]	-7 [5]	50	-3
2	0 [3]	30 [2]	10 [2]	-4 [4]	-1 [3]	-5 [4]	40	-2
3	2 [3]	-1 [5]	10 [4]	40 [2]	ε [4]	10 [1]	60	0
4	-1 [4]	0 [2]	0 [2]	-1 [1]	30 [2]	-3 [2]	30	-2
b_j	30	50	20	40	30	10	180	
v_j	5	4	4	2	4	1		

Tabel 4-16b

Dengan menggunakan metode MODI tampak bahwa $c'_{36}=3$ adalah $c'_{ij}>0$ terbesar, sehingga x_{36} akan menjadi perubah basis dalam tabel berikutnya. Dari loop yang menghubungkan sel (3,6) dengan sel-sel basis, ternyata baik x_{35}^{ε} maupun x_{46}^{ε} sama-sama harus keluar. Hal ini mengakibatkan dalam tabel baru nanti hanya akan ada delapan buah $x_{ij}>0$, sehingga penyelesaian fisibel basis menjadi merosot. Untuk mengatasi hal ini ditetapkan nilai ε pada salah satu dari kedua sel yang baru saja kosong. Dipilih sel (3,5) yang akan diisi, dan dianggap $x_{35}=\varepsilon$ adalah perubah basis, sehingga tetap ada m+n-1=9 buah $x_{ij}>0$ dalam tabel 4-16b. Pada uji optimalitas dalam tabel 4-16b tampak vektor p_{31} harus masuk basis dan vektor p^B_{33} dengan $x^B_{33}=10$ yang akan keluar. Diperoleh penyelesaian basis baru dalam tabel 4-16c, yang juga belum optimal. Pada tabel 4-16c ada dua $c'_{ij}>0$, yaitu c'_{15} dan c'_{25} yang sama-sama bernilai 1. Dipilih p_{15} yang akan masuk, dan p^B_{35} dengan $x^B_{35}=\varepsilon$ yang akan diganti. Dengan menggunakan sifat-sifat ε, diperoleh penyelesaian fisibel basis baru dalam tabel 4-16d yang ternyata sudah optimal. Dalam tabel optimal itu masih memuat ε pada sel (1,5), tetapi karena ε ini hanyalah alokasi fiktif, maka $x_{15}=\varepsilon$ tidak dianggap sebagai perubah basis sesungguhnya. Dengan demikian tabel optimal sesungguhnya dapat ditulis seperti tabel 4-16e, dengan ongkos total minimal :

z = 2(20)+1(30)+2(20)+2(20)+3(10)+2(40)+1(10)+2(30) = 330.

Penyelesaian optimal ini merosot.

$O_i \backslash D_j$	1	2	3	4	5	6	a_i	u_i
1	20 $\boxed{2}$	30 $\boxed{1}$	-2 $\boxed{3}$	-2 $\boxed{3}$	1 $\boxed{2}$	-5 $\boxed{5}$	50	-1
2	0 $\boxed{3}$	20 $\boxed{2}$	20 $\boxed{2}$	-2 $\boxed{4}$	1 $\boxed{3}$	-3 $\boxed{4}$	40	0
3	10 $\boxed{3}$	-3 $\boxed{5}$	-2 $\boxed{4}$	40 $\boxed{2}$	ε $\boxed{4}$	10 $\boxed{1}$	60	0
4	-3 $\boxed{4}$	-2 $\boxed{2}$	-2 $\boxed{2}$	-1 $\boxed{1}$	30 $\boxed{2}$	-3 $\boxed{2}$	30	-2
b_j	30	50	20	40	30	10	180	
v_j	3	2	2	2	4	1		

Tabel 4-16c

$O_i \backslash D_j$	1	2	3	4	5	6	a_i	u_i
1	20 $\boxed{2}$	30 $\boxed{1}$	-2 $\boxed{3}$	-2 $\boxed{3}$	0 $\boxed{2}$	-5 $\boxed{5}$	50	0
2	0 $\boxed{3}$	20 $\boxed{2}$	20 $\boxed{2}$	-2 $\boxed{4}$	0 $\boxed{3}$	-3 $\boxed{4}$	40	1
3	10 $\boxed{3}$	-3 $\boxed{5}$	-2 $\boxed{4}$	40 $\boxed{2}$	-1 $\boxed{4}$	10 $\boxed{1}$	60	1
4	-2 $\boxed{4}$	-1 $\boxed{2}$	-1 $\boxed{2}$	0 $\boxed{1}$	30 $\boxed{2}$	-2 $\boxed{2}$	30	0
b_j	30	50	20	40	30	10	180	
v_j	2	1	1	1	2	0		

Tabel 4-16d

$O_i \backslash D_j$	1	2	3	4	5	6	a_i
1	20 $\boxed{2}$	30 $\boxed{1}$	$\boxed{3}$	$\boxed{3}$	$\boxed{2}$	$\boxed{5}$	50
2	$\boxed{3}$	20 $\boxed{2}$	20 $\boxed{2}$	$\boxed{4}$	$\boxed{3}$	$\boxed{4}$	40
3	10 $\boxed{3}$	$\boxed{5}$	$\boxed{4}$	40 $\boxed{2}$	$\boxed{4}$	10 $\boxed{1}$	60
4	$\boxed{4}$	$\boxed{2}$	$\boxed{2}$	$\boxed{1}$	30 $\boxed{2}$	$\boxed{2}$	30
b_j	30	50	20	40	30	10	180

Tabel 4-16e

Bila diperhatikan dengan cermat, tampak bahwa jika terjadi kemerosotan maka ada penjumlahan parsial dari a_i yang sama dengan penjumlahan parsial dari b_j. Ini dapat dilihat dalam contoh 4.12. Pada tabel 4-16a dengan terjadinya kemerosotan pada tabel antaranya, tampak bahwa $a_1+a_2+a_3=b_1+b_2+b_3+b_4+b_6$.

<u>Teorema 4.3</u> : Jika terjadi kemerosotan dalam masalah angkutan, maka ada paling sedikit suatu himpunan $I \subset \{1,2,...,m\}$ dan paling sedikit suatu himpunan $J \subset \{1,2,...,n\}$ sedemikian hingga

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{j \in J} b_j .$$

Bukti :

Andaikan diperoleh suatu penyelesaian fisibel basis yang merosot. Diasumsikan dalam masalah angkutan dengan m sumber dan n tujuan ini, $n \geq m$. Jadi dalam tabel angkutannya akan ada paling sedikit satu kolom yang hanya memuat satu $x_{ij}>0$ dengan $x_{ij}=b_j$, sehingga kolom j menjadi jenuh dan dapat dicoret (jika $n \leq m$, ada paling sedikit satu baris yang hanya memuat sebuah $x_{ij}>0$ dengan $x_{ij}=a_i$). Kapasitas sumber i kini menjadi $a_i^{(1)} = a_i - b_j$. Tabel angkutan kini dianggap terdiri atas m baris dan $n^{(1)} = n-1$ kolom. Pada tabel baru ini $n^{(1)} \geq m$ atau $n^{(1)} \leq m$, sehingga akan ada paling sedikit satu kolom atau satu baris yang hanya memuat satu $x_{ij}>0$. Andaikan x_{uv} adalah satu-satunya perubah basis pada baris u. Baris u menjadi jenuh dan dapat dicoret, b_v kini berkurang menjadi $b_v^{(2)} = b_v - a_u$. Setelah k langkah, tabel angkutan tinggal terdiri atas total m+n-k baris dan kolom. Dalam tabel reduksi ini $a_i^{(k)}$ dan $b_j^{(k)}$ berbentuk:

$$\begin{aligned} a_i^{(k)} &= a_i - \sum_{j \in J} b_j + \sum_{i \in I} a_i \\ b_j^{(k)} &= b_j - \sum_{i \in I} a_i + \sum_{j \in J} b_j \end{aligned} \qquad (4\text{-}11)$$

Penjumlahan dikerjakan atas beberapa himpunan bagian dari baris dan kolom yang sudah dicoret. Jika sampai pada perubah basis x_{st} dengan $x_{st}=0$, maka salah satu dari $a_s^{(k)}$ atau $b_j^{(k)}$ pada (4-11) akan nol, karena x_{st} adalah satu-satunya perubah basis dalam baris s atau kolom t. Dalam dua keadaan pada (4-11) tampak bahwa keduanya menunjukkan $\Sigma\ a = \Sigma\ b$ untuk beberapa himpunan bagian sejati dari a_i dan b_j dari tabel semula.

Contoh 4.13: Pada tabel 4-16b, $x_{11}=30$ adalah satu-satunya elemen basis dalam kolom 1. Kolom 1 jenuh dan dapat dicoret, dalam tabel reduksinya $a_1^{(1)} = a_1-b_1 = 50-30=20$. Kini $x_{12}=20$ adalah satu-satunya elemen basis dalam baris 1. Baris 1 dapat dicoret karena jenuh, dan $b_2^{(2)} = b_2-a_1^{(1)} = b_2-a_1+b_1 = 30$. Lalu $x_{22}=30$ menjadi satu-satunya elemen basis dalam kolom 2. Kolom 2 dicoret dan $a_2^{(3)} = a_2-b_2^{(3)} = a_2-b_2+a_1-b_1 = 10$. Pada tabel reduksinya $x_{23}=10$ satu-satunya elemen basis dalam baris 2. Baris 2 dicoret dan $b_3^{(4)} = b_3-a_2^{(3)} = b_3-a_2+b_2-a_1+b_1 = 10$. Kini $x_{33} = 10$ satu-satunya elemen basis dalam kolom 3. Kolom 3 jenuh dan $a_3^{(5)} = a_3-b_3^{(4)} = a_3-b_3+a_2-b_2+a_1-b_1 = 50$. Lalu $x_{34}=40$ menjadi satu-satunya elemen basis dalam kolom 4. Kolom 4 jenuh dan $a_3^{(6)} = a_3^{(5)}-b_4 = a_3-b_3+a_2-b_2+a_1-b_1-b_4 = 10$. Kini $x_{36}=10$ satu-satunya elemen basis dalam baris 3. Baris 3 dicoret dan $b_6^{(7)} = b_6-a_3^{(6)} = b_6-a_3+b_3-a_2+b_2-a_1+b_1+ b_4 = 0$. Berarti $a_1+a_2+a_3 = b_1+b_2+b_3+b_4+b_6$.

Hasil ini membuktikan bahwa kemerosotan tidak pernah dapat muncul dalam masalah angkutan jika penjumlahan parsial dari a_i tidak sama dengan penjumlahan parsial dari b_j. Sebaliknya jika terjadi $\sum_{i\in I} a_i = \sum_{j\in J} b_j$ untuk satu atau beberapa penjumlahan parsial, belum tentu akan terjadi kemerosotan. Contohnya dalam tabel 4-2 dan tabel 4-4, tampak $a_1+a_2 = b_1+b_3+b_4 = 110$, tetapi tidak terjadi kemerosotan.

Bagaimanapun juga untuk menghindari terjadinya kemerosotan dalam masalah angkutan, harus dipastikan tidak ada penjumlahan parsial dari a_i yang sama dengan penjumlahan parsial dari b_j. Hal ini dikerjakan dengan "mengacaukan" (perturbing) nilai a_i dan b_j menjadi:

$$
\begin{aligned}
\bar{a}_i &= a_i + \varepsilon & &, \ i=1,\dots,m \\
\bar{b}_j &= b_j & &, \ j=1,\dots,n-1 \qquad (4\text{-}12) \\
\bar{b}_n &= b_n + m\varepsilon
\end{aligned}
$$

dengan $\varepsilon > 0$ sekecil mungkin dan hampir mendekati nol. Dari (4-12) diperoleh:

$$\sum_{i=1}^{m} (a_i + \varepsilon) = \sum_{j=1}^{n-1} b_j + b_n + m\varepsilon \qquad (4\text{-}13)$$

sehingga masalahnya masih tetap mempunyai penyelesaian. Metode ini disebut <u>metode pengacauan</u> (perturbation method). Jika dalam penyelesaian optimal masih memuat ε, maka ε tersebut tidak perlu disertakan.

<u>Contoh 4.14</u>: Tabel 4-17a adalah tabel penyelesaian awal untuk masalah angkutan dengan tiga sumber dan empat tujuan, yang diperoleh dengan menggunakan metode sudut barat laut. Penyelesaian awal ini ternyata merosot. Untuk menghindari kemerosotan itu dapat digunakan metode pengacauan, sehingga tabel awalnya tampak seperti tabel 4-17b.

$O_i \backslash D_j$	1	2	3	4	a_i
1	200 [4]	100 [6]	[7]	[2]	300
2	[8]	100 [3]	200 [5]	[1]	300
3	[9]	[3]	[2]	300 [4]	300
b_j	200	200	200	300	900

Tabel 4-17a

$O_i \backslash D_j$	1	2	3	4	a_i	u_i
1	200 $\boxed{4}$	$100+\varepsilon$ $\boxed{6}$	1 $\boxed{7}$	2 $\boxed{2}$	$300+\varepsilon$	3
2	-7 $\boxed{8}$	$100-\varepsilon$ $\boxed{3}$	200 $\boxed{5}$	2ε $\boxed{1}$	$300+\varepsilon$	0
3	-5 $\boxed{9}$	3 $\boxed{3}$	6 $\boxed{2}$	$300+\varepsilon$ $\boxed{4}$	$300+\varepsilon$	3
b_j	200	200	200	$300+3\varepsilon$	$900+3\varepsilon$	
v_j	1	3	5	1		

Tabel 4-17b

Dalam tabel 4-17b ada enam buah $x_{ij}>0$, dan penyelesaian basis awal itu memuat $x_{24}=2\varepsilon>0$. Tampak bahwa metode ini menentukan sel-sel yang harus diisi agar tetap terbentuk suatu pohon basis. Setelah mengerjakan sampai empat tabel baru diperoleh penyelesaian optimal yang ternyata tidak merosot, seperti pada tabel 4-17f. Dalam tabel 4-17f itu masih ada ε. Seperti sudah disebutkan, ε tersebut tidak perlu disertakan, maka tabel optimal sesungguhnya seperti tabel 4-17g, dengan ongkos total minimal $z = 4(200)+2(100)+3(100)+1(200)+3(100)+2(200) = 2200$.

$O_i \backslash D_j$	1	2	3	4	a_i	u_i
1	200 $\boxed{4}$	$100+\varepsilon$ $\boxed{6}$	-5 $\boxed{7}$	2 $\boxed{2}$	$300+\varepsilon$	0
2	-7 $\boxed{8}$	$100-\varepsilon$ $\boxed{3}$	-6 $\boxed{5}$	$200+2\varepsilon$ $\boxed{1}$	$300+\varepsilon$	-3
3	-5 $\boxed{9}$	3 $\boxed{3}$	200 $\boxed{2}$	$300+\varepsilon$ $\boxed{4}$	$300+\varepsilon$	0
b_j	200	200	200	$300+3\varepsilon$	$900+3\varepsilon$	
v_j	4	6	2	4		

Tabel 4-17c

$O_i \backslash D_j$	1	2	3	4	a_i	u_i
1	200 [4]	100+ε [6]	-2 [7]	5 [2]	300+ε	3
2	-10 [8]	-3 [3]	-6 [5]	300+ε [1]	300+ε	-3
3	-8 [9]	100-ε [3]	200 [2]	2ε [4]	300+ε	0
b_j	200	200	200	300+3ε	900+3ε	
v_j	1	3	2	4		

Tabel 4-17d

$O_i \backslash D_j$	1	2	3	4	a_i	u_i
1	200 [4]	100-ε [6]	-2 [7]	2ε [2]	300+ε	0
2	-5 [8]	2 [3]	-1 [5]	300+ε [1]	300+ε	-1
3	-8 [9]	100+ε [3]	200 [2]	-5 [4]	300+ε	-3
b_j	200	200	200	300+3ε	900+3ε	
v_j	4	6	5	2		

Tabel 4-17e

$O_i \backslash D_j$	1	2	3	4	a_i	u_i
1	200 [4]	-2 [6]	-4 [7]	100+ε [2]	300+ε	0
2	-5 [8]	100-ε [3]	-3 [5]	200+2ε [1]	300+ε	-1
3	-6 [9]	100+ε [3]	200 [2]	-3 [4]	300+ε	-1
b_j	200	200	200	300+3ε	900+3ε	
v_j	4	4	3	2		

Tabel 4-17f

$O_i \backslash D_j$	1	2	3	4	a_i
1	200 [4]	[6]	[7]	100 [2]	300
2	[8]	100 [3]	[5]	200 [1]	300
3	[9]	100 [3]	200 [2]	[4]	300
b_j	200	200	200	300	900

Tabel 4-17g

4.7 Kejadian Tidak Setimbang

Pada subbab 2.2 telah disinggung tentang adanya dua kejadian tidak setimbang dalam masalah angkutan. Dalam subbab ini akan dibicarakan lebih lanjut mengenai kedua kejadian tidak setimbang tersebut.

4.7.1 Kelebihan Produksi

Dalam kejadian ini $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$. Masalah angkutan dengan kasus kelebihan produksi dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{Menentukan } x_{ij}\geq 0 \text{ untuk semua } i,j \text{ sedemikian hingga} & & \\ \text{meminimalkan} & z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, x_{ij} & \\ \text{yang memenuhi} & \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq a_i & ,\ i=1,\ldots,m \\ & \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j & ,\ j=1,\ldots,n \end{array}\right\} \quad (4\text{-}14)$$

Kendala tujuan berbentuk persamaan, dengan alasan: pihak sumber bermaksud meminimalkan ongkos angkutan, sehingga permintaan yang akan dipenuhi adalah permintaan minimal-nya.

Masalah ini dapat diselesaikan dengan menggunakan algoritma angkutan seperti yang telah diuraikan sebelum ini, dengan terlebih dulu mengembalikan masalahnya ke bentuk setimbang. Hal ini dapat dilakukan dengan cara me-nambah perubah-perubah kelonggaran $x_{i(n+1)}>0$, $i=1,\ldots,m$ pada kendala sumber. Dengan demikian kendala-kendala men-jadi:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} + x_{i(n+1)} = a_i \quad ,\ i=1,\ldots,m \qquad (4\text{-}15)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad ,\ j=1,\ldots,n \qquad (4\text{-}16)$$

Jika (4-15) dijumlahkan atas i, dan (4-16) dijumlahkan atas j, diperoleh:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{i(n+1)} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}$$
$$\sum_{i=1}^{m} x_{i(n+1)} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j = b_{n+1} \qquad (4\text{-}17)$$

Ini berarti harus ditambahkan suatu tujuan semu untuk menampung kelebihan produksi. Pada tabel angkutan dapat ditambahkan kolom ke-(n+1), yang disebut kolom semu, dengan $b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$ yang bernilai posistif. Nilai $c_{i(n+1)}=0$, i=1,...,m. Masalahnya kini dapat diselesaikan dengan algoritma angkutan, tetapi pengisian awal diprioritaskan untuk tabel asli dulu, baru pengisian terakhir dikerjakan pada kolom semu. Pada tabel optimalnya perubah-perubah basis pada kolom semu tidak disertakan.

Contoh 4.15: Tabel 4-18a adalah tabel data masalah angkutan dengan empat sumber dan empat tujuan. Tampak bahwa $\sum_{i=1}^{4} a_i = 1500 > \sum_{j=1}^{4} b_j = 1250$. Jadi untuk menyetimbangkan masalah ini harus ditambahkan suatu kolom semu, yaitu kolom 5 pada tabel 4-18b, dengan $b_5 = 1500 - 1250 = 250$, dan $c_{i5}=0$, i=1,2,3,4. Masalahnya menjadi setimbang dan dapat diselesaikan seperti biasa.

$O_i \backslash D_j$	1	2	3	4	a_i
1	1	4	6	9	600
2	2	1	4	10	300
3	1	7	7	7	400
4	4	5	8	3	200
b_j	400	200	350	300	1500 \ 1250

Tabel 4-18a

$O_i \backslash D_j$	1	2	3	4	5	a_i	u_i
1	400 [1]	-1 [4]	200 [6]	-3 [9]	-1 [0]	600	-1
2	-3 [2]	200 [1]	100 [4]	-6 [10]	-3 [0]	300	-3
3	1 [1]	-3 [7]	50 [7]	100 [7]	250 [0]	400	0
4	-6 [4]	-5 [5]	-5 [8]	200 [3]	-4 [0]	200	-4
b_j	400	200	350	300	250	1500	
v_j	2	4	7	7	0		

Tabel 4-18b

$O_i \backslash D_j$	1	2	3	4	5	a_i	u_i
1	350 [1]	-1 [4]	250 [6]	-2 [9]	0 [0]	600	0
2	-3 [2]	200 [1]	100 [4]	-3 [10]	-2 [0]	300	-2
3	50 [1]	-4 [7]	-1 [7]	100 [7]	250 [0]	400	0
4	-7 [4]	-6 [5]	-6 [8]	200 [3]	-4 [0]	200	-4
b_j	400	200	350	300	250	1500	
v_j	1	3	6	7	0		

Tabel 4-18c

$O_i \backslash D_j$	1	2	3	4	a_i
1	350 [1]	[4]	250 [6]	[9]	600
2	[2]	200 [1]	100 [4]	[10]	300
3	50 [1]	[7]	[7]	100 [7]	400
4	[4]	[5]	[8]	200 [3]	200
b_j	400	200	350	300	1500 / 1250

Tabel 4-18d

Tabel 4-18b adalah tabel penyelesaian awal yang belum optimal. Penyelesaian awal ini diperoleh dengan menggunakan metode matriks minimum. Tabel 4-18c adalah tabel optimal, yang masih mencantumkan kolom 5. Tabel 4-18d adalah tabel optimal sesungguhnya dengan menghapus kolom 5. Ongkos total minimal z = 1(350)+6(250)+1(200)+4(100)+1(50)+ 7(100)+ 3(200) = 380, dan ada sisa alokasi sebesar 250 pada sumber 3.

4.7.2 Kekurangan Produksi

Dalam kejadian ini $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$, sehingga sesungguhnya masalah angkutan menjadi tidak fisibel. Jika tetap ingin mencari penyelesaian, masalahnya harus diubah terlebih dulu, dengan b_j di sini bukan lagi sebagai permintaan minimal, melainkan dianggap sebagi permintaan target (sejauh mungkin permintaan dipenuhi, kecuali sudah tidak ada persediaan pada sumber). Masalah angkutan dengan kasus kekurangan produksi ini dapat dirumuskan sebagai berikut:

Menentukan $x_{ij} \geq 0$ untuk semua i,j sedemikian hingga

$$\left.\begin{array}{lll} \text{meminimalkan} & z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, x_{ij} & \\ \text{yang memenuhi} & \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i & ,\ i=1,\ldots,m \\ & \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \leq b_j & ,\ j=1,\ldots,n \end{array}\right\} \quad (4\text{-}18)$$

Untuk menyelesaikan masalah ini dengan algoritma angkutan, terlebih dulu masalahnya harus dikembalikan ke bentuk setimbang dengan menambahkan perubah-perubah surplus $x_{(m+1)j} \geq 0$, $j=1,\ldots,n$ pada kendala tujuan. Dengan demikian kendala-kendala menjadi:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad , i=1,\ldots,m \qquad (4\text{-}19)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} + x_{(m+1)j} = b_j \quad , j=1,\ldots,n \qquad (4\text{-}20)$$

Jika (4-19) dijumlahkan atas i, dan (4-20) dijumlahkan atas j, diperoleh:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{(m+1)j} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} x_{ij}$$
$$\sum_{j=1}^{n} x_{(m+1)j} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i = a_{m+1} \qquad (4\text{-}21)$$

Ini berarti harus ditambahkan suatu tujuan semu untuk mengisi kekurangan produksi. Pada tabel angkutan ditambahkan baris ke-(m+1), yang disebut baris semu, dengan $a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$ yang bernilai positif. Nilai $c_{(m+1)j}=0$, $j=1,\ldots,n$. Masalahnya kini dapat diselesaikan dengan algoritma angkutan, tetapi pengisian awal diprioritaskan untuk tabel asli dulu, baru pengisian terakhir dikerjakan pada baris semu. Pada tabel optimalnya perubah-perubah basis pada baris semu tidak disertakan.

Contoh 4.16: Tabel 4-19a memuat data masalah angkutan dengan tiga sumber dan tiga tujuan. Tampak bahwa $\sum_{j=1}^{3} b_j = 68 > \sum_{i=1}^{3} a_i = 65$. Untuk menyetimbangkan masalah ini harus ditambahkan suatu baris semu, yaitu baris 4, dengan $a_4 = 68-65 = 3$, dan $c_{4j}=0$, $j=1,2,3$. Kini masalahnya sudah setimbang dan dapat diselesaikan seperti biasa. Tabel 4-19b adalah tabel penyelesaian awal yang diperoleh dengan menggunakan metode matriks minimum, yang ternyata langsung optimal.

$O_i \backslash D_j$	1	2	3	a_i
1	3	4	1	40
2	3	7	8	15
3	5	4	2	10
b_j	25	25	18	68 \ 65

Tabel 4-19a

O_i \ D_j	1	2	3	a_i	u_i
1	10 $\boxed{3}$	12 $\boxed{4}$	18 $\boxed{1}$	40	0
2	15 $\boxed{3}$	-3 $\boxed{7}$	-7 $\boxed{8}$	15	0
3	-2 $\boxed{5}$	10 $\boxed{4}$	-1 $\boxed{2}$	10	0
4	-1 $\boxed{0}$	3 $\boxed{0}$	-3 $\boxed{0}$	3	-4
b_j	25	25	18	68	
v_j	3	4	1		

Tabel 4-19b

Tabel optimal sesungguhnya, yaitu dengan menghapus kembali baris 4, tampak seperti tabel 4-19c. Ongkos total minimal z = 3(10)+4(12)+1(18)+3(15)+4(10) =181, dan terjadi kekurangan alokasi pada tujuan 2 sebesar 3 unit.

O_i \ D_j	1	2	3	a_i
1	10 $\boxed{3}$	12 $\boxed{4}$	18 $\boxed{1}$	40
2	15 $\boxed{3}$	$\boxed{7}$	$\boxed{8}$	15
3	$\boxed{5}$	10 $\boxed{4}$	$\boxed{2}$	10
b_j	25	25	18	68 / 65

Tabel 4-19c

4.8 Pembatasan Alokasi

Dalam kenyataan sehari-hari sering terjadi bahwa jumlah yang dapat dikirim dari suatu sumber ke suatu tujuan dibatasi. Dalam hal ini ada dua kemungkinan pembatasan alokasi, yaitu : batasnya nol dan batasnya adalah suatu bilangan positif. Jika batasnya nol, berarti tidak mungkin ada barang yang dapat dikirimkan lewat jalur itu. Misalnya: ada jalur yang rusak berat, sehingga tidak mungkin ada pengiriman lewat jalur itu. Jika batasnya adalah suatu bilangan positif, berarti barang yang dikirimkan tidak boleh melebihi batas itu. Misalnya : pengiriman barang dengan kereta api yang kapasitas angkutnya (gerbong) terbatas, dan hanya kereta api itulah satu-satunya sarana angkutan pada jalur tersebut.

Jika diberikan data untuk suatu masalah angkutan, dan diketahui ada jalur yang rusak berat, sehingga tidak mungkin ada pengiriman lewat jalur itu. Untuk menghindari terlaluinya jalur itu, maka ongkos pada jalur itu diganti dengan suatu bilangan positif M yang sangat besar. Dengan ditetapkannya c_{ij}=M maka pada penentuan penyelesaian awal sel (i,j) tidak akan terisi, begitu pula pada waktu pergantian basis, sel (i,j) tidak akan berkesempatan untuk masuk menjadi sel basis, karena c'_{ij} akan bernilai negatif besar.

Untuk menyelesaikan masalah angkutan dengan pembatasan alokasi ini, terlebih dulu harus diselidiki apakah dengan adanya pembatasan alokasi soal tetap fisibel, sebab ada kemungkinan soal menjadi tidak fisibel. Di bawah ini diberikan suatu contoh masalah angkutan dengan pembatasan alokasi, yaitu jalur K_{12} rusak berat, sehingga sel (1,2) tidak mungkin diisi. Ternyata dengan adanya pembatasan alokasi itu masalahnya menjadi tidak fisibel.

O_i \ D_j	1	2	3	a_i
1		×		50
2				20
b_j	20	30	20	70

Tabel 4-20

Dalam tabel 4-20, kolom 2 harus memuat perubah basis yang bernilai 30, tetapi hal ini tidak mungkin terjadi, karena sel (1,2) tidak dapat diisi. Dengan demikian masalahnya menjadi tidak fisibel.

<u>Contoh 4.17</u>: Tabel 4-21a memuat data asli masalah angkutan dengan empat sumber dan tiga tujuan. Diketahui pula jalur K_{21} rusak berat, sehingga tidak mungkin ada pengiriman lewat jalur K_{21} itu, maka harus ditetapkan $x_{21}=0$. Agar jalur K_{21} tidak digunakan, maka $c_{21}=1$ diganti dengan M. Dengan penyelidikan lebih dulu diketahui bahwa dengan adanya jalur K_{21} yang rusak berat itu, masalahnya tetap fisibel dan dapat diselesaikan. Tabel 4-21b adalah tabel penyelesaian awalnya, dan tabel 4-21d adalah tabel optimal. Pada tabel optimal itu tidak ada alokasi pada sel (2,1). Ongkos total minimal z = 3(130)+2(120)+4(150)+2(130)+5(70)+3(100) = 2140.

$O_i \backslash D_j$	1	2	3	a_i
1	3	3	2	250
2	1	4	6	150
3	2	7	5	200
4	4	11	3	100
b_j	130	280	290	700

Tabel 4-21a

$O_i \backslash D_j$	1	2	3	a_i	u_i
1	2 [3]	7 [3]	250 [2]	250	10
2	-1-M [1]	150 [4]	-10 [6]	150	4
3	130 [2]	70 [7]	-6 [5]	200	7
4	2 [4]	60 [11]	40 [3]	100	11
b_j	130	280	290	700	
v_j	-5	0	-8		

Tabel 4-21b

$O_i \backslash D_j$	1	2	3	a_i	u_i
1	-5 $\boxed{3}$	60 $\boxed{3}$	190 $\boxed{2}$	250	3
2	-1-M $\boxed{1}$	150 $\boxed{4}$	-3 $\boxed{6}$	150	4
3	130 $\boxed{2}$	70 $\boxed{7}$	1 $\boxed{5}$	200	7
4	-5 $\boxed{4}$	-7 $\boxed{11}$	100 $\boxed{3}$	100	4
b_j	130	280	290	700	
v_j	-5	0	-1		

Tabel 4-21c

$O_i \backslash D_j$	1	2	3	a_i	u_i
1	-4 $\boxed{3}$	130 $\boxed{3}$	120 $\boxed{2}$	250	2
2	-M $\boxed{1}$	150 $\boxed{4}$	-3 $\boxed{6}$	150	3
3	130 $\boxed{2}$	-1 $\boxed{7}$	70 $\boxed{5}$	200	5
4	-4 $\boxed{4}$	-7 $\boxed{11}$	100 $\boxed{3}$	100	3
b_j	130	280	290	700	
v_j	-3	1	0		

Tabel 4-21d

Jika diberikan data untuk suatu masalah angkutan dan dibatasi bahwa ada $x_{ij} = k$, $k>0$ untuk suatu sel (i,j). Untuk menghindari adanya alokasi pada sel (i,j) yang tidak sama dengan k, maka ditetapkan lebih dulu $x_{ij}=k$ sehingga penawaran pada baris i berkurang menjadi a_i-k dan permintaan kolom j berkurang menjadi b_j-k. Setelah itu c_{ij} diganti dengan M sehingga tidak akan ada lagi alokasi pada sel (i,j). Dalam hal ini, terlebih dulu juga harus diselidiki apakah dengan adanya pembatasan alokasi tersebut masalahnya tetap fisibel. Jika ternyata masalahnya tetap fisibel, masalah itu dapat diselesaikan seperti biasa. Perlu diperhatikan bahwa $x_{ij}= k$ bukan elemen basis, karena alokasi pada sel (i,j) itu tidak menjenuhkan baik baris i atau kolom j.

Contoh 4.18 : Tabel 4-22a memuat data untuk masalah angkutan dengan empat sumber dan lima tujuan, dan diketahui ada pembatasan alokasi pada jalur K_{24} sedemikian hingga x_{24}= 30 tidak lebih dan tidak kurang. Untuk menyelesaikan masalah ini ditetapkan dulu nilai x_{24}=30, dan baik a_2 maupun b_4 kini berkurang 30, kemudian c_{24}=5 diganti dengan M agar tidak ada lagi alokasi positif pada sel (2,4). Dengan penyelidikan terlebih dahulu, ternyata dengan adanya pembatasan alokasi pada jalur K_{24} ini, masalahnya tetap fisibel, sehingga dapat diselesaikan. Tabel 4-22b adalah tabel penyelesaian awal dengan a_2=70-30=40 dan b_4=40-30= 10. Nilai c_{24} kini adalah M dan sel (2,4) bukan sel basis.

$O_i \backslash D_j$	1	2	3	4	5	a_i
1	6	2	8	7	5	40
2	4	3	7	$\boxed{5}$	9	70
3	2	1	3	6	4	60
4	5	6	4	8	3	30
b_j	30	60	50	40	20	200

Tabel 4-22a

$O_i \backslash D_j$	1	2	3	4	5	a_i	u_i
1	-3 [6]	40 [2]	-4 [8]	1 [7]	0 [5]	40	1
2	20 [4]	20 [3]	-2 [7]	-9-M [M]	-3 [9]	40	2
3	10 [2]	0 [1]	30 [3]	1 [6]	20 [4]	60	0
4	-2 [5]	-4 [6]	20 [4]	10 [8]	2 [3]	30	1
b_j	30	60	50	10	20	170	
v_j	2	1	3	7	4		

Tabel 4-22b

$O_i \backslash D_j$	1	2	3	4	5	a_i	u_i
1	-3 [6]	40 [2]	-4 [8]	3 [7]	0 [5]	40	1
2	20 [4]	20 [3]	-2 [7]	11-M [M]	-3 [9]	40	2
3	10 [2]	0 [1]	50 [3]	3 [6]	ε [4]	60	0
4	-4 [5]	-6 [6]	-2 [4]	10 [8]	20 [3]	30	-1
b_j	30	60	50	10	20	170	
v_j	2	1	3	9	4		

Tabel 4-22c

$O_i \backslash D_j$	1	2	3	4	5	a_i	u_i
1	-3 [6]	40 [2]	-4 [8]	0 [7]	-3 [5]	40	1
2	20 [4]	20 [3]	-2 [7]	9-M [M]	-6 [9]	40	2
3	10 [2]	0 [1]	50 [3]	ε [6]	-3 [4]	60	0
4	-1 [5]	-3 [6]	1 [4]	10 [8]	20 [3]	30	2
b_j	30	60	50	10	20	170	
v_j	2	1	3	6	1		

Tabel 4-22d

$O_i \backslash D_j$	1	2	3	4	5	a_i	u_i
1	-3 $\boxed{6}$	40 $\boxed{2}$	-4 $\boxed{8}$	0 $\boxed{7}$	-2 $\boxed{5}$	40	1
2	20 $\boxed{4}$	20 $\boxed{3}$	-2 $\boxed{7}$	8 - M $\boxed{M}$	-5 $\boxed{9}$	40	2
3	10 $\boxed{2}$	0 $\boxed{1}$	40 $\boxed{3}$	10 $\boxed{6}$	-2 $\boxed{4}$	60	0
4	-2 $\boxed{5}$	-4 $\boxed{6}$	10 $\boxed{4}$	-1 $\boxed{8}$	20 $\boxed{3}$	30	1
b_j	30	60	50	10	20	170	
v_j	2	1	3	6	2		

Tabel 4-22e

$O_i \backslash D_j$	1	2	3	4	5	a_i
1	$\boxed{6}$	40 $\boxed{2}$	$\boxed{8}$	$\boxed{7}$	$\boxed{5}$	40
2	20 $\boxed{4}$	20 $\boxed{3}$	$\boxed{7}$	$\boxed{30}$ $\boxed{5}$	$\boxed{9}$	40
3	10 $\boxed{2}$	$\boxed{1}$	40 $\boxed{3}$	10 $\boxed{6}$	$\boxed{4}$	60
4	$\boxed{5}$	$\boxed{6}$	10 $\boxed{4}$	$\boxed{8}$	20 $\boxed{3}$	30
b_j	30	60	50	10	20	170

Tabel 4-22f

Tabel 4-22e adalah tabel optimal, dan tampak tidak ada alokasi pada sel (2,4). Penyelesaian optimal sesungguhnya yaitu dengan mencantumkan x_{24}=30 pada tabel optimal tampak seperti tabel 4-22f. Tampak bahwa sel (2,4) adalah sel isi, tetapi bukan basis, dan ada delapan perubah basis bernilai positif, dan satu perubah bukan basis tetapi bernilai positif. Ongkos total minimal adalah :z = 2(40)+ 4(20)+3(20)+5(30)+2(10)+3(40)+6(10)+4(10)+3(20) = 670.

Andaikan diberikan data suatu masalah angkutan, dan dibatasi bahwa ada $0 \le x_{ij} \le k$, k>0, untuk suatu sel (i,j). Seperti biasa terlebih dulu harus diselidiki apakah dengan adanya pembatasan itu masalahnya tetap fisibel. Jika tetap fisibel, masalah itu dapat diselesaikan. Mula-

mula penyelesaian dikerjakan seperti biasa. Jika selama penyelesaian itu tidak ada alokasi pada sel (i,j) yang lebih dari k, maka masalahnya menjadi seperti biasa. Jika ternyata pada suatu tahap penyelesaian terpaksa ada alokasi pada sel (i,j) yang lebih dari k, andaikan k+d; d>0, maka alokasi sebesar d itu harus dipindahkan dari sel (i,j). Caranya ialah dengan membentuk baris dan kolom tambahan pada tabel asli, sehingga tabel angkutan menjadi seperti tabel di bawah ini:

$O_i \backslash D_j$	1	2	...	j	...	n	n+1	a_i
1	c_{11}	c_{12}	...	c_{1j}	...	c_{1n}	M	a_1
2	c_{21}	c_{22}	...	c_{2j}	...	c_{2n}	M	a_2
⋮	⋮	⋮		⋮		⋮	⋮	⋮
i	c_{i1}	c_{i2}	...	c_{ij}	...	c_{in}	M	a_i
⋮	⋮	⋮		⋮		⋮	⋮	⋮
m	c_{m1}	c_{m2}	...	c_{mj}	...	c_{mn}	M	a_m
m+1	M	M	...	M	...	M	0	
b_j	b_1	b_2	...	b_j	...	b_n		

Tabel 4-23

Baris dan kolom tambahan pada tabel asli dimaksudkan untuk menampung alokasi yang tidak dapat ditempatkan pada sel (i,j) dalam tabel semula. Alokasi sebesar d dari sel (i,j) dipindahkan baik ke sel tambahan (i,n+1) maupun ke sel (m+1,j). Selanjutnya alokasi sebesar d pada kedua sel tambahan itu harus dapat dialokasikan pada sel (m+1,n+1) yang $c_{m+1,n+1}$=0. Dengan adanya alokasi sebesar d pada sel (m+1,n+1) ini, maka baris dan kolom tambahan dapat dihapus kembali. Kini sel (i,j) dengan x_{ij}=k merupakan sel isi, tapi bukan basis. Penyelesaian optimal diperoleh jika $c'_{ij} \leq 0$ untuk semua sel kosong, dan $c'_{ij} \geq 0$ untuk sel isi yang bukan basis. Pada sel isi yang bukan basis, jika c'_{ij} $=-g$, $g>0$, berarti jika elemen pada sel itu dikurangi dengan satu unit alokasi maka ongkos total akan berkurang sebesar g. Jadi jika pada uji optimalitas ternyata pada sel isi yang bukan basis, $c'_{ij}<0$ maka $x_{ij}=k$ masih dapat berkurang, sehingga ongkos total juga berkurang. Cara mengurangi nilai x_{ij} = k ialah dengan membuat loop yang menghubungkan sel (i,j) ini dengan sel-sel basis. Pada loop itu dipilih $x^{B}_{\alpha\beta}$ dengan nilai terkecil, yang koefisien $c^{B}_{\alpha\beta}$ $=-1$. Andaikan itu disebut x^{B}_{qr}. Pada tabel baru nanti nilai x_{ij} akan dapat berkurang sebesar nilai x^{B}_{qr}. Begitu pula dengan $x^{B}_{\alpha\beta}$ lain yang $c^{B}_{\alpha\beta}$ $=-1$, akan berkurang sebesar nilai x^{B}_{qr}, sedangkan $x^{B}_{\alpha\beta}$ dengan $c^{B}_{\alpha\beta}$ = +1 akan bertambah dengan x^{B}_{qr}. Nilai x_{ij} kini akan kurang dari k, maka kini sel (i,j) adalah sel basis.

<u>Contoh 4.19</u>: Tabel 4-24a memuat data masalah angkutan dengan tiga sumber dan empat tujuan, dan diketahui ada pembatasan alokasi, yaitu $x_{33} \leq 22$ dan $x_{34} \leq 22$. Tabel 4-24b adalah tabel penyelesaian awalnya, tetapi ternyata ada alokasi sebesar 30 pada sel (3,3), maka dibuat baris dan kolom tambahan untuk menampung alokasi sebesar 30-22=8 yang tidak mungkin ditempatkan pada sel (3,3) itu (tabel 4-24c). Kini sel (3,3) dengan x_{33}=22 adalah sel isi, tapi bukan basis.

$O_i \backslash D_j$	1	2	3	4	a_i
1	4	4	4	4	25
2	5	4	8	6	25
3	5	4	4	7	50
b_j	15	20	30	35	100

Tabel 4-24a

$O_i \backslash D_j$	1	2	3	4	a_i
1	15 [4]	10 [4]	[4]	[4]	25
2	[5]	10 [4]	[8]	15 [6]	25
3	[5]	[4]	30 [4]	20 [7]	50
b_j	15	20	30	35	100

Tabel 4-24b

$O_i \backslash D_j$	1	2	3	4	5	a_i	u_i
1	15 [4]	10 [4]	ε [4]	2 [4]	-1 [M]	25	0
2	-1 [5]	10 [4]	-4 [8]	15 [6]	-1 [M]	25	0
3	0 [5]	1 [4]	$\boxed{22}$ [4]	20 [7]	8 [M]	50	1
4	0 [M]	0 [M]	8 [M]	2 [M]	■ [0] 2M-5	8	M-4
b_j	15	20	30	35	8	108	
v_j	4	4	4	6	M-1		

Tabel 4-24c

$O_i \backslash D_j$	1	2	3	4	5	a_i	u_i
1	15 [4]	8 [4]	2 [4]	2 [4]	[M] 4-2M	25	0
2	-1 [5]	12 [4]	-4 [8]	13 [6]	[M] 4-2M	25	0
3	[5] 2M-5	■ [4] 2M-4	$\boxed{22}$ [4]	$\boxed{22}$ [7]	6 [M]	50	2M-4
4	0 [M]	0 [M]	6 [M]	2 [M]	2 [0]	8	M-4
b_j	15	20	30	35	8	108	
v_j	4	4	4	6	4-M		

Tabel 4-24d

Pada tabel 4-24c, $x_{13}=\varepsilon$, ini dimaksudkan agar tetap dapat dibentuk suatu pohon basis, karena setelah sel (3,3) menjadi bukan basis, penyelesaian menjadi merosot. Pada uji optimalitas $c_{ij}^{*}>0$ terbesar adalah c_{45}^{*} = 2M-5, maka vektor p_{45} yang akan masuk basis, dan ternyata vektor p_{35} dengan $x_{35}=8$ dan vektor p_{43} dengan $x_{43}=8$ yang akan keluar. Jika tidak ada pembatasan $x_{34} \leq 22$, 8 unit dapat dipindahkan ke sel (4,5), tetapi karena ada pembatasan itu, maka hanya dapat dipindahkan 2 unit dari sel (3,5) dan (4,3) ke sel (4,5). Hal ini mengakibatkan x_{34}=22, dan kini sel (3,4) adalah sel isi tapi bukan basis. Tabel baru seperti tabel 4-24d. Pada uji optimalitasnya, ternyata c'_{32}= 2M-4 adalah c'_{ij}>0 terbesar. Tabel 4-24e adalah tabel barunya. Pada tabel 4-24e ini x_{45}=8. Ini berarti baris dan kolom tambahan dapat dihapus lagi, sehingga tampak seperti tabel 4-24f.

$O_i \backslash D_j$	1	2	3	4	5	a_i
1	15 [4]	2 [4]	8 [4]	[4]	[M]	25
2	[5]	12 [4]	[8]	13 [6]	[M]	25
3	[5]	6 [4]	$\boxed{22}$ [4]	$\boxed{22}$ [7]	[M]	50
4	[M]	[M]	[M]	[M]	8 [0]	8
b_j	15	20	30	35	8	108

Tabel 4-24e

$O_i \backslash D_j$	1	2	3	4	a_i	u_i
1	15 [4]	2 [4]	8 [4]	2 [4]	25	0
2	-1 [5]	12 [4]	-4 [8]	13 [6]	25	0
3	-1 [5]	6 [4]	$\boxed{22}$ [4]	$\boxed{22}$ [7]	50	0
b_j	15	20	30	35	100	
v_j	4	4	4	6		

Tabel 4-24f

$O_i \backslash D_j$	1	2	3	4	a_i	u_i
1	15 $\boxed{4}$	-2 $\boxed{4}$	8 $\boxed{4}$	2 $\boxed{4}$	25	0
2	1 $\boxed{5}$	14 $\boxed{4}$	-2 $\boxed{8}$	11 $\boxed{6}$	25	2
3	1 $\boxed{5}$	6 $\boxed{4}$	$\boxed{22}$ $\boxed{4}$	$\boxed{22}$ $\boxed{7}$	50	2
b_j	15	20	30	35	100	
v_j	4	2	4	4		

Tabel 4-24g

$O_i \backslash D_j$	1	2	3	4	a_i	u_i
1	4 $\boxed{4}$	-1 $\boxed{4}$	8 $\boxed{4}$	13 $\boxed{4}$	25	0
2	11 $\boxed{5}$	14 $\boxed{4}$	-3 $\boxed{8}$	-1 $\boxed{6}$	25	1
3	0 $\boxed{5}$	6 $\boxed{4}$	$\boxed{22}$ $\boxed{4}$	$\boxed{22}$ $\boxed{7}$	50	1
b_j	15	20	30	35	100	
v_j	4	3	4	4		

Tabel 4-24h

Dengan uji optimalitas pada tabel 4-24h, tampak bahwa untuk semua sel kosong $c'_{ij} \leq 0$, berarti tidak ada lagi sel kosong yang dapat dimasukkan menjadi sel basis, tetapi pada sel (3,4), $c'_{34} = -2<0$, berarti nilai $x_{34}=22$ masih dapat dikurangi agar ongkos total juga berkurang. Dengan membentuk suatu loop yang menghubungkan sel (3,4) dengan sel-sel basis, dapat diketahui bahwa x_{34} dapat berkurang dengan 4 unit. Dalam loop itu $x^{B}_{11}=4$ adalah $x^{B}_{\alpha\beta}$ terkecil dengan $c^{B}_{\alpha\beta}=-1$, maka x_{34} akan berkurang sebesar 4 unit, sedangkan $x^{B}_{\alpha\beta}$ dalam loop dengan $c^{B}_{\alpha\beta}=+1$ akan bertambah sebesar 4 unit. Tabel barunya tampak seperti tabel 4-24i. Dalam tabel 4-24i, $x^{B}_{34}=18$ merupakan perubah basis.

$O_i \backslash D_j$	1	2	3	4	a_i	u_i
1	-2 [4]	-3 [4]	8 [4]	17 [4]	25	0
2	15 [5]	10 [4]	-1 [8]	1 [6]	25	3
3	0 [5]	10 [4]	$\boxed{22}$ [4]	18 [7]	50	3
b_j	15	20	30	35	100	
v_j	2	1	4	4		

Tabel 4-24i

$O_i \backslash D_j$	1	2	3	4	a_i	u_i
1	-1 [4]	-3 [4]	8 [4]	17 [4]	25	4
2	15 [5]	-1 [4]	-2 [8]	10 [6]	25	6
3	1 [5]	20 [4]	$\boxed{22}$ [4]	8 [7]	50	7
b_j	15	20	30	35	100	
v_j	-1	-3	0	0		

Tabel 4-24j

$O_i \backslash D_j$	1	2	3	4	a_i	u_i
1	-1 [4]	-2 [4]	8 [4]	17 [4]	25	0
2	7 [5]	0 [4]	-2 [8]	18 [6]	25	2
3	8 [5]	20 [4]	$\boxed{22}$ [4]	-1 [7]	50	2
b_j	15	20	30	35	100	
v_j	3	2	4	4		

Tabel 4-24k

Tabel 4-24k adalah tabel optimal. Dengan uji optimalitas tampak bahwa dalam tabel 4-24k, $c'_{ij} \leq 0$ untuk semua sel kosong, dan $c'_{33}=2>0$ untuk sel isi (3,3) yang bukan basis. Ongkos total minimal $z = 4(8)+4(17)+5(7)+6(18)+5(8)+4(20)+4(22) = 451$.

4.9 Masalah Angkutan dengan Kasus Maksimal

Masalah angkutan dengan kasus maksimal dapat diselesaikan dengan cara seperti yang sudah dikenal, dengan terlebih dulu mengembalikan masalahnya ke bentuk kasus minimal. Caranya ialah dengan mengadakan transformasi pada matriks ongkos semula, yaitu dengan mengurangkan masing-masing ongkos asli dari ongkos tertinggi dalam matriks ongkos. Ongkos yang ditransformasi ini disebut ongkos relatif, dan masalahnya kemudian menjadi masalah angkutan dengan kasus minimal. Penyelesaian optimal untuk masalah angkutan dengan kasus minimal sama dengan penyelesaian optimal masalah angkutan kasus maksimal semula. Ongkos total maksimal untuk masalah semula diperoleh dengan mengembalikan nilai perubah-perubah basis dalam penyelesaian optimal dengan ongkos asli yang sesuai.

Ongkos total maksimal juga dapat dihitung dengan menggunakan rumus yang akan diturunkan di bawah ini. Andaikan P adalah ongkos tertinggi dari matriks ongkos asli, maka matriks ongkos transformasinya diperoleh dengan : $\bar{c}_{ij} = P - c_{ij}$, dengan $\bar{c}_{ij}$ adalah ongkos relatif. Dengan ongkos relatif ini dapat dihitung ongkos total minimal $\bar{z}_{min}$, yaitu :

$$\bar{z}_{min} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \bar{c}_{ij}\ x_{ij}$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} (P - c_{ij})x_{ij}$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} P\ x_{ij} - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\ x_{ij}$$

$$= P.\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} - z_{maks}$$

$$z_{maks} = P.\sum_{i=1}^{m} a_i - \bar{z}_{min}\ ,\ \text{atau}\ z_{maks} = P.\sum_{j=1}^{n} b_j - \bar{z}_{min} \qquad (4\text{-}22)$$

karena $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$.

Dengan rumus (4-22), untuk menghitung nilai z_{maks}, terlebih dulu harus dihitung nilai $\bar{z}_{min}$, yang diperoleh dengan mengalikan nilai perubah-perubah basis dalam penyelesaian optimal dengan ongkos relatif yang sesuai.

<u>Teorema 4.4</u>: Penyelesaian optimal untuk masalah angkutan tidak akan berubah jika elemen-elemen dalam sembarang baris atau kolom dari matriks ongkos dikurangi atau ditambah dengan suatu jumlah yang sama.

<u>Bukti</u>:

Andaikan x_{ij} adalah perubah basis penyelesaian optimal soal asli, dan z_o adalah ongkos total asli.

$$z_o = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, x_{ij} \quad , \quad c_{ij} \geq 0 \qquad (4\text{-}23)$$

Andaikan r_i adalah suatu jumlah yang ditambahkan/dikurangkan pada baris i dan t_j adalah suatu jumlah yang ditambahkan/dikurangkan pada kolom j dalam matriks ongkos. Dengan demikian dalam matriks ongkos yang ditransformasi, elemen ongkos pada baris i, kolom j, yaitu c_{ij}, menjadi :

$$c_{ij} \pm r_i \pm t_j$$

Ongkos total menjadi:

$$z_o' = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} (c_{ij} \pm r_i \pm t_j)x_{ij}$$

$$z_o' = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, x_{ij} \pm \sum_{i=1}^{m} r_i \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \pm \sum_{j=1}^{n} t_j \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \qquad (4\text{-}24)$$

Dari (2-6) diketahui $\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = a_i$ dan dari (2-7) diketahui $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = b_j$, maka (4-24) dapat ditulis:

$$z_o' = z_o \pm \sum_{i=1}^{m} r_i\, a_i \pm \sum_{j=1}^{n} t_j\, b_i$$

$$z_o' = z_o + \text{konstan} \qquad (4\text{-}25)$$

Terbukti bahwa penambahan suatu konstanta pada baris atau kolom dari matriks ongkos tidak mengubah penyelesaian optimal.

Dari teorema 4.4 dijamin bahwa penyelesaian optimal untuk masalah angkutan kasus maksimal sama dengan penyelesaian optimal masalah angkutan kasus minimal akibat transformasi matriks ongkos asli.

<u>Contoh 4.20</u>: Akan dicari penyelesaian optimal dan ongkos total maksimal suatu masalah angkutan dengan data pada tabel 4-25a. Matriks ongkos pada tabel 4-25a terlebih dahulu harus ditransformasi untuk mendapatkan matriks ongkos relatif, sehingga masalahnya menjadi kasus minimal. Ongkos tertinggi dari matriks ongkos asli adalah P=5. Jika masing-masing elemen matriks ongkos asli dikurangkan pada P=5, diperoleh matriks ongkos relatif seperti pada tabel 4-25b.

O_i \ D_j	1	2	3	4	a_i
1	2	3	2	4	40
2	4	1	3	3	40
3	2	5	4	1	40
b_j	30	35	25	30	120

Tabel 4-25a

O_i \ D_j	1	2	3	4	a_i
1	3	2	3	1	40
2	1	4	2	2	40
3	3	0	1	4	40
b_j	30	35	25	30	120

Tabel 4-25b

$O_i \backslash D_j$	1	2	3	4	a_i	u_i
1	-1 $\boxed{3}$	o $\boxed{2}$	10 $\boxed{3}$	30 $\boxed{1}$	40	3
2	30 $\boxed{1}$	-3 $\boxed{4}$	10 $\boxed{2}$	-2 $\boxed{2}$	40	2
3	-3 $\boxed{3}$	35 $\boxed{0}$	5 $\boxed{1}$	-5 $\boxed{4}$	40	1
b_j	30	35	25	30	120	
v_j	-1	-1	0	-2		

Tabel 4-25c

$O_i \backslash D_j$	1	2	3	4	a_i
1	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$	10 $\boxed{2}$	30 $\boxed{4}$	40
2	30 $\boxed{4}$	$\boxed{1}$	10 $\boxed{3}$	$\boxed{3}$	40
3	$\boxed{2}$	35 $\boxed{5}$	5 $\boxed{4}$	$\boxed{1}$	40
b_j	30	35	25	30	120

Tabel 4-25d

Tabel 4-25c adalah tabel awal untuk masalah angkutan kasus minimal yang ternyata langsung optimal. Ongkos total minimalnya $\bar{z}_{min} = 3(10)+1(30)+1(30)+2(10)+0(35)+1(5) = 115$. Penyelesaian optimal masalah angkutan kasus maksimal semula sama dengan penyelesaian optimal yang terdapat pada tabel 4-25d beserta ongkos asli. Ongkos total maksimal : $z_{maks} = 2(10)+4(30)+4(30)+3(10)+5(35)+4(5) = 485$, atau jika dihitung dengan rumus (4-22), diperoleh:

$$z_{maks} = P \sum_{i=1}^{3} a_i - \bar{z}_{min}$$

$$= 5.120 - 115$$

$$= 600 - 115$$

$$z_{maks} = 485.$$

BAB V

MASALAH ANGKUTAN YANG DIPERLUAS

5.1 Perumusan Matematis dan Beberapa Konsep Dasar

Masalah angkutan yang diperluas agak berbeda dengan masalah angkutan biasa. Lagi pula dalam praktek sehari-hari masalah dengan tipe ini muncul dalam berbagai macam penerapan. Sebagai ilustrasi, di bawah ini diberikan suatu contoh masalah yang dapat digolongkan sebagai masalah angkutan yang diperluas.

Suatu perusahaan memiliki beberapa tipe alat angkut yang berbeda untuk mengangkut barang-barang produksinya. Setiap tipe alat angkut berbeda kapasitas angkutnya, ukuran, daya operasi dan usianya. Perusahaan ini telah menetapkan jumlah barang (dalam ton) minimal yang harus dibawa oleh setiap tipe alat angkut. Pada suatu ketika alat-alat angkut ini harus mengangkut barang ke beberapa tujuan yang berbeda, dan diketahui pula banyaknya barang yang dibutuhkan oleh setiap tujuan selama satu periode waktu, misalnya seminggu. Melihat daya operasi dari alat angkut ini dan jarak yang ditempuh, perusahaan itu dapat menetapkan banyaknya alat angkut tipe tertentu yang mengangkut barang ke tujuan tertentu selama periode seminggu itu, jika alat angkut ini ditugaskan full time pada rute ini. Begitu pula dapat ditentukan ongkos per ton barang yang diangkut oleh setiap tipe alat angkut menuju tujuan tertentu. Dalam hal ini perusahaan menghadapi masalah berapa banyaknya barang (dalam ton) yang dapat diangkut alat angkut tipe tertentu ke tujuan tertentu sedemikian hingga ongkos total angkutan minimal.

Secara matematis masalah angkutan yang diperluas dapat dirumuskan sebagai berikut :

Menentukan $x_{ij} \geq 0$, $x_{si} \geq 0$ sedemikian hingga

Meminimalkan ongkos total $z = \sum_{i}^{m} \sum_{j}^{n} c_{ij} x_{ij}$ (5-1)

yang memenuhi:

$$\sum_{j=1}^{n} d_{ij} x_{ij} \pm x_{si} = a_i \ , \ a_i > 0 \ , \ i = 1, \ldots, m \qquad (5\text{-}2)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \ , \ b_j > 0 \ , \ j = 1, \ldots, n \qquad (5\text{-}3)$$

Kendala (5-2) disebut kendala sumber dan kendala (5-3) disebut kendala kebutuhan. Pada (5-2), x_{si} dapat dianggap sebagai perubah kelonggaran atau perubah surplus dengan $c_{si} = 0$; d_{ij} yang merupakan koefisien dari x_{ij} adalah suatu bilangan sembarang, sedangkan $d_{si} = 1$ merupakan koefisien x_{si}. Pada masalah angkutan biasa semua koefisien x_{ij} adalah satu, karena dianggap tidak ada data lain yang perlu diperhitungkan dalam keseluruhan masalahnya selain data tentang ongkos angkutan per unit, kapasitas tiap-tiap sumber dan kebutuhan masing-masing tujuan. Pada masalah angkutan yang diperluas ini d_{ij} muncul karena dianggap ada data tambahan yang perlu diperhitungkan dalam keseluruhan masalahnya, yang jelas dapat mempengaruhi penyelesaian masalah itu.

Jika contoh kasus di atas diterapkan pada perumusan matematis masalah angkutan yang diperluas, dapat diandaikan ada m buah tipe truk dan n buah tujuan yang berbeda, dengan :

a_i = jumlah barang (dalam ton) minimal yang harus dibawa oleh alat angkut tipe i

b_j = kebutuhan barang (dalam ton) pada tujuan j

d_{ij} = banyaknya alat angkut tipe i yang mengangkut barang ke tujuan j

c_{ij} = ongkos angkut per ton barang dengan alat angkut i menuju j

dan yang harus ditentukan adalah :

x_{ij} = jumlah barang (dalam ton) yang dapat diangkut alat angkut i menuju j

Contoh lain yang cukup dikenal, yang dapat digolongkan sebagai masalah angkutan yang diperluas adalah masalah Penugasan-Mesin (Machine-Assignments), yang akan dibicarakan pada subbab 5.4.

Masalah angkutan yang diperluas adalah juga masalah program linear, sehingga sebenarnya dapat juga diselesaikan dengan metode simpleks, tetapi karena struktur masalahnya mirip dengan masalah angkutan biasa, maka masalah ini dapat diselesaikan dengan cara yang lebih mudah daripada dengan cara simpleks. Penyelesaian masalah angkutan yang diperluas ini mirip dengan penyelesaian masalah angkutan biasa, tetapi tidak persis sama, karena di sini ada koefisien d_{ij} yang harus diperhitungkan.

Ada beberapa perbedaan penting antara masalah angkutan biasa dan masalah angkutan yang diperluas, yaitu :

1. Rank matriks koefisien x_{ij} dalam (5-2) dan (5-3) tidak selalu m+n-1, tetapi dapat lebih dari itu, yaitu m+n.

Dalam pembicaraan ini diambil rank matriks koefisien x_{ij} adalah m+n (ini berarti semua kendala linear independen).

2. Nilai $y_{ij}^{\alpha\beta}$ dalam masalah angkutan yang diperluas belum tentu ± 1 atau 0. Dengan demikian dalam penyelesaian masalah ini, nilai $y_{ij}^{\alpha\beta}$ harus ditentukan secara eksplisit.

3. Nilai x_{ij} belum tentu bulat dalam penyelesaian optimalnya, meskipun a_i dan b_j bernilai bulat.

Vektor p_{ij} yang bersesuaian dengan x_{ij} untuk masalah ini dapat ditulis sebagai :

$$p_{ij} = d_{ij}\, e_i + e_{m+j} \tag{5-4}$$

Vektor yang bersesuaian dengan x_{si} adalah e_i. Jika $p_{\alpha\beta}^{B}$ adalah vektor dalam penyelesaian basis, maka p_{ij} dapat ditulis sebagai :

$$p_{ij} = \sum_{\alpha\beta} y_{ij}^{\alpha\beta}\, p_{\alpha\beta}^{B} \tag{5-5}$$

Dalam penyelesaian basis ada m+n buah $p_{\alpha\beta}^{B}$, karena rank matriks koefisien adalah m+n. Jika B adalah matriks yang memuat $p_{\alpha\beta}^{B}$ maka (5-5) dapat ditulis sebagai :

$$p_{ij} = B\, y_{ij}^{\alpha\beta} \tag{5-6}$$

Tabel masalah angkutan yang diperluas mirip dengan tabel masalah angkutan biasa, tetapi pada tabel masalah angkutan yang diperluas harus disertakan pula nilai d_{ij} dalam setiap sel (i,j). Dalam tabel tersebut baris i diberi simbol R_i dan kolom j diberi simbol P_j.

Tabel masalah angkutan yang diperluas tampak seperti tabel 5-1 berikut:

R_i \ P_j	1		2		. . .	n		kelong-garan / surplus		a_i	u_i
1	x_{11}	c_{11} d_{11}	x_{12}	c_{12} d_{12}	. . .	x_{1n}	c_{1n} d_{1n}	x_{s1}	0 1	a_1	u_1
2	x_{21}	c_{21} d_{21}	x_{22}	c_{22} d_{22}	. . .	x_{2n}	c_{2n} d_{2n}	x_{s2}	0 1	a_2	u_2
⋮	⋮		⋮		. . .	⋮		⋮		⋮	
m	x_{m1}	c_{m1} d_{m1}	x_{m2}	c_{m2} d_{m2}	. . .	x_{mn}	c_{mn} d_{mn}	x_{sm}	0 1	a_m	u_m
b_j	b_1		b_2		. . .	b_n					
v_j	v_1		v_2		. . .	v_n					

Tabel 5-1

Jika x_{ij} dikalikan dengan d_{ij} dan dijumlahkan untuk setiap R_i, maka akan diperoleh a_i. Jika x_{ij} dijumlahkan untuk setiap P_j maka diperoleh b_j. Dalam tabel 5-1, penjumlahan nilai perubah-perubah kelonggaran atau surplus tidak mempunyai arti. Untuk masalah ini tidak harus berlaku $\sum_{i=1} a_i = \sum_{j=1} b_j$. Perubah kelonggaran (atau surplus) x_{si} masuk basis dalam setiap R_i hanya untuk memenuhi a_i.

<u>Teorema 5.1</u> : Dalam tabel masalah angkutan yang diperluas dengan m sumber dan n kebutuhan berlaku :

(a) Jika $m \neq n$, maka ada paling sedikit satu baris atau satu kolom yang hanya memuat satu perubah basis

(b) Jika semua baris dan kolom memuat tepat dua perubah basis, maka $m = n$

<u>Bukti</u> :

Andaikan $m \neq n$ dan semua baris dan kolom memuat dua atau lebih perubah basis, maka :

$$\text{jumlah perubah basis} \geq 2m \qquad (5\text{-}7)$$

$$\text{dan jumlah perubah basis} \geq 2n \qquad (5\text{-}8)$$

$$\text{jadi jumlah perubah basis} \geq m + n \qquad (5\text{-}9)$$

Terjadi kontradiksi dengan ketentuan bahwa jumlah perubah basis = m+n, meskipun kontradiksi ini hanya untuk tanda " > " pada (5-9). Jadi pengandaian harus diingkar dan (a) terbukti. Sesungguhnya (b) adalah sebagian dari kontraposisi (a), maka (b) juga pasti benar.

Dari teorema 5-1 dapat dikatakan bahwa untuk masalah angkutan yang diperluas, ke-(m+n) buah sel-sel basis tidak perlu membentuk suatu pohon, mungkin juga yang terbentuk adalah suatu loop. Berarti dalam masalah ini dengan adanya suatu loop belum tentu vektor-vektor dalam loop itu linear dependen.

5.2 Penentuan Penyelesaian Awal dan Uji Optimalitas

Suatu penyelesaian fisibel basis awal untuk masalah ini dapat ditentukan dengan cara yang mirip dengan cara menentukan penyelesaian fisibel basis awal masalah angkutan biasa. Dalam masalah ini suatu penyelesaian fisibel basis memuat tepat m+n buah $x_{ij} > 0$. Hal ini tentu saja jika penyelesaian tidak merosot. Perlu diketahui bahwa pembicaraan kali ini dibatasi hanya untuk kasus yang tidak merosot. Semua metode penyelesaian basis awal yang telah dibicarakan pada subbab 4-2 dapat digunakan untuk mendapatkan suatu penyelesaian fisibel basis. Dalam hal ini harus selalu diingat bahwa dalam masalah ini nilai setiap sel adalah $d_{ij}x_{ij}$.

Setelah suatu penyelesaian fisibel basis diperoleh, untuk menentukan optimalitas penyelesaian itu perlu dihitung ongkos kesempatan c'_{ij} untuk setiap sel kosong. Perhitungan c'_{ij} dapat dilakukan dengan menggunakan metode MODI seperti pada masalah angkutan biasa. Jika $c^{B}_{\alpha\beta}$ adalah ongkos yang bersesuaian dengan suatu perubah basis $x^{B}_{\alpha\beta}$, maka diperoleh m buah u_{α} dan n buah v_{β} yang merupakan penyelesaian dari suatu himpunan m+n, dengan

$$\left.\begin{aligned} d_{\alpha\beta}u_{\alpha} + v_{\beta} &= c^{B}_{\alpha\beta} \\ u_{\alpha} &= 0 \end{aligned}\right\} \text{m+n persamaan} \qquad (5\text{-}10)$$

Suatu persamaan yang berbentuk $u_{\alpha} = 0$ muncul jika perubah kelonggaran (atau surplus) $x_{s\alpha}$ ada dalam basis. Dengan demikian baik satu atau lebih u_{α} dan v_{β} tidak mungkin diberi nilai sembarang seperti pada masalah angkutan biasa. Dalam masalah ini u_{α} dan v_{β} ditentukan secara unik dari (5-10).

Setelah semua u_{α}, v_{β} ditentukan maka semua c'_{ij} untuk setiap sel kosong dapat ditentukan dengan cara :

$$\begin{aligned} c'_{ij} &= d_{ij}u_{i} + v_{j} - c_{ij} \\ \text{dan} \quad c'_{si} &= u \end{aligned} \qquad (5\text{-}11)$$

Penyelesaian optimal diperoleh bila semua $c'_{ij} \leq 0$. Jika ada satu saja c'_{ij} yang bernilai positif berarti penyelesaian itu belum optimal dan basis masih dapat dimajukan.

5.3 Memajukan Penyelesaian Fisibel Basis

Jika penyelesaian fisibel basis belum optimal, maka vektor yang harus masuk basis adalah vektor dengan

$$c'_{st} = \max c'_{ij} \ , \ c'_{ij} > 0 \qquad (5\text{-}12)$$

Dalam hal ini vektor p_{st} yang harus masuk basis. Untuk menentukan vektor yang keluar basis, terlebih dahulu nilai $y_{st}^{\alpha\beta}$ harus dicari. Ini dapat dilakukan dengan menyelesaikan secara berturutan himpunan persamaan (5-5). Mungkin juga menghitung $y_{st}^{\alpha\beta}$ dengan cara menemukan suatu loop dalam tabel 5-1 yang menghubungkan sel (s,t) dan sel-sel basis, dengan vektor p_{st} sebagai kombinasi linear vektor-vektor basis dalam loop itu. Cara kedua ini tidak begitu mudah, karena mungkin masih diperlukan vektor-vektor yang ada di luar loop, dan juga karena dapat terjadi kesalahan arah lintasan loop. Kesulitan-kesulitan ini akan diperlihatkan dalam contoh pada subbab 5-4.

Kriteria yang digunakan dalam metode simpleks untuk menentukan vektor p_{qr} yang harus keluar basis adalah :

$$\frac{x_{qr}^{B}}{y_{st}^{qr}} = \theta = \min \left\{ \frac{x_{\alpha\beta}^{B}}{y_{st}^{\alpha\beta}} \right\} , \ y_{st}^{\alpha\beta} > 0 \qquad (5\text{-}13)$$

Penyelesaian fisibel baru sangat mudah ditemukan dengan menetapkan $x_{st} = \theta$, $x_{qr} = 0$ dan membuat penyesuaian yang tepat pada setiap sel basis lain dalam tabel baru. Hal ini akan tampak jelas dalam contoh nanti. Perubah basis baru juga dapat dihitung dari rumus transformasi berikut :

$$\begin{aligned} \hat{x}_{\alpha\beta}^{B} &= x_{\alpha\beta}^{B} - \theta \ y_{st}^{\alpha\beta} \\ \hat{x}_{st} &= \theta \end{aligned} \qquad (5\text{-}14)$$

5.4 Contoh Soal Masalah Angkutam yang Diperluas

Sebagai contoh diambil masalah Penugasan Mesin, yang secara umum dapat digambarkan sebagai berikut :

Ada suatu toko yang memproduksi barang-barang yang berbeda. Toko ini terdiri dari beberapa bagian (departement). Masing-masing bagian memuat sejumlah mesin dengan tipe sama, misalnya : mesin-mesin bubut, mesin pres, mesin giling. Tidak semua mesin dalam suatu bagian identik, masing-masing mesin itu mungkin berbeda umurnya, ukuran atau karakteristiknya. Pada awal tiap-tiap minggu (periode) setiap kepala bagian mengetahui berapa banyak pekerjaan yang harus dilakukan bagiannya untuk minggu mendatang. Dalam hal ini diasumsikan tidak ada pesanan mendadak. Kepala bagian itu harus menugaskan mesin-mesin yang bervariasi pada bagiannya untuk menyelesaikan pekerjaan sedemikian hingga ongkos produksi minimal. Ongkos operasi setiap satu produk tergantung pada mesin mana yang bekerja. Diasumsikan bahwa di tiap-tiap bagian tak ada produk yang perlu diproses oleh lebih dari satu mesin. Data yang ada adalah :

- ada m buah tipe mesin dan n buah pekerjaan (produk)
- d_{ij} = waktu yang dibutuhkan untuk memproses satu unit produk j dengan mesin i
- a_i = waktu yang tersedia untuk mesin i
- b_j = jumlah unit j yang harus dipenuhi
- c_{ij} = ongkos untuk memproses satu unit produk j dengan mesin i

Yang harus ditentukan adalah :

x_{ij} = jumlah unit j yang diproduksi dengan mesin i pada periode waktu mendatang, sedemikian hingga ongkos total produksi $z = \sum_{i}^{m} \sum_{j}^{n} c_{ij} x_{ij}$ minimal.

Tabel 5-2 di bawah ini memuat data untuk masalah penugasan mesin dengan tiga tipe mesin dan empat pekerjaan.

$R_i \diagdown P_j$	1	2	3	4	a_i
1	0,25	0,30	0,35	0,50	200
	0,35	0,50	0,35	0,40	
2	0,70	0,62	0,30	0,40	500
	0,90	0,84	0,30	0,40	
3	0,40	0,20	0,60	0,70	400
	0,80	0,40	0,74	0,90	
b_j	200	400	500	1000	

Tabel 5-2

Suatu penyelesaian fisibel basis harus terdiri dari tepat 7 buah $x_{ij} > 0$. Untuk menentukan penyelesaian basis awal digunakan metode kolom minimum. Ongkos terkecil pada kolom 1 adalah $c_{11} = 0{,}25$, maka ditetapkan

$$x_{11} = \min\left(\frac{a_1}{d_{11}}, b_1\right) = \min\left(\frac{200}{0{,}35}, 200\right) = 200$$

Kolom 1 menjadi jenuh. Ongkos terkecil pada kolom 2 adalah $c_{32} = 0{,}20$, maka

$$x_{32} = \min\left(\frac{a_3}{d_{32}}, b_2\right) = \min\left(\frac{400}{0{,}40}, 400\right) = 400$$

Kolom 2 kini jenuh. Pada kolom 3, $c_{23} = 0{,}3$ adalah ongkos terkecil, maka

$$x_{23} = \min\left(\frac{a_2}{d_{23}}, b_3\right) = \min\left(\frac{500}{0{,}30}, 500\right) = 500$$

Kolom 3 jenuh. Ongkos terkecil pada kolom 4 adalah c_{24} = 0,4 . Pada baris 2 ini telah ditetapkan $x_{23} = 500$, maka a_2 berkurang menjadi 500-500(0,3) = 350, sehingga

$$x_{24} = \left(\frac{350}{0{,}40}, 1000\right) = 875$$

Baris 2 kini jenuh. Ongkos terkecil berikutnya pada kolom 4 adalah $c_{14} = 0{,}50$. Setelah ada penetapan $x_{11} = 200$, maka a_1 berkurang menjadi 200-200(0,35) = 130, sehingga

$$x_{14} = \min\left(\frac{130}{0,50}, 1000-875\right) = 125$$

Kini kolom 4 jenuh, tetapi baris 1 dan baris 3 belum jenuh, pada R_1 masih ada kapasitas sebesar 400−400(0,40)= 240. Dengan demikian diperoleh suatu penyelesaian awal dengan nilai perubah kelonggaran x_{s1} = 67,5 dan x_{s3} = 240. Tabel 5-3 memperlihatkan penyelesaian awal untuk masalah ini.

$R_i \backslash P_j$	1		2		3		4		kelonggaran		a_i	u_i
1	200	0,25 0,35	-0,1	0,30 0,50	0,025	0,35 0,35	125	0,50 0,50	67,5	0 1	200	0
2	-0,675	0,70 0,90	-0,63	0,62 0,84	500	0,30 0,30	875	0,40 0,40	-0,25	0 1	500	-0,25
3	-0,15	0,40 0,80	400	0,20 0,40	-1,225	0,60 0,74	-0,2	0,70 0,90	240	0 1	400	0
b_j	200		400		500		1000					
v_j	0,25		0,20		0,375		0,5					

Tabel 5-3

Kini akan diuji optimalitas penyelesaian awal ini, dengan cara menyelesaikan himpunan persamaan (5-10). Pada kasus ini persamaan-persamaan tersebut adalah :

$0,35u_1 + v_1 = 0,25$ $\quad$ $0,3u_2 + v_3 = 0,3$ $\quad$ $0,4u_3 + v_2 = 0,2$

$0,5u_1 + v_4 = 0,5$ $\quad$ $0,4u_2 + v_4 = 0,4$ $\quad$ $u_1 = u_3 = 0$

Dengan demikian dapat langsung diperoleh :

$v_1 = 0,25$; $v_2 = 0,2$; $v_4 = 0,5$; $u_2 = -0,25$; $v_3 = 0,375$

Kini ongkos kesempatan c'_{ij} dapat dihitung :

$c'_{12} = 0,5(0)+0,2-0,3 = -0,1$

$c'_{13} = 0,35(0)+0,375-0,35 = 0,025$

$c'_{21} = 0,9(-0,25)+0,25-0,7 = -0,675$

$c'_{22} = 0,84(-0,25)+0,2-0,62 = -0,63$

$c'_{32} = -0,25$

$c'_{31} = 0,8(0)+0,25-0,4 = -0,15$

$c'_{33} = 0,74(0)+0,375-0,6 = -0,225$

$c'_{34} = 0,9(0)+0,5-0,7 = -0,2$

Nilai-nilai u_i dan v_j dan c'_{ij} tercantum pula pada tabel 5-3. tampak $c'_{13} = 0,025$ adalah c'_{ij} positif, maka vektor p_{13} harus masuk basis. Untuk menentukan vektor mana yang harus keluar, harus dicari dulu $y^{\alpha\beta}_{13}$, dengan menyelesaikan sistem persamaan (5-6). Diperoleh sistem persamaan :

$$\begin{array}{c} p_{13} \\ \begin{bmatrix} 0,35 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} B \\ \begin{array}{cccccccc} p_{11} & p_{14} & p_{31} & p_{23} & p_{24} & p_{32} & p_{33} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0,35 & 0,5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,3 & 0,4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,4 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} y^{\alpha\beta}_{13} \\ \begin{bmatrix} y^{11}_{13} \\ y^{14}_{13} \\ y^{31}_{13} \\ y^{23}_{13} \\ y^{24}_{13} \\ y^{32}_{13} \\ y^{33}_{13} \end{bmatrix} \end{array}$$

Atau : $0,35\, y^{11}_{13} + 0,5\, y^{14}_{13} + y^{31}_{13} = 0,35$ $\qquad y^{11}_{13} = 0$

$0,3\, y^{23}_{13} + 0,4\, y^{24}_{13} = 0$ $\qquad y^{32}_{13} = 0$

$0,4\, y^{32}_{13} + y^{33}_{13} = 0$ $\qquad y^{23}_{13} = 1$

$y^{14}_{13} + y^{24}_{13} = 0$

Untuk tiap baris dan kolom, kecuali perubah kelonggaran, ada sebuah persamaan. Penyelesaian persamaan-persamaan di atas adalah : $y_{13}^{11} = 0 \quad y_{13}^{23} = 1 \quad y_{13}^{24} = -0,75 \quad y_{13}^{s1} = -0,025$

$y_{13}^{32} = 0 \quad y_{13}^{s3} = 0 \quad y_{13}^{14} = 0,75$

Akan diperlihatkan apa yang terjadi jika $y_{13}^{\alpha\beta}$ dicoba dihitung dengan cara mencari loop seperti pada masalah angkutan biasa. Ada suatu loop yang menghubungkan p_{13}, p_{14}^B, p_{24}^B, p_{23}^B. Jadi dapat ditulis :

$$p_{13} = 0,35\ e_1 + e_6 = \frac{0,35}{0,5}(0,5\ e_1 + e_7) - \frac{0,35}{0,5}(0,4\ e_2 + e_7)$$

$$+ \frac{0,35(0,4)}{0,5(0,3)}(0,3\ e_2 + e_6)$$

Hal ini tidak dapat diselesaikan karena pada ruas kiri ada e_6 sedangkan pada ruas kanan ada $\frac{0,35(0,4)}{0,5(0,3)}\ e_6$. Lagi pula tidak ada vektor lain dalam basis yang memuat e_6. Jika loop itu dilintasi dengan arah berlawanan yaitu dari p_{13} ke p_{23}^B, p_{24}^B lalu ke p_{14}^B, maka dapat ditulis :

$$p_{13} = 0,35\ e_1 + e_6 = (0,3\ e_2 + e_6) - \frac{0,3}{0,4}(0,4\ e_2 + e_7)$$

$$+ \frac{0,3}{0,4}(0,5\ e_1 + e_7) - 0,025\ e_1$$

Di sini p_{13} dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari vektor-vektor basis dan $y_{13}^{\alpha\beta}$ yang diperoleh sama seperti cara pertama, tetapi untuk itu harus disertakan vektor kelonggaran e_1, yang tidak ada dalam loop.

Hanya y_{13}^{23}, y_{13}^{14} yang bernilai positif, maka perubah yang harus keluar ditentukan dari :

$$\frac{x_{qr}^B}{y_{13}^{qr}} = \min\left(\frac{x_{23}^B}{y_{13}^{23}} = \frac{500}{1}, \frac{x_{14}^B}{y_{13}^{14}} = \frac{125}{0,75}\right) = 166,67 = \frac{x_{14}^B}{y_{13}^{14}}$$

Jadi x_{14} harus keluar basis dan digantikan oleh x_{13}. Penyelesaian fisibel basis baru dapat dicari dengan menyesuaikan nilai-nilai dalam tabel. Diketahui $\hat{x}_{13} = \theta = 166,7$ maka untuk mendapatkan jumlah yang tepat pada kolom 3 haruslah $\hat{x}_{23} = 500 - 166,67 = 333,33$. Pada kolom 4, $\hat{x}_{24} = 1000$ karena $\hat{x}_{14} = 0$. Nilai $\hat{x}_{ij}$ pada kolom-kolom lain tetap. Pada baris 1, yang sudah pasti adalah $\hat{x}_{11}=200$ dan $\hat{x}_{13}=166,7$ maka haruslah $\hat{x}_{s1}=200 - 200(0,35) - 166,67(0,35) = 71,655$. Pada baris 2 harus ditetapkan $\hat{x}_{s2} = 500 - 0,3(333,33)-0,4(1000) \approx 0$. Pada baris 3, nilai-nilai $\hat{x}_{ij}$ tetap. Penyelesaian fisibel basis baru ini tampak pada tabel 5-4.

<table>
<tr><td>$R_i \backslash P_j$</td><td colspan="2">1</td><td colspan="2">2</td><td colspan="2">3</td><td colspan="2">4</td><td colspan="2">kelonggar-an</td><td>a_i</td><td>u_i</td></tr>
<tr><td rowspan="2">1</td><td rowspan="2">200</td><td>0,25</td><td rowspan="2">-0,1</td><td>0,30</td><td rowspan="2">166,67</td><td>0,35</td><td rowspan="2">-0,033</td><td>0,50</td><td rowspan="2">71,655</td><td>0</td><td rowspan="2">200</td><td rowspan="2">0</td></tr>
<tr><td>0,35</td><td>0,50</td><td>0,35</td><td>0,50</td><td>1</td></tr>
<tr><td rowspan="2">2</td><td rowspan="2">0.0003</td><td>0,70</td><td rowspan="2">-0,55</td><td>0,62</td><td rowspan="2">333,33</td><td>0,30</td><td rowspan="2">1000</td><td>0,40</td><td rowspan="2">-0,167</td><td>0</td><td rowspan="2">500</td><td rowspan="2">-0,167</td></tr>
<tr><td>0,90</td><td>0,84</td><td>0,30</td><td>0,40</td><td>1</td></tr>
<tr><td rowspan="2">3</td><td rowspan="2">-0,15</td><td>0,40</td><td rowspan="2">400</td><td>0,20</td><td rowspan="2">-0,25</td><td>0,60</td><td rowspan="2">-0,233</td><td>0,70</td><td rowspan="2">240</td><td>0</td><td rowspan="2">400</td><td rowspan="2">0</td></tr>
<tr><td>0,80</td><td>0,40</td><td>0,74</td><td>0,90</td><td>1</td></tr>
<tr><td>b_j</td><td colspan="2">200</td><td colspan="2">400</td><td colspan="2">500</td><td colspan="2">1000</td><td colspan="4" rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>v_j</td><td colspan="2">0,25</td><td colspan="2">0,20</td><td colspan="2">0,35</td><td colspan="2">0,467</td></tr>
</table>

Tabel 5-4

Untuk menghitung c'_{ij}, pertama-tama ditentukan dulu u_α, v_β dengan cara menyelesaikan himpunan persamaan (5-10) yang bersesuaian dengan penyelesaian basis baru. Persamaan-persamaan ini adalah :

$0,35u_1 + v_1 = 0,25 \quad 0,30u_2 + v_3 = 0,30 \quad 0,40u_3 + v_2 = 0,20$

$0,35u_1 + v_3 = 0,35 \quad 0,40u_2 + v_4 = 0,40 \quad u_1 = u_3 = 0$

Diperoleh penyelesaian persamaan-persamaan ini :

$u_1 = 0$ $v_1 = 0,25$

$u_2 = -0,167$ $v_2 = 0,20$

$u_3 = 0$ $v_3 = 0,35$

$v_4 = 0,467$

Kini dapat dihitung c'_{ij} , yaitu :

$c'_{12} = 0,5(0)+0,2-0,3 = -0,1$

$c'_{14} = 0,5(0)+0,467-0,5 = -0,033$

$c'_{21} = 0,9(-0,167)+0,25-0,7 = 0,6003$

$c'_{22} = 0,84(-0,167)+0,2-0,62 = -0,55$

$c'_{e2} = -0,167$

$c'_{31} = 0,8(0)+0,25-0,4 = -0,15$

$c'_{33} = 0,74(0)+0,35-0,6 = -0,25$

$c'_{34} = 0,9(0)+0,467-0,7 = -0,233$

Nilai-nilai u_i, v_j dan c'_{ij} ini tercantum pada tabel 5-4 juga. Ternyata semua c'_{ij}<0. Dengan demikian penyelesaian fisibel basis ini optimal dan diperoleh ongkos total produksi minimal :

$z = 0,25(200)+0,35(166,67)+0,3(333,33)+0,4(1000)+0,2(400)$
$= 688,33.$

BAB VI

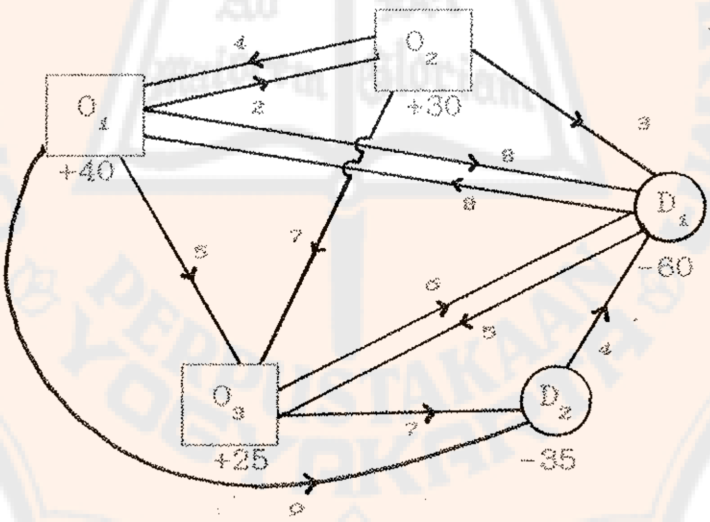
MASALAH TRANSSHIPMENT

6.1 Gambaran Masalah dan Perumusan Matematis

Dalam pembicaraan masalah angkutan, diasumsikan bahwa c_{ij} adalah ongkos pengiriman minimal satu unit barang dari sumber i ke tujuan j. Jika ada beberapa rute dari i ke j, maka semua rute perlu diperiksa untuk mencari rute dengan ongkos terkecil. Jika ada banyak rute dari tiap i ke tiap j, akan cukup sulit menentukan rute dengan ongkos minimal. Pada bab ini akan dibicarakan suatu tipe khusus masalah angkutan yang menyangkut banyak rute dari tiap sumber dan tiap tujuan. Masalah seperti ini disebut <u>masalah Transsihipment</u>.

Sebagai ilustrasi, di bawah ini diberikan suatu contoh masalah yang dapat digolongkan sebagai masalah transshipment :

Suatu perusahaan biskuit kalengan memiliki tiga pabrik O_1, O_2 dan O_3 dan dua distributor D_1 dan D_2. Kelima tempat itu terletak pada lima kota yang berbeda. Dalam pemasarannya, ketiga pabrik ini lebih dulu mengirim stok barang kepada kedua distributor, sebelum disebarkan ke toko-toko. Stok yang tersedia pada masing-masing pabrik dan kebutuhan barang yang diminta oleh masing-masing distributor sudah diketahui. Jalur-jalur yang ada yang menghubungkan kelima tempat ini sudah diketahui, begitu pula ongkos angkutan untuk setiap unit barang. Masalah yang dihadapi perusahaan itu adalah bagaimana menyebarkan stok yang tersedia pada ketiga pabrik agar kebutuhan dari kedua distributor terpenuhi, sedemikian hingga ongkos total pengiriman minimal. Dalam hal ini diperbolehkan untuk mengirimkan barang secara tidak langsung, karena mungkin tidak ada jalur langsung yang menghubungkan kedua tempat yang dimaksud. Dengan kata lain dimungkinkan adanya tempat-tempat antara yang dilalui dalam suatu proses pengiriman dari suatu pabrik ke suatu distributor. Gambar 6-1a di bawah ini adalah gambar letak pabrik-pabrik dan distributornya, beserta jumlah unit yang tersedia pada masing-masing pabrik dan kebutuhan masing-masing distributor. Garis-garis beranak panah menyatakan jalur-jalur yang ada beserta ongkos angkut per unit pada masing-masing jalur.

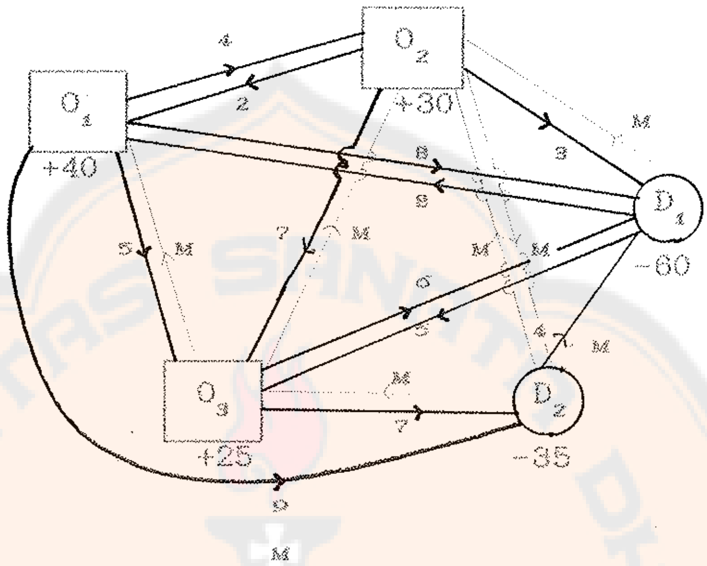


Gambar 6-1a

Jadi dalam suatu masalah transshipment, dimungkinkan untuk mengirimkan barang dari suatu sumber ke sumber lain dan/atau dari suatu tujuan ke tujuan lain. Keadaan semacam ini memungkinkan untuk mengirimkan barang dari sumber i ke tujuan j, melalui beberapa rute berbeda. Misalnya : mula-mula pengiriman itu dilakukan dari i ke i´, kemudian dari i´ ke j´, kemudian dari j´ ke i´´, dan akhirnya baru dari i´´ ke j. Pengiriman secara langsung dari i ke j tentu saja diperbolehkan asalkan ada jalur K_{ij} dan ongkosnya memang minimum. Jika ternyata tak ada jalur K_{ij}, maka ongkos c_{ij} dianggap sangat mahal, atau $c_{ij} = M$, dengan M suatu bilangan positif yang sangat besar. Dalam masalah ini ongkos pengiriman per unit pada jalur K_{ij} belum tentu sama dengan ongkos pada jalur K_{ji}. Kedua hal ini berlaku pula untuk jalur-jalur tidak langsung, yaitu jika melewati tempat-tempat antara.

Sesungguhnya masalah transshipment ini dapat dianggap sebagai masalah angkutan, dengan menganggap setiap tempat dapat berfungsi sebagai sumber maupun sebagai tujuan. Jadi dalam penyelesaian masalah ini terlebih dahulu sumber dan tujuan dinomori secara berurutan , mulai dari sumber. Jadi jika ada m sumber dan n tujuan, maka tujuan j yang dalam masalah angkutan biasa , dalam masalah ini disebut tujuan (m+j). Seperti pada masalah angkutan, dalam masalah ini pun a_i menyatakan kapasitas sumber i dan b_{m+j} menyatakan kebutuhan tujuan j. Juga diasumsikan $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_{m+j}$. Sasaran masalah transshipment ini adalah menentukan ongkos total minimal untuk rute pengiriman dari i ke j.

Dalam masalah transshipment dianggap setiap tempat dapat berfungsi sebagai sumber dan sekaligus sebagai tujuan. Jika diandaikan ada jalur yang menghubungkan setiap dua tempat, dengan demikian gambar 6-1a yang merupakan gambar dari suatu masalah transshipment dapat dilengkapi menjadi gambar 6-1b di bawah ini.



Gambar 6-1b

Pada gambar 6-1b tampak bahwa ada jalur yang menghubungkan setiap dua tempat. Jalur yang sesungguhnya tidak ada pada gambar 6-1a, pada gambar 6-1b dibuat dengan ongkos angkut pada jalur itu adalah M.

Andaikan secara berturut-turut x_{ik}, x_{ki} dengan $k = 1,...,m+n$, $k \neq i$ adalah jumlah unit yang dikirim dari sumber i ke k dan dari k ke sumber i, k mungkin berupa tujuan atau sumber lain. Andaikan juga $x_{k,m+j}$, $x_{m+j,k}$ dengan $k = 1,...,m+n$, $k \neq (m+j)$ adalah jumlah yang dikirim dari k ke tujuan j dan dari tujuan j ke k. Jumlah total yang diterima tujuan j, yaitu jumlah yang diterima dikurangi jumlah yang dikirimkan lagi ke sumber atau tujuan lain, haruslah sebesar b_{m+j}. Agar semua kebutuhan tujuan terpenuhi, maka jumlah yang dikirimkan dari sumber i haruslah sebesar a_i.

Dengan demikian harus dipenuhi kendala-kendala berikut :

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{m+n} x_{ik} - \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{m+n} x_{ki} = a_i \quad , \; i = 1,\ldots,m \qquad (6\text{-}1)$$

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k\neq m+j}}^{m+n} x_{k,m+j} - \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq m+j}}^{m+n} x_{m+j,k} = b_{m+j} \quad , \; j = 1,\ldots,n \qquad (6\text{-}2)$$

Jika c_{st} adalah ongkos pengiriman per unit dari s ke t ; s,t = 1,...,m+n, s≠t, maka harus dicari $x_{st} \geq 0$ yang memenuhi (6-1) dan (6-2) dan meminimalkan :

$$z = \sum_{\substack{s=1 \\ s\neq t}}^{m+n} \sum_{t=1}^{m+n} c_{st} x_{st} \qquad (6\text{-}3)$$

Persamaan (6-1) sampai (6-3) adalah perumusan matematis masalah transshipment, yang juga merupakan suatu masalah program linear.

Masalah transshipment ini diselesaikan dengan metode angkutan, dengan terlebih dulu membawa masalah ini ke bentuk masalah angkutan bentuk setimbang. Pertama-tama kepada kendala s dari (6-1) dan (6-2) ditambahkan dan dikurangi dengan suatu perubah x_{ss} , dengan $c_{ss} = 0$.

Dengan demikian dalam (6-1) dimasukkan

$$x_{ii} + \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{m+n} x_{ki} = \theta \quad , \; i = 1,\ldots,m \qquad (6\text{-}4)$$

dan dalam (6-2) dimasukkan

$$x_{m+j,m+j} + \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq m+j}}^{m+n} x_{m+j,k} = \theta \quad j = 1,\ldots,n \qquad (6\text{-}5)$$

Kendala-kendala (6-1) dan (6-2) sekarang menjadi

$$\sum_{k=1}^{m+n} x_{ik} = a_i + \theta \qquad , \quad i = 1,\ldots,m$$

$$\sum_{k=1}^{m+n} x_{m+j,k} = \theta \qquad , \quad j = 1,\ldots,n$$

$$\sum_{k=1}^{m+n} x_{ki} = \theta \qquad , \quad i = 1,\ldots,m \qquad (6\text{-}6)$$

$$\sum_{k=1}^{m+n} x_{k,m+j} = b_{m+j} + \theta \qquad , \quad j = 1,\ldots,n$$

Himpunan kendala (6-6) dapat ditulis kembali menjadi :

$$\sum_{t=1}^{m+n} x_{st} = g_s \qquad , \quad s = 1,\ldots,m+n$$

$$\sum_{s=1}^{m+n} x_{st} = h_t \qquad , \quad t = 1,\ldots,m+n \qquad (6\text{-}7)$$

dengan

$$g_s = a_s + \theta \qquad , \quad s = 1,\ldots,m$$

$$g_s = \theta \qquad , \quad s = m+1,\ldots,m+n \qquad (6\text{-}8)$$

$$h_t = \theta \qquad , \quad t = 1,\ldots,m$$

$$h_t = b_t + \theta \qquad , \quad t = m+1,\ldots,m+n$$

Fungsi sasaran yang harus diminimalkan adalah :

$$z = \sum_{s,t}^{m+n} c_{st} x_{st} \qquad (6\text{-}9)$$

Persamaan (6-7) dan (6-9) menyatakan suatu masalah angkutan bentuk setimbang dengan m+n sumber dan m+n tujuan. Masalah angkutan ini ekuivalen dengan masalah transshipment dengan perumusan (6-1) sampai (6-3). Dengan menyelesaikan masalah angkutan ini diperoleh pula penyelesaian masalah transshipmentnya. Simbol θ menyatakan stok semu (fictitious stockpile) pada tiap-tiap sumber dan tujuan.

Jumlah total yang dikirimkan adalah $\sum\limits_i^m a_i$, dan karenanya θ tidak mungkin lebih dari $\sum\limits_i^m a_i$, atau $\theta \le \sum\limits_i^m a_i = \sum\limits_j^n b_{m+j}$. Untuk mudahnya, dalam penyelesaian masalah transshipment, biasa diambil $\theta = \sum\limits_i^m a_i = \sum\limits_j^n b_{m+j}$. Nilai x_{ss} adalah banyaknya persediaan yang tidak digunakan dalam transshipment. Tabel 6-1 adalah tabel transshipment untuk masalah transshipment dengan m sumber (asli) dan n tujuan (asli).

		1	2	...	m	m+1	m+2	...	m+n	
		O_1	O_2	...	O_m	D_1	D_2	...	D_n	g_s
1	O_1			...				...		$a_1 + \theta$
2	O_2			...				...		$a_2 + \theta$
⋮	⋮	⋮	⋮	...	⋮	⋮	⋮	...	⋮	⋮
m	O_m			...				...		$a_m + \theta$
m+1	D_1			...				...		θ
m+2	D_2			...				...		θ
⋮	⋮	⋮	⋮	...	⋮	⋮	⋮	...	⋮	⋮
m+n	D_n			...				...		θ
	h_i	θ	θ	...	θ	$b_1+\theta$	$b_2+\theta$	...	$b_n+\theta$	$\sum a_i + (m+n)\theta = \sum b_j + (m+n)\theta$

Tabel 6-1

Suatu penyelesaian optimal masalah transshipment harus memuat tidak lebih dari m+n-1 buah $x_{ij}>0$, untuk $i\neq j$. Jika masalah transshipment ini diselesaikan dengan metode angkutan, dalam tabel 6-1 akan diperoleh 2(m+n)-1 buah $x_{ij}>0$. Dari 2(m+n)-1 buah $x_{ij}>0$ ini, m+n buah $x_{ij}>0$ menyatakan persediaan semu yang tersisa (tidak terpakai), yaitu untuk i=j.

Jika penyelesaian masalah transshipment sudah diperoleh, maka rute dengan ongkos minimal dalam jadwal pengiriman ongkos minimal dapat dicari dengan mudah. Jika $x_{i,m+j} \neq 0$, maka rute langsung dari i ke j dapat digunakan, dan ini adalah rute dengan ongkos minimal. Selisih antara nilai θ dan nilai pada setiap sel dalam diagonal utama (sel (s,s)) menunjukkan jumlah unit barang yang melewati tempat itu.

6.2 Contoh Soal Masalah Transshipment

Contoh 6.1: Tabel 6-2 memuat data ongkos pengiriman per unit untuk setiap jalur , serta kapasitas sumber dan kebutuhan tujuan dari suatu masalah transshipment dengan tiga sumber dan dua tujuan.

		1	2	3	4	5	
		O_1	O_2	O_3	D_1	D_2	a_i
1	O_1	0	5	8	6	6	20
2	O_2	6	0	9	6	7	22
3	O_3	1	8	0	9	9	4
4	D_1	9	10	11	0	10	-
5	D_2	4	8	9	9	0	-
	b_j	-	-	-	21	25	

Tabel 6-2

Mula-mula akan diperlihatkan penyelesaian masalah ini sebagai masalah angkutan biasa, yang hanya menggunakan jalur pengiriman langsung dari sumber i ke tujuan j, tanpa adanya pemindahan. Tabel 6-3 adalah tabel optimal untuk masalah angkutannya, dengan ongkos total minimal z = 289.

D_j \ O_i	D_1	D_2	a_i	u_i
O_1	-1 $\boxed{6}$	20 $\boxed{6}$	20	6
O_2	21 $\boxed{6}$	1 $\boxed{7}$	22	7
O_3	-1 $\boxed{9}$	4 $\boxed{9}$	4	9
b_j	21	25	46	
v_j	-1	0		

Tabel 6-3

Masalah ini kini akan diselesaikan sebagai suatu masalah transshipment. Untuk menentukan kapasitas sumber-sumber dan kebutuhan tujuan-tujuan, diambil $\theta = \sum_{i=1}^{3} a_i = \sum_{j=1}^{2} b_j = 46$, sehingga diperoleh :

$g_1 = a_1 + \theta = 20+46 = 66$ $\quad h_1 = h_2 = h_3 = \theta = 46$

$g_2 = a_2 + \theta = 22+46 = 68$ $\quad h_4 = b_1 + \theta = 21+46 = 67$

$g_3 = a_3 + \theta = 4+46 = 50$ $\quad h_5 = b_2 + \theta = 25+46 = 71$

$g_4 = g_5 = \theta = 46$

		1	2	3	4	5		
		O_1	O_2	O_3	D_1	D_2	g_i	u_i
1	O_1	46 $\boxed{0}$	-6 $\boxed{5}$	-11 $\boxed{8}$	-1 $\boxed{6}$	20 $\boxed{6}$	66	-1
2	O_2	-5 $\boxed{6}$	46 $\boxed{0}$	-11 $\boxed{9}$	21 $\boxed{6}$	1 $\boxed{7}$	68	0
3	O_3	2 $\boxed{1}$	-6 $\boxed{8}$	46 $\boxed{0}$	-5 $\boxed{9}$	4 $\boxed{9}$	50	2
4	D_1	-14 $\boxed{9}$	-16 $\boxed{10}$	-19 $\boxed{11}$	46 $\boxed{0}$	-9 $\boxed{10}$	46	-6
5	D_2	-10 $\boxed{4}$	-15 $\boxed{8}$	-18 $\boxed{9}$	-10 $\boxed{9}$	46 $\boxed{0}$	46	-7
	h_j	46	46	46	67	71	276	
	v_j	1	0	-2	6	7		

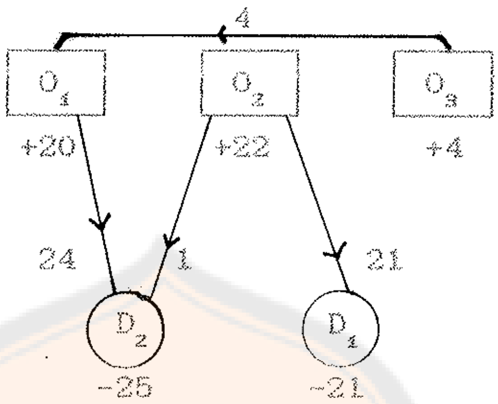
Tabel 6-4

Tabel 6-4 memperlihatkan penyeleesaian basis awal untuk masalah transshipment ini, yang diperoleh dengan menggunakan metode matriks minimum. Dengan pengujian optimalitas cara MODI diketahui penyelesaian ini belum optimal, x_{31} ternyata masuk basis dan x_{35} yang keluar. Tabel 6-5 adalah tabel optimalnya, dengan ongkos total minimal z = 281.

		1	2	3	4	5		
		O_1	O_2	O_3	D_1	D_2	g_i	u_i
1	O_1	42 $\boxed{0}$	-6 $\boxed{5}$	-9 $\boxed{8}$	-1 $\boxed{6}$	24 $\boxed{6}$	66	0
2	O_2	-5 $\boxed{6}$	46 $\boxed{0}$	-9 $\boxed{9}$	21 $\boxed{6}$	1 $\boxed{7}$	68	1
3	O_3	4 $\boxed{1}$	-8 $\boxed{8}$	46 $\boxed{0}$	-3 $\boxed{9}$	-2 $\boxed{9}$	50	1
4	D_1	-14 $\boxed{9}$	-16 $\boxed{10}$	-17 $\boxed{11}$	46 $\boxed{0}$	-11 $\boxed{10}$	46	-5
5	D_2	-10 $\boxed{4}$	-15 $\boxed{8}$	-16 $\boxed{9}$	-10 $\boxed{9}$	46 $\boxed{0}$	46	-6
	h_j	46	46	46	67	71	276	
	v_j	0	-1	-1	5	6		

Tabel 6-5

Dari tabel 6-5 tampak bahwa O_1 dilewati 4 unit barang, sedangkan tempat-tempat lain tidak dilewati apa-apa. O_3 mengirimkan 4 unit ke O_1 dan kemudian O_1 mengirimkan 20+4 = 24 unit langsung ke D_2. Dalam kejadian ini O_3 secara tidak langsung mengirimkan 4 unit ke D_2, tetapi melewati O_1. O_2 mengirimkan 21 unit ke D_1 dan 1 unit ke D_2. Pola pengiriman dalam masalah transshipment ini tampak seperti gambar 6-2.



Gambar 6-2

Pola pengiriman ini ternyata lebih murah daripada pola pengiriman langsung dari sumber ke tujuan, seperti dalam masalah angkutan biasa.

Contoh 6.2: Tabel 6-6 memuat data ongkos pengiriman per unit dari suatu masalah transshipment untuk setiap jalur serta kapasitas sumber dan kebutuhan tujuan yang diambil dari gambar 6-1b.

		1	2	3	4	5	
		O_1	O_2	O_3	D_1	D_2	a_i
1	O_1	0	2	5	8	9	40
2	O_2	4	0	7	3	M	30
3	O_3	M	M	0	6	7	25
4	D_1	8	M	5	0	M	-
5	D_2	M	M	M	4	0	-
	b_j	-	-	-	60	35	95

Tabel 6-6

Untuk menentukan kapasitas sumber-sumber dan kebutuhan tujuan-tujuan diambil $\theta = \sum_{i=1}^{3} a_i = \sum_{j=1}^{2} b_j = 95$, sehingga diperoleh :

$g_1 = a_1+\theta = 40+95 = 135$

$g_2 = a_2+\theta = 30+95 = 125$

$g_3 = a_3+\theta = 25+95 = 120$

$g_4 = g_5 = \theta = 95$

$h_1 = h_2 = h_3 = \theta = 95$

$h_4 = b_1+\theta = 60+95 = 155$

$h_5 = b_2+\theta = 35+95 = 130$

Tabel 6-7 adalah tabel penyelesaian awal untuk masalah transshipment ini, yang diperoleh dengan menggunakan metode matrix minimum. Dengan pengujian optimalitas cara MODI diketahui penyelesaian ini belum optimal. Dibentuk tabel baru (tabel 6-8) yang juga belum optimal.

		1	2	3	4	5		
		O_1	O_2	O_3	D_1	D_2	g_i	u_i
1	O_1	95 $\boxed{0}$	3 $\boxed{2}$	-3 $\boxed{5}$	5 $\boxed{8}$	35 $\boxed{9}$	135	8
2	O_2	-9 $\boxed{4}$	95 $\boxed{0}$	-10 $\boxed{7}$	30 $\boxed{3}$	4-M $\boxed{M}$	125	3
3	O_3	-2-M $\boxed{M}$	3-M $\boxed{M}$	95 $\boxed{0}$	25 $\boxed{6}$	0 $\boxed{7}$	120	6
4	D_1	-16 $\boxed{8}$	-3-M $\boxed{M}$	-11 $\boxed{5}$	95 $\boxed{0}$	1-M $\boxed{M}$	95	0
5	D_2	-9-M $\boxed{M}$	-4-M $\boxed{M}$	-7-M $\boxed{M}$	-5 $\boxed{4}$	95 $\boxed{0}$	95	-1
	h_j	95	95	95	155	130	570	
	v_j	-8	-3	-6	0	1		

Tabel 6-7

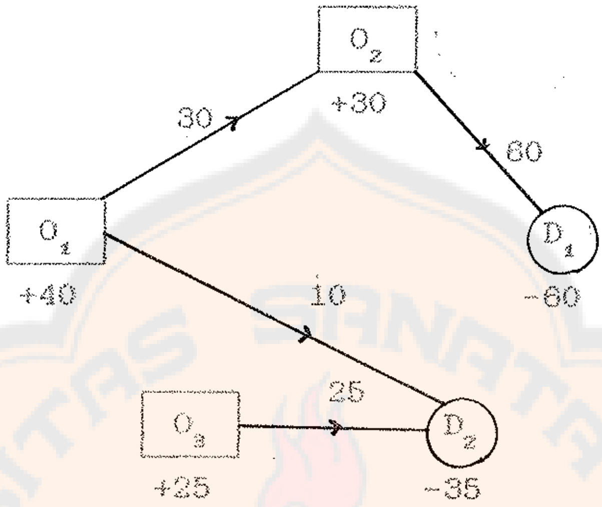
		1	2	3	4	5		
		O_1	O_2	O_3	D_1	D_2	g_i	u_i
1	O_1	95 [0]	5 [2]	-6 [5]	-3 [8]	35 [9]	135	0
2	O_2	-6 [4]	90 [0]	-10 [7]	35 [3]	7-M [M]	125	-2
3	O_3	1-M [M]	3-M [M]	95 [0]	25 [6]	3 [7]	120	1
4	D_1	-13 [8]	-3-M [M]	-11 [5]	95 [0]	4-M [M]	95	-5
5	D_2	-9-M [M]	-7-M [M]	-10-M [M]	-8 [4]	95 [0]	95	-9
	h_j	95	95	95	155	130	570	
	v_j	0	2	-1	5	8		

Tabel 6-8

		1	2	3	4	5		
		O_1	O_2	O_3	D_1	D_2	g_i	u_i
1	O_1	95 [0]	30 [2]	-3 [5]	-3 [8]	10 [9]	135	0
2	O_2	-6 [4]	65 [0]	-7 [7]	60 [3]	7-M [M]	125	-2
3	O_3	-2-M [M]	-M [M]	95 [0]	-3 [6]	25 [7]	120	-2
4	D_1	-13 [8]	-3-M [M]	-8 [5]	95 [0]	4-M [M]	95	-5
5	D_2	-9-M [M]	-7-M [M]	-7-M [M]	-8 [4]	95 [0]	95	-9
	h_j	95	95	95	155	130	570	
	v_j	0	2	2	5	9		

Tabel 6-9

Akhirnya diperoleh tabel optimal (tabel 6-9) dengan ongkos total minimal z = 2(30)+9(10)+3(60)+7(25) = 505. Dari tabel 6-9 tampak bahwa O_2 dilewati 30 unit barang, tempat-tempat lain tidak dilewati apa-apa. O_1 mengirimkan 30 unit ke O_2 dan kemudian O_2 mengirimkan 30+30 = 60 unit langsung ke D_1. Dalam kejadian ini secara tidak langsung O_1 mengirimkan 30 unit ke D_1 dengan melewati O_2. O_1 juga mengirimkan 10 unit secara langsung ke D_2 dan O_3 juga mengirimkan 25 unit secara langsung ke D_2. Pola pengiriman tampak seperti pada gambar 6-3.



Gambar 6-3

BAB VII

MASALAH PENUGASAN

7.1 Gambaran Masalah dan Perumusan Matematis

Masalah penugasan dapat digambarkan secara umum sebagai berikut :

Diketahui ada sejumlah fasilitas dan sejumlah yang sama tugas/pekerjaan. Diketahui pula efektivitas (ongkos) dari masing-masing fasilitas untuk masing-masing tugas. Dalam hal ini setiap satu fasilitas hanya dapat mengerjakan atau dipasangkan dengan satu tugas. Dengan kata lain ada pemetaan satu-satu antara himpunan fasilitas dengan himpunan tugas. Sasaran masalah ini adalah menentukan penugasan untuk masing-masing fasilitas pada masing-masing tugas sedemikian hingga efektivitas atau ongkos optimal.

Masalah penugasan yang digambarkan secara umum ini dapat diterapkan dalam beberapa keadaan. Contoh :

1. Ada tiga orang calon karyawan, dan pekerjaan yang tersedia ada tiga macam, yaitu sebagai sekretaris, kasir dan humas. Manajer sudah menetapkan gaji bulanan untuk tiap-tiap orang dalam setiap posisi. Dalam hal ini manajer menghadapi masalah bagaimana caranya agar setiap posisi terisi oleh tepat satu orang sedemikian hingga gaji bulanan total minimal.
2. Seorang pengusaha pakaian jadi mempekerjakan empat orang penjahit. Pengusaha itu memproduksi empat model pakaian : gaun, jas, celana panjang dan jeans. Diketahui pula banyaknya unit pakaian yang dapat diselesaikan

per minggunya oleh masing-masing penjahit itu untuk setiap model. Pengusaha itu menghadapi masalah bagaimana menugaskan keempat penjahitnya untuk menyelesaikan tepat satu model pakaian agar jumlah unit pakaian secara keseluruhan per minggunya maksimal.

Andaikan ada n fasilitas O_1, O_2, ..., O_n, dan n tugas D_1, D_2, ..., D_n. Jumlah fasilitas i adalah 1 dan jumlah tugas j adalah 1 pula, karena hanya ada satu fasilitas untuk satu tugas, begitu pula sebaliknya. Jika c_{ij} adalah efektivitas (ongkos) dari fasilitas i pada tugas j, maka perumusan matematis masalah penugasan untuk kasus minimal adalah :

Menentukan $x_{ij} \geq 0$, yaitu

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{jika fasilitas i ditugaskan pada tugas j} \\ 0, & \text{jika fasilitas i tidak ditugaskan pada tugas j} \end{cases}$$

untuk semua i, j sedemikian hingga

$$\text{meminimalkan } F = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \; x_{ij} \quad , \; c_{ij} \geq 0 \qquad (7\text{-}1)$$

$$\text{yang memenuhi} \quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad , \; i=1,2,\ldots,m \qquad (7\text{-}2)$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad , \; j=1,2,\ldots,n \qquad (7\text{-}3)$$

Dalam pembicaraan selanjutnya digunakan masalah penugasan dengan kasus minimal. Masalah penugasan kasus maksimal akan dibicarakan dalam subbab 7.6.

Dari perumusan di atas tampak bahwa masalah penugasan merupakan suatu kejadian khusus dari masalah angkutan. Dalam masalah penugasan $a_i = b_j = 1$ dan $x_{ij} = 1$ atau 0.

7.2 Penyelesaian Masalah Penugasan dengan Metode Angkutan

Masalah penugasan dapat diselesaikan dengan metode angkutan, karena masalah penugasan dapat dianggap sebagai masalah angkutan dengan $a_i = b_j = 1$.

Contoh 7.1 : Diketahui ada tiga buah pekerjaan yang akan dikerjakan dengan menggunakan tiga buah mesin. Tabel 7-1a memuat data ongkos untuk memproses masing-masing pekerjaan dengan masing-masing mesin.

Pekerjaan	Mesin D_1	D_2	D_3
O_1	20	27	30
O_2	10	18	16
O_3	14	16	12

Tabel 7-1a

	1	2	3	a_i	u_i
1	1 $\boxed{20}$	ε $\boxed{27}$	-5 $\boxed{30}$	1	0
2	+1 $\boxed{10}$	1 $\boxed{18}$	ε $\boxed{16}$	1	-9
3	-7 $\boxed{14}$	-2 $\boxed{16}$	1 $\boxed{12}$	1	-13
b_j	1	1	1		
v_j	20	27	25		

Tabel 7-1b

	1	2	3	a_i	u_i
1	-1 $\boxed{20}$	1 $\boxed{27}$	-5 $\boxed{30}$	1	9
2	1 $\boxed{10}$	ε $\boxed{18}$	ε $\boxed{16}$	1	0
3	-8 $\boxed{14}$	-2 $\boxed{16}$	1 $\boxed{12}$	1	-4
b_j	1	1	1		
v_j	10	18	16		

Tabel 7-1c

Tabel 7-1a adalah tabel awal yang formatnya seperti tabel angkutan. Penyelesaian basis awal diperoleh dengan metode sudut barat laut. Tampak bahwa penyelesaian basis awal ini merosot karena hanya terdiri atas n=3 buah $x_{ij} > 0$. Tambahan ε pada sel (1,2) dan sel (2,3) dimaksudkan agar tetap ada lima sel isi. Bagaimanapun juga setiap penyelesaian masalah penugasan ini tidak dapat lebih dari n buah penugasan, jadi dalam tabelnya haruslah tepat ada n buah sel isi, yaitu n buah $x_{ij} > 0$. Dengan demikian penyelesaian masalah penugasan selalu merosot. Dengan uji optimalitas cara MODI tampak bahwa tabel 7-1b belum optimal. Tabel baru yaitu tabel 7-1c ternyata sudah optimal. Dengan demikian penugasan yang terjadi adalah :

pekerjaan O_1 ditugaskan pada mesin D_2,
pekerjaan O_2 ditugaskan pada mesin D_1,
pekerjaan O_3 ditugaskan pada mesin D_3.

Ongkos total minimal pemrosesan dari penugasan optimal ini adalah F = 27+10+12 = 49.

Bagaimanapun penyelesaian masalah penugasan dengan metode angkutan tidak praktis, karena dalam tiap langkah akan diperoleh penyelesaian yang merosot.

7.3 Penyelesaian Masalah Penugasan dengan Enumerasi

Masalah penugasan dapat pula diselesaikan dengan cara enumerasi, yaitu dengan menyebutkan satu per satu semua penugasan yang mungkin. Kemudian dari semua kemungkinan penugasan itu dipilih penugasan dengan ongkos total terkecil. Jika matriks ongkos masalah penugasan berordo n×n, maka banyaknya enumerasi atau penugasan yang mungkin adalah n!.

<u>Contoh 7.2</u> :

Dari data-data masalah penugasan pada tabel 7-1a, yaitu masalah penugasan dengan matriks ongkos berordo 3x3, ada 3!=6 penugasan yang mungkin. Keenam penugasan yang mungkin ini tampak seperti keenam matriks penugasan di bawah ini.

1		
	1	
		1

Tabel 7-2a

1		
		1
	1	

Tabel 7-2b

	1	
1		
		1

Tabel 7-2c

	1	
		1
1		

Tabel 7-2d

		1
1		
	1	

Tabel 7-2e

		1
	1	
1		

Tabel 7-2f

Ongkos total penugasan pada tabel 7-2a : 20+18+12 = 50

Ongkos total penugasan pada tabel 7-2b : 20+16+16 = 52

Ongkos total penugasan pada tabel 7-2c : 27+10+12 = 49

Ongkos total penugasan pada tabel 7-2d : 27+16+14 = 57

Ongkos total penugasan pada tabel 7-2e : 30+10+16 = 56

Ongkos total penugasan pada tabel 7-2f : 30+18+14 = 62

Dari keenam penugasan yang mungkin dibuat, yang dipilih adalah penugasan seperti pada tabel 7-2c, dengan ongkos total minimal 49.

Penyelesaian penugasan dengan enumerasi ini menjadi sulit dan tidak efisien bila matriks ongkos penugasan berordo besar. Misalnya jika n=10, maka banyaknya penugasan yang mungkin adalah 10! = 3.628.800. Tentu saja hal ini tidak mudah dikerjakan. Jadi secara umum dapat dikatakan bahwa penyelesaian masalah penugasan dengan enumerasi tidak praktis.

7.4 Penyelesaian Masalah Penugasan dengan Teknik Flood

Ada metode lain yang jauh lebih efisien untuk menyelesaikan masalah penugasan dari pada metode angkutan atau pun enumerasi. Metode penyelesaian masalah penugasan yang sangat efisien ini dikenal sebagai Teknik Flood atau juga Metode Hungarian, atau cukup disebut sebagai Metode penugasan saja.

Metode ini terdiri atas tiga langkah dasar, yaitu :

Langkah 1 : Membentuk matriks ongkos kesempatan total dari matriks ongkos asli. Dalam matriks ongkos kesempatan total ini setiap baris dan kolom harus memuat nol. Setiap sel yang memuat nol dianggap sebagai calon untuk penugasan.

Langkah 2 : Menguji apakah suatu penugasan lengkap sudah dapat dibuat dalam matriks ongkos kesempatan total yang diperoleh dari langkah 1, yaitu suatu penugasan dengan ongkos kesempatan total nol. Jika dari pengujian itu ternyata sudah dapat dibuat suatu penugasan optimal, maka masalahnya sudah selesai, tinggal menentukan pola penugasannya saja. Jika tidak, dilanjutkan dengan langkah 3.

Langkah 3 : Memperbaiki matriks ongkos kesempatan total yang belum optimal. Kemudian kembali lagi ke langkah 2. Begitu seterusnya sampai diperoleh suatu pola optimal.

Langkah-langkah penyelesaian masalah penugasan dengan Teknik Flood :

1. Membentuk matriks ongkos kesempatan

a. Setiap elemen ongkos pada tiap-tiap kolom dikurangi dengan elemen ongkos terkecil pada kolom masing-masing yang bersangkutan.

b. Kemudian setiap elemen ongkos pada tiap-tiap baris dari matriks yang diperoleh dari (a) dikurangi dengan ongkos terkecil pada baris masing-masing yang bersangkutan. Dari langkah 1b ini diperoleh matriks ongkos kesempatan total dengan setiap baris dan kolomnya memuat nol. Nilai terkecil pada matriks ongkos kesempatan total sengaja dibuat nol, agar ada pembanding yang jelas dengan sel-sel bernilai positif, sehingga agar diperoleh fungsi sasaran yang minimal maka penugasan ditetapkan pada sel nol dalam matriks ongkos kesempatan total.

2. Menguji apakah suatu penugasan optimal dapat dibuat

a. Semua nol dalam matriks ongkos kesempatan total ditutup dengan garis mendatar atau tegak, dengan jumlah garis seminim mungkin. Alasan dari langkah 2a ini adalah bahwa suatu penugasan optimal selalu dapat dibuat jika penugasan ditempatkan pada sel-sel nol dalam matriks ongkos kesempatan total, sehingga ongkos kesempatan total untuk suatu penugasan lengkap adalah nol. Ini dapat terjadi hanya bila tidak ada dua sel nol yang demikian terletak pada baris atau kolom yang sama, tanpa memperhatikan banyaknya sel nol dalam matriks ongkos kesempatan total.

b. Jika jumlah garis dalam 2a sama dengan ordo matriks ongkos, maka sudah dapat dibuat suatu penugasan lengkap sedemikian hingga ongkos kesempatan totalnya nol, kemudian dilanjutkan ke langkah 5. Jika jumlah garis penutup kurang dari ordo matriks, dilanjutkan ke langkah 3.

3. Memperbaiki matriks ongkos kesempatan total

a. Semua elemen ongkos dalam sel-sel yang belum tertutup garis dikurangi dengan elemen terkecil dari sel-sel yang belum tertutup itu, agar sel dengan ongkos kesempatan terkecil dalam sel-sel tidak tertutup menjadi nol.

b. Elemen terkecil dalam (a) ditambahkan pada elemen dari sel-sel yang tertutup garis dua kali. Elemen dari sel-sel yang tertutup garis satu kali tetap. Alasan langkah 2b ini adalah : andaikan elemen terkecil dari sel-sel tidak tertutup garis adalah p. Mengurangi semua elemen dalam sel-sel tidak tertutup garis dengan p sama artinya dengan mengurangi setiap elemen pada tiap-tiap kolom (atau baris) yang belum tertutup dengan p. Andaikan dianggap kolom-kolom yang belum tertutuplah yang dikurangi dengan p. Dari langkah 1 diperoleh bahwa setiap baris dan kolom memuat nol, maka pada kolom-kolom yang dikurangi dengan p ini pasti sudah ada baris i dengan sel nol yang sebelumnya sudah tertutup garis, yang kini malah terkurangi dengan p lagi. Ini tidak boleh terjadi, maka pada baris i itu harus ditambahkan kembali dengan p, sehingga sel nol yang sudah tertutup garis satu kali tetap. Jadi sel-sel yang hanya tertutup garis satu kali tetap. Pada baris i ini juga pasti ada sel yang tertutup garis tegak, misalnya ini pada kolom j, karena pasti ada kolom j yang memuat sel nol. Ini berarti sel (i,j) tertutup garis dua kali. Penambahan p pada baris i mengakibatkan elemen pada sel (i,j) yang tertutup garis dua kali bertambah p. Jadi elemen sel-sel yang tertutup garis dua kali bertambah dengan p. Dari langkah 3a dan 3b diperoleh matriks ongkos kesempatan total yang lebih baik dari sebelumnya.

4. Langkah 2 dan 3 diulangi sampai suatu penugasan optimal dapat dibuat
5. Mengerjakan penugasan pada matriks ongkos kesempatan total

   Dalam matriks ongkos kesempatan total yang sudah optimal, dipilih suatu sel nol yang berada sendirian pada suatu baris atau kolom. Penugasan pertama dibuat pada sel nol ini. Kemudian baris dan kolom di mana sel nol ini terletak dicoret. Matriks sisanya diperiksa kembali untuk menemukan sel nol yang berada sendirian pada suatu baris atau kolom. Pada sel nol yang demikian dibuat penugasan kedua. Baris dan kolom di mana sel nol ini terletak dicoret. Cara ini dikerjakan berulang-ulang sampai diperoleh suatu penugasan lengkap.

<u>Contoh 7.3</u> : Akan dibuat suatu pola penugasan optimal yang meminimalkan ongkos total. Data ongkos masalah penugasan terdapat pada tabel 7-3a.

$A = [a_{ij}] =$

	D_1	D_2	D_3
O_1	20	27	30
O_2	10	18	16
O_3	14	16	12

Tabel 7-3a

$B = [b_{ij}] =$

	D_1	D_2	D_3
O_1	10	11	18
O_2	0	2	4
O_3	4	0	0

Tabel 7-3b

<u>Langkah 1</u> :

a. Pada matriks A (tabel 7-3a), ongkos terkecil pada kolom 1 adalah 10, maka semua elemen pada kolom 1 dikurangi 10. Ongkos terkecil pada kolom 2 adalah 16, maka semua elemen pada kolom 2 dikurangi 16. Ongkos terkecil pada kolom 3 adalah 12, maka semua elemen pada kolom 3 dikurangi 12. Diperoleh matriks B seperti pada tabel 7-3b.

b. Pada matriks B, ongkos terkecil pada baris 1 adalah 10, maka semua elemen pada baris 1 dikurangi 10. Baris 2 dan 3 tetap, karena elemen terkecil pada baris 2 dan 3 masing-masing adalah 0. Dengan demikian diperoleh matriks B´ (tabel 7-3c) sebagai matriks ongkos kesempatan total pertama, dengan setiap baris dan kolomnya memuat nol.

$B' = [b'_{ij}] =$

	D_1	D_2	D_3
O_1	0	1	8
O_2	0	2	4
O_3	4	0	0

Tabel 7-3c

Langkah 2 :

Matriks ongkos kesempatan total ini akan diuji untuk mengetahui apakah dari matriks ini dapat dibuat suatu penugasan optimal. Semua sel nol ditutup dengan garis-garis mendatar atau tegak, dengan jumlah seminim mungkin. Ternyata hanya dengan dua garis semua sel nol dapat ditutup. Berarti belum diperoleh suatu pola optimal, karena dari empat sel nol dalam matriks B´ hanya dua sel nol yang "dapat digunakan" untuk penugasan. Padahal dalam masalah ini diperlukan tiga buah sel nol untuk penugasan optimal, karena matriks ongkosnya berordo tiga. Jadi matriks B´ harus ditransformasi lagi.

Langkah 3 :

Dari sel-sel yang belum tertutup pada matriks B´, elemen terkecilnya adalah 1, maka semua elemen dari sel-sel tidak tertutup dikurangi 1. Di sini dapat dianggap bahwa baris 1 dikurangi 1 dan baris 2 juga dikurangi 1, dan agar tidak mengubah sel nol-sel nol pada kolom 1, maka kolom 1 ditambah 1. Dari sini tampak bahwa elemen yang tertutup garis satu kali tetap, sedangkan sel (3,1) yang tertutup garis dua kali bertambah 1. Diperoleh matriks B´´ sebagai matriks ongkos kesempatan total baru (tabel 7-3d).

$B'' = [b''_{ij}] =$

	D_1	D_2	D_3
O_1	0	0	7
O_2	0	1	3
O_3	5	0	0

Tabel 7-3d

<u>Langkah 4</u> :

Semua sel nol pada matriks B´´ dapat ditutup oleh tepat tiga garis. Berarti sudah ada pola optimal, karena sudah ada tiga sel nol yang dapat digunakan untuk penugasan optimal.

<u>Langkah 5</u> :

Penugasan pertama dibuat pada sel nol (3,3), karena sel nol ini berada sendirian pada kolom 3. Kemudian baris 3 dan kolom 3 dicoret (tabel 7-4a). Dari matriks sisanya tampak bahwa sel nol (1,2) adalah sel nol yang berada sendirian pada kolom 2, maka pada sel nol (1,2) dibuat penugasan kedua. Baris 1 dan kolom 2 dicoret (tabel 7-4b). Penugasan ketiga dibuat pada sel nol (2,1) (tabel 7-4c). Ongkos kesempatan total dari penugasan optimal ini adalah nol. Ongkos total minimal dihitung dari matriks ongkos asli yaitu F = 12+27+10 = 49. Matrix alokasi penugasan tampak seperti tabel 7-5.

	D_1	D_2	D_3
O_1	0	0	7
O_2	0	1	3
O_3	5	0	*0

Tabel 7-4a

	D_1	D_2	D_3
O_1	0	*0	7
O_2	0	1	3
O_3	5	0	*0

Tabel 7-4b

	D_1	D_2	D_3
O_1	0	*0	7
O_2	*0	1	3
O_3	5	0	*0

Tabel 7-4c

	D_1	D_2	D_3
O_1		1	
O_2	1		
O_3			1

Tabel 7-5

7.5 Landasan Matematis Metode Penugasan

Ada dua landasan matematis metode penugasan, yaitu :

1. Teorema König-Egerváry

   Teorema ini dinyatakan oleh Egerváry dan dibuktikan oleh König, seorang ahli matematika Hungaria.

2. Sifat reduksi dari suatu matriks

<u>Teorema 7.1</u> : <u>Teorema König-Egerváry</u>

Jika elemen-elemen dari suatu matriks dibagi menjadi dua kelas oleh suatu sifat R, maka jumlah minimal garis-garis yang memuat semua elemen dengan sifat R ini sama dengan jumlah maksimal elemen-elemen dengan sifat R, dengan tidak ada dua elemen ini yang terletak pada garis yang sama.

Sebelum membuktikan teorema ini, terlebih dahulu perlu diketahui definisi berikut :

<u>Definisi 7.1</u> : Suatu himpunan elemen disebut <u>independen</u>, jika tidak ada dua (atau lebih) elemen ini yang terletak pada garis yang sama.

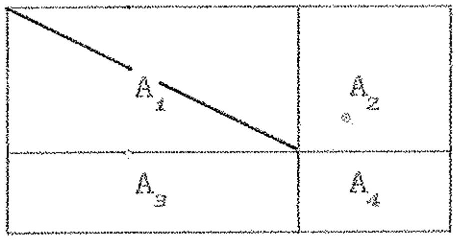
<u>Bukti teorema 7.1</u> :

Andaikan elemen-elemen suatu matriks A dibagi menjadi dua kelas oleh sifat R. Himpunan elemen dengan sifat R disebut $\mathcal{R}$. Andaikan F adalah suatu himpunan bagian maksimal dari $\mathcal{R}$ yang hanya memuat elemen-elemen independen terhadap $\mathcal{R}$, dan andaikan n adalah jumlah elemen dalam F. Untuk setiap sistem garis yang menutup semua elemen dalam $\mathcal{R}$, jumlah garis penutup v <u>paling sedikit</u> n. Akan ditunjukkan bahwa jumlah minimal dari v ini <u>tepat</u> sama dengan n. Jadi sekarang akan dibuktikan bahwa jumlah garis penutup v ini <u>paling banyak</u> n. Untuk itu baris-baris dan kolom-kolom dari A dipermutasi sedemikian hingga elemen-elemen dari F menjadi elemen diagonal dalam blok A_1 (gambar 7-1). Blok A_4 tidak memuat elemen dari $\mathcal{R}$, karena jika blok A_4 memuat elemen $\mathcal{R}$ maka elemen ini dapat dimasukkan dalam F. Kini dapat dipandang dua keadaan :

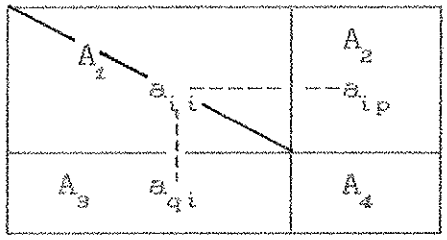
a. Paling banyak satu dari blok A_2 dan A_3 memuat elemen-elemen dari $\mathcal{R}$

b. Blok A_2 dan A_3 keduanya memuat elemen-elemen dari $\mathcal{R}$

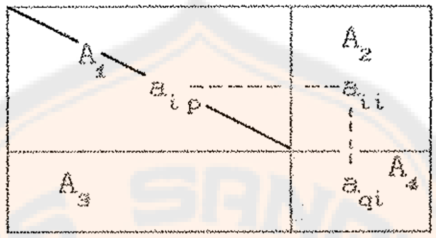
Keadaan (a) pasti benar, karena jika A_2 (atau A_3) tidak memuat elemen dari $\mathcal{R}$ maka $\mathcal{R}$ dapat ditutup dengan menutup n kolom (atau baris) pertama dengan garis-garis tegak (atau mendatar).



gambar 7-1

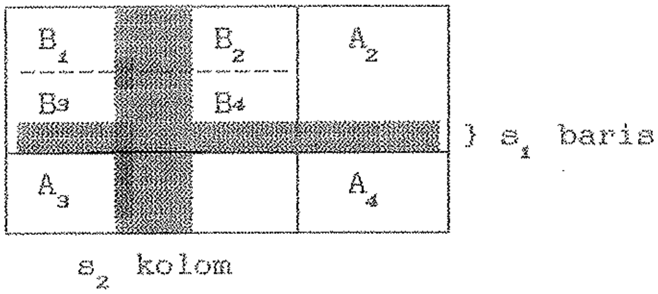


gambar 7-2a



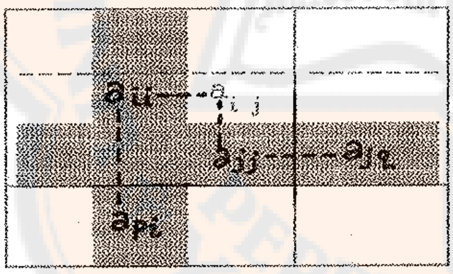
gambar 7-2b

Dalam keadaan (b) harus dipandang himpunan S, yaitu himpunan garis-garis penutup, yang dibentuk sebagai berikut : untuk tiap elemen dari $\mathcal{R}$ dalam A_2 pada barisnya dibuat garis penutup, dan untuk tiap elemen dari $\mathcal{R}$ dalam A_3 pada kolomnya dibuat garis penutup. Garis-garis dari S ini tidak dapat berpotongan pada elemen-elemen dalam F. Jika $a_{ii} \in F$, $a_{ip} \in \mathcal{R}$ dalam A_2 dan $a_{qi} \in \mathcal{R}$ dalam A_3, maka a_{ip} dan a_{qi} dapat menggantikan a_{ii} dalam F (gambar 7-2a). Dengan permutasi kolom (atau baris) diperoleh $a_{qi} \in \mathcal{R}$ (atau $a_{ip} \in \mathcal{R}$) dalam A_4 (gambar 7-2b). Ini kontradiksi dengan pernyataan bahwa blok A_4 tidak memuat elemen dari $\mathcal{R}$. Diasumsikan bahwa himpunan S terdiri atas s_1 baris (garis-garis mendatar) dan s_2 kolom (garis-garis tegak), dan s_1+s_2 garis penutup ini menutup s_1+s_2 elemen-elemen terakhir dari F (gambar 7-3). Garis-garis dari S digambarkan dengan arsiran.

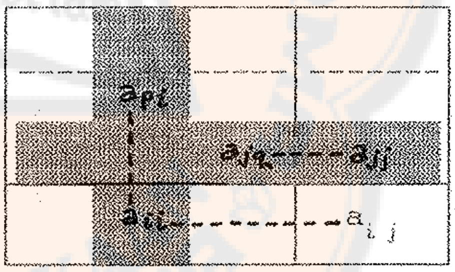


gambar 7-3

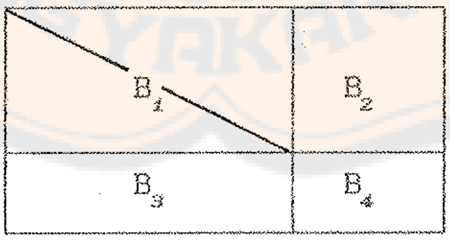
Garis-garis yang berbeda dalam S menutup elemen-elemen yang berbeda dalam F. Hal ini selalu dapat dicapai dengan melakukan permutasi garis-garis yang melalui A_1. Kini akan ditunjukkan bahwa blok B_4 tidak memuat elemen $\mathcal{R}$ sama sekali. Jika ada elemen $a_{ij} \in \mathcal{R}$ dalam B_4, dapat ditemukan elemen $a_{jq} \in \mathcal{R}$ dalam A_2 dan elemen $a_{pi} \in \mathcal{R}$ dalam A_3 (gambar 7-4a). Dengan permutasi baris dan kolom, elemen a_{ii} dan a_{jj} berturut-turut dapat digantikan oleh a_{pi} dan a_{jq}, akan diperoleh $a_{ij} \in \mathcal{R}$ dalam A_4 (gambar 7-4b). Ini kontradiksi dengan pernyataan bahwa A_4 tidak memuat elemen $\mathcal{R}$.



gambar 7-4a



gambar 7-4b



gambar 7-5

Kini garis-garis anggota S dihapus dari matriks A. Garis-garis ini menutup semua elemen dari $\mathcal{R}$ dalam A_2 dan A_3, sedangkan A_4 tidak memuat elemen dari $\mathcal{R}$, maka kini perhatian dikonsentrasikan pada bagian dari A_1 yang tidak tertutup (gambar 7-5). Matriks baru ini strukturnya sama dengan matriks A pada gambar 7-1, sehingga dengan demikian seluruh proses dapat diulangi pada matriks B ini. Prosedur ini dapat diteruskan sampai semua elemen dari $\mathcal{R}$ tertutup garis, karena pada tiap langkah dibuat paling sedikit satu garis penutup baru, sehingga proses ini pasti selesai setelah sejumlah berhingga langkah. Ada tepat satu elemen dari F dalam setiap garis penutup yang dibuat. Ini menunjukkan bahwa jumlah garis penutup tidak lebih besar dari jumlah elemen dalam F, atau dengan kata lain jumlah garis penutup v paling banyak n. Jadi terbukti bahwa jumlah minimum dari v ini tepat sama dengan n.

<u>Sifat 7.1</u> : Diberikan suatu matriks ongkos $A = [a_{ij}]$. Jika dibentuk suatu matriks lain $B = [b_{ij}]$, dengan $b_{ij} = a_{ij} - u_i - v_j$; u_i dan v_j adalah konstan sembarang, maka penyelesaian dari A identik dengan penyelesaian dari B.

Sesungguhnya sifat 7.1 ini intinya sama seperti teorema 4.4, dengan menyebut u_i dan v_j berturut-turut sebagai elemen-elemen baris dan kolom yang mereduksi elemen-elemen dari matriks semula.

Penerapan dari teorema König-Egerváry dan sifat 7.1 ini dapat dilihat pada langkah-langkah penyelesaian contoh 7.3. Pada langkah 1a diambil $v_1^{(0)}=10$, $v_2^{(0)}=16$, $v_3^{(0)}=12$, sedangkan $u_1^{(0)} = u_2^{(0)} = u_3^{(0)}=0$. Indeks di atas u_i dan v_j di sini menyatakan transformasi keberapa. Matriks $A = [a_{ij}]$ pada tabel 7-3a ditransformasi menjadi matriks $B = [b_{ij}]$

pada tabel 7-3b, dengan $b_{ij} = a_{ij}-u_i^{(0)}-v_j^{(0)}$. Pada matriks B dalam langkah 1b diambil $u_1^{(1)}=10$, $u_2^{(1)}=0$, $u_3^{(1)}=0$, sedangkan $v_1^{(1)}= v_2^{(1)}= v_3^{(1)}=0$. Matriks B ini ditransformasi menjadi matriks $B' = [b'_{ij}]$, dengan $b'_{ij} = b_{ij}-u_i^{(1)}-v_j^{(1)}$ (tabel 7-3c). Penerapan teorema König-Egerváry tampak pada langkah 2. Pada matriks B′ jumlah minimal garis-garis penutup semua sel nol adalah dua, maka jumlah maksimal sel nol yang dapat digunakan untuk penugasan juga dua. Pada langkah 3 digunakan lagi sifat 7.1, dengan mengambil dari matriks B′, $u_1^{(2)}=1$, $u_2^{(2)}=1$, $u_3^{(2)}=0$ dan $v_1^{(2)}=-1$, $v_2^{(2)}=0$, $v_3^{(2)}=0$. Diperoleh matriks $B'' = [b''_{ij}]$ dengan transformasi $b''_{ij} = b'_{ij}-u_i^{(2)}-v_j^{(2)}$. Pada langkah 4 diterapkan lagi teorema König-Egerváry. Jumlah minimal garis penutup semua sel nol dalam matriks B′′ adalah tiga, maka jumlah maksimal sel nol yang dapat digunakan untuk penugasan juga tiga, sehingga diperoleh pola optimal untuk penugasannya.

7.6 Masalah Penugasan dengan Kasus Maksimal

Untuk menyelesaikan suatu masalah penugasan dengan kasus maksimal, maka terlebih dulu dibentuk matriks ongkos relatif dari matriks ongkos asli, agar masalahnya kembali ke bentuk kasus minimal. Cara ini sama seperti penyelesaian masalah angkutan kasus maksimal. Setelah masalahnya menjadi berbentuk kasus minimal, dapat diselesaikan dengan metode penugasan seperti biasa.

<u>Contoh 7.4</u> : Akan dicari suatu penugasan optimal dan ongkos total maksimal dari suatu masalah penugasan dengan data ongkos pada tabel 7-6a. Matriks ongkos asli ini di-

transformasi menjadi matriks ongkos relatif dengan mengurangkan ongkos tertinggi dari matriks ongkos asli, yaitu P =8, dengan masing-masing c_{ij}. Tabel 7-6b adalah matriks ongkos relatif dan kini masalahnya menjadi bentuk kasus minimal.

	D_1	D_2	D_3	D_4
O_1	1	8	4	1
O_2	5	7	6	5
O_3	3	5	4	2
O_4	3	1	6	3

Tabel 7-6a

	D_1	D_2	D_3	D_4
O_1	7	0	4	7
O_2	3	1	2	3
O_3	5	3	4	6
O_4	5	7	2	5

Tabel 7-6b

	D_1	D_2	D_3	D_4
O_1	4	0	2	4
O_2	0	1	0	0
O_3	0	1	0	1
O_4	2	7	0	2

Tabel 7-7

	D_1	D_2	D_3	D_4
O_1		1		
O_2				1
O_3	1			
O_4			1	

Tabel 7-8

Tabel 7-7 adalah matriks ongkos kesempatan total yang dibentuk dari matriks ongkos relatif. Jumlah garis minimal yang dapat menutup semua nol ada empat, yaitu sama dengan ordo matriks ongkos, berarti sudah dapat dibuat suatu penugasan optimal. Tabel 7-8 adalah matriks penugasan optimal. Pola penugasannya : O_1 pada D_2, O_2 pada D_4, O_3 pada D_1 dan O_4 pada D_3. Jika masalah ini dikembalikan ke masalah semula, maka diperoleh ongkos total maksimal : F = 8+5 +3+6 = 22.

Ada cara lain untuk menghitung nilai F maksimal, yaitu : jika $P = \underset{i,j}{\text{maks}}\ c_{ij}$, $\sum_{i}^{n} \sum_{j}^{n} x_{ij} = n$, maka diperoleh ongkos relatif $\bar{c}_{ij} = P - c_{ij}$. Jika $\bar{F}_{min}$ adalah fungsi sasaran baru yang harus diminimalkan, maka :

$$\bar{F}_{min} = \sum_{i}^{n} \sum_{j}^{n} \bar{c}_{ij}\ x_{ij}$$

$$= \sum_{i}^{n} \sum_{j}^{n} (P - c_{ij})x_{ij}$$

$$= \sum_{i}^{n} \sum_{j}^{n} P\ x_{ij} - \sum_{i}^{n} \sum_{j}^{n} c_{ij}\ x_{ij}$$

$$= P \sum_{i}^{n} \sum_{j}^{n} x_{ij} - F_{maks}$$

$$\bar{F}_{min} = P\ n - F_{maks}$$

$$\text{Jadi } F_{maks} = P\ n - \bar{F}_{min} \qquad (7\text{-}4)$$

Dari contoh 7.4 di atas diperoleh $\bar{F}_{min} = 0+3+5+2 = 10$ maka $F_{maks} = 8.4 - 10 = 22$.

7.7 Alternatif Penyelesaian Optimal

Adanya alternatif penyelesaian optimal untuk suatu masalah penugasan dapat dilihat dari letak sel-sel nol dalam matriks ongkos kesempatan total akhir. Yaitu pada saat penugasan optimal sedang dibuat, tidak ada satu baris maupun kolom yang hanya memuat satu sel nol. Dengan kata lain, semua baris dan kolom dalam matriks sisanya memuat lebih dari satu sel nol.

<u>Contoh 7.5</u> : Tabel 7-9a memuat data ongkos suatu masalah penugasan. Tabel 7-9b adalah matriks ongkos kesempatan total.

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5
O_1	2	4	3	5	4
O_2	7	4	6	8	4
O_3	2	9	8	10	4
O_4	8	6	12	7	4
O_5	2	8	5	8	8

Tabel 7-9a

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5
O_1	0	0	0	0	0
O_2	5	0	3	3	0
O_3	0	5	5	5	0
O_4	6	2	9	2	0
O_5	0	4	2	4	4

Tabel 7-9b

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5
O_1	2	0	0	0	2
O_2	7	0	3	8	2
O_3	0	3	3	3	0
O_4	6	0	7	0	0
O_5	0	2	0	1	4

Tabel 7-9c

Jumlah garis minimal yang dapat menutupi semua sel nol pada tabel 7-9b ada empat, yang kurang dari ordo matriks ongkosnya (n=5). Ini berarti matriks ongkos kesempatan total ini harus diperbaiki. Elemen terkecil dari sel-sel yang tidak tertutup adalah 2, maka semua elemen yang tidak tertutup dikurangi 2, elemen yang tertutup garis dua kali ditambah 2, sedangkan elemen yang tertutup garis satu kali tetap. Tabel 7-9c adalah matriks ongkos kesempatan total baru. Jumlah minimal garis yang menutupi semua sel nol ada lima, berarti sudah dapat dibuat suatu penugasan optimal pada matriks ongkos kesempatan total akhir ini. Penugasan pertama dibuat pada sel nol (2,2). Baris 2 dan kolom 2 dicoret, dan matriks sisanya tampak seperti pada tabel 7-9d. Ternyata pada matriks sisanya ini tidak ada baris atau kolom yang hanya memuat satu sel nol. Ini berarti ada alternatif penyelesaian optimal.

	D_1	D_3	D_4	D_5
O_1	2	0	0	2
O_3	0	3	3	0
O_4	6	7	0	0
O_5	0	0	1	4

Tabel 7-9d

Secara sembarang dibuat penugasan kedua pada sel (1,3). Kemudian ketiga penugasan sisanya dapat dibuat demikian : penugasan ketiga pada sel (5,1), penugasan keempat pada sel (4,4), dan penugasan kelima pada sel (3,5),. Sebaliknya jika penugasan kedua dibuat pada sel (3,1), maka ketiga penugasan sisanya akan terjadi pada sel(5,3), sel (4,5) dan sel (1,4). Ongkos total minimal dari kedua macam penugasan ini sama, yaitu F=20.

Pola penugasan optimal pertama :

menugaskan O_1 pada D_3,

menugaskan O_2 pada D_2,

menugaskan O_3 pada D_5,

menugaskan O_4 pada D_4,

menugaskan O_5 pada D_1,

Ongkos total minimal F = 3+4+4+7+2 =20

Pola penugasan optimal kedua :

menugaskan O_1 pada D_4,

menugaskan O_2 pada D_2,

menugaskan O_3 pada D_1,

menugaskan O_4 pada D_5,

menugaskan O_5 pada D_3,

Ongkos total minimal F = 5+4+2+4+5 =20

7.8 Pembatasan Alokasi

Pembatasan alokasi pada masalah penugasan ini sama halnya seperti pembatasan alokasi pada masalah angkutan biasa. Yaitu seandainya karena suatu sebab tidak dimungkinkan untuk menugaskan O_i pada D_j . Maka dari itu untuk menghindarkan terjadinya penugasan O_i pada D_j , ongkos asli c_{ij} diganti dengan M positif besar, dan kemudian soal ini diselesaikan dengan metode penugasan seperti biasa.

BAB VIII

PENUTUP

Masalah angkutan adalah kejadian khusus dari masalah program linear, yang mempunyai kekhususan sebagai berikut:

1. Koefisien struktural terbatas berharga 0 dan 1
2. Ada kehomogenan unit di antara kendala-kendala
3. Semua kendala struktural berbentuk persamaan

Dengan demikian masalah angkutan dapat diselesaikan dengan algoritma simpleks, tetapi karena kekhususannya itu maka masalah angkutan ini mempunyai cara penyelesaian tersendiri yang lebih mudah dan efisien. Cara penyelesaiannya ialah dengan metode angkutan yang dikerjakan dalam tabel angkutan.

Secara garis besar ada tiga langkah dasar dalam metode angkutan, yaitu :

1. Menentukan penyelesaian awal sedemikian hingga diperoleh suatu penyelesaian fisibel basis
2. Mengadakan pengujian optimalitas
3. Jika belum optimal, maka harus dicari penyelesaian fisibel basis baru dengan memajukan penyelesaian fisibel basis sebelumnya

Ada beberapa metode untuk menentukan penyelesaian awal. Metode-metode itu terbagi menjadi dua kelompok, yaitu metode yang tidak memperhitungkan ongkos, yakni metode sudut barat laut; dan metode yang memperhitungkan ongkos, yakni metode kolom minimum, baris minimum, matriks minimum, Vogel, Russell dan metode frekuensi. Metode yang tidak memperhitungkan ongkos akan menghasilkan suatu penyelesaian awal yang agak jauh dari optimal dibandingkan dengan metode yang memperhitungkan ongkos. Untuk pengujian optimalitas ada dua metode yang dapat digunakan, yaitu metode batu loncatan dan MODI. Penyelesaian fisibel basis baru diperoleh dengan memajukan penyelesaian basis sebelumnya, yaitu dengan menentukan vektor yang harus keluar dari basis dan vektor yang masuk basis.

Kejadian dalam masalah angkutan dapat digolongkan menjadi dua, yaitu kejadian setimbang dan kejadian tidak setimbang, tergantung pada kapasitas total sumber dalam memenuhi kebutuhan total tujuan. Bila kapasitas total sumber sama dengan kebutuhan total tujuan, maka kejadiannya adalah setimbang. Bila kapasitas total sumber lebih besar atau lebih kecil dari kebutuhan total tujuan, maka kejadiannya tidak setimbang. Pada prinsipnya kejadian tidak setimbang selalu dapat dikembalikan menjadi bentuk kejadian setimbang, sehingga penyelesaiannya pun dapat dilakukan seperti penyelesaian kejadian setimbang.

Suatu penyelesaian fisibel basis masalah angkutan dengan m sumber dan n tujuan terdiri atas m+n-1 buah $x_{ij}>0$. Jika terjadi $x_{ij}>0$ kurang dari m+n-1, maka masalah angkutan itu disebut merosot. Suatu penyelesaian yang merosot dapat mengakibatkan ketidakmampuan mengatur pengembangan semua sel yang bukan basis menjadi basis. Dengan demikian kemerosotan yang terjadi harus diatasi, dengan mengupayakan agar semua sel isi dalam tabel angkutan berjumlah m+n-1.

Algoritma angkutan yang dibicarakan dalam tulisan ini berkaitan dengan masalah minimalisasi. Namun demikian bila masalah yang akan diselesaikan adalah masalah maksimalisasi, penyelesaiannya dapat dilakukan dengan terlebih dahulu mengembalikan masalahnya ke masalah minimalisasi. Caranya ialah dengan membentuk matriks ongkos relatif dari matriks ongkos semula.

Masalah angkutan yang diperluas agak berbeda dengan masalah angkutan biasa. Perbedaannya ialah :

1. Koefisien perubah pada masalah angkutan yang diperluas bernilai sembarang, sedangkan pada masalah angkutan biasa bernilai 0 dan 1
2. Rank matriks koefisien pada masalah angkutan yang diperluas tidak selalu m+n-1, sedangkan pada masalah angkutan biasa rank matriks koefisiennya m+n-1
3. Penyelesaian pada masalah angkutan yang diperluas belum tentu bernilai bulat, meskipun kapasitas sumber dan kebutuhan tujuannya bernilai bulat. Pada masalah angkutan biasa, jika kapasitas sumber dan kebutuhan tujuan bernilai bulat maka penyelesaiannya juga bulat.

Dengan demikian cara penyelesaian masalah angkutan yang diperluas juga agak berbeda dengan cara penyelesaian masalah angkutan biasa.

Masalah transshipment merupakan perluasan masalah angkutan, sedangkan masalah penugasan merupakan kejadian khusus masalah angkutan. Dalam masalah transshipment baik sumber maupun tujuan dapat berfungsi sebagai pengirim sekaligus sebagai penerima. Sedangkan kekhususan masalah penugasan adalah setiap fasilitas hanya dapat mengerjakan tepat satu tugas, atau dengan kata lain ada korespondensi satu-satu antara himpunan fasilitas dengan himpunan tugas. Masalah transshipment diselesaikan dengan algoritma angkutan, dengan menganggap ada m+n sumber dan m+n tujuan. Di sini sebenarnya sumber asli ada m buah dan tujuan asli ada n buah. Begitu pula masalah penugasan juga dapat diselesaikan dengan algoritma angkutan, tetapi itu kurang praktis, karena dalam setiap langkah akan diperoleh penyelesaian yang merosot. Metode penyelesaian masalah penugasan secara lebih mudah dan efisien adalah metode penugasan atau disebut juga sebagai metode Hungarian atau teknik Flood.

Meskipun sudah dikatakan bahwa masalah angkutan merupakan bagian dari program linear, tetapi secara lebih tepat sesungguhnya masalah angkutan merupakan bagian dari masalah program linear bilangan bulat (integer linear programming), karena dalam masalah angkutan disyaratkan penyelesaian optimalnya bernilai bulat jika kapasitas sumber dan kebutuhan tujuan bernilai bulat. Begitu pula dengan masalah penugasan yang merupakan bagian dari masalah angkutan, sesungguhnya juga merupakan bagian dari program nol-satu (zero-one programming), karena penyelesaiannya hanya bernilai 0 dan 1.

Dalam tulisan ini pembahasan masalah angkutan dilakukan melalui pendekatan teori simpleks. Sesungguhnya masalah angkutan juga dapat didekati dengan teori graf. Jika tulisan ini diteruskan, dapat pula dibahas hubungan antara masalah angkutan dengan teori jaringan, yang akan menjadi suatu masalah baru yang disebut masalah jaringan angkutan (transportation networks). Dalam pembahasan masalah jaringan angkutan ini banyak dibutuhkan pengetahuan tentang teori graf.

DAFTAR PUSTAKA

Churchman, C. W., Ackoff, R. L., dan Arnoff, E. L., Introduction to Operation Research, N. Y., John Wiley & Sons, Inc., 1957.

Dantzig, George B., Linear Programming and Extensions, Princeton, New Jersey, Princeton University Press, 1963.

Garvin, Introduction to Linear Programming, New York, McGraw-Hill, Inc., 1960.

Gass, Saul I., Linear Programming, third edition, New York, McGraw-Hill, Inc., 1969.

Hadley, G., Linear Programming, Massachusetts, Addison-Wesley Publishing Company, 1973.

Heady, Earl O. dan Candler, Wilfred, Linear Programming Methods, Ames, Iowa, The Iowa State University Press, 1966.

Hillier, F. S. dan Lieberman, G. J., Introduction to Operation Research, third edition, Oakland, Holden-Day, Inc., 1980.

Krekó, Belá, terj., Linear Programming, oleh J. H. L. Ahrens dan Carolyn M. Safe, London, Sir Isaac Pitman & Sons Ltd., 1968.

Loomba, N. Paul, Linear Programming, New York, McGraw-Hill, Inc., 1964.

Siagian, P., Penelitian Operasional, Teori dan Praktek, Jakarta, Penerbit Universitas Indonesia, 1987.

Simmonard, Michel, terj., Linear Programming, oleh William S. Jewell, New York, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, 1966.

Susanta, B., Program Linear, Yogyakarta, Bagian Matematika Fakultas Ilmu dan Alam UGM, 1978.

Taha, Hamdy A., Operation Research, An Introduction, fourth edition, New York, Macmillan Publishing Company, 1987.

Whitehouse, Gary E. dan Wechsler, Ben L., Applied Operations Research: A Survey, Toronto, John Wiley & Sons, Inc., 1976.