GEOMETRI BIDANG EUCLIDES SECARA DEDUKTIF-AKSIOMATIS BERDASARKAN SISTEM AKSIOMA HILBERT, SEBAGAI PEDOMAN BAGI GURU DALAM PENGAJARAN GEOMETRI DI SEKOLAH MENENGAH

SKRIPSI

Diajukan untuk Memenuhi Salah Satu Syarat
Memperoleh Gelar Sarjana Pendidikan
Program Studi Pendidikan Matematika

Oleh
Listijani Budi
NIM: S1/87414071/Mat
NIRM: 87 5027100043

JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA
FAKULTAS PENDIDIKAN MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
IKIP SANATA DHARMA
YOGYAKARTA
1992

SKRIPSI

GEOMETRI BIDANG EUCLIDES SECARA DEDUKTIF-AKSIOMATIS BERDASARKAN SISTEM AKSIOMA HILBERT, SEBAGAI PEDOMAN BAGI GURU DALAM PENGAJARAN GEOMETRI DI SEKOLAH MENENGAH

Oleh
Listijani Budi
NIM: S1/87414071/Mat
NIRM: 87 5027100043

telah disetujui oleh:

Pembimbing I

Drs. B. Susanta tanggal ..25 AGUSTUS 1992..

Pembimbing II

Dr. St. Suwarsono tanggal ..4 OKTOBER 1992..

SKRIPSI

GEOMETRI BIDANG EUCLIDES SECARA DEDUKTIF-AKSIOMATIS
BERDASARKAN SISTEM AKSIOMA HILBERT,
SEBAGAI PEDOMAN BAGI GURU DALAM PENGAJARAN GEOMETRI
DI SEKOLAH MENENGAH

yang dipersiapkan dan disusun oleh
Listijani Budi
NIM: S1/87414071/Mat
NIRM: 87 5027100043
telah dipertahankan di depan Dewan Penguji
pada tanggal 24 Oktober 1992
dan dinyatakan telah memenuhi syarat

Susunan Dewan Penguji

		Nama lengkap	Tanda tangan
Ketua	:	Dr. St. Suwarsono	....
Sekretaris	:	Drs. F. Kartika Budi, M. Pd.	.... 11/11-1992
Anggota	:	Drs. B. Susanta	....
Anggota	:	Prof. Drs. Wirasto	....
Anggota	:	Drs. A. Tutoyo, M. Sc.	....

Yogyakarta, 24 Oktober 1992
FPMIPA IKIP Sanata Dharma
Dekan

INSTITUT KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN FAKULTAS PENDIDIKAN MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM SANATA DHARMA

Dr. St. Suwarsono

KATA PENGANTAR

Puji syukur yang sedalam-dalamnya kepada Tuhan atas segala rahmat-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.

Skripsi yang berjudul "Geometri Bidang Euclides Secara Deduktif-Aksiomatis Berdasarkan Sistem Aksioma - Hilbert, Sebagai Pedoman Bagi Guru Dalam Pengajaran Geometri Di Sekolah Menengah" ini disusun untuk memenuhi syarat pencapaian gelar Sarjana Pendidikan Matematika. Bagi penulis, penulisan skripsi ini merupakan pengalaman yang sangat baik sebab selama proses penulisan banyak sekali kesulitan dan hambatan yang terjadi. Bagaimana mengolah semuanya itulah yang sungguh berharga bagi penulis.

Skripsi ini akan menyajikan usulan pedoman pengajaran geometri Euclides dalam bidang untuk tingkat sekolah menengah yang diusahakan lebih tertib dengan didasarkan pada Sistem Aksioma Hilbert dan dilengkapi dengan beberapa penyesuaian mempertimbangkan tingkat perkembangan daya abstraksi siswa.

Proses penulisan skripsi ini telah melibatkan beberapa pihak, maka sepantasnyalah pada kesempatan ini penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Dr. St. Suwarsono selaku Dekan FPMIPA IKIP Sanata Dharma dan selaku pembimbing II dan kepada Drs. B. Susanta selaku pembimbing I yang telah memberikan dorongan serta

bimbingan selama proses penyusunan skripsi ini dengan tekun dan bijaksana.

2. Prof. Dra. Moeharti Hw, M.A., Sr. Dra. Benedicte CB, dan Prof. Drs. Wirasto atas pemberian informasi baik melalui dialog maupun buku-buku yang berkaitan dengan topik skripsi ini.

3. Pihak perpustakaan IKIP Sanata Dharma dan kepada siapa saja yang telah memberikan bantuan dan dukungan sampai terselesaikannya skripsi ini.

Akhirnya karena keterbatasan kemampuan penulis, tentu dalam isi skripsi ini terdapat kesalahan-kesalahan. Oleh karena itu, penulis mengharapkan saran dan kritik dari pembaca demi semakin baiknya skripsi ini dan akan penulis terima dengan hati terbuka.

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR LAMBANG

$A, B, C, \ldots$	:	Titik-titik
$a, b, c, \ldots$	:	Garis-garis
ABC	:	A,B,C segaris dan B terletak di antara A dan C
$\overleftrightarrow{AB}$	:	Garis AB
$\overline{AB}$	:	Ruas garis AB
$\overrightarrow{AB}$	:	Sinar garis AB
$\angle AOB$	:	Sudut AOB
$m\angle AOB$	:	Ukuran $\angle AOB$
AB	:	Ukuran $\overline{AB}$
$\triangle ABC$	:	Segitiga ABC
$\overset{\frown}{AB}$	:	Busur kecil yang ditentukan oleh titik A dan titik B
$\overset{\frown}{ACB}$	:	Busur besar atau busur setengah lingkaran yang ditentukan oleh titik A dan titik B
$m\ \overset{\frown}{AB}$	:	Ukuran $\overset{\frown}{AB}$
$m\ \overset{\frown}{ACB}$	:	Ukuran $\overset{\frown}{ACB}$
$>$	:	Lebih besar
$<$	:	Lebih kecil
$\cong$	:	Kongruen
$\ncong$	:	Tidak kongruen
$\parallel$	:	Sejajar
$\perp$	:	Tegak lurus
$\sim$	:	Sebangun
$\odot\ O$	:	Lingkaran berpusat di titik O

ABSTRAK

Geometri Euclides yang telah bertahan sejak 300 S.M. sebagai acuan belajar geometri, pada abad ke-19 yaitu pada masa aliran formalisme mengalami formalisasi dan aksiomatisasi. Beberapa tokoh matematika seperti Moritz Pasch, Guiseppi Peano, Mario Pieri, dan David Hilbert melakukan tinjauan kembali terhadap Sistem Geometri Euclides. Bersamaan dengan berkembangnya logika dan teori himpunan, maka semakin jelas adanya kelemahan-kelemahan dalam tubuh Geometri Euclides.

Pada tahun 1899, David Hilbert seorang matematikawan Jerman (1862-1943) pada masa itu juga melakukan hal yang sama, dengan menerbitkan buku "Grundlagen der Geometrie" sebagai tinjauan kembali terhadap Geometri Euclides, yang kemudian dianggap sebagai revisi terhadap Geometri Euclides yang terkuat. Sistem Aksioma Hilbert beberapa kali ditulis ulang dengan berbagai pelunakan mempertimbangkan tingkat perkembangan daya abstraksi siswa sekolah menengah.

Skripsi ini menyajikan Geometri Bidang Euclides yang telah direvisi oleh Hilbert, dengan memilih versi sajian Sistem Aksioma Hilbert yang ditulis oleh Fishback, W. I., 1969. Beberapa penyesuaian ditambahkan lagi dengan tetap mempertahankan konsistensi dalam keseluruhannya. Sistem Aksioma Hilbert ini menjadi dasar untuk pembahasan benda-benda Geometri bidang, yaitu: segitiga, segiempat, segibanyak, dan lingkaran yang meliputi pengenalan jenis, sifat, dan hubungan antara benda-benda tersebut.

Konstruksi diikutsertakan sebagai tambahan, karena pada dasarnya tidak termasuk dalam teori geometri melainkan sebagai salah satu alat untuk membantu pemahaman suatu pengertian karena sifatnya yang lebih konkrit dan terlebih untuk mempersiapkan siswa yang akan melanjutkan ke pendidikan teknik.

BAB I
PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang Masalah

Geometri diajarkan di SMP dan SMA tidak hanya untuk dimengerti dan dikuasai, tetapi pengajaran geometri diharapkan juga berfungsi sebagai wahana untuk melatihkan tertib penalaran. Menurut pengalaman pengajaran geometri selama ini, di SMP dan SMA geometri diajarkan dengan metode global yaitu suatu metode pengajaran geometri yang mendahulukan pengenalan suatu benda geometri menuju ke pengenalan unsur-unsurnya atau bersifat induktif. Di samping itu, penyusunan bahan geometri dalam buku paket SMP/SMA juga mengikuti metode global, tidak memisahkan geometri bidang dan geometri ruang, selain itu digunakan transformasi sebagai alat untuk menanamkan pengertian, dan dari segi bahasa digunakan geometri murni dan geometri analitik secara bersamaan dengan penunjang matriks dan vektor. Menurut para ahli pendidikan, memang metode global sesuai untuk siswa SMP, tetapi sampai di SMA pada dasarnya siswa sudah dapat diajak berabstraksi, demi mempersiapkan mereka yang akan melanjutkan ke perguruan tinggi. Oleh karena itu, dibutuhkan metode yang lebih formal yaitu metode keunsuran yang bersifat deduktif-aksiomatis, dengan metode ini materi disajikan mulai dari pengenalan pengertian pangkal yang akan digunakan untuk menyusun pernyataan-pernyataan pangkal atau yang dikenal dengan istilah aksioma (pernyataan yang tidak-dibuktikan) dan kemudian didefinisikan pengertian-

pengertian baru dan juga dibuktikan teorema-teorema yang akan melengkapi tubuh materi tersebut. Metode ini dapat dicapai bila pengajaran geometrinya sudah tertib dan didukung penyediaan materi yang tertib pula, dalam arti urutan sajian materi jelas dan status setiap pernyataan jelas, sebagai aksioma, definisi, atau teorema. Pengalaman pengajaran geometri selama ini menunjukkan belum adanya suatu pedoman pengajaran geometri formal yang sungguh dapat digolongkan tertib. Hal inilah yang menjadi inti tulisan berikut.

1.2. Perumusan Masalah.

Tulisan ini akan menyajikan suatu *kerangka teori Geometri Euclides* berlandaskan pada Sistem Aksioma Hilbert[1], sebagai usulan pedoman pengajaran geometri formal bagi para calon guru dan guru matematika, yang harus diolah lebih lanjut. Jadi masalah yang akan dijawab dalam ini adalah: "bagaimanakah kerangka materi Geometri Euclides dalam bidang berdasarkan SAH, yang dapat dijadikan pedoman (dalam arti lebih tertib) bagi guru dan calon guru matematika dalam pengajaran geometri di sekolah menengah?"

1.3. Pembatasan Masalah

Penulis hanya membahas *Geometri Bidang Euclides* berlandaskan pada SAH *dalam bidang*, yang disajikan dengan bahasa geometri murni, tetapi kelompok *aksioma*

---

[1] Untuk selanjutnya akan dipergunakan singkatan "SAH" untuk menyatakan "Sistem Aksioma Hilbert."

Kontinuitas dan *kelengkapan* serta luas benda-benda geometri bidang dengan sengaja tidak dibahas, supaya tulisan tidak terlalu luas. Jadi jelas tulisan ini tidak mempersiapkan bahan jadi untuk suatu pengajaran geometri formal dan juga tidak dimaksudkan untuk menyusun teori Geometri Euclides yang lengkap. Kerangka teori akan dilengkapi dengan *konstruksi* yang akan disajikan secara terpisah sebagai tambahan, karena pada dasarnya konstruksi bukan bagian dari teori. Konstruksi biasa digunakan sebagai sarana untuk memperjelas suatu pengertian karena lukisan bersifat lebih konkrit, konstruksi juga disajikan untuk membantu mempersiapkan mereka yang akan melanjutkan ke pendidikan teknik.

1.4. Tujuan Pembahasan Masalah

Adapun tujuan dari pembahasan masalah tersebut adalah: 1. Membantu menertibkan pengajaran geometri melalui penertiban bahan ajarnya.

2. Menyajikan geometri yang lebih tertib sebagai wahana untuk melatihkan penalaran bagi siswa dengan cara menyusun dasar dan kerangka kasar bahan ajar geometri berdasar sistem aksioma Euclides yang telah direvisi oleh David Hilbert.

1.5. Manfaat Pembahasan Masalah

Pedoman pengajaran geometri ini akan bermanfaat untuk membantu mengusahakan suatu pedoman pengajaran geometri formal yang lebih tertib bagi para calon guru dan guru matematika, dengan demikian diharapkan dapat membantu siswa untuk dapat mengerti geometri secara lebih tertib.

1.6. Tinjauan Pustaka

Geometri Euclides telah ditinjau kembali sejak masa aliran formalisme. David Hilbert salah satu tokoh penting pada masa itu, melakukan revisi terhadap kelemahan pada tubuh Geometri Euclides, melalui SAH yang diperkenalkannya dalam buku "*Grundlagen der Geometrie (The Foundation of Geometry),*" 1899. SAH tersebut beberapa kali dibahas ulang dengan versi yang berlainan, antara lain oleh Fishback, W.I., 1969 dalam bukunya "*Projective and Euclidean Geometry,*" yang menjadi acuan utama dan masih dilengkapi dengan beberapa penyesuaian, karena terbukti SAH tidak dapat secara langsung diterapkan pada pengajaran geometri sekolah menengah (Myron F. Rosskopf, 1966: 568-569). Penyesuaian tersebut harus mempertimbangkan tingkat kemampuan abstraksi dan supaya lebih mudah dimengerti oleh siswa. Beberapa penyesuaian tersebut antara lain adalah bahwa relasi kongruensi sebagai relasi pangkal diperkenalkan dengan konsep ukuran, melalui Aksioma Jarak dan Aksioma Ukuran Sudut, kemudian relasi kongruensi diterangkan dengan konsep ukuran. Beberapa acuan lain, yaitu: "*Geometry,*" oleh Stanley R. Clemens, dkk., 1984; "*Geometry,*" oleh Kenneth J. Travers, dkk., 1987; dan "*Modern Mathematics: Geometry,*" oleh Myron F. Rosskopf, dkk., 1966 bersifat menggunakan

SAH, dan telah mengalami perluasan ke materi geometri sekolah menengah, dan beberapa acuan lain baik yang secara langsung membahas SAH maupun tidak.

1.7. Sistematika Penulisan

Skripsi ini akan didahului dengan menyajikan Bab I yang merupakan uraian latar belakang gagasan penulisan kerangka materi geometri bidang Euclides yang merupakan pokok masalah skripsi, kemudian diikuti dengan bagian pembahasan yang terdiri atas lima bagian, dimulai dengan bab II: membahas SAH, yang merupakan dasar penyusunan keseluruhan teori, selanjutnya pada bab III, bab IV, bab V, dan bab VI berturut-turut dibahas: segitiga, segi-empat, segi-n, dan lingkaran, yang meliputi pengertian, klasifikasi, sifat-sifat, dan hubungan antar benda-benda geometri bidang tersebut.

Sebagai tambahan keterangan adalah bahwa untuk menghemat penulisan maka dalam proses pembuktian akan digunakan singkatan Aks., Def., dan Teo. yang berturut-turut menunjukkan penggunaan aksioma, definisi, dan teorema dan untuk mengakhiri suatu bukti digunakan lambang (■), yang diartikan bahwa teorema telah terbukti.

1.8. Prasyarat

Untuk membaca tulisan ini diandaikan bahwa pembaca telah menguasai sifat-sifat dasar bilangan real, teori himpunan, dan logika secukupnya.

BAB II
SISTEM AKSIOMA HILBERT UNTUK GEOMETRI EUCLIDES DALAM BIDANG

Geometri Euclides yang telah direvisi oleh David Hilbert dengan SAH, diawali dengan memperkenalkan pengertian pangkal dan sifat pangkal (aksioma), yang akan menjadi bahan dasar dalam penyusunan teori Geometri Euclides.

Dalam semesta pembicaraan geometri bidang, pengertian pangkal terdiri atas dua bagian, yaitu kelompok unsur pangkal yang meliputi himpunan titik dan himpunan garis dan kelompok relasi pangkal. David Hilbert membagi sistem aksiomanya menjadi lima kelompok, dan memberi nama tiap kelompok aksiomanya sesuai dengan nama relasi yang mendasari kelompok aksioma yang bersangkutan. Adapun kelima relasi yang mendasari kelima kelompok aksioma tersebut adalah:

1. Relasi-relasi pangkal:
   a. Relasi insidensi (incidence)
   b. Relasi urutan (order) atau keantaraan (betweenness),
   c. Relasi kongruensi (congruence),
   d. Relasi kontinuitas (continuity) dan kelengkapan (completeness), dan
2. Relasi bukan pangkal yaitu relasi kesejajaran (parallel).

Masing-masing kelompok pada SAH (Fishback, 1969: 9-23) tersebut akan dijelaskan pada bagian berikut ini.

2.1. Kelompok Aksioma Eksistensi dan Insidensi

Kelompok aksioma pertama membahas relasi pangkal insidensi: yang menyatakan "suatu titik terletak pada suatu garis" atau bahwa "suatu garis melalui suatu titik." Sedangkan aksioma eksistensi untuk titik dan garis menegaskan bahwa semesta pembicaraan dalam penyusunan teori ini tidak kosong.

Kelompok aksioma ini terdiri dari empat aksioma, yaitu.

Aksioma 1. Terdapat paling sedikit satu garis.

Aksioma 2. Pada setiap garis terdapat paling sedikit dua titik yang berbeda.

Aksioma 3. Tidak semua titik terletak pada garis yang sama.

Aksioma 4. Terdapat tepat satu garis melalui dua titik yang berbeda.

Teorema 2. 1. Setiap titik dilalui oleh paling sedikit dua garis yang berbeda.

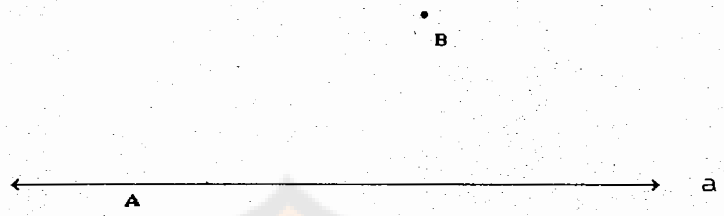
Bukti:

Diketahui garis a. (Aksioma (Aks.) .1).

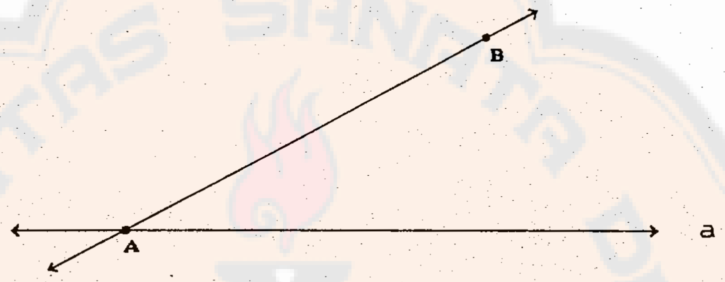
Menurut Aks.2 paling sedikit ada dua titik pada a dan sebut salah satu di antaranya titik A dan menurut Aks.3 pasti ada titik B di luar a.[2]

---

[2] Suatu titik dikatakan *di luar* suatu garis apabila titik tersebut tidak terletak pada garis tersebut.



Berdasarkan Aks.4 maka ada tepat satu garis melalui A dan B.



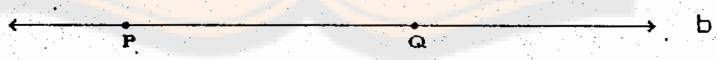
Jadi A dilalui oleh garis a (garis pemuatnya) dan paling sedikit satu garis lain, yaitu $\overleftrightarrow{AB}$.■

Teorema 2. 2. Tidak semua garis melalui titik yang sama.

Bukti:

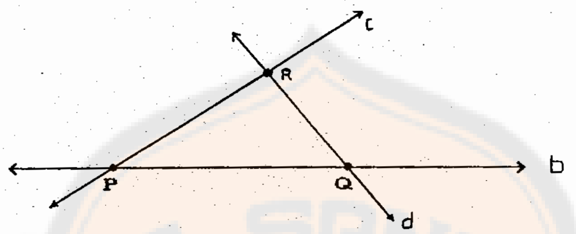
Diketahui garis b. (Aks.1).

Menurut Aks.2 ada paling sedikit dua titik pada b yaitu P dan Q. Menurut Aks.3 pasti ada titik R di luar b.



Menurut Aks.4, maka ada tepat satu garis c melalui R dan P, dan ada tepat satu garis d melalui R dan Q. Perhatikan

P dilalui c tetapi tidak dilalui oleh d, berarti ada garis yang tidak melalui P. Hal ini membuktikan bahwa tidak semua garis melalui titik yang sama.■



Definisi 2. 1. *Dua titik berimpit* adalah dua titik yang sama, dan *dua garis berimpit* adalah dua garis yang sama.

Teorema 2. 3. Dua garis yang berbeda bertemu paling banyak di satu titik.

Bukti:

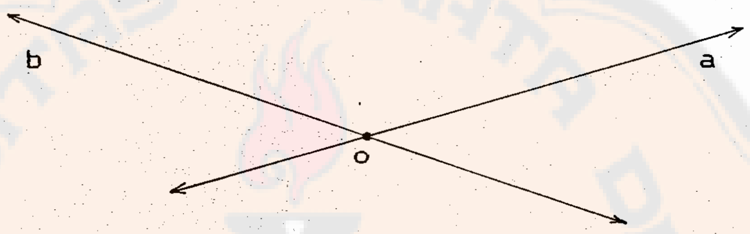
Andaikan diketahui dua garis yang berbeda yaitu garis e dan garis f, dan kedua garis tersebut bertemu di dua titik, yaitu di A dan B. Berarti kedua garis itu sama-sama melalui A dan B.

Menurut Aks.4 melalui dua titik yang berbeda hanya ada tepat satu garis, berarti kedua garis tersebut akan berimpit. Ini bertentangan dengan yang diketahui.

Kesimpulan: pengandaian di atas tidak benar.

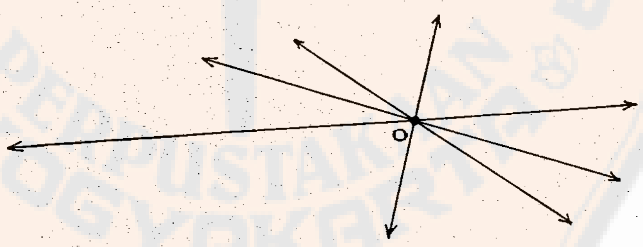
Jadi kedua garis tersebut hanya akan bertemu paling banyak di satu titik.■

Definisi 2. 2. Dua garis yang berbeda disebut *berpotongan* apabila dua garis itu bersekutu pada satu titik. (Titik tersebut disebut *titik sekutu*).



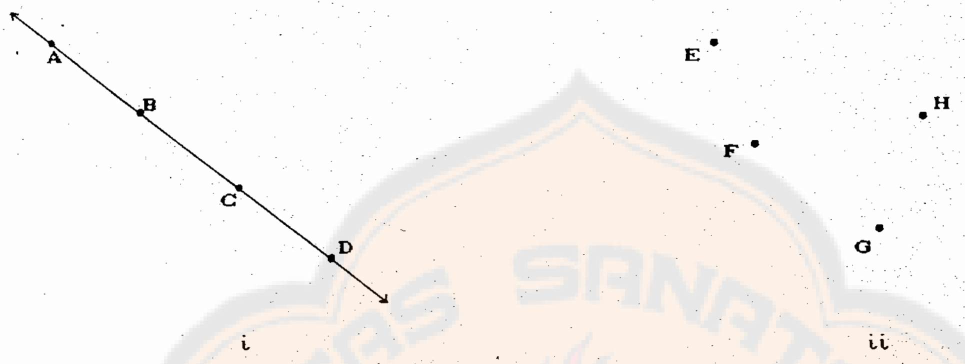
Garis a dan garis b berpotongan di O

Definisi 2. 3. Dua garis atau lebih yang berbeda di sebut *setitik* (*konkuren*) jika mereka mempunyai satu titik sekutu.



Garis-garis setitik di O

Definisi 2. 4. Titik-titik *segaris (kolinear)* adalah titik-titik yang terletak pada satu garis (titik-titik yang tidak terletak pada satu garis disebut titik-titik *tidak segaris (non-kolinear))*.



Titik-titik: A,B,C,D segaris.

Titik-titik: E,F,G,H tidak segaris.

2.2. Kelompok Aksioma Urutan

Kelompok aksioma kedua membahas relasi *urutan* atau relasi *keantaraan.*[3] Untuk pembahasan selanjutnya akan ditulis ABC apabila A, B, dan C adalah tiga titik berbeda dan B terletak di antara A dan C.

Aksioma-aksioma pada kelompok ini adalah:

Aksioma 5. Jika ABC maka titik-titik A,B, dan C berbeda dan segaris.

Aksioma 6. Jika ABC maka CBA.

Aksioma 7. Jika A dan C adalah dua titik berbeda, maka terdapat titik B sedemikian sehingga ABC dan terdapat titik D sedemikian sehingga ACD.

---

[3] Relasi pangkal ini tidak disebutkan oleh Euclides, melainkan diperkenalkan oleh M. Pasch, ahli geometri berkebangsaan Jerman, pada tahun 1882.

Aksioma 8. Diberikan tiga titik berbeda dan segaris, maka tepat satu titik dari ketiga titik itu terletak di antara duatitik lainnya.

Aksioma 9. Diberikan empat titik berbeda dan segaris, maka dimungkinkan untuk memberi nama titik-titik itu A, B, C, dan D sedemikian sehingga dipenuhi ABC, ABD, ACD, dan BCD.

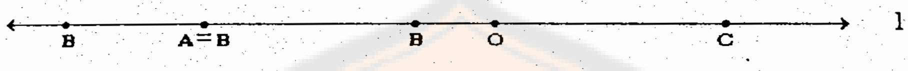
Definisi 2. 5. Apabila O adalah suatu titik pada garis l, maka dua titik berbeda (berlainan-dengan O) pada l dikatakan *terletak pada kelas yang sama (sepihak terhadap O)* bila O tidak terletak di antara kedua titik tersebut. Sedangkan dua titik tersebut akan dikatakan *terletak pada kelas yang berbeda (berlainan pihak terhadap O)* bila O terletak di antara kedua titik tersebut.

Teorema 2. 4. Jika O adalah suatu titik pada garis l, maka O memisahkan semua titik lainnya pada l menjadi dua kelas.

Bukti:

Diketahui garis l dan titik O pada garis tersebut, kemudian dipilih titik A yang berlainan dengan O pada l.

Berdasarkan Aks.7, maka terdapat titik B dengan kemungkinan kedudukan: ABO atau BAO atau B = A dan pada pihak yang lain dari O dan terdapat titik-titik C sedemikian sehingga AOC.



Menurut Aks.9 bila ABO dan AOC, maka BOC,

bila BAO dan AOC, maka BOC, dan

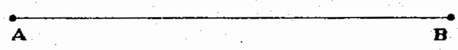
bila B = A dan AOC , maka BOC.

Tampak bahwa kelompok titik B pada l seperti ketentuan di atas membentuk *kelas pertama* dan kelompok titik C seperti ketentuan di atas membentuk *kelas kedua.* Titik A dan B disebut *sepihak* terhadap O sedangkan A dan C disebut *berlainan pihak* terhadap O.■

Definisi 2. 6. Suatu *Ruas garis* yang ditentukan oleh dua titik A dan B adalah himpunan yang terdiri dari titik A dan B sebagai ujung-ujungnya dan semua titik di antara A dan B.[4]

---

[4] Ruas garis dikenal dalam dua versi yaitu *ruas garis terbuka*, yang tidak mengikutsertakan kedua titik ujungnya dan *ruas garis tertutup*, seperti yang didefinisikan di atas. Tulisan ini tidak membahas ruas garis terbuka.



Lambang: $\overline{AB}$ atau $\overline{BA}$

Definisi 2. 7. Jika O adalah suatu titik pada garis l, maka suatu *sinar garis* pada garis l dengan titik pangkal O adalah himpunan yang terdiri dari titik O dan semua titik yang terletak sepihak terhadap titik O pada garis l.

Lambang: $\overrightarrow{OA}$

$\overrightarrow{OA}$ adalah himpunan yang terdiri dari titik O dan semua titik yang sepihak dengan titik A terhadap titik O.

Definisi 2. 8. Dua ruas garis atau dua sinar garis dikatakan *berimpit* bila kedua ruas garis atau kedua sinar garis tersebut sama.

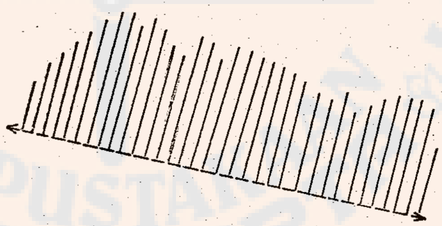
Definisi 2. 9. Apabila diberikan garis l, maka dua titik yang berbeda di luar l dikatakan *terletak dalam kelas yang sama (sepihak terhadap garis l)* bila dan hanya bila ruas garis yang ditentukannya tidak memuat suatu titikpun yang terletak pada garis yang diberikan.

Sedangkan dua titik tersebut dikatakan *terletak dalam kelas yang berbeda* (*tidak-sepihak terhadap garis l*) bila dan hanya bila ruas garis yang ditentukannya memuat tepat satu titik yang terletak pada garis l.

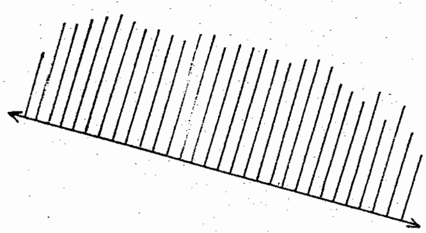
Untuk selanjutnya garis yang mempunyai sifat seperti garis l itu disebut *garis pemisah.*

Aksioma 10. Sebarang garis memisahkan himpunan semua titik yang tidak terletak pada garis tersebut menjadi dua kelas.

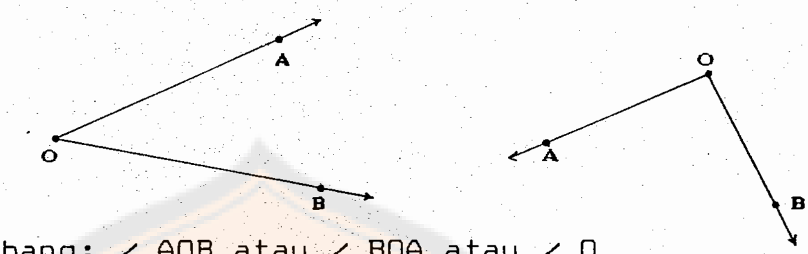
Definisi 2.10.a. Himpunan semua titik pada suatu kelas seperti tersebut di atas disebut *setengah bidang.*



b. Gabungan setengah bidang tersebut dengan garis pemisahnya disebut *setengah bidang tertutup.*



Definisi 2.11. *Sudut* adalah gabungan dua sinar garis yang bersekutu titik pangkalnya.



Lambang: $\angle$ AOB atau $\angle$ BOA atau $\angle$ O

$\overrightarrow{OA}$ dan $\overrightarrow{OB}$ disebut *kaki-kaki sudut* dan titik O disebut *titik sudutnya.*

Kejadian khusus:

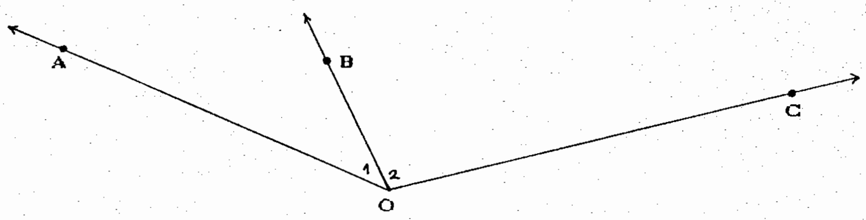
1. Jika kedua sinar garis berimpit, maka sudut yang terbentuk disebut *sudut nol.*

2. Jika kedua sinar garis terletak berlawanan, maka sudut yang terbentuk disebut *sudut lurus.*[5]

Definisi 2. 12. Dua sudut yang berbeda dikatakan *berdampingan,* bila kedua sudut itu mempunyai titik sudut yang sama dan salah satu kaki dari kedua sudut itu berimpit sedangkan kaki-kaki yang lainnya terletak pada pihak yang berlainan terhadap garis pemuat kaki yang berimpit.

---

[5] Dua sinar garis yang berbeda disebut *berlawanan* bila segaris dan bersekutu di titik pangkalnya.

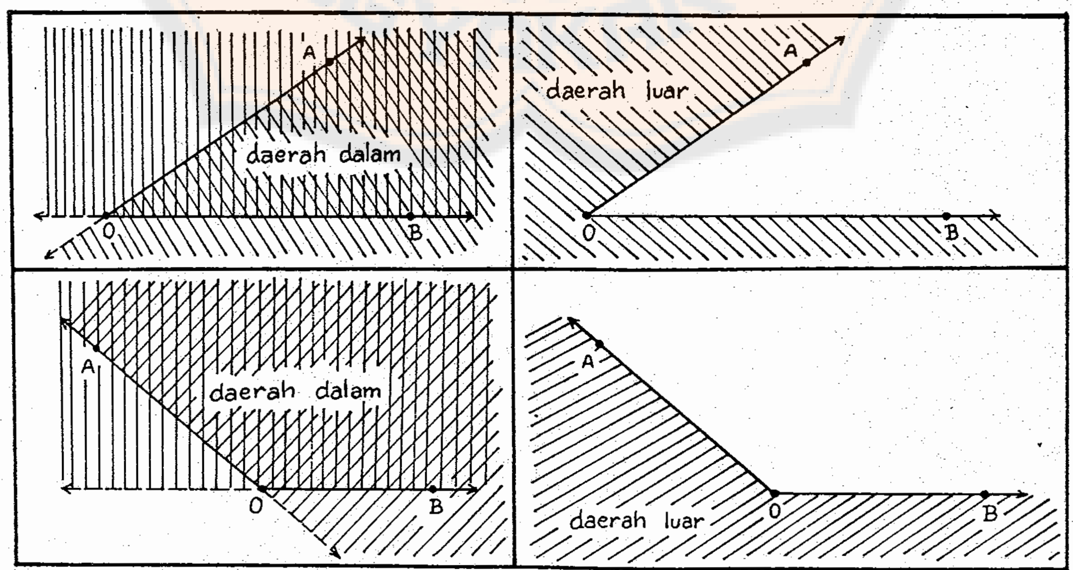


$\angle$ AOB dan $\angle$ BOC (atau $\angle O_1$ dan $\angle O_2$ atau $\angle$ 1 dan $\angle$ 2) saling berdampingan.

Suatu sudut bukan sudut nol memisahkan semua titik yang tidak terletak pada sudut tersebut menjadi dua kelas, yaitu *daerah dalam (interior)* dan *daerah luar (eksterior)*.

Definisi 2.13. *Daerah dalam* $\angle$ AOB (bukan sudut nol) adalah irisan dari himpunan titik-titik yang sepihak dengan A terhadap $\overleftrightarrow{OB}$ dengan himpunan titik yang yang sepihak dengan B terhadap $\overleftrightarrow{OA}$.

Titik-titik yang tidak terletak pada daerah dalam maupun pada $\angle$ AOB dikatakan terletak pada *daerah luar* $\angle$ AOB.



2.3. Kelompok Aksioma Kongruensi

Kelompok aksioma ini terbagi menjadi dua, sebagai berikut:

2.3.1. Kelompok Aksioma Kongruensi Untuk Ruas Garis

Aksioma Jarak:

Untuk setiap satuan ukuran yang diberikan, terdapat suatu korespondensi yang menetapkan suatu bilangan real positip bagi setiap pasangan dua titik yang berbeda.

Bilangan real positip yang bersesuaian dengan sepasang titik yang berbeda disebut *jarak* antara dua titik tersebut, yang bersifat relatif terhadap satuan ukuran yang digunakan. Adapun satuan ukuran yang sering digunakan antara lain adalah centimeter, meter, dan inci.

Definisi 2.14. *Ukuran* $\overline{AB}$ adalah jarak antara A dan B. (lambang:AB).

Definisi 2.15. Dua ruas garis dikatakan saling kongruen bila mereka mempunyai ukuran yang sama. atau $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$ bila $AB = A'B'$.

Kelompok aksioma kongruensi untuk ruas garis, yaitu:

Aksioma 11. Diberikan $\overline{AB}$ dan titik A' pada garis a, maka pada setiap sinar garis pada a dengan titik pangkal di A' terdapat tepat satu titik B' sedemikian sehingga $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$.

Aksioma 12. $\overline{AB} \cong \overline{AB}$ (sifat refleksif).

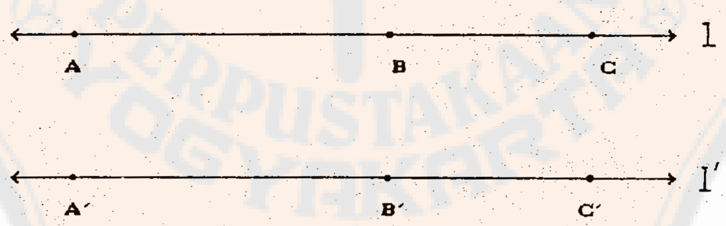
Aksioma 13. Jika $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$ maka $\overline{A'B'} \cong \overline{AB}$ (sifat simetris).

Aksioma 14. Jika $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$ dan $\overline{A'B'} \cong \overline{A''B''}$ maka $\overline{AB} \cong \overline{A''B''}$ (sifat transitif).

Aksioma 15. Andaikan titik B terletak di antara titik A dan titik C pada garis l, dan titik B' terletak di antara titik A' dan titik C' pada suatu garis l'.

a. Jika $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$ dan $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$ maka $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$.
Akibat: $AB + BC = AC$.

b. Jika $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$ dan $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$ maka, $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$.
Akibat: $AC - BC = AB$.



Definisi 2.16. (Ketidaksamaan ukuran pada Ruas garis).

Misalkan $\overline{AB}$ dan $\overline{A'B'}$ adalah dua ruas garis yang berbeda, maka

$\overline{AB}$ lebih besar dari $\overline{A'B'}$ $\Leftrightarrow$ $AB > A'B'$,

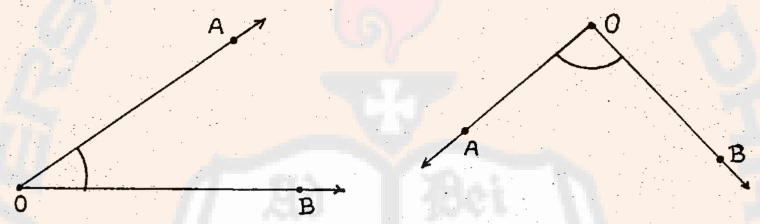
$\overline{AB}$ lebih kecil dari $\overline{A'B'}$ $\Leftrightarrow$ $AB < A'B'$.

2.3.2. Kelompok Aksioma Kongruensi Untuk Sudut

Aksioma Ukuran Sudut:

Setiap sudut bukan sudut nol bersesuaian dengan tepat satu bilangan real positip antara 0 sampai dengan 180.

Untuk selanjutnya bilangan real positip tersebut menjadi *ukuran sudut*[6] (lambang: $m\angle AOB$, dikatakan: ukuran sudut AOB) dengan satuan derajat.



Definisi 2.17. Dua sudut dikatakan kongruen bila keduanya mempunyai ukuran yang sama.

atau

$\angle AOB \cong \angle A'O'B'$ bila $m\angle AOB = m\angle A'O'B'$.

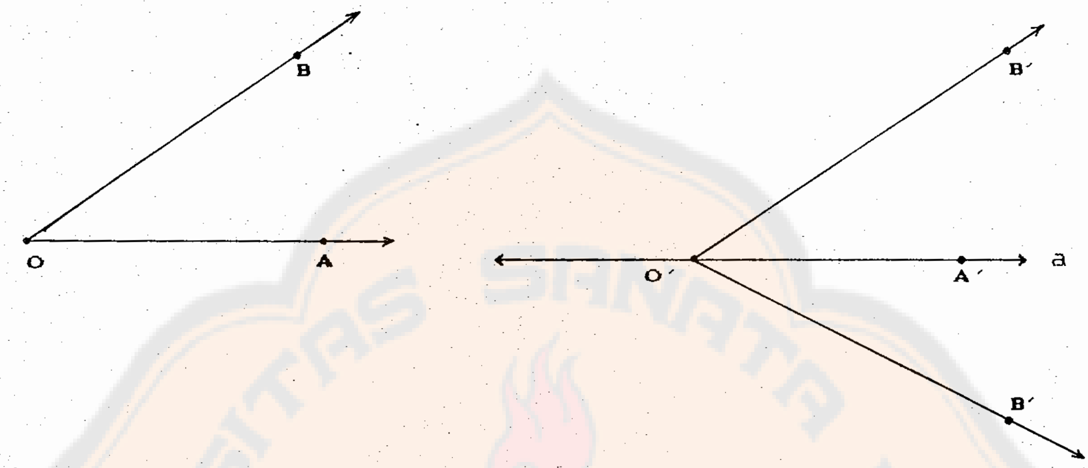
Kelompok aksioma kongruensi untuk sudut, yaitu:

Aksioma 16. Jika diberikan $\angle AOB$ dan suatu $\overrightarrow{O'A'}$ pada suatu garis a, maka pada setiap setengah bidang tertutup yang dibatasi oleh garis a,

---

[6] Pada dasarnya, ukuran sudut tidak mutlak demikian. Beberapa negara mambagi busur dengan cara dan satuan yang berbeda, ada yang membaginya menjadi 200 bagian dengan satuan grad, 3200 bagian dengan satuan mil, dan masih terdapat cara pembagian yang lain.

terdapat tepat satu $\overrightarrow{O'B'}$ sedemikian sehingga, $\angle AOB \cong \angle A'O'B'$.



Aksioma 17. $\angle AOB \cong \angle AOB$ (sifat refleksif).

Aksioma 18. Jika $\angle AOB \cong \angle A'O'B'$ maka $\angle A'O'B' \cong \angle AOB$ (sifat simetris).

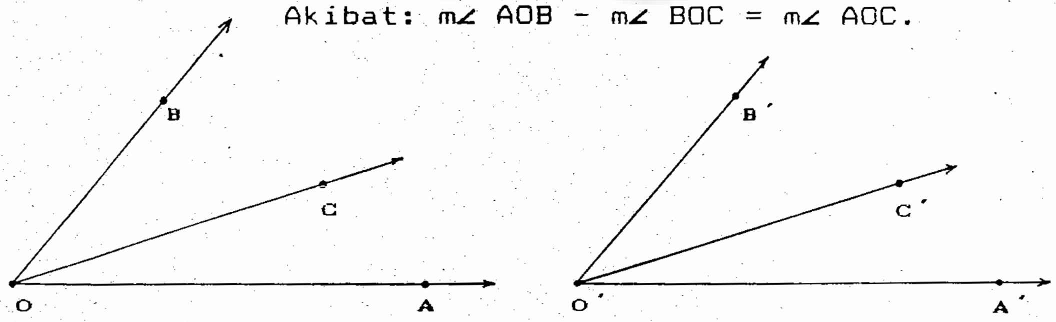
Aksioma 19. Jika $\angle AOB \cong \angle A'O'B'$ dan $\angle A'O'B' \cong \angle A''O''B''$, maka $\angle AOB \cong \angle A''O''B''$ (sifat transitif).

Aksioma 20. a. Jika $\angle AOC \cong \angle A'O'C'$ dan $\angle BOC \cong \angle B'O'C'$, maka $\angle AOB \cong \angle A'O'B'$.

Akibat: $m\angle AOC + m\angle COB = m\angle AOB$.

b. Jika $\angle AOB \cong \angle A'O'B'$ dan $\angle BOC \cong \angle B'O'C'$, maka $\angle AOC \cong \angle A'O'C'$.

Akibat: $m\angle AOB - m\angle BOC = m\angle AOC$.



Kelompok aksioma kongruensi ini diakhiri dengan aksioma yang disebut *aksioma sisi-sudut-sisi*. Aksioma ini akan disajikan pada bab III, bagian pembahasan kongruensi dua segitiga, yang akan didahului dengan definisi kongruensi dua segitiga.

Definisi 2.18. (Ketidaksamaan ukuran pada Sudut).

Misalkan $\angle A$ dan $\angle B$ adalah dua sudut yang bukan sudut lurus, maka

$\angle A$ lebih besar dari $\angle B \Leftrightarrow m\angle A > m\angle B$,

$\angle A$ lebih kecil dari $\angle B \Leftrightarrow m\angle A < m\angle B$.

2.3.2.1. **Jenis-jenis sudut.**

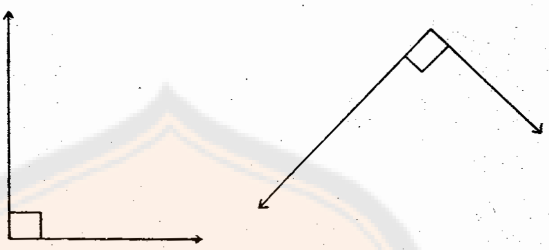
Berikut ini akan dijelaskan jenis-jenis sudut berdasarkan ukuran sudutnya.[7]

Definisi 2.19. Ukuran sudut nol adalah 0 dan ukuran sudut lurus adalah 180.

---

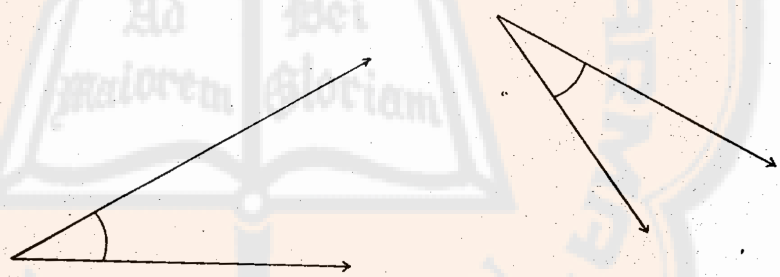
[7] Dalam praktek pengajaran geometri diperkenalkan juga *sudut berat ke dalam (sudut refleks)* yaitu sudut dengan ukuran *lebih besar* daripada 180 dan kurang dari 360, sedangkan sudut dengan ukuran 0 sampai 180 disebut *sudut berat ke luar*.

Definisi 2.20. *Sudut siku-siku* adalah sudut dengan ukuran 90.

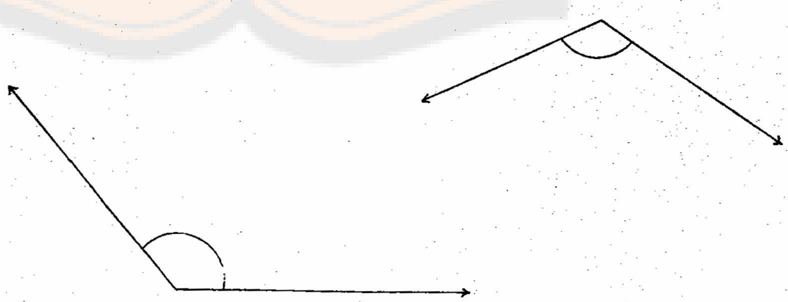


Definisi 2.20, tersebut berakibat bahwa semua sudut siku-siku kongruen satu sama lain.

Definisi 2.21. *Sudut lancip* adalah sudut dengan ukuran lebih besar dari 0 tetapi lebih kecil dari 90.

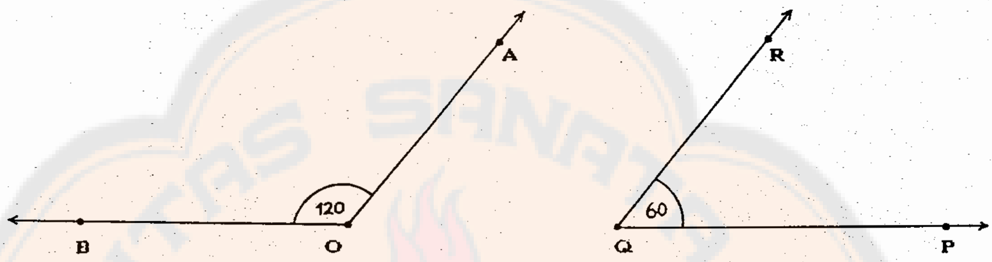


Definisi 2.22. *Sudut tumpul* adalah sudut dengan ukuran lebih besar dari 90 tetapi lebih kecil dari 180.



2.3.2.2. Relasi Antara Dua Sudut.

Definisi 2.23. Dua sudut yang berbeda dikatakan *saling berpelurus* jika jumlah ukuran kedua sudut itu sama dengan ukuran sudut lurus.



$m\angle AOB + m\angle PQR = 180$

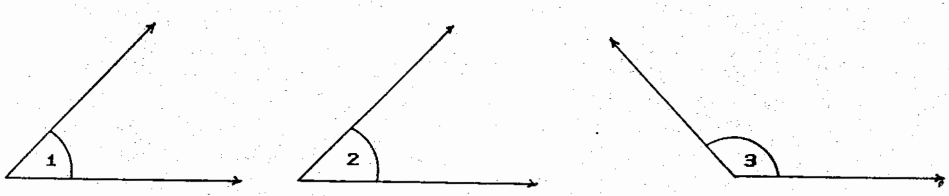
Jika dua sudut berbeda saling berpelurus, maka sudut yang satu disebut *pelurus* sudut yang lain.

Teorema 2. 5. Dua sudut berbeda yang masing-masing berpelurus dengan suatu sudut yang sama akan saling kongruen.

Bukti:

Diketahui dua sudut berbeda, $\angle 1$ dan $\angle 2$.

Misalkan $\angle 3$ adalah pelurus dari masing-masing sudut tersebut. Akan dibuktikan $\angle 1 \cong \angle 2$.



Menurut Definisi 2.23 $m\angle 1 + m\angle 3 = 180$ dan

$m\angle 2 + m\angle 3 = 180$,

sehingga $m\angle 1 + m\angle 3 = m\angle 2 + m\angle 3$.

Berarti $m\angle 1 = m\angle 2$.

Jadi menurut Def.2.17 $\angle 1 \cong \angle 2$.■

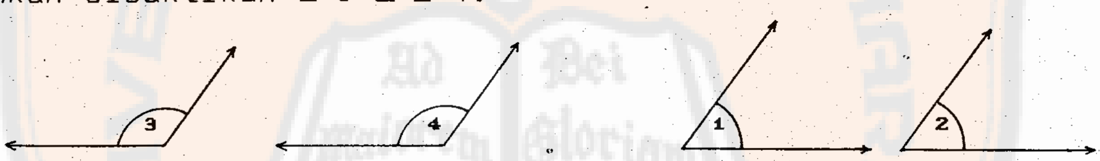
Teorema 2. 6. Sudut-sudut pelurus dari sudut-sudut yang yang saling kongruen akan saling kongruen.

Bukti:

Diketahui dua sudut berbeda, $\angle 1$ dan $\angle 2$ dengan $\angle 1 \cong \angle 2$.

Misalkan $\angle 3$ dan $\angle 4$ secara berurutan adalah pelurus-pelurus dari $\angle 1$ dan $\angle 2$.

Akan dibuktikan $\angle 3 \cong \angle 4$.



Menurut Def.2.23 $m\angle 1 + m\angle 3 = 180$ dan

$m\angle 2 + m\angle 4 = 180$,

sehingga $m\angle 1 + m\angle 3 = m\angle 2 + m\angle 4$.

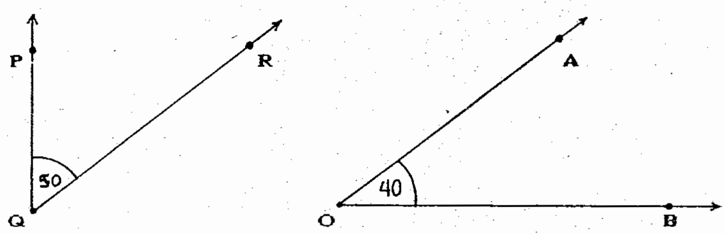
Padahal menurut Def.2.17, maka $m\angle 1 = m\angle 2$,

maka $m\angle 1 + m\angle 3 = m\angle 1 + m\angle 4$,

sehingga $m\angle 3 = m\angle 4$.

Jadi menurut Def.2.17 $\angle 3 \cong \angle 4$.■

Definisi 2.24. Dua sudut yang berbeda dikatakan *saling berpenyiku* apabila jumlah ukuran kedua sudut itu sama dengan ukuran sudut siku-siku.



$$m\angle\, AOB + m\angle\, POQ = 90$$

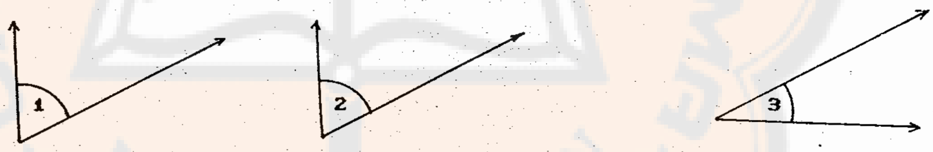
Jika dua sudut berbeda saling berpenyiku, maka sudut yang satu disebut *penyiku* sudut yang lain.

Teorema 2. 7. Dua sudut berbeda yang masing-masing berpenyiku dengan suatu sudut yang sama akan kongruen.

Bukti:

Diketahui dua sudut berbeda $\angle 1$ dan $\angle 2$.

Misalkan $\angle 3$ adalah penyiku dari masing-masing sudut tersebut. Akan dibuktikan $\angle 1 \cong \angle 2$.



Menurut Def.2.24 $m\angle 1 + m\angle 3 = 90$ dan $m\angle 2 + m\angle 3 = 90$,

sehingga $m\angle 1 + m\angle 3 = m\angle 2 + m\angle 3$.

Berarti $m\angle 1 = m\angle 2$.

Jadi menurut Def.2.17 $\angle 1 \cong \angle 2$.■

Teorema 2. 8. Sudut-sudut penyiku dari dua sudut yang kongruen akan kongruen.

Bukti:

Diketahui dua sudut berbeda, $\angle 1$ dan $\angle 2$ dengan $\angle 1 \cong \angle 2$.

Misalkan $\angle 3$ dan $\angle 4$ secara berurutan adalah penyiku-penyiku dari $\angle 1$ dan $\angle 2$.

Akan dibuktikan $\angle 3 \cong \angle 4$.

Menurut Def.2.24 $m\angle 1 + m\angle 3 = 90$ dan

$m\angle 2 + m\angle 4 = 90$,

sehingga $m\angle 1 + m\angle 3 = m\angle 2 + m\angle 4$.

Padahal menurut Def.2.17. $m\angle 1 = m\angle 2$,

maka $m\angle 1 + m\angle 3 = m\angle 1 + m\angle 4$,

sehingga $m\angle 3 = m\angle 4$.

Jadi menurut Def.2.17 $\angle 3 \cong \angle 4$.■

Teorema 2. 9. Jika dua sudut yang berbeda kongruen dan saling berpelurus, maka kedua sudut itu masing-masing adalah sudut siku-siku.

Bukti:

Diketahui dua sudut yang berbeda $\angle 1$ dan $\angle 2$.

Misalkan $\angle 1 \cong \angle 2$ dan $m\angle 1 + m\angle 2 = 180$.

Akan dibuktikan $\angle 1$ dan $\angle 2$ masing-masing siku-siku.

Menurut Def.2.17 $m\angle 1 = m\angle 2$,

sehingga $m\angle 1 + m\angle 2 = m\angle 1 + m\angle 1 = 180$,

diperoleh $2m\angle 1 = 180$,

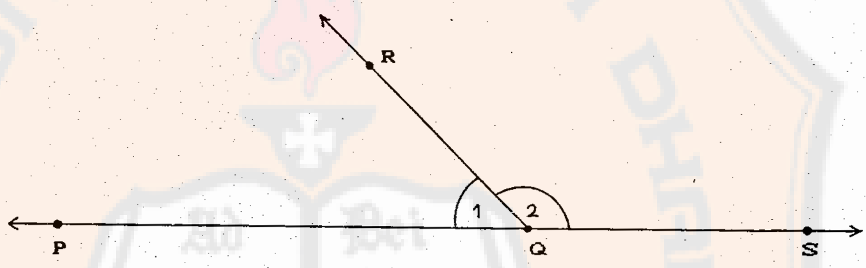
sehingga $m\angle 1 = 90$.

Menurut Def.2.24 $\angle 1$ merupakan sudut siku-siku.

Karena $\angle 1 \cong \angle 2$, maka $\angle 2$ juga siku-siku.

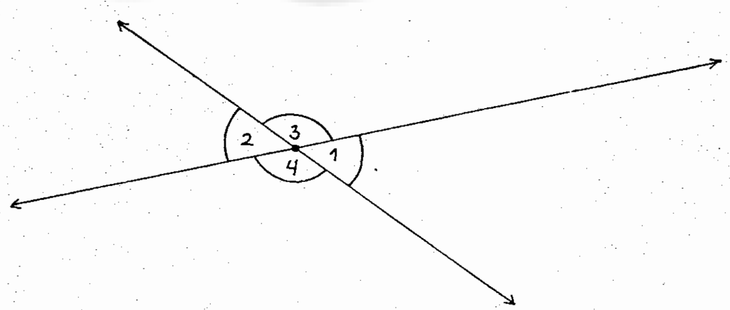
Menurut Akibat Def. 2.20, maka kedua sudut masing-masing merupakan sudut siku-siku.■

Definisi 2.25. Dua sudut yang berbeda disebut *saling bersisian* bila dan hanya bila dua sudut itu saling berdampingan dan keduanya saling berpelurus.



$\angle 1$ dan $\angle 2$ saling bersisian

Definisi 2.26. Dua sudut berbeda yang masing-masing bukan merupakan sudut nol ataupun sudut lurus, disebut *saling bertolak belakang* apabila kaki-kaki sudutnya membentuk dua pasang sinar garis yang berlawanan.



Pada gambar di atas ∠ 1 dan ∠ 2 serta ∠ 3 dan ∠ 4 merupakan pasangan-pasangan sudut bertolak belakang.

Teorema 2.10. Jika dua sudut berbeda saling bertolak belakang, maka kedua sudut itu kongruen.

Bukti:

Pada gambar di atas, perhatikan ∠ 1, ∠ 3, dan ∠ 2.

Pasangan ∠ 1 dan ∠ 27 adalah pasangan sudut saling bertolak belakang.

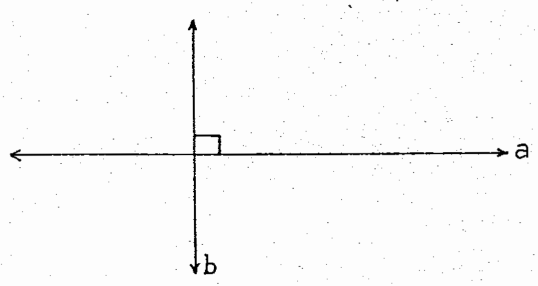
Akan dibuktikan ∠ 1 ≅ ∠ 2.

Menurut Def.2.25, maka ∠ 1 dan ∠ 3, ∠ 3 dan ∠ 2 adalah dua pasang sudut bersisian, maka sepasang-sepasang akan saling berpelurus.

Berarti didapatkan bahwa ∠ 1 dan ∠ 2 masing-masing berpelurus dengan dengan sudut yang sama yaitu ∠ 3.

Menurut Teorema (Teo).2.5, maka ∠ 1 ≅ ∠ 2.■

Definisi 2.27. *Dua garis* yang berbeda *saling tegak lurus* bila dan hanya bila kedua garis itu berpotongan dan membentuk sudut siku-siku. (Lambang: a ⊥ b).



2.4. Aksioma Kesejajaran.

Kelompok aksioma yang keempat ini terdiri dari satu aksioma saja. Aksioma ini pertama kali diperkenalkan oleh John Playfair (1795). Sehingga aksioma ini dikenal dengan nama *aksioma Playfair* (*Playfair's Axiom*).

Definisi 2.28. Dua garis yang berbeda disebut saling sejajar apabila mereka tidak mempunyai titik sekutu.

Aksioma 21. (Aksioma Playfair). Diberikan suatu garis dan suatu titik tidak pada garis tersebut, maka terdapat tepat satu garis yang melalui titik tersebut dan sejajar dengan garis yang diberikan.

Teorema 2.11. Garis-garis berbeda yang sejajar dengan suatu garis yang sama akan saling sejajar.

Bukti:

Diketahui tiga garis k, l , dan h dengan $k \parallel h$ dan $l \parallel h$.

Akan dibuktikan bahwa $k \parallel l$.

Andaikan k tidak sejajar dengan l.

Berarti kedua garis tersebut akan saling berpotongan, misalnya di A.

Jadi terdapat dua garis berbeda yaitu k dan l yang melalui A dan masing-masing sejajar dengan h.

Hal ini bertentangan dengan Aks.21, yang mengatakan bahwa melalui suatu titik di liuar suatu garis hanya terdapat tepat satu garis yang sejajar dengan garis semula.

Kesimpulan: $k \parallel l$.■

2.5. Aksioma Kontinuitas dan Kelengkapan

Kedua aksioma berikut ini mengantarkan ke pembahasan skala bilangan real.

Aksioma 22. Diberikan dua titik, A dan B, dan suatu titik A_1 di antara A dan B, andaikan titik-titik A_2, A_3, A_4, ... dipilih sedemikian sehingga A_1 terletak di antara A dan A_2, A_2 di antara A_1 dan A_3, A_3 di antara A_2 dan A_4, dan seterusnya, dan $\overline{AA_1} \cong \overline{A_1A_2} \cong \overline{A_2A_3} \cong \ldots$ maka terdapat suatu bilangan positip n sesehingga B terletak di antara A dan A_n.

Aksioma 23. Tidak ada titik-titik atau garis-garis yang lain dapat ditambahkan ke dalam sistem, tanpa akan mengganggu salah satu aksioma terdahulu.

Sistem Aksioma Hilbert untuk Geometri Euclides dalam bidang yang telah diuraikan di atas, menurut Fishback sudah cukup untuk membangun suatu Geometri Bidang Euclides. Kelompok aksioma, definisi, dan teorema yang telah dibahas pada bab ini akan digunakan sebagai alat untuk membangun beberapa definisi dan teorema baru beserta buktinya dalam pembahasan bab-bab selanjutnya, yang akan dimulai dengan membahas segitiga, kemudian segiempat, segibanyak, dan lingkaran. Penulis dalam hal ini memilih urutan pembahasan benda-benda geometri mulai dari yang paling sederhana. Penggunaan konsep-konsep pada bab II tersebut bersifat agak longgar, dalam arti tidak ketat sungguh, melainkan diperlunak dengan beberapa penyesuaian.

Perlu penulis tegaskan lagi bahwa skripsi ini bukan suatu bahan siap ajar, tetapi akan menjadi suatu pedoman pengajaran geometri bidang, jadi masih harus diolah dan dilengkapi pada saat akan dipakai sebagai bahan ajar, penulis hanya mengutamakan untuk mencantumkan dan membahas beberapa definisi dan teorema yang secara umum dipelajari di tingkat sekolah menengah.

BAB III

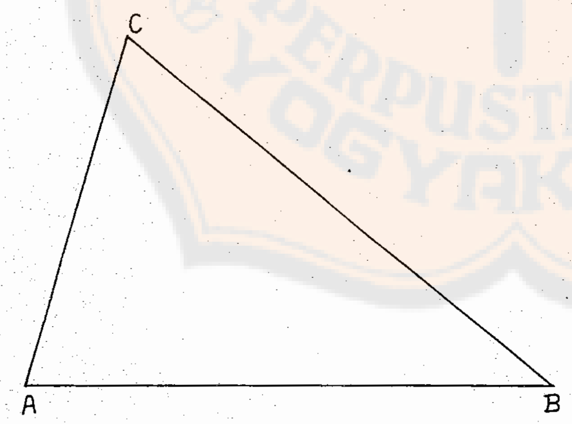
SEGITIGA

Pada bab ini akan dibahas benda geometri yang disebut *segitiga*. Pembahasan meliputi: klasifikasi jenis, sifat-sifat, kongruensi, kesebangunan dan ketidaksamaan.

3.1. Pengertian Segitiga

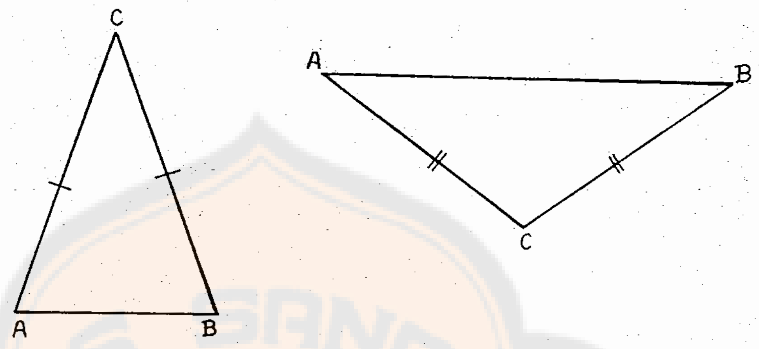
Definisi 3. 1. *Segitiga* adalah gabungan tiga ruas garis yang dibentuk oleh tiga titik yang tidak segaris yang sepasang-sepasang saling dihubungkan .

Jika ketiga titik tersebut adalah A, B, dan C, maka segitiga yang terbentuk ditulis: Δ ABC.



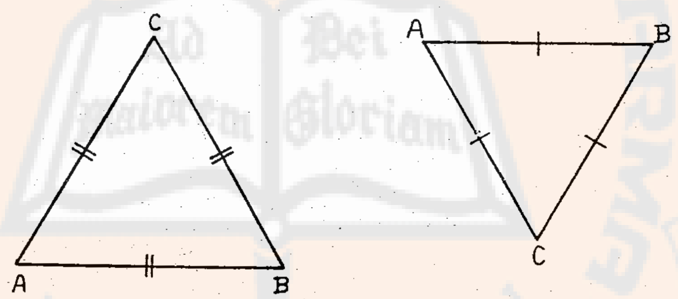
Pada Δ ABC, $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, dan $\overline{CA}$ disebut sisi-sisi Δ ABC dan $\angle$ BAC, $\angle$ ABC, $\angle$ ACB disebut sudut-sudut Δ ABC dengan titik-titik sudutnya adalah A,B, dan C.

Definisi 3.2. *Segitiga samakaki* adalah segitiga yang dua sisinya saling kongruen.



Segitiga ABC samakaki dengan $\overline{AC} \cong \overline{BC}$

Definisi 3. 3. *Segitiga samasisi* adalah segitiga yang ketiga sisinya sepasang-sepasang kongruen.



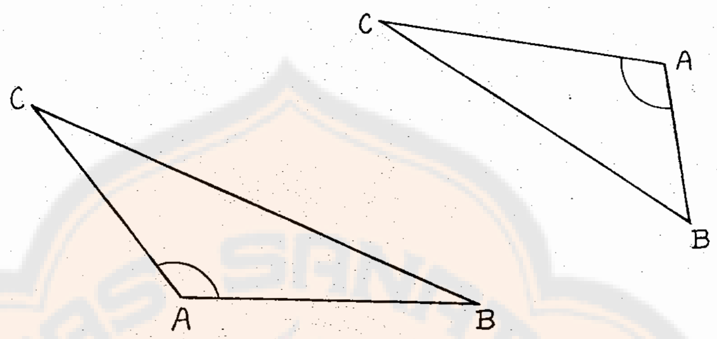
Segitiga ABC samasisi dengan $\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{CA}$

Berdasarkan definisi di atas, segitiga samasisi merupakan segitiga samakaki yang khusus.

Berdasarkan sudut-sudutnya, segitiga-segitiga dikelompokkan menjadi tiga jenis, yaitu:

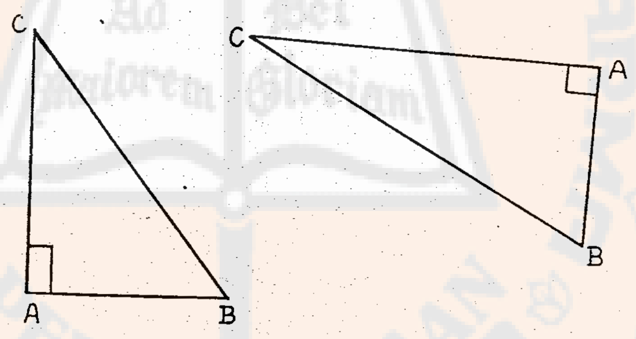
1. Segitiga Tumpul
2. Segitiga Siku-siku
3. Segitiga Lancip

Definisi 3.4. *Segitiga tumpul* adalah segitiga yang salah satu sudutnya tumpul.



Segitiga ABC tumpul dengan $\angle$ BAC tumpul

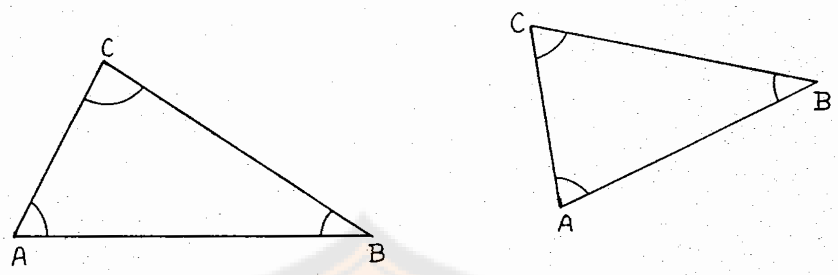
Definisi 3. 5. ***Segitiga siku-siku*** adalah segitiga yang satu sudutnya siku-siku.



Segitiga ABC siku-siku dengan $\angle$ BAC siku-siku

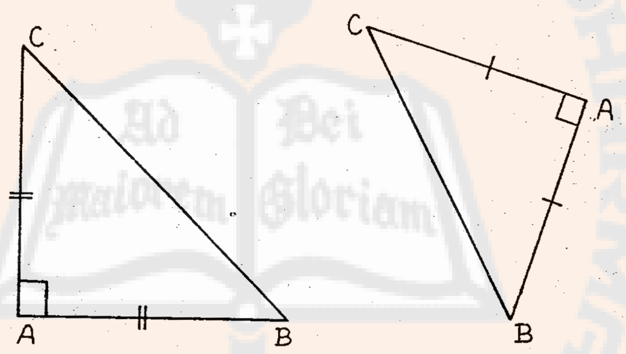
Dalam hal ini, $\overline{AC}$ dan $\overline{BC}$ disebut sisi-sisi siku-siku dan $\overline{BC}$ disebut sisi miring.

Definisi 3. 6. *Segitiga lancip* adalah segitiga yang ketiga sudutnya lancip.



Segitiga ABC lancip dengan ∠ BAC, ∠ ABC, dan ∠ ACB masing-masing adalah sudut lancip.

Definisi 3. 7. *Segitiga siku-siku samakaki* adalah segitiga siku-siku dengan kedua sisi siku-sikunya kongruen.



Segitiga ABC siku-siku samakaki dengan $\overline{AC} \cong \overline{AB}$

3.2. Kongruensi

Definisi 3. 8. Segitiga ABC dan △ A'B'C' saling kongruen (ditulis : △ ABC ≅ △ A'B'C'), apabila

$\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$, $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$, $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$,

∠ BAC ≅ ∠ B'A'C', ∠ ABC ≅ ∠ A'B'C', dan

∠ ACB ≅ ∠ A'C'B'.

Aksioma 24. (Khusus untuk segitiga). Jika dalam $\triangle ABC$ dan $\triangle A'B'C'$, $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$, $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$, dan $\angle A \cong \angle A'$, maka $\angle B \cong \angle B'$.

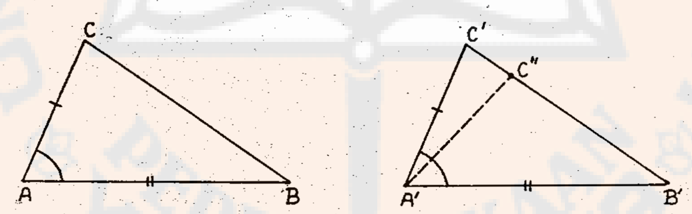
Relasi kongruensi pada segitiga-segitiga memenuhi sifat transitif.

Teorema 3. 1. (Sisi-Sudut-Sisi: S-Sd-S).
Jika dalam $\triangle ABC$ dan $\triangle A'B'C'$, $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$, $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$, dan $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$ maka $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

Bukti:

Diketahui dua segitiga $\triangle ABC$ dan $\triangle A'B'C'$ dengan $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$, $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$, dan $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$.

Akan dibuktikan bahwa $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.



Menurut Aks.24 maka $\angle ABC \cong \angle A'B'C'$ dan $\angle ACB \cong \angle A'C'B'$.

Berdasarkan Def.3.8 maka harus dibuktikan bahwa $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$.

Andaikan terdapat titik C" pada $\overleftrightarrow{B'C'}$, sedemikian sehingga $\overline{BC} \cong \overline{B'C"}$, maka harus ditunjukksn bahwa titik C' dan C" berimpit.

Perhatikan Δ ABC dan Δ A'B'C",

$\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$ (diketahui),

$\overline{BC} \cong \overline{B'C''}$,

$\angle ABC \cong \angle A'B'C''$,

sehingga menurut Aks.24 didapatkan $\angle BAC \cong \angle B'A'C''$.

Padahal $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$, maka menurut Aks.16 haruslah $\overrightarrow{A'C'}$ dan $\overrightarrow{A'C''}$ berimpit dan ini berarti titik C' dan C" berimpit. Jadi $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$.

Kesimpulan: $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$.■

Teorema ini juga berlaku untuk Δ ABC tumpul dengan bukti yang analog.

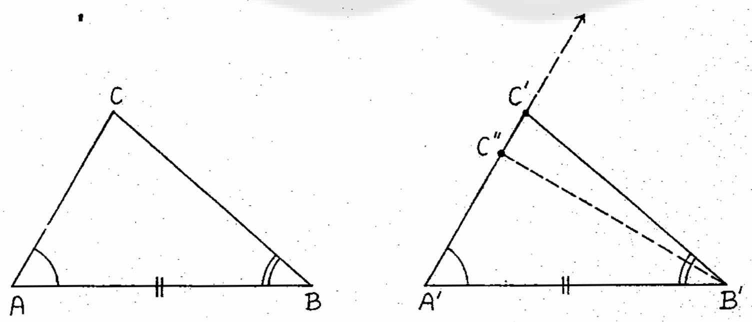
Teorema 3. 2. (Sudut-Sisi-Sudut: Sd-S-Sd)

Jika dalam Δ ABC dan Δ A'B'C', $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$, $\angle ABC \cong \angle A'B'C'$, dan $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$, maka $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$.

Bukti:

Diketahui dua segitiga, Δ ABC dan Δ A'B'C', dengan $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$, $\angle ABC \cong \angle A'B'C'$, dan $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$.

Akan dibuktikan $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$.



Andaikan $\overline{AC} \not\cong \overline{A'C'}$, maka menurut Aks.11 terdapat titik C" pada $\overrightarrow{A'C'}$, sedemikian sehingga $\overline{A'C''} \cong \overline{AC}$.

Jadi $\angle BAC \cong \angle B'A'C''$

Menurut Teo.3.1, maka

$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C''$ (1)

Menurut Def.3.8 didapatkan $\angle ABC \cong \angle A'B'C''$.

Padahal $\angle ABC \cong \angle A'B'C'$,

berarti haruslah $\angle A'B'C' \cong \angle A'B'C''$ (sifat transitif), sehingga $\overrightarrow{B'C'}$ sama dengan $\overrightarrow{B'C''}$, yang berarti titik C" terletak pada $\overleftrightarrow{B'C'}$, maka $\overline{B'C'} \cong \overline{B'C''}$.

Padahal titik C' juga terletak pada $\overleftrightarrow{B'C'}$.

Sedangkan menurut Teo.2.3 $\overline{A'C'}$ dan $\overline{B'C'}$ akan berpotongan

paling banyak di satu titik saja, jadi C" dan C' adalah dua titik yang sama.

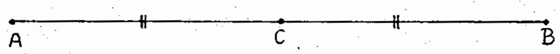
Sehingga menurut Teo.3.1 didapatkan

$\triangle A'B'C'' \cong \triangle A'B'C'$ (2)

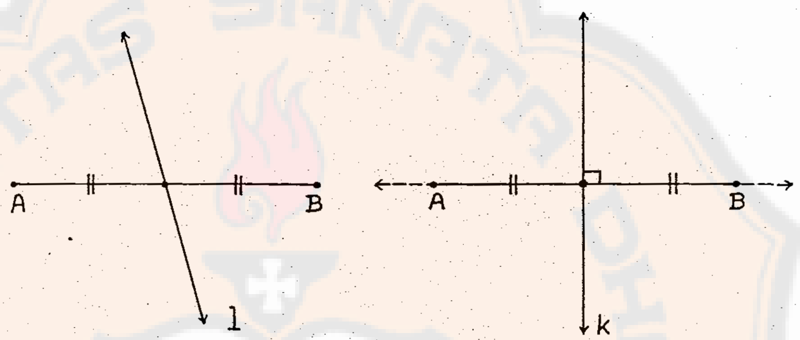
Dari (1) dan (2), disimpulkan bahwa

$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ (sifat transitif).■

Definisi 3. 9. Titik tengah $\overline{AB}$ adalah suatu titik, sebut C, yang terletak di antara A dan B, sedemikian sehingga $\overline{AC} \cong \overline{CB}$.

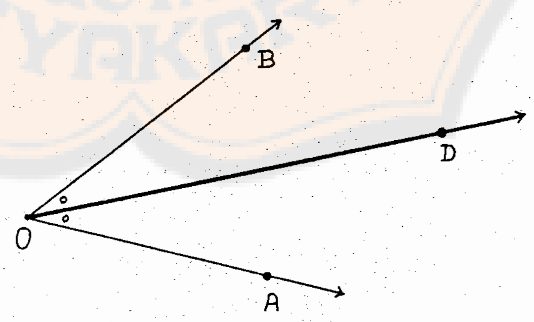


Definisi 3.10. *Garis bagi suatu ruas garis* adalah garis yang melalui titik tengah ruas garis dan tidak memuat ruas garis tersebut. Apabila garis bagi itu tegak lurus pada ruas garis[8], maka garis bagi itu disebut *sumbu ruas garis tersebut.*



Garis l merupakan garis bagi $\overline{AB}$ dan garis k merupakan sumbu $\overline{AB}$.

Definisi 3.11. *Garis bagi* $\angle$ AOB (bukan sudut nol) adalah suatu sinar garis $\overrightarrow{OD}$ pada daerah dalam $\angle$ AOB sedemikian sehingga $\angle$ AOD $\cong$ $\angle$ DOB.



---

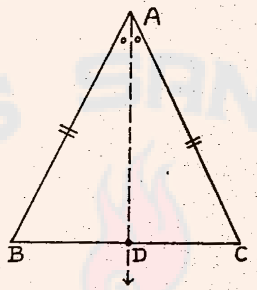
8 Garis tegak lurus suatu ruas garis berarti garis tegak lurus garis pemuat ruas garis tersebut.

Teorema 3. 3. Sudut-sudut di hadapan sisi-sisi yang kongruen pada suatu segitiga samakaki akan kongruen juga.

Bukti:

Diketahui $\triangle$ ABC samakaki dengan $\overline{AB} \cong \overline{AC}$.

Akan dibuktikan $\angle$ ABC $\cong$ $\angle$ ACB.



Digambar garis bagi $\angle$ BAC yang memotong $\overline{BC}$ di titik D sehingga menurut Def.3.11 $\angle$ BAD $\cong$ $\angle$ CAD.

Perhatikan $\triangle$ ABD dan $\triangle$ ACD,

$\overline{AB} \cong \overline{AC}$ (diketahui),

$\angle$ BAD $\cong$ $\angle$ CAD (Def.3.11),

$\overline{AD} \cong \overline{AD}$ (sifat refleksif),

sehingga menurut Teo.3.1 disimpulkan $\triangle$ ABD $\cong$ $\triangle$ ACD.

Menurut Def.3.8 $\angle$ ABD $\cong$ $\angle$ ACD, dan karena BDC dan CDB maka berarti $\angle$ ABC $\cong$ $\angle$ ACB.■

Akibat: $\angle$ ADB $\cong$ $\angle$ ADC, padahal keduanya saling bersisian maka menurut Teo.2.9 $\angle$ ADB dan $\angle$ ADC masing-masing adalah sudut siku-siku.

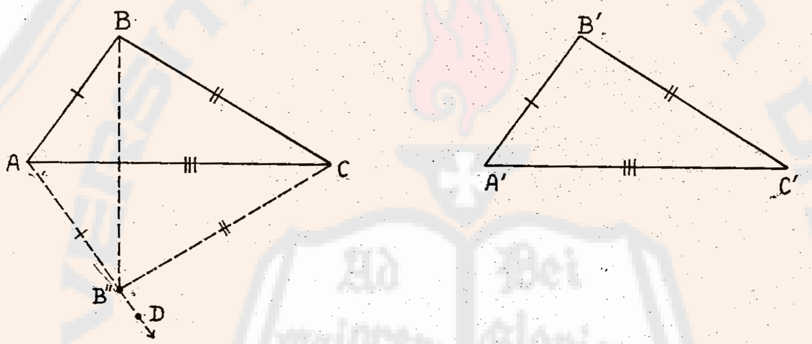
Teorema 3. 4. (Sisi-Sisi-Sisi: S-S-S).

Jika dalam Δ ABC dan Δ A'B'C', $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$, $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$, dan $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$, maka Δ ABC $\cong$ Δ A'B'C'.

Bukti:

Diketahui dua segitiga, Δ ABC dan Δ A'B'C' dengan $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$, $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$, dan $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$.

Akan dibuktikan Δ ABC $\cong$ Δ BCD.



Ditentukan titik D tidak sepihak dengan titik B terhadap $\overline{AC}$ sehingga

$\angle$ CAD $\cong$ $\angle$ C'A'B' (1)

Kemudian ditentukan B" pada $\overrightarrow{AD}$, sedemikian sehingga

$\overline{AB''} \cong \overline{A'B'}$ (2)

maka $\angle$C'A'B' $\cong$ $\angle$CAB" (3)

Dari (2), (3), dan $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$, maka berdasarkan Teo.3.1, dapat disimpulkan Δ AB"C $\cong$ Δ A'B'C' (4)

Dalam Δ ABB", $\overline{AB''} \cong \overline{A'B'}$,

Padahal diketahui $\overline{A'B'} \cong \overline{AB}$, maka $\overline{AB''} \cong \overline{AB}$. (5)

Jadi. menurut Def.3.2 Δ ABB" merupakan segitiga samakaki sehingga menurut Teo.3.3 $\angle$ABB" $\cong$ $\angle$AB"B (6)

Perhatikan Δ CBB",

dari (4) dengan berdasarkan Def.3.8 didapatkan

$\overline{B''C} \cong \overline{B'C'}$,

padahal $\overline{B'C'} \cong \overline{BC}$, maka dengan sifat transitif

didapatkan $\overline{B''C} \cong \overline{BC}$. (7)

Jadi, menurut Def.3.2 Δ CBB" merupakan segitiga

samakaki, sehingga menurut Teo.3.3

$\angle CBB'' \cong \angle CB''B$ (8)

Berdasarkan (4), (6), dan Def.2.17 maka

$m\angle ABB'' = m\angle AB''B$

$m\angle CBB'' = m\angle CB''B$

Perhatikan gambar di atas,

$m\angle ABB'' + m\angle CBB'' = m\angle ABC$ dan

$m\angle AB''B + m\angle CB''B = m\angle AB''C$,

jadi $m\angle ABB'' + m\angle CBB'' = m\angle AB''C$, sehingga

$m\angle AB''C = m\angle ABC$.

Maka menurut Def.2.17 dapat disimpulkan

$\angle AB''C \cong \angle ABC$. (9)

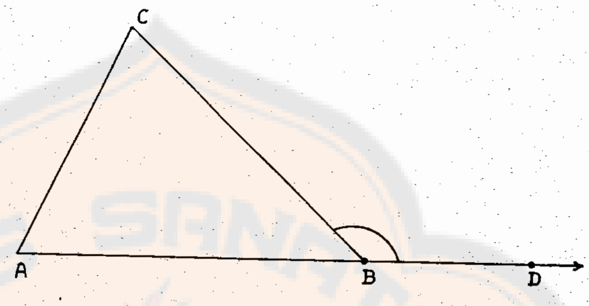
Perhatikan Δ AB"C dan Δ ABC, menurut (5), (7), (9)

dan Teo.3.1, maka dapat disimpulkan

$\Delta AB''C \cong \Delta ABC$. (10)

Dari (4) dan (10), disimpulkan $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$.∎

Definisi 3.12. *Sudut luar* suatu segitiga adalah sudut yang bersisian dengan suatu sudut dalam segitiga.



$\angle$ CBD adalah sudut luar yang bersisian dengan $\angle$ ABC

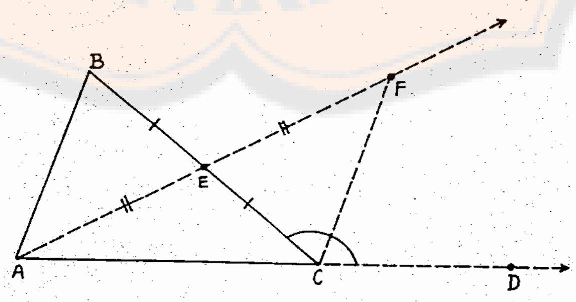
Teorema 3. 5. (Teorema Sudut Luar).

Ukuran suatu sudut luar pada segitiga lebih besar daripada ukuran suatu sudut dalam segitiga yang tidak bersisian dengannya.

Bukti:

Diketahui suatu Δ ABC dengan $\angle$ BCD suatu sudut luarnya.

Akan dibuktikan bahwa m$\angle$ BCD > m$\angle$ ABC.



Ditentukan titik tengah $\overline{BC}$ yaitu E,

sehingga menurut Def.3.9 $\overline{BE} \cong \overline{CE}$. (1)

Digambar $\overrightarrow{AE}$, dan ditentukan F yang berlainan pihak dengan A terhadap $\overline{BC}$ sedemikian sehingga $\overline{EF} \cong \overline{EA}$. (2)

Menurut Def.2.26 $\angle$ BEA dan $\angle$ CEF adalah pasangan sudut bertolak belakang, jadi menurut Teo.2.10

$\angle$ BEA $\cong$ $\angle$ CEF (3)

Berdasarkan Teo.3.1, maka dari (1), (2), dan (3) didapatkan, Δ BEA $\cong$ Δ CEF.

Sehingga menurut Def 3.8 didapatkan $\angle$ ABE $\cong$ $\angle$ ECF, maka menurut Def.2.17 didapatkan m$\angle$ ABE = m$\angle$ ECF.

Padahal menurut akibat Aks.20.b,

m$\angle$ BCD = m$\angle$ ECF + m$\angle$ FCD,

jadi m$\angle$ BCD = m$\angle$ ABE + m$\angle$ FCD,

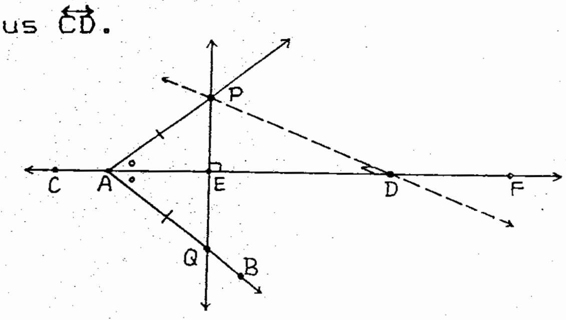
sehingga menurut Def.2.18 m$\angle$ BCD > m$\angle$ ABE, dan karena BEC, maka m$\angle$ BCD > m$\angle$ ABC.■

Teorema 3. 6. Pada suatu titik di luar garis yang diketahui, dapat ditarik tepat satu garis yang melalui titik tersebut dan tegak lurus garis yang diketahui.

Bukti:

Diketahui $\overleftrightarrow{CD}$ dan titik P di luar $\overleftrightarrow{CD}$.

Akan dibuktikan bahwa terdapat tepat satu garis melalui P dan tegak lurus $\overleftrightarrow{CD}$.



Menurut Aks.2, maka pada $\overleftrightarrow{CD}$ terdapat paling sedikit dua titik, kemudian dipilih salah satu di antaranya yaitu titik A.

Digambar $\overrightarrow{AB}$ yang berlainan pihak dengan P terhadap $\overleftrightarrow{CD}$, sedemikian sehingga $\angle$ DAB $\cong$ $\angle$ DAP.

Ditentukan titik Q pada $\overrightarrow{AB}$ sedemikian sehingga AP = AQ.

Maka $\overleftrightarrow{PQ}$ memotong $\overleftrightarrow{CD}$, sebut E.

Menurut akibat Teo.3.3, maka $\overleftrightarrow{PQ} \perp \overleftrightarrow{AE}$, berarti $\overleftrightarrow{PQ} \perp \overleftrightarrow{CD}$.

Andaikan terdapat garis lain, misalnya $\overleftrightarrow{PD}$ dan $\overleftrightarrow{PD} \perp \overleftrightarrow{CD}$.

Berarti $\angle$ PDF siku-siku, padahal $\angle$ PED juga siku-siku, maka m$\angle$ PDF = m$\angle$ PED.

Menurut Teo. 3.5 m$\angle$ PDF > m$\angle$ PED, sehingga terjadi pertentangan.

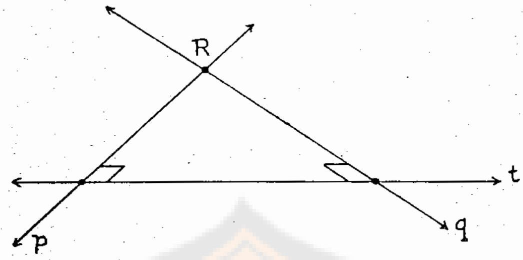
Kesimpulan: $\overleftrightarrow{PQ}$ satu-satunya garis yang melalui P dan tegak lurus $\overleftrightarrow{CD}$.■

Teorema 3. 7. Jika dua garis yang berbeda masing-masing tegak lurus terhadap garis yang sama, maka kedua garis tersebut sejajar.

Bukti:

Diketahui tiga garis, yaitu p, q, dan t dengan $p \perp t$ dan $q \perp t$. Akan dibuktikan bahwa $p \parallel q$.

Andaikan p tidak sejajar q, maka p dan q akan berpotongan di suatu titik, sebut R.



Jadi melalui R di luar t terdapat dua garis yang tegak lurus padanya. Hal ini bertentangan dengan Teo.3.6.

Kesimpulan: p ∥ q.■

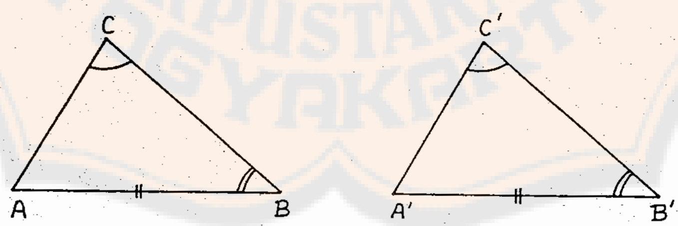
Teorema 3. 8. (Sisi-Sudut-Sudut: S-Sd-Sd).

Jika dalam Δ ABC dan Δ A′B′C′, $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$, ∠ ABC ≅ ∠ A′B′C′, dan ∠ BCA ≅ ∠ B′C′A′, maka Δ ABC ≅ Δ A′B′C′.

Bukti:

Diketahui dua segitiga Δ ABC dan Δ A′B′C′ dengan $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$, ∠ ABC ≅ ∠ A′B′C′, dan ∠ BCA ≅ ∠ B′C′A′.

Akan dibuktikan Δ ABC ≅ Δ A′B′C′ dengan membuktikan $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$.



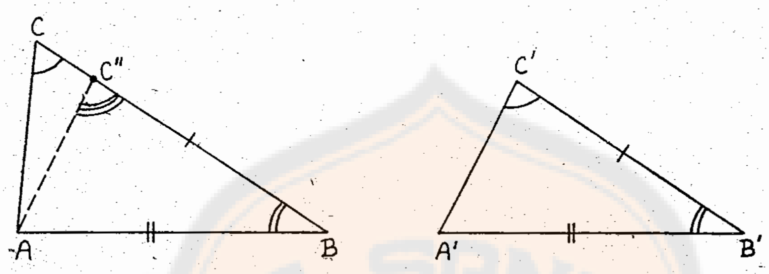
Andaikan $\overline{BC} \ncong \overline{B'C'}$, berarti BC ≠ B′C′.

Maka terdapat dua kemungkinan hubungan yaitu: BC > B′C′ atau BC < B′C.

Andaikan BC > B′C′,

berarti ada titik C" di antara B dan C,

sehingga BC" = B′C′,



maka menurut Def.2.15 didapatkan $\overline{BC''} \cong \overline{B'C'}$.

Sehingga berdasarkan Teo.3.1 disimpulkan

Δ ABC" ≅ Δ A′B′C′,

jadi menurut Def.3.8 ∠ BC"A ≅ ∠ B′C′A′.

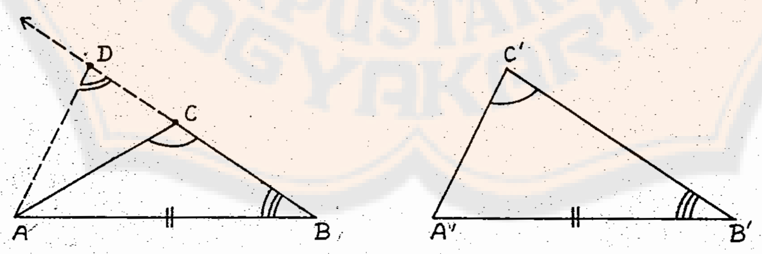
Padahal ∠ B′C′A′ ≅ ∠ BCA, maka ∠ BC"A ≅ ∠ BCA.

Hasil ini tidak mungkin, sebab pada Δ ACC", ∠ BC"A suatu sudut luar. jadi menurut Teo.3.5 m∠ BC"A > m∠ BCA.

Sehingga tidak benar bahwa BC > B′C′.

Andaikan BC < B′C′,

berarti ada titik D pada $\overrightarrow{BC}$, sehingga $\overline{BD} \cong \overline{B'C'}$.



Menurut Teo.3.1 Δ ABD ≅ Δ A′B′C′,

jadi menurut Def.3.8 didapatkan ∠ BDA ≅ ∠ B′C′A′.

Padahal ∠ B′C′A′ ≅ ∠ BCA, maka ∠ BDA ≅ ∠ BCA.

Hasil ini tidak mungkin, sebab dalam Δ ACD, ∠ BCA suatu sudut luar. Jadi menurut Teo.3.5 m∠ BCA > m∠ BDA.

Sehingga tidak benar bahwa $BC < B'C'$. Jadi $BC = B'C'$.

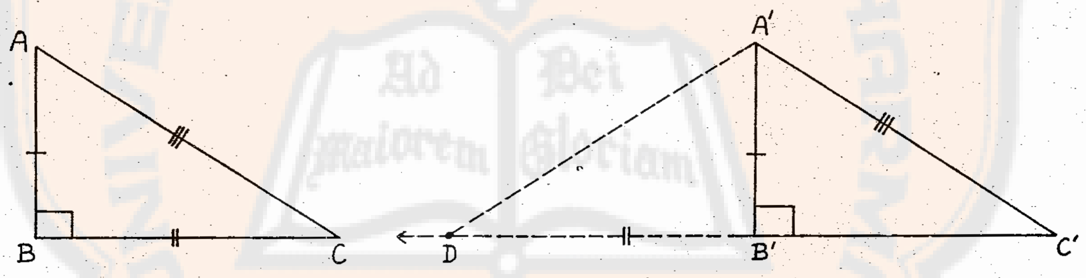
Sehingga menurut Teo.3.1, disimpulkan $\Delta\ ABC \cong \Delta\ A'B'C'$.■

Teorema 3. 9. (Sisi miring- Sisi siku-siku).

Jika pada dua segitiga siku-siku, $\Delta\ ABC$ dan $\Delta\ A'B'C'$ dengan $\angle\ ABC$ dan $\angle\ A'B'C'$ siku-siku serta $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$ dan $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$, maka $\Delta\ ABC \cong \Delta\ A'B'C'$.

Bukti:

Diketahui dua segitiga siku-siku, $\Delta\ ABC$ dan $\Delta\ A'B'C'$ dengan $\angle\ ABC$ dan $\angle\ A'B'C'$ siku-siku.



Ditentukan titik D pada $\overleftrightarrow{C'B'}$ yang berlainan pihak dengan C′ terhadap $\overleftrightarrow{A'B'}$, sedemikian sehingga

$\overline{B'D} \cong \overline{BC}$. (1)

Menurut Def.2.25 $\angle\ A'B'C'$ dan $\angle\ A'B'D$ saling bersisian, maka saling berpelurus.

Padahal $\angle\ A'B'C$ siku-siku,

maka menurut Def.2.23 dan Def.2.20 $\angle\ A'B'D$ siku-siku.

Sehingga menurut akibat Def.2.18 $\angle\ A'B'D \cong \angle\ ABC$. (2)

Berdasarkan (1), (2), dan diketahui $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$, maka menurut Teo.3.1 dapat disimpulkan

$\triangle ABC \cong \triangle A'B'D.$ (3)

Sehingga menurut Def.3.8 $\overline{AC} \cong \overline{A'D}$.

Padahal $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$, jadi

$\overline{A'D} \cong \overline{A'C'}$ (sifat transitif) (4)

Karena $\overline{A'B'} \cong \overline{A'B'}$, (2), dan (4), maka dengan Teo.3.8 disimpulkan

$\triangle A'B'D \cong \triangle A'B'C'.$ (5)

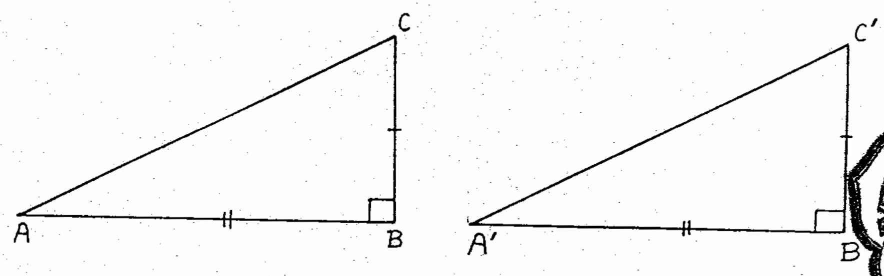
Dari (3) dan (5), dengan sifat transitif didapatkan

$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'.$■

Teorema 3.10. (Sisi siku-siku - Sisi siku-siku). Jika pada dua segitiga siku-siku, $\triangle ABC$ dan $\triangle A'B'C'$ dengan $\angle ABC$ dan $\angle A'B'C'$, siku-siku serta $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$ dan $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$, maka $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

Bukti:

Diketahui dua segitiga $\triangle ABC$ dan $\triangle A'B'C'$ dengan $\angle ABC$ dan $\angle A'B'C'$ siku-siku dan $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$ serta $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$.



Menurut akibat Def.2.20, maka $\angle ABC \cong \angle A'B'C'$,

sehingga menurut Teo.3.1 dapat disimpulkan

$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.■

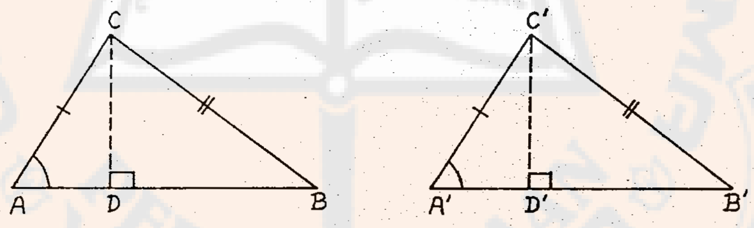
Teorema 3.11. (Sisi-Sisi-Sudut: S-S-Sd).

Jika dalam $\triangle ABC$ dan $\triangle A'B'C'$, $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$, $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$, dan $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$ dengan syarat sudut-sudut di hadapan $\overline{AC}$ dan $\overline{A'C'}$ harus sejenis, keduanya tumpul atau keduanya lancip, maka $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

Bukti:

Diketahui dua segitiga $\triangle ABC$ dan $\triangle A'B'C'$ dengan $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$, $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$, dan $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$.

Akan dibuktikan $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.



Dibuat garis tinggi-garis tinggi $\overline{CD}$ dan $\overline{C'D'}$.

Perhatikan $\triangle ADC$ dan $\triangle A'D'C'$,

$\angle BAC \cong \angle B'A'C'$,

$\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$,

$\angle CDA \cong \angle C'D'A'$ (akibat Def.2.20),

sehingga menurut Teo.3.8 dapat disimpulkan

$\triangle ADC \cong \triangle A'D'C'$.

Menurut Def.3.8, maka didapatkan

$\overline{CD} \cong \overline{C'D'}$ dan $\overline{AD} \cong \overline{A'D'}$. (1)

Perhatikan Δ CBD dan Δ C'B'D',

$\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$ dan $\overline{CD} \cong \overline{C'D'}$,

sehingga menurut Teo.3.9 dapat disimpulkan

Δ CBD $\cong$ Δ C'B'D'.

Maka menurut Def.3.8 didapatkan $\overline{DB} \cong \overline{D'B'}$ (2)

Dari (1) dan (2), berdasarkan Def.2.15, maka

didapatkan AD = A'D' dan DB = D'B'

Jadi AD + DB = A'D' + D'B'

atau AB = A'B',

maka menurut Def.2.15 didapatkan bahwa $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$. (3)

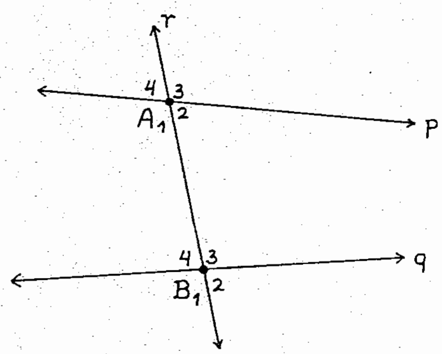
Jadi berdasarkan Teo.3.4 dapat disimpulkan bahwa

Δ ABC $\cong$ Δ A'B'C'.■

Teorema ini juga berlaku untuk kejadian Δ ABC tumpul dengan $\angle$ BAC tumpul atau $\angle$ ABC tumpul dengan bukti yang analog.

3.3. Relasi Dua Sudut dan Kesejajaran

Apabila dua garis yang berbeda dipotong oleh suatu garis lain, maka akan terbentuk pasangan-pasangan sudut berikut.

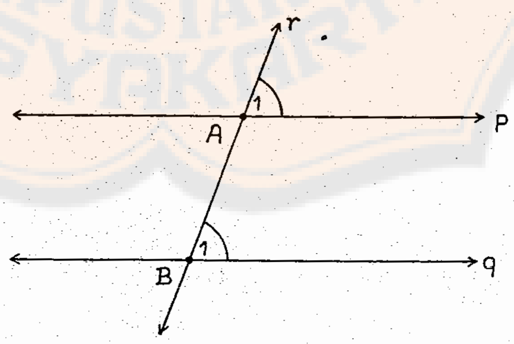


1. *Pasangan sudut sehadap.* Contoh: $\angle A_1$ dan $\angle B_1$.
2. *Pasangan sudut sepihak.*
   a. *Pasangan sudut dalam sepihak.*
      Contoh: $\angle A_1$ dan $\angle B_4$.
   b. *Pasangan sudut luar sepihak.*
      Contoh: $\angle A_3$ dan $\angle B_2$.
3. *Pasangan sudut berseberangan.*
   a. *Pasangan sudut dalam berseberangan.*
      Contoh: $\angle A_1$ dan $\angle B_3$.
   b. *Pasangan sudut luar berseberangan.*
      Contoh: $\angle A_3$ dan $\angle B_1$.

Teorema 3.12. Jika dua garis berbeda dipotong oleh suatu garis lain, maka setiap pasangan sudut sehadap saling kongruen bila dan hanya bila kedua garis itu sejajar.

Bukti:

Diketahui p dan q adalah dua garis berbeda yang dipotong oleh garis r.

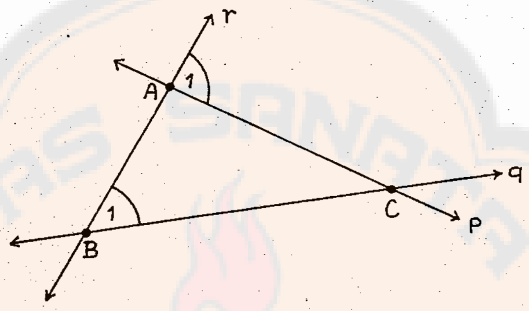


Bukti 1.: Jika setiap pasang sudut sehadapnya saling kongruen, maka p ∥ q.

Diketahui sepasang sudut sehadap, $\angle A_1$ dan $\angle B_1$, dan $\angle A_1 \cong \angle B_1$ sehingga menurut Def.2.17 $m\angle A_1 = m\angle B_1$.

Andaikan p tidak sejajar q,

berarti p dan q berpotongan di suatu titik, sebut C.



Sehingga terbentuklah Δ ABC dengan $\angle A_1$ suatu sudut luarnya, maka menurut Teo.3.5 didapatkan

$m\angle A_1 > m\angle B_1$.

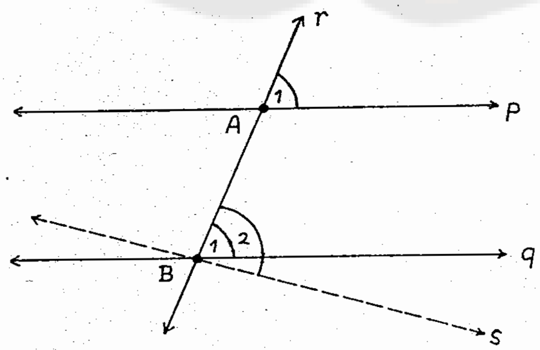
Bertentangan dengan $m\angle A_1 = m\angle B_1$.

Kesimpulan: p $\parallel$ q.

<u>Bukti 2.</u>: Jika p $\parallel$ q, maka setiap pasangan sudut sehadap saling kongruen.

Diketahui sepasang sudut sehadap, $\angle A_1$ dan $\angle B_1$.

Andaikan $\angle A_1 \ncong \angle B_1$, berarti ada $\angle B_2$ sedemikian sehingga $\angle A_1 \cong \angle B_2$.



Titik B terletak pada garis s.

Karena $\angle A_1 \cong \angle B_2$, maka menurut bukti 1., $p \parallel s$.

Padahal $p \parallel q$, jadi ada dua garis melalui B di luar p dan sejajar p.

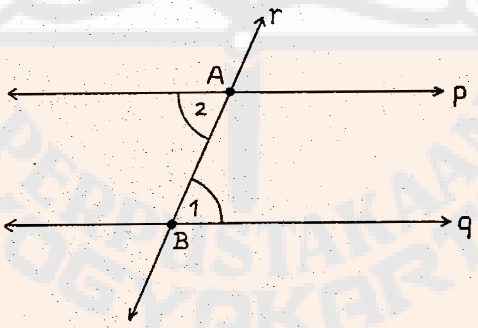
Bertentangan dengan Aks.22.

Kesimpulan: $\angle A_1 \cong \angle B_1$. ■

Teorema 3.13. Jika dua garis berbeda dipotong oleh suatu garis lain, maka setiap pasangan sudut dalam berseberangan saling kongruen bila dan hanya bila kedua garis itu sejajar.

Bukti:

Diketahui p dan q adalah dua garis berbeda yang dipotong oleh garis r.

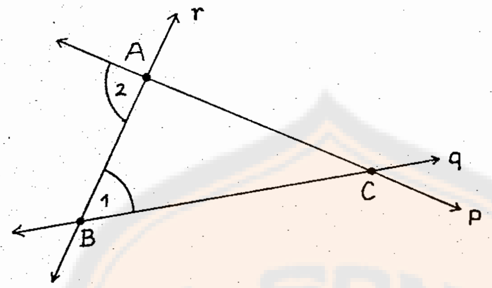


Bukti 1.: Jika setiap pasangan sudut dalam berseberangan saling kongruen, maka kedua garis itu sejajar.

Diketahui sepasang sudut dalam berseberangan, $\angle A_2$ dan $\angle B_1$, dengan $\angle A_2 \cong \angle B_1$, sehingga menurut Def.2.16, didapatkan $m\angle A_2 = m\angle B_1$.

Andaikan p tidak sejajar dengan q,

berarti p dan q berpotongan di suatu titik, sebut C.



Sehingga terbentuklah $\triangle$ ABC dengan $\angle A_2$ suatu sudut luarnya, maka menurut Teo.3.5 didapatkan $m\angle A_2 > m\angle B_1$.

Bertentangan dengan $m\angle A_2 = m\angle B_1$.

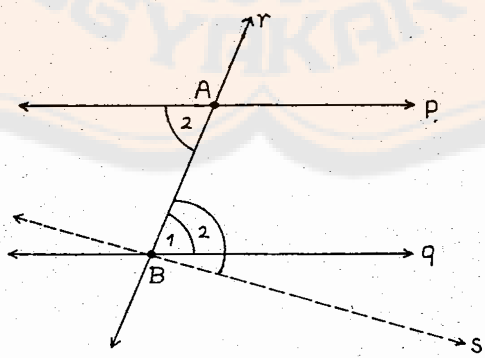
Kesimpulan: p $\parallel$ q.

Bukti 2.: Jika p $\parallel$ q, maka setiap pasangan sudut dalam berseberangan saling kongruen.

Andaikan $\angle A_2 \ncong \angle B_1$,

berarti ada $\angle B_2$ yang dibentuk oleh suatu garis s yang berpotongan dengan q di B, sedemikian sehingga

$\angle A_2 \cong \angle B_2$.



Titik B terletak pada garis s.

Karena $\angle A_2 \cong \angle B_2$, maka menurut bukti 1. p $\parallel$ s.

Padahal $p \parallel q$, jadi menurut Teo.2.11 didapatkan $s \parallel q$, sehingga s sama dengan q.

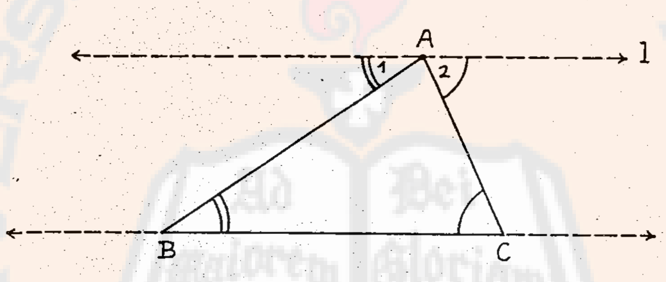
Kesimpulan: $\angle A_2 \cong \angle B_1$.■

Teorema 3.14. Jumlah ukuran sudut-sudut dalam suatu segitiga adalah 180.

Bukti:

Diketahui suatu Δ ABC.

Akan dibuktikan bahwa $m\angle BAC + m\angle ABC + m\angle ACB = 180$.



Digambaar garis l yang melalui titik A dan sejajar $\overleftrightarrow{BC}$, maka didapatkan pasangan-pasangan sudut dalam berseberangan, $\angle A_1$ dan $\angle ABC$, $\angle A_2$ dan $\angle ACB$.

Jadi menurut Teo.3.13 didapatkan

$\angle A_1 \cong \angle ABC$ dan $\angle A_2 \cong \angle ACB$,

sehingga menurut Def.2.17 didapatkan

$m\angle A_1 = m\angle ABC$ dan $m\angle A_2 = m\angle ACB$,

maka $m\angle A_1 + m\angle BAC + m\angle A_2 = 180$,

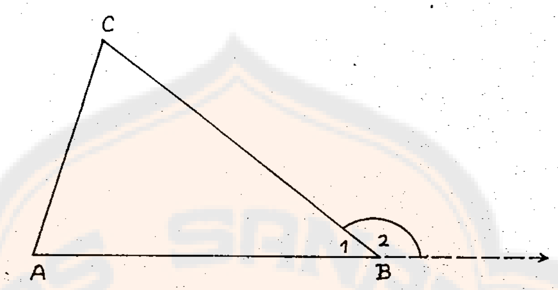
sehingga $m\angle ABC + m\angle BAC + m\angle ACB = 180$.■

Teorema 3.15. Ukuran suatu sudut luar segitiga sama dengan jumlah ukuran dua sudut dalam segitiga yang tidak bersisian dengannya.

Bukti:

Diketahui suatu Δ ABC dengan $\angle B_2$ suatu sudut luarnya.

Akan dibuktikan bahwa $m\angle B_2 = m\angle BAC + m\angle ACB$.



Menurut Teo.3.14, maka

$$m\angle BAC + m\angle B_1 + m\angle ACB = 180 \quad (1)$$

menurut Def.2.25 $\angle B_1$ dan $\angle B_2$ merupakan pasangan sudut bersisian, maka keduanya saling berpelurus.

Sehingga menurut Def.2.23 $m\angle B_1 + m\angle B_2 = 180$ (2)

Dari (1) dan (2), maka

$$m\angle BAC + m\angle B_1 + m\angle ACB = m\angle B_1 + m\angle B_2.$$

Jadi $m\angle BAC + m\angle ACB = m\angle B_2$,

atau $m\angle B_2 = m\angle BAC + m\angle ACB$.■

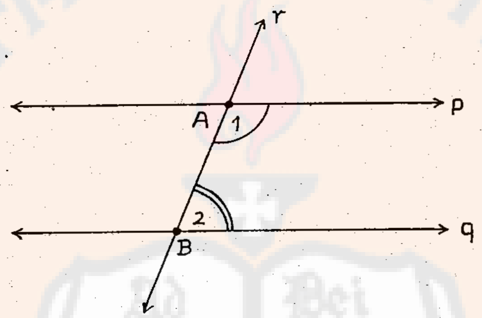
Teorema 3.16. Jika dua garis berbeda dipotong oleh suatu garis lain, maka setiap pasangan sudut luar berseberangan saling kongruen bila dan hanya bila kedua garis itu sejajar.

Bukti teorema ini analog dengan bukti Teo.3.15.

Teorema 3.17. Jika dua garis berbeda dipotong oleh suatu garis lain, maka setiap pasangan sudut dalam sepihak saling berpelurus bila dan hanya bila kedua garis itu saling sejajar.

Bukti:

Diketahui p dan q adalah dua garis yang dipotong oleh garis r.



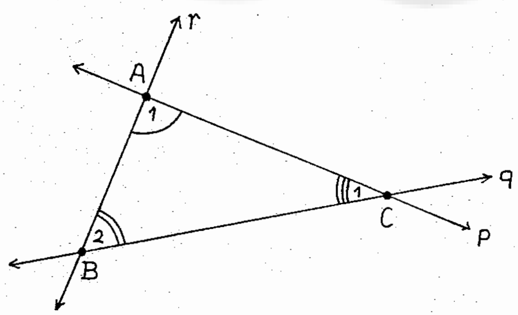
Bukti 1.: Jika setiap pasangan sudut dalam sepihak saling berpelurus, maka kedua garis itu sejajar.

Diketahui sepasang sudut dalam sepihak, $\angle A_1$ dan $\angle B_2$, dengan $m\angle A_1 + m\angle B_2 = 180$.

Andaikan p tidak sejajar q,

berarti p dan q akan berpotongan di suatu titik sebut C.

Sehingga terbentuklah Δ ABC.



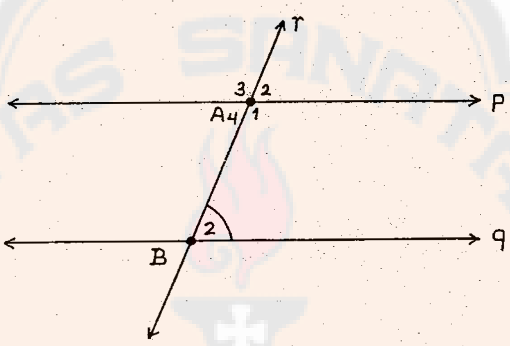
Menurut Teo.3.14 $m\angle A_1 + m\angle B_2 + m\angle C_1 = 180$,

sehingga $m\angle A_1 + m\angle B_2 = 180 - m\angle C_1$.

Bertentangan dengan $m\angle A_1 + m\angle B_2 = 180$.

Kesimpulan: $p \parallel q$.

Bukti 2.: Jika $p \parallel q$, maka setiap pasangan sudut dalam sepihak saling berpelurus.



Menurut Def.2.25, maka $\angle A_1$ dan $\angle A_4$ merupakan pasangan sudut bersisian, jadi kedua sudut itu saling berpelurus.

Sehingga menurut Def.2.23 $m\angle A_1 + m\angle A_4 = 180$ (1)

Menurut Teo.3.13 $\angle A_4 \cong \angle B_2$,

jadi menurut Def.2.17 didapatkan $m\angle A_4 = m\angle B_2$ (2)

Substitusi (2) ke (1) menghasilkan $m\angle A_1 + m\angle A_2 = 180$,

sehingga berdasarkan Def.2.23 $\angle A_1$ dan $\angle B_2$ saling berpelurus.■

Teorema 3.18. Jika dua garis berbeda dipotong oleh suatu garis lain, maka setiap pasangan sudut luar sepihak saling berpelurus bila dan hanya bila kedua garis itu saling sejajar.

Bukti teorema ini analog dengan bukti Teorema 3.17.

3.4. Ketidaksamaan

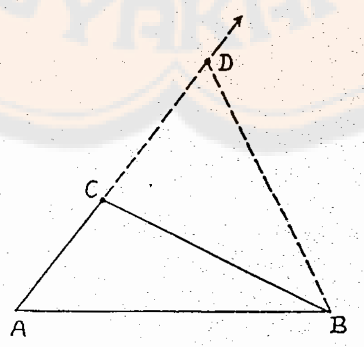
Dengan mengingat kembali sifat ketidaksamaan pada ruas garis dan sudut, maka pada bagian berikut ini akan dibahas sifat ketidaksamaan pada suatu segitiga.

Teorema 3.19. Jika dua sisi suatu segitiga tidak kongruen, maka sudut-sudut di hadapan kedua sisi tersebut juga tidak kongruen dan sudut yang lebih besar akan berhadapan dengan sisi yang lebih panjang.

Bukti:

Diketahui suatu Δ ABC dengan AB > AC.

Akan dibuktikan m$\angle$ ACB > m$\angle$ ABC.



Ditentukan titik D pada $\overrightarrow{AC}$, sedemikian sehingga AD = AB, karena AB > AC, maka D terletak pada perpanjangan $\overline{AC}$.

Maka akan terbentuk Δ ABD samakaki.

Menurut Teo.3.3 didapatkan $\angle ABD \cong \angle ADB$,

sehingga menurut Def.2.17 $m\angle ABD = m\angle ADB$ (1)

Jadi menurut akibat Aks.20.a, $m\angle ABD = m\angle ABC + m\angle CBD$,

ini berarti $m\angle ABD > m\angle ABC$ (2)

Dari (1) dan (2), maka $m\angle ADB > m\angle ABC$. (3)

Perhatikan Δ BCD dengan $\angle ACB$ suatu sudut luarnya,

maka menurut Teo.3.5 didapatkan $m\angle ACB > m\angle ADB$ (4)

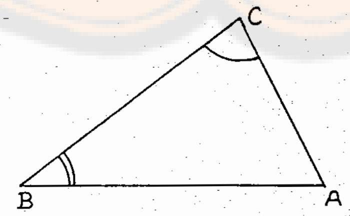
Dari (3) dan (4), maka $m\angle ACB > m\angle ABC$.■

Teorema 3.20. Jika dua sudut suatu segitiga tidak kongruen, maka sisi di hadapan kedua sudut tersebut juga tidak kongruen dan sisi yang lebih panjang akan berhadapan dengan sudut yang lebih besar.

Bukti:

Diketahui suatu Δ ABC dengan $m\angle ACB > m\angle ABC$.

Akan dibuktikan AB > AC.



Andaikan AB tidak lebih besar dari AC, maka terdapat dua kemungkinan, AB < AC atau AB = AC.

Andaikan AB = AC, maka menurut Teo.3.3 $\angle$ ACB $\cong$ $\angle$ ABC.

Hasil ini bertentangan dengan yang diketahui, jadi

AB $\neq$ AC.

Andaikan AB < AC, maka menurut Teo.3.19

$m\angle$ ACB < $m\angle$ ABC.

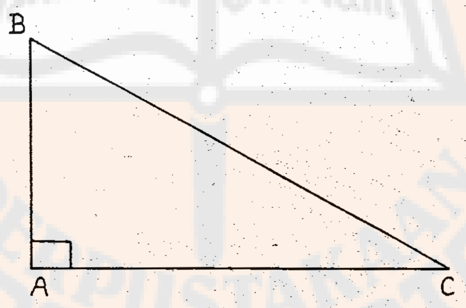
Hasil ini bertentangan dengan yang diketahui.

Kesimpulan: AB > AC.■

Akibat Th.3.20.1. Sisi miring merupakan sisi terpanjang pada suatu segitiga siku-siku.

Bukti:

Diketahui Δ ABC siku-siku, dengan $\angle$ BAC siku-siku dan $\overline{BC}$ sisi miringnya.



Menurut Teo.3.14, maka $m\angle$ BAC + $m\angle$ ABC + $m\angle$ BCA = 180,

padahal $m\angle$ BAC = 90, maka $m\angle$ ABC + $m\angle$ BCA = 90.

Berarti $m\angle$ ABC = 90 − $m\angle$ BCA dan $m\angle$ BCA = 90 − $m\angle$ ABC.

Jadi $m\angle$ ABC < $m\angle$ BAC dan $m\angle$ BCA < $m\angle$ BAC,

sehingga menurut Teo.3.20 AC < BC dan AB < BC,

dengan perkataan lain $\overline{BC}$ merupakan sisi terpanjang.■

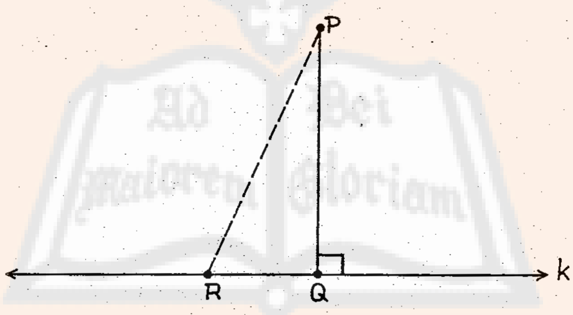
Akibat Th.3.20.2. Ruas garis terpendek yang dibentuk oleh suatu titik di luar garis yang diketahui ke garis tersebut adalah ruas garis yang tegak lurus ke garis tersebut.[9]

Bukti:

Diketahui garis k dan titik P di luar k.

Digambar $\overline{PQ} \perp k$ dengan Q adalah suatu titik pada k.

Andaikan terdapat $\overline{PR} \not\cong \overline{PQ}$ dan $PR < PQ$ dengan R adalah suatu titik pada k dan berlainan dengan Q.



Menurut akibat Teo.3.20.1, maka dalam Δ PQR siku-siku $PR > PQ$. Hal ini bertentangan dengan pengandaian di atas.

Kesimpulan: $\overline{PQ}$ adalah ruas garis terpendek.■

---

9 Ruas garis tegak lurus suatu garis/sinar garis/ruas garis, artinya garis pemuat ruas garis tersebut tegak lurus ke garis/sinar garis/ruas garis yang diketahui. Ruas garis tegak lurus dari A ke garis g dimaksudkan $\overline{AB}$ yang tegak lurus ke g dengan B pada g.

Definisi 3.13. Jarak antara suatu titik di luar garis yang diketahui ke garis tersebut adalah ukuran ruas garis tegak lurus dari titik ke garis tersebut.

Definisi 3.14. Jarak antara dua garis sejajar adalah ukuran ruas garis tegak lurus dari suatu titik pada garis pertama ke garis kedua.

Teorema 3.21 (Teorema Ketidaksamaan Segitiga).

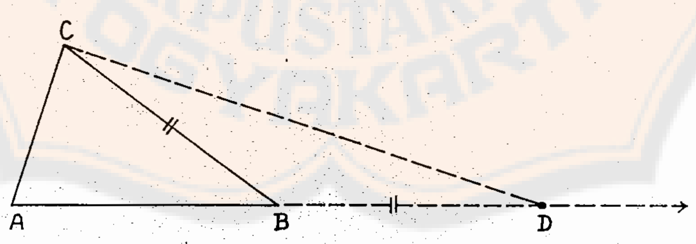
Jumlah panjang dua sisi dari suatu segitiga lebih besar daripada panjang sisi lainnya.

Bukti:

Diketahui suatu Δ ABC.

Andaikan pada $\overrightarrow{AB}$ terdapat D sedemikian sehingga B terletak di antara A dan D serta BD = CB.

Akan dibuktikan AB + CB > AC.



AD = AB + BD, maka AD = AB + CB (1)

sehingga $m\angle$ ACD = $m\angle$ ACB + $m\angle$ BCD,

berarti $m\angle$ ACD > $m\angle$ BCD (2)

Berdasarkan pengandaian di atas BD = CB.

Menurut Def.2.15, maka $\overline{BD} \cong \overline{CB}$,

berarti Δ CBD suatu segitiga samakaki,

sehingga menurut Teo.3.3 $\angle$ BCD $\cong$ $\angle$ BDC,

dan menurut Def.2.17 $m\angle$ BCD $=$ $m\angle$ BDC (3)

Dari (2) dan (3), didapatkan

$m\angle$ ACD $>$ $m\angle$ BDC atau $m\angle$ ACD $>$ $m\angle$ ADC.

Sehingga berdasarkan Teo.3.20 didapatkan

AD $>$ AC (4)

Dari (1) dan (4), maka disimpulkan AB + CB $>$ AC.■

Akibat Th.3.21. Selisih panjang dua sisi pada suatu segitiga lebih kecil daripada panjang sisi ketiga.

Bukti:

Berdasarkan hasil pembuktian Teo.3.21, maka

AB + CB $>$ AC, maka AB $>$ AC $-$ CB, atau

AC $-$ CB $<$ AB.■

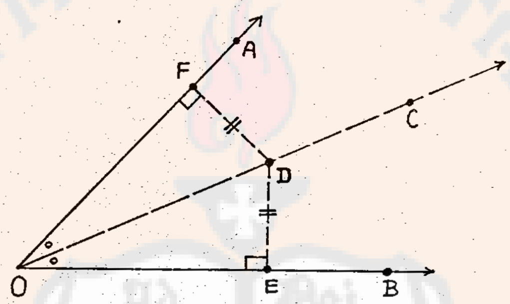
3.5. Garis Bagi dan Sumbu.

Teorema 3.22. Titik-titik pada garis bagi suatu sudut berjarak sama terhadap kaki-kaki sudutnya.

Bukti:

Diketahui $\angle$ AOB dengan $\overrightarrow{OC}$ adalah garis baginya.

Akan dibuktikan bahwa setiap titik D pada $\overrightarrow{OC}$ berjarak sama terhadap $\overrightarrow{OA}$ dan $\overrightarrow{OB}$.



Ditentukan D pada $\overrightarrow{OC}$, dan digambar $\overline{DF} \perp \overrightarrow{OA}$, dan $\overline{DE} \perp \overrightarrow{OB}$.

Perhatikan Δ DOF dan Δ DOE,

$\overline{OD} \cong \overline{OD}$ (sifat refleksif),

$\angle$ DFO $\cong$ $\angle$ DEO (akibat Def.2.20),

$\angle$ DOF $\cong$ $\angle$ DOE (Def.3.11),

sehingga menurut Teo.3.8 dapat disimpulkan Δ DOF $\cong$ Δ DOE, jadi menurut Def.3.8 didapatkan $\overline{DE} \cong \overline{DF}$, dan menurut Def.2.15 disimpulkan DE = DF.

Kesimpulan: setiap titik yang terletak pada garis bagi berjarak sama ke kaki-kaki sudut yang bersangkutan.■

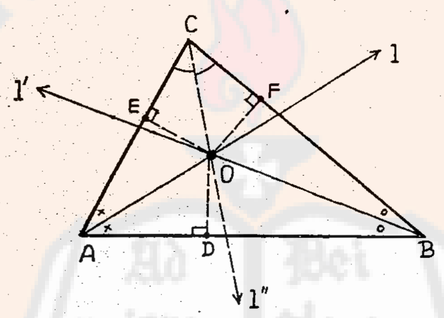
Suatu garis bagi pada segitiga adalah garis bagi pada suatu sudut segitiga.

Teorema 3.23. Ketiga garis bagi pada suatu segitiga setitik dan titik sekutu tersebut berjarak sama terhadap sisi-sisi segitiga.

Bukti:

Diketahui suatu Δ ABC dengan l, l′, dan l" secara berturut-turut adalah garis bagi-garis bagi pada $\angle$ BAC, $\angle$ ABC, dan $\angle$ ACB

Akan dibuktikan bahwa l, l′, dan, l" setitik dan titik sekutu tersebut berjarak sama ke ketiga sisi Δ ABC.



Misalkan garis l dan l′ berpotongan di titik O, maka harus ditunjukkan bahwa garis l" juga melalui O.

Selanjutnya digambar $\overline{OD} \perp \overline{AB}$, $\overline{OE} \perp \overline{BC}$, dan $\overline{OF} \perp \overline{BC}$, menurut Teo.3.22 maka OD = OE dan OD = OF, sehingga dengan sifat transitif didapatkan OE = OF.

Jadi menurut Teo.3.22 O terletak pada l" atau garis l" melalui O.∎

Teorema ini juga berlaku untuk Δ ABC tumpul dan Δ ABC siku-siku dengan bukti yang analog.

Teorema 3.24. Suatu titik terletak pada sumbu ruas garis bila dan hanya bila titik tersebut berjarak sama dari ujung-ujung ruas garis.

Bukti:

Diketahui l adalah sumbu $\overline{AB}$ yang melalui titik tengah, C

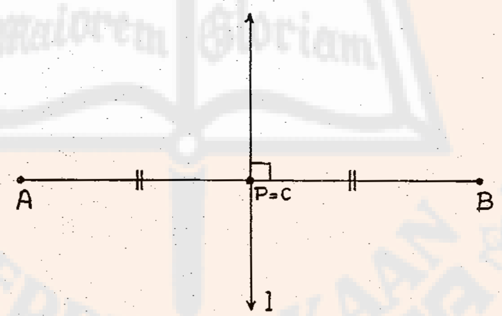
Bukti 1.: Setiap titik yang terletak pada l akan berjarak sama ke A dan B.

Misalkan P suatu titik pada l, maka terdapat dua kemungkinan:

1. Titik P sama dengan C.
2. Titik P dan C berlainan.

Akan dibuktikan bahwa PA = PB.

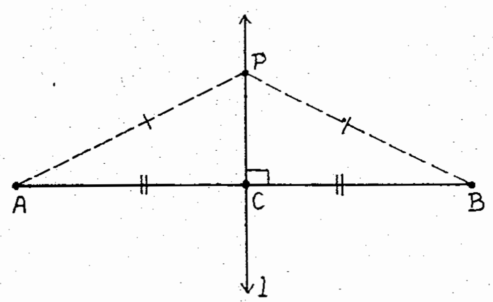
1. Misalkan Andaikan P = C, berarti P adalah titik tengah $\overline{AB}$.



Jadi menurut Def.3.9 $\overline{PA} \cong \overline{PB}$,

sehingga menurut Def.2.15 didapatkan PA = PB.

2. Misalkan P dan C berlainan.



Perhatikan $\triangle$ APC dan $\triangle$ BPC,

$\overline{PC} \cong \overline{PC}$ (sifat refleksif),

$\angle ACP \cong \angle BCP$ (akibat Def.2.20),

$\overline{AC} \cong \overline{BC}$ (Def.3.9),

sehingga menurut Teo.3.1 dapat disimpulkan

$\triangle APC \cong \triangle BPC$.

Jadi menurut Def.3.8, didapatkan $\overline{PA} \cong \overline{PB}$,

sehingga menurut Def.2.15 PA = PB.■

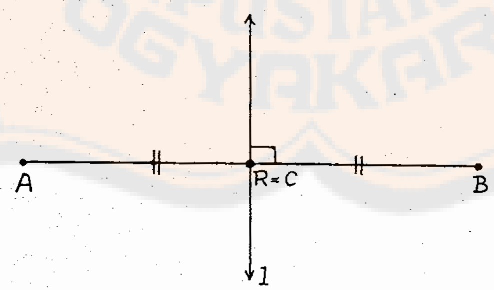
<u>Bukti 2.</u>: Jika suatu titik berjarak sama ke titik ujung $\overline{AB}$, maka titik tersebut terletak pada l.

Diketahui titik R sedemikian sehingga RA = RB, maka terdapat dua kemungkinan kedudukan R:

1. Titik R pada $\overline{AB}$.
2. Titik R tidak pada $\overline{AB}$.

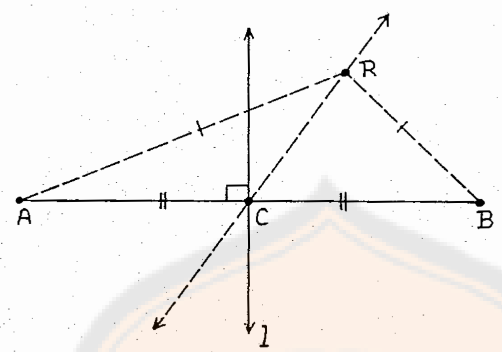
Akan dibuktikan bahwa R terletak pada l.

1. Misalkan R pada $\overline{AB}$.



maka R = C adalah titik tengah $\overline{AB}$, berarti R terletak pada garis l.

2. Misalkan R tidak pada $\overline{AB}$, kemudian digambar $\overleftrightarrow{RC}$.



Perhatikan $\triangle$ ARC dan $\triangle$ BRC,

- $\overline{RC} \cong \overline{RC}$ (sifat refleksif) ,

  $\overline{AC} \cong \overline{BC}$ (Def.3.9),

  $\overline{RA} \cong \overline{RB}$,

sehingga menurut Teo.3.4 disimpulkan $\triangle$ ARC $\cong$ $\triangle$ BRC.

Jadi menurut Def.3.8 didapatkan $\angle$ ACR $\cong$ $\angle$ BCR.

Padahal menurut Def.2.25 kedua sudut itu saling bersisian, maka keduanya saling berpelurus.

Jadi, menurut Teo.2.9 $\angle$ ACR dan $\angle$ BCR masing-masing siku-siku, berarti $\overleftrightarrow{RC} \perp \overline{AB}$.

Padahal $l \perp \overline{AB}$, maka menurut Teo.3.6 $\overleftrightarrow{RC}$ sama dengan l.■

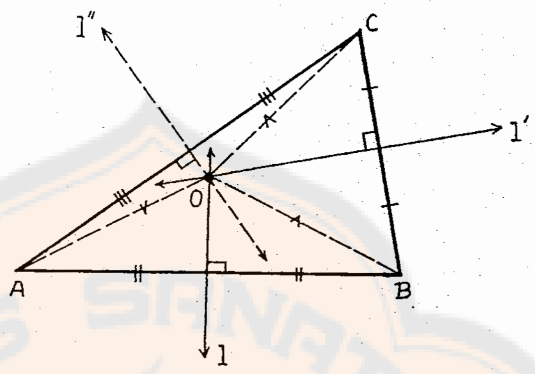
Sumbu-sumbu pada segitiga. Suatu sumbu pada segitiga adalah sumbu dari suatu sisi segitiga.

Teorema 3.25. Ketiga sumbu pada suatu segitiga setitik dan titik sekutunya berjarak sama dari ketiga titik sudut segitiga.

Bukti:

Diketahui $\triangle$ ABC dengan l, l', dan l'' berturut-turut adalah sumbu-sumbu pada $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, dan $\overline{AC}$.

Akan dibuktikan bahwa l, l′, dan l" setitik di titik O, sehingga OA = OB = OC.



Dalam Δ ABC, l $\perp$ $\overline{AB}$ dan l′ $\perp$ $\overline{BC}$.

Andaikan l $\parallel$ l′, maka menurut Teo.3.7 $\overleftrightarrow{AB}$ sama dengan $\overleftrightarrow{BC}$.

Padahal $\overleftrightarrow{AB}$ dan $\overleftrightarrow{BC}$ berpotongan di B.

Jadi l dan l′ tidak sejajar, misalkan l dan l′ berpotongan di titik O, maka menurut Teo.3.24

OA = OB dan OB = OC,

sehingga OA = OC (sifat transitif).

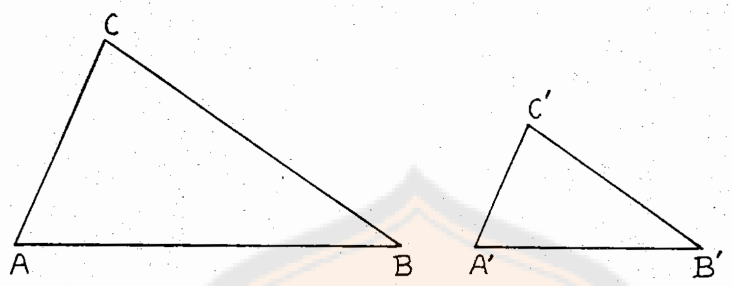
Berarti O terletak pada l".

Jadi ketiga sumbu pada Δ ABC setitik di O dan OA = OB = OC.■

Teorema ini juga berlaku untuk Δ ABC tumpul dan Δ ABC siku-siku dengan bukti yang analog.

3.6. Kesebangunan

Definisi 3.15. *Dua segitiga sebangun* bila sudut-sudut yang bersesuaian saling kongruen dan sisi-sisi yang bersesuaian sebanding.



Simbol: " ~ "

Ditulis: Δ ABC ~ Δ A'B'C'

Dikatakan: Δ ABC sebangun dengan Δ A'B'C'.

$$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C' \Leftrightarrow \angle A \cong \angle A',\ \angle B \cong \angle B',\ \angle C \cong \angle C',$$
$$\text{dan } \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} = k.$$

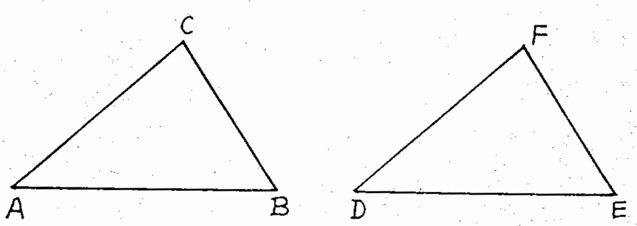
Aksioma Eksistensi Kesebangunan Segitiga:

Untuk suatu segitiga dan suatu bilangan positip k, terdapat suatu segitiga lain yang sebangun dengan segitiga yang diberikan dengan k adalah konstanta perbandingan.

Teorema 3.26. Jika dua segitiga kongruen, maka kedua segitiga itu sebangun.

Bukti:

Diketahui dua segitiga, Δ ABC dan Δ DEF, dengan Δ ABC $\cong$ Δ DEF.



Menurut Def.3.8, maka didapatkan

$\angle A \cong \angle D$, $\angle B \cong \angle E$, $\angle C \cong \angle F$, dan

$\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\overline{AC} \cong \overline{EF}$, $\overline{BC} \cong \overline{FD}$,

sehingga menurut Def.2.15 AB = DE, AC = EF, BC = FD,

maka $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{EF} = \frac{BC}{FD} = 1$.

Jadi menurut Def.3.15 dapat disimpulkan Δ ABC ~ Δ DEF.■

Relasi kesebangunan pada segitiga-segitiga memenuhi sifat transitif.

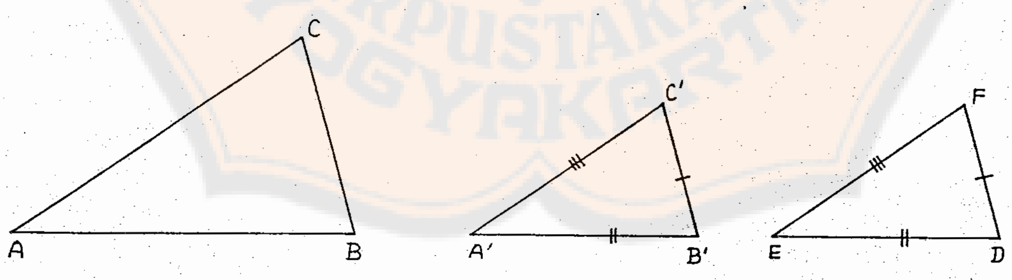
Teorema 3.27. (Sisi-Sisi-Sisi: S-S-S).

Jika sisi-sisi yang bersesuaian dari dua segitiga sebanding, maka kedua segitiga itu sebangun.

Bukti:

Diketahui dua segitiga, Δ ABC dan Δ DEF, dengan

$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{EF} = \frac{BC}{FD} = k$.



Misalkan Δ ABC ~ Δ A'B'C' dan

$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} = k$, maka A'B' = DE, A'C' = EF,

dan B'C' = FD.

Menurut Def.2.15 maka $\overline{A'B'} \cong \overline{DE}$, $\overline{B'C'} \cong \overline{EF}$, dan $\overline{C'A'} \cong \overline{FD}$.

Menurut Teo.3.4, maka Δ A'B'C' $\cong \Delta$ DEF,

sehingga menurut Teo.3.26 Δ A'B'C' ~ Δ DEF.

Jadi Δ ABC ~ Δ DEF.■

Teorema 3.28. (Sudut-Sudut: Sd-Sd).

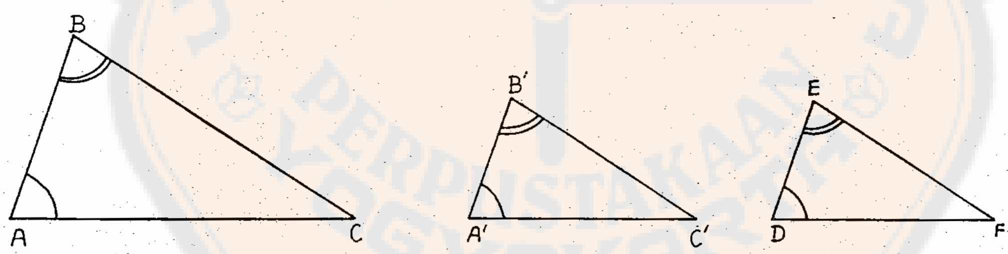
Jika dua sudut pada suatu segitiga kongruen dengan dua sudut yang bersesuaian pada segitiga yang lainnya, maka kedua segitiga itu akan sebangun.

Bukti:

Diketahui dua segitiga, Δ ABC dan Δ A'B'C' dengan

$\angle$ BAC $\cong \angle$ B'A'C' dan $\angle$ ABC $\cong \angle$ A'B'C'. (1)

Akan dibuktikan Δ ABC ~ Δ A'B'C'.



Akan terdapat suatu bilangan positip k, sedemikian

sehingga $\dfrac{A'B'}{AB} = k$. (2)

Menurut Aksioma Eksistensi Kesebangunan Segitiga, maka akan terdapat Δ DEF, sedemikian sehingga

Δ ABC ~ Δ DEF dengan k: konstanta perbandingannya. (3)

Berdasarkan Def.3.15, maka didapatkan

$$\frac{DE}{AB} = k,\ \angle EDF \cong \angle BAC, \text{ dan } \angle DEF \cong \angle ABC \qquad (4)$$

Substitusi (4) ke (2) dan sifat transitif pada (4) dan (1), maka $A'B' = DE$ dan $\angle B'A'C' \cong \angle EDF$, dan $\angle A'B'C' \cong \angle DEF$.

Menurut Teo.3.2, maka $\Delta A'B'C' \cong \Delta DEF$,

sehingga menurut Teo.3.26 didapatkan

$$\Delta A'B'C' \sim \Delta DEF \qquad (5)$$

Dari (3) dan (5), dapat disimpulkan

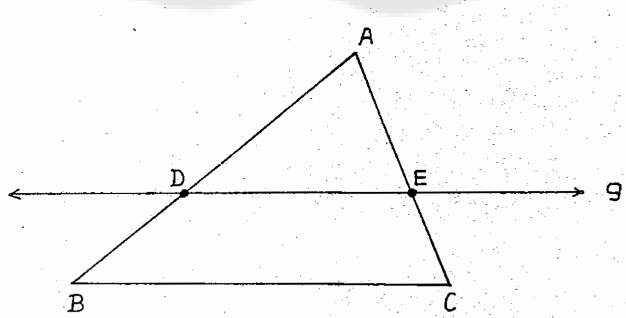
$$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C' \quad \text{(sifat transitif).}\blacksquare$$

Teorema 3.29. Jika suatu garis memotong dua sisi suatu segitiga pada daerah dalamnya, maka garis itu akan sejajar dengan sisi ketiga bila dan hanya bila panjang ruas garis-ruas garis yang bersesuaian sebanding.

Bukti:

Diketahui segitiga ΔABC dan garis g yang memotong sisi $\overline{AB}$ dan $\overline{AC}$ berturut-turut di titik D dan E dengan kedudukan sebagai berikut.

Akan dibuktikan $DE \parallel BC \Leftrightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = k$.



Bukti 1.: $\overline{DE} \parallel \overline{BC} \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = k$.

Jika $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$,[10] maka menurut Teo.3.12 didapatkan

$\angle ADE \cong \angle ABC$ dan $\angle AED \cong \angle ACB$,

sehingga menurut Teo.3.28 $\triangle ADE \sim \triangle ABC$,

maka menurut Def.3.15 didapatkan $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = k$.

Akibat: 1. menurut Def.3.15, maka $\frac{DE}{BC} = k$.

2. menurut sifat selisih pada suatu perbandingan, maka $\frac{AB - AD}{AD} = \frac{AC - AE}{AE}$

Bukti 2.: $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = k \Rightarrow \overline{DE} \parallel \overline{BC}$.

Jika $\overline{DE}$ tidak sejajar dengan $\overline{BC}$, maka akan terdapat $\overline{BC'} \parallel \overline{DE}$ dan memotong $\overleftrightarrow{AE}$ di C′ yang tidak sama dengan C.

Menurut hasil bukti 1., didapatkan $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC'} = k$,

ini berarti bahwa AC = AC′, dengan perkataan lain C′ sama dengan C.

Bertentangan dengan pengandaian di atas.

Kesimpulan: $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$.■

Teorema 3.30. (Sisi-Sudut-Sisi: S-Sd-S).

Jika dua pasang sisi yang bersesuaian pada dua segitiga sebanding dan sudut-sudut apitnya kongruen, maka kedua segitiga itu sebangun.

---

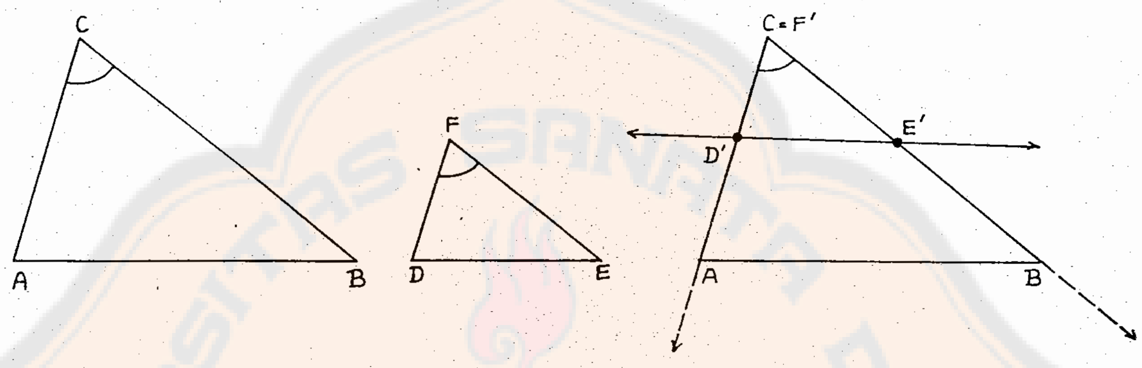
[10] $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ dimaksudkan bahwa $\overleftrightarrow{DE} \parallel \overleftrightarrow{BC}$, dengan $\overleftrightarrow{DE}$ dan $\overleftrightarrow{BC}$ berturut-turut adalah garis-garis pemuat $\overline{DE}$ dan $\overline{BC}$.

Bukti:

Diketahui dua segitiga, Δ ABC dan Δ DEF dengan

$\angle$ BCA $\cong$ $\angle$ EFD dan $\frac{DF}{AC} = \frac{EF}{BC} = k$.

Akan dibuktikan bahwa Δ ABC ~ Δ DEF.



Pada $\overrightarrow{CA}$ ditentukan titik D' sedemikian sehingga $\overline{CD'} \cong \overline{FD}$

kemudian pada $\overrightarrow{CB}$ ditentukan titik E' sedemikian sehingga

$\overline{CE'} \cong \overline{FE}$ dan melalui D' dan E' digambar $\overleftrightarrow{D'E'}$,

maka menurut Teo.3.1 akan terbentuk Δ CD'E' $\cong$ Δ DEF.

Karena $\frac{DF}{AC} = \frac{EF}{BC} = k$, menutut Teo.3.29 $\overline{DE} \parallel \overline{AB}$,

sehingga menurut Teo.3.12 didapatkan $\angle$ FDE $\cong$ $\angle$ CAB dan

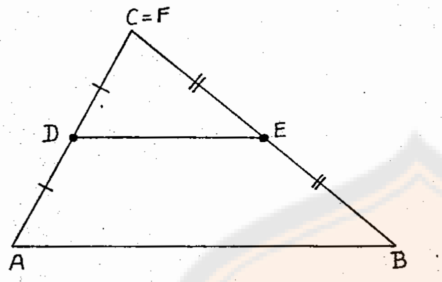
$\angle$ FED $\cong$ $\angle$ CBA.

Jadi berdasarkan Teo.3.29 dapat disimpulkan bahwa

Δ ABC ~ Δ DEF.■

Akibat dari Teo.3.30, ini adalah,

Ruas garis yang menghubungkan dua titik tengah dari dua sisi suatu segitiga, sejajar dengan sisi yang ketiga dan panjangnya adalah setengah panjang sisi ketiga tersebut.



$\overline{DE} \parallel \overline{AB}$ dan

$$\frac{CD}{CA} = \frac{CE}{CB} = \frac{DE}{AB} = \frac{1}{2},$$

jadi $DE = \frac{1}{2}\ AB$.

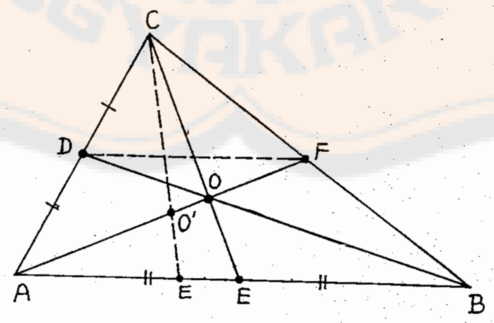
Definisi 3.16. Suatu garis berat pada segitiga adalah ruas garis yang dibentuk oleh suatu titik sudut dan titik tengah sisi di hadapannya.

Teorema 3.31. Ketiga garis berat pada suatu segitiga setitik.

Bukti:

Diketahui suatu Δ ABC dengan garis berat-garis beratnya: $\overline{AF}$, $\overline{BD}$, dan $\overline{CE}$.

Akan dibuktikan bahwa ketiga garis berat tersebut setitik.



Misalkan $\overline{AF}$ dan $\overline{BD}$ berpotongan di O, menurut akibat Teo.3.30, maka

$$\overline{DF} \parallel \overline{AB} \text{ dan } \frac{CD}{CA} = \frac{CF}{CB} = \frac{DF}{AB} = \frac{1}{2} \qquad (1)$$

Perhatikan Δ DOF dan Δ AOB,

$\angle$ ODF $\cong$ $\angle$ OBA (Teo.3.13),

$\angle$ OFD $\cong$ $\angle$ OAB (Teo.3.13),

sehingga menurut Teo.3.28 Δ DOF $\sim$ Δ AOB.

$$\text{Berarti } \frac{FO}{OA} = \frac{DO}{OB} = \frac{DF}{AB} = \frac{1}{2} \qquad (2)$$

Akan ditunjukkan bahwa $\overline{CE}$ juga melalui O.

Andaikan $\overline{CE}$ tidak melalui O, tetapi $\overline{CE}$ dan $\overline{AF}$ berpotongan di O′, sedemikian sehingga

$$\frac{FO'}{O'A} = \frac{EO'}{O'C} = \frac{1}{2} \qquad (3)$$

Dari (2), $\frac{FO}{OA} = \frac{1}{2}$ maka berarti OA $= \frac{2}{3}$ AF.

Dari (3), $\frac{FO'}{O'A} = \frac{1}{2}$ maka berarti O′A $= \frac{2}{3}$ AF.

Jadi OA = O′A,

berarti titik O′ sama dengan O, maka berarti $\overline{CE}$ melalui O.

Kesimpulan: $\overline{AF}$, $\overline{BD}$, dan $\overline{CE}$ setitik di O.∎

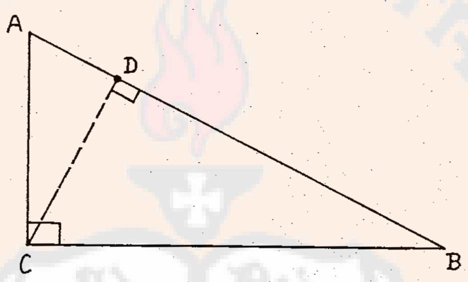
Teorema ini juga berlaku untuk segitiga tumpul dan segitiga siku-siku dengan bukti yang analog.

Teorema 3.32. Garis tinggi pada sisi miring suatu segitiga siku-siku membentuk dua segitiga sebangun yang juga sebangun dengan segitiga siku-siku tersebut.

Bukti:

$\triangle$ ABC siku-siku dengan $\angle$ C siku-siku, dan $\overline{CD}$ suatu garis tinggi.

Akan dibuktikan $\triangle$ ACD ~ $\triangle$ CBD ~ $\triangle$ ABC.



Perhatikan $\triangle$ ACD dan $\triangle$ ABC,

$\angle$ CAD $\cong$ $\angle$ CAB (sifat refleksif),

$\angle$ ADC $\cong$ $\angle$ ACB (akibat Def.2.20),

sehingga menurut Teo.3.28 disimpulkan

$\triangle$ ACD ~ $\triangle$ ABC (1)

Menurut Def.3.16 maka $\angle$ CBA $\cong$ $\angle$ DBC,

sedangkan menurut akibat Def 2.18 didapatkan

$\angle$ ACB $\cong$ $\angle$ CDB.

Sehingga menurut Teo.3.28 disimpulkan

$\triangle$ ABC ~ $\triangle$ CBD (2)

Dari (1) dan (2), maka disimpulkan

$\triangle$ ACD ~ $\triangle$ ABC ~ $\triangle$ CBD.■

Akibat Teo.3.32. Diketahui Δ ABC siku-siku dengan sudut siku-siku, $\angle$ C dan $\overline{CD}$ suatu garis tinggi, maka:

a. $(CD)^2 = (AD)\ (DB)$.

b. $(AC)^2 = (AB)\ (AD)$ dan

c. $(BC)^2 = (AB)\ (DB)$.

Bukti a.:

Menurut Teo.3.32, didapatkan Δ ACD ~ Δ BCD, maka menurut Def.3.15, didapatkan

$\dfrac{AD}{DC} = \dfrac{DC}{DB}$ atau $(DC)^2 = (AD)\ (DB)$.■

Bukti b. dan c. analog dengan bukti a. (Petunjuk: untuk membuktikan bagian b dan c berturut-turut banding-kan Δ ACD dan Δ ABC, dan kemudian bandingkan Δ BCD dan Δ ABC).

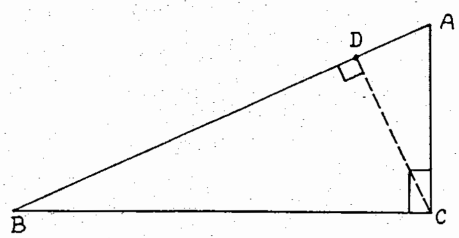
Teorema 3.33. (Teorema Pythagoras).

Pada suatu segitiga siku-siku, kuadrat panjang sisi miring sama dengan jumlah kuadrat panjang sisi-sisi siku-sikunya.

Bukti:

Diketahui Δ ABC siku-siku, dengan sudut siku-siku, $\angle$ BCA dan $\overline{CD}$ suatu garis tinggi pada sisi miringnya.

Akan dibuktikan $(AC)^2 + (BC)^2 = (AB)^2$.



Menurut akibat Teo.3.32.b dan c, $(AC)^2 = (AB)\ (AD)$ (1)

$(BC)^2 = (AB)\ (DB)$ (2)

Padahal AD + DB = AB, jadi DB = AB − AD. (3)

Substistusi (3) ke (2) menghasilkan

$$(BC)^2 = (AB)\ (AB - AD)$$

$$= (AB)^2 - (AB)\ (AD)$$

$$(BC)^2 = (AB)^2 - (AC)^2.$$

Jadi $(AC)^2 + (BC)^2 = (AB)^2$.■

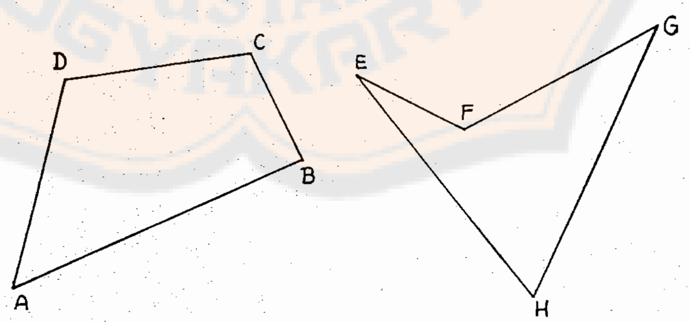
BAB IV

SEGIEMPAT

Pada bab ini akan dibahas *segiempat* yang meliputi jenis dan sifat-sifatnya. Pembahasan dibatasi pada segiempat sederhana yang bersifat konveks.

4.1. Segiempat Sederhana (Simple Quadrilateral) Yang Bersifat Konveks

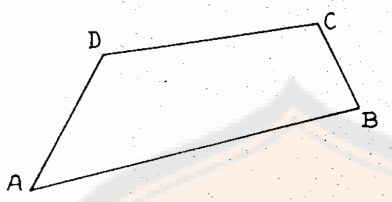
Definisi 4. 1. *Segiempat sederhana* adalah gabungan empat ruas garis yang ditentukan oleh empat titik dengan tidak ada tiga titik di antaranya yang segaris, yang sepasang-sepasang dihubungkan, sedemikian sehingga ruas garis-ruas garis tersebut hanya bertemu pada ujung-ujungnya dan setiap ruas garis pasti bertemu dengan dua ruas garis lain yang berbeda.



Segiempat ABCD dan segiempat EFGH

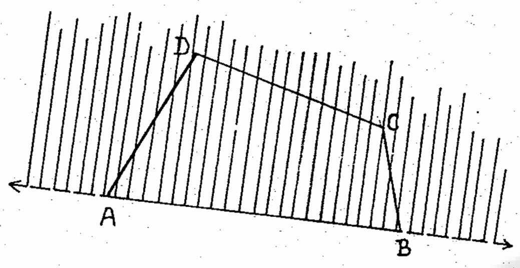
4.1.1. Unsur-unsur dan pengertian dasar

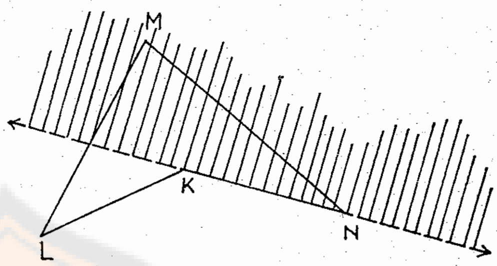
Pada suatu segiempat ABCD:



1. Setiap ruas garis disebut *sisi*, contoh: $\overline{AB}$.
2. Setiap titik disebut *titik sudut*, contoh: titik C.
3. *Pasangan sisi berhadapan* adalah dua sisi yang tidak mempunyai titik sudut sekutu, contoh: $\overline{AB}$ dan $\overline{CD}$.
4. *Pasangan sisi berdekatan* adalah dua sisi yang mempunyai satu titik sudut sekutu, contoh: $\overline{AB}$ dan $\overline{BC}$ bersekutu di B.
5. Pada setiap titik sudut terbentuk *sudut* yang ditentukan oleh dua sinar garis pemuat dua sisi berdekatan, contoh: $\angle$ DAB dengan titik sudut A.
6. *Pasangan sudut berhadapan* adalah dua sudut yang tidak mempunyai sisi sekutu, contoh: $\angle$ ABC dan $\angle$ CDA.
7. *Pasangan sudut berdekatan* adalah dua sudut dengan suatu sisi sekutu, contoh: $\angle$ ABC dan $\angle$ BCD bersekutu pada $\overline{BC}$.

Definisi 4. 2. Suatu segiempat sederhana disebut *konveks* bila dan hanya bila untuk setiap sisinya berlaku bahwa seluruh segiempat terletak pada salah satu setengah bidang tertutup yang tertentu oleh garis pemuat sisi tersebut.

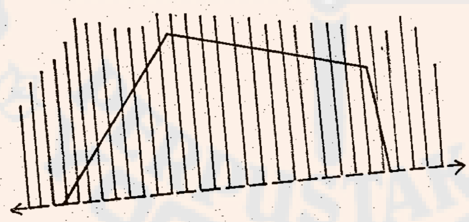


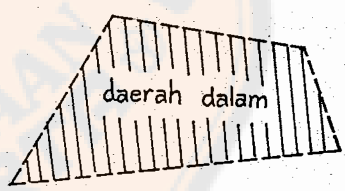


Segiempat ABCD konveks Segiempat KLMN tidak konveks

> Untuk selanjutnya akan dipergunakan istilah "**segiempat**" untuk menyatakan "**segiempat sederhana yang-konveks.**"

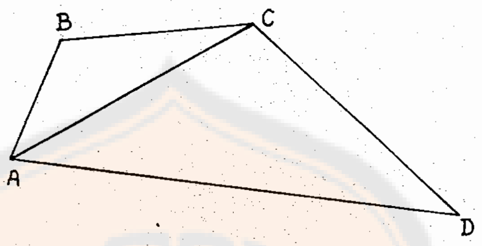
Definisi 4. 3. Perhatikan setengah bidang yang ditentukan oleh garis pemuat suatu sisi yang memuat unsur-unsur segiempat yang lain selain sisi tersebut.





Daerah dalam suatu segiempat adalah irisan dari setengah bidang-setengah bidang seperti di atas yang tertentu oleh semua sisinya. Sedangkan suatu titik dikatakan terletak pada *daerah luar* bila titik itu tidak terletak pada segiempat maupun pada daerah dalam segiempat.

Definisi 4. 4. *Diagonal* segiempat adalah ruas garis yang dibentuk oleh dua titik sudut dari pasangan sudut berhadapan.



$\overline{AC}$ adalah suatu diagonal segiempat ABCD

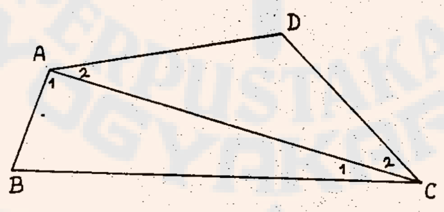
Karena setiap segiempat mempunyai tepat dua pasang sudut berhadapan, maka terdapat tepat dua diagonal.

Teorema 4. 1. Jumlah ukuran sudut-sudut suatu segiempat adalah 360.

Bukti:

Diketahui ABCD suatu segiempat.

Akan dibuktikan $m\angle DAB + m\angle ABC + m\angle BCD + m\angle CDA = 360$.



Dibuat diagonal $\overline{AC}$, maka terbentuk dua segitiga:

Δ ABC dan Δ ADC.

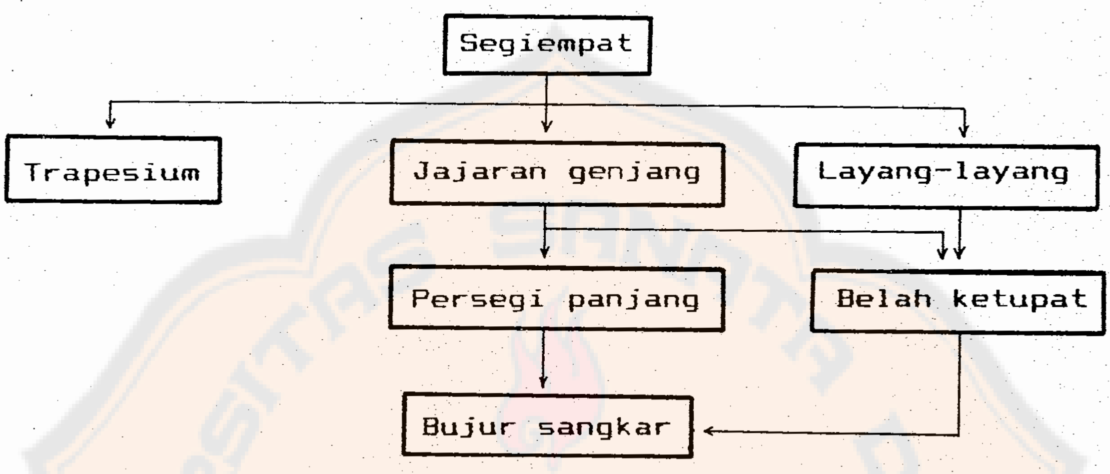
Menurut Teo.3.14 $m\angle A_1 + m\angle B + m\angle C_1 = 180$

$m\angle A_2 + m\angle D + m\angle C_2 = 180$

jadi $m\angle A + m\angle B + m\angle C + m\angle D = 360.$ ■

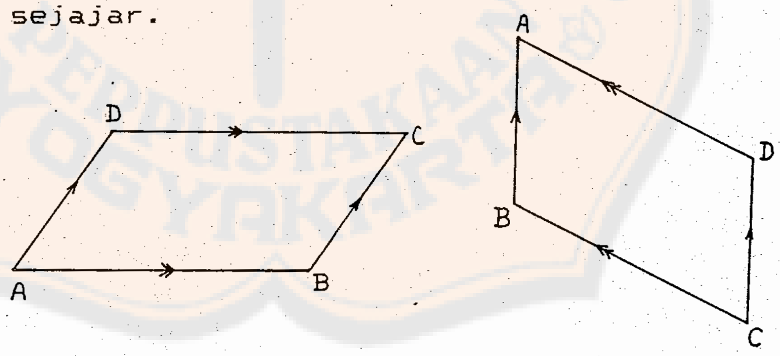
4.2. Jenis dan Sifat

Jenis-jenis segiempat dapat dilihat pada skema di bawah ini,



4.2.1. Jajaran genjang.

Definisi 4. 5. Jajaran genjang adalah segiempat dengan sisi-sisi berhadapan sepasang-sepasang sejajar.



Suatu jajaran genjang ABCD, dengan $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ dan $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$.

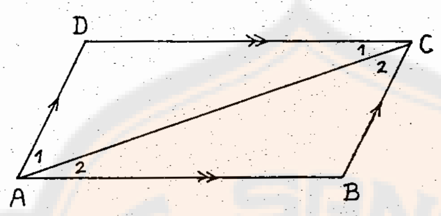
Teorema 4. 2. Setiap diagonal pada suatu jajaran genjang membentuk dua segitiga yang kongruen.

Bukti:

Diketahui ABCD suatu jajaran genjang dengan

$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$, dan suatu diagonal $\overline{AC}$.

Akan dibuktikan $\triangle ABC \cong \triangle CDA$.



Perhatikan $\triangle ABC$ dan $\triangle CDA$,

$\angle A_2 \cong \angle C_1$ (Teo.3.13),

$\overline{AC} \cong \overline{AC}$ (sifat refleksif),

$\angle C_2 \cong \angle A_1$ (Teo.3.13),

maka menurut Teo.3.2 dapat disimpulkan $\triangle ABC \cong \triangle CDA$.

Dengan cara yang sama dapat dibuktikan bahwa $\triangle ABD$ dan $\triangle CDB$ yang terbentuk oleh diagonal $\overline{BD}$ juga kongruen.■

Teorema 4. 3. Sisi-sisi yang berhadapan pada suatu jajaran genjang sepasang-pasang kongruen.

Bukti:

Menurut Teo.4.2 diagonal $\overline{AC}$ dalam jajaran genjang ABCD membentuk dua segitiga, $\triangle ABC$ dan $\triangle CDA$ dengan $\triangle ABC \cong \triangle CDA$. (lihat gambar di atas).

Maka menurut Def.3.8 didapatkan $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ dan $\overline{AD} \cong \overline{BC}$.■

Teorema 4. 4. Sudut-sudut yang berhadapan pada suatu jajaran genjang sepasang-sepasang kongruen.

Bukti:

Berdasarkan Teo.4.2 (lihat gambar pada Teo.4.2),

$\triangle ABD \cong \triangle BCD$, maka menurut Def.3.8 didapatkan

$\angle A \cong \angle C$ (1)

Selanjutnya, karena $\angle B_1 \cong \angle D_2$ dan $\angle B_2 \cong \angle D_1$

maka menurut Def.2.17

$m\angle B_1 = m\angle D_2$ dan $m\angle B_2 = m\angle D_1$ (2)

Dari (2), $m\angle B_1 = m\angle D_2$

$m\angle B_1 + m\angle B_2 = m\angle D_2 + m\angle B_2$

$m\angle B_1 + m\angle B_2 = m\angle D_2 + m\angle D_1$

$m\angle B = m\angle D$

jadi, menurut Def.2.17 dapat disimpulkan

$\angle B \cong \angle D$ (3)

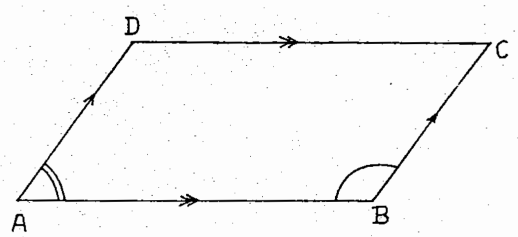
Hasil (1) dan (3) menunjukkan terbuktinya teorema di atas.■

Teorema 4. 5. Setiap pasang sudut berdekatan pada suatu jajaran genjang merupakan pasangan sudut saling berpelurus.

Bukti:

Diketahui ABCD suatu jajaran genjang dengan $\angle A$ dan $\angle B$ adalah sepasang sudut berdekatan.

Akan dibuktikan $m\angle A + m\angle B = 180$, atau $\angle A$ dan $\angle B$ saling berpelurus.



Menurut Teo.4.1

$$m\angle A + m\angle B + m\angle C + m\angle D = 360 \qquad (1)$$

dan menurut Teo.4.4 $\angle A \cong \angle C$ dan $\angle B \cong \angle D$

Sehingga berdasarkan Def.2.17

$$m\angle A = m\angle C \text{ dan } m\angle B = m\angle D \qquad (2)$$

Substitusi (2) ke (1) menghasilkan,

$$m\angle A + m\angle B + m\angle A + m\angle B = 360$$
$$2m\angle A + 2m\angle B = 360$$
$$2(m\angle A + m\angle B) = 360$$
$$m\angle A + m\angle B = 180$$

Menurut Def.2.23, $\angle A$ dan $\angle B$ saling berpelurus.

Dengan cara yang sama dapat dibuktikan $\angle B$ dan $\angle C$, $\angle C$ dan $\angle D$, serta $\angle D$ dan $\angle A$ juga saling berpelurus.■

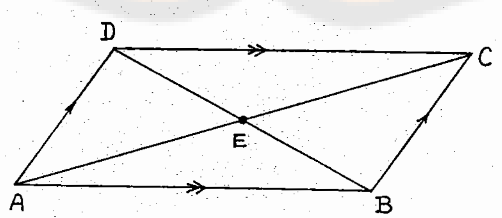
Teorema 4. 6. Kedua diagonal pada suatu jajaran genjang saling membagi dua sama panjang.

Bukti:

Diketahui ABCD suatu jajaran genjang dengan $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ dan $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$.

Kedua diagonal $\overline{AC}$ dan $\overline{BD}$ berpotongan di titik E.

Akan dibuktikan $\overline{AE} \cong \overline{CE}$ dan $\overline{BE} \cong \overline{DE}$.



Perhatikan Δ ABE dan Δ CDE,

Menurut Teo.4.3, maka

$\overline{AB} \cong \overline{CD}$ (1)

Kemudian $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ dipotong oleh diagonal $\overline{AC}$,

maka menurut Teo.3.13

$\angle A_1 \cong \angle C_1$ (2)

$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, keduanya dipotong oleh diagonal $\overline{BD}$,

maka menurut Teo.3.13

$\angle B_1 \cong \angle D_1$ (3)

Dari (1), (2), dan (3) dengan berdasarkan Teo.3.2,

maka Δ ABE $\cong$ Δ CDE.

Sehingga menurut Def.3.8 didapatkan bahwa

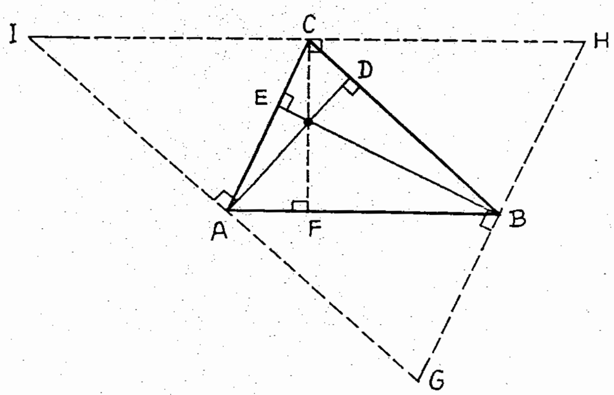
$\overline{AE} \cong \overline{CE}$ dan $\overline{BE} \cong \overline{DE}$.■

Teorema 4. 7. Ketiga garis tinggi pada suatu segitiga setitik.

Bukti:

Diketahui suatu Δ ABC dengan garis tinggi-garis tinggi: $\overline{AD}$, $\overline{BE}$, dan $\overline{CF}$. Jadi $\overline{AD} \perp \overline{BC}$, $\overline{BE} \perp \overline{AC}$, dan $\overline{CF} \perp \overline{AB}$.

Akan dibuktikan bahwa ketiga garis tinggi tersebut setitik.



Dibuat $\overline{GH} \parallel \overline{AC}$, $\overline{HI} \parallel \overline{AB}$, dan $\overline{GI} \parallel \overline{BC}$, sehingga terbentuklah Δ GHI.

Pada segiempat ABHC, $\overline{AB} \parallel \overline{CH}$ dan $\overline{AC} \parallel \overline{BH}$.
Menurut Def.4.5 segiempat ABHC suatu jajaran genjang, sehingga menurut Teo.4.2 $\overline{AB} \cong \overline{CH}$ dan $\overline{AC} \cong \overline{BH}$. (1)

Pada segiempat ABCI, $\overline{AB} \parallel \overline{CI}$ dan $\overline{BC} \parallel \overline{AI}$.
Menurut Def.4.5 segiempat ABCI suatu jajaran genjang, sehingga menurut Teo.4.2 $\overline{AB} \cong \overline{CI}$ dan

$\overline{BC} \cong \overline{AI}$. (2)

Pada segiempat ACBG, $\overline{AC} \parallel \overline{BG}$ dan $\overline{BC} \parallel \overline{AG}$.
Menurut Def.4.5 segiempat ACBG suatu jajaran genjang, sehingga menurut Teo.4.2 $\overline{AC} \cong \overline{BG}$ dan

$\overline{BC} \cong \overline{AG}$. (3)

Dari (1), (2), dan (3) diperoleh

$\overline{AB} \cong \overline{CH}$ dan $\overline{AB} \cong \overline{CI}$, maka $\overline{CH} \cong \overline{CI}$.

Jadi menurut Def.3.9, C titik tengah $\overline{HI}$.

$\overline{AC} \cong \overline{BH}$ dan $\overline{AC} \cong \overline{BG}$, maka $\overline{BH} \cong \overline{BG}$.

Jadi, menurut Def.3.9, B titik tengah $\overline{GH}$.

$\overline{BC} \cong \overline{AI}$ dan $\overline{BC} \cong \overline{AG}$, maka $\overline{AI} \cong \overline{AG}$.

Jadi, menurut Def.3.9, A titik tengah $\overline{GI}$.

Sehingga diperoleh,

$\overline{GI} \parallel \overline{BC}$ dan $\overline{AD} \perp \overline{BC}$, maka $\overline{AD} \perp \overline{GI}$ di A.

Jadi $\overline{AD}$ adalah sumbu $\overline{GI}$.

$\overline{GH} \parallel \overline{AC}$ dan $\overline{BE} \perp \overline{AC}$, maka $\overline{BE} \perp \overline{GH}$ di B.

Jadi $\overline{BE}$ adalah sumbu $\overline{GH}$.

$\overline{HI} \parallel \overline{AB}$ dan $\overline{CF} \perp \overline{AB}$, maka $\overline{CF} \perp \overline{HI}$ di C.

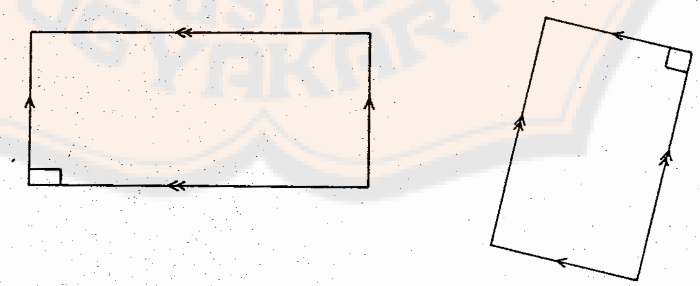
Jadi $\overline{CF}$ adalah sumbu $\overline{HI}$.

Kesimpulan bahwa ketiga garis tinggi Δ ABC merupakan sumbu-sumbu pada Δ GHI, dan menurut Teo.3.25 $\overline{AD}$, $\overline{BE}$, dan $\overline{CF}$ setitik.■

Persegi panjang, belah ketupat, dan bujur sangkar dapat didefinisikan secara lebih sederhana dengan menggunakan pengertian jajaran genjang daripada secara langsung di-definisikan menggunakan pengertian segiempat.

4.2.2. Persegi panjang.

Definisi 4. 6. *Persegi panjang* adalah jajaran genjang yang salah satu sudutnya siku-siku.

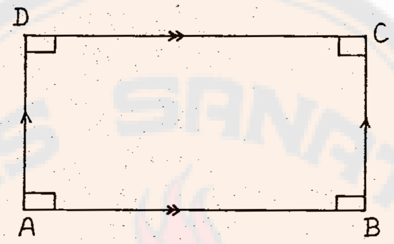


Akibat Def.4.6. Setiap sudut pada suatu persegi panjang merupakan sudut siku-siku.

Bukti:

Diketahui ABCD suatu persegi panjang dengan $\angle$ A siku-siku.

Akan dibuktikan $\angle$ B, $\angle$ C, dan $\angle$ D masing-masing siku-siku.



Menurut Teo.4.4 $\angle$ A $\cong$ $\angle$ C, berarti $\angle$ C juga siku-siku.

Menurut Teo.4.5 $\angle$ A dan $\angle$ B akan saling berpelurus, jadi, menurut Def.2.23 $\angle$ B siku-siku.

Sedangkan menurut Teo.4.4 $\angle$ B $\cong$ $\angle$ D, berarti $\angle$ D siku-siku juga.

Kesimpulan: keempat sudut persegi panjang ABCD merupakan sudut siku-siku.■

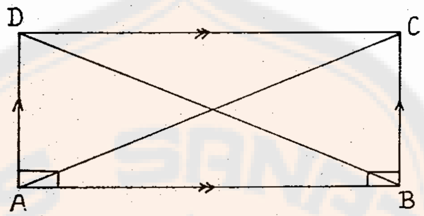
Karena persegi panjang merupakan jajaran genjang, maka sifat-sifat yang dimiliki oleh jajaran genjang juga menjadi sifat-sifat suatu persegi panjang . Beberapa sifat lain yang khas dimiliki oleh persegi panjang dapat dipelajari pada teorema-teorema berikut ini.

Teorema 4. 8. Kedua diagonal pada suatu persegipanjang kongruen.

Bukti:

Diketahui ABCD suatu persegipanjang dengan diagonal-diagonal: $\overline{AC}$ dan $\overline{BD}$.

Akan dibuktikan $\overline{AC} \cong \overline{BD}$.



Perhatikan Δ ABC dan Δ BAD,

$\overline{AB} \cong \overline{AB}$ (sifat refleksif),

$\angle ABC \cong \angle BAD$ (akibat Teo.2.20),

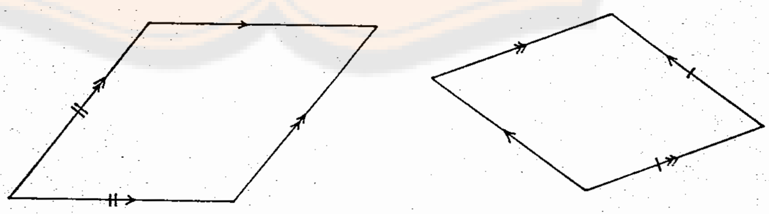
$\overline{BC} \cong \overline{AD}$ (Teo.4.3),

sehingga menurut Teo.3.1 didapatkan $\Delta ABC \cong \Delta BAD$.

Jadi, menurut Def.3.8 didapatkan $\overline{AC} \cong \overline{BD}$.∎

4.2.3. Belah ketupat

Definisi 4. 7. *Belah ketupat* adalah jajaran genjang dengan sepasang sisi berdekatan kongruen.



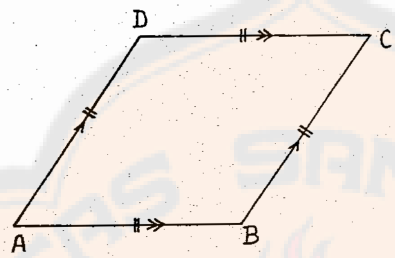
Akibat Def.4.7. Keempat sisi suatu belah ketupat sepasang-sepasang kongruen.

Bukti:

Diketahui ABCD suatu belah ketupat dengan

$\overline{AB} \cong \overline{BC}$ (1)

Akan dibuktikan $\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{CD} \cong \overline{DA}$.



Berdasarkan Def.4.7. $\overline{BC} \cong \overline{CD}$ dan $\overline{CD} \cong \overline{DA}$,

dengan sifat transitif didapatkan $\overline{BC} \cong \overline{AD}$.

Padahal menurut Def.4.7. $\overline{AD} \cong \overline{AB}$, sehingga $\overline{AB} \cong \overline{BC}$.

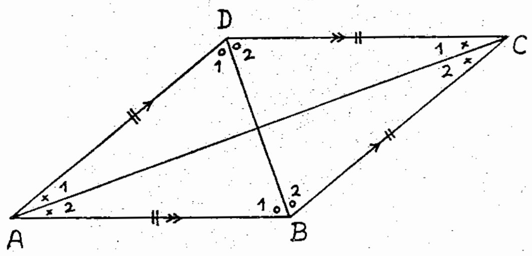
Jadi $\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{CD} \cong \overline{AD}$.■

Teorema 4. 9. Setiap diagonal suatu belah ketupat terletak pada garis bagi sudut-sudutnya.

Bukti:

Diketahui ABCD suatu belah ketupat dengan diagonal-diagonalnya: $\overline{AC}$ dan $\overline{BD}$.

Akan dibuktikan bahwa $\overline{AC}$ adalah garis bagi $\angle$ A dan $\angle$ C, sedangkan $\overline{BD}$ adalah garis bagi $\angle$ B dan $\angle$ D.



Perhatikan $\triangle$ ABC dan $\triangle$ ADC,

$\overline{AB} \cong \overline{AD}$ (akibat Def.4.7),

$\overline{BC} \cong \overline{DC}$ (akibat Def.4.7),

$\overline{AC} \cong \overline{AC}$ (sifat refleksif),

sehingga menurut Teo.3.4 dapat disimpulkan $\triangle ABC \cong \triangle ADC$.

Jadi menurut Def.3.8, $\angle A_1 \cong \angle A_2$ dan $\angle C_1 \cong \angle C_2$

Ini berarti $\overline{AC}$ terletak pada garis bagi untuk

$\angle A$ dan $\angle C$ (1)

Selanjutnya perhatikan $\triangle$ BAD dan $\triangle$ BCD,

$\overline{AB} \cong \overline{BC}$ (akibat Def 4.7),

$\overline{AD} \cong \overline{CD}$ (akibat Def.4.7),

$\overline{BD} \cong \overline{BD}$ (sifat refleksif),

sehingga menurut Teo.3.4 dapat disimpulkan $\triangle BAD \cong \triangle BCD$.

Jadi menurut Def.3.8 $\angle B_1 \cong \angle B_2$ dan $\angle D_1 \cong \angle D_2$

Ini berarti $\overline{BD}$ terletak pada garis bagi untuk

$\angle B$ dan $\angle D$. (2)

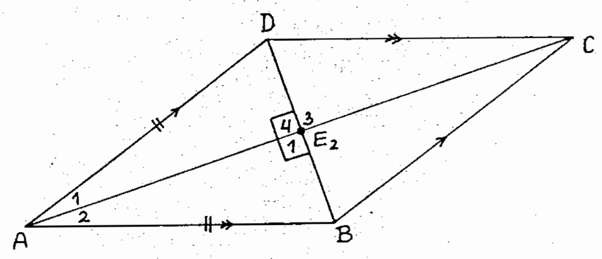
Hasil (1) dan (2) menunjukkan terbuktinya teorema di atas.■

Teorema 4.10. Kedua diagonal suatu belah ketupat saling tegak lurus.

Bukti:

Diketahui ABCD suatu belah ketupat dengan diagonal-diagonalnya: $\overline{AC}$ dan $\overline{BD}$ yang berpotongan di E.

Akan dibuktikan $\overline{AC} \perp \overline{BD}$.



Perhatikan Δ ABE dan Δ ADE,

$\overline{AB} \cong \overline{AD}$ (akibat Def.4.7),

$\angle A_1 \cong \angle A_2$ (Teo.4.9),

$\overline{AE} \cong \overline{AE}$ (sifat refleksif),

sehingga menurut Teo.3.1 dapat disimpulkan Δ ABE $\cong$ Δ ADE.

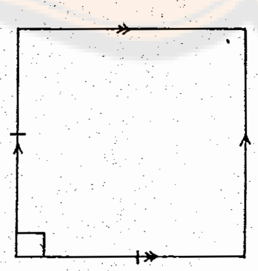
Jadi menurut Def.3.8 didapatkan $\angle E_1 \cong \angle E_4$.

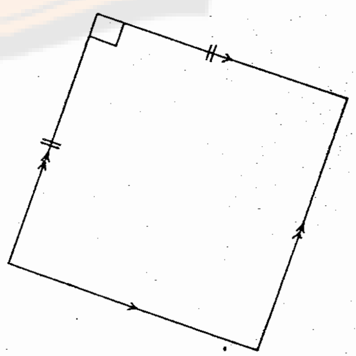
Padahal menurut Def.2.25 $\angle E_1$ dan $\angle E_4$ merupakan pasangan sudut saling bersisian, maka mereka saling berpelurus, sehingga menurut Teo.2.9 kedua sudut itu masing-masing merupakan sudut siku-siku.

Jadi $\overline{AC} \perp \overline{BD}$.■

4.2.4. Bujur sangkar

Definisi 4. 8. *Bujur sangkar* adalah persegi panjang yang sepasang sisi berdekatannya kongruen.

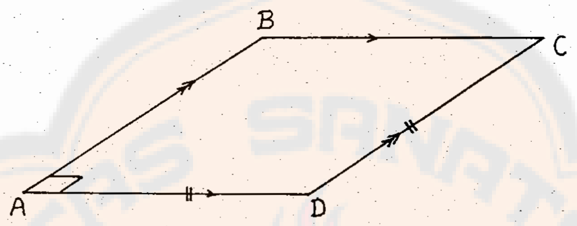




Teorema 4.11. Belah ketupat yang salah satu sudutnya siku-siku, merupakan suatu bujur sangkar.

Bukti:

Diketahui ABCD suatu belah ketupat dengan $\angle$ BAD siku-siku. Akan dibuktikan ABCD suatu bujur sangkar.



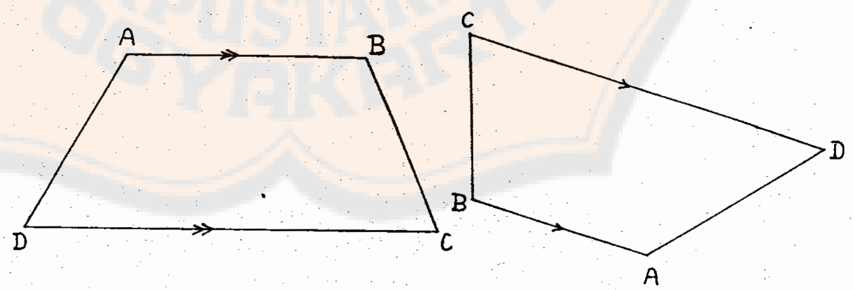
Menurut Def.4.7 ABCD suatu jajaran genjang dan $\overline{AB} \cong \overline{BC}$.

Karena $\angle$ DAB siku-siku, maka menurut Def.4.6 ABCD suatu persegi panjang.

Jadi berdasarkan Def.4.8 ABCD suatu bujur sangkar.■

4.2.5. Trapesium

Definisi 4. 9. *Trapesium* adalah suatu segiempat dengan tepat sepasang sisi berhadapan sejajar.



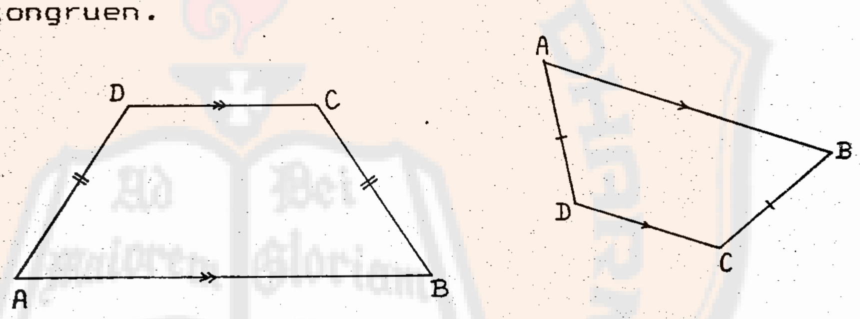
Trapesium ABCD dengan $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$

Pada suatu trapesium, salah satu sisi sejajar disebut *alas* dan sudut yang dibentuk oleh sinar garis-sinar garis pemuat alas dan satu sisi didekatnya disebut *sudut alas*.

Kejadian khusus pada suatu trapesium adalah:

1. *Trapesium samakaki*

Definisi 4.10. *Trapesium samakaki* adalah trapesium dengan kedua sisi yang tidak sejajarnya kongruen.

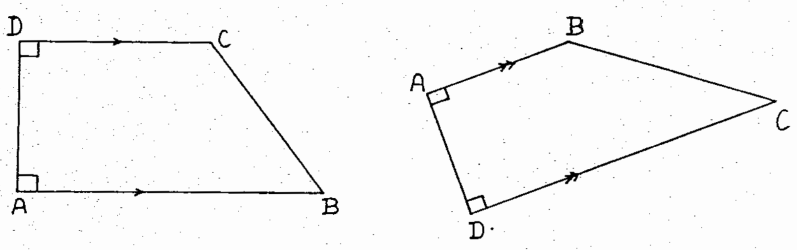


Trapesium samakaki ABCD dengan $\overline{AD} \cong \overline{BC}$

2. *Trapesium siku-siku*

Definisi 4.11. *Trapesium siku-siku* adalah trapesium dengan salah satu sudutnya siku-siku.

Definisi 4.11, berakibat bahwa sudut dalam sepihak dari sudut siku-siku tersebut juga merupakan sudut siku-siku.



Trapesium siku-siku ABCD dengan $\angle$ DAB siku-siku

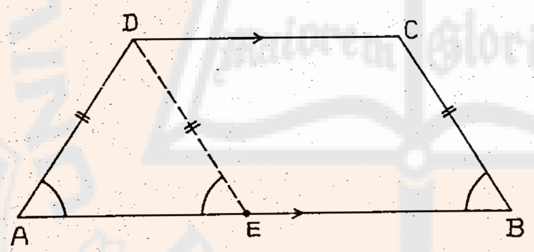
Teorema 4.12. Kedua sudut di hadapan sisi-sisi yang kongruen pada suatu trapesium samakaki kongruen.

Bukti:

Diketahui ABCD suatu trapesium samakaki dengan

$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ dan $\overline{AD} \cong \overline{BC}$.

Akan dibuktikan bahwa $\angle$ DAB $\cong$ $\angle$ CBA.



Melalui titik D ditarik garis yang sejajar $\overline{BC}$ hingga memotong $\overline{AB}$ di titik E, maka $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$.

Karena $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, maka $\overline{EB} \parallel \overline{CD}$. Ini berarti DEBC suatu jajaran genjang, sehingga menurut Teo.4.3 didapatkan $\overline{DE} \cong \overline{BC}$.

Karena $\overline{BC} \cong \overline{AD}$, maka $\overline{DE} \cong \overline{AD}$ (sifat transitif), sehingga terbentuk Δ ADE samakaki, maka menurut Teo.3.3 didapatkan bahwa $\angle$ DAE $\cong$ $\angle$ AED (1)

Menurut Teo.3.12 maka $\angle$ AED $\cong$ $\angle$ CBE (2)

Dari (1) dan (2), maka $\angle$ DAE $\cong$ $\angle$ CBE (sifat transitif), sehingga $\angle$ DAB $\cong$ $\angle$ CBA.■

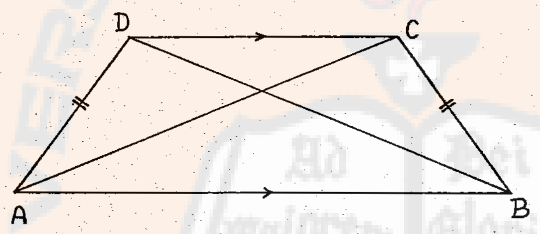
Teorema 4.13. Kedua diagonal suatu trapesium samakaki kongruen.

Bukti:

Diketahui ABCD suatu trapesium samakaki dengan

$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ dan $\overline{AD} \cong \overline{BC}$.

Akan dibuktikan bahwa $\overline{AC} \cong \overline{BD}$.



Perhatikan Δ ABD dan Δ ABC,

$\overline{AD} \cong \overline{BC}$ (Def.4.10),

$\angle$ DAB $\cong$ $\angle$ ABC (Teo.4.12),

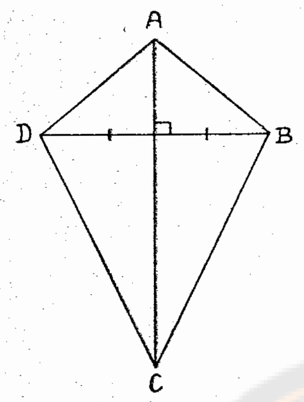
$\overline{AB} \cong \overline{AB}$ (sifat refleksif),

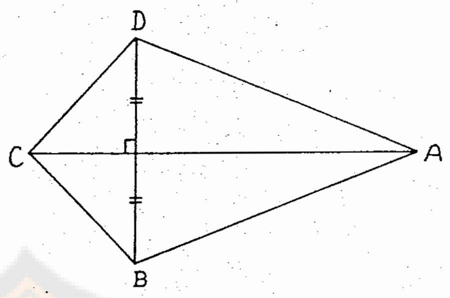
sehingga menurut Teo.3.1 dapat disimpulkan Δ ABD $\cong$ Δ ABC.

Jadi menurut Def.3.8 $\overline{AC} \cong \overline{BD}$.■

4.2.6 Layang-layang

Definisi 4.12. *Layang-layang* adalah segiempat dengan salah satu diagonalnya terletak pada sumbu diagonal lainnya.





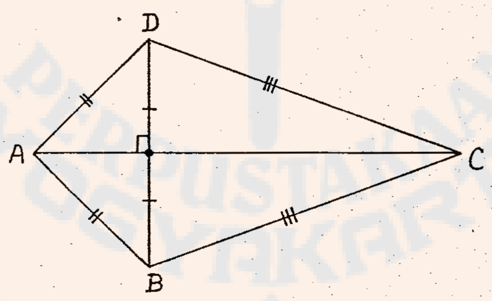
Pada layang-layang di atas, diagonal $\overline{AC}$ terletak pada sumbu diagonal $\overline{BD}$, akibatnya $\overline{AC} \perp \overline{BD}$ dan $\overline{DE} \cong \overline{EB}$.

Teorema 4.14. Jika ABCD suatu layang-layang dengan diagonal $\overline{AC}$ terletak pada sumbu diagonal $\overline{BD}$, maka $\overline{AB} \cong \overline{AD}$ dan $\overline{CB} \cong \overline{CD}$.

Bukti:

Diketahui ABCD suatu layang-layang dengan diagonal $\overline{AC}$ terletak pada sumbu diagonal $\overline{BD}$.

Akan dibuktikan bahwa $\overline{AB} \cong \overline{AD}$ dan $\overline{CB} \cong \overline{CD}$.



Perhatikan Δ BEC dan Δ DEC,

$\overline{BE} \cong \overline{DE}$ (Def.3.10) ,

$\angle$ BEC $\cong \angle$ DEC (Akibat Def.2.20),

$\overline{CE} \cong \overline{CE}$ (sifat refleksif),

sehingga menurut Teo.3.1 dapat disimpulkan Δ BEC $\cong \Delta$ DEC.

Jadi menurut Def.3.8 $\overline{BC} \cong \overline{DC}$ (1)

Selanjutnya perhatikan $\triangle$ ABE dan $\triangle$ ADE,

$\overline{BE} \cong \overline{DE}$ (Def.3.10),

$\angle AEB \cong \angle AED$ (Akibat Def.2.20),

$\overline{CE} \cong \overline{CE}$ (sifat refleksif),

sehingga menurut Teo.3.1 dapat disimpulkan $\triangle ABE \cong \triangle ADE$.

Jadi, menurut Def.3.8 didapatkan $\overline{AB} \cong \overline{AD}$ (2)

Dari (1) dan (2), dapat disimpulkan bahwa pada layang-layang ABCD terdapat dua pasang sisi berdekatan yang kongruen.■

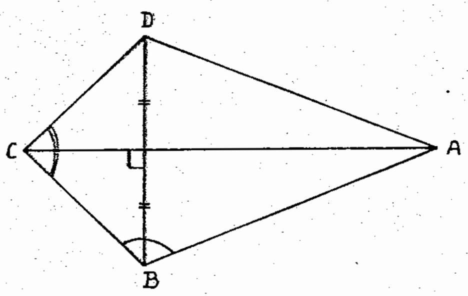
Berdasarkan Teo.4.14 ini, layang-layang dikenal juga sebagai segiempat yang mempunyai dua pasang sisi berdekatan yang sepasang-sepasang kongruen.

Teorema 4.15. Jika pada suatu layang-layang sepasang sudut berdekatannya saling berpelurus, maka layang-layang itu merupakan belah ketupat.

Bukti:

Diketahui ABCD suatu layang-layang dengan $\angle$ ABC dan $\angle$ BCD saling berpelurus.

Akan dibuktikan bahwa ABCD suatu belah ketupat.



Menurut gambar di atas, $\angle$ ABC dan $\angle$ BCD merupakan pasangan sudut dalam sepihak, maka menurut Teo.3.17

$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, akibatnya $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$.

Sehingga menurut Def.4.5 ABCD suatu jajaran genjang.

Padahal dari Teo.4.14 $\overline{BC} \cong \overline{CD}$.

Berdasarkan Def.4.7 dapat disimpulkan ABCD suatu belah ketupat.■

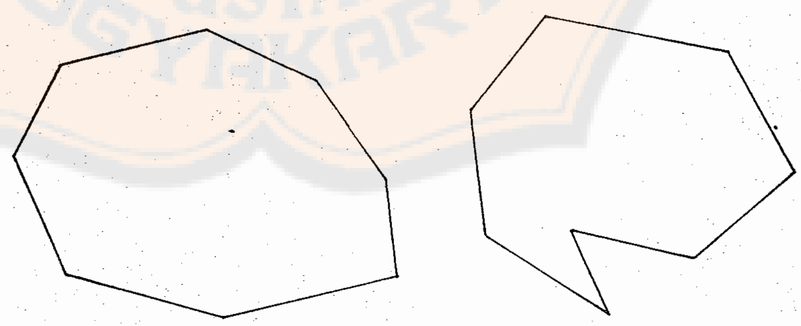
BAB V

SEGIBANYAK (SEGI-n)

Pada bab ini akan dibahas kelompok benda-benda geometri yang disebut *segibanyak* berserta beberapa sifatnya. Pembahasan dibatasi pada segibanyak segibanyak sederhana yang bersifat konveks.

5.1. Segibanyak Sederhana (Simple Polygon) Yang Bersifat Konveks.

Definisi 5. 1. Jika terdapat n titik yang berurutan siklis dan tidak ada tiga titik berurutan yang segaris, maka gabungan ruas garis-ruas garis yang dibentuk oleh pasangan-pasangan titik berturutan disebut *segi-n sederhana* dengan syarat tidak ada titik potong dua ruas garis selain pada ujung-ujungnya.

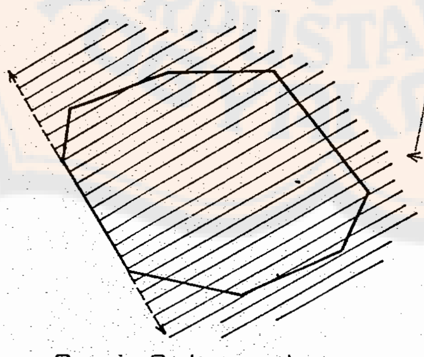


5.1.1. Unsur-unsur dan pengertian dasar

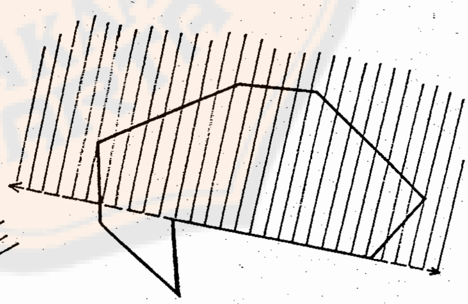
1. Ruas garis pembentuk suatu segi-n disebut *sisi segi-n*.

2. Setiap titik disebut *titik sudut segi-n.*
3. *Pasangan sisi berdekatan* adalah dua sisi yang mempunyai satu titik sudut sekutu.
4. Pada setiap titik sudut terbentuk sudut yang ditentukan oleh dua sinar garis pemuat dua sisi berdekatan.
5. *Pasangan titik sudut berdekatan* adalah dua titik sudut yang merupakan ujung-ujung dari suatu sisi.
6. *Pasangan sudut berdekatan* adalah dua sudut yang titik sudut-titik sudutnya saling berdekatan.

Definisi 5. 2. Suatu segi-n sederhana disebut *konveks* bila dan hanya bila untuk setiap sisinya berlaku bahwa seluruh segi-n terletak pada salah satu setengah bidang tertutup yang tertentu oleh garis pemuat sisi tersebut.



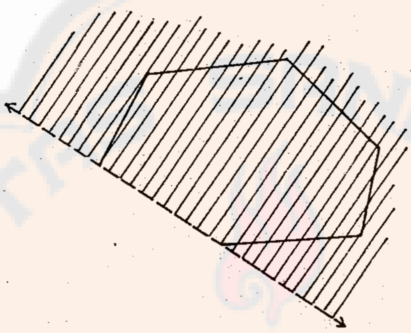
Segi-8 konveks

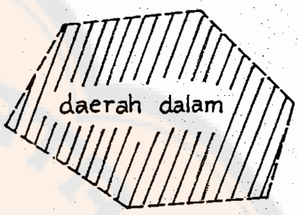


Segi-8 tidak konveks

Untuk selanjutnya akan dipergunakan istilah " segi-n" untuk menyatakan "**segi-n sederhana yang konveks.**"

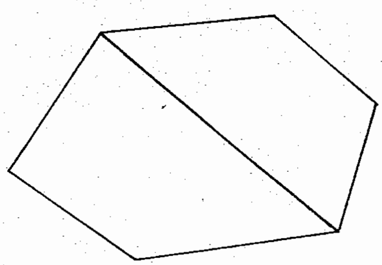
Definisi 5. 3. Perhatikan setengah bidang yang ditentukan oleh garis pemuat suatu sisi yang memuat unsur-unsur segi-n yang lain selain sisi tersebut.



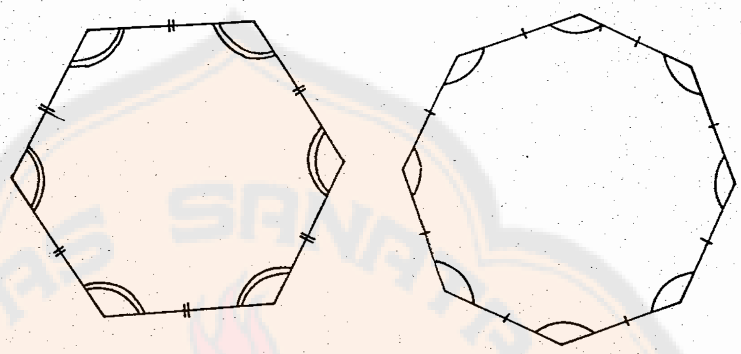


Daerah dalam suatu segi-n adalah irisan setengah bidang-setengah bidang seperti di atas yang tertentu oleh semua sisinya. Sedangkan suatu titik dikatakan terletak di *daerah luar* segi-n bila titik itu tidak terletak pada segi-n maupun pada daerah dalamnya.

Definisi 5. 4. Suatu *diagonal segi-n* adalah ruas garis yang menghubungkan dua titik sudut yang tidak berdekatan.



Definisi 5. 5. *Segi-n beraturan* adalah segi-n dengan semua sisinya kongruen dan semua sudutnya juga kongruen.



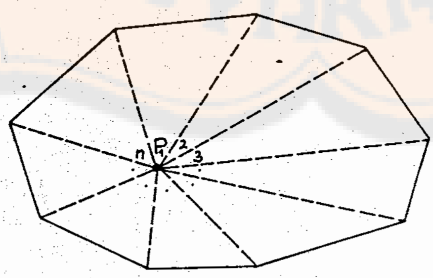
5.2. **Sifat-sifat**

Teorema 5. 1. Jumlah ukuran sudut-sudut suatu segi-n adalah (n-2).180.

Bukti:

Diketahui suatu segi-n.

Pada daerah dalam ditentukan suatu titik P, kemudian digambar ruas garis-ruas garis yang menghubungkan P dengan setiap titik sudut. Sehingga akan terbentuk n segitiga.



Menurut Teo.3.14 jumlah ukuran sudut n segitiga adalah n.180.

Sedangkan $m\angle P_1 + m\angle P_2 + \ldots + m\angle P_n = 2.180$,
jadi jumlah ukuran sudut-sudut suatu segi-n adalah

$$n.180 - 2.180 = (n-2).180. \blacksquare$$

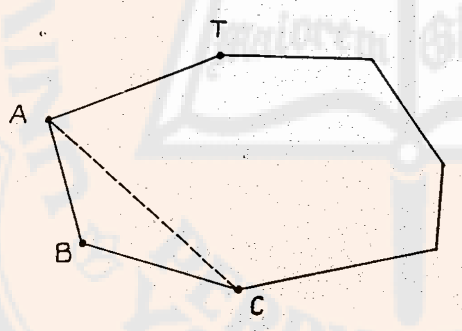
Teorema 5.1 berakibat bahwa ukuran setiap sudut pada segi-n beraturan adalah $[(n-2).180].\frac{1}{n}$, karena terdapat n sudut.

Teorema 5. 2. Banyaknya diagonal suatu segi-n adalah

$$\frac{1}{2}n\ (n-3).$$

Bukti:

Diketahui suatu segi-n.



Menurut Def.5.4, maka kombinasi A dengan A, T dan B tidak menyusun diagonal, jadi melalui suatu titik sudut dapat dibuat (n-3) diagonal.

Padahal terdapat n titik sudut, jadi terdapat n (n-3) diagonal. Ini berarti setiap diagonal dihitung dua kali, contohnya $\overline{AC}$ dan $\overline{CA}$.

Maka terdapat

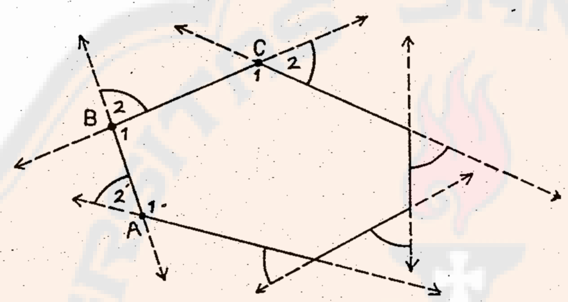
$$\frac{1}{2}n\ (n-3) \text{ diagonal}. \blacksquare$$

Definisi 5. 6. *Sudut luar* suatu segi-n adalah sudut yang bersisian dengan suatu sudut segi-n.

Teorema 5. 3. Jumlah ukuran sudut luar-sudut luar suatu segi-n adalah 360.

Bukti:

Diketahui suatu segi-n.



Menurut Def.2.25 $\angle A_1$ dan $\angle A_2$, $\angle B_1$ dan $\angle B_2$, $\angle C_1$ dan $\angle C_2$ adalah pasangan-pasangan sudut bersisian, maka mereka saling berpelurus.

Jadi menurut Def.2.18. $m\angle A_1 + m\angle A_2 = 180$

$m\angle B_1 + m\angle B_2 = 180$

$m\angle C_1 + m\angle C_2 = 180$

karena terdapat n titik sudut, maka ada n sudut, berarti terdapat n pasangan sudut bersisian.

Jadi

n 180 = (n-2) 180 + jumlah ukuran semua sudut luarnya.

maka jumlah ukuran sudut luarnya adalah

$$n\ 180 - (n-2)\ 180 = (\ n - (n-2)\ )\ 180$$

$$= 2.\ 180$$

$$= 360. \blacksquare$$

Catatan: jumlah ukuran sudut luar suatu segi-n tidak tergantung pada jumlah sisi segi-n tersebut.

BAB VI

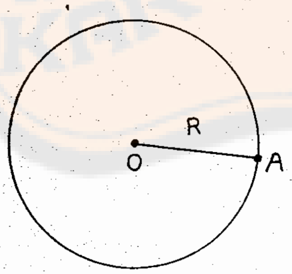
LINGKARAN

Pada bab ini akan dibahas lingkaran, yang meliputi pengenalan unsur-unsur, relasi kongruensi, hubungan antar unsur, beberapa sifat garis singgung, dan diakhiri dengan pembahasan hubungan lingkaran dengan benda-benda geometri yang terdahulu.

6.1. Pengertian dan Unsur-unsur

Definisi 6. 1. *Lingkaran* adalah himpunan titik-titik yang berjarak sama terhadap suatu titik tertentu. (Untuk selanjutnya titik tertentu tersebut disebut *pusat lingkaran*).

Definisi 6. 2. *Jari-jari* suatu lingkaran adalah ruas garis yang menghubungkan pusat lingkaran dan suatu titik sebarang pada lingkaran.

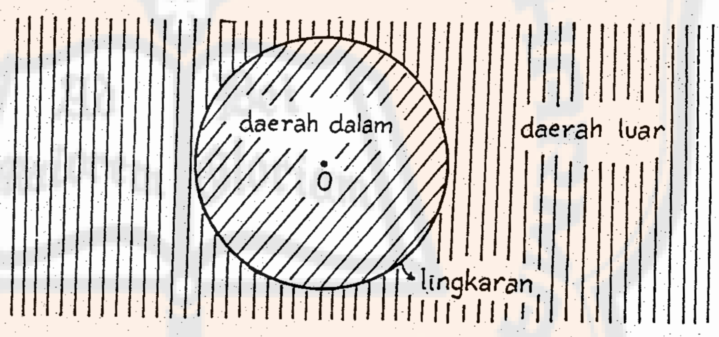


Lambang: ⊙ O

$\overline{OA}$ adalah suatu jari-jari pada ⊙ O dengan OA (panjang-jari-jari $\overline{OA}$) = R.

Definisi 6. 3. *Daerah dalam (interior)* suatu lingkaran adalah himpunan yang terdiri dari titik pusat dan semua titik yang jaraknya ke pusat lingkaran lebih kecil dari panjang jari-jari.[11]

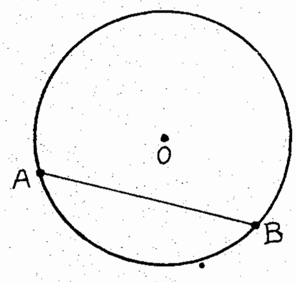
Sedangkan *daerah luar (eksterior)* adalah himpunan semua titik yang jaraknya terhadap pusat lingkaran lebih besar dari panjang jari-jari.



Definisi 6. 4. *Tali busur* suatu lingkaran adalah ruas garis yang menghubungkan dua titik berbeda yang terletak pada lingkaran.

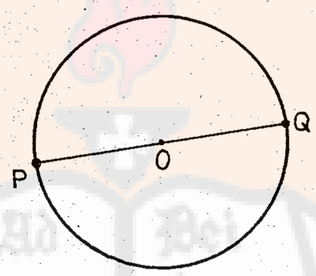
---

[11] Gabungan antara lingkaran dan daerah dalam suatu lingkaran biasa dikenal dengan sebutan "**daerah lingkaran.**"



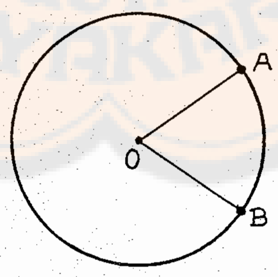
$\overline{AB}$ adalah suatu tali busur pada ⊙ O

Definisi 6. 5. *Garis tengah (diameter)* suatu lingkaran adalah tali busur yang memuat titik pusat lingkaran.



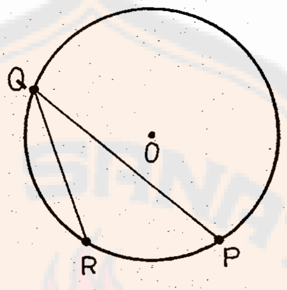
$\overline{PQ}$ adalah suatu garis tengah pada ⊙ O

Definisi 6. 6. *Sudut pusat* adalah sudut yang dibentuk oleh dua jari-jari, dengan pusat lingkaran sebagai titik sudutnya.



∠ AOB adalah suatu sudut pusat pada ⊙ O

Sudut keliling adalah sudut yang dibentuk oleh dua tali busur yang bersekutu di suatu titik pada lingkaran, dengan titik pada lingkaran tersebut sebagai titik sudutnya.[12]



∠ PQR adalah suatu sudut keliling pada ⊙ O

Definisi 6. 7. *Busur lingkaran* adalah bagian dari lingkaran yang dibatasi oleh dua titik pada lingkaran.

Dua titik, A dan B pada suatu lingkaran akan menentukan dua busur, yaitu:

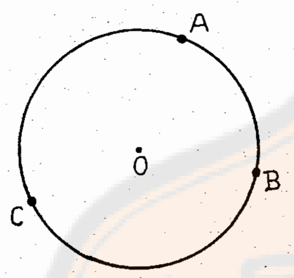
1. Bila A dan B bukan merupakan ujung-ujung suatu diameter lingkaran, maka mereka akan menentukan *busur kecil* dan *busur besar.*

   Busur kecil adalah busur yang terletak pada daerah dalam sudut pusatnya.

---

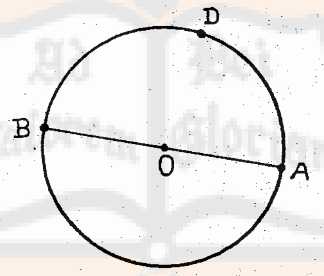
[12] Jari-jari dan tali busur berupa ruas garis. Suatu sudut yang dibentuk oleh dua ruas garis yang bersekutu salah satu ujungnya adalah sudut yang dibentuk oleh sinar garis-sinar garis pemuat kedua ruas garis tersebut yang berpangkal pada titik sekutu tersebut.

Busur besar adalah busur yang terletak pada daerah luar sudut pusatnya.



$\overset{\frown}{AB}$: busur kecil dan $\overset{\frown}{ACB}$: busur besar yang ditentukan oleh A dan B.

2. Bila A dan B merupakan titik-titik ujung suatu diameter, maka mereka akan menentukan *busur setengah lingkaran.*

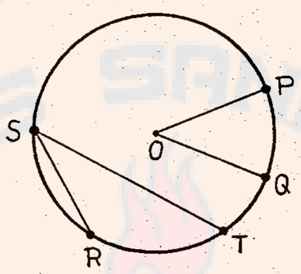


$\overset{\frown}{ADB}$ adalah busur setengah lingkaran dari ⊙ O

Untuk selanjutnya busur kecil diberi lambang dengan dua huruf, misalnya: $\overset{\frown}{AB}$; dan busur besar diberi lambang dengan tiga huruf, misalnya: $\overset{\frown}{ACB}$. Sedangkan busur setengah lingkaran juga akan diberi lambang dengan tiga huruf, misalnya $\overset{\frown}{ADB}$ di atas.

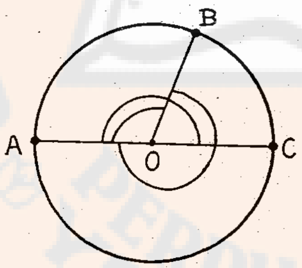
Catatan: Suatu busur dikatakan "di hadapan" suatu sudut bila,

1. Titik-titik ujung dari busur terletak pada kaki-kaki sudut dan setiap kaki sudut memuat satu titik ujung busur itu.
2. Kecuali titik-titik ujungnya, busur tersebut terletak pada daerah dalam sudut.



$\overset{\frown}{PQ}$ di hadapan $\angle$ POQ dan $\overset{\frown}{TR}$ di hadapan $\angle$ RST

Definisi 6. 8. *Ukuran suatu busur lingkaran* adalah sama dengan ukuran sudut pusat dihadapannya.

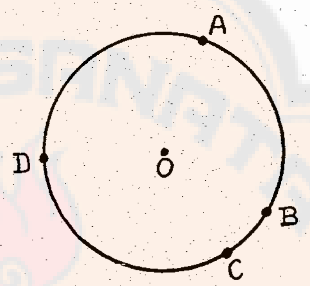


Lambang: m $\overset{\frown}{AB}$

Dibaca: ukuran busur AB.

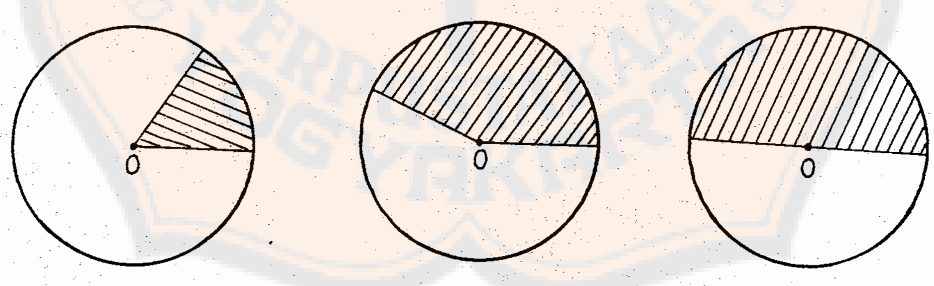
1. Jika $\overset{\frown}{AB}$ suatu busur kecil, maka m $\overset{\frown}{AB}$ sama dengan ukuran sudut pusatnya.
2. Jika $\overset{\frown}{ABC}$ suatu busur setengah lingkaran, maka m $\overset{\frown}{ABC}$ = 180.
3. Jika $\overset{\frown}{ACB}$ suatu busur besar, maka m $\overset{\frown}{ACB}$ = 360 − m $\overset{\frown}{AB}$, dengan $\overset{\frown}{AB}$ adalah busur kecil yang ujung-ujungnya bersekutu dengan ujung-ujung $\overset{\frown}{ACB}$.

Definisi 6. 9. Jika terdapat dua busur pada suatu lingkaran yang bersekutu di tepat satu titik yaitu pada titik ujungnya (kedua busur itu bersambungan), maka ukuran dari gabungan kedua busur itu sama dengan jumlah ukuran masing-masing busur tersebut.

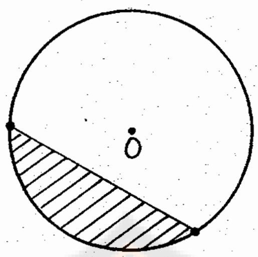


Contoh: $m\,\widehat{AB} + m\,\widehat{BC} = m\,\widehat{AC}$

Definisi 6.10. *Juring lingkaran* adalah bagian daerah lingkaran yang dibatasi oleh dua jari-jari dan busur di hadapan sudut pusat yang terbentuk.



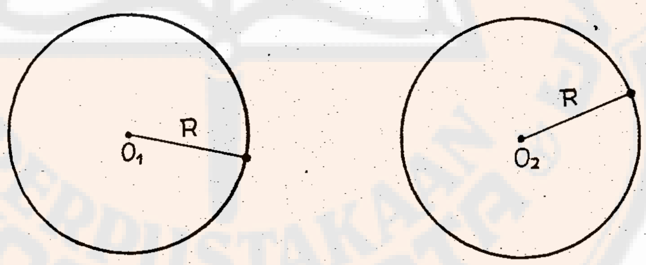
Definisi 6.11. *Tembereng lingkaran* adalah bagian daerah lingkaran yang dibatasi oleh suatu talibusur dan busur yang ujung-ujungnya bersekutu dengan ujung-ujung talibusur tersebut.



Dalam praktek pengajaran geometri di sekolah menengah dikenal istilah juring kecil, juring besar, tembereng kecil, dan tembereng besar.

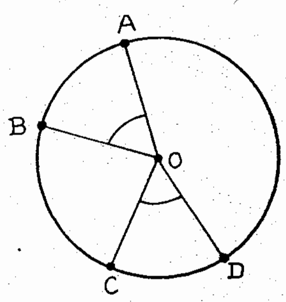
6.2. Kongruensi

Definisi 6.12. Jika dua lingkaran mempunyai jari-jari yang kongruen, maka kedua lingkaran itu kongruen.



Jika $\overline{O_1A} \cong \overline{O_2B}$ maka $\odot\, O_1 \cong \odot\, O_2$

Definisi 6.13. Dua busur pada suatu lingkaran disebut kongruen bila dua busur itu mempunyai ukuran yang sama.



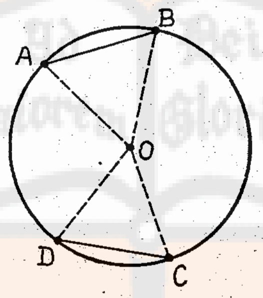
Jika m $\widehat{AB}$ = m $\widehat{CD}$ maka $\widehat{AB} \cong \widehat{CD}$

6.3. Hubungan Antara Unsur-unsur

Teorema 6. 1. Dua busur pada suatu lingkaran kongruen bila dan hanya bila talibusur-talibusur yang bersesuaian dengan busur itu kongruen

Bukti:

Diketahui suatu $\odot$ O dengan $\overline{AB}$ di hadapan $\widehat{AB}$ dan $\overline{CD}$ di hadapan $\widehat{CD}$.



<u>Bukti 1</u>: $\widehat{AB} \cong \widehat{CD} \Rightarrow \overline{AB} \cong \overline{CD}$.

Misalkan $\widehat{AB} \cong \widehat{CD}$, maka menurut Def.6.8 didapatkan

$\angle$ AOB $\cong$ $\angle$ COD.

Perhatikan Δ AOB dan Δ COD,

$\overline{OA} \cong \overline{OC}$,

$\angle$ AOB $\cong$ $\angle$ COD,

$\overline{OB} \cong \overline{OD}$,

maka menurut Teo.3.1 disimpulkan Δ AOB $\cong$ Δ COD,

sehingga menurut Def.3.8

$\overline{AB} \cong \overline{CD}$. (1)

Bukti 2: $\overline{AB} \cong \overline{CD} \Rightarrow \widehat{AB} \cong \widehat{CD}$.

Misalkan $\overline{AB} \cong \overline{CD}$.

Perhatikan Δ AOB dan Δ COD,

$\overline{OA} \cong \overline{OC}$,

$\overline{OB} \cong \overline{OD}$,

$\overline{AB} \cong \overline{CD}$,

maka menurut Teo.3.4 disimpulkan $\Delta AOB \cong \Delta COD$,

sehingga menurut Def.3.8 didapatkan bahwa

$\angle AOB \cong \angle COD$,

jadi menurut Def.6.8 didapatkan $\widehat{AB} \cong \widehat{CD}$. (2)

Dari (1) dan (2), maka dapat disimpulkan bahwa

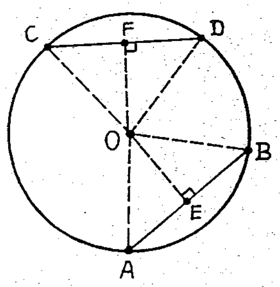
$\widehat{AB} \cong \widehat{CD} \Leftrightarrow \overline{AB} \cong \overline{CD}$.■

Teorema 6. 2. Pada suatu lingkaran talibusur-talibusur yang kongruen akan berjarak sama ke titik pusat lingkaran.

Bukti:

Diketahui $\odot$ O dengan talibusur-talibusur: $\overline{AB}$ dan $\overline{CD}$ dan $\overline{AB} \cong \overline{CD}$. Digambar $\overline{OE} \perp \overline{AB}$ dan $\overline{OF} \perp \overline{CD}$.

Akan dibuktikan bahwa OE = OF.



Perhatikan $\triangle$ AOB dan $\triangle$ COD,

$\overline{OA} \cong \overline{OD}$,

$\overline{OB} \cong \overline{OC}$,

$\overline{AB} \cong \overline{CD}$,

maka menurut Teo.3.4 dapat disimpulkan $\triangle$ AOB $\cong$ $\triangle$ COD, sehingga menurut Def.3.8 didapatkan $\angle$ OBA $\cong$ $\angle$ OCD. Karena BEA dan CFD, maka $\angle$ OBE $\cong$ $\angle$ OCF.

Selanjutnya perhatikan $\triangle$ OBE dan $\triangle$ OCF,

$\overline{OB} \cong \overline{OC}$,

$\angle$ OBE $\cong$ $\angle$ OCF (Def.3.8),

$\angle$ OEB $\cong$ $\angle$ OFC (Akibat Def.2.20),

maka menurut Teo.3.8 dapat disimpulkan $\triangle$ OBE $\cong$ $\triangle$ OCF, sehingga menurut Def.3.8 didapatkan

$\overline{OE} \cong \overline{OF}$,

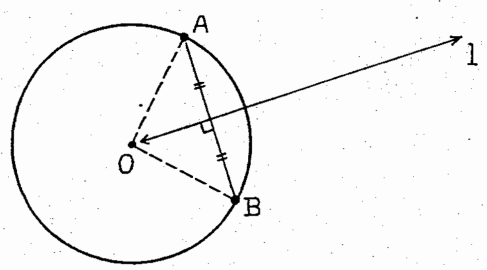
jadi menurut Def.2.15 OE = OF.■

Teorema 6. 3. Sumbu suatu talibusur melalui titik pusat lingkaran.

Bukti:

Diketahui ⊙ O dengan $\overline{AB}$ suatu talibusur dan garis l adalah sumbu $\overline{AB}$.

Akan dibuktikan bahwa titik O terletak pada l.



Menurut Def.6.1 $\overline{OA} \cong \overline{OB}$,

sehingga berdasarkan Teo.3.24 dapat disimpulkan bahwa O terletak pada l, atau sumbu $\overline{AB}$ melalui titik pusat O.■

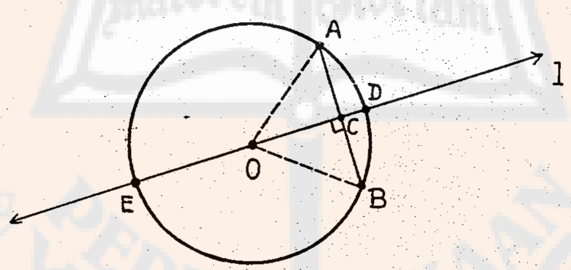
Teorema 6. 4. Jika suatu garis melalui titik pusat lingkaran dan tegak lurus suatu talibusur, maka garis tersebut akan membagi dua talibusur dan kedua busur di hadapan talibusur tersebut.

Bukti:

Diketahui $\odot$ O dengan $\overline{AB}$ adalah suatu talibusur dan garis l melalui titik pusat O, $l \perp \overline{AB}$.

Garis l memotong $\odot$ O di D dan E.

Akan dibuktikan AC = BC, m $\widehat{AD}$ = m $\widehat{DB}$, dan m $\widehat{AE}$ = m $\widehat{EB}$.



Digambar $\overline{OA}$ dan $\overline{OB}$, dan misalkan garis l memotong $\overline{AB}$ di C.

Perhatikan Δ ACO dan Δ BCO,

$\overline{CO} \cong \overline{CO}$ (sifat refleksif),

$\overline{AO} \cong \overline{BO}$,

$\angle$ ACO $\cong$ $\angle$ BCO (Akibat Def.2.20),

maka menurut Teo.3.11 disimpulkan Δ ACO $\cong$ Δ BCO,

sehingga menurut Def.3.8:

1. $\overline{AC} \cong \overline{BC}$, yang berarti garis l membagi $\overline{AB}$ menjadi dua bagian sama panjang.
2. $\angle$ AOC $\cong$ $\angle$ BOC atau $\angle$ AOD $\cong$ $\angle$ BOD, yang berarti m$\angle$ AOD = m$\angle$ BOD.

   Menurut Def.6.7 m$\angle$ AOD = m $\widehat{AD}$ dan m$\angle$ BOD = m $\widehat{BD}$, jadi m $\widehat{AD}$ = m $\widehat{BD}$.

   Berarti garis l membagi $\widehat{ADB}$ menjadi dua bagian sama besar.

3. $\angle$ AOE dan $\angle$ BOE berturut-turut adalah pelurus-pelurus dari $\angle$ AOD dan $\angle$ BOD, jadi menurut Teo.2.7 $\angle$ AOE $\cong$ $\angle$ BOE, sehingga menurut Def.2.20 m$\angle$ AOE = m$\angle$ BOE. Menurut Def.6.7 m$\angle$ AOE = m $\widehat{AE}$ dan m$\angle$ BOE = m $\widehat{BE}$, maka m $\widehat{AE}$ = m $\widehat{BE}$.

   Berarti garis l membagi $\widehat{AEB}$ menjadi dua bagian sama besar.

Teorema 6. 5. Ukuran suatu sudut keliling sama dengan setengah dari ukuran busur di hadapannya.

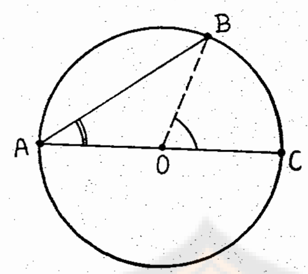
Bukti:

Catatan: teorema ini akan dibuktikan untuk tiga kemungkinan sudut keliling.

<u>Kemungkinan 1.:</u> Salah satu kaki sudut keliling adalah diameter lingkaran.

Diketahui $\odot$ O dengan $\angle$ BAC suatu sudut keliling yang dibentuk oleh talibusur $\overline{AB}$ dan diameter $\overline{AC}$.

Akan dibuktikan m$\angle$ BAO = $\frac{1}{2}$ m $\widehat{BC}$.



Perhatikan Δ ABO, $\angle$ BOC adalah sudut sudut luarnya maka menurut Teo.3.15 didapatkan

$m\angle BOC = m\angle BAO + m\angle ABO.$

Karena $\overline{OA} \cong \overline{OB}$, maka menurut Def.3.2 Δ ABO samakaki.

Jadi menurut Teo.3.3 didapatkan $\angle BAO \cong \angle ABO$, berarti menurut Def.2.17 $m\angle BAO = m\angle ABO$.

Sehingga $m\angle BOC = m\angle BAO + m\angle BAO$ (substitusi)

$m\angle BOC = 2m\angle BAO.$

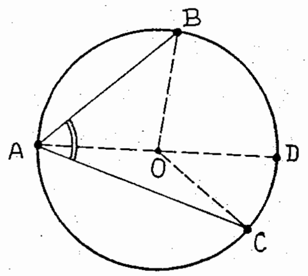
Padahal menurut Def.6.8 $m\angle BOC = m\ \widehat{BC}$, jadi

$m\angle BAO = \frac{1}{2}\ m\ \widehat{BC}.$ ■

<u>Kemungkinan 2.:</u> Kedua kaki sudut keliling adalah tali busur yang terletak pada pihak yang berlainan terhadap diameter yang melalui titik sudutnya.

Diketahui $\odot$ O dengan talibusur-talibusur $\overline{AB}$ dan $\overline{AC}$.

Akan dibuktikan $m\ \angle BAC = \frac{1}{2}\ m\ \widehat{BDC}$.



Menurut akibat Aks.20.a, maka $m\angle BAC = m\angle BAD + m\angle DAC$.

Menurut hasil pada kemungkinan 1.

$$m\angle BAD = \frac{1}{2}\ m\ \widehat{BD} \quad \text{dan} \quad m\angle\ DAC = \frac{1}{2}\ m\ \widehat{DC}.$$

Sehingga

$$m\angle\ BAC = \frac{1}{2}\ m\ \widehat{BD} + \frac{1}{2}\ m\ \widehat{DC} \qquad \text{(substitusi)}$$

jadi

$$m\angle\ BAC = \frac{1}{2}\ (\ m\ \widehat{BD} + m\ \widehat{DC})$$

padahal menurut Def.6.9 $m\ \widehat{BD} + m\ \widehat{DC} = m\ \widehat{BDC}$,

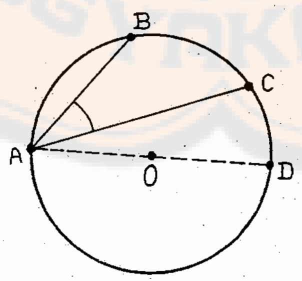
jadi

$$m\angle\ BAC = \frac{1}{2}\ m\ \widehat{BDC}. \blacksquare$$

<u>Kemungkinan 3.</u>: Kedua kaki sudut keliling adalah talibusur yang terletak sepihak terhadap diameter yang melalui titik sudutnya.

Diketahui $\odot$ O dengan diameter $\overline{AD}$.

Akan dibuktikan $m\ \angle\ BAC = \frac{1}{2}\ m\ \widehat{BC}$.



Menurut hasil pada kemungkinan 1.,

$$m\angle\ BAD = \frac{1}{2}\ m\ \widehat{BD} \quad \text{dan} \quad m\angle\ CAD = \frac{1}{2}\ m\ \widehat{CD}.$$

Menurut akibat Aks.20.a, maka $m\angle BAD = m\angle BAC + m\angle CAD$,

sehingga $\frac{1}{2}\, m\, \widehat{BD} = m\angle BAC + \frac{1}{2}\, m\, \widehat{CD}$.

jadi

$$m\angle BAC = \frac{1}{2}\, m\, \widehat{BD} - \frac{1}{2}\, m\, \widehat{CD}$$

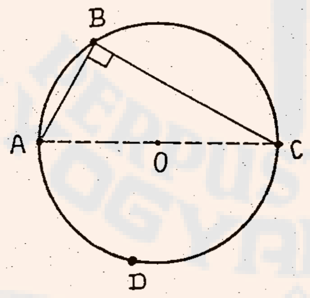
$$m\angle BAC = \frac{1}{2}\,(m\, \widehat{BD} - m\, \widehat{CD}).$$

Padahal menurut Def.6.9 $m\, \widehat{BD} = m\, \widehat{BC} + m\, \widehat{CD}$,

maka $m\, \widehat{BD} - m\, \widehat{CD} = m\, \widehat{BC}$.

Jadi $m\angle BAC = \frac{1}{2}\, m\, \widehat{BC}$.■

Teorema 6.5, berakibat bahwa sudut keliling, $\angle ABC$, di hadapan busur setengah lingkaran merupakan suatu sudut siku-siku.



Pada suatu $\odot$ O:

Menurut Teo.6.5, maka

$m\angle ABC = \frac{1}{2}\, m\, \widehat{ADC}$,

dan $m\, \widehat{ADC} = 180$, jadi

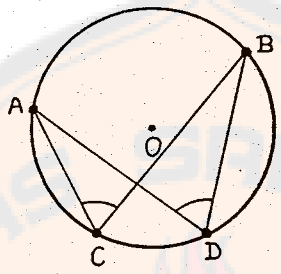
$m\angle ABC = 90$.

Teorema 6. 6. Dua sudut keliling pada suatu lingkaran di hadapan busur yang sama akan kongruen.

Bukti:

Diketahui ⊙ O dengan $\angle$ ACB dan $\angle$ ADB adalah dua sudut kelilingnya di hadapan $\widehat{AB}$.

Akan dibuktikan bahwa $\angle ACB \cong \angle ADB$.



Menurut Teo.6.5 didapatkan

$$m\angle ACB = \frac{1}{2}\ m\ \widehat{AB} \quad \text{dan} \quad m\angle ADB = \frac{1}{2}\ m\ \widehat{AB}.$$

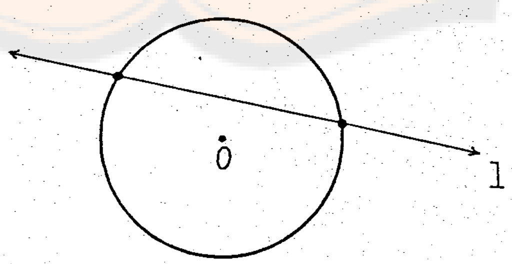
Jadi $m\angle ACB = m\angle ADB$.

Sehingga menurut Def.2.17 dapat disimpulkan

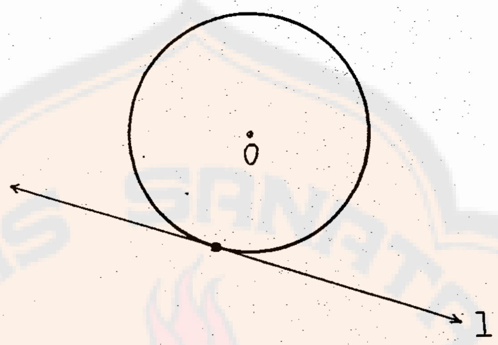
$$\angle ACB \cong \angle ADB. \blacksquare$$

6.4. Garis Potong dan Garis Singgung

Definisi 6.14. *Garis potong* pada suatu lingkaran adalah garis yang bersekutu dengan lingkaran di dua titik.



Definisi 6.15. *Garis singgung* pada suatu lingkaran adalah garis yang bersekutu dengan lingkaran di tepat satu titik.



6.4.1. **Sifat Garis Singgung Pada Sebuah Lingkaran**

Teorema 6. 7. Suatu garis akan tegak lurus pada jari-jari[13] di titik pada lingkaran bila dan hanya bila garis tersebut adalah garis singgung lingkaran di titik itu.

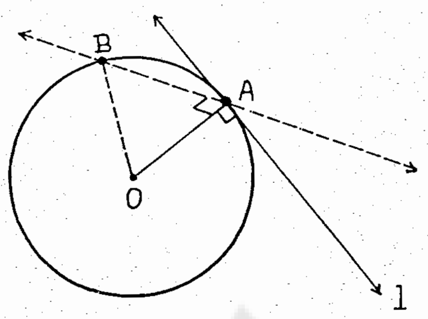
Bukti:

Bukti 1.: Jika suatu garis tegak lurus pada suatu jari-jari di suatu titik pada lingkaran, maka garis tersebut adalah garis singgung.

Diketahui ⊙ O dan $l \perp \overline{OA}$ di titik A.

---

[13] Garis tegak lurus garis/sinar garis/ruas garis di suatu titik P berarti garis tegak lurus garis/sinar garis/ruas garis dan melalui P yang terletak pada garis/sinar garis/ruas garis tersebut



Andaikan l memotong ⊙ O di A dan B.

$\overline{OB}$ adalah sisi miring Δ OAB, maka menurut Teo.3.21

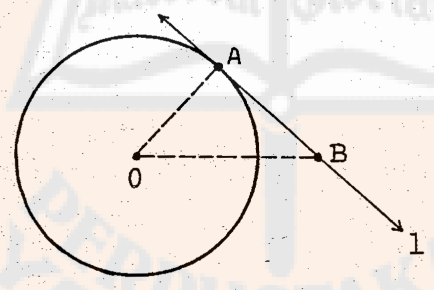
OB > OA.

Padahal OB = OA, karena keduanya adalah jari-jari. Jadi pengandaian di atas salah.

Kesimpulan: l adalah garis singgung pada ⊙ O di A.

Bukti 2.: Jika l suatu garis singgung, maka l akan tegak lurus jari-jari yang melalui titik singgung.

Diketahui l garis singgung pada ⊙ O di A.



Untuk semua B pada l (yang tidak sama dengan A), maka B akan terletak pada eksterior ⊙ O maka $\overline{OB}$ lebih besar dari jari-jari $\overline{OA}$, sehingga berlaku OB > OA.

Maka $\overline{OA}$ adalah ruas garis terpendek dari O ke l.

Menurut akibat Teo.3.20.2, maka $\overline{OA}$ ⊥ l.■

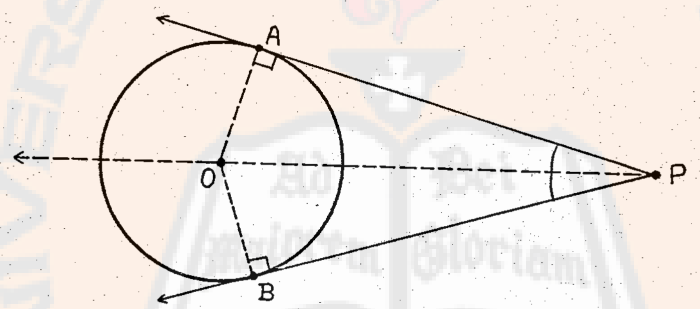
Teorema 6. 8. Kedua ruas garis singgung dari suatu titik di luar lingkaran ke lingkaran tersebut kongruen dan membentuk sudut-sudut yang kongruen dengan sinar garis yang melalui titik pusat dan berpangkal di titik tersebut.[14]

Bukti:

Diketahui ⊙ O dengan titik P di luar lingkaran.

$\overrightarrow{PA}$ dan $\overrightarrow{PB}$ adalah sinar garis-sinar garis yang menyinggung ⊙ O di A dan B.

Akan dibuktikan bahwa $\overline{PA} \cong \overline{PB}$ dan $\angle APO \cong \angle BPO$.



Dibuat $\overrightarrow{PO}$, $\overline{OA}$, dan $\overline{OB}$.

Menurut Teo.6.7 $\overline{OA} \perp \overrightarrow{PA}$ dan $\overline{OB} \perp \overrightarrow{PB}$.

Perhatikan Δ POA dan Δ POB,

$\overline{PO} \cong \overline{PO}$ (sifat refleksif),

$\overline{OA} \cong \overline{OB}$,

[14] Digambar garis singgung dari suatu titik di luar lingkaran ke lingkaran, maka ruas garis yang dibentuk oleh titik tersebut dan titik singgung disebut *ruas garis singgung* sedangkan sinar garis yang berpangkal di titik tersebut dan melalui titik singgung disebut *sinar garis singgung*.

sehingga menurut Teo.3.9 dapat disimpulkan Δ POA $\cong$ Δ POB, maka menurut Def.3.8

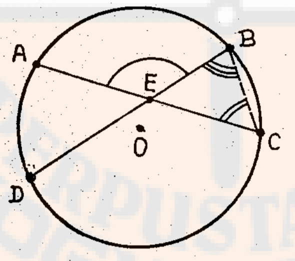
$\overline{PA} \cong \overline{PB}$ dan $\angle$ APO $\cong$ $\angle$ BPO.■

Teorema 6. 9. Ukuran salah satu sudut yang dibentuk oleh dua talibusur yang saling berpotongan di daerah dalam suatu lingkaran adalah setengah dari jumlah ukuran busur di hadapan sudut tersebut dan ukuran busur dihadapan sudut yang bertolak belakang dengannya.

Bukti:

Diketahui ⊙ O dengan talibusur-talibusur: $\overline{AC}$ dan $\overline{BD}$ yang berpotongan di titik E dan $\angle$ AEB dan $\angle$ CED saling bertolak belakang.

Akan dibuktikan m$\angle$ AEB = $\frac{1}{2}$ (m $\widehat{AB}$ + m $\widehat{CD}$).



Digambar $\overline{BC}$, sehingga terbentuk Δ BCE dengan $\angle$ AEB suatu sudut luarnya, sehingga menurut Teo.3.15,

m$\angle$ AEB = m$\angle$ DBC + m$\angle$ ACB,

Sedangkan menurut Teo.6.5,

m$\angle$ DBC = $\frac{1}{2}$ m $\widehat{CD}$ dan m$\angle$ ACB = $\frac{1}{2}$ m $\widehat{AB}$.

sehingga $\quad m\angle AEB = \frac{1}{2} m \widehat{CD} + \frac{1}{2} m \widehat{AB}$,

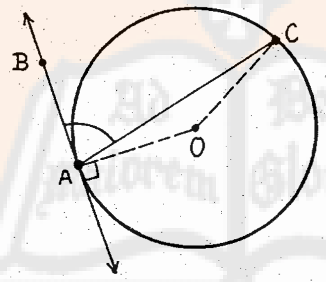
jadi $\quad m\angle AEB = \frac{1}{2} (m \widehat{AB} + m \widehat{CD})$.■

Teorema 6.10. Ukuran salah satu sudut yang dibentuk oleh suatu talibusur dan garis yang menyinggung lingkaran di salah satu ujung talibusur tersebut adalah setengah dari ukuran busur di hadapannya.

Bukti:

Diketahui ⊙ O dengan $\overline{AC}$ suatu talibusur dan $\overleftrightarrow{AB}$ suatu garis singgungnya, $\overline{AC}$ dan $\overleftrightarrow{AB}$ berpotongan di A.

Akan dibuktikan bahwa $m\angle CAB = \frac{1}{2} m \widehat{AC}$.



Dibuat $\overline{OA}$ dan $\overline{OC}$, dengan $\overline{OA} \cong \overline{OC}$, sehingga terbentuklah Δ OAC samakaki. Jadi $\angle OAC \cong \angle OCA$.

Menurut Teo.6.7 $\overline{OA} \perp \overleftrightarrow{AB}$,

$$m\angle CAB = 90 - m\angle OAC.$$

Perhatikan Δ OAC, menurut Teo.3.14 maka

$$m\angle AOC + m\angle OAC + m\angle OCA = 180,$$

sehingga $\quad m\angle AOC = 180 - (m\angle OAC + m\angle OCA)$.

Padahal menurut Def.2.17 $\quad m\angle OAC = m\angle OCA$,

maka $\quad m\angle AOC = 180 - (m\angle OAC + m\angle OAC)$, jadi $m\angle AOC = 180 - 2m\angle OAC$,

atau $m\angle AOC = 2(90 - m\angle OAC)$.

Dengan perkataan lain, $m\angle CAB = \frac{1}{2}\, m\angle AOC$,

padahal menurut Teo.6.7 $m\angle AOC = m\ \widehat{AC}$.

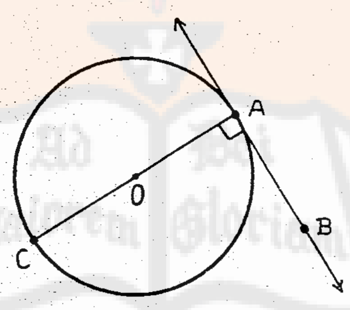
Jadi $m\angle CAB = \frac{1}{2}\, m\ \widehat{AC}$.■

Kejadian khusus: apabila talibusur yang dimaksud pada Teo.6.10 merupakan suatu diameter, maka:

$m\angle CAB = \frac{1}{2}\, m\ \widehat{AC}$ dengan $m\ \widehat{AC} = 180$,

jadi $m\angle CAB = 90$

<u>atau</u> $\angle CAB$ siku-siku.

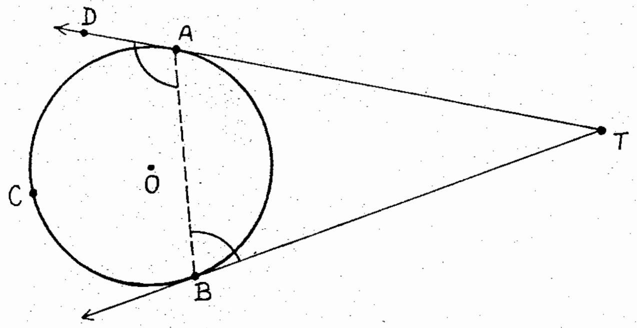


Teorema 6.11. Ukuran sudut apit yang dibentuk oleh dua sinar garis singgung dari suatu titik di luar lingkaran pada suatu lingkaran adalah setengah dari selisih ukuran kedua busur di hadapannya.

Bukti:

Diketahui $\odot$ O dengan $\overrightarrow{TA}$, $\overrightarrow{TB}$ adalah sinar garis singgung-sinar garis singgung dari titik T.

Akan dibuktikan bahwa $m\angle ATB = \frac{1}{2}\,(m\ \widehat{ACB} - m\ \widehat{AB})$.



Digambar talibusur $\overline{AB}$, maka menurut Teo.6.5,

$$m\angle\ ABT = \frac{1}{2}\ m\ \widehat{AB}\ \text{dan}\ m\angle\ DAB = \frac{1}{2}\ m\ \widehat{ACB}.$$

Perhatikan Δ ATB, $\angle$ DAB adalah suatu sudut luarnya maka menurut Teo.3.15 $m\angle\ DAB = m\angle\ ATB + m\angle\ ABT$

jadi $m\angle\ ATB = m\angle\ DAB - m\angle\ ABT$,

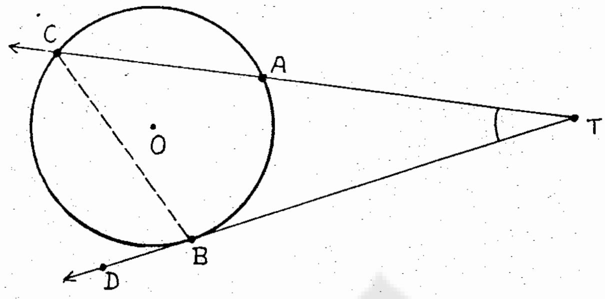
sehingga $m\angle\ ATB = \frac{1}{2}\ m\ \widehat{ACB} - \frac{1}{2}\ m\ \widehat{AB}$,

maka $m\angle\ ATB = \frac{1}{2}\ (m\ \widehat{ACB} - m\ \widehat{AB})$.■

Teorema 6.12. Ukuran sudut yang dibentuk oleh suatu sinar garis singgung dan suatu sinar garis potong atau oleh dua sinar garis potong dari suatu titik di luar lingkaran pada suatu lingkaran adalah setengah dari selisih ukuran busur-busur di hadapannya.

Bukti:

Kejadian 1.: Sudut ditentukan oleh suatu sinar garis singgung dan suatu sinar garis potong dari suatu titik di luar lingkaran.



Diketahui ⊙ O dengan $\overrightarrow{TB}$ suatu sinar garis singgung dan $\overrightarrow{TC}$ suatu sinar garis potong.[15]

Akan dibuktikan bahwa $m\angle\ CTB = \frac{1}{2}(m\ \widehat{BC} - m\ \widehat{AB})$.

Digambar $\overline{BC}$, kemudian perhatikan Δ BCT.

Menurut Teo.3.14 $m\angle\ CTB + m\angle\ TBC + m\angle\ BCT = 180$ (1)

Menurut Teo.6.5, $m\angle\ BCA = \frac{1}{2}\ m\ \widehat{AB}$ dan karena terdapat urutan CAT maka didapatkan

$$m\angle\ BCT = \frac{1}{2}\ m\ \widehat{AB} \quad (2)$$

Menurut Def.2.25 $\angle$ TBC dan $\angle$ CBD merupakan pasangan sudut bersisian, maka keduanya saling berpelurus, sehingga menurut Def.2.23 $m\angle\ TBC + m\angle\ CBD = 180$.

Padahal menurut Teo.6.10 didapatkan $m\angle\ CBD = \frac{1}{2}\ m\ \widehat{BC}$, jadi $m\angle\ TBC = 180 - \frac{1}{2}\ m\ \widehat{BC}$. (3)

Substitusi (2) dan (3) ke (1) menghasilkan,

$$m\angle\ CTB + (180 - \frac{1}{2}\ m\ \widehat{BC}) + \frac{1}{2}\ m\ \widehat{AB} = 180,$$

---

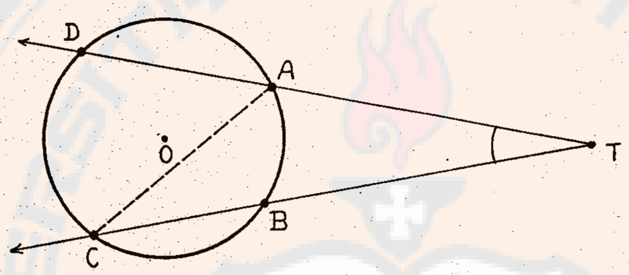
15 Digambar garis potong dari suatu titik di luar lingkaran pada suatu lingkaran, maka sinar garis yang berpangkal di titik tersebut dan melalui titik-titik potong disebut *sinar garis potong*.

sehingga, $m\angle\ CTB = 180 - 180 + \frac{1}{2}\ m\ \widehat{BC} - \frac{1}{2}\ m\ \widehat{AB}$

$m\angle\ CTB = \frac{1}{2}\ m\ \widehat{BC} - \frac{1}{2}\ m\ \widehat{AB}$

jadi, $m\angle\ CTB = \frac{1}{2}\ (m\ \widehat{BC} - m\ \widehat{AB})$.■

Kejadian 2.: Sudut dibentuk oleh dua sinar garis potong dari suatu titik di luar lingkaran.



Diketahui ⊙ O dengan $\overrightarrow{TC}$ dan $\overrightarrow{TD}$ adalah sinar garis potong-sinar garis potong.

Akan dibuktikan bahwa $m\angle\ CTD = \frac{1}{2}\ (m\ \widehat{CD} - m\ \widehat{AB})$.

Dibuat $\overline{AC}$, kemudian perhatikan Δ ACT.

Menurut Teo 3.14 $m\angle\ ATC + m\angle\ TCA + m\angle\ CAT = 180$ (1)

Menurut Teo.6.5, $m\angle\ BCA = \frac{1}{2}\ m\ \widehat{AB}$ dan karena terdapat urutan TBC, maka didapatkan

$m\angle\ TCA = \frac{1}{2}\ m\ \widehat{AB}$ (2)

Menurut Def.2.25 ∠ CAT dan ∠ CAD merupakan pasangan sudut bersisian, maka keduanya saling berpelurus, sehingga menurut Def.2.23 $m\angle\ CAT + m\angle\ CAD = 180$.

Padahal menurut Teo.6.5, $m\angle\ CAD = \frac{1}{2}\ m\ \widehat{CD}$, jadi $m\angle\ CAT = 180 - \frac{1}{2}\ m\ \widehat{CD}$ (3)

Substsitusi (2) dan (3) ke (1) menghasilkan,

$$m\angle\ ATC + \frac{1}{2}\ m\ \widehat{AB} + (180 - \frac{1}{2}\ m\ \widehat{CD}) = 180$$

sehingga $m\angle\ ATC = 180 - \frac{1}{2}\ m\ \widehat{AB} - 180 + \frac{1}{2}\ m\ \widehat{CD}$

$$m\angle\ ATC = \frac{1}{2}\ m\ \widehat{CD} - \frac{1}{2}\ m\ \widehat{AB}$$

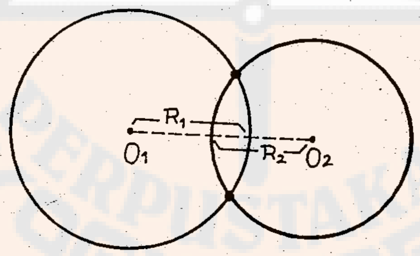
jadi $m\angle\ ATC = \frac{1}{2}\ (m\ \widehat{CD} - m\ \widehat{AB})$.■

6.4.2. Garis Singgung Persekutuan

Misalkan terdapat dua lingkaran yang berbeda: $\odot\ O_1$ dan $\odot\ O_2$, dengan panjang jari-jari berturut-turut adalah R_1 dan R_2.

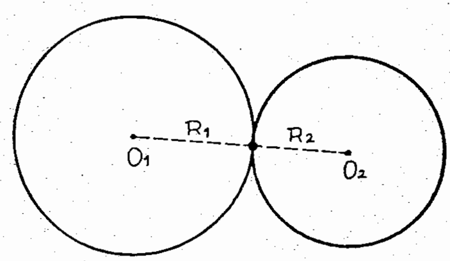
6.4.2.1. Kedudukan dua lingkaran saling berpotongan.

Jika $|R_1 - R_2| < O_1O_2 < R_1 + R_2$, maka kedua lingkaran akan saling berpotongan.

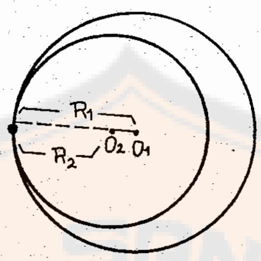


6.4.2.2. Kedudukan dua lingkaran saling bersinggungan.

1. Jika $O_1O_2 = R_1 + R_2$, maka kedua lingkaran akan saling bersinggungan di luar.

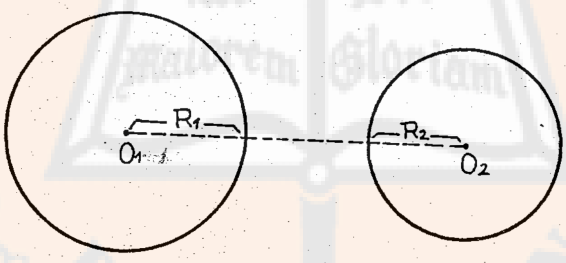


2. Jika $O_1O_2 = |R_1 - R_2|$, maka kedua lingkaran akan saling bersinggungan di dalam.

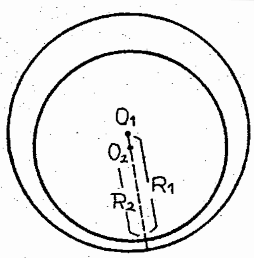


6.4.2.3. Kedudukan dua lingkaran saling asing.

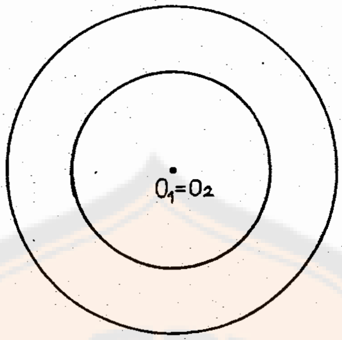
1. Jika $O_1O_2 > R_1 + R_2$, maka kedua lingkaran disebut *saling asing luar* dan ⊙ O_1 akan terletak di daerah luar ⊙ O_2 dan sebaliknya.



2. Jika $O_1O_2 < |R_1 - R_2|$, maka ⊙ O_2 seluruhnya akan terletak di daerah dalam ⊙ O_1 dan mereka disebut *saling asing dalam* dengan $R_1 > R_2$.



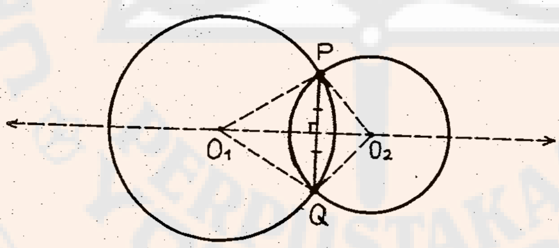
Kejadian khusus: ⊙ O_2 seluruhnya akan terletak di daerah dalam ⊙ O_1 dan sepusat.



Teorema 6.13. Jika dua lingkaran yang berbeda berpotongan di dua titik, maka garis yang melalui kedua titik pusat merupakan sumbu untuk ruas garis yang menghubungkan kedua titik potong tersebut.

Bukti:

Diketahui ⊙ O_1 dan ⊙ O_2 yang berpotongan di titik P dan titik Q. Akan dibuktikan bahwa $\overleftrightarrow{O_1O_2}$ adalah sumbu $\overline{PQ}$.



Digambar $\overline{O_1P}$ dan $\overline{O_1Q}$ yang merupakan jari-jari ⊙ O_1 dan $\overline{O_2P}$, $\overline{O_2Q}$ yang merupakan jari-jari ⊙ O_2, maka

$\overline{O_1P} \cong \overline{O_1Q}$ dan $\overline{O_2P} \cong \overline{O_2Q}$, sehingga menurut Def.2.15 $O_1P = O_1Q$, dan $O_2P = O_2Q$,

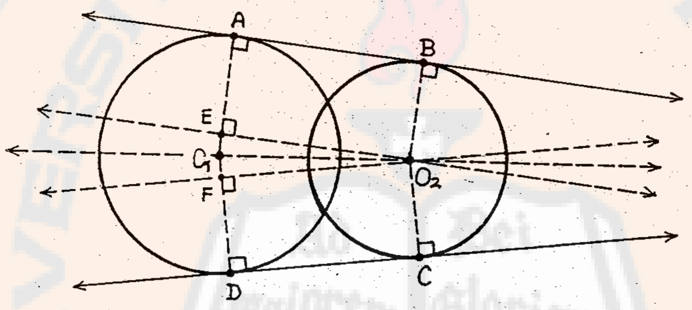
karena O_1 dan O_2 berjarak sama ke P dan Q yang merupakan ujung-ujung $\overline{PQ}$,

menurut Teo.3.24 maka dapat disimpulkan bahwa $\overleftrightarrow{O_1O_2}$ adalah sumbu $\overline{PQ}$.■

Teorema 6.14. Kedua ruas garis singgung sekutu luar pada dua lingkaran (berpotongan atau saling-asing luar) saling kongruen.

Bukti:

Diketahui $\odot O_1$ dan $\odot O_2$ dengan panjang jari-jari berturut-turut adalah R_1 dan R_2 dengan $R_1 > R_2$ dan kedua lingkaran tersebut saling berpotongan.



$\overleftrightarrow{AB}$ dan $\overleftrightarrow{CD}$ adalah dua garis singgung sekutu luar pada $\odot O_1$ dan $\odot O_2$, kemudian dibuat $\overline{O_1A} \perp \overline{AB}$, $\overline{O_2B} \perp \overline{AB}$, $\overline{O_1D} \perp \overline{CD}$, dan $\overline{O_2C} \perp \overline{CD}$.

Selanjutnya tarik garis melalui O_2 dan sejajar $\overleftrightarrow{AB}$ yang akan memotong $\overline{O_1A}$ di E dan garis melalui O_2 sejajar $\overleftrightarrow{CD}$ yang akan memotong $\overline{O_1D}$ di F,

sehingga menurut Teo.3.12 didapatkan

$\overline{O_1E} \perp \overline{EO_2}$ dan $\overline{O_1F} \perp \overline{FO_2}$.

$O_1A = R_1$ dan $EA = O_2B = R_2$, maka $O_1E = R_1 - R_2$.

$O_1D = R_1$ dan $FD = O_2C = R_2$, maka $O_1F = R_1 - R_2$.

Jadi, $O_1E = O_1F$ (2)

Menurut Teo.3.33 didapatkan

$$(EO_2)^2 = (O_1O_2)^2 - (O_1E)^2, \text{ dan}$$

$$(FO_2)^2 = (O_1O_2)^2 - (O_1F)^2.$$

Berdasarkan (2), maka

$$(FO_2)^2 = (O_1O_2)^2 - (O_1E)^2$$

berarti $(FO_2)^2 = (EO_2)^2$

Jadi $FO_2 = EO_2$,

sehingga menurut Def.2.15 $\overline{EO_2} \cong \overline{FO_2}$.

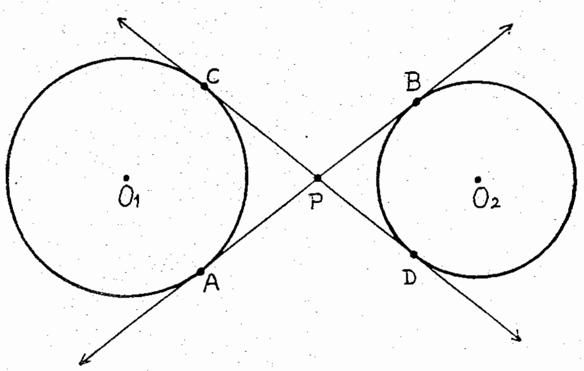
Karena (1), maka disimpulkan $\overline{AB} \cong \overline{CD}$.■

Kejadian khusus: Teorema ini juga berlaku untuk kejadian $R_1 = R_2$.

Teorema 6.15. Jika $\odot$ O_1 dan $\odot$ O_2 saling asing luar, $\overleftrightarrow{AB}$ dan $\overleftrightarrow{CD}$ adalah dua garis singgung sekutu dalam di titik A, B, C, dan D, maka $\overline{AB} \cong \overline{CD}$.

Bukti:

Diketahui $\odot$ O_1 dan $\odot$ O_2 dengan panjang jari-jari berturut-turut adalah R_1 dan R_2.



Titik-titik A, B, C, dan D adalah titik-titik singgung dengan $\overleftrightarrow{AB}$ dan $\overleftrightarrow{CD}$ berpotongan di titik P.

$\overrightarrow{PA}$ dan $\overrightarrow{PC}$ adalah dua sinar garis singgung pada $\odot$ O_1, maka menurut Teo.6.8 $\overline{PA} \cong \overline{PC}$,

$\overrightarrow{PB}$ dan $\overrightarrow{PD}$ adalah dua sinar garis singgung pada $\odot$ O_2, maka menurut Teo.6.8 $\overline{PB} \cong \overline{PD}$,

sehingga menurut Def.2.15 PA = PC dan PB = PD.

Menurut akibat Aks.15 AB = AP + PB,

maka AB = CP + PD,

padahal CD = CP + PD,

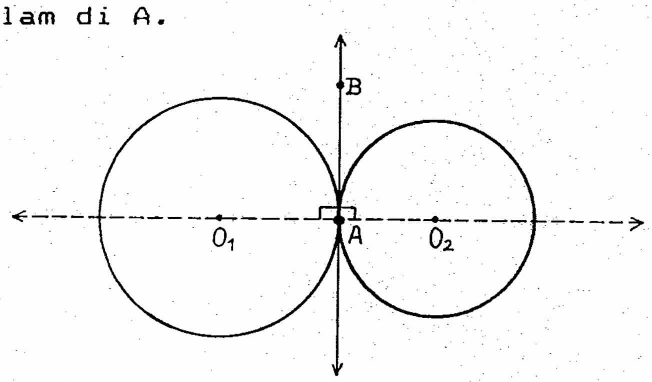
sehingga AB = CD,

Jadi menurut Def.2.15 $\overline{AB} \cong \overline{CD}$.■

Teorema 6.16. Jika $\odot$ O_1 dan $\odot$ O_2 bersinggungan di luar, di A, maka O_1, A, dan O_2 segaris.

Bukti:

Diketahui $\odot$ O_1 dan $\odot$ O_2 dengan $\overleftrightarrow{AB}$ adalah garis singgung sekutu dalam di A.



Menurut Teo.6.7, maka $\overline{O_1A} \perp \overleftrightarrow{AB}$ dan $\overline{O_2A} \perp \overleftrightarrow{AB}$, maka $\angle BAO_1$ dan $\angle BAO_2$ masing-masing merupakan sudut siku-siku, dan menurut Def.2.12 kedua sudut tersebut saling berdampingan.

Karena $m\angle BAO_1 + m\angle BAO_2 = 180$, maka menurut Def.2.25 kedua sudut itu saling bersisian, jadi $\angle O_1AO_2$ adalah sudut lurus.

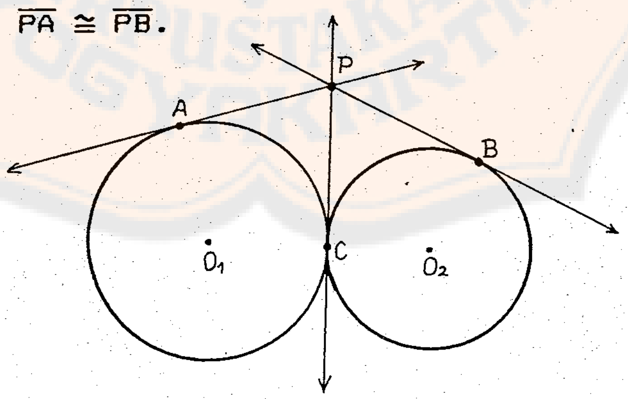
Kesimpulan: O_1, A, dan O_2 segaris.■

Teorema 6.17. Jika dua lingkaran bersinggungan di luar, maka ruas garis singgung-ruas garis singgung pada kedua lingkaran dari suatu titik pada garis singgung sekutu dalam ke titik singgung akan kongruen.

Bukti:

Diketahui $\odot O_1$ dan $\odot O_2$ yang bersinggungan luar di titik C dengan $\overleftrightarrow{PC}$ adalah garis singgung sekutu dalam, serta $\overleftrightarrow{PA}$ dan $\overleftrightarrow{PB}$ adalah garis singgung-garis singgung pada kedua lingkaran tersebut.

Akan dibuktikan $\overline{PA} \cong \overline{PB}$.



$\overleftrightarrow{PA}$ dan $\overleftrightarrow{PC}$ adalah garis singgung-garis singgung pada $\odot O_1$, maka menurut Teo.6.8 $\overline{PA} \cong \overline{PC}$ (1)

Sedangkan $\overleftrightarrow{PB}$ dan $\overleftrightarrow{PC}$ adalah garis singgung-garis singgung pada $\odot$ O_2, maka menurut Teo.6.8 $\overline{PB} \cong \overline{PC}$ (2).

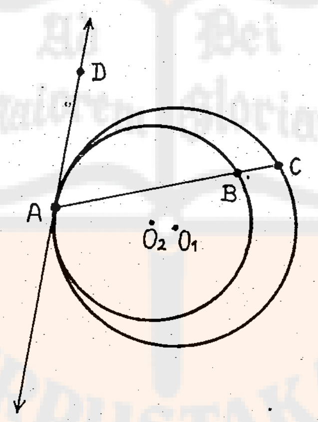
Dari (1) dan (2), dan dengan sifat transitif didapatkan

$\overline{PA} \cong \overline{PB}$.■

Teorema 6.18. Jika $\odot$ O_1 dan $\odot$ O_2 bersinggungan di titik A dan $\overline{AB}$ suatu talibusur pada $\odot$ O_2 serta $\overline{AC}$ suatu talibusur pada $\odot$ O_1 dengan A, B, dan C kolinear, maka m $\widehat{AB}$ = m $\widehat{AC}$.

Bukti:

Diketahui $\odot$ O_1 dan $\odot$ O_2 yang bersinggungan dalam di titik A.



Digambar garis singgung sekutu dalam, $\overleftrightarrow{AD}$, pada $\odot$ O_1 dan $\odot$ O_2 dengan talibusur $\overline{AB}$ dan $\overline{AC}$.

Akan dibuktikan m $\widehat{AB}$ = m $\widehat{AC}$.

Menurut Teo.6.10, maka

$m\angle$ DAB = $\frac{1}{2}$ m $\widehat{AB}$ dan $m\angle$ DAC = $\frac{1}{2}$ m $\widehat{AC}$.

Karena A, B, dan C kolinear, maka $\angle$ DAB $\cong$ $\angle$ DAC, jadi menurut Def.2.17, didapatkan $m\angle DAB = m\angle DAC$, sehingga

$$\frac{1}{2} m\ \widehat{AB} = \frac{1}{2} m\ \widehat{AC},$$

$$m\ \widehat{AB} = m\ \widehat{AC}. \blacksquare$$

6.5. Lingkaran Dalam dan Lingkaran Luar

Definisi 6.16. Segi-n yang setiap titik sudutnya terletak pada suatu lingkaran disebut *segi-n tali busur* (atau *segi-n siklis*), karena setiap sisinya merupakan talibusur pada lingkaran. Sedangkan lingkaran tersebut dinamakan *lingkaran luar segi-n.*

Definisi 6.17. Segi-n yang setiap sisinya merupakan ruas garis yang menyinggung lingkaran disebut *segi-n garis singgung* dan lingkaran tersebut dinamakan *lingkaran dalam segi-n.*

6.5.1. Segitiga dan Lingkaran.

Setiap segitiga mempunyai lingkaran dalam, karena menurut Teo.3.23, ketiga garis bagi suatu segitiga akan setitik dan titik tersebut berjarak sama ke ketiga sisi segitiga, sehingga titik itu akan menjadi pusat lingkaran dalamnya.

Setiap segitiga juga mempunyai lingkaran luar, karena menurut Teo.3.25, ketiga sumbu suatu segitiga akan setitik dan titik tersebut berjarak sama ke ketiga titik sudut segitiga, sehingga titik itu akan menjadi pusat lingkaran luarnya.

6.5.2. Segiempat dan Lingkaran.

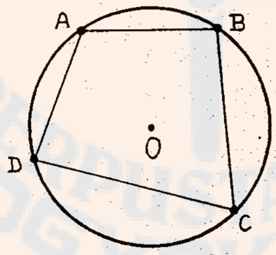
Suatu segiempat belum tentu mempunyai lingkaran dalam atau lingkaran luar, dua teorema berikut ini menunjukkan syarat agar suatu segiempat mempunyai lingkaran dalam atau lingkaran luar.

Teorema 6.19. Jika suatu segiempat merupakan segiempat talibusur, maka pasangan sudut yang berhadapan akan saling berpelurus.

Bukti:

Diketahui ABCD suatu segiempat talibusur pada $\odot$ O.

Akan dibuktikan $\angle$ ABC dan $\angle$ ADC serta $\angle$ DAB dan $\angle$ BCD masing-masing saling berpelurus.



Menurut Teo.6.5, maka

$$m\angle DAB = \frac{1}{2} m \widehat{BCD} \text{ dan } m\angle BCD = \frac{1}{2} m \widehat{BAD},$$

$$\text{maka } m\angle DAB + m\angle BCD = \frac{1}{2} (m \widehat{BCD} + m \widehat{BAD})$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 360$$

$$m\angle DAB + m\angle BCD = 180.$$

Jadi menurut Def.2.23 $\angle$ DAB dan $\angle$ BCD saling berpelurus.

Berdasarkan Teo.4.1, maka Teo.6.19. berakibat bahwa

$\angle$ ABC dan $\angle$ ADC juga saling berpelurus.■

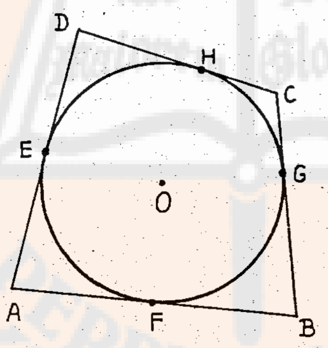
Sebagai contoh, yaitu: persegi panjang, bujursangkar, dan trapesium samakaki.

Teorema 6.20. Jika suatu segiempat merupakan segiempat garis singgung, maka jumlah panjang pasangan-pasangan sisi yang berhadapan sama besar.

Bukti:

Diketahui ABCD suatu segiempat garis singgung pada $\odot$ O dengan E, F, G, dan H adalah titik-titik singgungnya.

Akan dibuktikan AB + CD = AD + BC.



Menurut Teo.6.8, maka

$\overline{AE} \cong \overline{AF}$, $\overline{BF} \cong \overline{BG}$, $\overline{CG} \cong \overline{CH}$, dan $\overline{DH} \cong \overline{DE}$,

sehingga menurut Def.2.15 didapatkan

AE = AF , BF = BG , CG = CH , dan DH = DE,

maka,

$$AF + BF + CH + DH = AE + BG + CG + DE$$

$$(AF + BF) + (CH + DH) = (AE + DE) + (BG + CG)$$

$$AB + CD = AD + BC.$$■

Sebagai contoh, yaitu: belah ketupat dan bujursangkar.

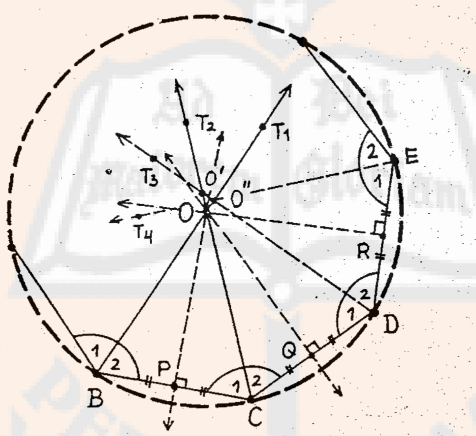
6.5.3. Segi-n dan Lingkaran.

Teorema 6.21. Jika segi-n beraturan maka pasti mempunyai lingkaran dalam dan lingkaran luar.

Bukti:

Diketahui suatu segi-n beraturan, maka menurut Def.5.5 semua sisinya sepasang-sepasang kongruen dan semua sudutnya sepasang-sepasang kongruen.

Akan dibuktikan segi-n beraturan tersebut mempunyai lingkaran dalam dan lingkaran luar.



Bukti 1.:

Dipilih 4 sudut $\angle B$, $\angle C$, $\angle D$, dan $\angle E$ yang letaknya berurutan pada segi-n beraturan tersebut.

Digambar gariss bagi $\angle B$ dan $\angle C$ yaitu $\overrightarrow{BT_1}$ dan $\overrightarrow{CT_2}$ yang berpotongan di titik O, sehingga menurut Def.3.11

$\angle B_1 \cong \angle B_2$ dan $\angle C_1 \cong \angle C_2$.

Karena diketahui $\angle B \cong \angle C$, akibatnya

$\angle B_1 \cong \angle B_2 \cong \angle C_1 \cong \angle C_2$.

Kemudian digambar gari bagi $\angle D$ yaitu $\overrightarrow{DT_3}$, sehingga menurut Def.3.11 $\angle D_1 \cong \angle D_2$.

Andaikan $\overrightarrow{DT_3}$ tidak melalui O, tetapi memotong $\overrightarrow{CT_2}$ di O′ yang tidak sama dengan O.

Perhatikan Δ BOC dan Δ CO′D,

$\angle B_2 \cong \angle C_2$,

$\overline{BC} \cong \overline{CD}$,

$\angle C_1 \cong \angle D_1$,

sehingga menurut Teo.3.2 $\Delta BOC \cong \Delta CO'D$.

Ini berarti O dan O′ berimpit, jadi pengandaian di atas salah. Dengan perkataan lain $\overrightarrow{DT_3}$ melalui O.

Selanjutnya digambar garis bagi $\angle E$ yaitu $\overrightarrow{ET_4}$, sehingga menurut Def.3.11 $\angle E_1 \cong \angle E_2$.

Andaikan $\overrightarrow{ET_4}$ tidak melalui O tetapi memotong $\overrightarrow{DT_3}$ di O" yang tidak sama dengan O.

Perhatikan Δ COD dan Δ DO"E,

$\angle C_2 \cong \angle D_2$,

$\overline{CD} \cong \overline{DE}$,

$\angle D_1 \cong \angle E_1$,

sehingga menurut Teo.3.2 $\Delta COD \cong \Delta DO''E$.

Ini berarti O dan O" berimpit, jadi pengandaian di atas salah. Dengan perkataan lain $\overrightarrow{ET_4}$ melalui O.

Dengan mengulangi proses yang sama pada sudut-sudut lain pada segi-n beraturan tersebut, maka akan didapatkan bahwa setiap garis baginya melalui O.

Menurut Teo.3.22 O berjarak sama ke sisi-sisi segi-n beraturan, jadi OP = OQ = OR = ...

Dengan perkataan lain O adalah pusat lingkaran dalam segi-n beraturan tersebut.

<u>Bukti 2.</u>:

Perhatikan Δ BOP dan Δ COP,

$\overline{OP} \cong \overline{OP}$,

$\angle$ OPB $\cong$ $\angle$ OPC (akibat Def.2.20), (1)

$\angle B_2 \cong \angle C_1$,

sehingga menurut Teo.3.8 Δ BOP $\cong$ Δ COP,

maka menurut Def.3.8

$\overline{BP} \cong \overline{CP}$. (2)

Dari (1) dan (2) dengan berdasarkan Def.3.10 maka $\overline{OP}$ terletak pada sumbu $\overleftrightarrow{OP}$ pada $\overline{BC}$.

Menurut hasil bukti 1, maka berarti $\overline{OQ}$ terletak pada sumbu $\overleftrightarrow{OQ}$ pada $\overline{CD}$, $\overline{OR}$ terletak pada sumbu $\overleftrightarrow{OR}$, dan seterusnya, sehingga menurut Teo.3.24 O akan berjarak sama ke setiap titik sudut yang merupakan ujung-ujung sisi-sisi segi-n beraturan. Jadi OB = OC = OD = OE = ...

Dengan perkataan lain O sekaligus sebagai pusat lingkaran luar segi-n beraturan tersebut.■

BAB VII

PENUTUP

Geometri merupakan salah satu cabang matematika yang diajarkan di sekolah menengah, maka geometri turut memegang peranan terhadap keberhasilan pengajaran matematika. Penyusunan materi geometri menjadi salah satu unsur yang mendukung pengajaran geometri dan menjadi dasar sehingga pengajaran dapat menjadi tertib dan teratur.

Selama proses penulisan skripsi ini penulis merasakan bahwa penyusunan materi tersebut sungguh membutuhkan ketelitian yang tinggi dan harus pula mempertimbangkan beberapa hal yang terkait, antara lain dasar pemilihan urutan materi, kemudian tingkat kemampuan abstraksi siswa, dan sebagainya. Oleh karena itu, penulis bersyukur sekali mendapat kesempatan untuk menulis topik ini, walaupun tentu saja pada hasil tulisan ini masih terdapat kesalahan-kesalahan karena keterbatasan kemampuan penulis terhadap penguasaan materi dan pengalaman dalam pengajaran.

Sebelum mengakhiri skripsi ini penulis menegaskan bahwa kerangka Geometri Bidang Euclides yang telah disajikan di atas hanya berupa suatu pedoman pengajaran geometri formal yang lebih tertib. Oleh karena itu, para guru matematika dan calon guru matematika yang akan menggunakan harus mengolah lebih lanjut. Mengingat tingkat kemampuan daya abstraksi siswa, maka penulis menyarankan bahwa untuk penyusunan bahan ajar SMP, seperti yang telah dilakukan sebelumnya, aksioma-aksioma tidak diajarkan kepada siswa dan sebagai konsekuensinya maka beberapa pengertian seperti ruas garis dan sinar garis tidak didefinisikan melainkan diperkenalkan sebagai sesuatu yang ada begitu saja yang kemudian dilanjutkan dengan pengenalan pengertian selanjutnya berdasarkan pengertian-pengertian tersebut di atas. Tentu saja dengan sajian bahasa yang sederhana dan mengikuti metode global, karena menurut para ahli pendidikan matematika metode ini cocok untuk tingkat SMP. Sedangkan di tingkat SMA, guru harus mulai dengan memperkenalkan pengertian pangkal (unsur pangkal dan relasi pangkal) dan pernyataan pangkal (aksioma) yang akan digunakan untuk mendefinisikan beberapa pengertian yang pada waktu di SMP dianggap ada begitu saja, dalam hal ini digunakan metode deduktif-aksiomatis walaupun tidak terlalu ketat sajiannya dan sekaligus untuk melatihkan tertib penalaran pada para siswa SMA. Perwujudan penyusunan bahan ajar hendaknya memperhatikan aksioma, definisi, dan teorema yang menjadi prasyarat untuk mendefinisikan ataupun membuktikan suatu teorema lain, urutan penyajian tentu saja tidak dapat dibalik, ini berarti yang menjadi prasyarat harus diperkenalkan terlebih dahulu. Sehubungan dengan hal ini, pembaca dapat melihat skema urutan penyajian materi dan hubungan antara aksioma, definisi, dan teorema yang dibahas dalam skripsi ini. Kiranya usulan pedoman pengajaran geometri yang penulis susun ini dapat bermanfaat atau setidak-tidaknya menjadi pancingan atau pembuka jalan bagi para guru dan calon guru matematika khususnya, demi semakin baiknya mutu pengajaran geometri di sekolah menengah.

LAMPIRAN

KONSTRUKSI DALAM GEOMETRI BIDANG EUCLIDES

Konstruksi bukan merupakan bagian dari teori Geometri Euclides, hal ini telah ditegaskan pada bagian pendahuluan dari skripsi ini. Konstruksi dianggap penting untuk mempersiapkan siswa sekolah menengah yang akan melanjutkan ke pendidikan teknik (Wirasto, 1973: 14), di samping itu konstruksi digunakan juga untuk membantu pemahaman para siswa dan memotivasi mereka dalam mempelajari geometri sebagai salah satu cabang matematika.

Adapun alat-alat yang diperlukan untuk menyusun suatu konstruksi ada dua macam, yaitu alat yang bersifat fisik dan alat yang berupa konsep-konsep bagian dari teori geometri. Alat fisik yang digunakan adalah mistar dan jangka, sedangkan alat yang kedua adalah konsep-konsep yang berperan sebagai dasar dalam langkah-langkah penyusunan suatu konstruksi.

Pada bagian ini disajikan 25 macam konstruksi, penulis dengan sengaja hanya mencantumkan sebagian dari keseluruhan konstruksi lain yang dimungkinkan, dan disesuaikan dengan isi tulisan pada bagian terdahulu. Pada bagian tertentu dari suatu konstruksi akan ditunjukkan konsep yang mendasarinya, hal ini tidak penulis kerjakan secara detail melainkan hanya mementingkan bagian-bagian yang dianggap penting dan mendasar saja. Sajian konstruksi akan diawali dengan konstruksi dasar (konstruksi 1) yaitu tentang garis dan busur sebagai bagian dari suatu lingkaran (Def. 6.7) yang akan digunakan dalam penyusunan konstruksi yang lain.

DAFTAR KONSTRUKSI

1. a. Menggambar garis yang melalui dua titik.
   b. Menggambar busur.

2. Menyalin ruas garis: konstruksi suatu ruas garis pada sinar garis yang diberikan, sehingga ruas garis tersebut kongruen dengan ruas garis yang diberikan.

3. Menyalin sudut: konstruksi suatu sudut pada sinar garis dan suatu setengah bidang yang diberikan, sehingga sudut tersebut kongruen dengan sudut yang diberikan.

4. Menentukan sumbu suatu ruas garis.

5. Menentukan garis bagi suatu sudut.

6. Konstruksi segitiga yang diketahui dua sisi dan sudut apitnya.

7. Konstruksi segitiga yang diketahui dua sudut dan sisi apitnya.

8. Konstruksi segitiga yang diketahui ketiga sisinya.

9. Menentukan garis sejajar suatu garis yang diketahui dan melalui titik di luar garis tersebut.

10. Menentukan $\overline{AD}$ dengan diketahui $\overline{AB}$, sehingga $AD = \frac{2}{3}\ AB$.

11. Menentukan garis tegak lurus suatu garis yang diketahui dan melalui suatu titik pada garis tersebut.

12. Menentukan garis tegak lurus suatu garis yang diketahui dan melalui suatu titik di luar garis tersebut.

13. Mengkonstruksi segi-5 beraturan pada suatu lingkaran.

14. Mengkonstruksi segi-10 beraturan pada suatu lingkaran.

15. Mengkonstruksi segi-6 beraturan pada suatu lingkaran.

16. Mengkonstruksi segi-8 beraturan pada suatu lingkaran.

17. Menentukan garis singgung di suatu titik pada lingkaran.

18. Menentukan garis singgung pada lingkaran dan melalui T di luar lingkaran tersebut.

19. Menentukan garis singgung perekutuan dalam pada dua lingkaran saling bersinggungan luar dan dalam.

20. Menentukan garis singgung persekutuan luar pada dua lingkaran saling berpotongan.

21. Menentukan garis singgung persekutuan dalam pada dua lingkaran saling asing luar.

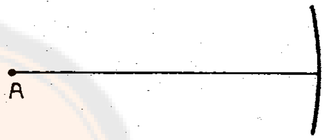
22. Menentukan lingkaran luar pada segitiga lancip, siku-siku, dan tumpul.

23. Menentukan lingkaran dalam pada segitiga lancip, siku-siku, dan tumpul.

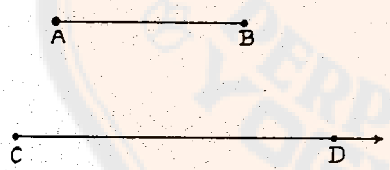
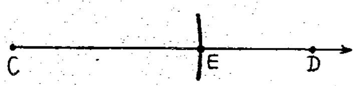
24. Menentukan lingkaran luar pada persegi panjang, bujur sangkar, dan trapesium samakaki.

25. Menentukan lingkaran dalam pada belah ketupat dan bujur sangkar.

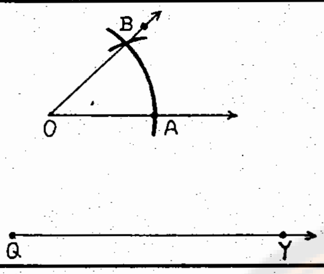
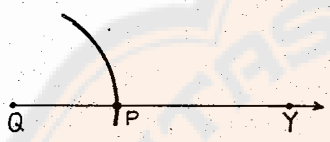
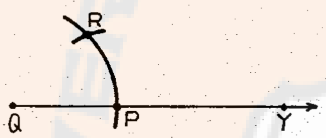
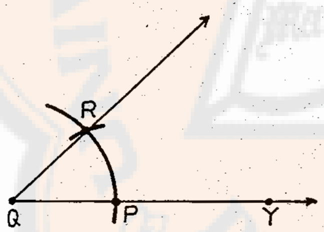
Konstruksi 1.

MENGGAMBAR GARIS YANG MELALUI DUA TITIK	MENGGAMBAR BUSUR
 Ditentukan dua titik A dan B, kemudian dengan mistar goreskan ujung pensil melalui A dan B, maka akan terbentuk $\overleftrightarrow{AB}$.	 Ditentukan titik A, kemudian pada titik tersebut diletakkan jarum jangka yang telah diregangkan dengan jari-jari tertentu dan goreskan ujung pensil jangka ke kertas, maka terbentuk suatu busur.

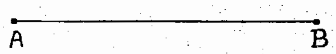
Konstruksi 2.

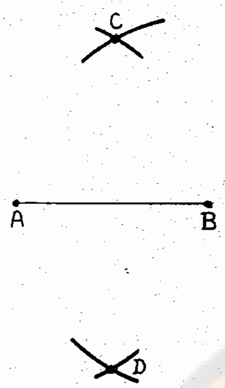
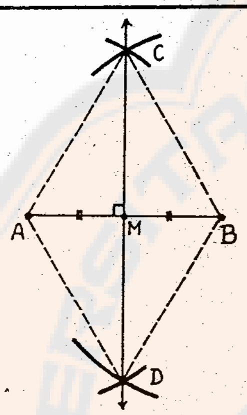
MENYALIN RUAS GARIS	
	1. Diketahui $\overline{AB}$ dan $\overrightarrow{CD}$.
	2. Berpusat di C digambar busur dengan jari-jari $\overline{AB}$ sehingga memotong $\overrightarrow{CD}$ di E, maka didapatkan $\overline{CE} \cong \overline{AB}$.

Konstruksi 3.

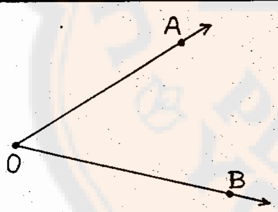
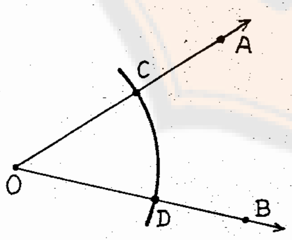
MENYALIN SUDUT	
	1. Diketahui ∠ AOB, $\overrightarrow{QY}$, dan suatu setengah bidang yang dibentuk oleh $\overleftrightarrow{QY}$.
	2. Berpusat di Q digambar busur dengan panjang jari-jari $\overline{OA}$ sehingga memotong $\overrightarrow{QY}$ di P.
	3. Berpusat di P digambar busur dengan panjang jari-jari $\overline{AB}$ sehingga memotong busur terdahulu di R.
	4. Dengan menghubungkan Q dan R akan didapatkan ∠ PQR ≅ ∠ AOB.

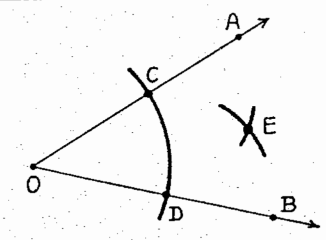
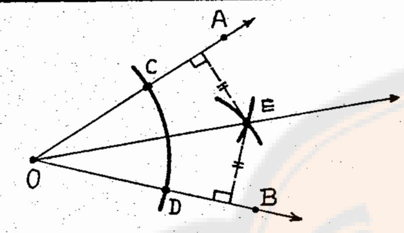
Konstruksi 4.

MENENTUKAN SUMBU SUATU RUAS GARIS	
	1. Diketahui $\overline{AB}$.

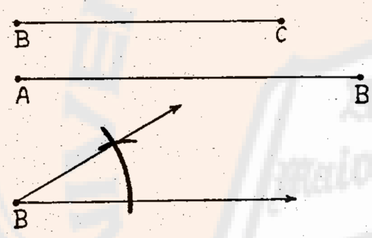
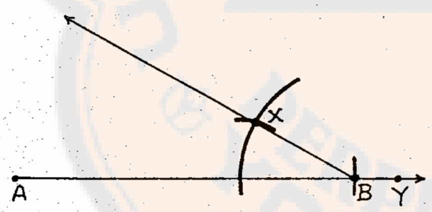
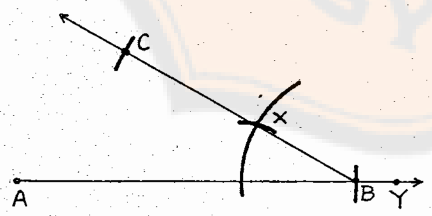
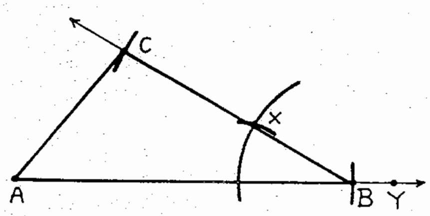
Lanjutan konstruksi 4.	
	2. Berpusat di A dan B digambar busur-busur dengan jari-jari AB pada kedua pihak $\overline{AB}$, sehingga didapatkan dua titik potong busur-busur tersebut yaitu C dan D. Jadi AC = BC = AD = BD.
	3. Titik C dan D dihubungkan, menurut Teo.3.24 $\overleftrightarrow{CD}$ merupakan sumbu $\overline{AB}$, dengan M adalah titik tengah $\overline{AB}$ dan $\overleftrightarrow{CD} \perp \overline{AB}$.

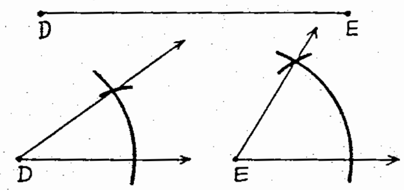
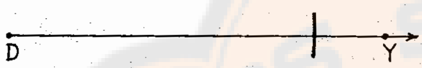
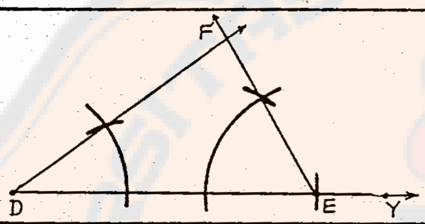
Konstruksi 5.

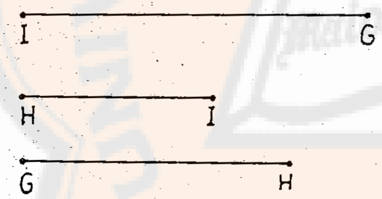
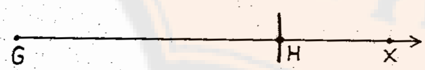
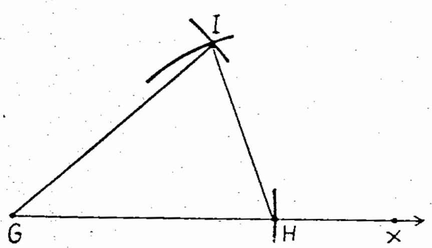
MENENTUKAN GARIS BAGI SUATU SUDUT	
	1. Diketahui $\angle$ AOB.
	2. Berpusat di O digambar busur yang memotong $\overrightarrow{OA}$ dan $\overrightarrow{OB}$, yaitu di C dan D.

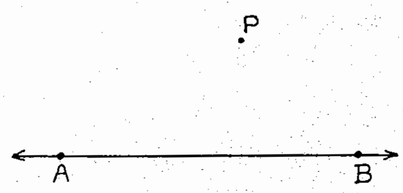
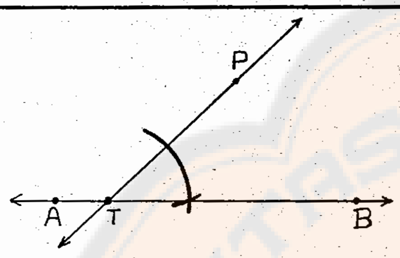
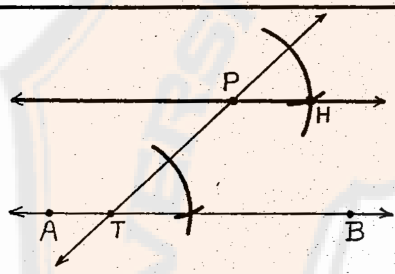
Lanjutan konstruksi 5.	
	3. Berpusat di C dan D digambar busur-busur pada daerah dalam $\angle$ AOB yang berpotongan di E, sehingga CE = DE.
	4. Titik O dan E dihubungkan, menurut Teo.3.22 $\overrightarrow{OE}$ merupakan garis bagi $\angle$ AOB.

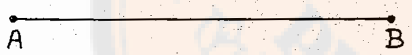
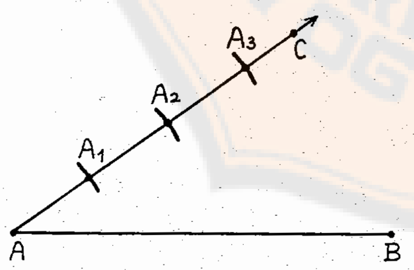
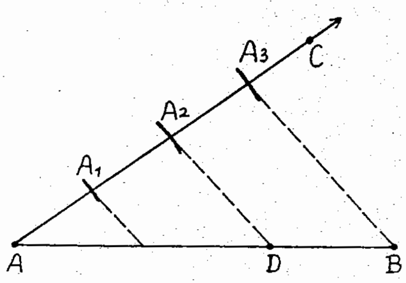
Konstruksi 6.

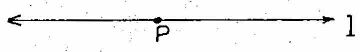
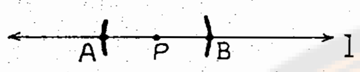
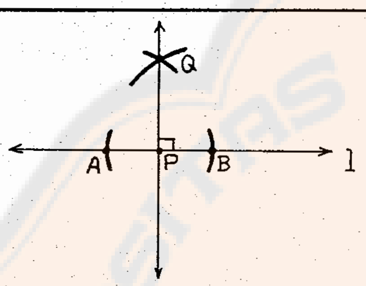
KONSTRUKSI SEGITIGA YANG DIKETAHUI DUA SISI DAN SUDUT APITNYA	
	1. Diketahui $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, dan $\angle$ B.
	2. Ditentukan titik A dan digambar $\overrightarrow{AY}$. Pada $\overrightarrow{AY}$ disalin $\overline{AB}$ dan berpusat di B disalin $\angle$ B pada suatu pihak terhadap $\overrightarrow{AY}$.
	3. Pada $\overrightarrow{BX}$ disalin $\overline{BC}$.
	4. Titik A dan C dihubungkan, maka akan terbentuk Δ ABC.

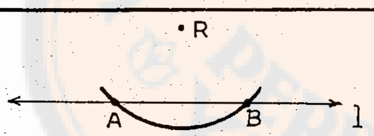
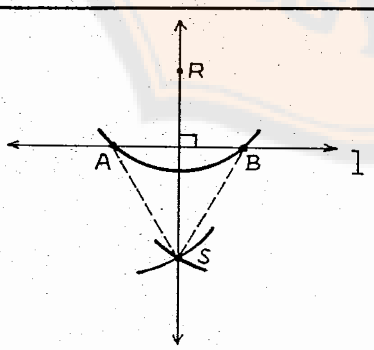
Konstruksi 7. KONSTRUKSI SEGITIGA YANG DIKETAHUI DUA SUDUT DAN SISI APITNYA.	
	1. Diketahui $\angle$ D, $\angle$ E, dan $\overline{DE}$ dengan syarat $m\angle D + m\angle E < 180$ (Th.3.14).
	2. Ditentukan titik D dan digambar $\overrightarrow{DY}$. ada $\overrightarrow{DY}$ disalin $\overline{DE}$.
	3. Berpusat di D dan E berturut-turut disalin $\angle$ D dan $\angle$ E pada pihak yang sama terhadap $\overrightarrow{DY}$, maka akan didapatkan F dan terbentuk $\triangle$ DEF.

Konstruksi 8. KONSTRUKSI SEGITIGA YANG DIKETAHUI KETIGA SISINYA.	
	1. Diketahui $\overline{GH}$, $\overline{HI}$, dan $\overline{IG}$ yang memenuhi teorema ketidaksamaan segitiga.
	2. Ditentukan titik G dan digambar $\overrightarrow{GX}$. Berpusat di G disalin $\overline{GH}$.
	3. Berpusat di G dan H digambar busur berturut-turut dengan jari-jari GI dan HI pada pihak yang sama terhadap $\overrightarrow{GX}$, maka kedua busur akan berpotongan di I dan terbentuk $\triangle$ GHI.

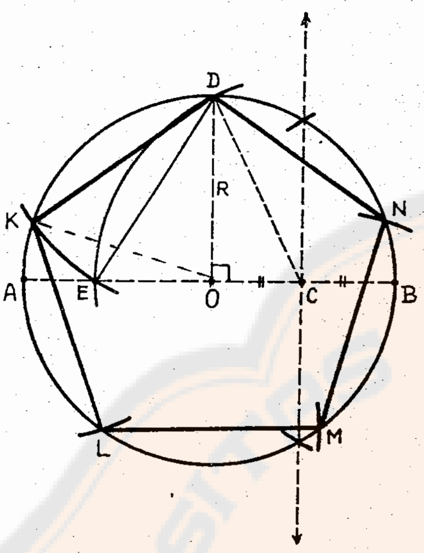
Konstruksi 9. MENENTUKAN GARIS SEJAJAR SUATU GARIS YANG DIKETAHUI DAN MELALUI TITIK DI LUAR GARIS TERSEBUT.	
	1. Diketahui $\overleftrightarrow{AB}$ dan P di luar $\overleftrightarrow{AB}$.
	2. Digambar garis yang melalui P dan suatu titik pada $\overleftrightarrow{AB}$ yaitu T, maka akan terbentuk $\angle$ PTB.
	3. Pada $\overleftrightarrow{TP}$ dengan pusat P disalin $\angle$ PTB pada pihak yang sama terhadap $\overleftrightarrow{TP}$, menurut Teo.3.12 $\overleftrightarrow{PH} \parallel \overleftrightarrow{AB}$.

Konstruksi 10. MENENTUKAN $\overline{AD}$ DENGAN DIKETAHUI $\overline{AB}$, SEHINGGA AD = $\frac{2}{3}$ AB.	
	1. Diketahui $\overline{AB}$.
	2. Berpusat di A digambar $\overrightarrow{AC}$, kemudian mulai dari A pada $\overrightarrow{AC}$ ditentukan busur-busur dengan jari-jari yang sama dan memotong $\overrightarrow{AC}$ di A_1, A_2, dan A_3.
	3. Titik A_3 dan B dihubungkan, kemudian dari A_2 ditentukan garis sejajar $\overline{A_3B}$ dan memotongnya di D, maka AD = $\frac{2}{3}$ AB.

Konstruksi 11. MENENTUKAN GARIS TEGAK LURUS SUATU GARIS YANG DIKETAHUI DAN MELALUI SUATU TITIK PADA GARIS TERSEBUT.	
	1. Diketahui garis l dan P pada l
	2. Berpusat di P ditentukan busur-busur yang memotong l di A dan B.
	3. Berpusat di A dan B ditentukan busur-busur dengan jari-jari tertentu pada salah satu pihak terhadap l, sehingga kedua busur berpotongan di Q, dan QA = QB, menurut Teo.3.24 maka $\overleftrightarrow{PQ} \perp \overline{AB}$. Jadi $\overleftrightarrow{PQ} \perp$ l.

Konstruksi 12. MENENTUKAN GARIS TEGAK LURUS SUATU GARIS YANG DIKETAHUI DAN MELALUI SUATU TITIK DI LUAR GARIS TERSEBUT.	
	1. Diketahui garis l dan titik R di luar l.
	2. Berpusat di R ditentukan busur-busur yang memotong l di A dan B.
	3. Berpusat di A dan B ditentukan busur-busur dengan jari-jari tertentu dan berlainan pihak dengan R terhadap l, sehingga kedua busur berpotongan di S dan SA = SB, menurut Teo.3.24 maka $\overleftrightarrow{RS} \perp \overline{AB}$ Jadi $\overleftrightarrow{RS} \perp$ l.

Konstruksi 13. MENGKONSTRUKSI SEGI-5 BERATURAN PADA SUATU LINGKARAN.



1. Diketahui $\odot$ O dengan panjang jari-jari R.

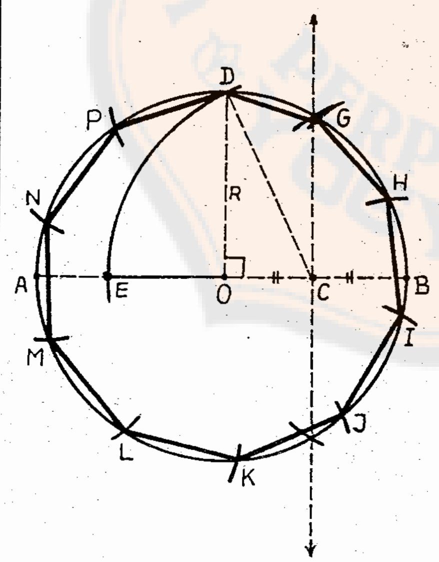
2. Digambar diameter $\overline{AB}$ dan jari-jari $\overline{OD}$ dengan $\overline{OD} \perp \overline{AB}$ di O.

3. Ditentukan sumbu $\overline{OB}$ yang memotong $\overline{OB}$ di C.

4. Berpusat di C digambar busur yang berjari-jari $\overline{CD}$, sehingga memotong $\overline{AO}$ di E, maka $\overline{DE}$ adalah suatu sisi segi-5 beraturan.

5. Mulai dari D digambar busur-busur dengan jari-jari $\overline{DE}$ sepanjang lingkaran sampai ditemukan kembali D, maka terbentuklah DKLMN suatu segi-5 beraturan.

Konstruksi 14. MENGKONSTRUKSI SEGI-10 BERATURAN PADA SUATU LINGKARAN.

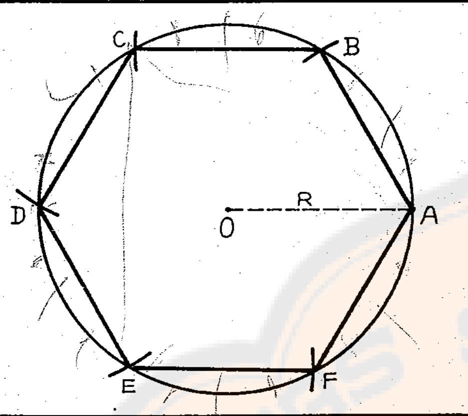


1. Sedangkan $\overline{OE}$ pada konstruksi 13 adalah suatu sisi segi-10 beraturan.

2. Mulai dari D digambar busur-busur dengan jari-jari $\overline{OE}$ sepanjang lingkaran sampai didapatkan kembali D, maka terbentuklan DGHIJKLMNP suatu segi-10 beraturan.

Konstruksi 15

MENGKONSTRUKSI SEGI-6 BERATURAN PADA SUATU LINGKARAN.



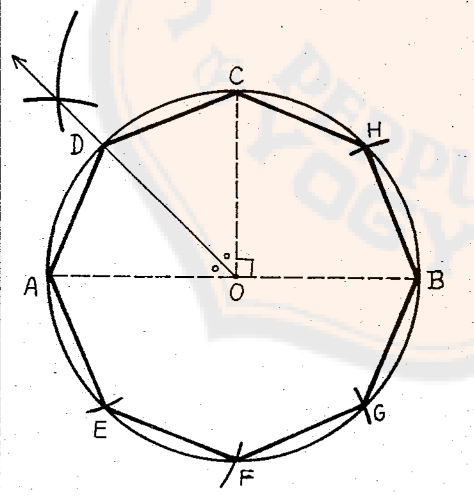
1. Diketahui ⊙ O dengan panjang jari-jari R, maka $\overline{OA}$ (OA = R) adalah suatu sisi segi-6 ber-beraturan.

2. Mulai dari A digambar busur-busur dengan jari-jari $\overline{OA}$ se-panjang lingkaran sampai di-dapatkan kembali A, maka ter-bentuklah ABCDEF suatu segi-6 beraturan.

Berdasarkan konstruksi 14 ini, dapat disusun juga kons-truksi untuk segi-12 beraturan, segi-24 beraturan, dan seterusnya.

Konstruksi 16

MENGKONSTRUKSI SEGI-8 BERATURAN PADA SUATU LINGKARAN.

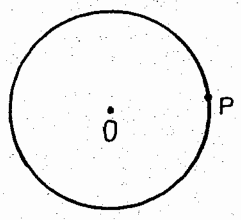
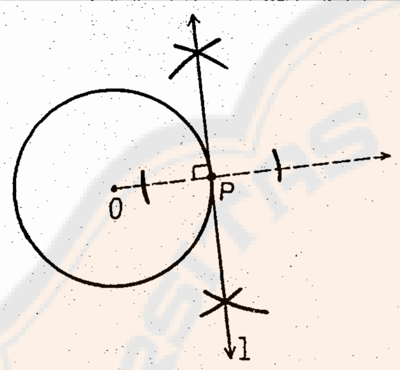


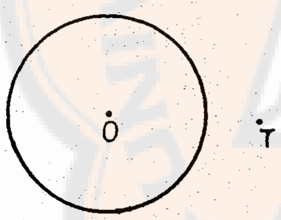
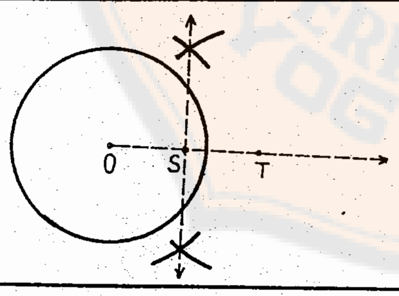
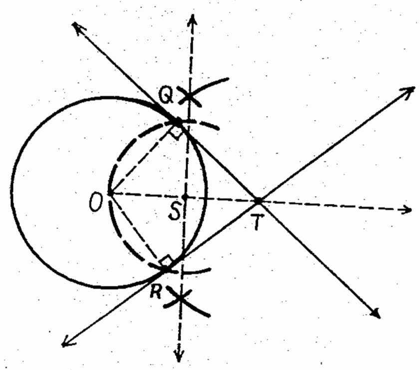
1. Diketahui ⊙ O dengan panjang jari-jari R.

2. Digambar dua jari-jari yaitu $\overline{OA}$ dan $\overline{OC}$, sehingga $\overline{OA} \perp \overline{OC}$ di O.

3. Ditentukan garis bagi $\angle$ COA yang memotong lingkaran di D, maka $\overline{CD}$ adalah suatu sisi segi-8 beraturan.

4. Mulai dari C digambar busur-busur dengan jari-jari $\overline{CD}$ se-panjang lingkaran sampai di-dapatkan kembali C, maka ter-bentuklah CDAEFGBH suatu se-gi-8 beraturan.

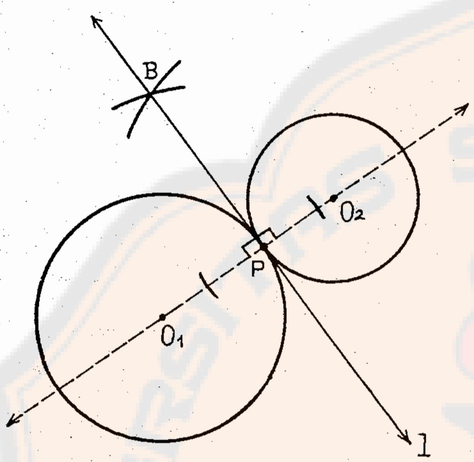
Konstruksi 17. MENENTUKAN GARIS SINGGUNG DI SUATU TITIK PADA LINGKARAN.	
	1. Diketahui ⊙ O dan P pada ⊙ O.
	2. Digambar $\overrightarrow{OP}$, kemudian melalui P digambar l, sehingga l ⊥ $\overrightarrow{OP}$, menurut Teo.6.7 maka l adalah garis singgung pada ⊙ O di P.

Konstruksi 18. MENENTUKAN GARIS SINGGUNG PADA LINGKARAN DAN MELALUI TITIK T DI LUAR LINGKARAN	
	1. Diketahui ⊙ O dan T di luar ⊙ O.
	2. Digambar $\overrightarrow{OT}$, kemudian ditentukan S yang merupakan titik tengah $\overline{OT}$.
	3. Berpusat di S digambar busur dengan jari-jari $\overline{OS}$ yang memotong ⊙ O di Q dan R, sehingga $\overline{OQ}$ ⊥ $\overline{QT}$ dan $\overline{OR}$ ⊥ $\overline{RT}$, menurut Teo.6.7, maka $\overleftrightarrow{TQ}$ dan $\overleftrightarrow{TR}$ adalah dua garis singgung pada ⊙ O yang melalui T.

Konstruksi 19.

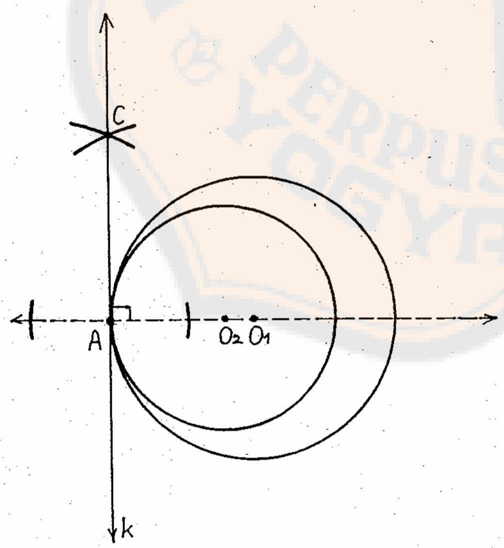
MENENTUKAN GARIS SINGGUNG PERSEKUTUAN DALAM PADA DUA LINGKARAN SALING BERSINGGUNGAN LUAR DAN DALAM.

A. Dua lingkaran bersinggungan luar.



1. Diketahui dua lingkaran $\odot\ O_1$ dan $\odot\ O_2$ saling bersinggungan luar di titik P.
2. Digambar $\overleftrightarrow{O_1O_2}$.
3. Melalui P digambar garis l, sehingga $l \perp \overleftrightarrow{O_1O_2}$.
4. Menurut Teo.6.7, maka garis l adalah garis singgung sekutu dalam pada $\odot\ O_1$ dan $\odot\ O_2$ tersebut.

B. Dua lingkaran bersinggungan dalam.

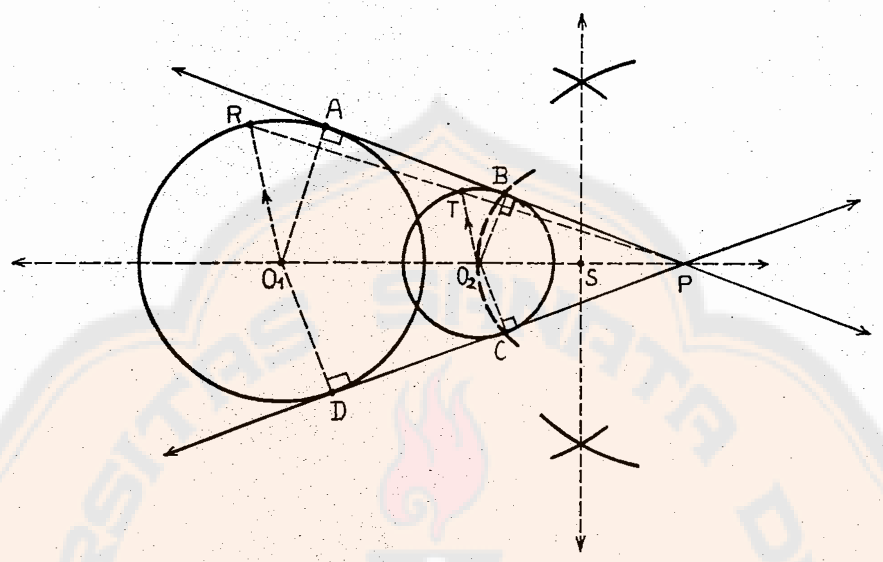


1. Diketahui dua lingkaran $\odot\ O_1$ dan $\odot\ O_2$ saling bersinggungan dalam di titik A.
2. Digambar $\overleftrightarrow{O_1O_2}$.
3. Melalui A digambar garis k, sehingga $k \perp \overleftrightarrow{O_1O_2}$.
4. Menurut Teo.6.7, maka garis k adalah garis singgung sekutu dalam pada $\odot\ O_1$ dan $\odot\ O_2$ tersebut.

Kejadian khusus: jika kedua lingkaran mempunyai jari-jari yang sama panjang, maka kedua lingkaran itu dianggap sebagai satu lingkaran.

Konstruksi 20.

MENENTUKAN GARIS SINGGUNG PERSEKUTUAN LUAR PADA DUA LINGKARAN SALING BERPOTONGAN



1. Diketahui dua lingkaran $\odot$ O_1 dan $\odot$ O_2 saling berpotongan.

2. Digambar $\overleftrightarrow{O_1O_2}$.

3. Digambar $\overline{O_1R} \parallel \overline{O_1T}$ dengan R adalah suatu titik pada $\odot$ O_1 dan T adalah suatu titik pada $\odot$ O_2 dan keduanya sepihak terhadap $\overleftrightarrow{O_1O_2}$. Kemudian R dan T dihubungkan hingga memotong $\overleftrightarrow{O_1O_2}$ di P.

4. Ditentukan titik tengah $\overline{O_2P}$, yaitu S dan berpusat di S digambar busur dengan jari-jari $\overline{SO_2}$, sehingga memotong $\odot$ O_2 di B dan C, maka $\overline{O_2B} \perp \overleftrightarrow{PB}$ dan $\overline{O_2C} \perp \overleftrightarrow{PC}$. (Ingat konstruksi 18).

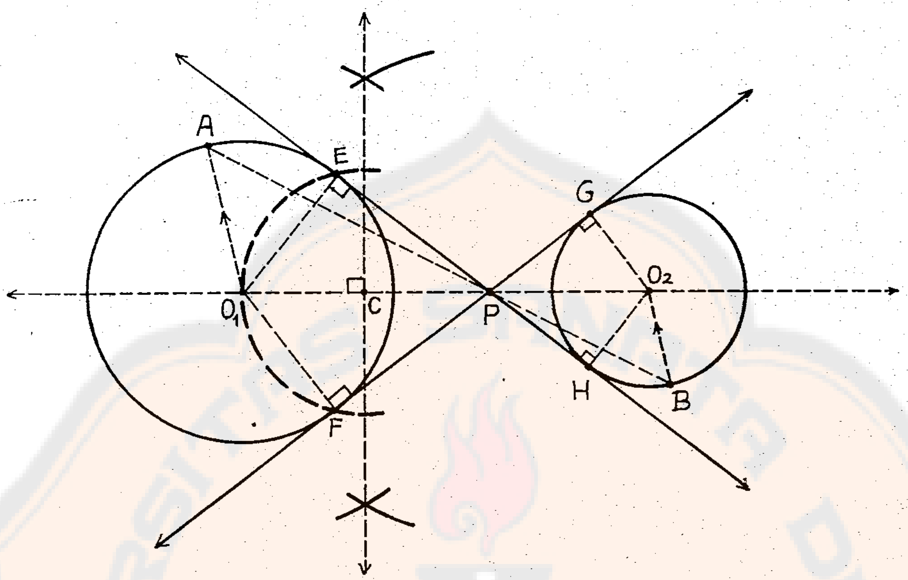
5. Titik P dan B dihubungkan, maka $\overleftrightarrow{PB}$ akan menyinggung $\odot$ O_1 di. Selanjutnya P dan C dihubungkan, maka $\overleftrightarrow{PC}$ akan menyinggung $\odot$ O_2 di D, sehingga $\overline{O_1A} \perp \overleftrightarrow{PB}$ dan $\overline{O_1D} \perp \overleftrightarrow{PC}$.

6. Jadi $\overleftrightarrow{AB}$ dan $\overleftrightarrow{CD}$ adalah dua garis singgung sekutu luar pada $\odot$ O_1 dan $\odot$ O_2 dengan A, B, C, dan D adalah titik-titik singgungnya.

Catatan: Dua garis singgung sekutu pada dua lingkaran saling bersinggungan luar dan saling asing luar dapat ditentukan dengan cara yang sama.

Konstruksi 21.

MENENTUKAN GARIS SINGGUNG PERSEKUTUAN DALAM PADA DUA LINGKARAN SALING ASING LUAR



1. Diketahui dua lingkaran $\odot O_1$ dan $\odot O_2$ saling asing luar.

2. Digambar $\overleftrightarrow{O_1O_2}$.

3. Digambar $\overline{O_1A} \parallel \overline{O_2B}$ dengan A adalah suatu titik pada $\odot O_1$ dan B adalah suatu titik pada $\odot O_2$ dan keduanya berlainan pihak terhadap $\overleftrightarrow{O_1O_2}$. Kemudian A dan B dihubungkan hingga memotong $\overleftrightarrow{O_1O_2}$ di P.

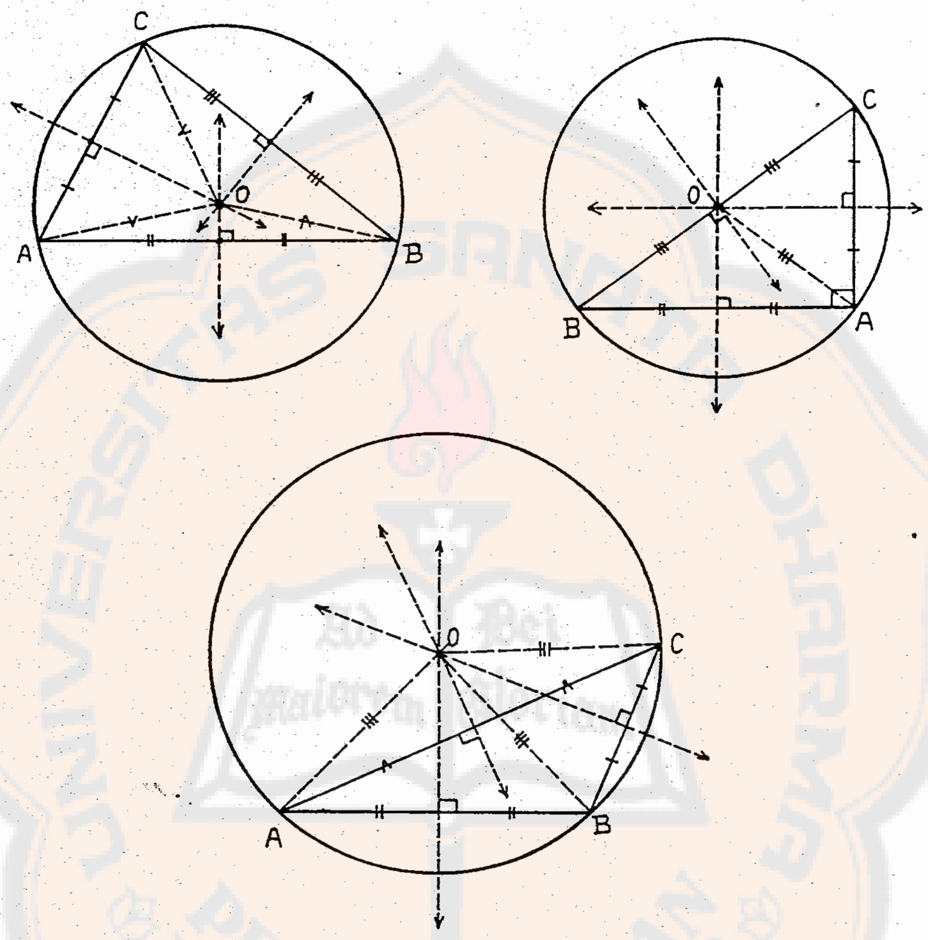
4. Ditentukan titik tengah $\overline{O_1P}$, yaitu C dan berpusat di C digambar busur dengan jari-jari $\overline{CO_1}$, sehingga memotong $\odot O_1$ di E dan F, maka $\overline{O_1E} \perp \overleftrightarrow{PE}$ dan $\overline{O_1F} \perp \overleftrightarrow{PF}$.

5. Titik P dan F dihubungkan, maka $\overleftrightarrow{PF}$ akan menyinggung $\odot O_2$ di G. Selanjutnya P dan E dihubungkan, maka $\overleftrightarrow{PE}$ akan menyinggung $\odot O_2$ di H, sehingga $\overline{O_2G} \perp \overleftrightarrow{PF}$ dan $\overline{O_2H} \perp \overleftrightarrow{PE}$.

6. Jadi $\overleftrightarrow{EH}$ dan $\overleftrightarrow{FG}$ adalah dua garis singgung sekutu dalam pada $\odot O_1$ dan $\odot O_2$ dengan E, F, G, dan H adalah titik-titik singgungnya.

Konstruksi 22.

MENENTUKAN LINGKARAN LUAR PADA SEGITIGA LANCIP, SIKU-SIKU, DAN TUMPUL



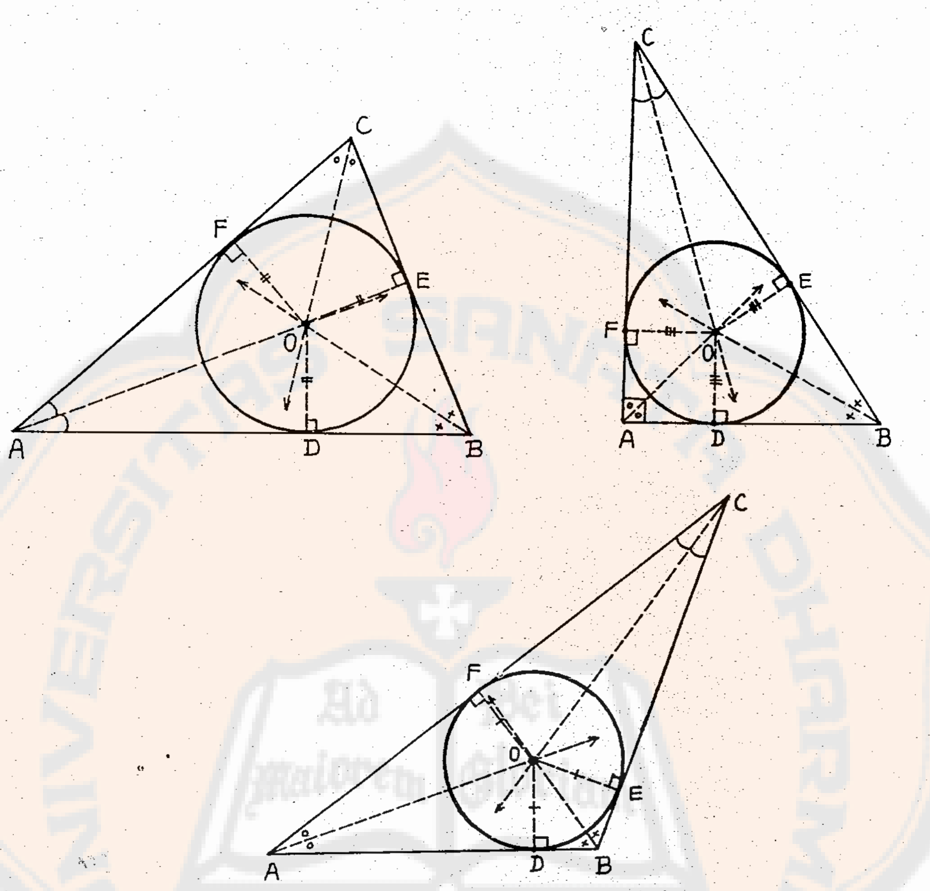
1. Diketahui Δ ABC (lancip, siku-siku, dan tumpul).

2. Ditentukan sumbu-sumbu pada setiap sisinya, menurut Teo.3.25, maka ketiga sumbu setitik di O yang berjarak sama ke ketiga titik sudut Δ ABC, maka $\overline{OA} \cong \overline{OB} \cong \overline{OC}$.

3. Titik O merupakan pusat lingkaran luar untuk Δ ABC.

Konstruksi 23.

MENENTUKAN LINGKARAN DALAM PADA SEGITIGA
LANCIP, SIKU-SIKU, DAN TUMPUL

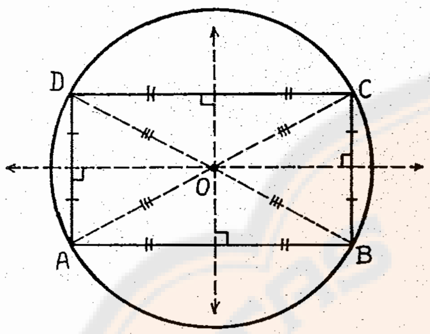
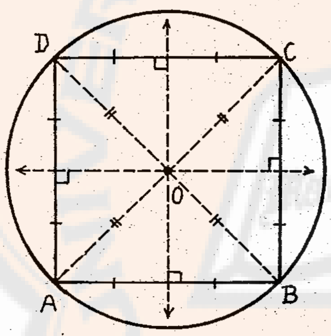
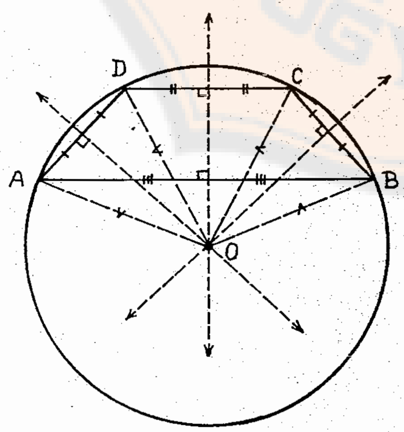


1. Diketahui $\triangle$ ABC (lancip, siku-siku, dan tumpul).

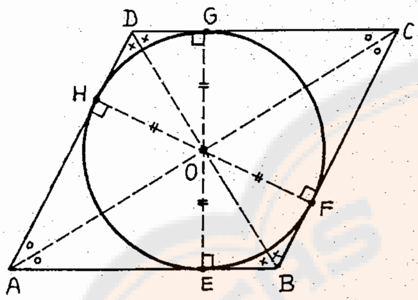
2. Ditentukan garis bagi pada setiap sudutnya, menurut Teo.3.23 ketiga garis bagi setitik di titik O. Kemudian digambar $\overline{OD} \perp \overline{AB}$, $\overline{OE} \perp \overline{BC}$, dan $\overline{OF} \perp \overline{AC}$, ma- $\overline{OD} \cong \overline{OE} \cong \overline{OF}$.

3. Sehingga O adalah pusat lingkaran dalam pada $\triangle$ ABC.

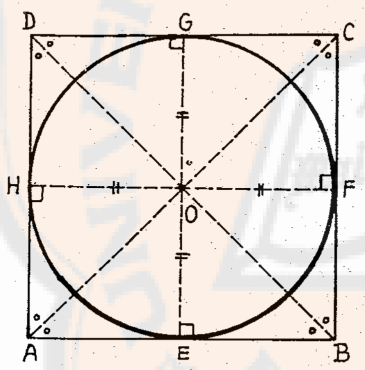
Konstruksi 24.

MENENTUKAN LINGKARAN LUAR PADA PERSEGI PANJANG, BUJUR SANGKAR, DAN TRAPESIUM SAMAKAKI	
A. Persegi panjang. 	1. Diketahui ABCD suatu persegi panjang. 2. Ditentukan sumbu-sumbu pada keempat sisinya yang akan se-titik di O, sehingga menurut Teo.3.24 $\overline{OA} \cong \overline{OB} \cong \overline{OC} \cong \overline{OD}$. 3. Maka O adalah pusat lingkaran luar persegi panjang ABCD.
B. Bujur sangkar 	1. Diketahui ABCD suatu bujur sangkar. 2. Ditentukan sumbu-sumbu pada keempat sisinya yang akan se-titik di O, sehingga menurut Teo.3.24 $\overline{OA} \cong \overline{OB} \cong \overline{OC} \cong \overline{OD}$. 3. Maka O adalah pusat lingkaran luar bujur sangkar ABCD.
C. Trapesium samakaki 	1. Diketahui ABCD suatu trapesi-um samakaki. 2. Ditentukan sumbu-sumbu pada keempat sisinya yang akan se-titik di O, sehingga menurut Teo.3.24 $\overline{OA} \cong \overline{OB} \cong \overline{OC} \cong \overline{OD}$. 3. Maka O adalah pusat lingkaran luar trapesium samakaki ABCD.

Konstruksi 25.

<table>
<tr><th colspan="2">MENENTUKAN LINGKARAN DALAM PADA BELAH KETUPAT DAN BUJUR SANGKAR</th></tr>
<tr><td>A. Belah ketupat

</td><td>1. Diketahui ABCD suatu belah ketupat.

2. Menurut Th.4.9. diagonal $\overline{AC}$ adalah garis bagi $\angle$ A dan $\angle$ C sedangkan diagonal $\overline{BD}$ adalah garis bagi $\angle$ B dan $\angle$ D dan kedua diagonal berpotongan di O, maka $\overline{OE} \cong \overline{OF} \cong \overline{OG} \cong \overline{OH}$.

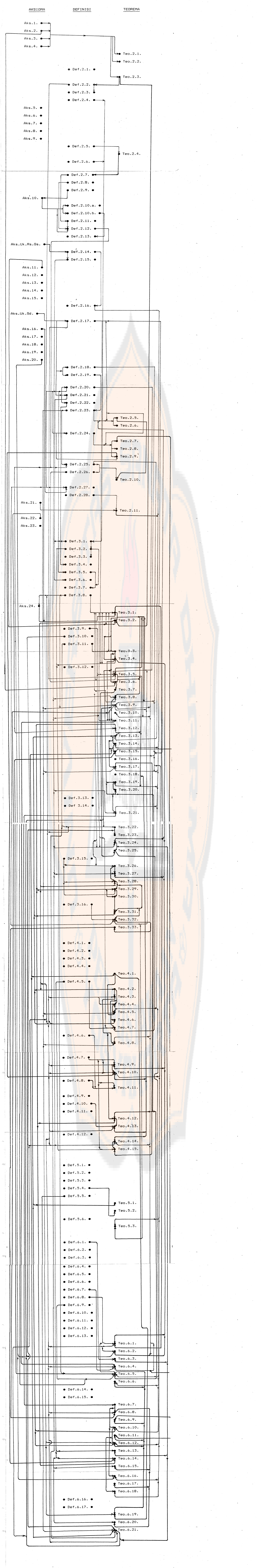
3. Jadi O adalah pusat lingkaran dalam belah ketupat ABCD.</td></tr>
<tr><td>B. Bujur sangkar

</td><td>1. Diketahui ABCD suatu bujur sangkar.

2. Menurut Th.4.11. maka ABCD suatu belah ketupat. Jadi berdasarkan konstruksi 24.A. didapatkan $\overline{OE} \cong \overline{OF} \cong \overline{OG} \cong \overline{OH}$.

3. Jadi O adalah pusat lingkaran dalam bujur sangkar ABCD.</td></tr>
</table>

87414071 Listijani Budi /Amal.

KERANGKA GEOMETRI BIDANG EUCLIDES BERDASARKAN
SISTEM AKSIOMA HILBERT



DAFTAR PUSTAKA

Brumfiel, Charles, F., Eicholz, Robert, E., dan Shanks, Merrill, E.
1960 *Geometry*. Massachusetts: Addison-Wesley Publishing Company, Inc.

Clemens, Stanley, R., O'Daffer, Phares, G., dan Cooney, Thomas, J.
1984 *Geometry With Applications and Problem Solving*. Kanada: Addison-Wesley Publishing Company, Inc.

Eves, Howard.
1963 "The Foundations of Geometry." Bab 8 di dalam *A Survey of Geometry*, Boston: Allyn and Bacon, Inc.

Eves, Howard dan Newsom, Carroll, V.
1964 *An Introduction To The Foundations and Fundamental Concepts of Mathematics*. USA: Holt Rinehart and Winston, Inc.

Fishback, W.I.
1969 *Projective and Euclidean Geometry*. New York: John Wiley and Sons.

Fogiel, M., Dr.
1977 *The Geometry Problem Solver*. Staff of Research and Education Association.

Hilbert, David, PH. D.
1971 *Foundations of Geometry*. Illinois: The Open Court Publishing Company.

Keedy, L., Mervin., Jameson, Richard, E., dan Mould, Eugene, H.
1967 *Exploring Geometry*. USA: Holt Rinehart and Winston, Inc.

Rosskopf, L., Myron., Sitomer, Harry., dan Lenchner, George.
1966 *Modern Mathematics: Geometry*. Filipina: Silver Burdett Company.

Soehakso, R. M. J. T. dan Agustiani, Maria. "*Aksiomatika Material, Formal, dan Formalized axiomatics Geometri Ala Euclid atau Transformasi Geometry?*"

Susanta, B., Drs. "*Tertib Dalam Geometri.*"

Suwarsono, St., Dr. "Potensi Geometri Dalam Pengajaran Matematika," *Widya Dharma* (Oktober. 1990): 49-60.

Travers, J., Kenneth.
1987 *Geometry.* Illinois: Laidlaw Brothers.

Wirasto, Drs.
1973 *Perkembangan Pengajaran Ilmu Ukur.* Yogyakarta: Yayasan Pembina FKIE-IKIP Yogyakarta.