KONSTRUKSI SISTEM-SISTEM BILANGAN DENGAN PENDEKATAN AKSIOMATIS

S K R I P S I

Diajukan untuk memenuhi Salah Satu Syarat
Memperoleh Gelar Sarjana Pendidikan
Program Studi S1

Oleh :

Agnes Rosliana Samosir

No. Mhs : 87 414119
NIRM : 87 5027100074

JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA
FAKULTAS PENDIDIKAN MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
IKIP SANATA DHARMA
YOGYAKARTA
1 9 9 2

S k r i p s i

Konstruksi Sistem-sistem Bilangan
Dengan Pendekatan Aksiomatis

Oleh

Agnes Rosliana Samosir

NIM: 87 414119

NIRM: 87 5027100074

telah disetujui oleh:

Pembimbing I

Dr. F. Susilo, SJ tanggal 30 September 1992

Pembimbing II

Dra. Linda Yuliastuti tanggal 30 September 1992

S K R I P S I

KONSTRUKSI SISTEM-SISTEM BILANGAN

DENGAN PENDEKATAN AKSIOMATIS

yang dipersiapkan dan disusun oleh

Agnes Rosliana Samosir

NIM: 87 414119

NIRM: 87 5027100074

telah dipertahankan di depan Panitia Penguji

pada tanggal 30 September 1992

dan dinyatakan telah memenuhi syarat

Susunan Panitia Penguji

	Nama Lengkap	Tanda Tangan
Ketua	Dr. St. Suwarsono	....
Sekretaris	Drs. F. Kartika Budi, M.Pd.	....
Anggota	Dr. F. Susilo, SJ	....
Anggota	Drs. A. Tutoyo, M.Sc.	....
Anggota	Prof. Drs. Wirasto	....
Anggota	Dra. A. Linda Yuliastuti	....

Yogyakarta, 30 September 1992

Fakultas Pendidikan Matematika dan Ilmu pengetahuan Alam

IKIP Sanata Dharma

Dekan

Dr. St. Suwarsono

KATA PENGANTAR

Segala puji syukur dipanjatkan kepada Allah yang mahakuasa atas segala rahmat dan kasihNya yang berlimpah, sehingga tugas akhir ini dapat selesai dengan baik.

Tugas akhir ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat yang diperlukan untuk mengakhiri program S1 pada jurusan Pendidikan Matematika, Fakultas Pendidikan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, IKIP Sanata Dharma.

Pada kesempatan ini, penulis ingin menyampaikan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada semua pihak yang turut membantu penyelesaian tugas akhir ini, terutama kepada:

1. Dr. F. Susilo, SJ, selaku dosen pembimbing I, yang telah membimbing, memberi ide-ide serta nasehat yang tak ternilai harganya.
2. Dra. Linda Yuliastuti, selaku dosen pembimbing II, atas segala dukungan dan perhatiannya.
3. Dr. St. Suwarsono, selaku Ketua Jurusan Pendidikan Matematika FPMIPA, IKIP Sanata Dharma.
4. Sr. Jane, FCJ, Sr. Barbara, FCJ, Sr. Afra Primadiana, nFCJ, Sdri Rebi, atas doa, dorongan, perhatian, bantuan dan pengertian yang begitu besar.
5. Rekan-rekan mahasiswa, terutama mahasiswa angkatan 1987 yang telah memberi perhatian dan bantuannya.

Penulis menyadari bahwa karangan ini belum sempurna, oleh karena itu penulis mengharapkan kritik serta saran dari pembaca untuk kesempurnaan karangan ini.

Akhirnya, semoga karangan ini bermanfaat dalam upaya memperdalam rasa cinta pada matematika.

Yogyakarta, September 1992

penulis

DAFTAR ISI

ABSTRAK

Ada berbagai macam himpunan postulat yang dapat dipakai untuk membangun sistem bilangan asli. Salah satunya adalah himpunan delapan postulat. Sifat-sifat pokok pada sistem bilangan asli ini diturunkan dari delapan postulat dan lambang-lambang primitif yang ditentukan. Selanjutnya sifat-sifat yang sudah dibuktikan dalam sistem bilangan asli itu dipergunakan untuk memperluas sistem bilangan asli tersebut sehingga diperoleh sistem bilangan bulat. Sistem bilangan bulat beserta sifat-sifatnya diperluas lagi sehingga diperoleh sistem bilangan rasional. Dan akhirnya sistem bilangan rasional diperluluas menjadi sistem bilangan real.

Diperkenalkan juga himpunan postulat lain untuk sistem bilangan asli, yaitu yang dikenal sebagai Postulat Peano. Dibuktikan ekuivalensi antara Postulat Peano dan delapan postulat tersebut.

BAB I

PENDAHULUAN

Ilmu bilangan adalah cabang dari matematika. Di dalamnya kita temukan berbagai jenis bilangan dan macam-macam definisi, teorema, dan lemma yang menyatakan hubungan di antara bilangan-bilangan itu.

Karangan ini menyajikan beberapa sistem bilangan mulai dari sistem bilangan asli hingga sistem bilangan real. Dasar sistem bilangan yang dibahas dalam karangan ini sangat berbeda dengan dasar sistem bilangan yang biasanya kita kenal.

Bilangan yang kita kenal atau kita pelajari di sekolah, mulai dari SD sampai perguruan tinggi adalah bilangan yang didefinisikan berdasarkan himpunan. Konsep bilangan diperoleh dari himpunan obyek-obyek dengan melakukan abstraksi padanya, yaitu dengan tidak memperhatikan sifat-sifat khas anggotanya. Di samping himpunan, dipergunakan juga garis bilangan untuk meperagakan bilangan, relasi antar bilangan dan pengerjaan-pengerjaan pada bilangan.

Dalam karangan ini, diperkenalkan sistem bilangan yang dibangun atas dasar postulat-postulat. Kita mulai dengan membangun sistem bilangan asli atas dasar delapan postulat. Kemudian, sistem bilangan asli tersebut digunakan untuk membangun suatu sistem yang lebih luas yang dikenal sebagai sistem bilangan bulat. Sistem bilangan bulat pada gilirannya dapat digunakan sebagai dasar un-untuk membangun sistem bilangan rasional. Dan akhirnya sistem bilangan real dibangun sebagai perluasan sistem bilangan rasional.

Selanjutnya, diperkenalkan himpunan postulat lain-nya untuk sistem bilangan asli, yaitu Postulat Peano, dan dibuktikan bahwa Postulat Peano ini ekuivalen dengan dengan delapan postulat itu.

Berikut ini akan dibahas secara singkat beberapa konsep yang akan sering dipergunakan atau dijumpai pada bab-bab selanjutnya, yaitu relasi, fungsi (pemetaan, mapping), operasi dan partisi.

1. Pergandaan kartesius

Definisi. Jika A dan B adalah sebarang himpunan, maka pergandaan kartesius himpunan A dan B (ditulis: A x B, dibaca "A kali B") adalah himpunan semua pasangan berurutan (a,b) dengan $a \in A$ dan $b \in B$.

$$A \times B = \text{df. } \{ (a,b) \mid a \in A \text{ dan } b \in B \}$$

2. Relasi

Definisi. Yang dimaksud dengan relasi dari A ke B ialah himpunan bagian dari A x B.

Notasi untuk relasi R dari A ke B yaitu $R : A \to B$.

Jadi, $R : A \to B$ suatu relasi $\Leftrightarrow R \subseteq A \times B$.

Berikut ini sifat-sifat relasi pada suatu himpunan:

Definisi. Relasi $R : A \to A$ disebut refleksif bila dan hanya bila untuk setiap $a \in A$ berlaku $(a,a) \in R$.

$R : A \to A$ refleksif $\Leftrightarrow (\forall\, a \in A)\ (a,a) \in R$.

Definisi. Relasi $R : A \to A$ disebut simetris bila dan hanya bila untuk setiap $(a,b) \in R$ berlaku bahwa $(b,a) \in R$.

$R : A \to A$ simetris $\Leftrightarrow (\forall\, (a,b))\ (a,b) \in R \Rightarrow (b,a) \in R$.

Definisi. Relasi $R : A \to A$ disebut transitif bila dan hanya bila untuk setiap $(a,b) \in R$ dan $(b,c) \in R$ berlaku juga $(a,c) \in R$.

$R : A \to A$ transitif $\Leftrightarrow (\forall\, (a,b),(b,c))\ (a,b) \in R$ dan $(b,c) \in R \Rightarrow (a,c) \in R$.

Definisi. Relasi $R : A \to A$ disebut relasi ekuivalensi bila relasi R tersebut memiliki sifat-sifat refleksif, simetris dan transitif.

3. Fungsi atau Pemetaan (Mapping)

Definisi. Himpunan bagian f dari A x B disebut fungsi dari A ke B dengan notasi $f : A \to B$ bila dan hanya bila dipenuhi:

1. $(\forall\, a \in A)\ (\exists\, b \in B)\ (a,b) \in f$,
2. $(a,b_1) \in f$ dan $(a,b_2) \in f \Rightarrow b_1 = b_2$.

Bila $(a,b) \in f$, maka ditulis $f(a) = b$.

Definisi. Suatu fungsi f dari A ke B dikatakan fungsi surjektif (fungsi onto) bila dan hanya bila $(\forall\ b \in B)\ (\exists\ a \in A)\ f(a) = b$.

Definisi. Fungsi $f : A \rightarrow B$ disebut fungsi injektif (fungsi satu-satu) bila dan hanya bila $(\forall\ a,b \in A)\ f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$.

Definisi. Fungsi f disebut fungsi bijektif bila dan hanya bila fungsi f sekaligus surjektif dan injektif.

4. Operasi Biner

Definisi. Andaikan A suatu himpunan. Yang disebut operasi biner pada A ialah pemetaan $* : A \times A \rightarrow A$. Elemen $(a,b) \in A \times A$ oleh $*$ dipetakan ke elemen $a * b \in A$, yang disebut hasil operasi dari dua elemen a dan b tersebut.

Karena definisi operasi biner pada suatu himpunan mensyaratkan hasil operasi juga berada dalam himpunan tersebut, maka suatu himpunan yang dilengkapi dengan operasi biner dikatakan tertutup terhadap operasi itu.

Definisi. Andaikan A suatu himpunan. Suatu operasi $* : A \times A \rightarrow A$ dikatakan didefinisikan secara betul (well defined) bila dan hanya bila $a = \underline{a}$ dan $b = \underline{b}$ maka $a * b = \underline{a} * \underline{b}$ untuk setiap $a, b \in A$.

5. Partisi

Definisi. Suatu keluarga himpunan $\{H_i\}_{i \in I}$ disebut partisi dari himpunan H bila dan hanya bila

a. $H_i \subset H$ untuk tiap $i \in I$,

b. $H_i \neq \emptyset$ untuk tiap $i \in I$,

c. $(\forall\ i, j \in I)\ i \neq j \Rightarrow H_i \cap H_j = \emptyset$,

d. $\bigcup_{i \in I} H_i = H$.

BAB II

SISTEM BILANGAN ASLI DENGAN DELAPAN POSTULAT

A. Delapan Postulat

Andaikan N adalah suatu himpunan yang dilengkapi dengan dua operasi biner, yaitu yang dilambangkan dengan + dan * (yang berturut-turut akan disebut "penjumlahan" dan "perkalian"), dan memenuhi delapan postulat berikut ini:

N1: $(\forall\ a,b \in N)\ a + b = b + a$.

N2: $(\forall\ a,b,c \in N)\ (a + b) + c = a + (b + c)$.

N3: $(\forall\ a,b \in N)\ a * b = b * a$.

N4: $(\forall\ a,b,c \in N)\ (a * b) * c = a * (b * c)$.

N5: $(\forall\ a,b,c \in N)\ a * (b + c) = (a * b) + (a * c)$.

N6: Ada anggota N, yang akan kita nyatakan dengan lambang 1, sedemikian sehingga $(\forall\ a \in N)\ a * 1 = a$.

N7: Jika $a,b \in N$, maka satu dan hanya satu di antara pernyataan berikut yang benar: $a = b$, $a + x = b$, $a = b + y$, untuk $x,y \in N$.

N8: Jika $M \subset N$ sedemikian sehingga:

a. $1 \in M$,

b. jika $k \in M$, maka $(k+1) \in M$,

maka $M = N$.

Anggota-anggota himpunan N kita sebut bilangan asli.

Postulat N8 dikenal sebagai postulat induksi. Postulat ini dipakai untuk membuktikan teorema-teorema tertentu yang melibatkan semua bilangan asli.

B. <u>Teorema-teorema</u>

Teorema N1. Andaikan P(n) adalah suatu kalimat yang didefinisikan untuk setiap bilangan asli. Jika

a. P(1) benar,

b. P(k + 1) benar bila P(k) benar,

maka P(n) benar untuk semua bilangan asli n.

Teorema ini seringkali disebut Prinsip induksi Matematika.

Bukti:

Andaikan pernyataan (a) dan (b) benar dan

$M = \{ x \in N \mid P(x) \text{ benar } \}$.

Maka $1 \in M$ dan $k + 1 \in M$, di mana $k \in M$ juga.

Kesimpulan, dengan N8, M = N, berarti P(n) benar untuk setiap bilangan asli n.

Definisi N1. Jika $a, b, x \in N$ sedemikian sehingga $a + x = b$, maka dikatakan bahwa "a lebih kecil dari b" atau "b lebih besar dari a" dan kita tulis dengan lambang "$a < b$" atau "$b > a$". Bila $a < b$ atau $a = b$, maka kita menulis $a \le b$ (dibaca "a lebih kecil atau sama dengan b").

Teorema N2. Jika a dan b $\in$ N, maka satu dan hanya satu di antara pernyataan berikut yang benar:

$a = b$, $a < b$, $a > b$.

Pernyataan ini adalah akibat langsung dari N7 dan Definisi N1.

Teorema N3. $(\forall\ a,b,c \in N)\ a < b$ dan $b < c \Rightarrow a < c$.

Bukti:

Ambil sebarang $a,b,c \in N$. Andaikan $a < b$ dan $b < c$, maka $(\exists\ x \in N)\ a + x = b$ dan $(\exists\ y \in N)\ b + y = c$. (Definisi N1), Akibatnya

$$a + (x + y) = (a + x) + y \qquad (N2)$$

$$= b + y \qquad (\text{subsitusi})$$

$$= c \qquad (\text{subsitusi})$$

kesimpulan $a < c$. (Definisi N1)

Teorema N4. $(\forall\ a,b,c \in N)\ a < b \Rightarrow c + a < c + b$.

Bukti:

Ambil sebarang $a,b,c \in N$.

Andaikan $a < b$, maka $(\exists\ x \in N)\ a + x = b$. (Definisi N1)

Sehingga

$$(c + a) + x = c + (a + x) \qquad (N2)$$

$$= c + b \qquad (\text{subsitusi})$$

kesimpulan $c + a < c + b$. (Definisi N1)

Teorema N5. (Sifat trikotomi)

$(\forall\ a,b,c \in N)\ \ a < b$ dan $c < d \Rightarrow a + c <$

$b + d$.

Bukti:

Ambil sebarang $a, b, c \in N$.

Andaikan $a < b$ dan $c < d$, maka

$(\exists\, x \in N)\ a + x = b$ dan $(\exists\, y \in N)\ c + y = d$. (Definisi N1). Jadi,

$$
\begin{aligned}
(a + c) + (x + y) &= a + [c + (x + y)] && \text{(N2)}\\
&= a + [(x + y) + c] && \text{(N1)}\\
&= a + [x + (y + c)] && \text{(N2)}\\
&= a + [x + (c + y)] && \text{(N1)}\\
&= a + (x + d) && \text{(subsitusi)}\\
&= (a + x) + d && \text{(N2)}\\
&= b + d && \text{(subsitusi)}
\end{aligned}
$$

kesimpulan $a + c < b + d$. (Definisi N1)

Teorema N6. $(\forall\, a, b, c \in N)\ a < b \Rightarrow c * a < c * b$.

Bukti:

Ambil sebarang $a, b, c \in N$.

Andaikan $a < b$, maka $(\exists\, x \in N)\ a + x = b$. (Definisi N1)

Jadi $$
\begin{aligned}
c * a + c * x &= c * (a + x) && \text{(N5)}\\
&= c * b && \text{(subsitusi)}
\end{aligned}
$$

kesimpulan $c * a < c * b$. (Definisi N1)

Catatan:

Untuk seterusnya jika tidak ditentukan lain, maka penulisan "a * b" untuk perkalian elemen a dan b cukup ditulis dengan "ab" saja.

Definisi N2. Jika $a \in N$ dan $k \in N$, kita definisikan

$$a^1 = a \text{ dan } a^{k+1} = a^k a.$$

Teorema N7. Andaikan $a \in N$, maka a^n didefinisikan untuk semua bilangan asli n.

Bukti:

Andaikan $M = \{ n \in N \mid a^n \text{ didefinisikan } \}$.

$1 \in M$ karena a^1 sudah didefinisikan.

$k + 1 \in M$ untuk setiap $k \in M$ karena Definisi N2.

Maka, dengan N8, $M = N$.

Jadi terbukti a^n didefinisikan $\forall n \in N$.

Teorema-teorema berikut ini akan dibuktikan dengan prinsip induksi matematika (Teorema N1).

Teorema N8. $1^n = 1, \forall n \in N$.

Bukti:

Dengan Definisi N2, $1^1 = 1$.

Andaikan $k \in N$, sehingga $1^k = 1$, maka

$$\begin{aligned} 1^{k+1} &= 1^k 1 && \text{(Definisi N2)} \\ &= 1^k && \text{(N6)} \\ &= 1. && \text{(substusi)} \end{aligned}$$

Kesimpulan, $1^n = 1, \forall n \in N$.

Teorema N9. $(\forall a,b \in N)\ (ab)^n = a^n b^n$.

Bukti:

Ambil sebarang $a,b \in N$.

Dengan Definisi N2, $(ab)^1 = ab = a^1b^1$.

Andaikan $k \in N$ sehingga $(ab)^k = a^kb^k$.

Maka,

$$
\begin{aligned}
(ab)^{k+1} &= (ab)^k(ab) && \text{(Definisi N2)}\\
&= (a^kb^k)(ab) && \text{(asumsi)}\\
&= [(a^kb^k)a]b && \text{(N4)}\\
&= [a^k(b^ka)]b && \text{(N4)}\\
&= [a^k(ab^k)]b && \text{(N3)}\\
&= [(a^ka)b^k]b && \text{(N4)}\\
&= (a^{k+1}b^k)b && \text{(Definisi N2)}\\
&= a^{k+1}(b^kb) && \text{(N4)}\\
&= a^{k+1}b^{k+1}. && \text{(Definisi N2)}
\end{aligned}
$$

Teorema N10. $(\forall\ a \in N)\ a^ma^n = a^{m+n}$.

Bukti:

Ambil sebarang $a \in N$.

I. Untuk m sebarang yang tetap,

$$
\begin{aligned}
a^ma^1 &= a^ma && \text{(Definisi N2)}\\
&= a^{m+1}. && \text{(Definisi N2)}
\end{aligned}
$$

II. Andaikan $k \in N$ sedemikian sehingga $a^ma^k = a^{m+k}$.

Maka,

$$
\begin{aligned}
a^ma^{k+1} &= a^m(a^ka) && \text{(Definisi N2)}\\
&= (a^ma^k)a && \text{(N4)}\\
&= a^{m+k}a && \text{(substitusi)}\\
&= a^{(m+k)+1} && \text{(Definisi N2)}\\
&= a^{m+(k+1)}. && \text{(N2)}
\end{aligned}
$$

Teorema N11. $(\forall a \in N)\ (a^m)^n = a^{mn}$.

Bukti:

Ambil sebarang $a \in N$.

I. Untuk m sebarang yang tetap,

$$(a^m) = a^m \qquad \text{(Definisi N2)}$$

$$= a^{m1}. \qquad \text{(N6)}$$

II. Andaikan $k \in N$ sedemikian sehingga $(a^m)^k = a^{mk}$, maka

$$(a^m)^{k+1} = (a^m)^k (a^m) \qquad \text{(Definisi N2)}$$

$$= a^{mk} a^m \qquad \text{(asumsi)}$$

$$= a^{mk+m} \qquad \text{(Teorema N10)}$$

$$= a^{m(k+1)}. \qquad \text{(N6 dan N5)}$$

Teorema N12. $1 \leq n,\ \forall n \in N$.

Bukti:

I. $1 \leq 1$.

II. Andaikan $k \in N$ sedemikian sehingga $1 \leq k$.

Jika $1 = k$, maka

$$1 + 1 = 1 + k \qquad \text{(subsitusi } 1 = k\text{)}$$

sehingga $1 < 1 + k$. (Definisi N1)

Jika $1 < k$,

maka $1 + 1 < 1 + k$. (Teorema N4)

Oleh karena itu, ada $x \in N$ sehingga

$$(1 + 1) + x = 1 + k \qquad \text{(Definisi N1)}$$

$$1 + (1 + x) = 1 + k \qquad \text{(N2)}$$

dan $1 < 1 + k$. (Definisi N1)

Teorema N13. $(\forall x,y \in N)\ x + 1 = y + 1 \Rightarrow x = y$.

Bukti:

Pembuktian dengan kontraposisi, yaitu $x \neq y \Rightarrow x + 1 \neq y + 1$.

Andaikan $x \neq y$. Maka ada dua kemungkinan (menurut N7) yaitu $x < y$ atau $y < x$.

1. Bila $x < y$, maka

$$(\forall c \in N)\ c + x < c + y. \qquad \text{(Teorema N4)}$$

Karena $1 \in N$, maka

$$1 + x < 1 + y \qquad \text{(Substitusi)}$$

$$x + 1 < y + 1 \qquad \text{(N1)}$$

kesimpulan, $x + 1 \neq y + 1$. (Teorema N2)

2. Bila $y < x$, maka

$$(\forall c \in N)\ c + y < c + x. \qquad \text{(Teorema N4)}$$

Karena $1 \in N$, maka

$$1 + y < 1 + x \qquad \text{(substitusi)}$$

$$y + 1 < x + 1 \qquad \text{(N1)}$$

kesimpulan, $x + 1 \neq y + 1$. (Teorema N2)

Teorema N14. Sifat kanselasi terhadap penjumlahan berlaku pada N, yaitu:

$$(\forall x,y,z \in N)\ z + x = z + y \Rightarrow x = y.$$

Bukti:

Andaikan $M = \{ z \in N \mid (\forall x,y \in N)\ z + x = z + y \Rightarrow x = y \}$.

Ambil sebarang $x,y \in N$ sedemikian sehingga

$$1 + x = 1 + y.$$

Maka $x = y$. (N1 dan Teorema N13)

Jadi $1 \in M$.

Andaikan $z \in M$, berarti $z + x = z + y \Rightarrow x = y$, untuk tiap $x,y \in N$.

Andaikan $(z + 1) + x = (z + 1) + y$

maka $(z + x) + 1 = (z + y) + 1$ (N2,N1)

sehingga $z + x = z + y$. (Teorema N13)

Jadi $x = y$ (asumsi)

untuk tiap $x,y \in N$.

Kesimpulan $M = N$.

Teorema N15. $(\forall\ x \in N)\ x + 1 \neq 1$.

Bukti:

Ambil sebarang $x \in N$, maka

$1 \leq x$. (Teorema N12)

Andaikan $x = 1$, maka

$1 < 1 + 1$ (Definisi N1)

jadi $1 \neq 1 + 1$. (Teorema N2)

Andaikan $1 < x$. Menurut Definisi N1, $x < x + 1$.

Kesimpulan $1 < x + 1$ (Teorema N3)

jadi $1 \neq x + 1$. (Teorema N2)

Teorema N16. $(\forall\ x,n \in N)\ x + n \neq n$.

Bukti

Andaikan $M = \{\ n \in N \mid (x \in N)\ x + n \neq n\ \}$.

Ambil sebarang $x \in N$.

Maka $x + 1 \neq 1$ (Teorema N15)

jadi, $1 \in M$.

Andaikan $n \in M$, sehingga $x + n \neq n$, untuk tiap $x \in N$.

Akibatnya, $(x + n) + 1 \neq n + 1$. (Teorema N13)

Di samping itu, $(x + n) + 1 = x + (n + 1)$. (N2)

Dengan demikian $x + (n + 1) \neq n + 1$.

Jadi $(n + 1) \in M$.

Kesimpulan $M = N$.

Teorema N17. $(\forall\ x \in N)\ \exists!\ (x + 1) \in N$.

Bukti:

Ambil sebarang $x \in N$, maka

$x + 1 \in N$. (Definisi tertutup)

Karena + adalah operasi biner, yang berarti + adalah suatu pemetaan, maka $x + 1$ pasti tunggal.

Teorema N17 ini ekuivalen dengan pernyataan ini:

$(\forall\ x,y \in N)\ x = y \Rightarrow x + 1 = y + 1$.

Teorema N18. Sifat kanselasi terhadap perkalian berlaku pada N, yaitu: $(\forall\ x,y \in N)\ zx = zy \Rightarrow x = y$.

Bukti:

Andaikan $M = \{\ x \in N \mid (\forall\ y,z \in N)\ zx = zy \Rightarrow x = y\ \}$.

I. Ambil $x = 1$.

a. Untuk $z = 1$ dan sebarang $y \in N$,

bila $zx = zy$, maka

$1 * 1 = 1y$, (substitusi)

sehingga $1 = y$. (N3 dan N6)

Kesimpulan $x = y$.

b. Untuk $z \neq 1$ akan dibuktikan bahwa $x = y$ dengan cara kontraposisi, yaitu bila $y \neq 1$ maka $z \neq zy$.

Andaikan $y \neq 1$. Karena $z \neq 1$ dan $y \neq 1$, maka menurut Teorema N2 dan Teorema N12, $1 < z$ dan $1 < y$. Ini berarti, menurut Definisi N1, $\exists\, p \in N$ sehingga $z = p + 1$ dan $\exists\, r \in N$, sehingga $y = r + 1$.

$$zy = (p + 1)(r + 1) \qquad \text{(substitusi)}$$
$$= (p + 1)r + (p + 1)1 \qquad \text{(N5)}$$
$$= (p + 1)r + (p + 1) \qquad \text{(N6)}$$
$$= (p + 1)r + z. \qquad \text{(substitusi)}$$

Di samping itu,

$$(p + 1)r + z \neq z \qquad \text{(Teorema N16)}$$
$$zy \neq z. \qquad \text{(substitusi)}$$

Terbukti bahwa, untuk $x = 1$ dan untuk $z \neq 1$, $zx = zy \Rightarrow x = y$.

Kesimpulan $1 \in M$.

II. Andaikan $x \in M$ sehingga $(\forall\, z,y \in N)\ zx = zy \Rightarrow x = y$.

Maka untuk $x + 1$:

a. Ambil $z = 1$, maka untuk $\forall\, y \in N$, bila $z(x + 1) = zy$,

maka $$1(x + 1) = 1y \qquad \text{(substitusi)}$$
$$x + 1 = y. \qquad \text{(N2 dan N6)}$$

Jadi $(x + 1) \in M$.

b. Ambil $z \neq 1$.

(i) Untuk $y = 1$.

Pembuktian dengan menunjukkan bahwa anteseden dari pernyataan itu, $z(x + 1) = zy$, salah ($z(x + 1) \neq zy$) sehingga pernyataan itu sendiri menjadi selalu benar.

Menurut aksioma N5: $z(x + 1) = zx + z$.

Disamping itu,

$$zy = z1 \qquad \text{(substitusi } y = 1\text{)}$$

$$= z. \qquad \text{(N6)}$$

Juga selain itu,

$$zx + z \neq z \qquad \text{(Teorema N16)}$$

maka $\qquad z(x + 1) \neq zy. \qquad$ (substitusi)

(ii) Untuk $y \neq 1$, berarti $(\exists\ r \in N)\ y = r + 1$.

Pembuktian dengan menunjukkan bahwa:

bila $z(x + 1) = zy$ benar maka $x + 1 = y$.

$$z(x + 1) = zy \qquad \text{(asumsi)}$$

$$z(x + 1) = z(r + 1) \qquad \text{(substitusi)}$$

$$z(x + 1) = zr + z \qquad \text{(N5)}$$

$$zx + z = zr + z \qquad \text{(N5)}$$

$$zx = zr \qquad \text{(N1, Teorema N14)}$$

$$x = r \qquad \text{(asumsi)}$$

$$x + 1 = r + 1 \qquad \text{(Teorema N17)}$$

$$x + 1 = y. \qquad \text{(substitusi)}$$

Jadi, terbukti bahwa, $(x + 1) \in M$.

Maka, karena dengan N8, $(\forall\ x,y,z \in N)\ zx = zy \Rightarrow x = y$.

Teorema N19. $(\forall\ a,b,c \in N)\ a + c = b + c \Leftrightarrow a = b$.

Bukti:

Ambil sebarang $a,b,c \in N$.

a. Andaikan $a + c = b + c$, maka $a = b$ (Teorema N14)

b. Andaikan $M = \{\ c \in N \mid (\forall\ a,b \in N)\ a = b \Rightarrow a + c = b + c\ \}$.

Ambil sebarang $a,b \in N$ dengan $a = b$, maka $1 \in M$, karena

$$a + 1 = b + 1. \qquad \text{(Teorema N17)}$$

Andaikan $c \in M$, maka $a = b \Rightarrow a + c = b + c$, untuk tiap $a,b \in N$.

Sekarang, untuk $a,b \in N$, bila $a = b$ maka

$$a + c = b + c \qquad \text{(asumsi)}$$

$$(a + c) + 1 = (b + c) + 1 \qquad \text{(Teorema N17)}$$

$$a + (c + 1) = b + (c + 1). \qquad \text{(N2)}$$

Jadi, $(c + 1) \in M$.

Dengan N8, $M = N$.

Kesimpulan, $(\forall\ a,b,c \in N)\ a + c = b + c \Leftrightarrow a = b$.

Teorema N20. $(\forall\ a,b,c \in N)\ ac = bc \Leftrightarrow a = b$.

Bukti:

Ambil sebarang $a,b,c \in N$.

a. Andaikan $ac = bc$, maka $a = b$ (Teorema N18)

b. Andaikan $M = \{\ c \in N \mid (a,b \in N)\ a = b \Rightarrow ac = bc\ \}$.

Ambil sebarang $a,b \in N$. Andaikan $a = b$, maka

$$a1 = b1. \qquad \text{(N6)}$$

Jadi $1 \in M$.

Andaikan $c \in M$, maka $a = b \Rightarrow ac = bc$, untuk $a,b \in N$.

Sehingga bila $a = b$ maka

$$\begin{aligned} a(c + 1) &= ac + a && \text{(N5)}\\ &= bc + a && \text{(asumsi)}\\ &= bc + b && \text{(substitusi)}\\ &= b(c + 1). && \text{(N5)} \end{aligned}$$

Jadi, $(c + 1) \in M$.

Dengan N8, $M = N$.

Kesimpulan, $(\forall\, a,b,c \in N)\ ac = bc \Leftrightarrow a = b$.

Teorema N21. $(\forall\, a,b \in N)\ ae = a \Rightarrow e = 1$.

Bukti:

Ambil sebarang $a,b \in N$ sedemikian sehingga $ae = a$. Maka

$$ae = a1 \qquad \text{(N6)}$$

kesimpulan $\quad e = 1. \quad$ (Teorema N18)

Teorema N22. Jika $a \in N$, maka tidak ada $n \in N$ sehingga $a < n < a + 1$.

Bukti:

Kita buktikan dengan cara *reductio ad absurdum*.

Andaikan ada $n \in N$ sehingga $a < n < a + 1$. Maka ada $x \in N$ dan $y \in N$ sedemikian sehingga

$$a + x = n,\ n + y = a + 1. \qquad \text{(Definisi N1)}$$

Maka

$$\begin{aligned} a + (x + y) &= (a + x) + y && \text{(N2)} \\ &= n + y && \text{(subsitusi)} \\ &= a + 1 && \text{(subsitusi)} \end{aligned}$$

sehingga $\quad x + y = 1. \quad$ (Teorema N14)

Tetapi $\quad x \geq 1,\ y \geq 1. \quad$ (Teorema N12)

Oleh karena itu,

$$x + y \geq 1 + 1 \qquad \text{(Teorema N5)}$$

$$x + y \neq 1. \qquad \text{(Definisi N1 dan Teorema N2)}$$

Tetapi ini kontradiksi, karena menurut Teorema N2, tidak mungkin terdapat pernyataan $x + y = 1$ dan $x + y \neq 1$

bersamaan. Maka pengandaian itu salah dan teorema ini terbukti benar.

Teorema N23. $(\forall\ h,k \in N)\ h < k + 1 \Rightarrow h \leq k$.

Bukti:

Ambil sebarang $h,k \in N$.

Andaikan $h < k + 1$, maka

$(\exists\ x \in N)\ h + x = k + 1.$ (Definisi N1)

Berarti $x \geq 1.$ (Teorema N12)

Andaikan $x = 1$, maka

$h + 1 = k + 1$ (subsitusi)

dan $h = k.$ (Teorema N13)

Sekarang, andaikan $x > 1$. Maka

$(\exists\ y \in N)\ x = 1 + y$ (Definisi N1)

dan kita peroleh

$(h + y) + 1 = h + (y + 1)$ (N2)

$= h + (1 + y)$ (N1)

$= h + x$ (subtitusi)

$= k + 1.$ (subtitusi)

Ini berarti bahwa

$h + y = k$ (Teorema N13)

dan oleh karena itu

$h < k.$ (Definisi N1)

Teorema N24. $(\forall\ a,b,c \in N)\ a < b \Leftrightarrow c + a < c + b.$

Bukti:

Ambil sebarang $a,b,c \in N$.

a. Andaikan $a < b$, maka $c + a < c + b$. (Teorema N4)

b. Andaikan $c + a < c + b$, maka

$$(\exists\, x \in N)\ (c + a) + x = c + b \qquad \text{(Definisi N1)}$$

$$(a + x) + c = b + c \qquad \text{(N1, N2)}$$

$$a + x = b \qquad \text{(Teorema N19)}$$

$$a < b. \qquad \text{(Definisi N1)}$$

Teorema N25. $(\forall\, a,b,c \in N)\ a < b \Leftrightarrow ca < cb$.

Bukti:

Ambil sebarang $a,b,c \in N$.

a. Andaikan $a < b$, maka $ca < cb$. (Teorema N6)

b. Andaikan $a = b$ atau $a > b$.

Bila $a = b$ maka $ca = cb$. (Teorema N20)

Bila $a > b$ maka

$$b < a \qquad \text{(Definisi N1)}$$

$$cb < ca \qquad \text{(Teorema N6)}$$

$$ca > cb. \qquad \text{(Definisi N1)}$$

Kesimpulan, $a = b$ atau $a > b \Rightarrow ca = cb$ atau $ca > cb$.

Dengan kontraposisi, $ca < cb \Rightarrow a < b$.

Teorema N26. Prinsip Bilangan Asli Terkecil.

Diberikan himpunan $M \subseteq N$ dan $M \neq \emptyset$, maka terdapatlah suatu elemen $m \in M$ sehingga $m \leq x$, $\forall\, x \in M$. Bilangan asli itu disebut bilangan asli terkecil dalam M.

Bukti:

Andaikan tidak ada $m \in M$, sedemikian sehingga

$$m \leq x, \ \forall \ x \in M.$$

Maka, $\qquad 1 \notin M.$ $\qquad$ (Teorema N12)

Andaikan $T = \{ x \in N \mid x < y, \ \forall \ y \in M \}$, berarti $T \parallel M$.

I. $1 \in T$.

II. Andaikan $k \in T$. Bagaimana dengan keanggotaan $k + 1$?

Misalkan $h < k + 1$, $h \in N$. Maka, dengan Teorema N23, $h \leq k$ dan berarti $h \notin M$.

Dengan demikian $(\forall \ h \in N) \ h < k + 1 \Rightarrow h \notin M$.

Sekarang, jika $k + 1 \in M$, maka $k + 1$ adalah bilangan asli M terkecil atau $k + 1 \leq x, \ \forall \ x \in M$, karena, menurut Teorema N22, tidak ada $n \in N$ sehingga $k < n < k + 1$.

Akan tetapi menurut pengandaian, M tidak mempunyai bilangan asli terkecil, berarti pengandaian $k + 1 \in M$ salah, maka $k + 1 \in T$.

Jadi, menurut N8, $T = N$. Tetapi ini tidak mungkin karena $M \neq \emptyset$ dan $M \parallel T$.

Kesimpulannya pengandaian di atas salah, sehingga untuk setiap $M \subseteq N$ dan $M \neq \emptyset$, Memuat bilangan asli terkecil.

Teorema N27. Prinsip Kedua Induksi Matematika.

Andaikan $P(n)$ suatu kalimat yang didefinisikan untuk setiap bilangan asli n, sedemikian sehingga

a. $P(1)$ benar,

b. Untuk tiap $m \in N$, bila $P(k)$ benar maka $P(m)$ benar, untuk tiap $k \in N$ dimana $k < m$, maka P(n) benar untuk setiap bilangan asli n.

Bukti:

Andaikan pernyataan (a) dan (b) di atas benar dan ada $M = \{ x \in N \mid P(x) \text{ kalimat salah} \}$, $M \neq \emptyset$.

Maka, menurut Teorema N26, ada $m \in M$ sehingga $m \leq x$, untuk $\forall x \in M$. $m \neq 1$, karena P(1) benar.

Untuk setiap $k \in N$, $k < m$, karena P(k) benar. Maka, menurut pernyataan (b), P(m) juga benar, sehingga $m \notin M$.

Tetapi ini kontradiksi dengan pengandaian $m \in M$.

Kesimpulan, $M = \emptyset$ atau P(n) benar untuk setiap bilangan asli n.

Teorema N28. Prinsip III Induksi Matematika.

Andaikan P(n) suatu kalimat yang didefinisikan untuk setiap $n \in N$, sedemikian sehingga:

a. P(n) benar, untuk semua $n \leq h$, dimana h adalah bilangan asli tertentu.

b. Untuk tiap $m \in N$, $P(m + h)$ benar bila P(k) benar untuk semua bilangan asli k sedemikian sehingga $m \leq k < m + h$,

maka P(n) benar untuk setiap bilangan asli n.

Bukti:

Andaikan pernyataan (a) dan (b) di atas benar dan ada $M = \{ x \in N \mid P(x) \text{ kalimat salah} \}$, $M \neq \emptyset$.

Maka, menurut Teorema N26, $\exists\, s \in M$ sehingga $s \leq x$, untuk semua $x \in M$. Karena pernyataan (a), $s > h$, sehingga

$$\exists\ m \in N,\ s = m + h. \qquad \text{(Definisi N1)}$$

$k < m + h$, karena $P(k)$ benar, lebih khusus lagi $m \leq k < m + h$. Maka, menurut pernyataan (b), $P(m + h)$ juga benar untuk setiap $m \in N$, sehingga $m + h \notin M$. Tetapi ini kontradiksi dengan pengandaian di atas. Kesimpulan, $M = \emptyset$ atau $P(n)$ benar untuk setiap bilangan asli n.

Jika kita mengambil $h = 1$ pada Teorema N28, sehingga $m \leq k < m + 1$, maka, dengan menggunakan Teorema N22, kita akan melihat bahwa Teorema N1 merupakan kejadian khusus dari Teorema N28.

Definisi N3. $(\forall\ x \in N)\ x + 1 = x'$.

Karena Definisi N3 ini, Teorema N13, Teorema N15, dan Teorema N17 berturut-turut dapat ditulis menjadi:

a. $(\forall\ x,y \in N)\ x' = y' \Rightarrow x = y$

b. $(\forall\ x \in N)\ x' \neq 1$

c. $(\forall\ x \in N)\ \exists!\ (x + 1) \in N$.

Catatan:

Definisi N3, Teorema N13, Teorema N15 dan Teorema N17 sengaja diuraikan pada bab ini, karena pada bab berikutnya definisi dan teorema-teorema ini akan dipakai untuk membuktikan ekuivalensi antara himpunan delapan postulat dan postulat Peano.

BAB III

SISTEM BILANGAN BULAT

Dalam bab ini, kita akan membahas sistem bilangan bulat yang merupakan perluasan dari sistem bilangan asli. Untuk itu, dibentuk pergandaan kartesius dari N dan N, di mana N adalah himpunan semua bilangan asli:

Definisi B1. $I = N \times N = \{(m,n) \mid m \in N \text{ dan } n \in N\}$.

Pada bagian berikutnya akan ditunjukkan bahwa I dengan beberapa definisi membentuk sistem bilangan bulat, yang terdiri dari bilangan bulat positif, bilangan bulat negatif dan bilangan nol.

Catatan.

Untuk mempermudah pengertian sistem bilangan bulat ini, $(m,n) \in I$ dapat dipikirkan sebagai selisih dua bilangan asli m dan n, yaitu $m - n$. Jika $m > n$, maka $m - n$ merupakan bilangan bulat positif; jika $m = n$, maka $m - n$ adalah bilangan nol; dan jika $m < n$, maka $m - n$ adalah bilangan bulat negatif. Dengan pemikiran seperti ini, kita dapat mengatakan $(a,b) = (c,d)$ bila dan hanya bila $a - b = c - d$, atau $a + d = b + c$. Dengan cara yang sama, karena $(a - b) + (c - d) = (a + c) - (b + d)$, maka $(a,b) + (c,d)$ didefinisikan sebagai pasangan berurutan

= (ac + bd) - (ad + bc), maka (a,b)(c,d) didefinisikan sebagai pasangan berurutan bilangan asli (ac + bd,ad + bc).

Sesuai dengan pembahasan tersebut di atas, antara elemen-elemen I didefinisikan relasi " = " (baca "sama dengan") sebagai berikut:

Definisi B2. $(\forall\ (a,b),(c,d) \in I)$

$$(a,b) = (c,d) \Leftrightarrow a + d = b + c.$$

Teorema B1. Relasi " = " pada I merupakan relasi ekuivalensi, yaitu:

1. $(a,b) = (a,b)$,
2. jika $(a,b) = (c,d)$, maka $(c,d) = (a,b)$,
3. jika $(a,b) = (c,d)$, dan $(c,d) = (e,f)$, maka $(a,b) = (e,f)$.

Bukti:

1. Ambil $a,b \in N$, maka

$$a + b = b + a \quad \text{(N1)}$$
$$(a,b) = (a,b). \quad \text{(Definisi B2)}$$

2. Andaikan $(a,b) = (c,d)$, maka

$$a + d = b + c \quad \text{(Definisi B2)}$$
$$d + a = c + b \quad \text{(N1)}$$
$$c + b = d + a$$
$$(c,d) = (a,b). \quad \text{(Definisi B2)}$$

3. Andaikan $(a,b) = (c,d)$ dan $(c,d) = (e,f)$ maka

$$a + d = b + c \quad \text{(Definisi B2)}$$

$c + f = d + e.$ (Definisi B2)

Selanjutnya, $d + (a + f) = (d + a) + f$ (N5)

$= (a + d) + f$ (N1)

$= (b + c) + f$ (asumsi)

$= b + (c + f)$ (N5)

$= b + (d + e)$ (asumsi)

$= (b + d) + e$ (N5)

$= (d + b) + e$ (N1)

$= d + (b + e).$ (N5)

Kesimpulan

$a + f = b + e$ (Teorema N14)

$(a,b) = (e,f).$ (Definisi B2)

Teorema B2. $(\forall x \in N)\ (x + a, x + b) = (a,b)$

Bukti:

$(x + a) + b = x + (a + b)$ (N5)

$= x + (b + a)$ (N1)

$= (x + b) + a.$ (N5)

Kesimpulan

$(x + a, x + b) = (a,b).$ (Definisi B2)

A. Operasi Penjumlahan

Definisi B3. Definisi Penjumlahan: $(\forall\ (a,b),(c,d) \in I)$

$(a,b) + (c,d) = (a + c, b + d).$

Teorema B3. Operasi penjumlahan didefinisikan secara betul dan bersifat tertutup..

Bukti:

a. Definisi penjumlahan didefinisikan secara betul.

Andaikan $(a,b) = (\underline{a},\underline{b})$ dan $(c,d) = (\underline{c},\underline{d})$.

Maka $a + \underline{b} = b + \underline{a}$ dan $c + \underline{d} = d + \underline{c}$. (Definisi B2)

Akibatnya,

$(\underline{a},\underline{b}) + (\underline{c},\underline{d}) = (\underline{a} + \underline{c}, \underline{b} + \underline{d})$ (Definisi B3)

$= (a + c + \underline{a} + \underline{c}, a + c + \underline{b} + \underline{d})$ (Teorema B2)

$= (a + c + \underline{a} + \underline{c}, a + \underline{b} + c + \underline{d})$ (N1 dan N2)

$= (a + c + \underline{a} + \underline{c}, \underline{a} + b + \underline{c} + d)$ (asumsi dan N1)

$= (\underline{a} + \underline{c} + a + c, \underline{a} + \underline{c} + b + d)$ (N1, N2)

$= (a + c, b + d)$ (Teorema B2)

$= (a,b) + (c,d)$. (Definisi B3)

b. Sifat tertutup terhadap penjumlahan.

$(a,b) + (c,d) = (a + c, b + d)$ (Definisi B3)

$a + c \in N$ (N tertutup)

$b + d \in N$. (N tertutup)

Kesimpulan

$(a + c, b + d) \in I$. (Definisi B1)

Teorema B4. Operasi penjumlahan pada I bersifat komutatif dan asosiatif.

Bukti:

a. Sifat komutatif

$(a,b) + (c,d) = (a + c, b + d)$ (Definisi B3)

$= (c + a, d + b)$ (N1)

$= (c,d) + (a,b).$ (Definisi B3)

b. Sifat assosiatif.

$\{(a,b) + (c,d)\} + (e,f) = (a + c,\ b + d) + (e,f)$

(Definisi B3)

$= ((a + c) + e, (b + d) + f)$

(Definisi B3)

$= (a + (c + e), b + (d + f))$ (N2)

$= (a,b) + (c + e, d + f)$

(Definisi B3)

$= (a,b) + \{(c,d) + (e,f)\}.$

(Definisi B3)

B. Operasi Perkalian

Definisi B4. Definisi perkalian: ($\forall$ $(a,b),(c,d) \in I$)

$(a,b)(c,d) = (ac + bd, ad + bc).$

Teorema B5. Operasi perkalian didefinisikan secara betul dan bersifat tertutup.

Bukti:

a. Definisi perkalian didefinisikan secara betul.

Andaikan $(a,b) = (\underline{a},\underline{b})$ dan $(c,d) = (\underline{c},\underline{d})$. Maka

$a + \underline{b} = b + \underline{a}$ (Definisi B2)

$c + \underline{d} = d + \underline{c}.$ (Definisi B2)

Akibatnya,

$(\underline{a},\underline{b})(\underline{c},\underline{d}) = (\underline{a}\ \underline{c} + \underline{b}\ \underline{d}, \underline{a}\ \underline{d} + \underline{b}\ \underline{c})$ (Definisi B4)

$= (a\underline{c} + b\underline{d} + \underline{a}\,\underline{c} + \underline{b}\,\underline{d}, a\underline{c} + b\underline{d} + \underline{a}\,\underline{d} + \underline{b}\,\underline{c})$

(Teorema B2)

$= (a\underline{c} + b\underline{d} + \underline{a}\,\underline{c} + \underline{b}\,\underline{d}, a\underline{c} + \underline{b}\,\underline{c} + b\underline{d} + \underline{a}\,\underline{d})$

(N1 dan N2)

$= (a\underline{c} + b\underline{d} + \underline{a}\,\underline{c} + \underline{b}\,\underline{d}, \underline{c}(a + \underline{b}) + \underline{d}(b + \underline{a}))$

(N3 dan N5)

$= (a\underline{c} + b\underline{d} + \underline{a}\,\underline{c} + \underline{b}\,\underline{d}, \underline{c}(\underline{a} + b) + \underline{d}(\underline{b} + a))$

(asumsi dan N1)

$= (a\underline{c} + b\underline{d} + \underline{a}\,\underline{c} + \underline{b}\,\underline{d}, \underline{c}\,\underline{a} + \underline{c}b + \underline{d}\,\underline{b} + \underline{d}a)$

(N5)

$= (\underline{a}\,\underline{c} + \underline{b}\,\underline{d} + a\underline{c} + b\underline{d}, \underline{a}\,\underline{c} + \underline{b}\,\underline{d} + \underline{c}b + \underline{d}a)$

(N3, N2 dan N1)

$= (a\underline{c} + b\underline{d}, \underline{c}b + \underline{d}a)$ (Teorema B2)

$= (ac + bd + a\underline{c} + b\underline{d}, ac + bd + \underline{c}b + \underline{d}a)$

(Teorema B2)

$= (ac + bd + a\underline{c} + b\underline{d}, ac + a\underline{d} + bd + b\underline{c})$

(N3, N1 dan N2)

$= (ac + bd + a\underline{c} + b\underline{d}, a(c + \underline{d}) + b(d + \underline{c}))$(N5)

$= (ac + bd + a\underline{c} + b\underline{d}, a(\underline{c} + d) + b(\underline{d} + c)$

(asumsi dan N1)

$= (ac + bd + a\underline{c} + b\underline{d}, a\underline{c} + ad + b\underline{d} + bc)$ (N5)

$= (a\underline{c} + b\underline{d} + ac + bd, a\underline{c} + b\underline{d} + ad + bc)$

(N1 dan N2)

$= (ac + bd, ad + bc)$ (Teorema B2)

$= (a,b)(c,d).$ (Definisi B4)

b. Perkalian bersifat tertutup.

Ambil sebarang $(a,b),(c,d) \in I$. Maka, menurut Definisi

B4, $(a,b)(c,d) = (ac + bd, ad + bc)$.

Operasi perkalian dan penjumlahan pada N bersifat tertutup, maka

$$ac + bd \in N$$

$$ad + bc \in N.$$

Berarti, menurut Definisi B1, $(ac + bd, ad + bc) \in I$.

Teorema B6. Operasi perkalian pada I bersifat komutatif dan assosiatif serta distributif terhadap penjumlahan.

Bukti:

a. Sifat komutatif.

$$\begin{aligned}(a,b)(c,d) &= (ac + bd, ad + bc) && \text{(Definisi B4)}\\ &= (ca + db, cb + da) && \text{(N3 dan N1)}\\ &= (c,d)(a,b). && \text{(Definisi B4)}\end{aligned}$$

b. Sifat assosiatif.

$$\begin{aligned}\{(a,b)(c,d)\}(e,f) &= (ac + bd, ad + bc)(e,f) && \text{(Definisi B4)}\\ &= ((ac + bd)e + (ad + bc)f, (ac + bd)f + (ad + bc)e) && \text{(Definisi B4)}\\ &= (ace + bde + adf + bcf, acf + bdf + ade + bce) && \text{(N3 dan N5)}\\ &= (ace + adf + bcf + bde, acf + ade + bce + bdf) && \text{(N1 dan N2)}\\ &= (a(ce + df) + b(cf + de), a(cf + de) + b(ce + df)) && \text{(N5)}\\ &= (a,b)(ce + df, cf + de) && \text{(Definisi B4)}\\ &= (a,b)\{(c,d)(e,f)\}. && \text{(Definisi B4)}\end{aligned}$$

c. Sifat distributif perkalian terhadap penjumlahan.

$(a,b)\{(c,d) + (e,f)\} = (a,b)(c + e,d + f)$ (Definisi B3)

$= (a(c + e) + b(d + f),a(d + f) + b(c + e))$ (Definisi B4)

$= (ac + ae + bd + bf,ad + af + bc + be)$ (N5)

$= (ac + bd + ae + bf,ad + bc + af + be)$ (N2 dan N1)

$= (ac + bd, ad + bc) + (ae + bf, af + be)$ (Definisi B3)

$= (a,b)(c,d) + (a,b)(e,f).$ (Definisi B4)

Definisi B5. Anggota -anggota I, dengan Definisi B2, B3, B4, disebut bilangan bulat.

C. Bilangan Bulat Positif, Bilangan Nol dan Bilangan Bulat Negatif

Definisi B6. Bila $(m,n) \in I$ dan $m > n$, maka (m,n) disebut bilangan bulat positif. Himpunan semua bilangan bulat positif dinyatakan dengan lambang I^+.

Teorema B7. Setiap bilangan bulat positif mempunyai bentuk $(x + a,a)$.

Bukti:

Ambil sebarang $(m,a) \in I^+$, berarti $m > a$. Maka, menurut Definisi N1, $\exists\ x \in \mathbb{N}$ sehingga $m = x + a$.

Jadi, $(m,a) = (x + a, a)$.

Teorema B8. $(\forall\ (m,n) \in I)\ (\forall\ a \in \mathbb{N})$

$$(m,n)(1 + a, a) = (m,n).$$

Bukti:

$$\begin{aligned} (m,n)(1 + a, a) &= (m(1 + a) + na, ma + n(1 + a)) && \text{(Definisi B4)} \\ &= (m + ma + na, ma + n + na) && \text{(N6,N5)} \\ &= (m + ma + na, na + ma + na) && \text{(N2,N1)} \\ &= (m,n). && \text{(Teorema B2)} \end{aligned}$$

Definisi B7. Diketahui dua sistem aljabar, $\mathbb{A} = (A,+,.)$ dan $\mathbb{B} = (B,\oplus,\otimes)$. Bila terdapat pemetaan bijektif $f : A \to B$ sedemikian sehingga untuk tiap $a,b \in A$ berlaku:

a. $f(a + b) = f(a) \oplus f(b)$,

b. $f(ab) = f(a) \otimes f(b)$,

maka kedua sistem itu dikatakan isomorfis relatif terhadap kedua operasi tersebut.

Apabila sistem $\mathbb{A}$ dan $\mathbb{B}$ isomorfis maka:

a. Sifat-sifat operasi dan relasi kesamaan yang berlaku pada $\mathbb{A}$ juga pada $\mathbb{B}$, dan sebaliknya.

b. Elemen-elemen pada himpunan A pada sistem $\mathbb{A}$ dapat diganti dengan elemen-elemen yang bersesuaian pada himpunan B dalam sistem $\mathbb{B}$, dan sebaliknya.

Dengan demikian dapat dikatakan, bahwa sistem $\mathbb{A}$ dan $\mathbb{B}$ ini mempunyai stuktrur yang sama, walaupun nama elemen, operasi maupun relasi pada masing-masing sistem tersebut berbeda.

Teorema B9. Sistem bilangan bulat positif dan sistem bilangan asli adalah isomorfis relatif terhadap operasi penjumlahan dan perkalian.

Bukti:

Andaikan $I^+ = \{ (x + a,a) \in I \mid x,a \in N \}$ adalah himpunan bilangan bulat positif dan N adalah himpunan bilangan asli.

Perhatikan suatu fungsi $f : I^+ \to N$ yang didefinisikan oleh $f((x + a,a)) = x$, untuk setiap $(x + a,a) \in I^+$.

Akan dibuktikan bahwa fungsi f didefinisikan secara betul dan bijektif.

1.a. Ambil $(x + a,a)$ dan $(y + b,b) \in I^+$, dan andaikan $(x + a,a) = (y + b,b)$.

$(x + a,a) = (y + b,b)$

$\Leftrightarrow (x + a) + b = a + (y + b)$ (Definisi B2)

$\Leftrightarrow x + (a + b) = y + (a + b)$ (N1 dan N2)

$\Leftrightarrow x = y$. (Teorema N19)

Ini berarti $(y + a,a) = (y + b,b) = (y + c,c) = \ldots$

Kesimpulan f didefinisikan secara betul dan sekaligus injektif.

b. Ambil sebarang $r \in N$, maka $(\exists (r + a,a) \in I^+)$ $r = f((r + a,a))$. Jadi f surjektif.

Kesimpulan, fungsi $f : I^+ \rightarrow N$ merupakan fungsi yang didefinisikan secara betul dan bijektif.

2. $f((x + a,a) + (y + b,b)) =$

$$f((x + a) + (y + b),a + b)) \quad \text{(Definisi B3)}$$

$$= f((x + y) + a + b,a + b)) \quad \text{(N2 dan N1)}$$

$$= x + y \quad \text{(Definisi fungsi f)}$$

$$= f((x + a,a)) + f((y + b,b)). \quad \text{(Definisi fungsi f)}$$

3. $f((x + a,a)(y + b,b)) =$

$$f((x + a)(y + b) + ab,(x + a)b + a(y + b) \quad \text{(Definisi B4, N5)}$$

$$= f((xy + xb + ay + ab + ab,xb + ab + ay + ab)) \quad \text{(N5)}$$

$$= f((xy + xb + ay + ab + ab,xb + ay + ab + ab)) \quad \text{(N2 dan N1)}$$

$$= xy \quad \text{(Definisi fungsi f)}$$

$$= f((x + a,a))f((y + b,b)). \quad \text{(Definisi fungsi f)}$$

Kesimpulan, sistem bilangan bulat dan sistem bilangan asli adalah isomorfis relatif terhadap operasi penjumlahan dan perkalian.

Dengan demikian, struktur kedua sistem itu sama, sehingga setiap elemen $(x + a,a) \in I^+$ dapat diganti dengan elemen $x \in N$. Karena $I^+ \subset I$, maka $N \subset I$. Dengan demikian, sistem bilangan bulat dapat dipandang sebagai perluasan dari sistem bilangan asli.

Untuk selanjutnya notasi x akan digunakan untuk menyatakan bilangan bulat positif $(x + a,\ a)$.

Teorema B10. $(\forall\ m \in N)\ (b,c) = (m,m) \Leftrightarrow b = c$.

Bukti:

$$(b,c) = (m,m) \qquad \text{(asumsi)}$$

$$\Leftrightarrow \quad b + m = c + m \qquad \text{(Definisi B2)}$$

$$\Leftrightarrow \quad b = c. \qquad \text{(Teorema N19)}$$

Teorema B11. $(\forall\ (x,y) \in I)\ (x,y) + (m,m) = (x,y)$ dan $(x,y)(m,m) = (m,m)$.

Bukti:

$$(x,y) + (m,m) = (x + m, y + m) \qquad \text{(Definisi B3)}$$

$$= (x,y) \qquad \text{(N1 dan Teorema B2)}$$

dan

$$(x,y)(m,m) = (xm + ym, xm + ym) \qquad \text{(Definisi B4)}$$

$$= (m,m). \qquad \text{(Teorema B10)}$$

Definisi B8. Bilangan bulat (m,m) disebut **bilangan nol**, dan diberi notasi 0.

Teorema B12. $(m,n) + (n,m) = 0$.

Bukti:

$$(m,n) + (n,m) = (m + n, n + m) \qquad \text{(Definisi B3)}$$

$$= (m + n, m + n) \qquad \text{(N1)}$$

$$= (m,m) \qquad \text{(Teorema B10)}$$

$$= 0. \qquad \text{(Definisi B8)}$$

Definisi B9. $(\forall\ m,n \in N)\ -(m,n) = (n,m)$

Definisi B10. Bila $(m,n) \in I$ dan $m < n$, maka (m,n) disebut bilangan bulat negatif. Himpunan semua bilangan bulat negatif akan ditulis dengan notasi I^-.

Teorema B13. $I^- = \{\ (a, a + x)\ |\ a,x \in N\ \}$.

Bukti:

$(a,n) \in I^- \Leftrightarrow \quad a < n$ (Definisi B10)

$\Leftrightarrow \quad (\exists\ x \in N)\ a + x = n.$ (Definisi N1)

$\Leftrightarrow \quad (a,n) = (a, a + x).$

Teorema B14. $(\forall\ x \in I^+)\ -x \in I^-$.

Bukti:

Ambil sebarang $x \in I^+$. Maka $x = (x + a, a)$. Jadi

$-x = -\ (x + a, a)$ (Definisi B9)

$= (a, x + a)$ (Definisi B9)

$= (a, a + x)$

Kesimpulan, $-x \in I^-$.

Teorema B15. $(\forall\ m,n \in I^+)$

a. $-(-m) = m$,

b. $(-m)n = -mn = m(-n)$,

c. $(-m)(-n) = mn$,

d. $mn \in I^+$.

Bukti:

a. $-(-m) = -(a,a + m)$ (Teorema B13)

$= (m + a,a)$ (Definisi B9 dan N1)

$= m.$ (Teorema B7)

b. $(-m)n = (a,a + m)(n + a,a)$ (Teorema B7)

$= (an + aa + aa + ma, aa + an + aa + mn + ma)$

(Definisi B4 dan N5)

$= (an + aa + aa + ma, an + aa + aa + ma + mn)$

(N1 dan N2)

$= -mn$ (Teorema B14)

$= -(mn + ma + aa + aa + an, ma + aa + aa + an)$

(Teorema B2)

$= (ma + aa + aa + an, ma + aa + aa + an + mn)$

(Definisi B9)

$= ((m + a)a + a(a + n), ma + mn + aa + an + aa)$

(N5, N2 dan N1)

$= ((m + a)a + a(a + n), (m + a)(a + n) + aa)$(N5)

$= (m + a,a)(a,a + n)$ (Definisi B4)

$= m(-n).$ (Teorema B14)

c. $(-m)(-n) = -(m(-n))$ (Teorema B15 (a))

$= -(-(mn))$ (Teorema B15 (a))

$= mn.$ (Teorema B15.a)

d. $mn = (m + a,\ a)(n + a,a)$ (Teorema B7)

$= (mn + ma + an + aa + aa,\ ma + aa + an + aa)$

(Teorema B2)

$= (mn + ma + an + aa + aa,\ ma + an + aa + aa)$

(Teorema B4)

Jadi $mn \in I^+$ (Teorema B7).

Teorema B16. $(\forall\ (a,b),(c,d),(e,f) \in I)$

$$(a,b) + (c,d) = (a,b) + (e,f) \Leftrightarrow (c,d) + (e,f).$$

Bukti:

Ambil sebarang $(a,b),(c,d),(e,f) \in I$. Sedemikian sehingga $(a,b) + (c,d) = (a,b) + (e,f)$. Maka

$(a,b) + (c,d) = (a,b) + (e,f)$

$\Leftrightarrow \quad (a + c, b + d) = (a + e, b + f)$ (Definisi B3)

$\Leftrightarrow \quad (a + c) + (b + f) = (b + d) + (a + e)$ (Definisi B2)

$\Leftrightarrow \quad c + f + a + b = d + e + a + b$ (N1, N2)

$\Leftrightarrow \quad c + f = d + e$ (Teorema N19)

$\Leftrightarrow \quad (c,d) = (e,f).$ (Definisi B2)

D. Operasi Pengurangan dan Urutan pada Sistem Bilangan Bulat

Definisi B11. $(\forall\ (m,b),(n,c) \in I)$

$$(m,b) - (n,c) = (m,b) + (-(n,c)).$$

Definisi B12. $((m,b),(n,c) \in I)$

a. $(m,b) < (n,c) \Leftrightarrow m + c < n + b,$

b. $(m,b) > (n,c) \Leftrightarrow (n,c) < (m,b).$

Teorema B17. $(\forall\ (m,b) \in I)$

a. $(m,b) \in I^{+} \Leftrightarrow (m,b) > 0,$

b. $(m,b) \in I^{-} \Leftrightarrow (m,b) < 0.$

Bukti:

Ambil sebarang $(m,b) \in I$.

a. $(m,b) \in I^+ \Leftrightarrow b < m$ (Definisi B6)

$\Leftrightarrow m + b < m + m$ (Teorema N24)

$\Leftrightarrow (m,m) < (m,b)$ (Definisi B12)

$\Leftrightarrow 0 < (m,b)$ (Definisi B8)

$\Leftrightarrow (m,b) > 0$.

b. $(m,b) \in I^- \Leftrightarrow m < b$ (Definisi B10)

$\Leftrightarrow m + m < m + b$ (Teorema N24)

$\Leftrightarrow (m,b) < (m,m)$ (Definisi B12)

$\Leftrightarrow (m,b) < 0$. (Definisi B8)

Teorema B18. (sifat trikotomi)

Untuk setiap $(a,b),(c,d) \in I$, berlaku tepat satu di antara:

a. $(a,b) = (c,d)$,

b. $(a,b) < (c,d)$,

c. $(a,b) > (c,d)$.

Bukti:

Ambil sebarang $(a,b),(c,d) \in N$, maka $a,b,c,d \in N$ dan $(a + d),(b + c) \in N$.

Jadi menurut Teorema N2, berlaku tepat satu pernyataan berikut:

a. $a + d = b + c$,

b. $a + d < b + c$,

c. $a + d > b + c$.

Sehingga, menurut Definisi B2 dan Definisi B12 berlaku tepat satu dari ketiga pernyataan:

$(a,b) = (c,d)$, $(a,b) < (c,d)$, $(a,b) > (c,d)$.

Teorema B19. $(\forall\ (a,b),(c,d) \in I)\ (a,b) < (c,d) \Leftrightarrow$
$(\exists\ (e,f) \in I^{+})\ (a,b) + (e,f) = (c,d)$.

Bukti:

Ambil sebarang $(a,b),(c,d) \in I$. Maka

$(a,b) < (c,d)$

$\Leftrightarrow a + d < b + c$ (Definisi B12)

$\Leftrightarrow (\exists\ x \in N)\ a + d + x = b + c$ (Definisi N1)

$\Leftrightarrow a + d + x + y = b + c + y$ (Teorema N19)

$\Leftrightarrow (a,b) = (c + y, d + x + y)$ (Definisi B2)

$\Leftrightarrow (a,b) = (c,d) + (y, x + y)$ (Definisi B3)

$\Leftrightarrow (a,b) = (c,d) - (x + y, y)$

(Definisi B9 dan Definisi B11)

$\Leftrightarrow (a,b) + (x + y, y) = (c,d)$. (Teorema B16)

Karena $x,y \in N$, maka $(x + y, y) \in I^{+}$. (Teorema B7)

Kesimpulan, dengan mengambil $e = x + y$ dan $f = y$, diperoleh $(\forall\ (a,b),(c,d) \in I)\ (a,b) < (c,d) \Leftrightarrow (\exists\ (e,f) \in I^{+})$ $(a,b) + (e,f) = (c,d)$.

Teorema B20. $(\forall\ (a,b),(c,d) \in I)$
$(a,b) < (c,d) \Leftrightarrow (a,b) - (c,d) < 0$.

Bukti:

Ambil sebarang $(a,b),(c,d) \in I$. Maka

$(a,b) < (c,d) \Leftrightarrow a + d < b + c$ (Definisi B12)

$\Leftrightarrow a + d + x < b + c + x$ (Teorema N24)

$\Leftrightarrow (a + d, b + c) < (x,x)$ (Definisi B12)

$\Leftrightarrow (a,b) + (d,c) < 0$

(Definisi B5 dan Definisi B8)

$\Leftrightarrow (a,b) - (c,d) < 0$.

(Definisi B9 dan Definisi B11).

Teorema B21. $\{I^+, \{0\}$ dan $I^-\}$ adalah partisi dari himpunan I.

Bukti:

Ambil sebarang $(a,b) \in I$, maka menurut Teorema B18 satu dan hanya satu dari pernyataan berikut ini benar:

a. $(a,b) = 0$, $(a,b) \in \{0\}$.

b. $(a,b) < 0$, $(a,b) \in I^-$.

c. $(a,b) > 0$, $(a,b) \in I^+$.

Jadi $\{0\} \cap I^+ \cap I^- = \emptyset$ dan $I = \{0\} \cup I^- \cup I^+$.

Teorema B22. $(\forall (a,b), (c,d),(e,f) \in I)$

$(a,b) < (c,d)$ dan $(c,d) < (e,f) \Rightarrow$

$(a,b) < (e,f)$.

Bukti:

Ambil sebarang $(a,b),(c,d),(e,f) \in I$. Maka

$(a,b) < (c,d) \Leftrightarrow \quad a + d < b + c$ (Definisi B12)

$\Leftrightarrow a + d + f < b + c + f$ (Teorema N24)

dan

$(c,d) < (e,f) \Leftrightarrow \quad c + f < d + e$ (Definisi B12)

$\Leftrightarrow b + c + f < b + d + e$. (Teorema N24)

Dengan demikian,

$a + d + f < b + d + e$ (Teorema N3)

$a + f < d + e$ (N1, Teorema N24)

$(a,b) < (c,d).$ (Definisi B12)

Teorema B23. $(\forall\ (m,b),(n,c),(k,d) \in I;\ (n,c) > 0)$

$(m,b) < (k,d) \Leftrightarrow (m,b)(n,c) < (k,d)(n,c).$

Bukti:

Ambil sebarang $(m,b),(n,c),(k,d) \in I$, dengan $(n,c) > 0$.

Maka $n > c$ (Definisi B6)

$(\exists\ p \in N)\ n = c + p$ (Definisi N1)

a. Andaikan $(m,b)(n,c) < (k,d)(n,c)$, maka

$(mn + bc, mc + bn) < (kn + dc, kc + dn)$ (Definisi B4)

$mn + bc + kc + dn < kn + dc + mc + bn$ (Definisi B12)

$m(c + p) + bc + kc + d(c + p) < k(c + p) + dc + mc + b(c + p)$ (substitusi)

$mc + mp + bc + kc + dc + dp < kc + kp + dc + mc + bc + bp$ (N5)

$mc + bc + kc + dc + mp + dp < mc + bc + kc + dc + kp + bp$ (N1, N2)

$mp + dp < kp + bp$ (Teorema N24)

$p(m + d) < p(k + b)$ (N3, N5)

$m + d < k + b$ (Teorema N25)

$(m,b) < (k,d).$ (Definisi B12)

b. Andaikan $(m,b) < (k,d)$, maka

$m + d < k + b$ (Definisi B12)

$p(m + d) < p(k + b)$ (Teorema N6)

$mp + dp < kp + bp$ (N3, N5)

$mc + bc + kc + dc + mp + dp < mc + bc + kc + dc + kp +$

$$bp \qquad \text{(Teorema N4)}$$

$$mc + mp + bc + kc + dc + dp < kc + kp + dc + mc + bc + bp \qquad \text{(N1, N2)}$$

$$m(c + p) + bc + kc + d(c + p) < k(c + p) + dc + mc + b(c + p) \qquad \text{(N5)}$$

$$mn + bc + kc + dn < kn + dc + mc + bn \qquad \text{(substitusi)}$$

$$(mn + bc,\ mc + bn) < (kn + dc, kc + dn) \qquad \text{(Definisi B12)}$$

$$(m,b)(n,c) < (k,d)(n,c). \qquad \text{(Definisi B4)}$$

Teorema B24. ($\forall$ $(m,b),(n,c),(k,d),(l,e) \in I$)

$(m,b) < (n,c)$ dan $(k,d) < (l,e) \Rightarrow$

$(m,b) + (k,d) < (n,c) + (l,e)$.

Bukti:

Ambil sebarang $(m,b),(n,c),(k,d),(l,e) \in I$.

Andaikan $(m,b) < (n,c)$ dan $(k,d) < (l,e)$.

Ini berarti,

$$m + c < n + b \qquad \text{(Definisi B12)}$$

$$k + l < l + d. \qquad \text{(Definisi B12)}$$

Maka,

$$(m + c) + (k + l) < (n + b) + (l + d) \qquad \text{(Teorema N5)}$$

$$(m + k) + (c + e) < (n + l) + (b + d) \qquad \text{(N2, N1)}$$

$$(m + k, b + d) < (n + l, c + e) \qquad \text{(Definisi B12)}$$

$$(m,b) + (k,d) < (n,c) + (l,e). \qquad \text{(Definisi B3)}$$

Teorema B25. ($\forall$ $(a,b),(g,h) \in I$ dan $(c,d),(e,f) \in I^{+}$)

$(a,b) < (c,d)$ dan $(e,f) < (g,h) \Rightarrow$

$(a,b)(e,f) < (c,d)(g,h)$.

Bukti:

Ambil sebarang $(a,b),(g,h) \in I$ dan $(c,d),(e,f) \in I^{+}$.

$(a,b) < (c,d) \Leftrightarrow (a,b)(e,f) < (c,d)(e,f)$ (Teorema B23)

$(e,f) < (g,h) \Leftrightarrow (c,d)(e,f) < (c,d)(g,h)$.

(Teorema B4 dan Teorema B23)

Dengan demikian,

$(a,b)(e,f) < (c,d)(g,h)$. (Teorema B22)

Lemma B1. $(\forall\ (a,b),(c,d) \in I)$

$(a,b) < (c,d) \Leftrightarrow -(c,d) < -(a,b)$.

Bukti:

Ambil sebarang $(a,b),(c,d) \in I$.

$(a,b) < (c,d) \Leftrightarrow (a,b) - (c,d) < 0$ (Teorema B20)

$\Leftrightarrow -(c,d) + (a,b) < 0$ (Teorema B4)

$\Leftrightarrow -(c,d) - [-(a,b)] < 0$ (Teorema B15)

$\Leftrightarrow -(c,d) < -(a,b)$. (Teorema B20)

Teorema B26. $(\forall\ (a,b),(c,d) \in I)$

$(a,b) \neq 0$ dan $(c,d) \neq 0 \Rightarrow (a,b)(c,d) \neq 0$.

Bukti:

Ambil sebarang $(a,b),(c,d) \in I$ sedemikian sehingga $(a,b) \neq 0$ dan $(c,d) \neq 0$. Maka menurut Teorema B18

$(a,b) < 0$ atau $(a,b) > 0$ dan $(c,d) < 0$ atau $(c,d) > 0$.

Bila $(a,b) < 0$ dan $(c,d) < 0$, maka

$0 < -(a,b)$ dan $0 < -(c,d)$ (Lemma B1) sehingga $0 < [-(a,b)][-(c,d)]$ (Teorema B25)

$(a,b)(c,d) > 0$ (Teorema B15)

Bila $(a,b) > 0$ dan $(c,d) > 0$, maka

$(a,b)(c,d) > 0$.. (Teorema B25)

Bila $(a,b) > 0$ dan $(c,d) < 0$, maka

$-(c,d) > 0$ (Lemma B1)

sehingga $-[(a,b)(c,d)] > 0$ (Teorema B25, Teorema B15)

$(a,b)(c,d) < 0$ (Lemma B1)

Bila $(a,b) < 0$ dan $(c,d) > 0$, maka

$-(a,b) > 0$ dan $(c,d) > 0$ (Lemma B1)

$-[(a,b)(c,d)] > 0$ (Teorema B25, Teorema B15)

$(a,b)(c,d) < 0$ (Lemma B1)

Kesimpulan, $(\forall\ (a,b),(c,d) \in I)$

$[(a,b) \neq 0$ dan $(c,d) \neq 0 \Rightarrow (a,b)(c,d) \neq 0]$.

Pernyataan ini ekuivalen dengan pernyataan

$(\forall\ (a,b),(c,d) \in I)[(a,b)(c,d) = 0 \Rightarrow (a,b) = 0$ atau

$(c,d) = 0]$.

Teorema B27. $(\forall\ (m,b),(n,c) \in I)$

$$-((m,b) + (n,c)) = -(m,b) - (n,c).$$

Bukti:

$-((m,b) + (n,c)) = -(m + n,\ b + c)$ (Definisi B3)

$= (b + c,\ m + n)$ (Definisi B9)

$= (b,m) + (c,n)$ (Definisi B3)

$= -(m,b) + (-(n,c))$ (Definisi B9)

$= -(m,b) - (n,c)$. (Definisi B11)

Lemma B2. Untuk sebarang $(a,\ a + x), (b,\ b + y) \in I^-$,

$$(a,\ a + x) = (b,\ b + y) \Leftrightarrow x = y.$$

Bukti:

Ambil sebarang $(a, a + x), (b, b + y) \in I^-$.

$(a, a + x) = (b, b + y)$

$\Leftrightarrow a + b + y = a + x + b$ (Definisi B2)

$\Leftrightarrow y + b + a = x + b + a$ (N1 dan N2)

$\Leftrightarrow y = x.$ (Teorema N19)

Kesimpulan,

$$(a,\ a + x) = (b,\ b + y) \Leftrightarrow y = x, \text{ untuk } x,\ y \in N.$$

Ini berarti pula, $(a,\ a + x) = (b,\ b + x) = \ldots.$

Teorema B28. $(\forall\ (m,b), (n,c), (k,d) \in I;\ (m,b) \neq 0)$

$$(m,b)(n,c) = (m,b)(k,d) \Leftrightarrow (n,c) = (k,d).$$

Bukti:

Ambil sebarang $(m,b), (n,c), (k,d) \in I$, dengan $(m,b) \neq 0$.

1. Andaikan $(m,b), (n,c), (k,d) \in I^+$ sedemikian sehingga $(m,b)(n,c) = (m,b)(k,d)$. Maka $(m,b)(n,c) = (m,b)(k,d)$

$\Leftrightarrow (x + a, a)(y + a, a) = (x + a, a)(z + a, a)$

(Teorema B7)

$\Leftrightarrow (xy + ay + xa + aa + aa, xa + aa + ay + aa) =$

$(xz + xa + az + aa + aa, xa + aa + az + aa)$

(Definisi B4 dan N5)

$\Leftrightarrow (xy + aa, aa) = (xz + aa, aa)$ (N1, N2, Teorema B2)

$\Leftrightarrow xyaa + aaaa = aaxz + aaaa$ (Definisi B2)

$\Leftrightarrow xy = xz$ (N3, Teorema N19, Teorema N20)

$\Leftrightarrow y = z.$ (Teorema N18)

Kesimpulan,

$\Leftrightarrow \quad (y + a,a) = (z + a,a)$ (Teorema B9)

$\Leftrightarrow \quad (n,c) = (k,d).$ (Teorema B7)

2. Andaikan $(m,b),(n,c),(k,d) \in I^-$, sedemikian sehingga $(m,b)(n,c) = (m,b)(k,d)$. Maka $(m,b)(n,c) = (m,b)(k,d)$

$\Leftrightarrow \quad (a,a + x)(a,a + y) = (a,a + x)(a,a + z)$(Teorema B13)

$\Leftrightarrow \quad (aa + aa + ay + xa + xy, aa + ay + aa + xa) =$

$(aa + aa + az + xa + xz, aa + az + aa + xa)$

(Definisi B4 dan N5)

$\Leftrightarrow \quad (aa + xy, aa) = (aa + xz, aa)$ (N1, N2, Teorema B2)

$\Leftrightarrow \quad xyaa + aaaa = aaxz + aaaa$ (Definisi B2)

$\Leftrightarrow \quad xy = xz$ (N3, Teorema N19, Teorema N20)

$\Leftrightarrow \quad y = z.$ (Teorema N18)

Kesimpulan,

$\Leftrightarrow \quad (a,a + y) = (a,a + z)$ (Lemma B2)

$\Leftrightarrow \quad (n,c) = (k,d).$ (Teorema B13)

3. Andaikan $(m,b) \in I^-$, $(n,c),(k,d) \in I^+$, sehingga $(m,b)(n,c) = (m,b)(k,d)$. Maka $(m,b)(n,c) = (m,b)(k,d)$

$\Leftrightarrow \quad (a,a + x)(y + a,a) = (a,a + x)(z + a,a)$

(Teorema B13 dan Teorema B7)

$\Leftrightarrow \quad (ay + aa + aa + xa, aa + ay + aa + xy + xa) =$

$(az + aa + aa + xa, aa + az + aa + xz + xa)$

(Definisi B4 dan N5)

$\Leftrightarrow \quad (aa, aa + xy) = (aa, aa + xz)$ (N1, N2, Teorema B2)

$\Leftrightarrow \quad aaaa + aaxz = aaaa + xyaa$ (Definisi B2)

$\Leftrightarrow \quad xz = xy$ (N1, N3, Teorema N19 dan N20)

$\Leftrightarrow \quad z = y.$ (Teorema N18)

Kesimpulan,

$\Leftrightarrow$ $(z + a, a) = (y + a, a)$ (Teorema B9)

$\Leftrightarrow$ $(k,d) = (n,c)$. (Teorema B13, Teorema B7)

4. Andaikan $(m,b) \in I^+$ dan $(n,c),(k,d) \in I^-$, sehingga $(m,b)(n,c) = (m,b)(k,d)$. Maka $(m,b)(n,c) = (m,b)(k,d)$

$\Leftrightarrow$ $(x + a,a)(a,a + y) = (x + a,a)(a,a + z)$

(Teorema B13 dan Teorema B7)

$\Leftrightarrow$ $(xa + aa + aa + ay,xa + xy + aa + ay + aa) =$

$(xa + aa + aa + az,xa + xz + aa + az + aa)$

(Definisi B4 dan N5)

$\Leftrightarrow$ $(aa,aa + xy) = (aa,aa + xz)$ (N1, N2, Teorema B2)

$\Leftrightarrow$ $aaaa + aaxz = aaaa + xyaa$ (Definisi B2)

$\Leftrightarrow$ $xz = xy$ (N1, N3, Teorema N19, Teorema N20)

$\Leftrightarrow$ $z = y$. (Teorema N18)

Kesimpulan,

$\Leftrightarrow$ $(a,\ a + z) = (a,\ a + y)$ (Lemma B2)

$\Leftrightarrow$ $(k,d) = (n,c)$. (Teorema B13)

5. Ambil $(m,b) \in I^+$, $(n,c) \in I^+$, $(k,d) \in I^-$. Andaikan $(m,b)(n,c) = (m,b)(k,d)$. Maka $(m,b)(n,c) = (m,b)(k,d)$

$\Leftrightarrow$ $(a,a + x)(y + a,a) = (a,a + x)(a,a + z)$

(Teorema B7 dan Teorema B13)

$\Leftrightarrow$ $(ay + aa + aa + xa,aa + ay + aa + xy + xa) =$

$(aa + aa + aa + xa,aa + ay + aa + xy + xa)$

(Definisi B4 dan N5)

$\Leftrightarrow$ $(aa,aa + xy) = (xz + aa,aa)$ (N1, N2, Teorema B2)

$\Leftrightarrow$ $aa + aa = aa + xy + xz + aa$ (Definisi B2)

$\Leftrightarrow$ $aa + aa = aa + aa + xy + xz$. (N1, N2)

Pernyataan ini kontradiksi dengan Teorema N16. Jadi pernyataan $(m,b)(n,c) = (m,b)(k,d)$ salah sehingga pernyataan $(m,b)(n,c) = (m,b)(k,d) \Leftrightarrow (n,c) = (k,d)$ benar.

Hal yang sama akan terjadi, bila

a. $(m,b) \in I^+$, $(n,c) \in I^-$, dan $(k,d) \in I^+$,

b. $(m,b) \in I^-$, $(n,c) \in I^+$, dan $(k,d) \in I^-$,

c. $(m,b) \in I^-$, $(n,c) \in I^-$, dan $(k,d) \in I^+$.

6. Ambil $(m,b) \in I^+$, $(n,c) \in 0$ dan $(k,d) \in I^- \cup I^+$, karena $(n,c) \in 0$, maka $n = c$ (Teorema B10), sehingga $(n,c) = (c,c)$. Andaikan $(m,b)(n,c) = (m,b)(k,d)$, maka

Maka $(m,b)(n,c) = (m,b)(k,d)$

$\Leftrightarrow$ $(x + a,a)(c,c) = (x + a,a)(z + a,a)$ (Teorema B7)

$\Leftrightarrow$ $(xc + ac + ac,xc + ac + ac) = (xz + xa + az + aa +$
$aa,xa + aa + az + aa)$, (Definisi B4, N5)

$\Leftrightarrow$ $(xc,xc) = (xz + aa,aa)$ (N1, N2, Teorema B2)

$\Leftrightarrow$ $xc + aa = xc + xz + aa$ (Definisi B2)

$\Leftrightarrow$ $xc + aa = xz + xc + aa$. (N1, N2)

Pernyataan ini kontradiksi dengan Teorema N16. Jadi pernyataan $(m,b)(n,c) = (m,b)(k,d)$ salah, sehingga pernyataan $(m,b)(n,c) = (m,b)(k,d) \Leftrightarrow (n,c) = (k,d)$ benar.

Hal yang sama akan terjadi, bila

a. $(m,b) \in I^-$, $(n,c) \in 0$, $(k,d) \in I^- \cup I^+$,

b. $(m,b) \in I^+$, $(k,d) \in 0$, $(n,c) \in I^- \cup I^+$,

c. $(m,b) \in I^-$, $(k,d) \in 0$, $(n,c) \in I^- \cup I^+$.

7. Bila $(m,b) \in I$, $(n,c),(k,d) \in 0$.

Karena $(n,c),(k,d) \in 0$, maka $(n,c) = (m,m) = (k,d) = 0$ (Teorema B10, Definisi B8). Jadi pernyataan $(n,c) =$

(k,d) benar.

Andaikan (m,b)(n,c) = (m,b)(k,d), maka

$$(m,b)0 = (m,b)0 \qquad \text{(Definisi B8)}$$

$$0 = 0. \qquad \text{(Teorema B11)}$$

Jadi (m,b)(n,c) = (m,b)(k,d) benar.

Kesimpulan, (m,b)(n,c) = (m,b)(k,d) $\Leftrightarrow$ (n,c) = (k,d) benar.

Jadi terbukti ($\forall$ (m,b),(n,c),(k,d) $\in$ I) (m,b)(n,c) = (m,b)(k,d) $\Leftrightarrow$ (n,c) = (k,d).

BAB IV

SISTEM BILANGAN RASIONAL

Sistem bilangan rasional merupakan perluasan dari dari sistem bilangan bulat. Dasar dari sistem bilangan rasional adalah sistem bilangan bulat. Untuk itu, dibentuk pergandaan kartesius I dengan I - {0}, di mana I himpunan semua bilangan bulat, dan I - {0} adalah himpunan bilangan bulat kecuali nol.

Definisi L1. $Q = I \times (I - \{0\}) = \{ \langle a,b\rangle \mid a \in I$ dan $b \in (I - \{0\})\}$

Definisi L1 ini menunjukkan bahwa komponen kedua dari pasangan berurutan $\langle a,b\rangle$ adalah tidak nol, yaitu $b \neq 0$. Elemen-elemen dari Q, dengan beberapa definisi lainnya, disebut bilangan rasional. Bilangan rasional ini terdiri dari bilangan rasional positif, bilangan nol, dan bilangan rasional negatif.

Catatan:

Pada bab ini a,b,c, ... digunakan sebagai lambang bilangan bulat. Untuk mempermudah pengertian bilangan rasional ini, $\langle a,b\rangle$ dapat dipikirkan sebagai pecahan a/b, dengan $a,b \in I$ dan $b \neq 0$. Akibatnya, kita dapatkan bahwa $\langle a,b\rangle = \langle c,d\rangle$ bila dan hanya bila $a/b = c/d$ atau ad = bc. Dengan pemikiran yang sama, karena a/b + c/d = (ad + bc)/bd, maka <a,b> + <c,d> dapat didefinisikan sebagai pasangan berurutan <ad + bc,bd> dan karena (a/b)(c/d) = ac/bd, maka <a,b><c,d> dapat didefinisikan sebagai pasangan berurutan <ac,bd>.

Sesuai dengan pembahasan di atas, antara anggota-anggota Q didefinisikan relasi " = " sebagai berikut:

Definisi L2. $(\forall \langle a,b\rangle, \langle c,d\rangle \in Q)$

$\langle a,b\rangle = \langle c,d\rangle \Leftrightarrow ad = bc.$

Dan $\langle a,b\rangle \neq \langle c,d\rangle \Leftrightarrow ad \neq bc.$

Teorema L1. Relasi " = " pada Q adalah relasi ekuivalensi, yaitu:

(1) $\langle a,b\rangle = \langle a,b\rangle$,

(2) jika $\langle a,b\rangle = \langle c,d\rangle$, maka $\langle c,d\rangle = \langle a,b\rangle$,

(3) jika $\langle a,b\rangle = \langle c,d\rangle$ dan $\langle c,d\rangle = \langle e,f\rangle$, maka $\langle a,b\rangle = \langle e,f\rangle$.

Bukti:

(1) Ambil $a,b \in I$, maka

$ab = ba$ (Teorema B4)

$\langle a,b\rangle = \langle a,b\rangle.$ (Definisi L2)

(2) Andaikan $\langle a,b\rangle = \langle c,d\rangle$, maka

$ad = bc$ (Definisi L2)

$cb = da$ (Teorema B4)

$\langle c,d\rangle = \langle a,b\rangle.$ (Definisi L2)

(3) Andaikan $\langle a,b\rangle = \langle c,d\rangle$ dan $\langle c,d\rangle = \langle e,f\rangle$. Maka

$ad = bc$ dan $cf = de$. (Definisi L2)

Akibatnya,

$$(ad)f = (bc)f \quad \text{(asumsi)}$$

$$a(df) = b(cf) \quad \text{(Teorema B4)}$$

$$a(df) = b(de) \quad \text{(asumsi)}$$

$$a(fd) = b(ed) \quad \text{(Teorema B4)}$$

$$(af)d = (be)d \quad \text{(Teorema B4)}$$

$$af = be \quad (d \neq 0,\ \text{Teorema B28})$$

$$\langle a,b\rangle = \langle e,f\rangle. \quad \text{(Definisi L2)}$$

A. <u>Operasi Penjumlahan</u>

Definisi L3. Definisi penjumlahan:

$(\forall\ \langle a,b\rangle,\ \langle c,d\rangle \in Q)\ \langle a,b\rangle + \langle c,d\rangle = \langle ad + bc, bd\rangle$.

Teorema L2. Operasi penjumlahan pada Q didefinisikan secara betul.

Bukti:

Andaikan $\langle a,b\rangle = \langle \underline{a},\underline{b}\rangle$ dan $\langle c,d\rangle = \langle \underline{c},\underline{d}\rangle$. Maka

$a\underline{b} = b\underline{a}$ dan $c\underline{d} = d\underline{c}$. (Definisi L2)

Akibatnya,

$$(ad + bc)\underline{b}\,\underline{d} = ad\underline{b}\,\underline{d} + bc\underline{b}\,\underline{d} \quad \text{(Teorema B6)}$$

$$= (a\underline{b})d\underline{d} + b\underline{b}(c\underline{d}) \quad \text{(Teorema B6)}$$

$$= (\underline{a}b)d\underline{d} + b\underline{b}(d\underline{c}) \quad \text{(asumsi, Teorema B6)}$$

$$= \underline{a}(bd)\underline{d} + b(\underline{b}d)\underline{c} \quad \text{(Teorema B6)}$$

$$= bd(\underline{a}\,\underline{d}) + bd(\underline{b}\,\underline{c}) \quad \text{(Teorema B6)}$$

$= bd(\underline{a}\,\underline{d} + \underline{b}\,\underline{c}).$ (Teorema B6)

Jadi, $(ad + bc)\underline{b}\,\underline{d} = bd\,(\underline{a}\,\underline{d} + \underline{b}\,\underline{c})$ sehingga

$\langle ad + bc, bd\rangle = \langle \underline{a}\,\underline{d} + \underline{b}\,\underline{c}, \underline{b}\,\underline{d}\rangle$ (Definisi L2)

$\langle a,b\rangle + \langle c,d\rangle = \langle \underline{a},\underline{b}\rangle + \langle \underline{c},\underline{d}\rangle.$ (Definisi L3)

Teorema L3. Operasi penjumlahan pada Q bersifat tertutup, komutatif dan assosiatif.

Bukti:

Ambil sebarang $\langle a,b\rangle, \langle c,d\rangle, \langle e,f\rangle \in Q$.

a. $\langle a,b\rangle + \langle c,d\rangle = \langle ad + bc, bd\rangle$ (Definisi L3)

$ad, bc, bd \in I$ (Teorema B5)

$ad + bc \in I$ (Teorema B3)

Karena $b \neq 0$, $d \neq 0$, maka $bd \neq 0$ (Teorema B26)

jadi $bd \in I - \{0\}$.

Jadi, menurut Definisi L1, $\langle ad + bc, bd\rangle \in Q$, sehingga $\langle a,b\rangle + \langle c,d\rangle \in Q$.

b. $\langle a,b\rangle + \langle c,d\rangle = \langle ad + bc, bd\rangle$ (Definisi L3)

$= \langle bc + ad, bd\rangle$ (Teorema B4)

$= \langle cb + da, db\rangle$ (Teorema B6)

$= \langle c,d\rangle + \langle a,b\rangle.$ (Definisi L3)

c. $\langle a,b\rangle + (\langle c,d\rangle + \langle e,f\rangle) =$

$\langle a,b\rangle + \langle cf + de, df\rangle$ (Definisi L3)

$= \langle adf + b(cf + de), bdf\rangle$ (Definisi L3)

$= \langle adf + bcf + bde, bdf\rangle$ (Teorema B4)

$= \langle (ad + bc)f + bde, bdf\rangle$ (Teorema B4)

$= \langle ad + bc, bd\rangle + \langle e,f\rangle$ (Definisi L3)

$= (\langle a,b\rangle + \langle c,d\rangle) + \langle e,f\rangle.$ (Definisi L3)

Teorema L4. $(\forall\ c \in I)\ \langle ac, bc\rangle = \langle a, b\rangle$.

Bukti:

$$(ac)b = b(ac) \qquad \text{(Teorema B6)}$$
$$= b(ca) \qquad \text{(Teorema B6)}$$
$$= (bc)a. \qquad \text{(Teorema B6)}$$

Kesimpulan,

$(ac)b = (bc)a$, sehingga $\langle ac, bc\rangle = \langle a, b\rangle$ (Definisi L2)

B. <u>Operasi Perkalian</u>

Definisi L4. Definisi perkalian:

$$(\forall\ \langle a,b\rangle,\ \langle c,d\rangle \in Q)\ \langle a,b\rangle\langle c,d\rangle = \langle ac, bd\rangle.$$

Teorema L5. Operasi perkalian pada Q didefinisikan secara betul.

Bukti:

Andaikan $\langle a,b\rangle = \langle \underline{a},\underline{b}\rangle$ dan $\langle c,d\rangle = \langle \underline{c},\underline{d}\rangle$.

Maka $a\underline{b} = b\underline{a}$ dan $c\underline{d} = d\underline{c}$. (Definisi L2)

Jadi, $(ac)(\underline{b}\ \underline{d}) = (a\underline{b})(c\underline{d})$ (Teorema B6)

$= (\underline{a}b)(\underline{c}d)$ (asumsi, Teorema B6)

$= (\underline{a}\ \underline{c})(bd)$. (Teorema B6)

Kesimpulan,

$$(ac)(\underline{b}\ \underline{d}) = (\underline{a}\ \underline{c})(bd)$$

$\Leftrightarrow \quad \langle ac, bd\rangle = \langle \underline{a}\ \underline{c}, \underline{b}\ \underline{d}\rangle$ (Definisi L2)

$\Leftrightarrow \langle a,b\rangle\langle c,d\rangle = \langle \underline{a},\underline{b}\rangle\langle \underline{c},\underline{d}\rangle$. (Definisi L4)

Teorema L6. Operasi perkalian pada Q bersifat tertutup, komutatif, assosiatif dan distributif terhadap penjumlahan.

Bukti:

Ambil sebarang $\langle a,b\rangle,\langle c,d\rangle,\langle e,f\rangle \in Q$.

a. $\langle a,b\rangle\langle c,d\rangle = \langle ac,bd\rangle$. (Definisi L4)

$ac, bd \in I$. (Teorema B5)

Karena $b \neq 0$, $d \neq 0$, maka $bd \neq 0$ (Teorema B26)

sehingga $bd \in I - \{0\}$ (Teorema B5)

maka $\langle ac,bd\rangle \in Q$ (Definisi L1), sehingga $\langle a,b\rangle\langle c,d\rangle \in Q$.

b. $\langle a,b\rangle\langle c,d\rangle = \langle ac,bd\rangle$ (Definisi L4)

$= \langle ca,db\rangle$ (Teorema B6)

$= \langle c,d\rangle\langle a,b\rangle$. (Definisi L4)

c. $\langle a,b\rangle(\langle c,d\rangle\langle e,f\rangle) = \langle a,b\rangle\langle ce,df\rangle$ (Definisi L4)

$= \langle a(ce),b(df)\rangle$ (Definisi L4)

$= \langle (ac)e,(bd)f\rangle$ (Teorema B6)

$= \langle ac,bd\rangle\langle e,f\rangle$ (Definisi L4)

$= (\langle a,b\rangle\langle c,d\rangle)\langle e,f\rangle$. (Definisi L4)

d. $(ad + bc)e(bf)(df) =$

$(ade + bce)(bf)(df)$ (Teorema B6)

$= \{(ae)d + (ce)b\}f(bdf)$ (Teorema B6)

$= \{(ae)df + (ce)bf\}(bd)f$ (Teorema B6)

jadi,

$(ad + bc)e(bf)(df) = (bd)f\{(ae)df + (ce)bf\}$ (Teorema B6)

$\Leftrightarrow \quad \langle (ad + bc)e,(bd)f\rangle = \langle (ae)df + (ce)bf, (bf)(df)\rangle$

(Definisi L2)

$\Leftrightarrow \quad \langle ad + bc,bd\rangle\langle e,f\rangle = \langle ae,bf\rangle + \langle ce,df\rangle$

(Definisi L3 dan Definisi L4)

$\Leftrightarrow (\langle a,b\rangle + \langle c,d\rangle)\langle e,f\rangle = \langle a,b\rangle\langle e,f\rangle + \langle c,d\rangle\langle e,f\rangle$.

(Definisi L3 dan Definisi L4)

C. Bilangan Pecahan dan Bilangan Nol

Definisi L5. Anggota-anggota Q dengan Definisi L2, L3, dan L4 disebut bilangan rasional.

Definisi L6. Bila $\langle a,b\rangle \in Q$ dan $a \neq mb$, $\forall\ m \in I$, maka $\langle a,b\rangle$ disebut pecahan.

Teorema L7. Sistem $\mathbb{L} = (Q1,+,.)$, di mana $Q1 = \{ \langle x,1\rangle \in Q \mid x \in I \}$, dan sistem bilangan bulat, adalah isomorfis relatif terhadap operasi penjumlahan dan perkalian.

Bukti:

Andaikan $Q1 = \{ \langle x,1\rangle \in Q \mid x \in I \}$ dan I adalah himpunan semua bilangan bulat. Perhatikan suatu fungsi $f : Q1 \to I$ yang didefinisikan oleh $f(\langle x,1\rangle) = x$, untuk setiap $\langle x,1\rangle \in Q1$. Akan dibuktikan bahwa f didefinisikan secara betul dan bijektif.

1.a. Ambil sebarang $\langle x,1\rangle, \langle y,1\rangle \in Q1$. Maka

$\langle x,1\rangle = \langle y,1\rangle$

$\Leftrightarrow \quad x1 = y1$ (Definisi L2)

$\Leftrightarrow \quad x = y$. (Teorema B8)

Kesimpulan, $\langle x,1\rangle = \langle y,1\rangle \Leftrightarrow x = y$.

Ini berarti, f didefinisikan secara betul dan injektif.

b. Ambil sebarang $x \in I$, maka $(\exists \langle x,1\rangle \in Q1)\ x = f(\langle x,1\rangle)$. Jadi f surjektif.

Kesimpulan, fungsi f adalah fungsi bijektif.

2. $f(\langle x,1\rangle + \langle y,1\rangle) = f(\langle x1 + 1y,1\rangle)$ (Definisi L3)

$= f(\langle x + y,1\rangle)$

(Teorema B6, Teorema B8)

$= x + y$ (Definisi f)

$= f(\langle x,1\rangle) + f(\langle y,1\rangle)$. (Definisi f)

3. $f(\langle x,1\rangle\langle y,1\rangle) = f(\langle xy,1\rangle)$ (Definisi L4)

$= xy$ (Definisi f)

$= f(\langle x,1\rangle f(\langle y,1\rangle)$. (Definisi f)

Kesimpulan, sistem $\mathbb{L}$ dan sistem bilangan bulat adalah isomorfis relatif terhadap operasi penjumlahan dan perkalian.

Dengan demikian, kedua sistem bilangan ini mempunyai struktur yang sama, sehingga setiap elemen $\langle x,1\rangle \in Q1$ dapat diganti dengan elemen $x \in I$. Karena $Q1 \subset Q$, maka $I \subset Q$. Dengan demikian, sistem bilangan rasional dapat dipandang sebagai perluasan dari sistem bilangan bulat.

Teorema L8. $(\forall \langle a,b\rangle \in Q)(\forall p \in I)\ p\langle a,b\rangle = \langle pa,b\rangle$.

Bukti:

Ambil sebarang $\langle a,b\rangle \in Q$ dan $p \in I$. Maka

$p\langle a,b\rangle = \langle p,1\rangle\langle a,b\rangle$ (Teorema L7)

$= \langle pa,b\rangle$. (Definisi L4)

Kesimpulan, $p\langle a,b\rangle \in Q$.

Teorema L9. $(\forall \langle a,b\rangle \in Q)(\forall t \in I - \{0\})$

$\langle a,b\rangle + \langle 0,t\rangle = \langle a,b\rangle$.

Bukti:

Ambil sebarang $\langle a,b\rangle \in Q$.

$$\begin{aligned} \langle a,b\rangle + \langle 0,t\rangle &= \langle at + b0, bt\rangle && \text{(Definisi L3)} \\ &= \langle at, bt) && \text{(Teorema B11)} \\ &= \langle a,b\rangle. && \text{(Teorema L4)} \end{aligned}$$

Definisi L7. Bilangan rasional $\langle 0,1\rangle \in Q1$ dapat diganti dengan $0 \in I$, dan $\langle 0,1\rangle = \langle 0,t\rangle$, $\forall t \in I - \{0\}$, sehingga $\langle 0,t\rangle = 0$, $\forall t \in I - \{0\}$.

Teorema L10. $(\forall \langle a,b\rangle \in Q)\ \langle a,b\rangle + \langle -a,b\rangle = 0$.

Bukti:

Ambil sebarang $\langle a,b\rangle \in Q$.

$$\begin{aligned} \langle a,b\rangle + \langle -a,b\rangle &= \langle ab + (-ba), bb\rangle \\ & && \text{(Definisi L3, Teorema B15)} \\ &= \langle ab + (-ab), bb) && \text{(Teorema B4)} \\ &= \langle 0, bb\rangle && \text{(Teorema B12)} \\ &= 0. && \text{(Definisi L7)} \end{aligned}$$

Definisi L8. $(\forall \langle a,b\rangle \in Q)\ -\langle a,b\rangle = \langle -a,b\rangle$.

Teorema L11. $(\forall \langle a,b\rangle \in Q)\ \langle a,b\rangle\ 0 = 0$.

Bukti:

Ambil sebarang $\langle a,b\rangle \in Q$.

$\langle a,b\rangle\ 0 = \langle a,b\rangle\langle 0,t\rangle$ (Definisi L7)

$= \langle a0,bt\rangle$ (Definisi L4)

$= \langle 0,bt\rangle$ (Teorema B11)

$= 0$. (Definisi L7)

Definisi L9. $(\forall\ \langle a,b\rangle, \langle c,d\rangle \in Q)$

$\langle a,b\rangle - \langle c,d\rangle = \langle a,b\rangle + (-\langle c,d\rangle)$.

Misalkan: $\langle a,b\rangle$ dan $\langle c,d\rangle \in Q$, maka

$\langle a,b\rangle - \langle c,d\rangle = \langle a,b\rangle + (-\langle c,d\rangle)$

$= \langle a,b\rangle + \langle -c,d\rangle$

$= \langle ad - bc, bd\rangle$.

Teorema L12. a. $(\forall\ \langle a,b\rangle \in Q)$

$\langle a,b\rangle\langle 1,1\rangle = \langle 1,1\rangle\langle a,b\rangle = \langle a,b\rangle$.

b. $(\forall\ \langle a,b\rangle \in Q - \{0\})\ \langle a,b\rangle\langle b,a\rangle = \langle 1,1\rangle$.

Bukti:

a. Ambil sebarang $\langle a,b\rangle \in Q$.

$\langle a,b\rangle\langle 1,1\rangle = \langle 1,1\rangle\langle a,b\rangle$ (Teorema L6)

$= \langle a,b\rangle$. (Definisi L4)

b. Ambil sebarang $\langle a,b\rangle \in Q - \{0\}$. Maka $\langle a,b\rangle \neq 0$.

Ini berarti $a \neq 0$, jadi $a \in I - \{0\}$. (Definisi L7)

Dengan demikian $\langle b,a\rangle \in Q$ (Definisi L1)

$\langle a,b\rangle\langle b,a\rangle = \langle ab,ba\rangle$ (Definisi L4)

$= \langle ab,ab\rangle$ (Teorema B6)

$= \langle 1,1\rangle$. (Teorema L4)

Definisi L10. Bilangan rasional $\langle 1,1\rangle \in Q1$ dapat diganti dengan $1 \in I$ dan

$(\forall \langle a,b\rangle \in Q - \{0\})\ \langle a,b\rangle^{-1} = \langle b,a\rangle$.

Teorema L13. $(\forall \langle a,b\rangle, \langle c,d\rangle \in Q)$

a. $0 - \langle a,b\rangle = -\langle a,b\rangle$.

b. $-(-\langle a,b\rangle) = \langle a,b\rangle$.

c. $-(\langle a,b\rangle + \langle c,d\rangle) = -\langle a,b\rangle - \langle c,d\rangle$.

d. $(-\langle a,b\rangle)\langle c,d\rangle = -(\langle a,b\rangle\langle c,d\rangle)$

e. $(-\langle a,b\rangle)(-\langle c,d\rangle) = \langle a,b\rangle\langle c,d\rangle$

Bukti:

Ambil sebarang $\langle a,b\rangle, \langle c,d\rangle \in Q$, maka

a. $0 - \langle a,b\rangle = 0 + (-\langle a,b\rangle)$ (Definisi L9)

$= -\langle a,b\rangle$. (Teorema L9)

b. $-(-\langle a,b\rangle) = -\langle -a,b\rangle$ (Definisi L8)

$= \langle -(-a),b\rangle$ (Definisi L8)

$= \langle a,b\rangle$. (Teorema B15)

c. $-(\langle a,b\rangle + \langle c,d\rangle) = -\langle ad + bc, bd\rangle$ (Definisi L3)

$= \langle -(ad + bc), bd\rangle$ (Definisi L8)

$= \langle -ad - bc, bd\rangle$ (Teorema B27)

$= \langle (-a)d + b(-c), bd\rangle$ (Teorema B15)

$= \langle -a,b\rangle + \langle -c,d\rangle$ (Definisi L3)

$= -\langle a,b\rangle - \langle c,d\rangle$. (Definisi L8)

d. $(-\langle a,b\rangle)\langle c,d\rangle = \langle -a,b\rangle\langle c,d\rangle$ (Definisi L8)

$= \langle -ac, bd\rangle$ (Definisi L4)

$= -\langle ac, bd\rangle$ (Definisi L8)

$= -(\langle a,b\rangle\langle c,d\rangle)$. (Definisi L4)

e. $(-\langle a,b\rangle)(-\langle c,d\rangle) = \langle -a,b\rangle\langle -c,d\rangle$ (Definisi L8)

$= \langle (-a)(-c),bd\rangle$ (Definisi L4)

$= \langle ac,bd\rangle$ (Teorema B15)

$= \langle a,b\rangle\langle c,d\rangle$. (Definisi L4)

Teorema L14. $(\forall \langle a,b\rangle,\langle c,d\rangle,\langle e,f\rangle \in Q)$

$\langle a,b\rangle + \langle c,d\rangle = \langle a,b\rangle + \langle e,f\rangle \Leftrightarrow$

$\langle c,d\rangle = \langle e,f\rangle$.

Bukti:

Ambil sebarang $\langle a,b\rangle,\langle c,d\rangle,\langle e,f\rangle \in Q$.

Andaikan $\langle a,b\rangle + \langle c,d\rangle = \langle a,b\rangle + \langle e,f\rangle$. Maka

$\langle a,b\rangle + \langle c,d\rangle = \langle a,b\rangle + \langle e,f\rangle$

$\Leftrightarrow \langle ad + bc,bd\rangle = \langle af + be,bf\rangle$ (Definisi L3)

$\Leftrightarrow (ad + bc)bf = bd(af + be)$ (Definisi L2)

$\Leftrightarrow adbf + bcbf = bdaf + bdbe$ (Teorema B6)

$\Leftrightarrow bdaf + bbcf = bdaf + bbde$ (Teorema B6)

$\Leftrightarrow bbcf = bbde$ (Teorema B16)

$\Leftrightarrow cf = de$ ($b \neq 0$, $bb \neq 0$, Teorema B28)

$\Leftrightarrow \langle c,d\rangle = \langle e,f\rangle$. (Definisi L2)

Teorema L15. $(\forall \langle a,b\rangle,\langle c,d\rangle,\langle e,f\rangle \in Q;\ \langle a,b\rangle \neq 0)$

$\langle a,b\rangle\langle c,d\rangle = \langle a,b\rangle\langle e,f\rangle \Leftrightarrow \langle c,d\rangle = \langle e,f\rangle$.

Bukti:

Ambil sebarang $\langle a,b\rangle,\langle c,d\rangle,\langle e,f\rangle \in Q$, dan $\langle a,b\rangle \neq 0$.

Karena $\langle a,b\rangle \neq 0$, maka $a \neq 0$ dan $b \neq 0$, sehingga $ab \neq 0$.

Andaikan $\langle a,b\rangle\langle c,d\rangle = \langle a,b\rangle\langle e,f\rangle$.

Maka $\langle a,b\rangle\langle c,d\rangle = \langle a,b\rangle\langle e,f\rangle$

$\Leftrightarrow \quad \langle ac,bd\rangle = \langle ae,bf\rangle$ (Definisi L4)

$\Leftrightarrow \quad acbf = bdae$ (Definisi L2)

$\Leftrightarrow \quad abcf = abde$ (Teorema B6)

$\Leftrightarrow \quad cf = de$ ($ab \neq 0$, Teorema B28)

$\Leftrightarrow \quad \langle c,d\rangle = \langle e,f\rangle$. (Definisi L2)

Definisi L11. $(\forall \langle a,b\rangle,\langle c,d\rangle \in Q)(b,d \in I^+)$

1. $\langle a,b\rangle < \langle c,d\rangle \Leftrightarrow ad < bc$,
2. $\langle a,b\rangle > \langle c,d\rangle \Leftrightarrow \langle c,d\rangle < \langle a,b\rangle$,
3. $\langle a,b\rangle \leq \langle c,d\rangle \Leftrightarrow \langle a,b\rangle = \langle c,d\rangle$ atau $\langle a,b\rangle < \langle c,d\rangle$,
4. $\langle a,b\rangle \geq \langle c,d\rangle \Leftrightarrow \langle c,d\rangle \leq \langle a,b\rangle$.

Lemma L1. $(\forall \langle a,b\rangle \in Q)\ \langle a,b\rangle = \langle -a,-b\rangle$

Bukti:

Ambil sebarang $\langle a,b\rangle \in Q$.

Maka menurut Definisi L1, $a \in I$ dan $b \in I - \{0\}$.

Bila $a \in I^+$, maka $-a \in I^-$, demikian pula bila $a \in I^-$, maka $-a \in I^+$. (Teorema B14)

Dan bila $a \in \{0\}$, maka $-a \in \{0\}$. (Definisi B9, Definisi B8) Jadi bila $a \in I$ maka $-a \in I$ pula.

Sekarang, bila $b \in I^+$, maka $-b \in I^-$, dan bila $b \in I^-$, maka $-b \in I^+$. (Teorema B14)

Jadi bila $b \in I - \{0\}$, maka $-b \in I - \{0\}$.

Dengan demikian, $\langle -a,-b\rangle \in Q$.

Di samping itu,

$a(-b) = (-a)b$ (Teorema B15)

$\Leftrightarrow \quad \langle a,b\rangle = \langle -a,-b\rangle.$ (Definisi L2)

Kesimpulan, $(\forall \langle a,b\rangle \in Q)\ \langle a,b\rangle = \langle -a,-b\rangle.$

Teorema L16. $(\forall \langle a,b\rangle, \langle c,d\rangle \in Q)$

$$\langle a,b\rangle < \langle c,d\rangle \Leftrightarrow \langle a,b\rangle - \langle c,d\rangle < 0,$$

Bukti:

Ambil sebarang $\langle a,b\rangle, \langle c,d\rangle \in Q$.

i. Bila $b,d \in I^+$.

$\langle a,b\rangle < \langle c,d\rangle \Leftrightarrow ad < bc$ (Definisi L11)

$\Leftrightarrow ad - bc < 0$ (Teorema B20)

$\Leftrightarrow (ad - bd)1 < 0$ (Teorema B8)

$\Leftrightarrow (ad - bd)1 < 0bd$ (Teorema B11)

$\Leftrightarrow \langle ad - bc, bd\rangle < \langle 0,1\rangle$ (Definisi L11)

$\Leftrightarrow \langle a,b\rangle - \langle c,d\rangle < 0.$

(Definisi L9 dan Definisi L7)

Jadi, $(\forall \langle a,b\rangle, \langle c,d\rangle \in Q;\ b,d \in I^+)$

$$\langle a,b\rangle < \langle c,d\rangle \Leftrightarrow \langle a,b\rangle - \langle c,d\rangle < 0.$$

ii. Bila $b \in I^-$ dan $d \in I^+$.

Maka $b < 0$ (Teorema B17)

$0 < -b.$ (Lemma B1)

Di samping itu untuk $\langle c,d\rangle, \langle -a,-b\rangle \in Q$, dengan $-b,d \in I^+$ berlaku:

$\langle -a,-b\rangle < \langle c,d\rangle \Leftrightarrow \langle -a,-b\rangle - \langle c,d\rangle < 0.$ (Teorema L16.i)

Karena $\langle a,b\rangle = \langle -a,-b\rangle$ (Lemma L1), maka

$\langle a,b\rangle < \langle c,d\rangle \Leftrightarrow \langle a,b\rangle - \langle c,d\rangle < 0$ (substitusi)

Untuk kemungkinan lain, bukti analog.

Teorema L17. (Sifat trikotomi)

Untuk setiap $\langle a,b\rangle, \langle c,d\rangle \in Q$,

berlaku tepat satu di antara

a. $\langle a,b\rangle = \langle c,d\rangle$,

b. $\langle a,b\rangle < \langle c,d\rangle$,

c. $\langle a,b\rangle > \langle c,d\rangle$.

Bukti:

Ambil sebarang $\langle a,b\rangle, \langle c,d\rangle \in Q$, maka $a,b,c,d \in I$ dan ad, $bc \in I$. (Teorema B5)

Menurut sifat trikotomi untuk $ad, bc \in I$, maka

$ad = bc$ atau $ad < bc$ atau $ad > bc$.

Sehingga menurut Definisi L2 dan Definisi L11,

$\langle a,b\rangle = \langle c,d\rangle$ atau $\langle a,b\rangle < \langle c,d\rangle$ atau $\langle a,b\rangle > \langle c,d\rangle$.

Jadi untuk setiap $\langle a,b\rangle$, $\langle c,d\rangle \in Q$ berlaku tepat satu di antara $\langle a,b\rangle = \langle c,d\rangle$, $\langle a,b\rangle < \langle c,d\rangle$, $\langle a,b\rangle > \langle c,d\rangle$.

Teorema L18. $(\forall \langle a,b\rangle, \langle c,d\rangle \in Q)\ \langle a,b\rangle < \langle c,d\rangle \Leftrightarrow$

$(\exists \langle e,f\rangle \in Q)\ \langle a,b\rangle + \langle e,f\rangle = \langle c,d\rangle$.

Bukti:

Ambil sebarang $\langle a,b\rangle, \langle c,d\rangle \in Q$.

i. Bila $b,d \in I^{+}$.

$\langle a,b\rangle < \langle c,d\rangle \Leftrightarrow ad < bc$ (Definisi L11)

$\Leftrightarrow (\exists\ x \in I^{+})\ ad + x = bc$ (Teorema B19)

$\Leftrightarrow x = bc - ad$ (Teorema B16, Teorema B12)

$\Leftrightarrow xbd = (bc - ad)bd$ (Teorema B28)

$\Leftrightarrow \langle x,bd\rangle = \langle bc - ad,bd\rangle$ (Definisi L2)

$\Leftrightarrow \langle x,bd\rangle = -\langle ad - bc,bd\rangle$ (Definisi L8)

$\Leftrightarrow \langle x,bd\rangle = -[\langle a,b\rangle - \langle c,d\rangle]$ (Definisi L9)

$\Leftrightarrow \langle x,bd\rangle = \langle c,d\rangle - \langle a,b\rangle$ (Teorema L13)

$\Leftrightarrow \langle a,b\rangle + \langle x,bd\rangle = \langle c,d\rangle$.

(Teorema L14, Teorema L10)

$x \in I^+$ dan $bd \in I^+$, maka $\langle x,bd\rangle \in Q$.

Dengan mengambil $e = x$ dan $f = bd$ diperoleh

$$(\forall \langle a,b\rangle,\langle c,d\rangle \in Q;\ b,d \in I^+)\ \langle a,b\rangle < \langle c,d\rangle \Leftrightarrow$$
$$(\exists \langle e,f\rangle \in Q)\ \langle a,b\rangle + \langle e,f\rangle = \langle c,d\rangle.$$

ii. Bila $b \in I^+$ dan $d \in I^-$.

Maka $d < 0$ (Teorema B17) dan $-d > 0$ (Lemma B1).

Karena $\langle a,b\rangle,\langle -c,-d\rangle \in Q$, dengan $b,-d \in I^+$, maka

$\langle a,b\rangle < \langle -c,-d\rangle \Leftrightarrow (\exists \langle e,f\rangle \in Q)\ \langle a,b\rangle + \langle e,f\rangle = \langle -c,-d\rangle$.

(Teorema L18.i)

Tetapi $\langle -c,-d\rangle = \langle c,d\rangle$ (Lemma L1), maka

$\langle a,b\rangle < \langle c,d\rangle \Leftrightarrow (\exists \langle e,f\rangle \in Q)\ \langle a,b\rangle + \langle e,f\rangle = \langle c,d\rangle$.

(substitusi)

iii. Untuk kemungkinan lainnya, bukti analog.

Teorema L19. $(\forall \langle a,b\rangle,\langle c,d\rangle,\langle e,f\rangle \in Q)$

$\langle a,b\rangle + \langle c,d\rangle < \langle e,f\rangle + \langle c,d\rangle \Leftrightarrow$

$\langle a,b\rangle < \langle e,f\rangle$.

Bukti:

Ambil sebarang $\langle a,b\rangle,\langle c,d\rangle,\langle e,f\rangle \in Q$.

a. Andaikan $\langle a,b\rangle + \langle c,d\rangle < \langle e,f\rangle + \langle c,d\rangle$, maka

$(\langle a,b\rangle + \langle c,d\rangle) - (\langle e,f\rangle + \langle c,d\rangle) < 0$ (Teorema L16)

$\langle a,b\rangle + \langle c,d\rangle + (-\langle e,f\rangle) + (-\langle c,d\rangle) < 0$

(Definisi L9, Teorema L13)

$\langle a,b\rangle + (\langle c,d\rangle + (-\langle c,d\rangle)) + (-\langle e,f\rangle) < 0$ (Teorema L3)

$\langle a,b\rangle + 0 + (-\langle e,f\rangle) < 0$ (Teorema L10)

$\langle a,b\rangle - \langle e,f\rangle < 0$ (Teorema L9, Definisi L9)

$\langle a,b\rangle < \langle e,f\rangle$. (Teorema L16)

b. Andaikan $\langle a,b\rangle < \langle e,f\rangle$, maka

$\langle a,b\rangle - \langle e,f\rangle < 0$ (Teorema L16)

$\langle a,b\rangle - \langle e,f\rangle + 0 < 0$ (Teorema L9)

$\langle a,b\rangle - \langle e,f\rangle + \langle c,d\rangle - \langle c,d\rangle < 0$ (Teorema L10)

$\langle a,b\rangle + \langle c,d\rangle - \langle e,f\rangle - \langle c,d\rangle < 0$ (Teorema L3)

jadi

$\langle a,b\rangle + \langle c,d\rangle - (\langle e,f\rangle + \langle c,d\rangle) < 0$ (Teorema L13)

$\langle a,b\rangle + \langle c,d\rangle < \langle e,f\rangle + \langle c,d\rangle$. (Teorema L16)

Teorema L20. $(\forall \langle a,b\rangle,\langle c,d\rangle,\langle e,f\rangle \in Q)(\langle c,d\rangle > 0)$

$\langle a,b\rangle\langle c,d\rangle < \langle e,f\rangle\langle c,d\rangle \Leftrightarrow \langle a,b\rangle < \langle e,f\rangle$.

Bukti:

Ambil sebarang $\langle a,b\rangle,\langle c,d\rangle,\langle e,f\rangle \in Q$, dengan $\langle c,d\rangle > 0$.

Maka $\langle c,d\rangle \neq 0$ dan $d \neq 0$ (Definisi L7 dan Definisi L1), sehingga $c \neq 0$ dan $cd \neq 0$.

i. Bila $b,d,f \in I^+$.

$\langle a,b\rangle\langle c,d\rangle < \langle e,f\rangle\langle c,d\rangle$

$\Leftrightarrow \langle ac,bd\rangle < \langle ec,fd\rangle$ (Definisi L4)

$\Leftrightarrow acfd < bdec$ (Definisi L11)

$\Leftrightarrow af < be$ (Teorema B6, Teorema B23)

$\Leftrightarrow \langle a,b\rangle < \langle e,f\rangle$. (Definisi L11)

Kesimpulan,

$(\forall \langle a,b\rangle,\langle c,d\rangle,\langle e,f\rangle \in Q;\ b,d,f \in I^+;\ \langle c,d\rangle > 0)$

$$\langle a,b\rangle\langle c,d\rangle < \langle e,f\rangle\langle c,d\rangle \Leftrightarrow \langle a,b\rangle < \langle e,f\rangle.$$

ii. Bila $b,d \in I^-$ dan $f \in I^+$,

maka $b < 0$ dan $d < 0$ (Teorema B17) dan $0 < -b$ dan $0 < -d$ (Lemma B1).

Jadi $-b,-d,f \in I^+$.

Dengan Teorema L20(i) diperoleh:

$$\langle -a,-b\rangle\langle -c,-d\rangle < \langle e,f\rangle\langle -c,-d\rangle \Leftrightarrow \langle -a,-b\rangle < \langle e,f\rangle.$$

Tetapi $(-c,-d) = \langle c,d\rangle$ dan $\langle -a,-b\rangle = \langle a,b\rangle$, maka dengan substitusi,

$$\langle a,b\rangle\langle c,d\rangle < \langle e,f\rangle\langle c,d\rangle \Leftrightarrow \langle a,b\rangle < \langle e,f\rangle$$

Untuk kemungkinan lainnya, bukti analog.

Teorema L21. $(\forall \langle a,b\rangle,\langle c,d\rangle,\langle e,f\rangle \in Q)(\langle a,b\rangle < \langle c,d\rangle$ dan $\langle c,d\rangle < \langle e,f\rangle) \Rightarrow \langle a,b\rangle < \langle e,f\rangle$.

Bukti:

Ambil sebarang $\langle a,b\rangle,\langle c,d\rangle,\langle e,f\rangle \in Q$.

i. Bila $b,d,f \in I^+$.

$\langle a,b\rangle < \langle c,d\rangle \Rightarrow ad < bc$ (Definisi L11)

$\Rightarrow adf < bcf$ (Teorema B23)

$\langle c,d\rangle < \langle e,f\rangle \Rightarrow cf < de$ (Definisi L11)

$\Rightarrow bcf < bde.$ (Teorema B23)

Jadi menurut Teorema B22, $adf < bde$, sehingga

$af < be$ (Teorema B6 dan Teorema B23)

$\langle a,b\rangle < \langle e,f\rangle.$ (Definisi L11)

ii. Bila $b,d \in I^-$ dan $f \in I^+$.

Maka $b < 0$ dan $d < 0$ (Teorema B17), sehingga $-b > 0$ dan $-d > 0$ (Lemma B1). Jadi $-b,-d,f \in I^+$, sehingga berlaku

$\langle -a,-b\rangle < (-c,-d)$ dan $(-c,-d) < \langle e,f\rangle \Rightarrow \langle -a,-b\rangle < \langle e,f\rangle$ (Teorema L21 (i)).

Tetapi $\langle -a,-b\rangle = \langle a,b\rangle$ dan $(-c,-d) = \langle c,d\rangle$ (Lemma L1).

Maka $\langle a,b\rangle < \langle c,d\rangle$ dan $\langle c,d\rangle < \langle e,f\rangle \Rightarrow \langle a,b\rangle < \langle e,f\rangle$.

(substitusi)

Untuk kemungkinan lain, bukti analog.

Definisi L12. Bila $\langle a,b\rangle \in Q$ dan $\langle a,b\rangle > 0$, maka $\langle a,b\rangle$ disebut bilangan rasional positif. Himpunan semua bilangan rasional positif akan ditulis dengan notasi Q^+.

Definisi L13. Bila $\langle a,b\rangle \in Q$ dan $\langle a,b\rangle < 0$, maka $\langle a,b\rangle$ disebut bilangan rasional negatif. Himpunan semua bilangan rasional negatif akan ditulis dengan notasi Q^-.

Teorema L22. $\{Q^+, Q^-$ dan $\{0\}\}$ adalah partisi dari Q.

Bukti:

Ambil sebarang $\langle a,b\rangle \in Q$, maka (menurut Teorema L17) satu dan hanya satu dari pernyataan di bawah ini benar:

a. $\langle a,b\rangle = 0$, $\langle a,b\rangle \in \{0\}$,

b. $\langle a,b\rangle < 0$, $\langle a,b\rangle \in I^-$,

c. $\langle a,b\rangle > 0$, $\langle a,b\rangle \in I^+$.

Jadi $\{0\} \cap Q^- \cap Q^+ = \emptyset$ dan $Q = \{0\} \cup Q^- \cup Q^+$.

Lemma L2. $(\forall\ \langle a,b\rangle, \langle c,d\rangle \in Q)$

$\langle a,b\rangle < \langle c,d\rangle \Leftrightarrow -\langle c,d\rangle < -\langle a,b\rangle$.

Bukti:

Ambil sebarang $\langle a,b\rangle, \langle c,d\rangle \in Q$.

$\langle a,b\rangle < \langle c,d\rangle$

$\Leftrightarrow -\langle a,b\rangle + \langle a,b\rangle < (-\langle a,b\rangle) + \langle c,d\rangle$ (Teorema L19, Teorema L3)

$\Leftrightarrow \quad 0 < (-\langle a,b\rangle) + \langle c,d\rangle$ (Teorema L10)

$\Leftrightarrow \quad -\langle c,d\rangle + 0 < -\langle a,b\rangle$ (Teorema L19, Teorema L10)

$\Leftrightarrow \quad -\langle c,d\rangle < -\langle a,b\rangle$ (Teorema L9)

Teorema L23. $(\forall \langle a,b\rangle \in Q^{+})\ -\langle a,b\rangle \in Q^{-}$.

Bukti:

Ambil sebarang $\langle a,b\rangle \in Q^{+}$.

$\langle a,b\rangle \in Q^{+} \Leftrightarrow \langle a,b\rangle > 0$ (Definisi L12)

$\Leftrightarrow 0 > -\langle a,b\rangle$ (Lemma L2)

$\Leftrightarrow -\langle a,b\rangle \in Q^{-}$. (Definisi L13)

Teorema L24. $(\forall \langle a,b\rangle, \langle c,d\rangle \in Q^{+})\ \langle a,b\rangle + \langle c,d\rangle \in Q^{+}$ dan $\langle a,b\rangle\langle c,d\rangle \in Q^{+}$.

Bukti:

Ambil sebarang $\langle a,b\rangle, \langle c,d\rangle \in Q^{+}$, maka $\langle a,b\rangle > 0$ dan $\langle c,d\rangle > 0$ (Definisi L12). Maka

$\langle a,b\rangle + \langle c,d\rangle > 0 + \langle c,d\rangle$ (Teorema L19)

$\langle a,b\rangle + \langle c,d\rangle > \langle c,d\rangle$. (Teorema L9)

Karena $\langle c,d\rangle > 0$, maka

$\langle a,b\rangle + \langle c,d\rangle > 0$. (Teorema L21)

Demikian pula

$\langle a,b\rangle\langle c,d\rangle > 0\ \langle c,d\rangle$ (Teorema L20)

$\langle a,b\rangle\langle c,d\rangle > 0$ (Teorema L11)

$\langle a,b\rangle\langle c,d\rangle \in Q^+$. (Definisi L12)

Teorema L25. $(\forall \langle a,b\rangle,\langle c,d\rangle \in Q^-)$ $\langle a,b\rangle + \langle c,d\rangle \in Q^-$ dan $\langle a,b\rangle\langle c,d\rangle \in Q^+$.

Bukti:

Ambil sebarang $\langle a,b\rangle,\langle c,d\rangle \in Q^-$. Karena $\langle a,b\rangle < 0$ (Definisi L13), maka $\langle a,b\rangle + \langle c,d\rangle < \langle c,d\rangle$. (Teorema L19)

Karena $\langle c,d\rangle < 0$, maka $\langle a,b\rangle + \langle c,d\rangle < 0$. (Teorema L21)

Kesimpulan $\langle a,b\rangle + \langle c,d\rangle \in Q^-$. (Definisi L13)

Menurut Teorema L23, $-\langle a,b\rangle,-\langle c,d\rangle \in Q^+$, maka

$(-\langle a,b\rangle)(-\langle c,d\rangle) \in Q^+$. (Teorema L24)

Di samping itu, $(-\langle a,b\rangle)(-\langle c,d\rangle) = \langle a,b\rangle\langle c,d\rangle$ (Teorema L13) jadi $\langle a,b\rangle\langle c,d\rangle \in Q^+$.

Lemma L3. $(\forall \langle a,b\rangle \in Q)$

$\langle a,b\rangle \in Q^+ \Leftrightarrow a,b \in I^-$ atau $a,b \in I^-$.

Bukti:

Ambil sebarang $\langle a,b\rangle \in Q^+$.

Maka $\langle a,b\rangle > 0$ (Definisi L12) dan $b \neq 0$ (Definisi L1).

Jadi, menurut Teorema L17, $b < 0$ atau $b > 0$.

Bila $b > 0$.

$0 < \langle a,b\rangle \Leftrightarrow \langle 0,1\rangle < \langle a,b\rangle$ (Definisi L7)

$\Leftrightarrow 0b < a1$ ($b,1 \in I^+$ dan Definisi L11)

$\Leftrightarrow 0 < a$ (Teorema B11, Teorema B8)

$\Leftrightarrow a \in I^+$. (Teorema B17)

Jadi $(\forall \langle a,b\rangle \in Q^+)$ $a,b \in I^+$.

Bila $b < 0$, maka $-b > 0$ (Teorema B17).

$0 < \langle a,b\rangle \Leftrightarrow \langle 0,1\rangle < \langle -a,-b\rangle$ (Definisi L7, Lemma L1)

$\Leftrightarrow 0(-b) < 1(-a)$ ($-b,1 \in I^+$ dan Definisi L11)

$\Leftrightarrow 0 < -a$ (Teorema B11, Teorema B8)

$\Leftrightarrow a < 0.$ (Lemma B1)

$\Leftrightarrow a \in I^-.$ (Teorema B17)

Jadi $(\forall \langle a,b\rangle \in Q^+)\ a,b \in I^-$.

Kesimpulan, $(\forall \langle a,b\rangle \in Q^+)\ a,b \in I^+$ atau $a,b \in I^-$.

Lemma L4. $(\forall \langle a,b\rangle \in Q)\ \langle a,b\rangle \in Q^+ \Leftrightarrow \langle a,b\rangle^{-1} \in Q^+$.

Bukti:

Ambil sebarang $\langle a,b\rangle \in Q^+$.

Maka menurut Lemma L3, $a,b \in I^+$ atau $a,b \in I^-$.

$a,b \in I^+ \Leftrightarrow \langle b,a\rangle \in Q^+$ (Lemma L3)

$\Leftrightarrow \langle a,b\rangle^{-1} \in Q^+.$ (Definisi L10)

$a,b \in I^- \Leftrightarrow \langle b,a\rangle \in Q^+$ (Lemma L3)

$\Leftrightarrow \langle a,b\rangle^{-1} \in Q^+.$ (Definisi L10)

Kesimpulan $\langle a,b\rangle \in Q^+ \Leftrightarrow \langle a,b\rangle^{-1} \in Q^+$.

Teorema L26. $(\forall \langle a,b\rangle,\langle c,d\rangle,\langle e,f\rangle,\langle g,h\rangle \in Q)$

$\langle e,f\rangle < \langle a,b\rangle) \Rightarrow (\exists \langle p,q\rangle \in Q)\ \langle g,h\rangle =$

$\langle a,b\rangle\langle p,q\rangle + \langle c,d\rangle\langle e,f\rangle - \langle e,f\rangle\langle p,q\rangle$.

Bukti:

Ambil sebarang $\langle a,b\rangle,\langle c,d\rangle,\langle e,f\rangle,\langle g,h\rangle \in Q$ dengan

$\langle e,f\rangle < \langle a,b\rangle$.

Akan ditunjukkan bahwa $(\exists \langle p,q\rangle \in Q)\ \langle g,h\rangle = \langle a,b\rangle\langle p,q\rangle +$

$\langle c,d\rangle\langle e,f\rangle - \langle e,f\rangle\langle p,q\rangle$.

Karena $\langle e,f\rangle < \langle a,b\rangle$, maka $\langle a,b\rangle - \langle e,f\rangle \in Q^{+}$, sehingga $(\exists\ (\langle a,b\rangle - \langle e,f\rangle)^{-1} \in Q^{+})\ (\langle a,b\rangle - \langle e,f\rangle)(\langle a,b\rangle - \langle e,f\rangle)^{-1} = \langle 1,1\rangle$. (Teorema L12, Lemma L4)

Ambil $\langle p,q\rangle = (\langle g,h\rangle - \langle c,d\rangle\langle e,f\rangle)(\langle a,b\rangle - \langle e,f\rangle)^{-1}$.

Karena $(\langle g,h\rangle - \langle c,d\rangle\langle e,f\rangle) \in Q$ (Teorema L3, Teorema L6)

dan $(\langle a,b\rangle - \langle e,f\rangle)^{-1} \in Q$

maka $(\langle g,h\rangle - \langle c,d\rangle\langle e,f\rangle)(\langle a,b\rangle - \langle e,f\rangle)^{-1} \in Q$ (Teorema L6) yaitu $\langle p,q\rangle \in Q$.

$\langle p,q\rangle = (\langle g,h\rangle - \langle c,d\rangle\langle e,f\rangle)(\langle a,b\rangle - \langle e,f\rangle)^{-1}$

$\Leftrightarrow \langle p,q\rangle(\langle a,b\rangle - \langle e,f\rangle) = \langle g,h\rangle - \langle c,d\rangle\langle e,f\rangle$

$(\langle a,b\rangle - \langle e,f\rangle > 0$, Teorema L15, Teorema L12)

$\Leftrightarrow \langle a,b\rangle\langle p,q\rangle - \langle e,f\rangle\langle p,q\rangle = \langle g,h\rangle - \langle c,d\rangle\langle e,f\rangle$

(Teorema L6)

$\Leftrightarrow \langle a,b\rangle\langle p,q\rangle + \langle c,d\rangle\langle e,f\rangle - \langle e,f\rangle\langle p,q\rangle = \langle g,h\rangle$.

(Teorema L14 dan Teorema L6)

Jadi, $(\exists\ \langle p,q\rangle \in Q)\ \langle g,h\rangle = \langle a,b\rangle\langle p,q\rangle + \langle c,d\rangle\langle e,f\rangle - \langle e,f\rangle\langle p,q\rangle$.

Teorema L27. $(\forall\ \langle a,b\rangle,\langle c,d\rangle \in Q^{+})(\exists\ \langle g,h\rangle,\langle e,f\rangle \in Q^{+})$
$[(\langle g,h\rangle < \langle a,b\rangle\langle c,d\rangle)(\langle e,f\rangle < \langle a,b\rangle) \Rightarrow$
$(\exists\ \langle p,q\rangle \in Q^{+})(\langle p,q\rangle < \langle c,d\rangle)\ \langle g,h\rangle =$
$\langle a,b\rangle\langle p,q\rangle + \langle c,d\rangle\langle e,f\rangle - \langle e,f\rangle\langle p,q\rangle]$

Bukti:

Ambil sebarang $\langle a,b\rangle,\langle c,d\rangle \in Q^{+}$.

Andaikan ada $\langle g,h\rangle,\langle e,f\rangle \in Q^{+}$ sedemikian sehingga $\langle g,h\rangle < \langle a,b\rangle\langle c,d\rangle$ dan $\langle e,f\rangle < \langle a,b\rangle$.

Maka $\langle a,b\rangle - \langle e,f\rangle > 0$ (Teorema L16) sehingga $(\langle a,b\rangle - \langle e,f\rangle)^{-1} > 0$ (Definisi L12, Lemma L4)

dan $\langle g,h\rangle - \langle c,d\rangle\langle e,f\rangle > 0$. (Teorema L16)

Andaikan $\langle g,h\rangle = \langle a,b\rangle\langle p,q\rangle + \langle c,d\rangle\langle e,f\rangle - \langle e,f\rangle\langle p,q\rangle$,

maka $\langle c,d\rangle\langle e,f\rangle < \langle g,h\rangle$. (Teorema L18)

dan $(\exists \langle p,q\rangle \in Q)$

$\langle p,q\rangle = (\langle g,h\rangle - \langle c,d\rangle\langle e,f\rangle)(\langle a,b\rangle - \langle e,f\rangle)^{-1}$. (Teorema L26). Dengan demikian $\langle p,q\rangle \in Q^{+}$. (Definisi L12).

Karena $\langle g,h\rangle < \langle a,b\rangle\langle c,d\rangle$, maka

$\langle g,h\rangle - \langle c,d\rangle\langle e,f\rangle < \langle a,b\rangle\langle c,d\rangle - \langle c,d\rangle\langle e,f\rangle$ (Teorema L19)

$\langle g,h\rangle - \langle c,d\rangle\langle e,f\rangle < \langle c,d\rangle[\langle a,b\rangle - \langle e,f\rangle]$ (Teorema L6)

$[\langle g,h\rangle - \langle c,d\rangle\langle e,f\rangle][\langle a,b\rangle - \langle e,f\rangle]^{-1} < \langle c,d\rangle$ (Teorema L19 dan Teorema L12)

$\langle p,q\rangle < \langle c,d\rangle$. (substitusi)

Teorema L28. $\langle 1,1+1\rangle \in Q^{+}$.

Bukti:

$1 \in I^{+}$ dan $1 + 1 \in I^{+}$.

Maka menurut Lemma L3 $\langle 1,1 + 1\rangle \in Q^{+}$.

Definisi L13. Bilangan rasional $\langle 1,1 + 1\rangle$ diberi lambang dengan $1/2$.

Definisi L14. $\forall \langle a,b\rangle,\langle c,d\rangle,\langle e,f\rangle \in Q)$

$\langle a,b\rangle < \langle c,d\rangle < \langle e,f\rangle \Leftrightarrow \langle a,b\rangle < \langle c,d\rangle$ dan $\langle c,d\rangle < \langle e,f\rangle$

Teorema L29. Sifat kepadatan bilangan rasional:

$(\forall \langle a,b\rangle,\langle c,d\rangle \in Q)\ \langle a,b\rangle < \langle c,d\rangle \Rightarrow$

$(\exists \langle e,f\rangle \in Q)\ \langle a,b\rangle < \langle e,f\rangle < \langle c,d\rangle$.

Bukti:

a. Andaikan $\langle a,b\rangle < \langle c,d\rangle$. Maka

$\langle a,b\rangle + \langle a,b\rangle < \langle a,b\rangle + \langle c,d\rangle$ (Teorema L19)

$\langle ab + ab, bb\rangle < \langle ad + bc,bd\rangle$ (Definisi L3)

$\langle a + a,b\rangle < \langle ad + bc,bd\rangle$ (Teorema L4)

$\langle a(1 + 1),b\rangle < \langle ad + bc,bd\rangle$. (Teorema B6)

Karena $1/2 > 0$ (Teorema L28)

maka

$\langle a(1 + 1),b\rangle 1/2 < \langle ad + bc,bd\rangle 1/2$ (Teorema L19)

$\langle a(1 + 1),b(1 + 1)\rangle < \langle ad + bc,bd(1 + 1)\rangle$ (Definisi L4)

$\langle a,b\rangle < \langle ad + bc,bd(1 + 1)\rangle$. (Teorema L4)

b. Karena $\langle a,b\rangle < \langle c,d\rangle$, maka

$\langle a,b\rangle + \langle c,d\rangle < \langle c,d\rangle + \langle c,d\rangle$ (Teorema L19)

$\langle ad + bc,bd\rangle < \langle cd(1 + 1),dd\rangle$

(Definisi L3 dan Teorema B6)

$\langle ad + bc,bd\rangle < \langle c(1 + 1),d\rangle$. (Teorema L4)

Karena $1/2 > 0$ (Teorema L28)

maka

$\langle ad + bc,bd\rangle 1/2 < \langle c(1 + 1),d\rangle 1/2$ (Teorema L20)

$\langle ad + bc,bd(1 + 1)\rangle < \langle c(1 + 1),d(1 + 1)\rangle$ (Definisi L4)

$\langle ad + bc,bd(1 + 1)\rangle < \langle c,d\rangle$. (Teorema L4)

karena (a) dan (b), $\langle a,b\rangle < \langle ad + bc,bd(1 + 1)\rangle < \langle c,d\rangle$.

Dengan mengambil $e = ad + bc$ dan $f = bd(1 + 1)$, disimpulkan bahwa ada $\langle e,f\rangle$ sedemikian sehingga

$$\langle a,b\rangle < \langle e,f\rangle < \langle c,d\rangle.$$

$ad + bc \in I$ (Teorema B3). $bd \neq 0$ (Teorema B26) dan $1 + 1 \neq 0$, sehingga $bd(1 + 1) \neq 0$ (Teorema B26).

Jadi $\langle e,f\rangle \in Q$.

Teorema L30. Sifat Archimedes: $(\forall \langle a,b\rangle, \langle c,d\rangle \in Q^+)$ $(\exists\, p \in I^+)$ $p\langle a,b\rangle > \langle c,d\rangle$.

Bukti:

Ambil sebarang $\langle a,b\rangle, \langle c,d\rangle \in Q^+$

i. Bila $a,b,c,d \in I^+$

$ad \in I^+$	(Teorema B15)
$ad > 0$	(Teorema B17)
$ad \geq 1$	(Teorema N12)
$ad + ad > 1$	(Teorema B24)
$ad(1 + 1) > 1.$	(Teorema B6)

Di samping itu, $bc > 0$, maka

$bc\{ad(1 + 1)\} > bc$	(Teorema B23)
$(1 + 1)bcad > bc$	(Teorema B6)
$\langle (1 + 1)bca,b\rangle > \langle c,d\rangle$	(Definisi L11)
$(1 + 1)bc\langle a,b\rangle > \langle c,d\rangle.$	(Teorema L8)

$(1 + 1) \in I^+$, karena $0 < 1$ dan $1 < 1 + 1$ (Teorema N12), maka dengan Teorema N3, $0 < 1 + 1$.

Karena $b,c \in I^+$, maka $bc \in I^+$ (Teorema B15).

Jadi $bc(1 + 1) \in I^+$ (Teorema B15).

Kesimpulan, ada $p = (1 + 1)bc \in I^+$ sedemikian sehingga $p\langle a,b\rangle > \langle c,d\rangle$ dengan $a,b,c,d \in I^+$.

ii. Bila $a,b \in I^+$ dan $c,d \in I^-$.

Menurut Lemma B1, $-c,-d \in I^+$.

Maka untuk $a,b,-c,-d \in I^+$ berlaku

$$(1 + 1)b(-c)\langle a,b\rangle > (-c,-d) \qquad \text{(Teorema L30.i)}$$

Di samping itu, $(-c,-d) = \langle c,d\rangle$ (Lemma L1), jadi

$(1 + 1)b(-c)\langle a,b\rangle > \langle c,d\rangle$ (substitusi).

Karena $b,(-c) \in I^+$, maka $b(-c) \in I^+$ (Teorema B15).

Jadi $p = (1 + 1)b(-c) \in I^+$.

Untuk kemungkinan lainnya, bukti analog.

Teorema L31. $(\forall \langle a,b\rangle,\langle c,d\rangle,\langle e,f\rangle,\langle g,h\rangle \in Q^+)$

$(\langle a,b\rangle < \langle c,d\rangle \text{ dan } \langle e,f\rangle < \langle g,h\rangle) \Rightarrow$

$\langle a,b\rangle\langle e,f\rangle < \langle c,d\rangle\langle g,h\rangle$.

Bukti:

Ambil sebarang $\langle a,b\rangle,\langle c,d\rangle,\langle e,f\rangle,\langle g,h\rangle \in Q^+$, dengan $\langle a,b\rangle < \langle c,d\rangle$ dan $\langle e,f\rangle < \langle g,h\rangle$. Maka

$$\langle a,b\rangle\langle e,f\rangle < \langle c,d\rangle\langle e,f\rangle, \qquad \text{(Teorema L20)}$$

dan $\langle e,f\rangle\langle c,d\rangle < \langle g,h\rangle\langle c,d\rangle$ (Teorema L20)

$\Leftrightarrow \langle c,d\rangle\langle e,f\rangle < \langle c,d\rangle\langle g,h\rangle$. (Teorema L6)

Kesimpulan $\langle a,b\rangle\langle e,f\rangle < \langle c,d\rangle\langle g,h\rangle$. (Teorema L21)

Teorema L32. $(\forall \langle a,b\rangle,\langle c,d\rangle,\langle e,f\rangle,\langle g,h\rangle \in Q)$

$(\langle a,b\rangle < \langle c,d\rangle \text{ dan } \langle e,f\rangle < \langle g,h\rangle) \Rightarrow$

$\langle a,b\rangle + \langle e,f\rangle < \langle c,d\rangle + \langle g,h\rangle$.

Bukti:

Ambil sebarang $\langle a,b\rangle,\langle c,d\rangle,\langle e,f\rangle,\langle g,h\rangle \in Q$, sedemikian sehingga $\langle a,b\rangle < \langle c,d\rangle$ dan $\langle e,f\rangle < \langle g,h\rangle$. Maka

$$\langle a,b\rangle - \langle c,d\rangle < 0 \qquad \text{(Teorema L16)}$$

$\langle e,f\rangle - \langle g,h\rangle < 0$ (Teorema L16)

$(\langle a,b\rangle - \langle c,d\rangle) + (\langle e,f\rangle - \langle g,h\rangle < 0$ (Teorema L25)

$\langle a,b\rangle + \langle e,f\rangle - (\langle c,d\rangle + \langle g,h\rangle < 0$ (Teorema L13)

$\langle a,b\rangle + \langle e,f\rangle < \langle c,d\rangle + \langle g,h\rangle$. (Teorema L16)

Teorema L33. $(\forall \langle a,b\rangle,\langle c,d\rangle,\langle e,f\rangle,\langle g,h\rangle \in Q^+)$

$\langle a,b\rangle \leq \langle c,d\rangle$ dan $\langle e,f\rangle \leq \langle g,h\rangle \Rightarrow$

$\langle a,b\rangle\langle e,f\rangle \leq \langle c,d\rangle\langle g,h\rangle$.

Bukti:

Ambil sebarang $\langle a,b\rangle,\langle c,d\rangle,\langle e,f\rangle,\langle g,h\rangle \in Q^+$, sedemikian sehingga $\langle a,b\rangle \leq \langle c,d\rangle$ dan $\langle e,f\rangle \leq \langle g,h\rangle$.

a. Bila $\langle a,b\rangle < \langle c,d\rangle$ dan $\langle e,f\rangle < \langle g,h\rangle$ maka

$\langle a,b\rangle\langle e,f\rangle < \langle c,d\rangle\langle g,h\rangle$. (Teorema L31)

b. Bila $\langle a,b\rangle = \langle c,d\rangle$ dan $\langle e,f\rangle < \langle g,h\rangle$, maka

$\langle a,b\rangle\langle e,f\rangle = \langle c,d\rangle\langle e,f\rangle$ dan $\langle c,d\rangle\langle e,f\rangle < \langle c,d\rangle\langle g,h\rangle$.

(Teorema L15, Teorema L20)

Sehingga $\langle a,b\rangle\langle e,f\rangle < \langle c,d\rangle\langle g,h\rangle$. (substitusi)

c. Bila $\langle a,b\rangle < \langle c,d\rangle$ dan $\langle e,f\rangle = \langle g,h\rangle$, maka

$\langle a,b\rangle\langle e,f\rangle < \langle c,d\rangle\langle e,f\rangle$ dan $\langle c,d\rangle\langle e,f\rangle = \langle c,d\rangle\langle g,h\rangle$.

(Teorema L20, Teorema L15)

Sehingga $\langle a,b\rangle\langle e,f\rangle < \langle c,d\rangle\langle g,h\rangle$. (substitusi)

d. Bila $\langle a,b\rangle = \langle c,d\rangle$ dan $\langle c,d\rangle = \langle g,h\rangle$, maka

$\langle e,f\rangle\langle c,d\rangle = \langle g,h\rangle\langle c,d\rangle$ (Teorema L15)

sehingga $\langle a,b\rangle\langle e,f\rangle = \langle g,h\rangle\langle c,d\rangle$. (substitusi)

Dari (a), (b), (c) dan (d) disimpulkan

$\langle a,b\rangle \leq \langle c,d\rangle$ dan $\langle e,f\rangle \leq \langle g,h\rangle \Rightarrow$

$\langle a,b\rangle\langle e,f\rangle \leq \langle c,d\rangle\langle g,h\rangle$

Teorema L34. $(\forall \langle a,b\rangle, \langle c,d\rangle, \langle e,f\rangle \in Q)$

$\langle a,b\rangle \leq \langle c,d\rangle$ dan $\langle c,d\rangle \leq \langle e,f\rangle \Rightarrow$

$\langle a,b\rangle \leq \langle e,f\rangle$.

Bukti:

Ambil sebarang $\langle a,b\rangle, \langle c,d\rangle, \langle e,f\rangle \in Q$, sedemikian sehingga $\langle a,b\rangle \leq \langle c,d\rangle$ dan $\langle c,d\rangle \leq \langle e,f\rangle$.

Bila $\langle a,b\rangle < \langle c,d\rangle$ dan $\langle c,d\rangle < \langle e,f\rangle$, maka $\langle a,b\rangle < \langle e,f\rangle$.

(Teorema L21)

Bila $\langle a,b\rangle = \langle c,d\rangle$ dan $\langle c,d\rangle < \langle e,f\rangle$, maka $\langle a,b\rangle < \langle e,f\rangle$.

(substitusi)

Bila $\langle a,b\rangle < \langle c,d\rangle$ dan $\langle c,d\rangle = \langle e,f\rangle$, maka $\langle a,b\rangle < \langle e,f\rangle$.

(substitusi)

Bila $\langle a,b\rangle = \langle c,d\rangle$ dan $\langle c,d\rangle = \langle e,f\rangle$, maka $\langle a,b\rangle = \langle e,f\rangle$.

(substitusi)

Kesimpulan,

$\langle a,b\rangle \leq \langle c,d\rangle$ dan $\langle c,d\rangle \leq \langle e,f\rangle \Rightarrow \langle a,b\rangle \leq \langle e,f\rangle$.

Teorema L35. $(\forall \langle a,b\rangle, \langle c,d\rangle, \langle e,f\rangle \in Q)$ $\langle a,b\rangle \leq \langle c,d\rangle \Leftrightarrow$

$\langle a,b\rangle + \langle e,f\rangle \leq \langle c,d\rangle + \langle e,f\rangle$.

Bukti:

$\langle a,b\rangle < \langle c,d\rangle \Leftrightarrow$

$\langle a,b\rangle + \langle e,f\rangle < \langle c,d\rangle + \langle e,f\rangle$ (Teorema L19)

$\langle a,b\rangle = \langle c,d\rangle \Leftrightarrow$

$\langle a,b\rangle + \langle e,f\rangle = \langle c,d\rangle + \langle e,f\rangle$ (Teorema L14)

Jadi, $\langle a,b\rangle \leq \langle c,d\rangle \Leftrightarrow \langle a,b\rangle + \langle e,f\rangle \leq \langle c,d\rangle + \langle e,f\rangle$.

BAB V

SISTEM BILANGAN REAL

A. Potongan Dedekind

Pada bagian ini akan dibangun sistem bilangan real atas dasar sistem bilangan rasional. Untuk itu tidak digunakan pasangan berurutan, seperti yang dilakukan dalam memperluas sistem bilangan asli atau sistem bilangan bulat, melainkan akan digunakan konsep yang disebut potongan Dedekind (Dedekind cut). Konsep ini dikembangkan oleh seorang ahli matematika bangsa Jerman yang bernama Richard Dedekind.

Definisi R1. Sebuah potongan Dedekind $(A|B)$ dalam himpunan bilangan rasional Q adalah suatu partisi dari himpunan Q itu yang terdiri dari dua kelas (himpunan bagian) A dan B sedemikian sehingga $(\forall x \in A)$ $(\forall y \in B)$ $x < y$.

Ada tiga jenis potongan Dedekind $(A|B)$ yang mungkin terjadi dalam himpunan bilangan rasional, yaitu:

a. A mempunyai anggota terbesar dan B tidak mempunyai anggota terkecil,

b. A tidak mempunyai anggota terbesar dan B mempunyai anggota terkecil,

c. A tidak mempunyai anggota terbesar dan B tidak mempunyai anggota terkecil.

Kemungkinan bahwa A mempunyai anggota terbesar a dan B mempunyai anggota terkecil b, tidak akan terjadi dalam suatu potongan Dedekind. Alasannya, bila kemungkinan ini benar, maka $a < b$ (Definisi R1). Akibatnya, menurut Teorema L29, $(\exists c \in Q)$ $a < c < b$. Jadi $c \notin A$ (karena a adalah anggota terbesar A) dan juga $c \notin B$ (karena b adalah anggota terkecil B). Terjadi kontradiksi, karena yang terakhir ini mengakibatkan bahwa A dan B bukan partisi dari Q.

Berikut ini adalah contoh-contoh potongan Dedekind yang berturut-turut mempunyai jenis (a), jenis (b), dan jenis (c):

1. Potongan $(A|B)$, dengan $A = \{ x \in Q \mid x \leq 2 \}$ dan $B = \{ x \in Q \mid x > 2 \}$. Nampak A mempunyai anggota terbesar yaitu 2 dan B tidak mempunyai anggota terkecil.

2. Potongan $(A|B)$, dengan $A = \{ x \in Q \mid x < 2 \}$ dan $B = \{ x \in Q \mid x \geq 2 \}$. Nampak A tidak mempunyai anggota terbesar dan B mempunyai anggota terkecil, yaitu 2.

3. Potongan $(A|B)$, dengan $A = Q^- \cup \{ x \in Q \mid x^2 < 2 \}$ dan $B = Q - A$. Nampak A tidak mempunyai anggota terbesar dan B juga tidak mempunyai anggota terkecil.

Definisi R2. Potongan Dedekind yang termasuk potongan jenis (a) atau jenis (b) disebut potongan rasional.

Untuk $\forall\ r \in Q$ terdapat dua potongan, yaitu potongan jenis (a) dan potongan jenis (b). Untuk menunjukkan adanya korespondensi satu-satu antara potongan rasional dan bilangan rasional, kita cukup menunjukkan adanya korespondensi satu-satu antara Q dan himpunan potongan jenis (b) saja, sebab antara himpunan potongan jenis (a) dan himpunan potongan jenis (b) juga terdapat korespondensi satu-satu.

Definisi R3. $R = \{\ (A|B)\ |\ (A|B)$ suatu potongan Dedekind jenis (b) atau (c) $\}$.

Definisi R4. $(\forall\ (A|B),(C|D) \in R)\ (A|B) = (C|D) \Leftrightarrow A = C$. Dan bila $A \subset C$ atau $C \subset A$, maka kita tulis $(A|B) \neq (C|D)$.

B. <u>Operasi Penjumlahan</u>

Teorema R1. Bila $(A|B),(C|D) \in R$, dan $E = \{\ z\ |\ z = x + y,\ x \in A$ dan $y \in C\ \}$ serta $F = Q - E$, maka $(E|F) \in R$.

Bukti:

Pembuktian dengan menunjukkan bahwa $(E|F)$ suatu potongan dan E tidak mempunyai anggota terbesar.

Ambil sebarang $(A|B),(C|D) \in R$.

Andaikan $E = \{\ z\ |\ z = x + y,\ x \in A$ dan $y \in C\ \}$ dan

$F = Q - E$.

a. $E \neq \emptyset$, karena $A \neq \emptyset$ dan $C \neq \emptyset$.

$F \neq \emptyset$ karena $(\exists\ r \in Q)\ r = s + t$, dengan $s \in B$ dan $t \in D$, sehingga $r \notin E$. Kesimpulan $(\forall\ z \in Q)\ z \in E$ atau $z \in F$. Ambil sebarang $p \in Q$. Andaikan ada $z \in E$ sedemikian sehingga $p < z$. Maka $(\exists\ x \in A)\ (\exists\ y \in C)\ z = x + y$. Ini berarti

$p < x + y$ (substitusi)

$p - x < x + y - x$ (Teorema L19, Definisi L9)

$p - x < y$. (Teorema L3, Teorema L10)

Jadi $p - x \in C$. (Definisi R1)

Selain itu, $p = (p - x) + x$, maka $p \in E$.

Dengan demikian, $(\forall\ p \in Q)\ [(\exists\ z \in E)\ p < z \Rightarrow p \in E\ ]$.

Dengan kontraposisi,

$$(\forall\ p \in Q)\ [p \notin E \Rightarrow (\forall\ z \in E)\ p \geq z].$$

Karena $F = Q - E$, maka

$$(\forall\ p \in Q)\ [\ p \in F \Rightarrow (\forall\ z \in E)\ p > z\ ]$$

Jadi, $(\forall\ z \in E)\ (\forall\ p \in F)\ z < p$.

Kesimpulan $(E|F)$ potongan dedekind.

b. Ambil sebarang $r \in E$, maka $(\exists\ x \in A)\ (\exists\ y \in C)\ r = x + y$. Karena A tidak mempunyai elemen terbesar, maka

$(\exists\ s \in A)\ x < s$.

Jadi $x + y < s + y$ (Teorema L19)

$r < s + y$. (substitusi)

Kesimpulan, $(\forall\ r \in E)(\exists\ s + y \in E)\ r < s + y$.

Jadi E tidak mempunyai anggota terbesar.

Terbukti bahwa $(E|F) \in R$.

Definisi R5. Definisi penjumlahan:

Potongan $(E|F)$ seperti didefinisikan pada Teorema R1 disebut **hasil penjumlahan** dari $(A|B)$ dan $(C|D)$ dan ditulis:

$(A|B) + (C|D) = (E|F)$.

Teorema R2. Penjumlahan pada R bersifat komutatif dan assosiatif.

Bukti:

Ambil sebarang $(A|B), (C|D), (E|F) \in R$.

a. $(A|B) + (C|D) =$

$(E = \{ x + y \mid x \in A,\ y \in C \} \mid Q - E)$ (Definisi R5)

$= (E = \{ y + x \mid x \in A,\ y \in C \} \mid Q - E)$ (Teorema L4)

$= (C|D) + (A|B)$. (Definisi R5)

b. $\{(A|B) + (C|D)\} + (E|F) =$

$= (G = \{ x + y \mid x \in A,\ y \in C \} \mid Q - G) + (E|F)$

(Definisi R5)

$= (H = \{ (x + y) + z \mid x \in A,\ y \in C,\ z \in E \} \mid Q - H)$

(Definisi R5)

$= (H = \{ x + (y + z) \mid x \in A,\ y \in C,\ z \in E \} \mid Q - H)$

(Teorema L4)

$= (A|B) + (I = \{ y + z \mid y \in C,\ z \in E \} \mid Q - I)$

(Definisi R5)

$= (A|B) + \{(C|D) + (E|F)\}$. (Definisi R5)

Lemma R1. Untuk setiap $(A|B) \in R$, apabila $r \in Q$ dan $r > 0$, maka ada $p, q \in Q$ sedemikian sehingga $p \in A$,

$q \in B$, dengan q bukan anggota terkecil B dan $q - p = r$.

Bukti:

Ambil sebarang $(A|B) \in R$, $r \in Q$ dengan $r > 0$.

Ambil pula sebarang $s \in A$.

Andaikan $n = 0, 1, 1 + 1, 1 + 1 + 1, \ldots$ dan $S_n = s + nr$.

Karena (menurut Definisi R1) $(\forall x \in A)(\forall y \in B)\ x < y$, maka $(\exists m \in I)\ S_m \in A$ dan $S_{m+1} \in B$.

Dengan demikian, terdapat dua kemungkinan untuk S_{m+1}, yaitu, S_{m+1} anggota terkecil b atau bukan anggota terkecil B.

Bila S_{m+1} anggota terkecil B dan andaikan $p = S_m + r/(1 + 1)$, $q = S_{m+1} + r/(1 + 1)$, maka $q - p = r$.

Bila S_{m+1} bukan anggota terkecil B, maka ada $p,q \in Q$ dengan $p = S_m$, $q = S_{m+1}$ sedemikian sehingga $q - p = r$.

Teorema R3. Andaikan $(M|P)$ adalah suatu potongan dalam R, dengan $M = \{ x \in Q \mid x < 0 \}$ dan $P = Q - M$. Ambil sebarang potongan $(A|B) \in R$. Maka ada tunggal $(A'|B') \in R$ sedemikian sehingga $(A|B) + (A'|B') = (M|P)$.

Bukti:

Ambil sebarang $(A|B) \in R$, maka $(A|B)$ potongan jenis (b) atau (c) (Definisi R3).

Andaikan $A' = \{ p \in Q \mid (\forall x \in A)\ x < -p$ dan $(\exists y \in B)\ y < -p \}$ dan $B' = Q - A'$.

Akan dibuktikan bahwa $(A'|B') \in R$ sedemikian sehingga $(A|B) + (A'|B') = (M|P)$, dan $(A'|B')$ tunggal.

a. Dibuktikan $(A'|B') \in R$.

i. Ambil $r \in B$ sedemikian sehingga $(\exists\, y \in B)\ y < r$.

Ini berarti $-r \in A'$.

Dengan demikian $A' \neq \emptyset$.

Ambil $p \in A'$, maka $(\forall\, x \in A)\ x < -p$ dan $(\exists\, y \in B)$ $y < -p$.

Ambil sebarang $t \in A$ $(A \neq \emptyset)$, maka $t < -p$, sehingga $-t \in A'$. Karena $B' = Q - A'$, maka $-t \in B'$.

Jadi $B' \neq \emptyset$.

ii. Ambil sebarang $q \in Q$. Andaikan ada $p \in A'$ sedemikian sehingga $q < p$. Maka $-p < -q$ (Lemma L2). Karena $p \in A'$, maka $(\forall\, x \in A)\ x < -p$ dan $(\exists\, y \in B)\ y < -p$. Akibatnya, $(\forall\, x \in A)\ x < -q$ dan $(\exists\, y \in B)\ y < -q$ (Teorema L21). Jadi $q \in A'$.

Dengan demikian, $(\forall\, q \in Q)\ [(\exists\, p \in A')\ q < p \Rightarrow q \in A']$.

Dengan kontraposisi, $(\forall\, q \in Q)\ [\ q \notin A' \Rightarrow (\forall\, p \in A')\ q \geq p\ ]$.

Karena $B' = Q - A'$, maka

$$(\forall\, q \in Q)\ [\ q \in B' \Rightarrow (\forall\, p \in A')\ q > p]$$

Jadi $(\forall\, p \in A')\ (\forall\, q \in B')\ p < q$.

iii. Ambil sebarang $p \in A'$, maka $(\forall\, x \in A)\ x < -p$ dan $(\exists\, y \in B)\ y < -p$.

Karena $y, -p \in Q$, maka

$$(\exists\, r \in Q)\ y < r < -p \qquad \text{(Teorema L29)}$$

Dengan demikian $r \in B$, sehingga $(\forall x \in A)\ x < r$.

Akibatnya, $-r \in A'$.

Karena $r < -p$, maka $p < -r$ (Lemma L2).

Terbukti bahwa $(\forall p \in A')(\exists s \in A')\ p < s$.

Kesimpulan A' tidak beranggota terbesar.

Dengan demikian $(A'|B') \in R$.

b. Dibuktikan bahwa $(A|B) + (A'|B') = (M|P)$.

Andaikan $(A|B) + (A'|B') = (M'|P')$.

i. Ambil sebarang $m \in M'$, maka $m = n + r$, dengan $n \in A$ dan $r \in A'$.

Akibatnya,

$$n < -r \qquad \text{(Definisi R1)}$$

$$n + r < 0 \qquad \text{(Teorema L16, Teorema L13)}$$

$$m < 0. \qquad \text{(substitusi)}$$

Jadi $m \in M$.

Kesimpulan $M' \subset M$.

ii. Ambil sebarang $m \in M$, maka $m < 0$.

Dengan demikian, menurut Lemma R1, ada $q, r \in Q$ sedemikian sehingga $q \in A$ dan $r \in B$ (r bukan anggota terkecil B) dengan $r - q = -m$.

Akibatnya,

$$m = q - r \qquad \text{(Teorema L14)}$$

$$m = q + (-r). \qquad \text{(Definisi L9)}$$

Karena $r \in B$ dan $q \in A$, maka $-r \in A'$ dan $q + (-r) \in M'$. Dengan demikian $m \in M'$.

Sehingga $M \subset M'$.

Kesimpulan $M = M'$.

Dengan Definisi R4, $(M'|P') = (M|P)$.

c. Dibuktikan $(A'|B')$ tunggal dengan reductio ad absurdum. Andaikan $(A'|B')$ tidak tunggal berarti:

$$(A|B) + (A'|B') = (M|P)$$

dan $(\exists\ (\underline{A}|\underline{B}) \in R)\ (A|B) + (\underline{A}|\underline{B}) = (M|P)$, dengan $(A'|B') \neq (\underline{A}|\underline{B})$.

Maka $(A|B) + (\underline{A}|\underline{B}) = (M|P) = (A|B) + (A'|B')$. Jadi

$M = \{\ x + y \mid x \in A,\ y \in A'\} = \{\ w + z \mid w \in A \text{ dan } z \in \underline{A}\ \}$

i. Ambil sebarang $y \in A'$, maka $x + y \in M$, dengan $x \in A$.

Di samping itu, karena $x + y \in M$ dan $x \in A$, maka $(\exists\ w \in \underline{A})\ x + w = x + y$.

Dengan Teorema L14, $w = y$.

Jadi $y \in \underline{A}$.

Dengan demikian $A' \subset \underline{A}$.

ii. Ambil sebarang $z \in \underline{A}$, maka $x + z \in M$, dengan $x \in A$.

Selain itu, karena $w + z \in M$ dan $w \in A$, maka $(\exists\ y \in A')\ w + y = w + z$.

$y = z$. (Teorema L14)

Jadi $z \in A'$.

Dengan demikian, $\underline{A} \subset A'$.

Kesimpulan $\underline{A} = A'$. Dengan Definisi R4, $(\underline{A}|\underline{B}) = (A'|B')$.

Pernyataan ini kontradiksi dengan pengandaian di atas.

Jadi, $(A'|B')$ tunggal.

Definisi R5. Potongan $(A'|B')$ pada Teorema R3 dilambangkan dengan $-(A|B)$, dan potongan $(M|P)$ diberi lambang 0^*.

Teorema R4. $(\forall\ (A|B) \in R)\ (A|B) + 0^* = (A|B)$.

Bukti:

Ambil sebarang $(A|B) \in R$.

Andaikan $(A|B) + 0^* = (A|B) + (M|P) = (E|F)$.

a. Ambil sebarang $r \in E$, maka $r = p + q$, dengan $p \in A$, $q \in M$. Karena $q < 0$, maka

$p + q < p$ (Teorema L19)

$p + q \in A$ (Definisi R1)

$r \in A$. (substitusi)

Jadi, $E \subset A$.

b. Ambil sebarang $r \in A$, maka

$(\exists\ s \in A)\ s > r$. (Definisi R3)

Dengan demikian, $r - s < 0$. (Teorema L16)

Sehingga $r - s \in M$.

Di samping itu, $r = s + (r - s)$, maka $r \in E$.

Jadi, $A \subset E$.

Ini berarti $A = E$, sehingga $(A|B) = (E|F)$ (Definisi R4).

Kesimpulan $(A|B) = (A|B) + 0^*$.

Teorema R5. $(\forall\ (A|B) \in R)\ (A|B) = -(-(A|B))$.

Bukti:

Ambil sebarang $(A|B) \in R$. Maka

$(A|B) = (A|B) + 0^*$ (Teorema R4)

$= (A|B) + \{(-(A|B)) + (-(-(A|B)))\}$ (Teorema R3)

$= \{(A|B) + (-(A|B))\} + (-(-(A|B)))$ (Teorema R2)

$= 0^* + (-(-(A|B)))$ (Teorema R3)

$= -(-(A|B))$. (Teorema R4)

Definisi R7. Bila $(A|B) \in R$ dan A memuat bilangan rasional positif, maka $(A|B)$ disebut positif. Himpunan semua $(A|B)$ positif diberi lambang R^+. Bila B memuat bilangan rasional negatif, maka $(A|B)$ disebut negatif. Himpunan semua $(A|B)$ negatif diberi lambang R^-.

Teorema R6. $(\forall (A|B) \in R)\ (A|B) \in R^+ \Leftrightarrow$

$$A = Q^- \cup \{ x \in Q \mid x \geq 0,\ x \in A \}.$$

Bukti:

Ambil sebarang $(A|B) \in R$.

a. Andaikan $(A|B) \in R^+$, maka $(\exists\ a \in A)\ a > 0$.

Ambil sebarang $p \in Q^-$, maka $p < a$.

Dengan Definisi R1, $p \in A$. Jadi $Q^- \subset A$.

$A - Q^- = \{ x \in Q \mid x \geq 0,\ x \in A \}$.

Jadi $(A|B) \in R^+ \Rightarrow A = Q^- \cup \{ x \in Q \mid x \geq 0,\ x \in A \}$

b. Andaikan $A = Q^- \cup \{ x \in Q \mid x \geq 0,\ x < y,\ y \in B \}$.

Ini berarti $(\exists\ t \in A)\ t > 0$.

Maka menurut Definisi R7, $(A|B) \in R^+$.

Kesimpulan, $(A|B) \in R^+ \Leftrightarrow A = Q^- \cup \{ x \mid x \geq 0,\ x \in A \}$.

Teorema R7. Bila $(A|B) \in R^+$, maka $-(A|B) \in R^-$; bila $(A|B) \in R^-$, maka $-(A|B) \in R^+$.

Bukti:

a. Ambil sebarang $(A|B) \in R^+$, maka $(\exists\ a \in Q^+)\ a \in A$.

$-(A|B) = (A'|B')$, di mana menurut Teorema R3,

$A' = \{ p \in Q \mid (\forall\ x \in A)\ x < -p$ dan $(\exists\ y \in B)\ y < -p \}$.

Karena $a \in A$, maka $(\forall p \in A')\ a < -p$.

Jadi $-a \in B'$.

Di samping itu, $a \in Q^+$, maka

$$0 < a \qquad \text{(Definisi L12)}$$

$$-a < 0 \qquad \text{(Lemma L2)}$$

$$-a \in Q^-. \qquad \text{(Definisi L13)}$$

Jadi $(\exists -a \in Q^-)\ -a \in B'$.

Kesimpulan, karena $(A'|B') = -(A|B)$, maka $-(A|B) \in R^-$.

b. Ambil sebarang $(A|B) \in R^-$, maka $(\exists a \in Q^-)\ a \in B$.

$-(A|B) = (A'|B')$, di mana menurut Teorema R3,

$A' = \{ p \in Q \mid (\forall x \in A)\ x < -p$ dan $(\exists y \in B)\ y < -p \}$.

karena $a \in Q^-$, maka $\qquad a < 0 \qquad$ (Definisi L13)

$$(\exists r \in Q)\ a < r < 0 \qquad \text{(Teorema L29)}$$

Ini berarti, $-r \in A'$, karena $(\exists a \in B)\ a < r$.

Di samping itu, karena $r < 0$, maka

$$-r > 0 \qquad \text{(Lemma L2)}$$

$$-r \in Q^+. \qquad \text{(Definisi L12)}$$

Dengan demikian, $(A'|B') \in R^+$.

Karena $(A'|B') = -(A|B)$, maka $-(A|B) \in R^+$.

Definisi R8. $(\forall (A|B),(C|D) \in R)$

$$(A|B) - (C|D) = (A|B) + (-(C|D)).$$

Teorema R8. $(\forall (A|B),(C|D) \in R)$

$$-[(A|B) + (C|D)] = -(A|B) - (C|D).$$

Bukti:

Ambil sebarang $(A|B),(C|D) \in R$.

$-[(A|B) + (C|D)] =$

$-[(A|B) + (C|D)] + 0^*$ (Teorema R4)

$= -[(A|B) + (C|D)] + (A|B) - (A|B)$ (Teorema R3)

$= -[(A|B) + (C|D)] + (A|B) + 0^* - (A|B)$ (Teorema R4)

$= -[(A|B) + (C|D)] + (A|B) + [(C|D) - (C|D)] - (A|B)$

(Teorema R3)

$= -[(A|B) + (C|D)] + [(A|B) + (C|D)] - (A|B) - (C|D)$

(Teorema R2)

$= 0^* + (-(A|B)) - (C|D)$ (Teorema R3, Definisi R8)

$= -(A|B) - (C|D).$ (Teorema R4)

C. Operasi Perkalian

Teorema R9. Untuk setiap $(A|B),(C|D) \in R^+$,

bila $E = Q^- \cup \{ xy \mid x \geq 0,\ y \geq 0,$ dan $x \in A,$ $y \in C \}$ dan $F = Q - E$. Maka $(E|F) \in R$.

Bukti:

Pembuktian dengan menunjukkan bahwa $(E|F)$ adalah potongan Dedekind dan E tidak mempunyai anggota terbesar.

Ambil sebarang $(A|B),(C|D) \in R^+$, maka $(\forall s \in B)(\forall t \in D)$ $s > 0$ dan $t > 0$. Andaikan $E = Q^- \cup \{ xy \mid x \in A,\ y \in C,$ $x \geq 0$ dan $y \geq 0 \}$ dan $F = Q - E$.

a. Jelas bahwa $E \neq \emptyset$, karena A dan C memuat bilangan rasional positif.

Karena $B = Q - A$ dan $D = Q - C$, maka

$$(\exists s \in B)(\exists t \in D)\ st \notin E.$$

Karena $F = Q - E$, maka $st \in F$.

Jadi $F \neq \emptyset$.

b. Ambil sebarang $v \in Q$, maka ada tiga kemungkinan $v \in Q^+$ atau $v = 0$ atau $v \in Q^-$.

i. Bila $v \in Q^-$, maka $v \in E$.

ii. Bila $v = 0$, maka $v \in E$, sebab $v = 0 = 0n$ di mana $0 \in A$ dan $n \in C$, $n \geq 0$.

iii. Bila $v \in Q^+$, maka $v > 0$.

Andaikan ada $p \in E$ sedemikian sehingga $v < p$.

Maka $p > 0$, sehingga $p \notin Q^-$.

Jadi $(\exists\ r \in A)(\exists\ s \in C)(r > 0$ dan $s > 0)$ $p = rs$.

Akibatnya,

$$v < rs \qquad \text{(substitusi)}$$
$$vs^{-1} < rss^{-1} \qquad \text{(Teorema L20)}$$
$$vs^{-1} < r \qquad \text{(Teorema L12)}$$
$$vs^{-1} \in A. \qquad \text{(Definisi R1)}$$

Di samping itu, $s^{-1} > 0$ (Lemma L4) dan $v > 0$, maka $vs^{-1} > 0$.

Karena $v = vs^{-1}s$, maka $v \in E$.

Kesimpulan, $(\forall\ v \in Q^+)[(\exists\ p \in E)\ v < p \Rightarrow v \in E\ ]$.

Dengan demikian, $(\forall\ v \in Q)[(\exists\ p \in E)\ v < p \Rightarrow v \in E\ ]$.

Dengan kontraposisi,

$$(\forall\ v \in Q)[v \notin E \Rightarrow (\forall\ p \in E)\ v \geq p\ ].$$

Karena $F = Q - E$, maka

$$(\forall\ v \in Q)[v \in F \Rightarrow (\forall\ p \in E)\ v > p\ ]$$

Kesimpulan, $(\forall\ p \in E)(\forall\ q \in F)\ p < q$.

c. Ambil sebarang $z \in E$, maka $z \in Q^-$ atau $z = xy$, dengan $x \geq 0$, $y \geq 0$ dan $x \in A$, $y \in C$.

Untuk $x \geq 0$, $y \geq 0$, maka $xy \geq 0$. (Teorema L33)

Jadi $(\forall\ z \in E)$ $z < 0$ atau $z = 0$ atau $z > 0$.

i. Bila $z < 0$.

Berarti $(\exists\ 0 \in E)$ $z < 0$.

ii. Bila $z = 0$.

Ambil $v > 0$, $w > 0$ dan $v \in A$, $w \in C$, maka $vw > 0$ dan $vw \in E$. Jadi $(\exists\ vw \in E)$ $z < vw$.

iii. Bila $z > 0$, maka $z = xy$, dengan $x \in A$, $y \in C$ dengan $x > 0$, $y > 0$.

Karena A tidak mempunyai elemen terbesar maka $(\exists\ s \in A)$ $x < s$. (Definisi R3)

Ini berarti $s > 0$. (Teorema L21)

Dengan demikian,

$xy < sy$ (Teorema L20)

$z < sy$. (substitusi)

Kesimpulan, $(\forall\ z \in E)(\exists\ sy \in E)$ $z < sy$.

Jadi E tidak mempunyai anggota terbesar.

Terbukti bahwa $(E|F) \in R$.

Definisi R9. Definisi perkalian:

a. $\forall\ (A|B) \in R)$ $0^*(A|B) = (A|B)0^* = 0^*$.

b. $\forall\ (A|B),(C|D) \in R$, bila:

1. $(A|B),(C|D) \in R^+$, maka $(E|F)$ pada Teorema R9 disebut hasil kali $(A|B)$ dan $(C|D)$, dan ditulis $(A|B)(C|D) = (E|F)$,

2. $(A|B),(C|D) \in R^-$, maka $(A|B)(C|D) = (-(A|B))(-(C|D))$,

3. $(A|B) \in R^+, (C|D) \in R^-$, maka

$(A|B)(C|D) = -[(A|B)(-(C|D))]$,

4. $(A|B) \in R^-$, $(C|D) \in R^+$, maka

$(A|B)(C|D) = -[(-(A|B))(C|D)]$,

Teorema R10. $(\forall\ (A|B),(C|D) \in R^+)$

$(A|B)(C|D) \in R^+$ dan $(A|B) + (C|D) \in R^+$.

Bukti:

Ambil sebarang $(A|B),(C|D) \in R^+$.

a. $(A|B)(C|D) = (E = Q^- \cup \{\ xy \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ x \in A$ dan $y \in C\ \} \mid Q - E)$ (Definisi R9).

Ambil $x \in A$, $y \in C$, $x > 0$, $y > 0$.

Maka $xy > 0$ (Teorema L32).

Jadi $(\exists\ xy \in E)\ xy > 0$.

Kesimpulan $(A|B)(C|D) \in R^+$ (Definisi R7).

b. $(A|B) + (C|D) = (E = \{\ x + y \mid x \in A,\ y \in C\ \} \mid Q - E)$ (Definisi R5).

Karena $(A|B),(C|D) \in R^+$, maka

$(\exists\ s \in A)\ s > 0$ dan $(\exists\ t \in C)\ t > 0$ (Definisi R7)

$s + t > 0$ (Teorema L32)

dan $s + t \in E$.

Jadi $(A|B) + (C|D) \in R^+$ (Definisi R7).

Lemma R2. Ambil sebarang $(A|B),(C|D) \in R^+$, maka ada $(K|M) \in R$, dengan $K = Q^- \cup \{\ x + y \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ x \in A$ dan $y \in C\ \}$ dan $M = Q - K$, sedemikian sehingga $(A|B) + (C|D) = (K|M)$.

Bukti:

Ambil sebarang $(A|B),(C|D) \in R^+$. Maka menurut Teorema R6 $A = Q^- \cup \{ a \in Q \mid a \geq 0, a \in A\}$ dan $C = Q^- \cup \{ c \in Q \mid c \geq 0, c \in C\}$. Ambil sebarang $x \in A$ dan $y \in C$.

Maka ada kemungkinan $x < 0$ atau $x \geq 0$ dan $y < 0$ atau $y \geq 0$.

Menurut Definisi R5, $(A|B) + (C|D) = (E = \{ x + y \mid x \in A, y \in C \} | Q - E)$.

Jadi bila $z \in E$, maka untuk $x \in A$, $y \in C$ ada kemungkinan:

i. $z = x + y$, di mana $x < 0$, $y < 0$.

ii. $z = x + y$, di mana $x < 0$, $y \geq 0$.

iii. $z = x + y$, di mana $x \geq 0$, $y < 0$.

iv. $z = x + y$, di mana $x \geq 0$, $y \geq 0$.

Andaikan:

a. $E1 = \{ x + y \mid x < 0, y < 0, x \in A, y \in C \}$

b. $E2 = \{ x + y \mid x < 0, y \geq 0, x \in A, y \in C \}$

c. $E3 = \{ x + y \mid x \geq 0, y < 0, x \in A, y \in C \}$

d. $E4 = \{ x + y \mid x \geq 0, y \geq 0, x \in A, y \in C \}$.

Jadi, $z \in E \Leftrightarrow z \in E1$ atau $z \in E2$ atau $z \in E3$ atau $z \in E4$.

$\Leftrightarrow z \in (E1 \cup E2 \cup E3 \cup E4)$

sehingga $E = E1 \cup E2 \cup E3 \cup E4$.

1. Bila $z \in E1$, maka $(\exists x \in A)(\exists y \in C)(x < 0, y < 0)$ $z = x + y$.

Karena $x < 0$, $y < 0$, maka $x + y < 0$. (Teorema L25)

Dengan demikian $z < 0$.

Jadi $(\forall z \in E1)\ z < 0$.

Kesimpulan $E1 \subseteq Q^-$.

2. Bila $z \in E2$, maka

$(\exists\, x \in A)(\exists\, y \in C)(x < 0,\ y \geq 0)\ z = x + y$.

Karena $x < 0$, maka

$$x + y < y \qquad \text{(Teorema L19)}$$

$$z < y. \qquad \text{(substitusi)}$$

Jadi $(\forall\, z \in E2)\ z < y$.

Di samping itu $y \geq 0$, maka $(\exists\, p \in Q)\ 0 < p < y$ (Teorema L29). Akibatnya, $p < y$ (Definisi L14)

$$-y < -p \qquad \text{(Lemma L2)}$$

$$-y + y < -p + y \qquad \text{(Teorema L19)}$$

$$0 < -p + y \qquad \text{(Teorema L10)}$$

tetapi $-p \in A$, karena $-p < 0$ dan $Q^{-} \subset A$.

Jadi $-p + y \in E2$, sehingga $(\exists\, r \in E2)\ r > 0$.

Kesimpulan, $(\forall\, r \in E2)\ r < 0$ atau $0 \leq r < y$.

Dengan demikian, $E2 = Q^{-} \cup \{\, r \mid 0 \leq r < y,\ y \in C \,\}$.

3. Bila $z \in E3$, maka

$(\exists\, x \in A)(\exists\, y \in C)(x \geq 0,\ y < 0))\ z = x + y$.

Karena $y < 0$, maka

$$x + y < x \qquad \text{(Teorema L19)}$$

$$z < x \qquad \text{(substitusi)}$$

jadi $(\forall\, z \in E3)\ z < x$.

Di samping itu, $x \geq 0$, maka $(\exists\, q \in Q)\ 0 < q < x$ (Teorema L29). Akibatnya, $q < x$ (Definisi L14)

$$-x < -q \qquad \text{(Lemma L2)}$$

$$-x + x < -q + x \qquad \text{(Teorema L19)}$$

$$0 < -q + x \qquad \text{(Teorema L10)}$$

tetapi $-q \in C$, karena $-q < 0$.

Jadi $-q + x \in E3$.

Dengan demikian $(\exists\ s \in E3)\ s > 0$.

Kesimpulan, $(\forall\ s \in E3)\ s < 0$ atau $0 \leq s < x$ atau

$E3 = Q^{-} \cup \{\ s \mid 0 \leq s < x,\ x \in A\ \}$.

4. Bila $z \in E4$, maka

$(\exists\ x \in A)(\exists\ y \in C)(x \geq 0,\ y \geq 0)\ z = x + y$.

Karena $x \geq 0$, $y \geq 0$, maka

$x + y \geq y$ (Teorema L35)

$x + y \geq 0$. ($y \geq 0$, Teorema L34)

Jadi $z \geq 0$, sehingga $(\forall\ z \in E4)\ 0 \leq z \leq x + y$.

Sekarang, andaikan $\underline{E2} = \{\ r \mid 0 \leq r < y,\ y \in C\ \}$.

Ambil sebarang $r \in E2$, maka $0 < r < y$.

Di samping itu, ternyata $r \in E4$, karena untuk $x \geq 0$ dan $y \geq 0$,

$y \leq x + y$ (Teorema L35)

sehingga $r < x + y$. (Teorema L21)

Jadi $\underline{E2} \subset E4$.

Andaikan $\underline{E3} = \{\ s \mid 0 \leq s < x,\ x \in A\ \}$.

Ambil sebarang $s \in E3$, maka $0 \leq s < x$.

Ternyata $s \in E4$, karena untuk $x \geq 0$ dan $y \geq 0$, $x \leq x + y$ (Teorema L35) sehingga dengan Teorema L21, $s < x + y$.

Jadi $\underline{E3} \subset E4$.

Dari (1) dan (2), dapat disimpulkan $E1 \subset E2$.

Dari (2) dan (3), dapat disimpulkan $E2 \subset (Q^{-} \cup E4)$.

Dari (3) dan (4), dapat disimpulkan $E3 \subset (Q^{-} \cup E4)$.

Secara keseluruhan disimpulkan,

$z \in E \Leftrightarrow z \in (E1 \cup E2 \cup E3 \cup ,E4)$

$\Leftrightarrow z \in [E1 \cup (Q^{-} \cup \underline{E2}) \cup (Q^{-} \cup \underline{E3}) \cup E4)]$

$\Leftrightarrow z \in [(Q^{-} \cup \underline{E2}) \cup Q^{-} \cup (\underline{E3} \cup E4)]$

$\Leftrightarrow z \in [(Q^{-} \cup \underline{E2}) \cup Q^{-} \cup E4]$

$\Leftrightarrow z \in [Q^{-} \cup Q^{-} \cup \underline{E2} \cup E4]$

$\Leftrightarrow z \in (Q^{-} \cup E4)$.

$E = Q^{-} \cup \{\ x + y \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ x \in A,\ y \in C\ \}$.

Teorema R11. Operasi perkalian pada R^{+} bersifat komutatif, assosiatif, dan distributif terhadap penjumlahan.

Bukti:

Ambil sebarang $(A|B), (C|D), (E|F) \in R^{+}$.

a. $(A|B)(C|D) =$

$(G = Q^{-} \cup \{\ xy \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ x \in A,\ y \in C\ \} |\ Q - G)$ (Definisi R9)

$= (G = Q^{-} \cup \{\ yx \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ x \in A,\ y \in C\ \} |\ Q - G)$ (Teorema L6)

$= (C|D)(A|B)$. (Teorema R9)

b. $\{(A|B)(C|D)\}(E|F) =$

$(G = Q^{-} \cup \{\ xy \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ x \in A,\ y \in C\ \} |\ Q - G)$ $(E|F)$ (Definisi R9)

$= (H = Q^{-} \cup \{(xy)z \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ z > 0,\ x \in A,\ y \in C,$ $z \in E\ \} |\ Q - H)$ (Definisi R9)

$= (H = Q^{-} \cup \{\ x(yz) \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ z > 0,\ x \in A,\ y \in C,$ $z \in E\ \} |\ Q - H)$ (Teorema L6)

$= (A|B)(I = Q^{-} \cup \{\ yz \mid y \geq 0,\ z \geq 0,\ y \in C,\ z \in E\ \} |$ $Q - I)$ (Definisi R9)

$= (A|B)\{(C|D)(E|F)\}$. (Definisi R9)

c. Andaikan $(G|H) = (C|D) + (E|F)$. Maka

$(G|H) = (G = Q^- \cup \{ c + e \mid c \geq 0,\ e \geq 0$, dengan $c \in C$ dan $e \in E\} \mid H = Q - G)$ (Lemma R2)

Ini berarti, $(\forall g \in G)\ [g \geq 0 \Rightarrow (\exists m \in C)(\exists n \in E)(m \geq 0$ dan $n \geq 0)\ g = m + n]$.

Sekarang andaikan $(J|K) = (A|B)(G|H)$, maka

$(J|K) = (J = Q^- \cup \{ aj \mid a \geq 0,\ j \geq 0,\ a \in A$ dan $j \in G\} \mid K = Q - J)$. (Definisi R9)

Karena $j \in G$ dan $j \geq 0$, maka $(\exists k \in C)(\exists l \in E)(k \geq 0$ dan $l \geq 0)\ j = k + l$.

Akibatnya, $(J|K) = (\ J = Q^- \cup \{ a(k + l) \mid a \geq 0,\ k \geq 0,\ l \geq 0,\ a \in A,\ k \in C,\ l \in E\} \mid K)$ (substitusi)

Sehingga dengan Teorema L6, $(J|K) = (\ J = Q^- \cup \{ ak + al \mid a \geq 0,\ k \geq 0,\ l \geq 0,\ a \in A,\ k \in C,\ l \in E\} \mid K)$

Di samping itu,

$(A|B)(C|D) =$

$(M = Q^- \cup \{ac \mid a \geq 0,\ c \geq 0,\ a \in A,\ c \in C\} \mid P = Q - M)$ (Definisi R9)

Ini berarti, menurut Teorema R6, $(M|P) \in R^+$ dan $(\forall p \in M)\ [p \geq 0 \Rightarrow (\exists b \in A)(\exists d \in C)(b \geq 0,\ d \geq 0)\ p = bd$.

$(A|B)(E|F) =$

$(N = Q^- \cup \{ae \mid a \geq 0,\ e \geq 0,\ a \in A,\ e \in E\} \mid T = Q - N)$ (Definisi R9)

Ini berarti, $(N|T) \in R^+$ (Teorema R6) dan $(\forall q \in N)[\ q \geq 0 \Rightarrow (\exists f \in A)(\exists h \in E)(f \geq 0,\ h \geq 0)\ q = fh]$.

Sekarang, karena $(M|P),(N|T) \in R^{+}$, maka menurut Lemma R2, $(M|P) + (N|T) = (S = Q^{-} \cup \{ p + q \mid p \geq 0, q \geq 0, p \in M, q \in N\} \mid Q - S)$

Tetapi karena $p \in M$ dan $p \geq 0$, maka $(\exists\, r \in A)(\exists\, s \in C)(r \geq 0, s \geq 0)\; p = rs$.

Demikian juga, karena $q \in N$ dan $q \geq 0$, maka $(\exists\, r \in A)(\exists\, u \in E)(r \geq 0, u \geq 0)\; q = ru$.

Jadi dengan substitusi, $(S|Q - S) = (Q^{-} \cup \{ rs + ru \mid r \geq 0, s \geq 0, u \geq 0$, dengan $r \in A, s \in C, u \in E\} \mid Q - S)$

Dengan demikian $J = S$.

Dan dengan Definisi R4, $(J|K) = (S|Q - S)$ atau

$(A|B)\{(C|D) + (E|F)\} = (A|B)(C|D) + (A|B)(E|F)$.

Teorema R12. Operasi perkalian pada R bersifat komutatif.

Bukti:

a. Ambil sebarang $(A|B),(C|D) \in R^{+}$, maka

$$(A|B)(C|D) = (C|D)(A|B). \qquad \text{(Teorema R11)}$$

b. Ambil sebarang $(A|B),(C|D) \in R^{-}$, maka

$$\begin{aligned}(A|B)(C|D) &= (-(A|B))(-(C|D)) && \text{(Definisi R9)}\\ &= (-(C|D))(-(A|B)) && \text{(Teorema R11)}\\ &= (C|D)(A|B). && \text{(Definisi R9)}\end{aligned}$$

c. Ambil sebarang $(A|B) \in R^{+}$ dan $(C|D) \in R^{-}$, maka

$$\begin{aligned}(A|B)(C|D) &= -[(A|B)(-(C|D))] && \text{(Definisi R9)}\\ &= -[(-(C|D)(A|B)] && \text{(Teorema R11)}\\ &= (C|D)(A|B). && \text{(Definisi R9)}\end{aligned}$$

d. Untuk $(A|B) \in R^{-}$ dan $(C|D) \in R^{+}$, bukti analog.

Lemma R3. $(\forall\ (A|B),(C|D) \in R^{+})$

$$(A|B)(-(C|D)) = -[(A|B)(C|D)]$$

Bukti:

$$(A|B)(-(C|D)) = -[(A|B)(-(-(C|D)))] \quad \text{(Definisi R9)}$$
$$= -[(A|B)(C|D)]. \quad \text{(Teorema R5)}$$

Teorema R13. Operasi perkalian pada R bersifat assosiatif.

Bukti:

a. Ambil sebarang $(A|B),(C|D),(E|F) \in R^{+}$, maka

$$\{(A|B)(C|D)\}(E|F) = (A|B)\{(C|D)(E|F)\}. \quad \text{(Teorema R11)}$$

b. Ambil sebarang $(A|B),(C|D),(E|F) \in R^{-}$, maka

$$\{(A|B)(C|D)\}(E|F) = \{(-(A|B))(-(C|D))\}(E|F) \quad \text{(Definisi R9)}$$

Karena $(-(A|B))(-(C|D)) \in R^{+}$ (Teorema R10), maka

$$\{(-(A|B))(-(C|D))\}(E|F) =$$
$$-[\{(-(A|B))(-(C|D))\}(-(E|F))] \quad \text{(Definisi R9)}$$
$$= -[(-(A|B))\{(-(C|D))(-(E|F))\}] \quad \text{(Teorema R11)}$$
$$= (-(A|B))[-\{(-(C|D))(-(E|F))\}] \quad \text{(Lemma R3)}$$
$$= (-(A|B))[-\{(C|D)(E|F)\}] \quad \text{(Definisi R9)}$$
$$= -[(-(A|B))\{(C|D)(E|F)\}] \quad \text{(Lemma R3)}$$
$$= (A|B)\{(C|D)(E|F)\}. \quad \text{(Definisi R9)}$$

c. Ambil sebarang $(A|B),(C|D) \in R^{-}$ dan $(E|F) \in R^{+}$, maka

$$-(A|B),-(C|D) \in R^{+}. \quad \text{(Teorema R7)}$$

Dengan demikian

$$\{(A|B)(C|D)\}(E|F) =$$
$$\{(-(A|B))(-(C|D))\}(E|F) \quad \text{(Definisi R9)}$$
$$= (-(A|B))\{(-(C|D))(E|F)\} \quad \text{(Teorema R11)}$$

$= (-(A|B))[-\{((C|D))(E|F)\}]$ (Definisi R9)

$= (A|B)\{(C|D)(E|F)\}.$ (Definisi R9)

d. Ambil sebarang $(A|B),(C|D) \in R^{+}$ dan $(E|F) \in R^{-}$, maka

$-(E|F) \in R^{+}.$ (Teorema R7)

Sehingga,

$\{(A|B)(C|D)\}(E|F) =$

$-[\{(A|B)(C|D)\}(-(E|F))]$ (Definisi R9)

$= -[(A|B)\{(C|D)(-(E|F))\}]$ (Teorema R11)

$= (A|B)[-\{(C|D)(-(E|F))\}]$ (Lemma R3)

$= (A|B)\{(C|D)(E|F)\}.$ (Definisi R9)

Untuk kemungkinan lainnya, bukti analog.

Lemma R4. $(\forall\ (A|B),(C|D) \in R^{-})\ (A|B)(C|D) \in R^{+}$ dan $(A|B) + (C|D) \in R^{-}.$

Bukti:

Ambil sebarang $(A|B),(C|D) \in R^{-}.$

a. $(A|B)(C|D) = [-(A|B)][-(C|D)]$ (Definisi R9)

Menurut Teorema R7, $-(A|B),-(C|D) \in R^{+}$, maka

$[-(A|B)][-(C|D)] \in R^{+}.$ (Teorema R10)

b. $-(A|B) + [-(C|D)] = -[(A|B) + (C|D)]$ (Teorema R8)

Menurut Teorema R6, $-(A|B), -(C|D) \in R^{+}$, maka

$[-(A|B)] + [-(C|D)] \in R^{+}$ (Teorema R10)

$-[(A|B) + (C|D)] \in R^{+}$ (Teorema R8)

$(A|B) + (C|D) \in R^{-}.$ (Teorema R7)

Teorema R14. Operasi perkalian pada R bersifat distributif terhadap penjumlahan.

Bukti:

a. Ambil sebarang $(A|B),(C|D),(E|F) \in R^{+}$, maka

$$(A|B)\{(C|D) + (E|F)\} = (A|B)(C|D) + (A|B)(E|F)$$

(Teorema R11)

b. Ambil sebarang $(A|B),(E|F) \in R^{+}$, $(C|D) \in R^{-}$, dan $(C|D) + (E|F) \in R^{+}$.

$(E|F) = (E|F) + \{(C|D) - (C|D)\}$ (Teorema R4, Teorema R3)

$= \{(C|D) + (E|F)\} + (-(C|D))$

(Teorema R2, Definisi R8)

$(A|B)(E|F) = (A|B)[\{(C|D) + (E|F))\} + (-(C|D))]$

Karena $-(C|D) \in R^{+}$ dan $(C|D) + (E|F) \in R^{+}$, maka

$(A|B)(E|F) = (A|B)\{(C|D) + (E|F)\} + (A|B)\ (-(C|D))$

(Teorema R11)

$= (A|B)\{(C|D) + (E|F)\} + \{-(A|B)(C|D)\}$

(Lemma R3)

Dengan demikian,

$(A|B)(C|D) + (A|B)(E|F) =$

$(A|B)(C|D) + [(A|B)\{(C|D) + (E|F)\} + \{-(A|B)(C|D)\}]$

$= (A|B)\{(C|D) + (E|F)\} + 0^{*}$ (Teorema R2, Teorema R3)

$= (A|B)\{(C|D) + (E|F)\}$. (Teorema R4)

c. Ambil sebarang $(A|B) \in R^{+}$, $(C|D) \in R^{-}$, $(E|F) \in R^{+}$ dan $((C|D) + (E|F)) \in R^{-}$. Maka

$(A|B)\{(C|D) + (E|F)\} = -[(A|B)[-\{(C|D) + (E|F)\}]$

(Definisi R9)

$= -[(A|B)\{(-(C|D)) + (-(E|F))\}$

(Teorema R8)

karena $-\{(C|D) + (E|F)\} = (-(C|D)) + (-(E|F)) \in R^{+}$, maka

$(A|B)\{(C|D) + (E|F)\} =$

$-[(A|B)(-(C|D)) + (A|B)(-(E|F))]$ (Teorema R14.b)

$= -[(A|B)(-(C|D))] + [-\{(A|B)(-(E|F))\}]$ (Teorema R8)

$= (A|B)(C|D) + (A|B)(-(-(E|F)))$

(Definisi R9, Lemma R3)

$= (A|B)(C|D) + (A|B)(E|F).$ (Teorema R5)

d. Ambil sebarang $(A|B) \in R^+$ dan $(C|D),(E|F) \in R^-$, maka

$(C|D) + (E|F) \in R^-$ (Lemma R4)

sehingga

$(A|B)\{(C|D) + (E|F)\} =$

$-[(A|B)[-\{(C|D) + (E|F)\}]]$ (Definisi R9)

$= -[(A|B)\{(-(C|D)) + (-(E|F))\}]$ (Teorema R8)

karena $(-(C|D)),(-(E|F)) \in R^+$,

maka

$(A|B)\{(C|D) + (E|F)\} =$

$-[(A|B)(-(C|D)) + (A|B)(-(E|F))]$ (Teorema R11)

$= -[(A|B)(-(C|D))] + [-\{(A|B)(-(E|F))\}]$ (Teorema R8)

$= (A|B)(C|D) + (A|B)(E|F).$ (Definisi R9)

e. Ambil sebarang $(A|B),(C|D),(E|F) \in R^-$. Maka

$(A|B)\{(C|D) + (E|F)\} =$

$(-(A|B))[-\{(C|D) + (E|F)\}]$ (Definisi R9)

$= (-(A|B))[(-(C|D)) + (-(E|F))]$ (Teorema R8)

$= (-(A|B))(-(C|D)) + (-(A|B))(-(E|F))$

(Teorema R11)

$= (A|B)(C|D) + (A|B)(E|F).$ (Definisi R9)

f. Ambil sebarang $(A|B),(C|D) \in R^-$, $(C|D) + (E|F) \in R^+$.

Maka $(A|B)\{(C|D) + (E|F)\} =$

$-[(-(A|B))\{(C|D) + (E|F)\}]$ (Definisi R9)

$= -[(-(A|B))(C|D) + (-(A|B))(E|F)]$ (Teorema R14.b)

$= (-(A|B))(-(C|D)) + (A|B)(E|F)$

(Lemma R3, Definisi R9)

$= (A|B)(C|D) + (A|B)(E|F).$ (Definisi R9)

g. Ambil sebarang $(A|B),(C|D) \in R^-$, $(C|D) + (E|F) \in R^-$.

Maka $(A|B)\{(C|D) + (E|F)\} =$

$(-(A|B))[-\{(C|D) + (E|F)\}]$ (Definisi R9)

$= (-(A|B))\{(-(C|D)) + (-(E|F))\}$ (Teorema R8)

$= (-(A|B))(-(C|D)) + (-(A|B))(-(E|F))$ (Teorema R14.b)

$= (A|B)(C|D) + [-\{(-(A|B))(E|F)\}]$ (Definisi R9, Lemma R3)

$= (A|B)(C|D) + (A|B)(E|F).$ (Definisi R9)

h. Ambil sebarang $(A|B) \in R^-$ dan $(C|D),(E|F) \in R^+$. Maka

$(A|B)\{(C|D) + (E|F)\} =$

$-[(-(A|B))\{(C|D) + (E|F)\}]$ (Definisi R9)

$= -[(-(A|B))(C|D) + (-(A|B))(E|F)]$ (Teorema R11)

$= -[(-(A|B))(C|D)] + [-\{((A|B))(E|F)\}]$ (Lemma R3)

$= (A|B)(C|D) + (A|B)(E|F).$ (Definisi R9)

i. Andaikan $(A|B) = 0^*$, maka $(\forall\ (C|D),(E|F) \in R)$

$0^*\{(C|D) + (E|F)\} = 0^*$ (Definisi R9)

$= 0^*(C|D) + 0^*(E|F)$

(Definisi R9, Teorema R4)

j. Andaikan $(C|D) = 0^*$, maka $(\forall\ (A|B),(E|F) \in R)$

$(A|B)\{0^* + (E|F)\} = (A|B)(E|F)$ (Teorema R4)

$= 0^* + (A|B)(E|F)$ (Teorema R4)

$= (A|B)0^* + (A|B)(E|F).$ (Definisi R9)

Definisi R10. Elemen-elemen R dengan Definisi R4, Definisi R5, Definisi R9 disebut **bilangan Real**.

Definisi R11. a. $(A|B) < (C|D)$ bila dan hanya bila $A \subset C$, untuk tiap $(A|B),(C|D) \in R$.

b. Bila $(A|B) \leq (C|D)$ bila dan hanya bila $(A|B) < (C|D)$ atau $(A|B) = (C|D)$.

c. $(A|B) \geq (C|D)$ bila dan hanya bila $(C|D) \leq (A|B)$.

Akibatnya, $(\forall\ (A|B) \in R)$

1. $(A|B) \in R^{+} \Leftrightarrow 0^{*} < (A|B)$,
2. $(A|B) \in R^{-} \Leftrightarrow (A|B) < 0^{*}$.

Teorema R15. Untuk setiap $(A|B),(C|D) \in R$, maka satu dan hanya satu di antara pernyataan berikut benar:

a. $(A|B) = (C|D)$,

b. $(A|B) < (C|D)$ dan

c. $(C|D) < (A|B)$.

Bukti:

i. Pembuktian dengan menunjukkan bahwa paling sedikit salah satu dari ketiga pernyataan itu benar.

Andaikan pernyataan (a) dan (b) tidak dipenuhi.

Maka menurut Definisi R4 dan Definisi R11, $A \neq C$ dan $A \not\subset C$. Ini berarti $(\exists\ r \in A)\ r \notin C$.

Jadi, bila $s \in C$, maka $s \leq r$. Sebab, bila $r < s$, maka menurut Definisi R1, $r \in C$, padahal $A \not\subset C$.

Dengan demikian $C \subset A$, sehingga $(C|D) < (A|B)$ (Definisi R11).

ii. Selanjutnya, akan dibuktikan bahwa tidak ada dua pernyataan dari pernyataan (a), (b) dan (c) yang benar sekaligus.

Andaikan pernyataan (a) dan (b) benar, maka menurut Definisi R4 dan Definisi R11, $A = C$ dan $A \subset C$. Ini berarti $C \subset C$ (substitusi).

Pernyataan terakhir ini tidak mungkin terjadi.

Dengan demikian, tidak mungkin pernyataan (a) dan (b) benar sekaligus.

Untuk kemungkinan lain, bukti analog.

Kesimpulan (dari (i) dan (ii)) untuk setiap $(A|B), (C|D) \in R$, satu dan hanya satu dari pernyataan (a), (b) dan (c) yang benar.

D. Bilangan Real Rasional dan Bilangan Real Irrasional

Definisi R12. Untuk setiap $(A|B) \in R$, bila B mempunyai anggota terkecil p, maka $(A|B)$ kita lambangkan dengan $(A_p|B_p)$.

Lemma R5. $(\forall\ (A_p|B_p) \in R)\ -(A_p|B_p) = (A_{(-p)}|B_{(-p)})$.

Bukti:

Ambil sebarang $(A_p|B_p) \in R$, maka $(\forall\ x \in A_p)\ x < p$ (Definisi R12 dan Definisi R1).

Andaikan $-(A_p|B_p) = (C|D)$.

Maka $r \in C$

$\Leftrightarrow p < -r$ (Definisi R6)

$\Leftrightarrow r < -p$ (Lemma L2)

$\Leftrightarrow r \in A_{(-p)}$. (Definisi R12 dan Definisi R1)

Kesimpulan $C = A_{(-p)}$.

Dengan Definisi R4, $(A_{(-p)}|B_{(-p)}) = (C|D)$, sehingga $-(A_p|B_p) = (A_{(-p)}|B_{(-p)})$.

Teorema R16. $(\forall (A_p|B_p),(A_q|B_q) \in R)$

a. $(A_p|B_p) + (A_q|B_q) = (A_{p+q}|B_{p+q})$,

b. $(A_p|B_p)(A_q|B_q) = (A_{pq}|B_{pq})$.

Bukti:

a. Andaikan $(A_p|B_p) + (A_q|B_q) = (A_t|B_t)$, maka $(A_t|B_t) = (A_t = \{ z \mid z = x + y, x \in A_p, y \in A_q \}|B_t = Q - A_t)$ (Definisi R5).

Ambil sebarang $r \in A_t$, maka

$r = u + v$, $u < p$ dan $v < q$ (Definisi R5, Definisi R1)

$u + v < p + q$ (Teorema L32)

$r < p + q$ (substitusi)

$r \in A_{p+q}$. (Definisi R1)

Jadi $A_t \subset A_{p+q}$.

Ambil sebarang $s \in A_{p+q}$, maka $s < p + q$ (Definisi R5, Definisi R1).

Ambil $v \in Q^+$, sedemikian sehingga

$s + v + v = p + q$. (Teorema L18)

Maka $s = (p - v) + (q - v)$ (Teorema L14, Teorema L3) di mana $p - v \in A_p$ dan $q - v \in A_q$ (Definisi R1).

Maka $s \in A_t$, sehingga $A_{p+q} \subset A_t$.

Kesimpulan $A_t = A_{p+q}$.

Dengan Definisi R4, $(A_t|B_t) = (A_{p+q}|B_{p+q})$, sehingga

$$(A_p|B_p)_p + (A_q|B_q) = (A_{p+q}|B_{p+q}).$$

b.(i) Ambil $p = q = 0$. Maka

$$\begin{aligned}(A_p|B_p)(A_q|B_q) &= (A_o|B_o)(A_o|B_o) && \text{(substitusi)}\\ &= 0^*0^* && \text{(Definisi R6)}\\ &= 0^* && \text{(Definisi R9)}\\ &= (A_o|B_o) && \text{(Definisi R6)}\\ &= (A_{oo}|B_{oo}) && \text{(Teorema L11)}\\ &= (A_{pq}|B_{pq}). && \text{(Teorema L11, substitusi)}\end{aligned}$$

Kesimpulan $(A_p|B_p)(A_q|B_q) = (A_{pq}|B_{pq})$

(ii) Ambil $p = 0$ dan $q \in Q$. Maka

$$\begin{aligned}(A_p|B_p)(A_q|B_q) &= (A_o|B_o)(A_q|B_q) && \text{(substitusi)}\\ &= 0^*(A_q|B_q) && \text{(Definisi R6)}\\ &= 0^* && \text{(Definisi R9)}\\ &= (A_o|B_o) && \text{(Definisi R6)}\\ &= (A_{oq}|B_{oq}) && \text{(Teorema L11)}\\ &= (A_{pq}|B_{pq}). && \text{(substitusi)}\end{aligned}$$

Jadi $(A_p|B_p)(A_q|B_q) = (A_{pq}|B_{pq})$

(iii) Andaikan $(A_p|B_p), (A_q|B_q) \in R^+$.

Maka $p > 0$ dan $q > 0$, sehingga $pq > 0$.

Andaikan $(A_t|B_t) = (A_p|B_p)(A_q|B_q)$. Maka

$(A_t|B_t) = (A_t = Q^- \cup \{ rs \mid r \geq 0, s \geq 0, r \in A_p$ dan $s \in A_q \} \mid Q - B_t)$.

Andaikan $r \in A_t$, maka $r \in Q^-$ atau $r \in \{ rs \mid r \geq 0,$

$s \geq 0$, $r \in A_p$ dan $s \in A_q$ }.

Bila $r \in Q^-$, maka $r < 0$.

Karena $pq > 0$, maka $r < pq$. (Teorema L21)

Jadi $r \in A_{pq}$. (Definisi R1 dan Definisi R11).

Bila $r \in \{ rs \mid r \geq 0,\ s \geq 0$ dan $r \in A_p,\ s \in A_q \}$,

maka $r = uv$, dengan $0 \leq u < p$ dan $0 \leq v < q$.

$uv < pq$ (Teorema L31)

$r < pq$ (substitusi)

$r \in A_{pq}$ (Definisi R1, Definisi R11)

jadi, $A_t \subset A_{pq}$.

Andaikan $s \in A_{pq}$, maka ada kemungkinan $s \in Q^-$ atau $s = 0$ atau $0 < s < pq$.

Bila $s \in Q^-$, maka $s \in A_t$. Karena $Q^- \subset A_t$.

Bila $s = 0$, maka $s \in A_t$ sebab $0 \in A_t$.

Andaikan $s \in A_{pq}$ sedemikian sehingga $0 < s < pq$.

Maka $(\exists\ h \in Q^+)\ s + h = pq$. (Teorema L18)

Ini berarti $h < pq$.

Karena $0 < p$, maka menurut Teorema L29, $(\exists\ u \in Q^+)\ 0 < u < p$. Akibatnya menurut Teorema L27, $(\forall\ p,q \in Q^+)\ (\exists\ h,u \in Q^+)(u < p)\ (h < pq) \Rightarrow (\exists\ v \in Q^+)(v < q)\ h = pv + uq - uv$.

$s + pv + uq - uv = pq$ (substitusi)

$s = pq - pv - uq + uv$ (Teorema L14)

$= p(q - v) - u(q - v)$ (Teorema L6)

$= (p - u)(q - v)$. (Teorema L6)

Karena $u,v \in Q^+$ sedemikian sehingga $u < p$ dan $v < q$ maka $p - u \in A_p$, $q - v \in A_q$ dengan

$p - u > 0$ dan $q - v > 0$.

Jadi, $s \in A_t$, dan akibatnya $A_{pq} \subset A_t$.

Dengan demikian $A_t = A_{pq}$.

Dengan Definisi R4, $(A_{pq}|B_{pq}) = (A_t|B_t)$, sehingga

$(A_{pq}|B_{pq}) = (A_p|B_p)(A_q|B_q)$.

Kesimpulan, $(\forall(A_p|B_p),(A_q|B_q) \in R^+)$.

$$(A_p|B_p)(A_q|B_q) = (A_{pq}|B_{pq}).$$

(iv) Bila $(A_p|B_p),(A_q|B_q) \in R^-$, maka

$(A_p|B_p)(A_q|B_q) = (-(A_p|B_p))(-(A_q|B_q))$ (Definisi R8)

$= (A_{(-p)}|B_{(-p)})(A_{(-q)}|B_{(-q)})$ (Lemma R5)

Karena $-(A_p|B_p), -(A_q|B_q) \in R^+$ (Teorema R7), maka

$(A_{(-p)}|B_{(-p)})(A_{(-q)}|B_{(-q)}) = ((A_{(-p)(-q)}|B_{(-p)(-q)})$

(Teorema R15.b.iii)

$= (A_{pq}|B_{pq})$ (Teorema L13)

kesimpulan $(A_p|B_p)(A_q|B_q) = (A_{pq}|B_{pq})$.

(v) Bila $(A_p|B_p) \in R^-$, $(A_q|B_q) \in R^+$, maka

$(A_p|B_p)(A_q|B_q) = -[(-(A_p|B_p))(A_q|B_q)]$ (Definisi R9)

$= -[(A_{(-p)}|B_{(-p)})(A_q|B_q)$. (Lemma R5)

Karena $-(A_p|B_p) \in R^+$, maka

$-[(A_{(-p)}|B_{(-p)})(A_q|B_q) = -(A_{(-p)q}|B_{(-p)q})$

(Teorema R15.b.iv)

$= -(A_{(-(pq))}|B_{(-(pq))})$ (Teorema L13)

$= (A_{pq}|B_{pq})$. (Lemma R5)

Kesimpulan, $(A_p|B_p)(A_q|B_q) = (A_{pq}|B_{pq})$.

(vi) Bila $(A_p|B_p) \in R^+$ dan $(A_q|B_q) \in R^-$, maka

$(A_p|B_p)(A_q|B_q) = -[(A_p|B_p)(-(A_q|B_q))]$ (Definisi R9)

$= -[(A_p|B_p)(A_{(-q)}|B_{(-q)})]$ (Lemma R5)

$= -(A_{(-(pq))}|B_{(-(pq))})$

(Teorema L13 dan Teorema R15.b.iii)

$= (A_{pq}|B_{pq})$. (Lemma R5)

Kesimpulan $(\forall\ (A_p|B_p),(A_q|B_q) \in R)(\forall\ p,q \in Q)$

$(A_p|B_p)(A_q|B_q) = (A_{pq}|B_{pq})$.

Teorema R17. Sistem $\mathbb{R} = (R1,+,.)$, dengan $R1 = \{ (A_p|B_p) \in R\}$, dan sistem bilangan rasional $\mathbb{Q}$ adalah isomorfis relatif terhadap operasi penjumlahan dan perkalian serta relasi ketidaksamaan.

Bukti:

Andaikan $R1 = \{ (A_p|B_p) \in R\}$ dan Q adalah himpunan semua bilangan rasional.

Perhatikan fungsi $f : R1 \to Q$ yang didefinisikan oleh $f((A_p|B_p)) = p$, untuk setiap $(A_p|B_p) \in R1$. Akan dibuktikan bahwa f didefinisikan secara betul dan bijektif.

a. Ambil sebarang $p,q \in Q$.

Andaikan $p < q$, maka $p \in A_q$ (Definisi R12, Definisi R1), tetapi $p \notin A_p$ (Definisi R12, Definisi R1).

Di samping itu, ambil sebarang $x \in A_p$, maka $x < p$.

Akibatnya $x < q$, sehingga $x \in A_q$.

Kesimpulan $A_p \subset A_q$.

Dengan Definisi R11, $(A_p|B_p) < (A_q|B_q)$.

Dengan demikian $(\forall\ p,q \in Q)[\ p < q \Rightarrow (A_p|B_p) < (A_q|B_q)]$.

Jadi menurut Teorema R15,

$$(\forall\ p,q \in Q)[p \neq q \Rightarrow (A_p|B_p) \neq (A_q|B_q)]$$

b. Ambil sebarang $(A_p|B_p),(A_q|B_q) \in R1$.

Andaikan $(A_p|B_p) < (A_q|B_q)$, maka $A_p \subset A_q$, sehingga

$$(\exists\ s \in A_q)\ s \not\in A_p \qquad \text{(Definisi R11)}$$

Maka $p \leq s$. (Definisi R12, Definisi R1)

Karena $s \in A_q$, maka

$$s < q \qquad \text{(Definisi R12, Definisi R1)}$$

jadi $p < q$. (Teorema L34)

Dengan demikian $(\forall\ p,q \in Q)[(A_p|B_p) < (A_q|B_q) \Rightarrow p < q\ ]$.

Jadi, menurut Teorema R15

$$(\forall\ p,q \in Q)[(A_p|B_p) \nless (A_q|B_q) \Rightarrow p \nless q]$$

c. Ambil sebarang $p \in Q$, maka

$$(\exists\ (A_p|B_p) \in R1)\ p = f((A_p|B_p))$$

Kesimpulan, fungsi $f : R1 \rightarrow Q$ merupakan fungsi yang didefinisikan secara betul dan bijektif.

d. Selanjutnya ambil sebarang $(A_p|B_p),(A_q|B_q) \in R$. Maka

$$f((A_p|B_p) + (A_q|B_q)) = f(A_{p+q}|B_{p+q})) \qquad \text{(Teorema R15)}$$

$$= p + q \qquad \text{(Definisi f)}$$

$$= f((A_p|B_p) + f((A_q|B_q) \qquad \text{(Definisi f)}$$

$$f((A_p|B_p)(A_q|B_q)) = f((A_{pq}|B_{pq})) \qquad \text{(Teorema R15)}$$

$$= pq \qquad \text{(Definisi f)}$$

$$= f((A_p|B_p))f((A_q|B_q)). \qquad \text{(Definisi f)}$$

Kesimpulan, sistem $\mathbb{R}$ dan sistem bilangan rasional adalah isomorfis relatif terhadap operasi penjumlahan dan perperkalian serta relasi ketidaksamaan.

Dengan demikian, kedua sistem tersebut mempunyai struktur yang sama, sehingga setiap elemen dari R1 dapat diganti dengan elemen dari Q yang bersesuaian. Karena $R1 \subset R$, maka $Q \subset R$. Dengan demikian, sistem bilangan real dapat dipandang sebagai perluasan dari sistem bilangan rasional.

Definisi R13. Bila $(A|B) \in R$ adalah potongan jenis (b), maka $(A|B)$ disebut **bilangan real rasional**; dan bila $(A|B) \in R$ jenis (c), maka $(A|B)$ disebut **bilangan real irrasional**.

BAB VI

SISTEM BILANGAN ASLI DENGAN POSTULAT PEANO

A. Postulat-postulat Peano

Giuseppe Peano (1858 - 1932) adalah ahli matematika pertama yang mengembangkan sistem bilangan asli dengan mengambil lima buah postulat dan lambang-lambang primitif (tidak terdefinisikan). Lambang-lambang primitif itu adalah " ′ ", dan " 1 ".

Misalkan A adalah suatu himpunan. Lima postulat Peano itu adalah sebagai berikut:

P1: $1 \in A$.

P2: $(\forall x \in A)(\exists!\ x' \in A)$.

P3: $(\forall x \in A)(x' \neq 1)$.

P4: $(\forall x, y \in A)(x' = y' \Rightarrow x = y)$.

P5 (Postulat Induksi Matematika): Bila $G \subseteq A$, sedemikian sehingga:

(a) $1 \in G$,

(b) $n \in G \Rightarrow n' \in G$, $\forall n \in G$,

maka $G = A$.

Anggota-anggota A disebut bilangan asli.

Lambang x' dibaca "suksesor dari x".

Kelima postulat Peano ini masing-masimg mempunyai maksud tertentu. Postulat P1 menjamin bahwa $A \neq \emptyset$; P2 bahwa 1 bukan suksesor bilangan asli manapun; P4 maksudnya adalah jika $x \neq y$ maka $x' \neq y'$.

B. Operasi Penjumlahan

Definisi. (Definisi Penjumlahan).

F1. $1 + y = y'$, $\forall\, y \in A$.

F2. $\forall\, x \in A$, jika

G1. $x + 1 = x'$,

G2. $x + y' = (x + y)'$, $\forall\, y \in A$,

maka $x' + y = (x + y)'$, $\forall\, y \in A$.

Lemma E1. G1 dan G2 berlaku untuk setiap $x \in A$.

Bukti:

Andaikan M adalah himpunan semua bilangan asli yang dilengkapi dengan operasi penjumlahan. Operasi ini didefinisikan oleh F1 dan F2 serta bersifat G1 dan G2 untuk setiap $x \in M$.

(i) $1 \in M$, karena

$$1 + 1 = 1' \qquad \text{(F1)}$$

memenuhi sifat G1, untuk $x = 1$; dan

$$\begin{aligned} 1 + b' &= (b')' && \text{(F1)} \\ &= (1 + b)' && \text{(F1 dan P2)} \end{aligned}$$

memenuhi sifat G2, untuk $x = 1$.

(ii) Andaikan $x \in M$. Jadi untuk $x \in A$ terdapat sifat:

D1. $x + 1 = x'$, dan

D2. $x + y' = (x + y)'$, untuk setiap $y \in A$.

Jadi,

$$x' + 1 = (x + 1)' \quad \text{(F2)}$$
$$= (x')' \quad \text{(D1)}$$

memenuhi sifat G1 untuk x'; kemudian untuk $x' \in A$,

$$x' + y' = (x + y')' \quad \text{(F2)}$$
$$= ((x + y)')' \quad \text{(D2)}$$
$$= (x' + y)' \quad \text{(F2 dan P2)}$$

memenuhi sifat G2, untuk $y \in A$.

Maka, $x' \in M$. Dengan P5, $M = A$.

Kesimpulan, operasi penjumlahan bersifat G1 dan G2 untuk setiap $x,y \in A$.

Lemma E2. $(\forall\ x,y \in A)\ x' + y = (x + y)'$.

Bukti:

Ambil sebarang $x,y \in A$. Maka untuk tiap $x,y \in A$

$x + 1 = X'$ dan $x + y' = (x + y)'$. (Lemma E1)

Jadi, $(x,y \in A)\ x' + y = (x + y)'$. (F2)

Teorema E1. Operasi penjumlahan didefinisikan secara betul (well defined), bersifat tertutup dan hasil operasinya tunggal.

Bukti:

a. Definisi penjumlahan didefinisikan secara betul.

(i) Andaikan $b = \underline{b}$

dan $M = \{\ a \in A \mid a + b = a + \underline{b}\ \}$.

I. $1 \in M$, karena

$$1 + b = b' \quad \text{(F1)}$$

$= \underline{b}'$ (asumsi, P2)

$= 1 + \underline{b}$. (F1)

II. Jika $a \in M$ maka $a + b = a + \underline{b}$. Jadi

$a' + b = (a + b)'$ (Lemma E2)

$= (a + \underline{b})'$ (asumsi, P2)

$= a' + \underline{b}$. (Lemma E2)

Maka $a' \in M$. Dengan P5, $M = A$.

(ii) Andaikan $a = \underline{a}$ dan

$M = \{ b \in A \mid a + b = \underline{a} + b \}$.

I. $1 \in M$, karena

$1 + a = a'$ (F1)

$= \underline{a}'$ (asumsi, P2)

$= 1 + \underline{a}$. (F1)

II. Andaikan $b \in M$, sehingga $a + b = \underline{a} + b$. Maka

$a + b' = (a + b)'$ (Lemma E1)

$= (\underline{a} + b)'$ (asumsi, P2)

$= \underline{a} + b'$. (Lemma E1)

Jadi $a' \in M$. Dengan P5, maka $M = A$.

Kesimpulan, jika $a = \underline{a}$ dan $b = \underline{b}$, karena (i) dan (ii), maka $a + b = a + \underline{b} = \underline{a} + \underline{b}$, sehingga operasi penjumlahan dalam A didefinisikan secara betul.

b. Andaikan $M = \{ y \in A \mid (\forall x \in A)\ (x + y) \in A \}$.

Ambil sebarang $x \in A$. Maka

$1 \in A$, karena

$x + 1 = x'$ (G1)

dan $x' \in A$ (P2)

jadi, $(x + 1) \in A$.

Andaikan $y \in A$, maka $(x + y) \in A$. Akibatnya,

$$(x + y)' \in A. \qquad \text{(P2)}$$

Di samping itu,

$$x + y' = (x + y)' \qquad \text{(G2)}$$

Ini berarti $(x + y') \in A$. Kesimpulan $y' \in M$

Dan dengan P5, $M = A$.

Jadi operasi penjumlahan pada A bersifat tertutup.

c. Andaikan $M = \{ y \in A \mid (\forall x \in A)\ \exists!\ (x + y) \in A \}$.

Ambil sebarang $x \in A$. Maka

$1 \in A$, karena

$$x + 1 = x' \qquad \text{(G1)}$$

dan $(\forall x \in A)\ \exists!\ x' \in A$ (P2)

sehingga $\exists!\ (x + 1) \in A$.

Andaikan $y \in A$, maka $\exists!\ (x + y) \in A$.

Karena $(x + y) \in A$, maka

$$\exists!\ (x + y)' \in A. \qquad \text{(P2)}$$

Padahal $(x + y)' = x + y'$ (G2)

maka $\exists!\ (x + y') \in A$.

Jadi $y' \in M$. Dengan P5, $M = A$.

Kesimpulan, hasil penjumlahan adalah tunggal.

Teorema E2. Sifat asosiatif terhadap penjumlahan:

$$(\forall x,y,z \in A)\ (x + y) + z = x + (y + z)$$

Bukti:

Andaikan $M = \{ z \in A \mid (\forall x,y \in A)\ (x + y) + z = x + (y + z)\}$.

I. Ambil sebarang $x,y \in A$.

Maka

$$(x + y) + 1 = (x + y)' \quad \text{(G1)}$$
$$= x + y' \quad \text{(G2)}$$
$$= x + (y + 1). \quad \text{(G1)}$$

Kesimpulan, $1 \in M$.

II. Andaikan $z \in M$, berarti $(x + y) + z = x + (y + z)$, untuk setiap $x,y \in A$.

Maka

$$(x + y) + z' = [(x + y) + z]' \quad \text{(G2)}$$
$$= [x + (y + z)]' \quad \text{(asumsi)}$$
$$= x + (y + z)' \quad \text{(G2)}$$
$$= x + (y + z'). \quad \text{(G2)}$$

Jadi, $z' \in M$, untuk setiap $x,y \in A$.

Dengan P5, $M = A$. Jadi penjumlahan bersifat assosiatif.

Lemma E3. $(\forall\ x \in A)\ x + 1 = 1 + x$.

Bukti:

Andaikan $M = \{\ x \in A \mid 1 + x = x + 1\ \}$.

Maka

$$1 + 1 = 1 + 1 \quad \text{(subsitusi)}$$

jadi, $1 \in M$.

Andaikan $x \in A$, berarti $1 + x = x + 1$.

Maka

$$1 + x' = (1 + x)' \quad \text{(G2)}$$
$$= (x + 1)' \quad \text{(asumsi)}$$
$$= (x + 1) + 1 \quad \text{(G1)}$$
$$= x' + 1. \quad \text{(G1)}$$

Jadi, $x' \in M$. Kesimpulan $M = A$.

Teorema E3. Sifat komutatif terhadap penjumlahan:

$$(\forall\ x,y \in A)\ x + y = y + x.$$

Bukti:

Andaikan $M = \{\ x \in A \mid (\forall\ y \in A)\ x + y = y + x\ \}$.

Ambil sebarang $y \in A$.

Maka

$$1 + y = y + 1. \qquad \text{(lemma E3)}$$

Jadi, $1 \in M$.

Andaikan $x \in M$, berarti $x + y = y + x$, untuk tiap $y \in A$.

Maka untuk tiap $y \in A$:

$$\begin{aligned} x' + y &= (x + 1) + y && \text{(G1)} \\ &= x + (1 + y) && \text{(Teorema E2)} \\ &= x + (y + 1) && \text{(Lemma E3)} \\ &= (x + y) + 1 && \text{(Teorema E2)} \\ &= (x + y)' && \text{(G1)} \\ &= (y + x)' && \text{(asumsi)} \\ &= y + x'. && \text{(G2)} \end{aligned}$$

Jadi $x' \in M$.

Dengan P5, $M = A$. Jadi penjumlahan bersifat komutatif.

Teorema E4. Sifat kanselasi terhadap penjumlahan:

$$(\forall\ x,y,z \in A)\ z + x = z + y \Rightarrow x = y.$$

Bukti:

Andaikan $M = \{\ z \in A \mid (\forall\ x,y \in A)\ z + x = z + y \Rightarrow x = y\ \}$.

Ambil sebarang $x,y \in A$, sedemikian sehingga

$$1 + x = 1 + y.$$

Maka

$$x' = y'. \qquad (F1)$$

Sehingga $x = y$. (P4)

Jadi $1 \in M$.

Andaikan $z \in M$, berarti $W: z + x = z + y \Rightarrow x = y$, untuk tiap $x,y \in A$.

Untuk tiap $x,y \in A$, andaikan:

$$z' + x = z' + y,$$

maka $(z + x)' = (z + y)'$ (Lemma E2)

sehingga $z + x = z + y$ (P4)

$x = y$. (W)

Berarti $z' \in M$.

Kesimpulan, dengan P5, $M = A$, berarti kanselasi terhadap penjumlahan berlaku pada A.

Teorema E5. $(\forall\ x,n \in A)\ x + n \neq n$.

Bukti:

Andaikan $M = \{\ n \in A \mid (\forall\ x \in A)\ x + n \neq n\ \}$

Ambil sebarang $x \in A$.

Maka

$$x + 1 = x' \qquad (G1)$$

$$\neq 1. \qquad (P3)$$

Jadi, $1 \in M$.

Andaikan $n \in M$, sehingga $x + n \neq n$, untuk tiap $x \in A$.

Maka untuk tiap $x \in A$,

$$x + n' = (x + n)'. \qquad \text{(G2)}$$

Kesimpulan $(x + n)' \neq n'$ (P4).

Jadi, $n' \in M$. Kesimpulan $M = A$.

Teorema E6. $(\forall\ x \in A \text{ dan } x \neq 1)\ (\exists\ w \in A)\ x = w + 1$.

Bukti:

Andaikan $G = \{1\} \cup \{\ x \in A \mid (\exists\ w \in A)\ x = w + 1\ \}$.

I. $1 \in G$.

II. Andaikan $x \in G$, berarti

$$x = 1 \text{ atau } (\exists\ v \in A)\ x = v + 1.$$

Andaikan $x = 1$, maka

$$x' = x + 1 \qquad \text{(G1)}$$

$$= 1 + 1. \qquad \text{(substitusi)}$$

Jadi, $x' \in G$, karena $(\exists\ w \in A \text{ dan } w = 1)\ x' = w + 1$.

Andaikan $x = v + 1$ dengan $v \in A$, maka

$$x' = x + 1 \qquad \text{(G1)}$$

$$= (v + 1) + 1 \qquad \text{(substitusi)}$$

berarti $(\exists\ w \in A \text{ dan } w = v + 1)\ x' = w + 1$.

Jadi, $x' \in G$.

Dengan P5, $G = A$.

Kesimpulan, bila $x \neq 1$, maka $(\ \exists\ w \in A\ )\ x = w + 1$.

Teorema E7. Untuk setiap $x, y \in A$, satu dan hanya satu pernyataan berikut ini benar:

(a) $x = y$,

(b) $(\exists\ u \in A)\ x + u = y$,

(c) $(\exists\ v \in A)\ x = y + v$.

Bukti:

I. Andaikan $x = 1$.

(i) Andaikan $y = 1$, maka $x = y$ berarti pernyataan (a) benar.

(ii) Andaikan $y \neq 1$, maka

$$(\exists\, u \in A)\ y = u + 1 \qquad \text{(Teorema E6)}$$
$$= u + x \qquad \text{(substitusi } x = 1\text{)}$$
$$= x + u. \qquad \text{(Teorema E3)}$$

Jadi, pernyataan (b) benar.

Kesimpulan, untuk $x = 1$ dan untuk setiap $y \in A$, ada satu dari ketiga pernyataan itu benar.

II. Andaikan $x \neq 1$, berarti

$$(\exists\, v \in A)\ x = v + 1. \qquad \text{(Teorema E6)}$$

Ambil $G = \{\, y \in A \mid$ ada satu dari tiga pernyataan di atas ((a), (b), (c)) benar untuk $y \,\}$

(i) Andaikan $y = 1$, maka

$$x = v + 1$$
$$= v + y \qquad \text{(substitusi)}$$
$$= y + v. \qquad \text{(Teorema E3)}$$

Berarti, pernyataan (c) benar untuk $y = 1$. Jadi $1 \in G$.

(ii) Andaikan $y \in G$.

1. Andaikan pernyataan (a) benar untuk y, sehingga $x = y$, maka

$$y' = y + 1 \qquad \text{(G1)}$$
$$= x + 1 \qquad \text{(substitusi)}$$

berarti

$$(\exists\, u \in A \text{ dan } u = 1)\ x + u = y'.$$

Jadi pernyataan (b) benar untuk y' sehingga $y' \in G$.

2. Andaikan pernyataan (b) benar untuk y, sehingga $(\exists\, u \in A)\ x + u = y$, maka

$$\begin{aligned} y' &= y + 1 && \text{(G1)} \\ &= (x + u) + 1 && \text{(substitusi)} \\ &= x + (u + 1) && \text{(Teorema E2)} \end{aligned}$$

berarti

$$(\exists\, w \in A \text{ dan } w = u + 1)\ x + w = y'.$$

Jadi pernyataan (b) benar untuk y' sehingga $y' \in G$.

3. Andaikan pernyataan (c) benar, maka $(\exists\, x \in A)$ $x = y + v$.

Jika $v = 1$, maka $x = y + 1 = y'$ (G1).

Berarti, pernyataan (a) benar untuk y'. Jadi $y' \in G$.

Jika $v \neq 1$, maka $(\exists\, w \in A)\ v = w + 1$ (Teorema E7). Jadi apabila

$$x = y + v,$$

maka

$$\begin{aligned} x &= y + (w + 1) && \text{(substitusi)} \\ &= y + (1 + w) && \text{(Teorema E3)} \\ &= (y + 1) + w && \text{(Teorema E2)} \\ &= y' + w. && \text{(G1)} \end{aligned}$$

Maka, pernyataan (c) benar untuk y', sehingga $y' \in G$.

Kesimpulan dari (i) dan (ii):

a. $1 \in G$,

b. $y \in G \Rightarrow y' \in G$,

maka, dengan P5, $G = A$, berarti untuk setiap $y \in A$ dan untuk tiap $x \neq 1$, salah satu dari ketiga pernyataan itu benar.

Selanjutnya, akan dibuktikan bahwa tidak ada dua pernyataan dari pernyataan (a), (b) dan (c) yang benar sekaligus.

Andaikan pernyataan (a) dan (b) benar untuk $\forall\ x,y \in A$.

Maka $x = y$ dan $x + u = y$, dengan $u \in A$.

Ini berarti $x + u = x$ (substitusi).

Dengan demikian pernyataan ini kontradiksi dengan Teorema E5.

Jadi tidak mungkin terdapat pernyataan (a) dan (b) sekaligus benar.

Untuk kemungkinan-kemungkinan lain, buktinya analog.

Kesimpulan (dari I dan II) untuk setiap $x,y \in A$, satu dan hanya satu dari pernyataan (a), (b) dan (c) yang benar.

C. <u>Operasi Perkalian</u>

Definisi. Definisi operasi perkalian.

H1. $(\forall\ y \in A)\ 1y = y$.

H2. $(\forall\ x \in A)$ jika

K1. $x1 = x$, dan

K2. $xy' = xy + x$, $\forall\, y \in A$

maka $x'y = xy + y$, $\forall\, y \in A$.

Lemma E4. K1 dan K2 berlaku untuk setiap $x \in A$.

Bukti:

Andaikan M himpunan bilangan asli x yang memenuhi K1 dan K2.

(i) Maka $1 \in M$, karena

$$1 * 1 = 1 \qquad \text{(H1)}$$

memenuhi sifat K1 untuk $x = 1$, dan

$$\begin{aligned} 1y' &= y' && \text{(H1)} \\ &= y + 1 && \text{(G1)} \\ &= 1y + 1 && \text{(H1)} \end{aligned}$$

memenuhi sifat K2, untuk $x = 1$.

(ii) Andaikan $x \in M$, maka

W1. $x1 = x$,

W2. $xy' = xy + x$, untuk setiap $y \in A$.

Jadi,

$$\begin{aligned} x'1 &= x1 + 1 && \text{(H2)} \\ &= x + 1 && \text{(W1)} \\ &= x' && \text{(G1)} \end{aligned}$$

memenuhi sifat K1 untuk x'; kemudian

$$\begin{aligned} x'y' &= xy' + y' && \text{(H2)} \\ &= (xy + x) + y' && \text{(W2)} \\ &= (xy + x) + (y + 1) && \text{(G1)} \\ &= xy + y + x + 1 && \text{(Teorema E2, Teorema E3)} \\ &= x'y + x' && \text{(H2 dan G1)} \end{aligned}$$

memenuhi sifat K2 untuk x'.

Maka $x' \in M$.

Dengan P5, $M = A$. Kesimpulan, operasi perkalian bersifat K1 dan K2 untuk setiap $x, y \in A$.

Lemma E5. $(\forall\ x \in A)\ x'y = xy + y$.

Bukti:

Ambil sebarang $x \in A$. Maka

$x1 = x$ dan $xy' = xy + x,\ \forall\ y \in A$. (Lemma E4)

Sehingga $x'y = xy + y$ (H2)

untuk setiap $y \in A$.

Teorema E8. Operasi perkalian didefinisikan secara betul, bersifat tertutup dan hasil operasi perkalian adalah tunggal.

Bukti:

a. Operasi perkalian didefinisikan secara betul.

(i) Andaikan $a = \underline{a}$, dan $M = \{\ b \in A \mid ab = \underline{a}b\ \}$

$1 \in M$, karena

$a1 = a$ (K1)

$= \underline{a}$ (substitusi)

$= \underline{a}1$ (K1)

Andaikan $b \in M$, sehingga $ab = \underline{a}b$, maka

$ab' = ab + a$ (K2)

$= \underline{a}b + \underline{a}$ (asumsi, substitusi)

$= \underline{a}b'$. (K2)

Jadi $b' \in M$. Dengan P5, $M = A$.

(ii) Andaikan $b = \underline{b}$, dan $M = \{ a \in A \mid ab = a\underline{b} \}$.

$1 \in M$, karena

$$1b = b \qquad (H1)$$
$$= \underline{b} \qquad (\text{substitusi})$$
$$= 1\underline{b}. \qquad (H1)$$

Andaikan $a \in M$, sehingga $ab = a\underline{b}$, maka

$$a'b = ab + b \qquad (\text{Lemma E5})$$
$$= a\underline{b} + \underline{b} \qquad (\text{asumsi, substitusi})$$
$$= a'\underline{b} \qquad (\text{Lemma E5})$$

Jadi $a' \in M$. Dengan P5, $M = A$.

Dari (i) dan (ii) disimpulkan bahwa

jika $a = \underline{a}$ dan $b = \underline{b}$, maka $ab = a\underline{b} = \underline{a}\,\underline{b}$.

Jadi operasi perkalian didefinisikan secara betul.

b. Andaikan $M = \{ y \in A \mid (\forall x \in A)\ xy \in A \}$.

Ambil sebarang $x \in A$. Maka $x1 = x$ (K1).

Jadi $x1 \in A$, sehingga $1 \in M$.

Andaikan $y \in M$, maka $xy \in A$, untuk $\forall x \in A$.

Jadi, untuk tiap $x \in A$

$$xy' = xy + x \qquad (K2)$$

dan menurut pengandaian, $xy \in A$ dan $x \in A$, maka

$$xy + x \in A \qquad (\text{Teorema E1})$$

sehingga $xy' \in A$.

Ini berarti, $y' \in M$. Dengan P5, $M = A$.

Kesimpulan, operasi penjumlahan bersifat tertutup.

c. Andaikan $M = \{ y \in A \mid (\forall x \in A)\ \exists!\ xy \in A \}$.

Ambil sebarang $x \in A$. Maka

$$x1 = x \qquad (K1)$$

$\exists!\ x1 \in A$.

Jadi $1 \in M$.

Andaikan $y \in M$, maka untuk tiap $x \in A$, $\exists!\ xy \in A$.

Maka untuk setiap $x \in A$,

$xy' = xy + x$ (K2)

$\exists!\ xy \in A$ (asumsi)

$\exists!\ xy + x \in A$ (Teorema E1)

sehingga $\exists!\ xy' \in A$, dan berarti $y' \in M$. Jadi $M = A$.

Teorema E9. Sifat distributif perkalian terhadap penjumlahan: $(\forall\ x,y,z \in A)\ z(x + y) = zx + zy$.

Bukti:

Andaikan $M = \{\ z \in A \mid (\forall\ x,y \in A)\ z(x + y) = zx + zy\ \}$

Ambil sebarang $x,y \in A$.

Maka

$1(x + y) = x + y$ (H1)

$= 1x + 1y$. (H1)

Jadi, $1 \in M$.

Andaikan $z \in M$, sehingga $z(x + y) = zx + zy$, untuk setiap $x,y \in A$. Maka

$z'(x + y) = z(x + y) + (x + y)$ (Teorema E5)

$= (zx + zy) + (x + y)$ (substitusi)

$= [(zx + zy) + x] + y$ (Teorema E2)

$= [zx + (zy + x)] + y$ (Teorema E2)

$= [zx + (x + zy)] + y$ (Teorema E3)

$= [(zx + x) + zy] + y$ (Teorema E2)

$= (zx + x) + (zy + y)$ (Teorema E2)

$= z'x + z'y.$ (Teorema E5)

Jadi $z' \in M$, untuk $x,y \in A$.

Kesimpulan, $M = A$. Jadi sifat distributif perkalian terhadap penjumlahan berlaku pada A.

Teorema E10. Operasi perkalian pada A bersifat assosiatif, yaitu: $(\forall\ x,y,z \in A)\ (xy)z = x(yz)$.

Bukti:

Andaikan $G = \{ z \in A \mid (\forall\ x,y \in A)\ (xy)z = x(yz) \}$.

Ambil sebarang $x,y \in A$. Maka

$$\begin{aligned} (xy)1 &= xy && \text{(K1)} \\ &= x(y1). && \text{(K1)} \end{aligned}$$

Jadi $1 \in G$.

Andaikan $z \in G$, sehingga $(xy)z = x(yz)$, untuk setiap $x,y \in A$. Maka

$$\begin{aligned} (xy)z' &= (xy)z + xy && \text{(K2)} \\ &= x(yz) + xy && \text{(substitusi)} \\ &= x(yz + y) && \text{(Teorema E9)} \\ &= x(yz'). && \text{(K2)} \end{aligned}$$

Jadi $z' \in G$, untuk setiap $x,y \in A$.

Kesimpulan $G = A$, berarti operasi perkalian pada A bersifat assosiatif.

Lemma E6. $(\forall\ x \in A)\ x1 = 1x$.

Bukti :

Andaikan $G = \{ x \in A \mid x1 = 1x \}$.

Maka

$$1 * 1 = 1 * 1.$$

Jadi $1 \in G$.

Andaikan $x \in G$, sehingga $x1 = 1x$, maka

$$x'1 = x' \qquad \text{(K1)}$$

$$= 1x'. \qquad \text{(H1)}$$

Jadi $x' \in G$.

Kesimpulan $G = A$, sehingga $(\forall x \in A)\ x1 = 1x$.

Teorema E11. Perkalian pada A bersifat komutatif.

Bukti:

Andaikan $G = \{ y \in A \mid (\forall x \in A)\ xy = yx \}$.

Ambil sebarang $x \in A$.

Maka

$$x1 = 1x. \qquad \text{(Lemma E6)}$$

Jadi, $1 \in G$.

Andaikan $y \in G$, sehingga $xy = yx$, untuk setiap $x \in A$.

Maka untuk tiap $x \in A$:

$$xy' = xy + x \qquad \text{(K2)}$$

$$= yx + x \qquad \text{(substitusi)}$$

$$= y'x. \qquad \text{(Lemma E5)}$$

Jadi, $y' \in G$.

Kesimpulan $G = A$.

Berarti, operasi perkalian pada A bersifat komutatif.

Teorema E12. Sifat kanselasi terhadap perkalian:

$$(\forall x, y, z \in A)\ zx = zy \Rightarrow x = y.$$

Bukti:

Andaikan $M = \{ x \in A \mid (\forall y,z \in A)\ zx = zy \Rightarrow x = y \}$.

I. Ambil $x = 1$, maka

a. Untuk $z = 1$ dan sebarang $y \in A$. Bila $zx = zy$, maka

$$1 * 1 = 1y, \text{ sehingga}$$

$$1 = y.$$

Kesimpulan $x = y$.

b. Untuk $z \neq 1$ akan dibuktikan bahwa $x = y$ dengan cara kontraposisi yaitu bila $y \neq 1$ maka $z \neq zy$.

Andaikan $y \neq 1$. Karena $z \neq 1$ dan $y \neq 1$, maka, menurut Teorema E6 $(\exists\, p \in A)\ z = p + 1$ dan $(\exists\, r \in A)\ y = r + 1$.

$$\begin{aligned} zy &= (p + 1)(r + 1) && \text{(substitusi)} \\ &= (p + 1)r + (p + 1)1 && \text{(Teorema E9)} \\ &= (p + 1)r + (p + 1) && \text{(K1)} \\ &= (p + 1)r + z. && \text{(substitusi)} \end{aligned}$$

Di samping itu,

$$(p + 1)r + z \neq z \qquad \text{(Teorema E5)}$$

$$zy \neq z. \qquad \text{(substitusi)}$$

Kesimpulan $1 \in M$.

II. Andaikan $x \in M$ sehingga $(\forall\, z,y \in A)\ zx = zy \Rightarrow x = y$.

a. Ambil $z = 1$, maka untuk setiap $y \in A$, bila $zx' = zy$ maka

$$1x' = 1y \qquad \text{(substitusi)}$$

$$x' = y. \qquad \text{(H1)}$$

Jadi $x' \in M$.

b. Ambil $z \neq 1$,

(i) Untuk $y = 1$.

Pembuktian dengan menunjukkan bahwa anteseden dari pernyataan itu, $zx' = zy$, salah ($zx' \neq zy$) sehingga pernyataan itu sendiri menjadi benar.

Menurut sifat G1

$zx' = z(x + 1)$

$= zx + z.$ (Teorema E9)

Di samping itu,

$zy = z1$ (substitusi)

$= z.$ (K1)

Juga selain itu,

$zx + z \neq z$ (Teorema E5)

maka $zx' \neq zy.$ (substitusi)

(ii) Untuk $y \neq 1$, $(\exists\, r \in A)\ y = r + 1$.

Pembuktian dengan menunjukkan bahwa bila $zx' = zy$ benar maka $x' = y$.

Ambil $zx' = zy$, maka

$zx' = z(r + 1)$ (substitusi)

$zx' = zr + z$ (Teorema E9)

$z(x + 1) = zr + z$ (G1)

$zx + z = zr + z$ (Teorema E9)

$zx = zr$ (Teorema E4)

$x = r$ (asumsi)

$x' = r'$ (P2)

$x' = r + 1$ (G1)

$x' = y.$ (substitusi)

Jadi, $x' \in M$.

Maka, dengan P5, $(\forall\, x,y,z \in A)\ zx = zy \Rightarrow x = y$.

Dari sistem bilangan asli berdasarkan postulat Peano, kita dapat membangun sistem bilangan bulat, kemudian sistem bilangan rasional dan akhirnya sistem bilangan real.

Pada karangan ini, konstruksi sistem-sistem bilangan berdasarkan postulat Peano ini tidak dibicarakan. Sistem bilangan asli berdasarkan postulat Peano dibahas di sini untuk menunjukkan ekuivalensi antara sistem postulat Peano dengan sistem delapan postulat.

BAB VII

HIMPUNAN POSTULAT UNTUK SISTEM BILANGAN ASLI

A. Sifat-sifat Himpunan Postulat dari Suatu Sistem matematika

Tentang himpunan postulat dari suatu sistem matematika, kita dapat membicarakan empat sifat, yaitu: ekuivalen, konsisten, independen, lengkap. Sifat pertama (ekuivalen) berlaku untuk dua himpunan postulat, sedang sifat-sifat yang lain berlaku untuk sebuah himpunan postulat.

1. Ekuivalen.

Dua himpunan postulat dari suatu sistem matematika S1 dan S2 disebut **ekuivalen**, bila lambang-lambang primitif pada S1 dapat didefinisikan dengan lambang-lambang primitif dari S2 dan sebaliknya, dan postulat-postulat pada S1, dapat diturunkan dari postulat-postulat S2, dan sebaliknya.

2. Konsisten.

Suatu himpunan postulat dikatakan **konsisten** bila dari himpunan postulat itu tidak dapat diturunkan suatu kontradiksi, yaitu suatu pernyataan dan sekaligus ingkarannya. Sifat ini merupakan sifat yang paling penting

3. Independen.

Suatu postulat dari himpunan postulat disebut independen, jika postulat tersebut tidak dapat diturunkan dari postulat lain dalam himpunan postulat tersebut; himpunan postulat disebut **independen** bila masing-masing postulat dari himpunan postulat itu independen.

4. Lengkap.

Suatu himpunan postulat dikatakan **lengkap** bila tidak mungkin menambahkan suatu postulat baru yang independen dan konsisten dengan postulat-postulat semula, tanpa menambah lambang-lambang primitif yang baru.

B. <u>Ekuivalensi antara Postulat Peano dengan Delapan Postulat Sistem Bilangan Asli</u>

Postulat Peano dan delapan postulat terdahulu merupakan postulat-postulat untuk mendefinisikan sistem bilangan asli. Hal yang menarik adalah bahwa Postulat Peano dan delapan postulat terdahulu adalah dua himpunan postulat yang ekuivalen.

Kita awali dengan menunjukkan bahwa Postulat Peano dapat diturunkan dari delapan postulat. Lambang-lambang primitif dari Postulat Peano dapat didefinisikan dari lambang-lambang primitif delapan postulat itu.

Ambil N himpunan bilangan asli yang didefinisikan dengan delapan postulat, dengan dua operasi biner, penjumlahan dan perkalian.

Lambang " ′ " merupakan lambang primitif pada Postulat Peano, yang dalam sistem dengan delapan postulat didefinisikan dengan lambang primitif " + " (lihat Definisi N3).

Menurut postulat N6, ada sebuah elemen dalam N, yang diberi lambang " 1 ", sedemikian sehingga a1 = a, untuk $\forall$ a $\in$ N. Lambang " 1 " tersebut yang diambil sebagai lambang primitif " 1 " dalam sistem Postulat Peano.

Pada Postulat Peano, ada lima postulat untuk mendefinisikan sistem bilangan asli, yaitu P1, P2, P3, P4 dan P5 (lihat Bab VI). Ternyata kelima postulat ini merupakan teorema-teorema atau postulat pada sistem dengan delapan postulat. P1, yang menjamin bahwa N $\neq \emptyset$, diturunkan dari postulat N6. P2, P3 dan P4 dibuktikan berturut-turut sebagai Teorema N17, Teorema N15 dan Teorema N13. Dan P5 merupakan postulat juga pada sistem dengan delapan postulat (Postulat N8).

Kemudian, bila kita kembali ke Bab II dan Bab VII maka kita bisa menarik kesimpulan, bahwa lambang-lambang primitif dari sistem dengan delapan postulat dapat didefinisikan dengan lambang-lambang primitif dari Postulat Peano dan delapan postulat pada Bab II itu dapat dibuktikan dari Postulat-postulat Peano.

Lambang-lambang primitif dalam sistem dengan delapan postulat, yaitu " + " dan " * ", merupakan lambang yang didefinisikan dari lambang primitif dalam Postulat

Peano (lihat Definisi penjumlahan dan Definisi perkalian pada bab VI).

Postulat N1 sampai dengan Postulat N7 merupakan teorema-teorema dalam sistem dengan Postulat Peano, yaitu berturut-turut Teorema E3, Teorema E2, Teorema E11, Teorema E10, Teorema E9, Lemma E4, dan Teorema E7. Sedangkan N8, dalam Postulat Peano, juga merupakan postulat (P5).

BAB VIII
KESIMPULAN

Matematika adalah ilmu deduktif, yaitu kita berangkat dari postulat-postulat dan istilah-istilah yang tidak didefinisikan dan kemudian dibuktikan teorema-teorema.

Hal ini nampak jelas pada saat kita memperluas sistem bilangan asli sehingga diperoleh sistem bilangan bulat, kemudian sistem bilangan bulat diperluas menjadi sistem bilangan rasional dan akhirnya sistem bilangan rasional diperluas menjadi sistem bilangan real. Kita berangkat dari delapan postulat beserta istilah-istilah yang tidak didefinisikan untuk sistem bilangan asli, dan akhirnya diperoleh sistem bilangan real tanpa menambah postulat lain.

Rangkaian perluasan dari sistem bilangan asli sampai sistem bilangan real dapat digambarkan dengan suatu skema:

$$\mathbb{N} \to \mathbb{I} \to \mathbb{Q} \to \mathbb{R},$$

dengan $\mathbb{N}$ adalah sistem bilangan asli, $\mathbb{I}$ sistem bilangan bulat, $\mathbb{Q}$ sistem bilangan rasional, dan $\mathbb{R}$ sistem bilangan real. Apabila himpunan semua bilangan asli kita nyatakan dengan N, himpunan bilangan bulat dengan I, Q sebagai himpunan bilangan rasional, dan R sebagai himpunan bilangan real, maka hubungan antara himpunan-himpunan ter-

$$N \subset I \subset Q \subset R.$$

Di dalam membangun suatu sistem bilangan, ada berbagai macam himpunan postulat yang dapat dipakai sebagai dasar. Himpunan-himpunan postulat yang ekuivalen akan menghasilkan sistem bilangan yang strukturnya sama. Hal itulah yang terjadi pada saat kita membangun sistem bilangan asli. Kita boleh membangun sistem bilangan asli atas dasar delapan postulat, boleh juga atas dasar Postulat Peano, sebab kedua himpunan postulat tersebut adalah ekuivalen.

DAFTAR PUSTAKA

Beaumont, Ross A. dan Pierce, Richard S.
1963 The Algebraic Foundations of Mathematics. London: Addison - Wesley Publishing Company.

Evans, Jcqueline P.
1970 Mathematics: Creations and Study of Form. London: Addison - Wesley Publishing Company.

Eves, Howard dan Newson, Carrol V.
1964 An Introduction to The Foundations and Fundamental Concepts of Mathematics. New York: Holt, Rinehart dan Winston.

Freund, John E.
1959 A Modern Introduction to Mathematics. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice - Hall, Inc.

Hudojo, Herman dan As'ari, Abdurrahman serta Yuwono, Ipung dan Supeno, Imam.
1991/1992 Pendidikan Matematika II. Jakarta: Departemen Pendidikan dan Kebudayaan, Direktorat Jenderal Pendidikan Tinggi, Proyek Pembinaan Tenaga Kependidikan.

Landau, Edmund.
1951 Foundations of Analysis. New York: Chelsea Publishing Company.

Marpaung, Y.
1990 Struktur Aljabar I. Yogyakarta: IKIP Sanata Dharma.

Naga, Dali S.
1980 Berhitung. Sejarah dan Pengembangannya. Jakarta: P.T. Gramedia.

Rudin, Walter.
1976 Principles of Mathematical Analysis. Ed. ke-3 New York: McGraw - Hill Book Company.

Soehakso, RJMT.
Aljabar Abstrak. Yogyakarta: FMIPA, UGM.

Soehakso, RJMT.
1982 Himpunan Relasi dan Fungsi. Yogyakarta: FMIPA, UGM.

Stewart, B.M.
1952 Theory of Numbers. New York: The MacMillan Company.

Sukirman, MP.
1987 Pengantar Ilmu Bilangan. Yogyakarta: FPMIPA, IKIP Yogyakarta.

Wahyudin.
1989 Aljabar Modern. Bandung: Tarsito.

Webber, G. Cuthbert.
1966 Number Systems of Analysis. London: Addison - Wesley Publishing Company.

Wilder, Raymond L.
1965 *Introduction The Foundations of Mathematics.* London: John Wiley and Sons Inc.

Wirasto.
1981 *Matematika SD untuk Orang Tua Murid dan Guru.* Jakarta: P.T. Indira.