HIMPUNAN KABUR
DAN PENERAPANNYA DALAM
TEORI KONTROL

Skripsi

Oleh :
Eko Budi Santoso
NIM : 88 414 005
NIRM : 88 005201050112 0004

Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan
Universitas Sanata Dharma
Yogyakarta
1995

S k r i p s i

Himpunan Kabur

Dan Penerapannya Dalam

Teori Kontrol

Oleh

Eko Budi Santoso

NIM : 88 414 005

NIRM : 88 005201050112 0004

telah disetujui oleh

Pembimbing I

Drs. Y. Eka Priyatma, M.Sc. tanggal ....

Pembimbing II

Dr. F. Susilo , SJ tanggal ....

S k r i p s i

Himpunan Kabur

Dan Penerapannya Dalam

Teori Kontrol

yang dipersiapkan dan disusun oleh

Eko Budi Santoso

NIM : 88 414 005

NIRM : 88 005201050112 0004

telah dipertahankan di depan Panitia Penguji

pada tanggal 29 Mei 1995

dan telah memenuhi syarat

Susunan Panitia Penguji

	Nama lengkap	Tanda tangan
Ketua	Dr. St. Suwarsono	....
Sekretaris	Dr. Y. Marpaung	....
Anggota	Dr. F. Susilo, SJ.	....
Anggota	Drs. A. Tutoyo, MSc.	....
Anggota	Drs. Y. Eka Piyatma, MSc.	....

Yogyakarta, 30 Juni 1995

Fakultas Keguruan Dan Ilmu Pendidikan

Universitas Sanata Dharma

Dekan

Priyono Marwan

Dr. A. Priyono Marwan, SJ.

KATA PENGANTAR

Sripsi berjudul **Himpunan Kabur dan Penerapannya Dalam Teori Kontrol** ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat mencapai gelar sarjana Pendidikan Matematika.

Banyak kesulitan yang dihadapi penulis mulai sejak pemilihan topik hingga selesainya skripsi ini. Seluruh proses penulisan skripsi ini, dengan berbagai macam kesulitannya, merupakan latihan bagi penulis untuk menulis karya ilmiah.

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Bapak Dr. St. Suwarsono, selaku Ketua Jurusan Pendidikan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Universitas Sanata Dharma, yang telah mengijinkan penulis untuk menyelesaikan skripsi ini.

Banyak terima kasih penulis ucapkan kepada Bapak J. Eka Priyatma, M.Sc. , selaku pembimbing I yang dengan sabar dan bijaksana telah medampingi penulis dalam proses penulisan skripsi ini, juga kepada Rama Dr. F. Susila, SJ. selaku pembimbing II yang telah memberikan dorongan bagi penulis untuk menyelesaikan skripsi ini.

Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari sempurna. Oleh karena itu penulis sangat mengharapkan saran dan kritik untuk perbaikan skripsi ini.

Penulis

Daftar Isi

DAFTAR TABEL

Tabel Halaman

DAFTAR GAMBAR

ABSTRAK

Himpunan kabur $\tilde{A}$ merupakan himpunan semua anggota semesta S berikut fungsi keanggotaannya. Fungsi keanggotaan menunjukkan seberapa jauh derajat kesesuaian elemen tersebut terhadap himpunan kabur $\tilde{A}$. Karena keanggotaan dalam himpunan kabur dinyatakan dengan menggunakan fungsi keanggotaan, maka operasi-operasi maupun konsep-konsep dasar dalam himpunan kabur juga dinyatakan dengan menggunakan fungsi keanggotaan tersebut.

Ukuran posibilitas dan ukuran nesesitas merupakan ukuran-ukuran ketidakpastian yang dipergunakan untuk menentukan nilai kebenaran suatu pernyataan kabur. Karena itu, nilai kebenaran suatu pernyataan kabur tidak lagi hanya 0 dan 1 (dwi nilai), melainkan tak berhingga banyak nilai. Salah satu penarikan kesimpulan dengan menggunakan pernyataan-pernyataan kabur adalah modus ponens yang digeneralisai. Penarikan kesimpulan ini merupakan pengembangan dari penarikan kesimpulan pada logika klasik.

Kontrol kabur merupakan sistem kontrol yang saat ini sedang berkembang dengan pesat. Perkembangan yang pesat itu tentu saja dipengaruhi oleh kelebihan kontrol kabur dibanding dengan kontrol konvensional. Kelebihan itu antara lain karena kontrol kabur menerima masukan (input) berupa kondisi-kondisi yang tidak tegas (kabur). Selain itu, model matematika kontrol kabur lebih mudah dibuat dibanding dengan model matematika kontrol konvensinal. Hal itu disebabkan karena fokus perhatian kontrol kabur adalah tingkah laku operator manusia. Tingkah laku operator manusia tersebut diterjemahkan dalam bentuk aturan-aturan yang digunakan untuk mengontrol sistem. Aturan-aturan tersebut berbentuk "Jika ..... maka .... ".

Salah satu bagian penting dalam kontrol kabur yang

disebut juga kontrol logika kabur adalah unit penghitungan. Bagian ini mempunyai tugas melakukan evaluasi terhadap kondisi sistem yang dikontrol. Input-input yang diumpankan pada unit penghitungan merupakan himpunan kabur. Output unit penghitungan yang akan dipakai dalam aksi kontrol juga merupakan himpunan kabur.

BAB I

PENDAHULUAN

A. Latar Belakang Masalah

Sejak Lotfi A. Zadeh mempublikasikan makalahnya yang berjudul himpunan kabur (*Fuzzy Sets*), dua puluh lima tahun yang lalu, teori himpunan kabur telah menarik banyak perhatian para peneliti dalam berbagai bidang pengetahuan. Para peneliti sangat tertarik dengan teori tersebut karena teori tersebut sangat erat hubungannya dengan kehidupan sehari-hari terutama untuk keadaan-keadaan yang mempunyai sifat ragu-ragu (ambigu), yaitu keadaan yang tidak dapat diklasifikasikan secara tegas dan jelas.

Dalam teori himpunan sederhana (*Ordinary Sets* atau *Simple Sets*), suatu obyek hanya mempunyai dua kondisi, obyek tersebut adalah anggota himpunan atau bukan. Konsep ini tidak dapat diterapkan untuk keadaan-keadaan yang bersifat ragu-ragu. Sebagai contoh didefinisikaan himpunan buku tebal. Buku yang mempunyai empat halaman jelas bukan anggota himpunan tersebut. Buku yang mempunyai 1000 halaman merupakan anggota himpunan karena buku tersebut adalah buku yang tebal. Bagaimana status keanggotaan untuk buku yang mempunyai 250 halaman. Apakah buku ini termasuk buku yang tebal? Ada orang yang menganggap buku yang mempunyai 250 halaman merupakan buku yang tebal, ada pula yang mengatakan sebaliknya. Terhadap masalah ini teori himpunan sederhana tidak dapat memberikan pemecahan yang memuaskan.

Karena teori himpunan sederhana tidak dapat merepresentasikan situasi yang bersifat ragu-ragu, Lotfi A. Zadeh mengemukakan teori himpunan kabur yaitu suatu kelas atau kelompok di mana setiap anggota mempunyai derajat keanggotaan (*grades of membership*) tertentu. Derajat keanggotaan suatu obyek biasanya terletak dalam interval tertutup [0,1]. Jika suatu obyek bukan anggota suatu himpunan, maka obyek tersebut mempunyai derajat keanggotaaan 0 terhadap himpunan tersebut. Sebaliknya jika suatu obyek merupakan anggota suatu himpunan, maka obyek tersebut mempunyai derajat keanggotaan 1.

Dalam kehidupan sehari-hari banyak dijumpai masalah-masalah yang memuat kekaburan (keragu-raguan). Model Matematika dan metoda klasik yang mencoba menyelesaikan masalah tersebut harus memperhatikan beberapa aspek dasar sehingga masalah yang memuat kekaburan (*fuzzyness*) tersebut seolah-olah tidak memuat kekaburan (keragu-raguan). Ternyata jika masalah-masalah tersebut diselesaikan berdasarkan teori himpunan kabur, masalah-masalah tersebut akan lebih mudah untuk diselesaikan.

Bidang-bidang yang dapat menjadi lahan garapan bagi teori himpunan kabur antara lain kecerdasan buatan dan robot, pengolahan bayangan (*image procesing*), ilmu-ilmu biologi dan medis, kontrol, dan aplikasi riset operasi. Beberapa teori yang semula tidak mengenal kekaburan saat ini sudah dikembangkan menjadi teori yang melibatkan kekaburan. Teori tersebut antara lain teori logika kabur (*fuzzy logic*), teori permainan kabur (*Fuzzy Games Theory*), Program linear kabur, Teori kontrol kabur (*Fuzzy Control Theory*), Teori graf kabur, dan Optimalisasi dalam situasi yang kabur (*Optimalization in a Fuzzy Environment*).

Salah satu aplikasi teori himpunan kabur dan logika kabur yang saat ini berkembang dengan cepat adalah konrol kabur. Perkembangan yang pesat tersebut sangat berkaitan dengan kecenderungan otomatisasi dalam sektor industri dan transportasi. Contoh aplikasi pada dunia industri adalah kontrol kabur yang dipakai dalam pembuatan semen (*klinker*). Sedangkan contoh aplikasi pada sektor transportasi adalah kontrol kabur pada kereta api di kota Senday, Jepang. Kontrol kabur juga dipergunakan untuk kontrol pada kamera video, mesin cuci, dan juga AC (*Air Conditioner*).

Alat-alat yang bekerja berdasarkan teori himpunan kabur dan logika kabur dapat bekerja sebagaimana layaknya manusia. Artinya, prinsip kerja dan juga masukkan (*input*) pada kontrol kabur tersebut sama dengan prinsip kerja dan masukkan untuk pengontrol manusia. Hal inilah yang merupakan salah satu kelebihan kontrol kabur dibandingkan dengan kontrol yang konvensional.

B. Rumusan Masalah

Masalah yang akan dibahas dalam skripsi ini adalah:

1. Himpunan Kabur, meliputi definisi, konsep-konsep dasar, dan operasi-operasi dasar pada himpunan kabur.
2. Ukuran-ukuran kabur yang terdiri dari Ukuran Posibilitas dan ukuran Nesesitas.
3. Variabel bahasa.
4. Logika kabur, termasuk penarikan kesimpulan dengan premis-premis yang kabur.
5. Kontrol kabur.

C. Metode Penelitian

Untuk membahas masalah-masalah tersebut, penulis menggunakan metoda penelitian kepustakaan.

D. Manfaat Penelitian

Bagi penulis, penelitian ini dapat memberikan pengetahuan baru tentang teori himpunan kabur dan penerapannya dalam teori kontrol. Hasil penelitian ini juga dapat memberikan pengetahuan baru bagi para pembaca.

E. Ruang Lingkup

Skripsi ini tidak akan membahas semua pembicaraan yang berkaitan dengan teori himpunan kabur. Definisi atau teorema yang akan dibahas hanya yang berkaitan dengan logika kabur dan aplikasinya pada teori kontrol.

Meskipun skripsi ini akan membahas tentang teori kontrol kabur, tetapi skripsi ini hanya akan membatasi pembahasan teori kontrol kabur dari segi matematikanya saja. Dalam skripsi ini tidak akan dibahas mengenai perangkat keras untuk teori kontrol tersebut. Pembahasan perangkat kerasnya sangat tergantung pada sistem yang dikontrol dan hal itu menjadi wewenang ahli pada ilmu yang bersangkutan.

Dalam skripsi ini, teori kontrol yang konvensional tidak akan dibahas secara panjang lebar. Andaikan hal itu disinggung, tujuannya hanya sebagai bahan perbandingan saja.

BAB II

Himpunan Kabur

A. Definisi Himpunan Kabur

Andaikan A merupakan himpunan dalam semesta S. Untuk menyatakan bahwa s merupakan anggota A digunakan lambang "$\in$" dan ditulis $s \in A$. Jika s bukan anggota A maka akan ditulis $s \notin A$. Himpunan A biasanya disajikan dengan mendaftar anggota-anggotannya, misal $A = \{a, b, c\}$, atau dengan menyebutkan syarat keangotaannya, misal

$$A = \{ s \mid 2s < 10, s \in \mathbb{R} \}.$$

Cara lain untuk menyajikan himpunan A adalah dengan menggunakan fungsi karakteristik μ_A yang didefinisikan dengan:

$$\mu_A(s) = \begin{cases} 1 & , s \in A \\ 0 & , s \notin A \end{cases}$$

Fungsi karakteristik μ_A mengawankan setiap elemen S ke anggota himpunan $M = \{0, 1\}$. Himpunan M disebut himpunan keanggotaan.

Himpunan A yang disajikan dengan menggunakan fungsi karakteristik mempunyai bentuk:

$$A = \{ (s, \mu_A(s)) \mid s \in S \}$$

Agar penyajiannya menjadi ringkas, jika $\mu_A(s) = 0$ maka $(s, \mu_A(s))$ tidak perlu di daftar dalam himpunan A.

Contoh 2.1 Diberikan semesta $S = \{a, b, c, d, e\}$

Jika $A = \{b, c, d\}$ maka himpunan A dapat juga dinyatakan seperti berikut:

$A = \{ (a, 0), (b., 1), (c, 1), (d, 1), (e, 0)\}$

Supaya ringkas, himpunan A cukup ditulis menjadi $A = \{(b, 1), (c, 1), (d, 1)\}$

Contoh 2.2 Diberikan semesta $S = \mathbb{R}$

Jika $A = \{ s \mid -1 < s \leq 4, s \in \mathbb{R} \}$ maka himpunan A dapat juga dinyatakan seperti berikut:

$A = \{ (s, \mu_A(s)) \mid s \in \mathbb{R} \}$ dengan fungsi karakteristik

$$\mu_A(s) = \begin{cases} 0 & \text{untuk } s \leq -1 \\ 1 & \text{untuk } -1 < s \leq 4 \\ 0 & \text{untuk } s > 4 \end{cases}$$

Berikut ini akan dibahas konsep himpunan yang baru yang diberi nama **Himpunan Kabur** (*Fuzzy Set*). Beberapa penulis buku menyebutnya sebagai himpunan samar. Letak perbedaan antara kedua konsep himpunan adalah yang berkaitan dengan keanggotaan suatu elemen. Dalam konsep himpunan yang lama, jika $s \in A$ maka s benar-benar seratus persen anggota himpunan A. Jika $s \notin A$ maka s benar-benar seratus persen bukan anggota himpunan A. Himpunan kabur sangat mungkin mempunyai anggota yang tidak seratus persen. Jika s merupakan anggota himpunan kabur $\tilde{A}$ maka s mempunyai **tingkat keanggotaan** (*grade of membership*) tertentu. Biasanya nilai tingkat keanggotaan suatu elemen berkisar dari 0 sampai 1. Jika tingkat keanggotaannya 0 maka elemen tersebut benar-benar bukan anggota himpunan kabur $\tilde{A}$. Jika tingkat keanggotaannya 1 maka elemen tersebut benar-benar seratus persen anggota himpunan kabur $\tilde{A}$. Karena dalam konsep himpunan yang lama ada perbedaan yang tegas antara anggota himpunan A dan bukan anggota himpunan A maka selanjutnya himpunan A disebut sebagai **himpunan tegas** (*crips set*).

Tingkat keanggotaan suatu elemen dinyatakan dengan nilai **fungsi keanggotaan** (*membership function*) $\mu_{\tilde{A}}$. Fungsi keanggotaan dalam himpunan kabur memetakan setiap elemen S ke **himpunan keanggotaan** M. Daerah hasil fungsi keanggotaan merupakan himpunan bilangan real positif dengan supremum berhingga. Untuk menyederhanakan pembicaraan, himpunan keanggotaan biasanya diambil interval tertutup [0, 1]. Definisi formal himpunan kabur diberikan dibawah ini.

Definisi 2.1. Diberikan himpunan semesta S.

Himpunan kabur $\tilde{A}$ dalam S adalah himpun- an pasangan urut $(s, \mu_{\tilde{A}}(s)) \mid s \in S$, ditulis $\tilde{A} = \{(s, \mu_{\tilde{A}}(s)) \mid s \in S\}$, $\mu_{\tilde{A}}$ merupakan **fungsi keanggotaaan** dari himpunan kabur $\tilde{A}$. Fungsi keanggotaan $\mu_{\tilde{A}}$ memetakan setiap elemen S ke himpunan M. Daerah hasil fungsi keanggotaan merupakan himpunan bilangan real positif dengan supremum berhingga. Elemen-elemen yang mempunyai tingkat keanggotaan nol tidak perlu di tulis.

Contoh 2.3 Diberikan himpunan semesta

$$S = \{ 5 \leq s \leq 15 \mid s \in \mathbb{N} \}$$

Jika didefinisikan himpunan kabur $\tilde{A}$ yang merupakan himpunan bilangan-bilangan dalam S yang dekat dengan 10, maka himpunan kabur $\tilde{A}$ tersebut misalnya dapat berupa:

$\tilde{A}$ = { (7, 0,1), (8, 0,5), (9, 0,8), (10, 1), (11, 0,8), (12, 0,5), (13, 0,1)}

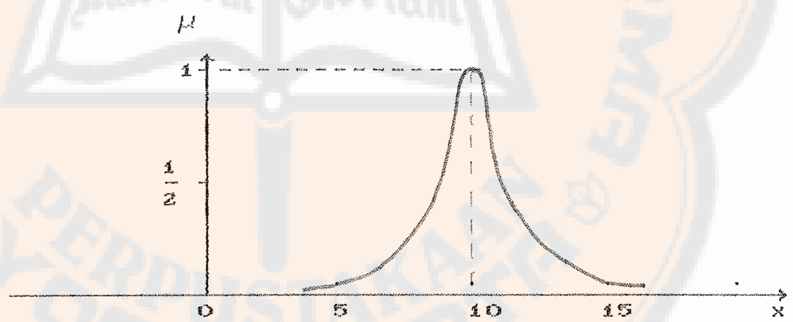
Contoh 2.4 Diberikan himpunan semesta $S = \mathbb{R}$ = {bilangan real}.

Jika didefinisikan himpunan kabur $\tilde{A}$ yang merupakan himpunan bilangan-bilangan real yang dekat dengan 10, maka himpunan kabur $\tilde{A}$ misalnya dapat berupa:

$$\tilde{A} = \{ (s, \mu_{\tilde{A}}(s)), s \in \mathbb{R} \}$$

$$\text{dengan } \mu_{\tilde{A}}(s) = \frac{1}{1 + [(s - 10)]^2}$$

Jika himpunan tegas dapat direpresentasikan dengan menggunakan diagram Venn, maka himpunan kabur dapat direpresentasikan dengan menggunakan grafik fungsi keanggotaannya. Dengan demikian himpunan kabur $\tilde{A}$ dalam contoh 2.4 di atas direpresentasikan dengan grafik seperti pada gambar 2.1 berikut.



Gambar 2.1

himpunan bilangan-bilangan yang dekat 10

Definisi 2.2. Andaikan $\tilde{A}$ merupakan himpunan kabur dalam semesta S dengan fungsi keanggotaan $\mu_{\tilde{A}}$. **Support** himpunan kabur $\tilde{A}$ adalah himpunan tegas dalam semesta S yang memuat semua anggota S yang derajat keanggotaannya dalam himpunan kabur $\tilde{A}$ lebih dari nol.

$$\text{Supp } \tilde{A} = \{s \in S \mid \mu_{\tilde{A}}(s) > 0\}$$

Definisi 2.3 Andaikan $\tilde{A}$ merupakan himpunan kabur dalam semesta S dengan fungsi keanggotaan $\mu_{\tilde{A}}$. **Tinggi himpunan kabur** $\tilde{A}$ (*height of* $\tilde{A}$) adalah batas atas terkecil $\mu_{\tilde{A}}(s)$

$$\text{hgt } (\tilde{A}) = \sup \{\mu_{\tilde{A}}(s) \mid s \in S\}$$

Definisi 2.4 Andaikan $\tilde{A}$ merupakan himpunan kabur dalam semesta S dengan fungsi keanggotaan $\mu_{\tilde{A}}$. Himpunan kabur $\tilde{A}$ disebut **normal** bila dan hanya bila $(\exists s \in S)\ \mu_{\tilde{A}}(s) = 1$

Definisi 2.5 Andaikan $\tilde{A}$ merupakan himpunan kabur dalam semesta S dengan fungsi keanggotaan $\mu_{\tilde{A}}$. **Inti** (*core*) atau **puncak** (*peak*) himpunan kabur $\tilde{A}$ adalah himpunan tegas dalam S yang didefinisikan dengan

$$\bar{A} = \{ s \in S \mid \mu_{\tilde{A}}(s) = 1 \}$$

Definisi 2.6 Andaikan $\tilde{A}$ merupakan himpunan kabur dalam semesta S dengan fungsi keanggotaan $\mu_{\tilde{A}}$. **Himpunan tingkat-α** (α-*level set*) adalah himpunan tegas dalam S yang didefinisikan dengan:

$$A_\alpha = \{ s \in S \mid \mu_{\tilde{A}}(s) \geq \alpha \}$$

Contoh 2.5 Lihat contoh 2.3.

Jika diberikan himpunan kabur $\tilde{A}$ seperti pada contoh 2.3 di atas, maka

$A_{0,5} = \{ 8, 9, 10, 11, 12 \}$

Definisi 2.7 Andaikan $\tilde{A}$ merupakan himpunan kabur dalam semesta S dengan fungsi keanggotaan $\mu_{\tilde{A}}$. **Himpunan tingkat-α yang kuat** (*strong α-level*) adalah himpunan tegas dalam semesta S yang didefinisikan dengan:

$$A_{\bar{\alpha}} = \{ s \in S \mid \mu_{\tilde{A}}(s) > \alpha \}$$

Contoh 2.6 Lihat contoh 2.3 di atas.

Jika diberikan himpunan kabur yang didefinisikan dalam contoh 2.3, maka

$A_{\overline{0,5}} = \{ 9, 10, 11 \}$

Berdasarkan definisi 2.6 di atas, definisi *support* himpunan kabur dapat dinyatakan sebagai himpunan tingkat-0 yang kuat atau

$$\text{Supp}(\tilde{A}) = A_{\bar{0}}$$

Inti atau puncak pada definisi 2.5 di atas dapat juga dinyatakan sebagai himpunan tingkat-1 atau

$$\bar{A} = A_1$$

B. Operasi-operasi Sederhana Dalam Himpunan Kabur

Seperti halnya dalam konsep himpunan tegas, dalam himpunan kabur juga dikenal hubungan dan operasi antar himpunan. Lambang dan operator yang digunakan untuk menyatakan hubungan dan operasi antar himpunan dalam himpunan kabur sama dengan yang digunakan pada himpunan tegas. Karena himpunan kabur dinyatakan dengan menggunakan fungsi keanggotaan maka definisi hubungan dan operasi antar himpunan pada himpunan kabur juga dinyatakan dengan menggunakan fungsi keanggotaan.

Definisi 2.8 Andaikan $\tilde{A}$ merupakan himpunan kabur dalam semesta S dengan fungsi keanggotaan $\mu_{\tilde{A}}$. Himpunan kabur $\tilde{A}$ dikatakan **himpunan kosong** bila dan hanya bila $(\forall s \in S)\ \mu_{\tilde{A}}(s) = 0$

Definisi 2.9 Andaikan $\tilde{A}$ merupakan himpunan kabur dalam semesta S dengan fungsi keanggotaan $\mu_{\tilde{A}}$. **Komplemen** himpunan kabur $\tilde{A}$, ditulis $\tilde{A}'$, adalah himpunan kabur yang mempunyai fungsi keanggotaan

$$\mu_{\tilde{A}'}(s) = 1 - \mu_{\tilde{A}}(s),\ \forall s \in S.$$

Contoh 2.7 Andaikan $S = \{s_1, s_2, s_3, s_4\}$ merupakan himpunan semesta dan $\tilde{A} = \{(s_1, 0{,}4), (s_2, 0{,}2), (s_4, 1)\}$ adalah himpunan kabur dalam S. Komplemen himpunan kabur $\tilde{A}$ adalah $A' = \{(s_1, 0{,}6), (s_2, 0{,}8), (s_3, 1)\}$

Definisi 2.10 Andaikan $\tilde{A}$ dan $\tilde{B}$ merupakan himpunan kabur dalam semesta S dengan fungsi keanggotaan masing-masing $\mu_{\tilde{A}}$ dan $\mu_{\tilde{B}}$.

Himpunan kabur $\tilde{A}$ dikatakan **termuat** dalam himpunan kabur $\tilde{B}$, ditulis $\tilde{A} \subseteq \tilde{B}$, bila dan hanya bila

$$(\forall s \in S)\ \mu_{\tilde{A}}(s) \leq \mu_{\tilde{B}}(s).$$

Contoh 2.8 Andaikan $S = \{s_1, s_2, s_3, s_4\}$ adalah himpunan semesta, $\tilde{A}$ dan $\tilde{B}$ merupakan himpunan kabur dalam S.

$\tilde{A} = \{(s_1, 0{,}4), (s_2, 0{,}2), (s_4, 1)\}$

$\tilde{B} = \{(s_1, 0{,}3)\}$

Karena $0{,}3 < 0{,}4$; $0 < 0{,}2$; dan $0 < 1$, yang berarti $(\forall s \in S)\ \mu_{\tilde{B}} \leq \mu_{\tilde{A}}(s)$ maka $\tilde{B} \subseteq \tilde{A}$.

Definisi 2.11 Andaikan $\tilde{A}$ dan $\tilde{B}$ merupakan himpunan kabur dalam semesta S dengan fungsi keanggotaan masing-masing $\mu_{\tilde{A}}$ dan $\mu_{\tilde{B}}$.

Himpunan kabur $\tilde{A}$ dan $\tilde{B}$ dikatakan sebagai himpunan kabur yang **sama**, ditulis $\tilde{A} = \tilde{B}$, bila dan hanya bila

$$(\forall s \in S)\ \mu_{\tilde{A}}(s) = \mu_{\tilde{B}}(s)$$

Contoh 2.9 Andaikan $S = \{ s_1, s_2, s_3, s_4 \}$ merupakan himpunan semesta, $\tilde{A}$, $\tilde{B}$, dan $\tilde{C}$ merupakan himpunan kabur dalam S.

$\tilde{A} = \{(s_1, 0,3), (s_2, 0,1), (s_4, 1)\}$

$\tilde{B} = \{(s_1, 0,3), (s_2, 0,1), (s_4, 1)\}$

$\tilde{C} = \{(s_1, 0,2), (s_2, 0,1), (s_4, 1)\}$

Karena $(\forall s \in S)\ \mu_{\tilde{A}}(s) = \mu_{\tilde{B}}(s)$ maka $\tilde{A} = \tilde{B}$

Perhatikan himpunan kabur $\tilde{A}$ dan $\tilde{C}$.

Ternyata ada $s \in S$, yaitu s_1, yang memenuhi kondisi $\mu_{\tilde{A}}(s) \neq \mu_{\tilde{C}}(s)$, dengan demikian $\tilde{A} \neq \tilde{C}$.

Definisi 2.12 Andaikan $\tilde{A}$ dan $\tilde{B}$ merupakan himpunan kabur dalam semesta S dengan fungsi keanggotaan masing-masing $\mu_{\tilde{A}}$ dan $\mu_{\tilde{B}}$.

Gabungan dua himpunan kabur $\tilde{A}$ dan $\tilde{B}$, adalah himpunan kabur $\tilde{C}$, ditulis

$$\tilde{C} = \tilde{A} \cup \tilde{B},$$

dengan fungsi keanggotaan

$$\mu_{\tilde{C}}(s) = \max\{(\mu_{\tilde{A}}(s), \mu_{\tilde{B}}(s))\} \; \forall s \in S$$

Contoh 2.10 Andaikan $S = \{s_1, s_2, s_3, s_4\}$ adalah himpunan semesta, $\tilde{A}$ dan $\tilde{B}$ merupakan himpunan kabur dalam S.

$\tilde{A} = \{(s_1, 0{,}2), (s_2, 0{,}7), (s_4, 1)\}$

$\tilde{B} = \{(s_1, 0{,}5), (s_2, 0{,}1), (s_3, 0{,}4)\}$

Berdasarkan definisi 2.12,

$\tilde{A} \cup \tilde{B} = \{(s_1, 0{,}5), (s_2, 0{,}7), (s_3, 0{,}4),$
$(s_4, 1)\}$

Contoh 2.11 Andaikan $S = \mathbb{R}$ merupakan himpunan semesta, $\tilde{A}$ dan $\tilde{B}$ merupakan himpunan kabur dalam S dengan fungsi keanggotaan masing-masing

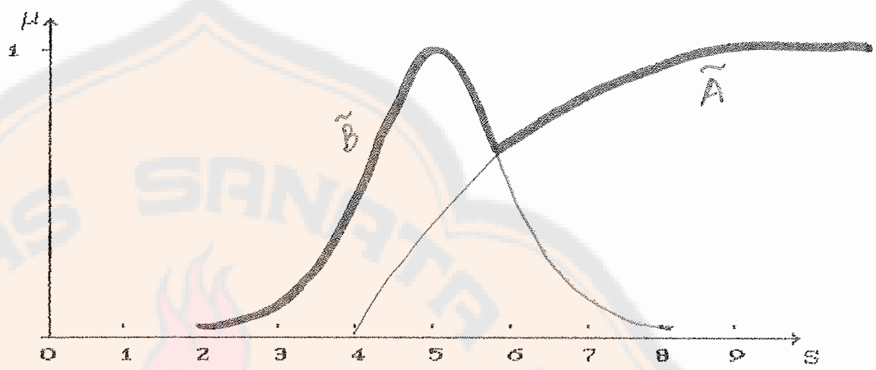
$$\mu_{\tilde{A}}(s) = \begin{cases} 0 & s \le 4 \\ (1 + (s - 4)^{-2})^{-1} & s > 4 \end{cases}$$

$$\mu_{\tilde{B}}(s) = (1 + (s - 5)^{4})^{-1}$$

Jika $\tilde{C} = \tilde{A} \cup \tilde{B}$ maka fungsi keanggotaan $\tilde{C}$ adalah

$$\mu_{\tilde{C}}(s) = \max\,[(1+(s-10)^{-2})^{-1}, (1+(s-11)^{4})^{-1}] \qquad \forall s \in S$$

Representasi visual untuk gabungan himpunan kabur $\tilde{A}$ dan $\tilde{B}$ digambarkan pada gambar 2.2 berikut ini. Representasi fungsi gabungan dinyatakan dengan menggunakan garis tebal.



Gambar 2 .2

Gabungan himpunan $\tilde{A}$ dan $\tilde{B}$

Definisi 2.13 Andaikan $\tilde{A}$ dan $\tilde{B}$ merupakan himpunan kabur dalam semesta S dengan fungsi keanggotaan masing-masing $\mu_{\tilde{A}}$ dan $\mu_{\tilde{B}}$.

Irisan dua himpunan kabur $\tilde{A}$ dan $\tilde{B}$ adalah himpunan kabur $\tilde{C}$, ditulis

$$\tilde{C} = \tilde{A} \cap \tilde{B},$$

dengan fungsi keanggotaan

$$\mu_{\tilde{C}}(s) = \min \{(\mu_{\tilde{A}}(s),\ \mu_{\tilde{B}}(s))\}\ \forall s \in S$$

Contoh 2.12 Lihat contoh 2.10.

$\tilde{A} \cap \tilde{B} = \{\ (s_1,\ 0,2),\ (s_2,\ 0,1)\ \}$

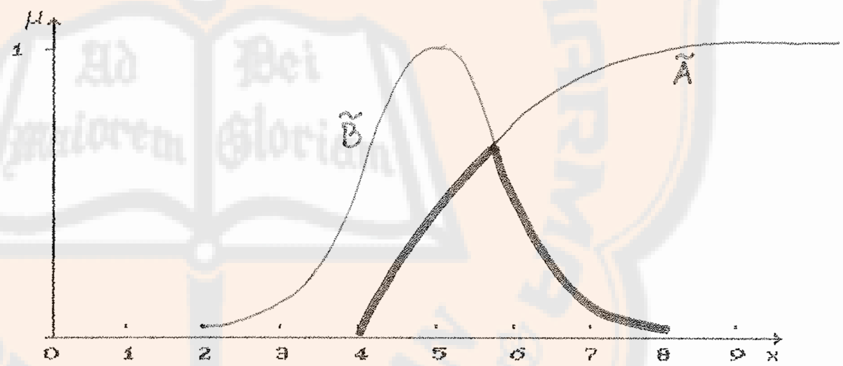
Contoh 2.13 Lihat contoh 2.11.

Jika $\tilde{C} = \tilde{A} \cap \tilde{B}$ maka fungsi keanggotaan $\tilde{C}$

adalah

$$\mu_{\tilde{C}}(s) = \begin{cases} 0 & s \leq 4 \\ \min\,[(1+(s-4)^{-2})^{-1}, (1+(s-5)^{4})^{-1}] & s > 4 \end{cases}$$

Representasi visual untuk irisan himpunan kabur $\tilde{A}$ dan $\tilde{B}$ digambarkan pada gambar 2.3 berikut ini. Representasi fungsi irisan dinyatakan dengan menggunakan garis tebal.



Gambar 2.3

Irisan himpunan $\tilde{A}$ dan $\tilde{B}$

Definisi-definisi di atas adalah definisi operasi sederhana dalam himpunan kabur yang diusulkan oleh Zadeh (Zadeh 1965: 340 - 341). Definisi-definisi tersebut sebenarnya adalah pengembangan dari definisi operasi sederhana dalam himpunan tegas.

Teorema 2.1 Jika $\tilde{A}$ merupakan himpunan kabur dalam semesta S dengan fungsi keanggotaan $\mu_{\tilde{A}}$, maka akan berlaku:

1. $(\forall s)\ \mu_{\tilde{A}\cap\tilde{A}'}(s) \leq 0{,}5$
2. $(\forall s)\ \mu_{\tilde{A}\cup\tilde{A}'}(s) \geq 0{,}5$

Bukti : 1. $\mu_{\tilde{A}\cap\tilde{A}'}(s) = \min\ \{(\mu_{\tilde{A}}(s),\ \mu_{\tilde{A}'}(s))\}$

$= \min\ \{(\mu_{\tilde{A}}(s),\ 1 - \mu_{\tilde{A}}(s))\}$

a. jika $\mu_{\tilde{A}}(s) \leq 0{,}5$,

maka $\min\ \{(\mu_{\tilde{A}}(s),\ 1 - \mu_{\tilde{A}}(s))\}$

$= \mu_{\tilde{A}}(s) \leq 0{,}5$

b. jika $\mu_{\tilde{A}}(s) > 0{,}5$,

maka $\min\ \{(\mu_{\tilde{A}}(s),\ 1 - \mu_{\tilde{A}}(s))\}$

$= 1 - \mu_{\tilde{A}}(s) < 0{,}5$

Jadi $(\forall s)\ \mu_{\tilde{A}\cap\tilde{A}'}(s) \leq 0{,}5$

2. $\mu_{\tilde{A}\cup\tilde{A}'}(s) = \max\ \{(\mu_{\tilde{A}}(s),\ \mu_{\tilde{A}'}(s))\}$

$= \max\ \{(\mu_{\tilde{A}}(s),\ 1 - \mu_{\tilde{A}}(s))\}$

a. jika $\mu_{\tilde{A}}(s) \leq 0{,}5$

maka $\max\ \{(\mu_{\tilde{A}}(s),\ 1 - \mu_{\tilde{A}}(s))\}$

$= 1 - \mu_{\tilde{A}}(s) \geq 0{,}5$

b. jika $\mu_{\tilde{A}}(s) > 0{,}5$

maka $\max\ \{(\mu_{\tilde{A}}(s),\ 1 - \mu_{\tilde{A}}(s))\}$

$= \mu_{\tilde{A}}(s) > 0{,}5$

Jadi $(\forall s)\ \mu_{\tilde{A}\cup\tilde{A}'}(s) \geq 0{,}5$ ∎

C. Bilangan Kabur dan Interval Kabur

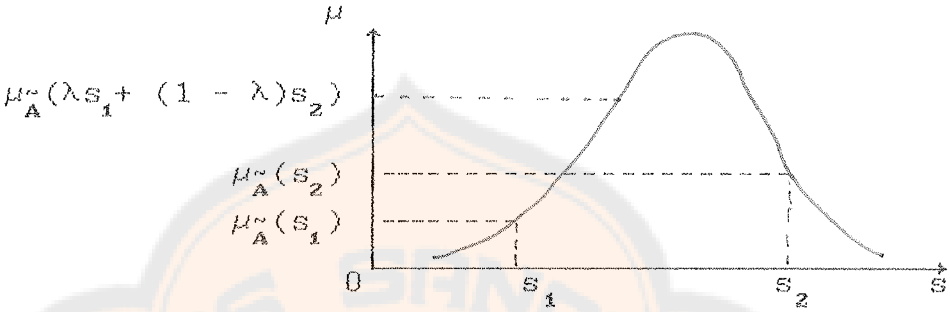
Dalam himpunan bilangan real, jika seseorang menyebutkan bilangan 4, maka yang dimaksud adalah benar-benar bilangan 4. Bilangan 4,0000001 dan 3,999999 bukan bilangan 4. Jika seorang ibu rumah tangga membeli beras seberat 5 kg maka jika ditimbang dengan ketelitian yang tinggi pasti tidak tepat 5 kg. Mungkin beras yang dibeli oleh ibu rumah tangga tersebut seberat 5,001 kg atau 4,995 kg. Meskipun demikian, baik pembeli maupun pedagang mengakui bahwa beras yang dijual mempunyai berat 5 kg. Pengalaman yang terdapat dalam kehidupan sehari-hari tersebut mengilhami munculnya pengertian bilangan kabur.

Jika diberikan bilangan kabur 5, maka bilangan 4,75 dan 5,3 mungkin sudah termasuk bilangan kabur 5. Definisi formal bilangan kabur diberikan dalam definisi 2.15. Sebelumnya akan dibahas dahulu tentang konveksitas dalam himpunan kabur.

Definisi 2.14 Himpunan kabur $\tilde{A}$ merupakan himpunan yang konveks bila dan hanya bila

$$(\forall s_1 \in S)(\forall s_2 \in S)(\forall \lambda \in [0,1])$$

$$\mu_{\tilde{A}}(\lambda s_1 + (1 - \lambda)s_2) \geq \min\{(\mu_{\tilde{A}}(s_1), \mu_{\tilde{A}}(s_2))\}$$

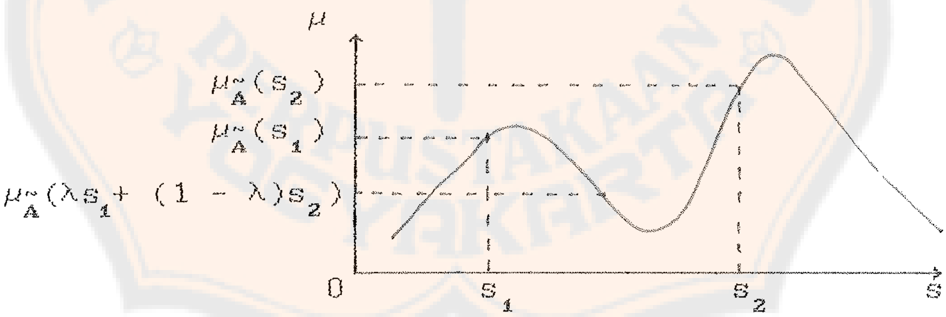


Gambar 2.4

Himpunan kabur konveks

Pada gambar 2.5 di bawah ini diperlihatkan himpunan kabur yang tidak konveks. Himpunan kabur tersebut tidak konveks karena $(\exists s_1 \in S)(\exists s_2 \in S)(\exists \lambda \in [0,1])$

$$\mu_{\tilde{A}}(\lambda s_1 + (1 - \lambda)s_2) < \min\{(\mu_{\tilde{A}}(s_1), \mu_{\tilde{A}}(s_2))\}$$



Gambar 2.5

Himpunan kabur tidak konveks

Definisi 2.15 **Bilangan kabur** *(Fuzzy number)* $\tilde{N}$ adalah himpunan kabur $\tilde{N}$ dalam himpunan bilangan real $\mathbb{R}$ yang konveks dan memenuhi:

a. $(\exists! s_o \in \mathbb{R})\ \mu_{\tilde{N}}(s_o) = 1$

b. $\mu_{\tilde{N}}$ sepotong-potong kontinyu.

(s_o disebut nilai tengah *(mean value)* $\tilde{N}$)

Contoh 2.14 Andaikan $S = \mathbb{R}$ merupakan himpunan semesta. $\tilde{N} = \{ (s, \mu_{\tilde{N}}(s)) \mid s \in \mathbb{R} \}$ merupakan himpunan kabur dalam S dengan fungsi keanggotaan

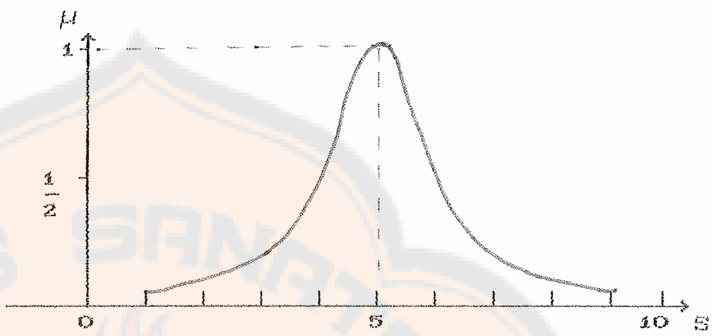
$$\mu_{\tilde{N}}(s) = \frac{1}{(s - 5)^2 + 1}$$

Jika diselidiki, maka dipenuhi:

1. Ada tunggal $s_o = 5$ sedemikian hingga $\mu_{\tilde{N}}(5) = 1$
2. $\mu_{\tilde{N}}(s)$ kontinyu untuk semua $s \in S$

Karena $\tilde{N}$ memenuhi definisi 2.15 maka $\tilde{N}$ adalah bilangan kabur, lebih tepat lagi $\tilde{N}$ adalah bilangan kabur 5.

Representasi visual untuk bilangan kabur $\tilde{N}$ diberikan pada gambar 2.6 di bawah ini.



Gambar 2.6

Bilangan kabur 5

Definisi 2.16 Bilangan kabur $\tilde{N}$ disebut **bilangan kabur positif** jika fungsi keanggotaannya sedemikian sehingga $\mu_{\tilde{M}}(s) = 0$ untuk semua $s < 0$. Sebaliknya bilangan kabur $\tilde{N}$ disebut **bilangan kabur negatif** jika fungsi keanggotaannya sedemikian sehingga $\mu_{\tilde{N}}(s) = 0$, $\forall s > 0$.

Cara lain untuk menyajikan bilangan kabur adalah dengan menggunakan fungsi bentuk (*shape function*) L dan R. Definisi fungsi bentuk diberikan di bawah ini:

Definisi 2.17 Fungsi bentuk (*shape function*) L (dan R) adalah fungsi dari R^+ ke [0, 1], yang turun (*decreasing*), dan memenuhi:

1. $L(0) = 1$
2. $L(x) < 0$ untuk $\forall x < 1$
3. $L(1) = 0$ atau

   $[(\forall x)L(x)>0$ dan $\lim_{x \to \infty} L(x) = 0]$

Definisi 2.18 Bilangan kabur $\tilde{N}$ merupakan **bilangan kabur bentuk L-R** bila dan hanya bila terdapat fungsi bentuk L (untuk kiri) dan R (untuk kanan) serta skalar $\alpha > 0$, $\beta > 0$ sedemikian hingga

$$\mu_{\tilde{N}}(s) = \begin{cases} L\left(\dfrac{m - s}{\alpha}\right) & \text{untuk } s \le m \\ R\left(\dfrac{s - m}{\beta}\right) & \text{untuk } s > m \end{cases}$$

L merupakan fungsi bentuk kiri dan R merupakan fungsi bentuk kanan, m merupakan nilai tengah $\tilde{N}$, α merupakan sebaran (*spread*) kiri, dan β adalah sebaran kanan. Bilangan kabur bentuk L-R diberi notasi

$$\tilde{N} = (m, \alpha, \beta)_{LR}$$

Contoh 2.15 Andaikan $L(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$ dan

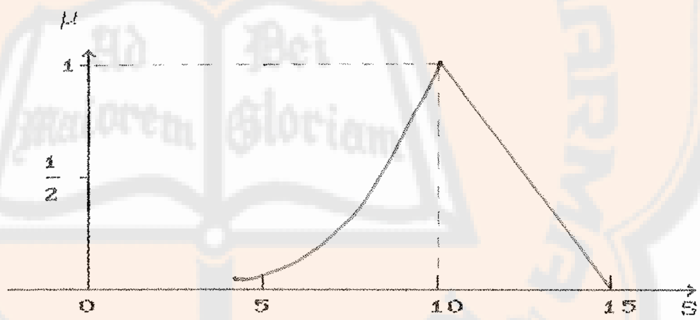
$R(x) = \max(0, 1 - x)$

$\alpha = 2$, $\beta = 5$, dan $m = 10$

$$\mu_{\tilde{N}}(s) = \begin{cases} L\left(\dfrac{(10 - s)}{2}\right) = \dfrac{1}{1 + \left(\dfrac{10-s}{2}\right)^2}, & s \leq 10 \\ R\left(\dfrac{(s - 10)}{5}\right) = \max\left(0, -\dfrac{1}{5}s + 3\right), & s \geq 10 \end{cases}$$

$\tilde{N} = (10, 2, 5)_{LR}$ adalah bilangan kabur 10.

Sketsa grafik $\mu_{\tilde{N}}(s)$ diberikan dalam gambar 2.7.



Gambar 2.7

Bilangan kabur 10 yang dinyatakan dengan sebaran kiri dan sebaran kanan

Definisi 2.19 Interval kabur (*Fuzzy interval*) adalah himpunan kabur $\tilde{N}$ dalam himpunan bilangan real $\mathbb{R}$ yang konveks dan memenuhi :

a. $(\exists s_1 \in \mathbb{R})(\exists s_2 \in \mathbb{R})(\forall s \in [s_1, s_2])$

$\mu_{\tilde{N}}(s) = 1$

b. $\mu_{\tilde{N}}$ sepotong-potong kontinyu

Definisi 2.20 Interval Kabur $\tilde{N}$ merupakan interval kabur bentuk L-R jika terdapat fungsi bentuk L dan R serta parameter-parameter $(\underline{m}, \bar{m}) \in \mathbb{R}^2 \cup \{-\infty, +\infty\}$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, dan fungsi keanggotaan $\tilde{N}$ yang didefinisikan dengan:

$$\mu_{\tilde{N}}(s) = \begin{cases} L((\underline{m} - s)/\alpha), & \text{untuk } s \leq \underline{m} \\ R((s - \bar{m})/\beta), & \text{untuk } s \geq \bar{m} \\ 1 & \text{untuk } \underline{m} < s < \bar{m} \end{cases}$$

Interval kabur bentuk L-R diberi notasi $\tilde{N} = (\underline{m}, \bar{m}, \alpha, \beta)_{LR}$. L dan R adalah fungsi bentuk kiri dan kanan.

Contoh 2.16 Andaikan $L(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$ dan

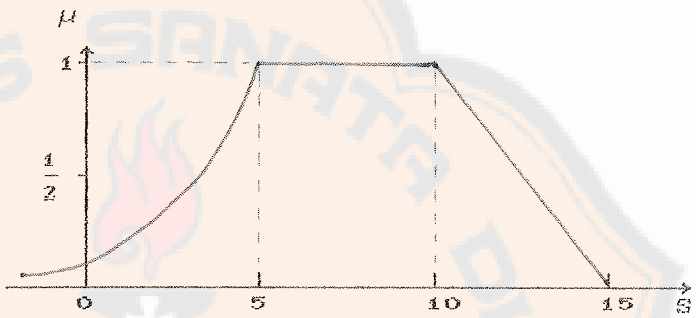
$R(x) = \max(0, 1 - x)$

$\alpha = 2$, $\beta = 5$, $\underline{m} = 5$, dan $\bar{m} = 10$

$$\mu_{\tilde{N}}(s) = \begin{cases} L\left(\dfrac{(5 - s)}{2}\right) = \dfrac{1}{1 + \left(\dfrac{5 - s}{2}\right)^2}, & s \leq 5 \\ 1, \quad 5 < s < 10 \\ R\left(\dfrac{(s - 10)}{5}\right) = \max\left(0, -\frac{1}{5}s + 3\right), & s \geq 10 \end{cases}$$

$\tilde{N} = (5, 10, 2, 5)_{LR}$ merupakan interval kabur.

Sketsa grafik $\mu_{\tilde{N}}(s)$ disajikan dalam gambar 2.8.

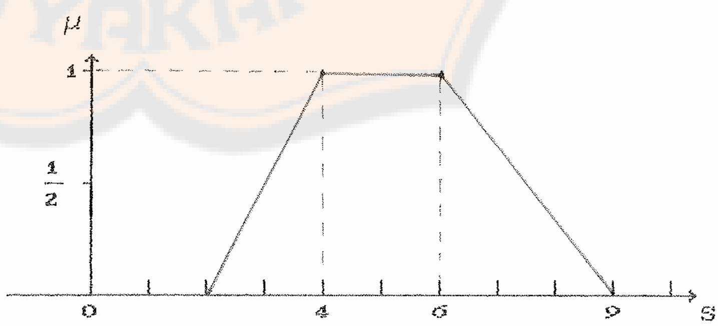


Gambar 2.12

Gambar interval kabur $(5,\ 10,\ 2,\ 5)_{LR}$

Jika $L(x) = R(x) = \max\ (0,\ 1 - x)$ maka akan diperoleh interval kabur trapesoid.

Contoh 2.17 $\tilde{N} = (4,\ 6,\ 2,\ 3)_{LR}$ berikut ini merupakan interval kabur trapesoid.



Gambar 2.8

Interval kabur trapezoid $(4,\ 6,\ 2,\ 3)_{LR}$

BAB III

UKURAN POSIBILITAS DAN NESESITAS

A. Ukuran Posibilitas dan Nesesitas untuk Himpunan tegas

Ukuran posibilitas dan nesesitas termasuk salah satu ukuran kabur. Sebelum kita membahas ukuran-ukuran tersebut, terlebih dahulu akan dibahas ukuran kabur untuk himpunan tegas. Selanjutnya akan dibicarakan ukuran posibilitas dan ukuran nesesitas untuk himpunan tegas, hingga akhirnya kita membahas ukuran posibilitas dan ukuran nesesitas untuk himpunan kabur.

Definisi 3.1 Diberikan ruang Borel $\mathcal{B}$[1] dalam semesta S. Suatu fungsi $g\colon \mathcal{B} \longrightarrow [0,\ 1]$ disebut ukuran kabur jika memenuhi:

1. $g(\emptyset) = 0,\ g(S) = 1$
2. $(\forall\ A,\ B \in \mathcal{B})\ A \subseteq B \Rightarrow g(A) \leq g(B)$
3. Jika $A_i \in \mathcal{B},\ A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots \subseteq A_i \subseteq \ldots$ maka $\lim\limits_{i \to \infty} g(A_i) = g(\lim\limits_{i \to \infty} A_i)$

Theorema 3.1 $(\forall\ A,\ B \in \mathcal{B})$ $g(A \cup B) \geq \max\ (g(A),\ g(B))$

$$g(A \cap B) \leq \min\ (g(A),\ g(B))$$

---

[1] Definisi ruang Borel diberikan dalam lampiran 1.

Bukti : a. Karena $A \subseteq A \cup B$ maka $g(A \cup B) \geq g(A)$.

Karena $B \subseteq A \cup B$ maka $g(A \cup B) \geq g(B)$.

Jadi $g(A \cup B) \geq \max(g(A), g(B))$

b. Karena $A \cap B \subseteq A$ dan $A \cap B \subseteq B$ maka

$g(A \cap B) \leq g(A)$ dan $g(A \cap B) \leq g(B)$

Jadi $g(A \cap B) \leq \min(g(A), g(B))$. ■

Keadaan khusus ukuran kabur adalah ukuran posibilitas Π, yaitu fungsi yang memenuhi:

$$(\forall A, B \in \mathcal{B})\ \Pi(A \cup B) = \max(\Pi(A), \Pi(B)) \qquad 3.1$$

Definisi formal ukuran posibilitas diberikan dalam definisi 3.2 berikut ini.

Definisi 3.2 Diberikan ruang Borel $\mathcal{B}$ dalam semesta S. **Ukuran posibilitas** adalah fungsi $\Pi : \mathcal{B} \longrightarrow [0, 1]$ yang memenuhi:

1. $\Pi(\emptyset) = 0$, $\Pi(S) = 1$
2. $\forall A, B \in \mathcal{B}$, $A \subseteq B \Rightarrow \Pi(A) \leq \Pi(B)$
3. $\forall A_i \in \mathcal{B}$, $\Pi(\bigcup_{i \in I} A_i) = \sup_{i \in I} \Pi(A_i)$

   $I = \{1, 2, 3, \ldots\}$

Untuk lebih memahami definsi ukuran posibilitas tersebut, berikut ini diberikan contoh ukuran posibilitas Π yang hanya mempunyai nilai 0 dan 1.

Andaikan $E \in \mathcal{B}$ adalah kejadian yang dianggap benar, maka fungsi Π yang mempunyai nilai dalam $\{0, 1\}$ dan memenuhi persamaan 3.1, dapat didefinisikan dengan:

$$\Pi(A) = \begin{cases} 1 & \text{bila } A \cap E \neq \emptyset \\ 0 & \text{bila } A \cap E = \emptyset \end{cases} \qquad 3.2$$

Dalam hal ini $\Pi(A) = 1$ berarti A adalah posibel (mungkin).

Theorema 3.2 $\max(\Pi(A), \Pi(A')) = 1$.

Bukti: $\max(\Pi(A), \Pi(A')) = \Pi(A \cup A')$
$= \Pi(S) = 1.$ ∎

Theorema 3.2 tersebut dapat diartikan bahwa jika diberikan suatu kejadian dan komplemennya, maka salah satu diantaranya pasti posibel. Dari theorema 3.2 dapat diperoleh pernyataan

$$\Pi(A) + \Pi(A') \geq 1 \qquad 3.3$$

yang dapat diartikan bahwa jika suatu kejadian A ditetapkan posibel, belum tentu komplemennya (A') tidak posibel.

Keadaan khusus yang lain dari ukuran kabur adalah ukuran nesesitas N yaitu fungsi yang memenuhi:

$$(\forall A, B \in \mathcal{B}) \quad N(A \cap B) = \min(N(A), N(B)) \qquad 3.4$$

Definisi formal ukuran nesesitas diberkan dalam definisi 3.3 berikut ini.

Definisi 3.3 Diberikan ruang Borel $\mathcal{B}$ dalam semesta S. **Ukuran nesesitas** N adalah fungsi

$N : \mathcal{B} \longrightarrow [0, 1]$ yang memenuhi

1. $N(\emptyset) = 0$, $N(S) = 1$
2. $(\forall A, B \in \mathcal{B})$ $A \subseteq B \Longrightarrow N(A) \leq N(B)$
3. $(\forall A_i \in \mathcal{B})$ $N(\bigcap_{i \in I} A_i) = \inf_{i \in I} N(A_i)$, I merupakan himpunan bilngan asli.

Untuk lebih memahami definisi ukuran nesesitas berikut ini diberikan contoh ukuran nesesitas N yang hanya mempunyai nilai 0 dan 1.

Jika diberikan kejadian $E \in \mathcal{B}$ yang pasti terjadi, maka fungsi N yang mempunyai nilai dalam {0, 1} dan memenuhi persamaan 3.4 dapat didefinisikan dengan:

$$N(A) = \begin{cases} 1 & \text{bila } A \subseteq E \\ 0 & \text{bila } A \nsubseteq E \end{cases} \qquad 3.5$$

$N(A) = 1$ berarti A pasti (*sure*).

Theorema 3.3 $\min(N(A), N(A')) = 0$.

Bukti: $\min(N(A), N(A')) = N(A \cap A')$

$= N(\emptyset) = 0.$ ∎

Theorema 3.3 tersebut dapat diartikan bahwa dua buah kejadian yang saling komplemen tidak mungkin pasti terjadi pada saat yang bersamaan. Dapat pula dikatakan bahwa jika $N(A) > 0$ maka $N(A') = 0$, sebaliknya jika $N(A') > 0$ maka $N(A) = 0$. Dengan demikian dari theorema 3.3 di atas dapat diturunkan pernyataan

$$N(A) + N(A') \leq 1 \qquad 3.6$$

Theorema-theorema yang akan dibahas berikut merupakan theorema-theorema yang memperlihatkan hubungan antara ukuran posibilitas dan ukuran nesesitas.

Theorema 3.4 N merupakan ukuran nesesitas bila dan hanya bila fungsi Π yang didefinisikan dengan $(\forall A \in \mathcal{B})\ \Pi(A) = 1 - N(A')$ merupakan ukuran posibilitas.

Bukti : 1. Andaikan N merupakan ukuran nesesitas dan $\forall A \in \mathcal{B}$, $\Pi(A) = 1 - N(A)$

a. $\Pi(\emptyset) = 1 - N(S) = 1 - 1 = 0$

$\Pi(S) = 1 - N(\emptyset) = 1 - 0 = 1$

b. Andaikan $A \subseteq B$

Berarti $B' \subseteq A'$

Karena N merupakan ukuran nesesitas maka $N(B') \leq N(A')$

$\Leftrightarrow \quad -N(B') \geq -N(A')$

$\Leftrightarrow \quad 1 - N(B') \geq 1 - N(A')$

$\Leftrightarrow \quad \Pi(B) \geq \Pi(A)$

$\Leftrightarrow \quad \Pi(A) \leq \Pi(B)$

Jadi $\forall A,B \in \mathcal{B},\ A \subseteq B \Longrightarrow \Pi(A) \leq \Pi(B)$.

c. $\Pi(\bigcup_{i\in I} A_i) = 1 - N((\bigcup_{i\in I} A_i)')$

$= 1 - N(\bigcap_{i\in I} A_i')$

$= 1 - \inf_{i\in I} N(A_i')$

$= \operatorname{Sup}_{i\in I} (1 - N(A_i'))$

$= \operatorname{Sup}_{i\in I} \Pi(A_i)$

Jadi $\forall A_i \in \mathcal{B},\ \Pi(\bigcup_{i\in I} A_i) = \operatorname{Sup}_{i\in I} \Pi(A_i)$

Dari a, b, dan c terbukti bahwa Π merupakan ukuran posibilitas.

2. Andaikan $\Pi(A) = 1 - N(A')$ merupakan ukuran posibilitas.

a. Menurut definisi 3.2 : $\Pi(\emptyset) = 0$ dan $\Pi(S) = 1$.

Dengan demikian $\Pi(\emptyset) = 1 - N(S) = 0$

$\Leftrightarrow \quad N(S) = 1$

$\Pi(S) = 1 - N(\emptyset) = 1$

$\Leftrightarrow \quad N(\emptyset) = 0$

b. Andaikan $A \subseteq B$.

Berarti $B' \subseteq A'$

Menurut definisi 3.2 : $\Pi(B') \leq \Pi(A')$

$$\Leftrightarrow \quad 1 - N(B) \leq 1 - N(A)$$

$$\Leftrightarrow \quad N(A) \geq N(B)$$

Jadi $\forall A,B \in \mathcal{B}$, $A \subseteq B \Longrightarrow N(A) \geq N(B)$

c. Karena $\Pi(A) = 1 - N(A')$ maka

$$\Pi(A') = 1 - N(A)$$

atau $N(A) = 1 - \Pi(A')$

$$N\Big(\bigcap_{i\in I} A_i\Big) = 1 - \Pi\Big(\Big(\bigcap_{i\in I} A_i\Big)'\Big)$$

$$= 1 - \Pi\Big(\bigcup_{i\in I} A_i'\Big)$$

$$= 1 - \operatorname{Sup}_{i\in I} \Pi(A_i')$$

$$= \inf_{i\in I} \big(1 - \Pi(A_i')\big)$$

$$= \operatorname{Inf}_{i\in I} N(A_i)$$

Jadi $\forall A_i \in \mathcal{B}$, $N\Big(\bigcap_{i\in I} A_i\Big) = \operatorname{Inf}_{i\in I} N(A_i)$

Dari a. b, dan c terbukti bahwa N merupakan ukuran nesesitas. ■

Berdasarkan theorema 3.4 di atas, dapat ditentukan fungsi nesesitas yang dinyatakan dengan menggunakan distribusi posibilitas. Hal tersebut dibicarakan dalam theorema 3.5 berikut ini.

Theorema 3.5 Diberikan semesta S berhingga. Jika N merupakan ukuran nesesitas dan π merupakan distribusi posibilitas, maka fungsi nesesitas dapat dinyatakan sebagai: $N(A) = \inf \{1 - \pi(s) \mid s \notin A\}$

Bukti : Jika π merupakan distribusi posibilitas maka $\Pi(A) = \pi(\{s\}),\ s \in A$

berarti $\Pi(A') = \pi(\{s\}),\ s \notin A$

Dari theorema 3.4 diperoleh

$$\Pi(A) = 1 - N(A')$$

$$\Leftrightarrow \quad N(A') = 1 - \Pi(A)$$

$$\Leftrightarrow \quad N(A) = 1 - \Pi(A')$$

$$= 1 - \pi(\{s\}),\ s \notin A \qquad \blacksquare$$

Theorema 3.6 $\forall\ A \in \mathcal{B},\ \Pi(A) \geq N(A)$

Bukti : Dari theorema 3.4 didapat

$$\Pi(A) = 1 - N(A')$$

Dari pertidaksamaan 3.6 diperoleh

$$N(A') \leq 1 - N(A).$$

Dengan demikian $\Pi(A) = 1 - N(A')$

$$\geq 1 - (1 - N(A))$$

$$= N(A)$$

Jadi $\Pi(A) \geq N(A)$ $\blacksquare$

Theorema 3.6 di atas dapat diartikan bahwa sebuah kejadian akan posibel sebelum pasti terjadi.

Theorema 3.7 $(\forall A \in \mathscr{B})\ N(A) > 0 \Longrightarrow \Pi(A) = 1$

$\Pi(A) < 1 \Longrightarrow N(A) = 0$

Bukti : 1. Andaikan $N(A) > 0$

Theorema 3.3 mengatakan bahwa

$$\min(\ N(A),\ N(A')\ ) = 0$$

Karena $N(A) > 0$ maka $N(A') = 0$

Dari theorema 3.4 didapat

$$\Pi(A) = 1 - N(A')$$

$$= 1 - 0 = 1$$

Jadi $N(A) > 0 \Longrightarrow \Pi(A) = 1$

2. Andaikan $\Pi(A) < 1$

Theorema 3.2 mengatakan bahwa

$$\max\ (\Pi(A),\ \Pi(A')) = 1$$

Karena $\Pi(A) < 1$ maka $\Pi(A') = 1$

Dari theorema 3.4 didapat

$$\Pi(A) = 1 - N(A')$$

$$\Longleftrightarrow \quad \Pi(A') = 1 - N(A)$$

$$\Longleftrightarrow \quad 1 = 1 - N(A)$$

$$\Longleftrightarrow \quad N(A) = 0$$

Jadi $\Pi(A) < 1 \Longrightarrow N(A) = 0$ ∎

B. Ukuran Posibilitas dan Nesesitas Untuk Himpunan Kabur

Definisi-definisi ukuran kabur di depan adalah definisi yang berlaku dalam himpunan tegas. Untuk sampai pada definisi ukuran-ukuran kabur dalam himpunan kabur, terlebih dahulu akan dipelajari yang dimaksud dengan pembatas kabur (*Fuzzy Restriction*) dan distribusi posibilitas untuk himpunan kabur.

Definisi 3.4 Diberikan himpunan kabur $\tilde{A}$ dalam semesta S dengan derajat keanggotaan $\mu_{\tilde{A}}$.

$\tilde{A}$ adalah **pembatas kabur** (*Fuzzy Restriction*) pada variabel X jika $\tilde{A}$ bertindak sebagai pematast lentur (*elastic constrain*) pada nilai $s \in S$ yang diganti pada X. Penetapan nilai s pada X dilambangkan dengan

$$X = s : \mu_{\tilde{A}}(s).$$

Jika $\tilde{A}$ merupakan pembatas kabur dan $s \in S$ dipasangkan pada X, maka $\mu_{\tilde{A}}(s)$ diartikan sebagai derajat kesesuaian s dengan himpunan $\tilde{A}$.

Untuk memperjelas pengertian pembatas kabur, berikut ini akan diberikan perbandingan antara variabel pada himpunan bilangan real dan variabel untuk bilangan kabur. Jika n adalah variabel pada himpunan bilangan real dan ditetapkan bahwa n = 5 maka bilangan 4,9 dan 5,1 meskipun dekat dengan 5 tetap bukan nilai untuk variabel n. Jika x variabel pada bilangan kabur dan ditetapkan x = 5 maka sangat dimungkinkan 4,5 atau 5,5 juga merupakan nilai untuk x meskipun derajatnya berbeda. Jadi jika n adalah variabel pada himpunan bilangan real maka ada batas yang tegas yang menentukan suatu bilangan dapat menjadi nilai untuk variabel n atau tidak. Jika x adalah variabel pada himpunan bilangan kabur, pembatas yang tegas tersebut tidak ada. Yang menentukan suatu bilangan dapat menjadi nilai untuk variabel x atau tidak adalah suatu himpunan kabur $\tilde{A}$ yang dalam hal ini dinamakan pembatas kabur.

Jika $\tilde{R}(X)$ adalah pembatas kabur yang berkaitan dengan variabel X maka $\tilde{R}(X) = \tilde{A}$ disebut **persamaan pemasangan relasional** (*relational assignment equation*) yang memasangkan himpunan kabur $\tilde{A}$ pada pembatas kabur $\tilde{R}(X)$.

Sebagai contoh, andaikan V(x) merupakan atribut untuk variabel X dan V(x) diartikan sebagai "laju (mobil)". Jika $\tilde{A}$ merupakan himpunan kabur "cepat" maka pernyataan "laju (mobil) adalah cepat" dinyatakan sebagai

$$\tilde{R}(V(x)) = \tilde{A}$$

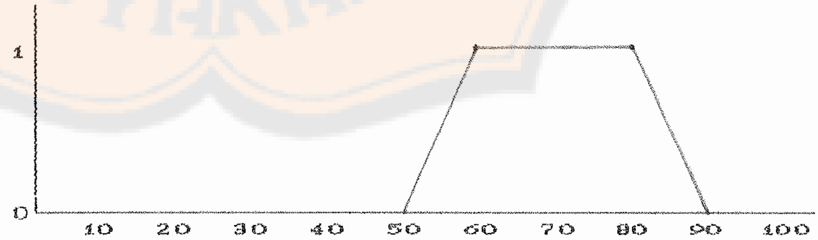
Contoh 3.1 Diberikan pernyataan "laju (mobil) adalah cepat". "Cepat" merupakan himpunan kabur dalam semesta S = [0, 150] dan $s \in S$ merupakan laju mobil yang mempunyai satuan km/detik.

$$\mu_{cepat}(s) = \begin{cases} L\left(\dfrac{\underline{m} - s}{\alpha}\right) & ; \quad s \le \underline{m} \\ 1 & ; \quad \underline{m} \le s \le \overline{m} \\ R\left(\dfrac{s - \overline{m}}{\beta}\right) & ; \quad s \ge \overline{m} \end{cases}$$

dengan $\alpha = \beta = 10$, $\underline{m} = 60$, $\overline{m} = 80$.

$L(x) = R(x) = \max(0, 1 - x)$

Dalam contoh ini, himpunan kabur yang merupakan pembatas kabur adalah himpunan kabur "cepat". "Laju (mobil)" merupakan atribut untuk variabel X dalam semesta S. Grafik himpunan kabur "cepat" diberikan dalam gambar berikut.



Gambar 3.1
Himpunan Kabur "Cepat"

Pernyataan "laju (mobil) adalah cepat" ditulis dalam bentuk

$$\tilde{R}(\text{laju (mobil)}) = \text{cepat}.$$

Berikut ini akan dibahas kaitan konsep pembatas kabur dengan distribusi posibilitas. Jika laju (mobil) pada suatu saat adalah 55 km/jam (s = 55), dan derajat keanggotaannya dalam himpunan kabur "cepat " adalah 0,5. Derajat keanggotaan 0,5 diartikan sebagai derajat kesesuaian (*compatibility*) antara kencangnya laju (mobil) dengan sebuah konsep yang diberi label "cepat. Selanjutnya dipostulatkan bahwa pernyataan "laju (mobil) adalah cepat" mengubah makna 0,5 dari derajat kesesuaian menjadi derajat posibilitas antara laju (mobil) 55 km/jam dengan pernyataan "laju (mobil) adalah cepat". Jadi kesesuaian antara suatu nilai s dengan konsep "cepat" berubah menjadi posibilitas antara nilai s dengan pernyataan "laju (mobil) adalah cepat".

Konsep distribusi posibilitas didefinisikan dalam definisi 3.5 berikut ini.

Definisi 3.5 Diberikan $\tilde{A}$ himpunan kabur dalam semesta S dengan derajat keanggotaan $\mu_{\tilde{A}}(s)$. $\mu_{\tilde{A}}(s)$ diinterprestasikan sebagai derajat kesesuaian antara $s \in S$ dengan konsep yang diberi label $\tilde{A}$.

Andaikan X adalah variabel yang mengambil nilai dalam S dan $\tilde{A}$ bertindak sebagai pembatas kabur $\tilde{R}(X)$ yang dikaitkan dengan X. Maka pernyataan "X adalah $\tilde{A}$" yang, ditulis menjadi $\tilde{R}(X) = \tilde{A}$, menghubungkan **distribusi posibilitas** (π_X) dengan X. Distribusi posibilitas π_X dipostulatkan sama dengan $\tilde{R}(X)$.

Fungsi distribusi posibilitas $\pi_X(s)$ yang menentukan distribusi posibilitas π_X didefinisikan secara numeris sama dengan fungsi keanggotaan himpunan kabur $\tilde{A}$ ($\mu_{\tilde{A}}(s)$).

$$\pi_X \mathrel{\hat{=}} \mu_{\tilde{A}}$$

Lambang " $\hat{=}$ " mempunyai arti "didefinsisikan sama dengan".

Contoh 3.2 Diberikan $S = \mathbb{B}^+$ dan $\tilde{A}$ merupakan himpunan bilangan bulat yang dekat dengan 5.

$$\tilde{A} = \{(2,\ 0{,}2),\ (3,\ 0{,}5),\ (4,\ 0{,}7),\ (5,\ 1)\ (6,\ 0{,}7),\ (7,\ 0{,}5),\ (8,\ 0{,}2)\}$$

Pernyataan "X dekat dengan 5" menghubungkan X dengan distribusi posibilitas π_X, yaitu $\pi_X = \tilde{A}$.

Dalam hal ini, (4, 0,7) diartikan bahwa posibilitas x = 4 dekat dengan 5 adalah 0,7.

Di depan telah dibahas konsep ukuran posibilitas pada himpunan tegas. Definisi ukuran posibilitas untuk himpunan kabur diberikan dalam definisi berikut ini.

Definisi 3.6 Diberikan himpunan kabur $\tilde{A}$ dalam semesta S dan π_X adalah distribusi posibilitas yang berhubungan dengan variabel X. Variabel X mengambil nilai dalam S. **Ukuran posibilitas** himpunan kabur $\tilde{A}$ ($\pi(\tilde{A})$) didefinisikan dengan

$$\text{poss } \{X \text{ adalah } \tilde{A}\} \triangleq \Pi(\tilde{A})$$

$$\triangleq \sup_{s \in S} \min \{\mu_{\tilde{A}}(s), \pi_X(s)\}$$

Contoh 3.3 Lihat contoh 3.2

Diberikan distribusi posibilitas yang disebabkan oleh pernyataan "X dekat dengan 5"

π_X = {(2, 0,2), (3, 0,5), (4, 0,7), (5, 1) (6, 0,7), (7, 0,5), (8, 0,2)}

Jika $\tilde{A}$ = {(3, 0,6), (4, 0,5), (5, 0,7)} merupakan himpunan kabur dalam S maka ukuran posibilitas $\Pi(\tilde{A})$

adalah sebagai berikut:

$$\Pi(\tilde{A}) = \sup_{s \in S} \min \{\mu_{\tilde{A}}(s), \pi_X(s)\}$$

$$= \text{Sup} (0,5 , 0,5 , 0,7) = 0,7$$

Definisi ukuran nesesitas untuk himpunan kabur diberikan dalam definisi 3.7 berikut ini.

Definisi 3.7 Andaikan $\tilde{A}$ merupakan himpunan kabur dalam semesta S dan $\Pi(\tilde{A})$ merupakan ukuran posibilitas himpunan kabur $\tilde{A}$ maka ukuran nesesitas himpunan kabur $\tilde{A}$ didefinisikan dengan

$$\text{Ness } \{X \text{ adalah } \tilde{A}\} = N(A)$$

$$= 1 - \Pi(\tilde{A}')$$

Theorema 3.8 Diberikan himpunan kabur $\tilde{A}$ dalam semesta S dan π_X merupakan distribusi posibilitas yang berkaitan dengan variabel X yang bernilai dalam S. **Ukuran nesesitas** himpunan kabur $\tilde{A}$ ($N(\tilde{A})$) didefinsikan dengan

$$N(\tilde{A}) = \inf_{s \in S} \max \{\mu_{\tilde{A}}(s), 1 - \pi_X(s)\}$$

Bukti : Dari definisi 3.7 di atas diperoleh persamaan

$$N(\tilde{A}) = 1 - \Pi(\tilde{A}')$$

$$= 1 - \sup_{s \in S} \min \{\mu_{\tilde{A}'}(s), \pi_X(s)\}$$

$$= \inf_{s \in S} \max \{1 - \mu_{\tilde{A}'}(s), 1 - \pi_X(s)\}$$

$$= \inf_{s \in S} \max \{\mu_{\tilde{A}'}(s), 1 - \pi_X(s)\}$$

Jadi terbukti bahwa

$$N(\tilde{A}) = \inf_{s \in S} \max \{\mu_{\tilde{A}'}(u), 1 - \pi_X(u)\} \qquad \blacksquare$$

Apakah sifat-sifat yang berlaku pada ukuran posibilitas dan nesesitas himpunan tegas masih berlaku pula untuk ukuran posibilitas dan nesesitas pada himpunan kabur? Jawabnya, ada sifat-sifat yang masih berlaku untuk himpunan kabur tetapi ada pula sifat-sifat yang sudah tidak berlaku lagi. Pembahasan selengkapnya diberikan dalam teorema-teorema berikut ini.

Teorema 3.9 Andaikan π_X merupakan distribusi posibilitas yang berkaitan dengan variabel X yang mempunyai nilai dalam S.
Jika $\tilde{A}$ dan $\tilde{B}$ merupakan himpunan-himpunan kabur dalam S, maka akan berlaku

1. $\tilde{A} \subseteq \tilde{B} \Longrightarrow \Pi(\tilde{A}) \leq \Pi(\tilde{B})$
2. $\tilde{A} \supseteq \tilde{B} \Longrightarrow \Pi(\tilde{A}) \geq \Pi(\tilde{B})$

Bukti : Dari definisi 3.7 dan teorema 3.8 diperoleh

$$\Pi(\tilde{A}) = \sup_{s\in S} \min \{\mu_{\tilde{A}}(s), \pi_X(s)\}$$

$$\Pi(\tilde{B}) = \sup_{s\in S} \min \{\mu_{\tilde{B}}(s), \pi_X(s)\}$$

$$N(\tilde{A}) = \inf_{s\in S} \max \{\mu_{\tilde{A}}(s), \pi_X(s)\}$$

$$N(\tilde{B}) = \inf_{s\in S} \max \{\mu_{\tilde{B}}(s), \pi_X(s)\}$$

Karena $\tilde{A} \subseteq \tilde{B}$ maka $\forall s\in S$, $\mu_{\tilde{A}}(s) \leq \mu_{\tilde{B}}(s)$

sehingga

$$\sup_{s\in S} \min \{\mu_{\tilde{A}}(s), \pi_X(s)\} \leq \sup_{s\in S} \min \{\mu_{\tilde{B}}(s), \pi_X(s)\}$$

dan

$$\inf_{s\in S} \max \{\mu_{\tilde{A}}(s), \pi_X(s)\} \leq \inf_{s\in S} \max \{\mu_{\tilde{B}}(s), \pi_X(s)\}$$

Jadi $\Pi(\tilde{A}) \leq \Pi(\tilde{B})$ dan $N(\tilde{A}) \leq N(\tilde{B})$ ■

Teorema 3.10 Jika $\tilde{A}$ dan $\tilde{B}$ merupakan himpunan-himpuna kabur dalam semesta S maka akan berlaku

1. $\Pi(\tilde{A} \cup \tilde{B}) = \max (\Pi(\tilde{A}), \Pi(\tilde{B}))$
2. $N(\tilde{A} \cap \tilde{B}) = \min (\Pi(\tilde{A}), \Pi(\tilde{B}))$

Bukti : Untuk membuktikan teorema tersebut akan diselidiki beberapa kasus

1. $\tilde{A} \subseteq \tilde{B}$

   Berarti $\mu_{\tilde{A}}(s) \leq \mu_{\tilde{B}}(s)$ dan berdasarkan teorema 3.10 berlaku

$$\Pi(\tilde{A}) \leq \Pi(\tilde{B}) \text{ dan } N(\tilde{A}) \leq N(\tilde{B})$$

sehingga

$$\begin{aligned}
\Pi(\tilde{A} \cup \tilde{B}) &= \sup_{s \in S} \min\,(\max\,(\mu_{\tilde{A}}(s), \mu_{\tilde{B}}(s)), \pi_X(s)) \\
&= \sup_{s \in S} \min\,(\mu_{\tilde{B}}(s), \pi_X(s)) \\
&= \Pi(\tilde{B}) \\
&= \max\,(\Pi(\tilde{A}), \Pi(\tilde{B})) \\
N(\tilde{A} \cap \tilde{B}) &= \inf_{s \in S} \max\,(\min\, \mu_{\tilde{A}}(s), \mu_{\tilde{B}}(s)), \pi_X(s)) \\
&= \inf_{s \in S} \min\,(\mu_{\tilde{A}}(s), \pi_X(s)) \\
&= N(\tilde{A}) \\
&= \min\,(N(\tilde{A}), N(\tilde{B}))
\end{aligned}$$

2. $\tilde{A} \geq \tilde{B}$

Berarti $\mu_{\tilde{A}}(s) \geq \mu_{\tilde{B}}(s)$, dan berdasarkam teorema 3.9 berlaku

$$\Pi(\tilde{A}) \geq \Pi(\tilde{B}) \text{ dan } N(\tilde{A}) \geq N(\tilde{B})$$

sehingga

$$\begin{aligned}
\Pi(\tilde{A} \cup \tilde{B}) &= \sup_{s \in S} \min\,(\max\,(\mu_{\tilde{A}}(s), \mu_{\tilde{B}}(s)), \pi_X(s)) \\
&= \sup_{s \in S} \min\,(\mu_{\tilde{A}}(s), \pi_X(s)) \\
&= \Pi(\tilde{A}) \\
&= \max\,(\Pi(\tilde{A}), \Pi(\tilde{B})) \\
N(\tilde{A} \cap \tilde{B}) &= \inf_{s \in S} \max\,(\min\,(\mu_{\tilde{A}}(s), \mu_{\tilde{B}}(s)), \pi_X(s)) \\
&= \inf_{s \in S} \max\,(\mu_{\tilde{B}}(s), \pi_X(s))
\end{aligned}$$

$= N(\tilde{B})$

$= \min (N(\tilde{A}), N(\tilde{B}))$

Dari (1) dan (2) terbukti bahwa

$\Pi(\tilde{A} \cup \tilde{B}) = \max (\Pi(\tilde{A}), \Pi(\tilde{B}))$ dan

$N(\tilde{A} \cap \tilde{B}) = \min (N(\tilde{A}), N(\tilde{B}))$ ∎

Untuk A merupakan himpunan tegas berlaku pernyataan 3.2 dan 3.3, tetapi apakah hal itu masih berlaku jika $\tilde{A}$ merupakan himpunan kabur? Pertanyaan tersebut akan dibahas dalam teorema 3.11 dan 3.12 berikut ini.

Teorema 3.11 Jika $\tilde{A}$ merupakan himpunan kabur dalam semesta S maka akan berlaku

1. $\Pi(\tilde{A}) = 0 \Leftrightarrow \text{Supp } \tilde{A} \cap \text{Supp } \pi_X = \emptyset$
2. $\Pi(\tilde{A}) = 1 \Leftrightarrow \exists s \in S,\ \mu_{\tilde{A}}(s) = \pi_X(s) = 1$

Bukti : 1. $\Pi(\tilde{A}) = 0 \Leftrightarrow \sup\limits_{s \in S} \min (\mu_{\tilde{A}}(s), \pi_X(s)) = 0$

$\Leftrightarrow \forall s \in S,\ \min (\mu_{\tilde{A}}(s), \pi_X(s)) = 0$

$\Leftrightarrow \text{Supp}(\tilde{A}) \cap \text{Supp}(\pi_X) = \emptyset$

2. $\Pi(\tilde{A}) = 1 \Leftrightarrow \sup\limits_{s \in S} \min (\mu_{\tilde{A}}(s), \pi_X(s)) = 1$

$\Leftrightarrow \exists s \in S,\ \min (\mu_{\tilde{A}}(s), \pi_X(s)) = 1$

$\Leftrightarrow \exists s \in S,\ \mu_{\tilde{A}}(s) = \pi_X(s) = 1$ ∎

Teorema 3.12 Jika $\tilde{A}$ merupakan himpunan kabur dalam semesta S maka akan berlaku:

1. $N(\tilde{A}) = 1 \Leftrightarrow Supp(\pi_X) \subseteq \bar{A}$
2. $N(\tilde{A}) = 0 \Leftrightarrow \exists s,\ \mu_{\tilde{A}}(s) = 0$ dan $\pi_X(s) = 1$

Bukti : 1. $N(\tilde{A}) = 1 \Leftrightarrow \inf\limits_{s\in S} \max\ (\mu_{\tilde{A}}(s),\ 1 - \pi_X(s)) = 1$

$\Leftrightarrow \forall s\in S,\ \max\ (\mu_{\tilde{A}}(s),\ 1 - \pi_X(s)) = 1$

a. Jika $\pi_X(s) = 0$

maka berapapun nilai $\mu_{\tilde{A}}(s)$, pasti diperoleh $\max\ (\mu_{\tilde{A}}(s),\ 1 - \pi_X(s)) = 1$

b. Jika $1 \geq \pi_X(s) > 0$

maka agar $\max\ (\mu_{\tilde{A}}(s),\ 1 - \pi_X(s)) = 1$

harus dipenuhi $\mu_{\tilde{A}}(s) = 1$

Dari (a) dan (b) maka

$\forall s\in S,\ \max\ (\mu_{\tilde{A}}(s),\ 1 - \pi_X(s)) = 1$

dipenuhi jika $Supp(\pi_X) \subseteq \bar{A}$

2. $N(\tilde{A}) = 0 \Leftrightarrow \inf\limits_{s\in S} \max\ (\mu_{\tilde{A}}(s),\ 1 - \pi_X(s)) = 0$

$\Leftrightarrow \exists s\in S,\ \max\ (\mu_{\tilde{A}}(s),\ 1 - \pi_X(s)) = 0$

$\Leftrightarrow \exists s\in S,\ \mu_{\tilde{A}}(s) = 0$ dan $\pi_X(s) = 1$ ∎

Teorema 3.13 Jika $\pi_X \subseteq \tilde{A}$ maka $N(\tilde{A}) \geq 0,5$

Bukti : $N(\tilde{A}) = \inf\limits_{s\in S} \max\ (\mu_{\tilde{A}}(s),\ 1 - \pi_X(s))$

Karena $\pi_X \subseteq \tilde{A}$ maka $\forall s\in S,\ \pi_X(s) \leq \mu_{\tilde{A}}(s)$

1. Jika $0,5 \le \pi_X(s) \le \mu_{\tilde{A}}(s)$ maka
   $\max(\mu_{\tilde{A}}(s), 1 - \pi_X(s)) = \mu_{\tilde{A}}(s) \ge 0,5$
2. Jika $\pi_X(s) \le 0,5 \le \mu_{\tilde{A}}(s)$ maka terdapat dua kemungkinan :
   a. $\max(\mu_{\tilde{A}}(s), 1 - \pi_X(s)) = \mu_{\tilde{A}}(s) \ge 0,5$
   b. $\max(\mu_{\tilde{A}}(s), 1 - \pi_X(s)) = 1 - \pi_X(s)$
   $\ge 0,5$
3. Jika $\pi_X(s) \le \mu_{\tilde{A}}(s) \le 0,5$ maka
   $\max(\mu_{\tilde{A}}(s), 1 - \pi_X(s)) = 1 - \pi_X(s) \ge 0,5$

■

Apakah teorema 3.2 dan 3.4 masih berlaku untuk himpunan kabur? Pertanyaan tersebut akan dibahas dalam teorema 3.14 berikut ini.

Teorema 3.14 Jika $\tilde{A}$ merupakan himpunan kabur dan π_X merupakan distribusi posibilitas yang berkaitan dengan variabel X dalam semesta S serta $hgt(\pi_X) \ge 0,5$ maka akan berlaku:

1. $\max(\Pi(\tilde{A}), \Pi(\tilde{A}')) \ge 0,5$
2. $\min(N(\tilde{A}), N(\tilde{A}')) \le 0,5$

Bukti : Dari teorema 3.10 diperoleh pernyataan bahwa $\max(\Pi(\tilde{A}), \Pi(\tilde{A}')) = \Pi(\tilde{A} \cup \tilde{A}')$

$$= \sup_{s \in S} \min(\mu_{\tilde{A} \cup \tilde{A}'}(s), \pi_X(s))$$

Berdasarkan teorema 2.1 diketahui bahwa

$\forall s \in S,\ \mu_{\tilde{A} \cup \tilde{A}'}(s) \geq 0,5$

sehingga $\sup\limits_{s \in S} \min\ (\mu_{\tilde{A} \cup \tilde{A}'}(s),\ \pi_X(s)) \geq 0,5$

Jadi $\max\ (\Pi(\tilde{A}),\ \Pi(\tilde{A}')) \geq 0,5$

2. Dari teorema 3.10 diperoleh pernyataan bahwa $\min\ (N(\tilde{A}),\ N(\tilde{A}')) = N(\tilde{A} \cap \tilde{A}')$

$= \inf\limits_{s \in S} \max\ (\mu_{\tilde{A} \cap \tilde{A}'}(s),\ 1 - \pi_X(s))$

Berdasarkan teorema 2.1 diketahui bahwa

$\mu_{\tilde{A} \cap \tilde{A}'}(s) \leq 0,5$

sehingga

$\inf\limits_{s \in S} \max\ (\mu_{\tilde{A} \cap \tilde{A}'}(s),\ 1 - \pi_X(s)) \leq 0,5$

Jadi $\min\ (N(\tilde{A}),\ N(\tilde{A}')) \leq 0,5$ ∎

Hubungan antara ukuran posibilitas dan nesesitas yang dibahas pada teorema 3.6 di atas juga masih berlaku, asalkan π_X normal. Pembahasan selengkapnya diberikan dalam teorema 3.15 berikut ini.

Teorema 3.15 Jika diberikan distribusi π_X normal yang berkaitan dengan variabel dalam semesta S maka $\forall_{\tilde{A}}$, $\Pi(\tilde{A}) \geq N(\tilde{A})$

Bukti : Bukti teorema ini menggunakan strategi kontraposisi.

Andaikan $\exists_{\tilde{A}}$, $\Pi(\tilde{A}) < N(\tilde{A})$. Berarti

$$\sup_{s \in S} \min (\mu_{\tilde{A}}(s), \pi_X(s)) < \inf_{s \in S} \max (\mu_{\tilde{A}}(s), 1 - \pi_X(s))$$

Keadaaan tersebut mengakibatkan

$$\forall s \in S, \min (\mu_{\tilde{A}}(s), \pi_X(s)) < \max (\mu_{\tilde{A}}(s), 1 - \pi_X(s))$$

1. Jika $\mu_{\tilde{A}}(s) < \pi_X(s)$ maka

   $\min (\mu_{\tilde{A}}(s), \pi_X(s)) = \mu_{\tilde{A}}(s) < 1 - \pi_X(s)$

   Karena $\mu_{\tilde{A}}(s) \geq 0$ maka $0 < 1 - \pi_X(s)$.

   Jadi $\pi_X(s) < 1$

2. Jika $\mu_{\tilde{A}}(s) > \pi_X(s)$ maka

$$\min (\mu_{\tilde{A}}(s), \pi_X(s)) = \pi_X(s) < \max (\mu_{\tilde{A}}(s), 1 - \pi_X(s))$$

   a. Jika $\max (\mu_{\tilde{A}}(s), 1 - \pi_X(s)) = \mu_{\tilde{A}}(s)$

      maka $\pi_X(s) < \mu_{\tilde{A}}(s)$.

      Karena $\mu_{\tilde{A}}(s) \leq 1$ maka $\pi_X(s) < 1$

   b. Jika $\max (\mu_{\tilde{A}}(s), 1 - \pi_X(s)) = 1 - \pi_X(s)$

      maka $\pi_X(s) < 1 - \pi_X(s)$

      $\Leftrightarrow \pi_X(s) < 0,5$

Dari (1), (2a), dan (2b), terbukti bahwa π_X tidak normal.

Karena telah terbutkti bahwa

$\exists_{\tilde{A}}$, $\Pi(\tilde{A}) < N(\tilde{A}) \Longrightarrow \pi_X$ tidak normal

maka terbukti pulalah

π_X normal $\Longrightarrow \forall_{\tilde{A}}$, $\Pi(\tilde{A}) \geq N(\tilde{A})$ ∎

Sifat ukuran posibilitas dan nesesitas yang dibahas pada teorema 3.7 di atas tidak berlaku jika $\tilde{A}$ merupakan himpunan kabur. Hal itu mudah dipahami karena teorema 3.7 tersebut diperoleh berdasarkan teorema 3.2 dan 3.3 yang sudah tidak berlaku untuk himpunan kabur.

BAB IV
Variabel Bahasa

Salah satu bahan yang penting untuk pembahasan tentang logika kabur dan penalaran *approximate* adalah variabel bahasa (*linguistic variabel*). Berbeda dengan pengertian variabel yang sudah dikenal selama ini, nilai untuk variabel bahasa bukan merupakan bilangan melainkan berupa kata-kata atau kalimat. Pengertian variabel bahasa yang akan dibahas ini tidak sama dengan pengertian variabel string dalam pemrograman komputer, meskipun nilai variabel string dapat pula berupa kata-kata atau kalimat. Nilai dalam variabel bahasa adalah kata-kata yang sekaligus merupakan himpunan kabur. Sedangkan nilai dalam variabel string tidak ada kaitannya dengan himpunan kabur. Definisi variabel bahasa diberikan dalam definisi berikut ini.

Definisi 4.1 Variabel bahasa ditentukan oleh *quintuple* $(x, T(x), S, G, \tilde{M})$, di mana

1. Nama untuk variabel bahasa dinyatakan dengan x.
2. T(x), sering disingkat T, merupakan himpunan term untuk x, yaitu himpunan nama-nama nilai bahasa (*linguistic*

value) untuk variabel bahasa x.

3. Setiap nilai bahasa merupakan himpunan kabur yang umumnya dinyatakan dengan x dan ditentukan oleh semesta S serta berkaitan dengan variabel dasar (*base variabel*) s.
4. G merupakan aturan sintaksis (*syntatic rule*) untuk membentuk nama baru X dari nilai x. Aturan sintaksis biasanya dinyatakan dalam bentuk tata bahasa (*grammar*).
5. $\tilde{M}$ merupakan aturan sematik (*sematic rule*) yang berkaitan dengan arti atau makna setiap X, $\tilde{M}(X)$ merupakan himpunan kabur dalam S. X tertentu yang digeneralisasi oleh G disebut *term*.

Untuk memperjelas pengertian variabel bahasa, berikut ini diberikan contoh konkrit variabel bahasa yang diberi label "kecepatan". Jika "kecepatan" merupakan variabel dalam himpunan bilangan real maka nilai variabel tersebut berupa bilangan-bilangan real yang menunjukkan kecepatan suatu kendaraan atau benda-benda yang bergerak. Pembahasan selengkapnya diberikan dalam contoh 4.1.

Contoh 4.1 Andaikan X merupakan variabel bahasa yang mempunyai nama (label) "kecepatan" dan S = [0 , 150]. Term untuk variabel bahasa ini adalah "sangat lambat", "lambat", "sedang", "cepat", dan "sangat cepat". Variabel dasar s adalah kecepatan yang mempunyai satuan km/jam.

$\tilde{M}(X)$ merupakan aturan yang menetapkan arti suatu term. Misalkan, akan ditentukan arti atau makna term "lambat". $\tilde{M}(\text{lambat})$ merupakan himpunan kabur yang memberi arti pada term "lambat". Dalam hal ini ditentukan bahwa term "lambat" digunakan jika kecepatan kendaraan atau benda berkisar antara 10 sampai 45 km/jam.

$\tilde{M}(\text{lambat}) = \{(s, \mu_{lambat}(s)) \mid s \in [0, 150]\}$

dengan fungsi keanggotaan

$$\mu_{lambat}(s) = \begin{cases} 0 & , \ s \in [0,10] \text{ atau } s \in [45,150] \\ L\left(\dfrac{20 - s}{10}\right) & , \ s \in [10, 20] \\ 1 & , \ s \in [20, 30] \\ R\left(\dfrac{s - 30}{15}\right) & , \ s \in [30, 45] \end{cases}$$

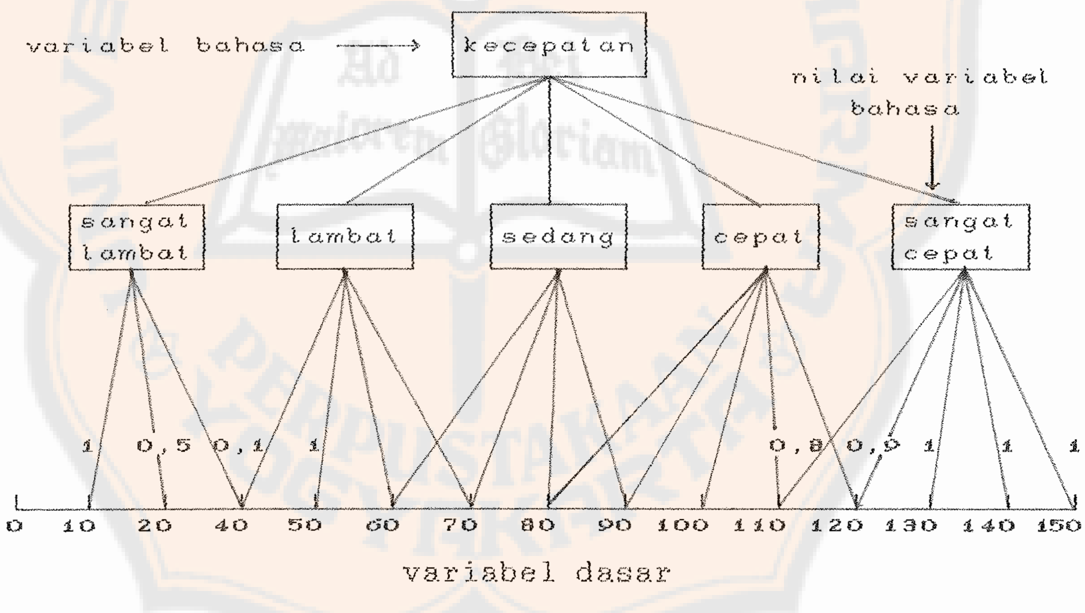
$$R(x) = L(x) = \max(0, 1-x)$$

T(x) didefinisikan sebagai himpunan term untuk variabel x. Dalam contoh ini ditentukan :

T(kecepatan) = {sangat lambat, lambat, sedang, cepat, sangat cepat}.

G(x) merupakan aturan yang menghasilkan term-term dalam himpunan term.

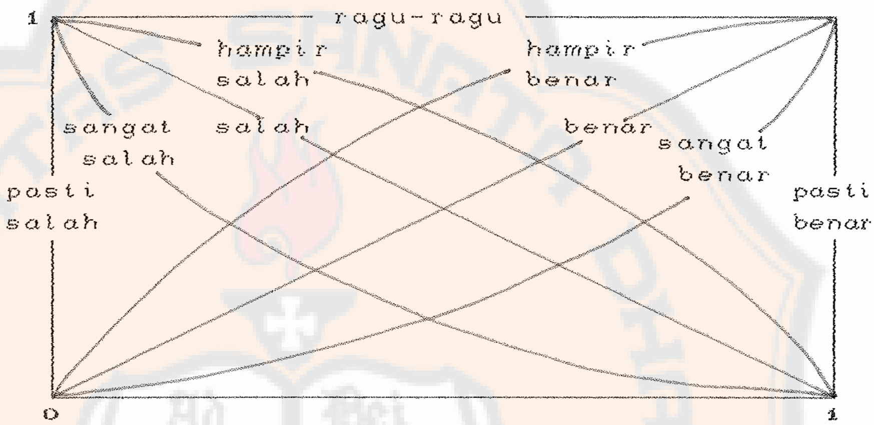
Berikut ini diberikan sketsa hubungan antara variabel bahasa, nilai variabel bahasa dan variabel dasar.



gambar 4.1

Hubungan variabel bahasa, nilai variabel bahasa, dan variabel dasar

Salah satu variabel bahasa yang cukup penting adalah variabel bahasa "kebenaran". Himpunan term untuk variabel bahasa "kebenaran" berbeda untuk ahli yang satu dengan ahli yang lain. Baldwin mendefinisikan variabel bahasa yang digambarkan dalam gambar 4.2 dibawah ini.



gambar 4.2
Variabel bahasa menurut definisi Baldwin

Baldwin mendefinisikan bahwa

$$\mu_{\text{sangat benar}}(s) = (\mu_{\text{benar}}(s))^2$$

$$\mu_{\text{hampir benar}}(s) = (\mu_{\text{benar}}(s))^{\frac{1}{2}}$$

Selain Baldwin, Zadeh juga mendefinisikan variabel bahasa "kebenaran". Zadeh mengusulkan fungsi keanggotaan untuk term benar adalah sebagai berikut:

$$\mu_{\text{benar}}(s) = \begin{cases} 0 & \text{untuk } 0 \le s \le a \\ 2.\left(\dfrac{s-a}{1-a}\right)^2 & \text{untuk } a \le s \le \dfrac{a+1}{2} \\ 1 - \left(\dfrac{s-a}{1-a}\right)^2 & \text{untuk } \dfrac{a+1}{2} \le s \le 1 \end{cases}$$

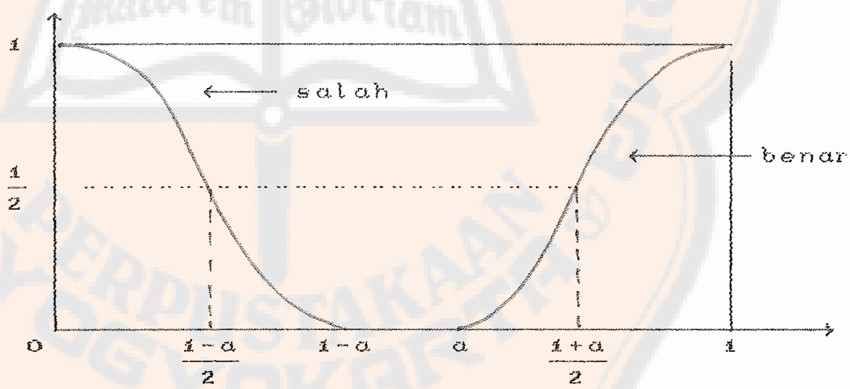
$s = \frac{1 + a}{2}$ disebut titik persilangan (*crossover point*)

$a \in [0, 1]$ merupakan parameter yang menunjukkan pendapat subyektif tentang nilai minimum s yang berkenaan dengan pernyataan yang dianggap sebagai pernyataan yang benar.

Fungsi keanggotaan untuk "salah" adalah sebagai berikut:

$$\mu_{salah}(s) = \mu_{benar}(1 - s) \qquad 0 \le s \le 1$$

Gambar berikut memperlihatkan term-term "benar" dan "salah" yang didefinisikan oleh Zadeh.



gambar 4.3

Term "benar" dan "salah" menurut definisi Zadeh

Himpunan term untuk variabel bahasa "kebenaran" yang didefinisikan oleh Zadeh adalah sebagai berikut:

T(kebenaran) = {benar, tidak benar, sangat benar, tidak sangat benar, ... , salah, tidak salah, sangat salah, ... , tidak sangat benar dan tidak sangat salah, ... }

Berikut ini akan dibahas beberapa variabel bahasa yang mempunyai kekhususan tertentu. Variabel bahasa tersebut adalah variabel bahasa terstruktur dan variabel bahasa Boolean. Untuk dapat membahas variabel bahasa tersebut diperlukan pembahasan tentang pembatas bahasa (*linguistic hedge*) atau pengubah (*modifier*). Definisi *modifier* adalah sebagai berikut.

Definisi 4.2 **Pembatas** (*hedge*) atau **pengubah** (*modifier*) **bahasa** adalah sebuah operasi yang mengubah arti sebuah term (himpunan kabur). Jika pada term $\tilde{A}$ dikenai suatu *modifier* maka akan terdapat term baru, $\tilde{B}$, yang diberi notasi $\tilde{B} = m(\tilde{A})$.

Beberapa *modifier* yang sering dipakai adalah sebagai berikut:

1. *Modifier* yang semakin menegaskan atau meyakinkan.

   Contoh *modifier* yang demikian adalah "sangat" (*very*). Jika *modifier* "sangat" dikenakan pada term "cepat", maka akan diperoleh term baru "sangat cepat".

   Fungsi keanggotaan term yang dikenai *modifier* ini didefinisikan sebagai berikut:

$$\mu_{\text{sangat }\tilde{A}}(s) = (\mu_{\tilde{A}}(s))^2$$

2. *Modifier* yang membuat ragu-ragu atau kebimbangan.

   Contoh *modifier* yang demikian adalah "kurang lebih" dan "kira-kira". Jika *modifier* ini dikenakan pada term "cepat" maka akan terdapat term baru "kurang lebih cepat" atau "kira-kira cepat". Fungsi keanggotaan untuk term yang dikenai *modifier* ini adalah sebagai berikut:

$$\mu_{\text{kurang lebih }\tilde{A}}(s) = (\mu_{\tilde{A}}(s))^{\frac{1}{2}}$$

Definisi 4.3 Variabel bahasa x dikatakan **terstruktur** jika terdapat suatu algoritma yang daapt mengkarakteristikkan T(x) dan $\tilde{M}(x)$

T(x) dan $\tilde{M}(x)$ pada variabel bahasa terstruktur dapat dihubungkan dengan suatu algoritma yang akan menghasilkan term-term untuk himpunan term sekaligus menghubungkan dengan arti-artinya.

Contoh 4.2 Diberikan semesta S = [0, 150] dan x merupakan variabel bahasa yang mempunyai label "kecepatan".

Jika T(kecepatan) = {cepat, sangat cepat, sangat-sangat cepat, ... }

maka dapat ditentukan sebuah algoritma yang sesuai untuk himpunan term tersebut. Algoritma tersebut adalah:

$$T^{i+1} = \{cepat\} \cup \{sangat\ T^{i}\}$$

Untuk $i = 1$, $T^{1} = \{cepat\}$

$i = 2$, $T^{2} = \{cepat, sangat\ cepat\}$

$i = 3$, $T^{3} = \{cepat, sangat\ cepat, sangat\text{-}sangat\ cepat\}$

Karena term-term pada himpunan term hanya dibentuk oleh term "cepat" dan *modifier* "sangat" maka jika fungsi keanggotaan "cepat" diketahui, dapat dengan mudah ditentukan arti $\tilde{M}(x)$ untuk setiap term.

Misalkan

$$\tilde{M}(sangat\ cepat) = \{(s, \mu_{sangat\ cepat}(s)), s \in [0, 150]\}$$

$$\mu_{sangat\ cepat}(s) = (\mu_{cepat}(s))^{2}$$

Definisi 4.4 Variabel bahasa Boolean adalah variabel bahasa yang term-termnya merupakan ekspresi-ekspresi Boolean dalam variabel-variabel yang berbentuk Xp dan m(Xp). Xp merupakan term primer dan m merupakan *modifier*. Dengan demikian $m(X_P)$ merupakan himpunan kabur yang diperoleh akibat m dikenakan pada X_P.

Contoh 4.3 Andaikan "kecepatan" merupakan variabel bahasa Boolean yang mempunyai himpunan term sebagai berikut:

T(kecepatan) = {cepat, tidak cepat, lambat, tidak lambat, sangat lambat, tidak cepat dan tidak lambat, lambat atau cepat, ... }

Dalam himpunan term tersebut, "cepat" dan "lambat" merupakan term-term primer, "sangat" adalah *modifier*, dan "dan", "atau", "tidak" adalah operator-operator Boolean.

Jika "dan" dikaitkan dengan irisan, "atau" dengan union, "tidak" dengan komplemen maka dapat ditentukan arti untuk term-term yang terdapat pada himpunan term tersebut, antara lain:

$\tilde{M}$(tidak cepat) $= \neg$ cepat

$\tilde{M}$(tidak sangat cepat) $= \neg$ (cepat)^2

$\tilde{M}$(cepat atau lambat) $=$ cepat $\cup$ lambat

$\tilde{M}$(tidak cepat dan tidak lambat)

$= \neg$ cepat $\cap \neg$ lambat

Jika diketahui bahwa:

$\tilde{M}(\text{lambat}) = \{(s,\ \mu_{lambat}(s)),\ s \in [0,\ 150]\}$

$$\mu_{lambat}(s) = \begin{cases} 1 & s \in [0,30] \\ \left(1 + \left(\dfrac{s-30}{10}\right)^2\right)^{-1} & s \in [30,150] \end{cases}$$

dan $\tilde{M}(\text{cepat}) = \{(s,\ \mu_{cepat}(s)),\ s \in [0,\ 150]\}$

$$\mu_{cepat}(s) = \begin{cases} 0 & s \in [0,60] \\ \left(1 + \left(\dfrac{s-60}{10}\right)^2\right)^{-1} & s \in [60,150] \end{cases}$$

maka fungsi keanggotaan untuk term "lambat atau cepat" adalah sebagai berikut:

$$\mu_{lambat\ atau\ cepat}(s) = \begin{cases} 1 & s \in [0,30] \\ \left(1 + \left(\dfrac{s-30}{10}\right)^2\right)^{-1} & s \in [30,60] \\ \text{maks}\left\{\left(1 + \left(\dfrac{s-30}{10}\right)^2\right)^{-1}, \right. & \\ \left. \left(1 + \left(\dfrac{s-60}{10}\right)^2\right)^{-1}\right\} & s \in [60,150] \end{cases}$$

BAB V

Logika Kabur

A. Logika Boolean

Logika klasik, yang dikenal dengan nama logika Boolean, hanya mempunyai dua nilai kebenaran, benar dan salah. Jika pernyataan p merupakan pernyataan yang benar, maka nilai kebenarannya biasanya dilambangkan dengan lambang 1. Sebaliknya nilai kebenaran untuk pernyataan yang salah dilamabngkan dengan 0. Jika $\upsilon(p)$ merupakan nilai kebenaran untuk pernyataan p maka $\upsilon(p) \in \{0, 1\}$. Karena nilai kebenaran dalam logika Boolean hanya dua, maka untuk mendefinisikan operator-operator logika cukup menggunakan tabel saja.

Jika p merupakan pernyataan yang dapat bernilai 1 dan 0, maka definisi untuk operator *negasi* ($\neg$) diberikan dalam tabel berikut:

p	¬p
1	0
0	1

Tabel 5.1
Tabel kebenaran p dan ¬p

Operator negasi tersebut dapat diartikan sebagai "tidak".

Jadi "$\neg p$" dikatakan sebagai "tidak p".

Jika diberikan dua buah pernyataan p dan q, maka definisi-definisi untuk operator-operator *konjungsi* ($\wedge$), *disjungsi* ($\vee$), *implikasi* ($\Longrightarrow$), dan *biimplikasi* ($\Longleftrightarrow$) diberikan pada tabel berikut:

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Longrightarrow q$	$p \Longleftrightarrow q$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0
0	0	0	0	1	1

Tabel 5.2

Tabel kebenaran $p \wedge q$, $p \vee q$, $p \Longrightarrow q$, dan $p \Longleftrightarrow q$

Operator konjungsi dapat diartikan "dan", disjungsi diartikan "atau", implikasi diartikan "jika ... maka ..." dan implikasi diartikan " ... bila dan hanya bila ... ". Dengan demikian $p \wedge q$ dibaca "p dan q", $p \vee q$ dibaca "p atau q", $p \Longrightarrow q$ dibaca "jika p maka q", dan $p \Longleftrightarrow q$ dibaca "p bila dan hanya bila q".

Operator implikasi dan biimplikasi, selain didefinisikan dengan menggunakan tabel, juga dapat didefinisikan dengan menggunakan operator-operator negasi, konjungsi dan disjungsi. Untuk jelasnya perhatikan tabel 5.3 dan tabel 5.4 berikut ini.

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \Longrightarrow q$	$\neg p \vee q$
1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1
0	0	1	1	1	1

tabel 5.3

tabel kebenaran $p \Longrightarrow q$ dan $\neg p \vee q$

Dari tabel 5.3 tersebut tampak bahwa tabel kebenaran untuk kolom $p \Longrightarrow q$ dan $\neg p \vee q$ sama, hal itu berarti bahwa $p \Longrightarrow q \equiv \neg p \vee q$.

p	q	$p \Longrightarrow q$	$q \Longrightarrow p$	$(p \Longrightarrow q) \wedge (q \Longrightarrow p)$	$p \Longleftrightarrow q$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	0	0
0	0	1	1	1	1

tabel 5.4

tabel kebenaran $(p \Longrightarrow q) \wedge (q \Longrightarrow p)$ dan $p \Longleftrightarrow q$

Dari tabel 5.4 diatas, nilai kebenaran pada kolom $p \Longleftrightarrow q$ dan $(p \Longrightarrow q) \vee (q \Longrightarrow p)$ sama. Hal itu menunjukkan bahwa $p \Longleftrightarrow q \equiv (p \Longrightarrow q) \vee (q \Longrightarrow p)$.

Dalam logika Boolean terdapat banyak aturan yang dapat digunakan untuk menarik kesimpulan dari beberapa premis/pernyataan yang diberikan. Dua diantarannya adalah *Modus Ponens* dan *Modus Tolens*. Jika diberikan pernyataan p dan q, maka kedua aturan penarikan kesimpulan tersebut dapat ditulis dalam bentuk diagram/skema berikut:

<u>modus ponens</u>

$$\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ p \\ \hline \quad q \end{array}$$

<u>modus tolens</u>

$$\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ \quad \neg q \\ \hline \neg p \end{array}$$

Aturan modus ponens mengatakan bahwa:

Jika diberikan pernyataan "jika p maka q" dan diketahui pernyataan p benar/terjadi, maka disimpulkan bahwa pernyataan q juga benar/terjadi.

Contoh 5.1 Diberikan pernyataan "jika musim hujan tiba maka sungai Code banjir". Pada suatu saat diketahui bahwa mussim hujan telah tiba, maka dapat disimpulkan bahwa sungai Code banjir.

Secara skematis, penarikan kesimpulan tersebut dapat ditulis menjadi:

Jika musim hujan tiba maka Sungai Code banjir
Musim hujan telah tiba

Sungai Code banjir

Aturan modus tolens mengatakan bahwa:
Apabila diberikan pernyataan "jika p maka q" dan diketahui bahwa pernyataan q tidak benar/tidak terjadi, maka disimpulkan bahwa pernyataan p juga tidak benar/ tidak terjadi.

Contoh 5.2 Diberikan pernyataan "jika musim hujan tiba maka sungai Code banjir". Ternyata diketahui bahwa sungai Code tidak banjir, maka dapat disimpulkan bahwa musim hujan belum tiba. Secara skematis, penarikan kesimpulan tersebut dapat ditulis menjadi:

Jika musim hujan tiba maka sungai Code banjir
Sungai Code tidak banjir

Musim hujan belum tiba

B. Logika Kabur

Tidak dapat disangkal bahwa logika Boolean banyak memberikan bantuan dalam perkembangan tehnologi, khususnya dalam tehnologi digital. Meskipun demikian, seringkali logika Boolean masih mengalami kesulitan jika akan diterapkan pada masalah kehidupan sehari-hari. Kesulitan tersebut muncul karena tidak semua pernyataan dalam kehidupan sehari-hari dapat sepenuhnya dievaluasi sebagai pernyataan yang benar atau salah. Banyak pernyataan dalam kehidupan sehari-hari yang bersifat ragu-ragu atau tidak dapat dikatakan sebagai pernyataan yang benar tetapi pada saat yang sama juga tidak dapat dikatakan sebagai pernyataan yang salah. Contoh pernyataan-pernyataan yang demikian misalnya "bunga itu indah", "mobil itu bagus", atau "gedung itu tinggi". Kata "indah", "bagus", atau "tinggi" tidak mempunyai ukuran yang tepat/eksak. Tidak ada alat ukur yang dapat mengukur sekuntum bunga sehingga dapat dikatakan sebagai bunga yang indah atau tidak indah.

Salah satu pemecahan permasalahan tersebut adalah dengan mengembangkan logika Boolean menjadi logika yang menerima pernyataan dengan tak hingga banyak nilai kebenaran. Logika yang demikian disebut sebagai **Logika Kabur** (*Fuzzy Logic*). Dengan demikian jika p merupakan pernyataan dalam logika kabur maka $\upsilon(p) \in [0, 1]$. Jika pernyataan p merupakan pernyataan yang "pasti benar" maka $\upsilon(p) = 1$, sebaliknya nilai kebenaran untuk pernyataan p yang pasti salah adalah $\upsilon(p) = 0$. Jika pada pernyataan p tidak dapat dipastikan apakah merupakan pernyataan yang benar atau yang salah maka $0 < \upsilon(p) < 1$. Pernyataan yang demikian disebut pernyataan kabur (*vague proposition*).

Seperti halnya dalam logika Boolean, logika kabur juga mempunyai operator-operator negasi, konjungsi, disjungsi, implikasi, dan implikasi. Pembicaraan tentang operator-operator tersebut akan dibahas dalam definisi-definisi berikut ini.

Definisi 5.1 Diberikan pernyataan p dan $\upsilon(p)$ merupakan nilai kebenaran untuk pernyataan p.
Andaikan "$\neg$" merupakan lambang operator *negasi* maka nilai kebenaran untuk pernyataan "tidak p" adalah
$\upsilon(\neg p) = 1 - \upsilon(p)$

Contoh 5.3 Diberikan pernyataan p : "Rumah itu bagus".
Nilai kebenaran untuk pernyataan p adalah $\upsilon(p) = 0,8$.
Nilai kebenaran untuk pernyataan "Rumah itu tidak bagus" adalah $\upsilon(\neg p) = 1 - 0,8 = 0,2$

Definisi 5.2 Diberikan pernyataan p dan q dengan nilai kebenaran masing-masing $\upsilon(p)$ dan $\upsilon(q)$.
Andaikan "$\wedge$" merupakan lambang operator *konjungsi* maka nilai kebenaran untuk pernyataan "p dan q" didefinisikan dengan
$\upsilon(p \wedge q) = \min\ (\upsilon(p), \upsilon(q))$

Contoh 5.4 Diberikan pernyataan p : "Rumah itu bagus" dan pernyataan q : "Rumah itu mahal" dengan nilai kebenaran masing-masing $\upsilon(p) = 0,8$ dan $\upsilon(q) = 0,5$.

Nilai kebenaran untuk pernyataan "Rumah itu bagus dan mahal" adalah

$$\begin{aligned} \upsilon(p \wedge q) &= \min\ (\upsilon(p),\ \upsilon(q)) \\ &= \min\ (0,8\ ,\ 0,5) \\ &= 0,5 \end{aligned}$$

Definisi 5.3 Diberikan pernyataan p dan q dengan nilai kebenaran masing-masing $\upsilon(p)$ dan $\upsilon(q)$. Jika "$\vee$" merupakan lambang operator *disjungsi* maka nilai kebenaran untuk pernyataan "p atau q" didefinisikan dengan $\upsilon(p \vee q) = \text{maks}(\upsilon(p),\ \upsilon(q))$.

Contoh 5.5 Diberikan pernyataan p = "Rumah itu bagus" dan pernyataan q = "Rumah itu mahal" dengan nilai kebenaran masing-masing $\upsilon(p) = 0,8$ dan $\upsilon(q) = 0,5$.

Nilai kebenaran untuk pernyataan "Rumah itu bagus atau mahal" adalah

$$\begin{aligned} \upsilon(p \wedge q) &= \text{maks}\ (\upsilon(p),\ \upsilon(q)) \\ &= \text{maks}\ (0,8\ ,\ 0,5) = 0,8 \end{aligned}$$

Dalam pembahasan tentang logika Boolean telah ditunjukkan bahwa operator implikasi dapat dinyatakan dengan menggunakan negasi dan disjungsi, yaitu $p \Longrightarrow q \equiv \neg p \vee q$. Hal yang sama juga berlaku dalam logika kabur. Jadi kesamaan tersebut dapat dipakai untuk mendefinisikan operator implikasi dalam logika kabur. Pembahasan selengkapnya diberikan dalam definisi berikut ini.

Definisi 5.4 Diberikan pernyataan p dan q dengan nilai kebenaran masing-masing $\upsilon(p)$ dan $\upsilon(q)$. Jika "$\Longrightarrow$" merupakan lambang operator *implikasi* dan karena $p \Longrightarrow q \equiv \neg p \vee q$ maka nilai kebenaran untuk pernyataan "jika p maka q" didefinisikan dengan

$$\begin{aligned} \upsilon(p \Longrightarrow q) &= \upsilon(\neg p \vee q) \\ &= \text{maks } (1-\upsilon(p), \upsilon(q)). \end{aligned}$$

Contoh 5.6 Diberikan pernyataan p : "Rumah itu bagus" dan pernyataan q : "Rumah itu mahal" dengan nilai kebenaran masing-masing $\upsilon(p) = 0,8$ dan $\upsilon(q) = 0,5$.

Nilai kebenaran untuk pernyataan "Jika rumah itu bagus maka rumah itu mahal" adalah

$\upsilon(p \Longrightarrow q) = \text{maks } (1-\upsilon(p)\ ,\ \upsilon(q))$

$$= \text{maks } (1 - 0{,}8 \; , \; 0{,}5)$$
$$= \text{maks } (0{,}3 \; , \; 0{,}5)$$
$$= 0{,}5$$

Dalam pembahasan di depan, telah ditunjukkan bahwa operator biimplikasi dapat dinyatakan dengan menggunakan implikasi, $p \Longleftrightarrow q \equiv (p \Longrightarrow q) \vee (q \Longrightarrow p)$. Karena operator implikasi dapat dinyatakan dengan menggunakan negasi dan disjungsi, maka biimplikasi pun dapat dinyatakan dengan menggunakan negasi, konjungsi, dan disjungsi. Dengan demikian $p \longleftrightarrow q \equiv (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)$. Kesamaan tersebut selanjutnya digunakan untuk mendefinisikan operator biimplikasi dalam logika kabur. Pembahasan selanjutnya diberikan dalam definisi berikut.

Definisi 5.5 Diberikan pernyataan p dan q dengan nilai kebenaran masing-masing $\upsilon(p)$ dan $\upsilon(q)$.

Jika "$\Longleftrightarrow$" merupakan lambang operator *biimplikasi* dan karena $p \Longleftrightarrow q \equiv (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)$ maka nilai kebenaran untuk pernyataan "p bila dan hanya bila q" didefinisikan dengan

$$\upsilon(p \Longleftrightarrow q) = \upsilon(\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)$$
$$= \min\,(\text{maks }(1-\upsilon(p),\upsilon(q)) \; , \; \text{maks }(1-\upsilon(q),\upsilon(p)) \;)$$

Contoh 5.7 Diberikan pernyataan p : "Rumah itu bagus" dan pernyataan q : "Rumah itu mahal" dengan nilai kebenaran masing-masing $\upsilon(p) = 0,8$ dan $\upsilon(q) = 0,5$.

Karena maks $(1 - 0,8 \ , \ 0,5) = 0,5$ dan

maks $(1 - 0,5 \ , \ 0,8) = 0,8$

maka nilai kebenaran untuk pernyataan "Rumah itu bagus bila dan hanya bila rumah itu mahal" adalah

$$\begin{aligned} \upsilon(p \Longleftrightarrow q) &= \min\,(0,5 \ , \ 0,8) \\ &= 0,5 \end{aligned}$$

C. Pernyataan kabur

Di depan telah disinggung tentang pernyataan kabur (*vague proposition*) yang merupakan pernyataan yang mempunyai tak berhingga banyak nilai kebenaran. Selanjutnya bagaimana cara menentukan nilai kebenaran pernyataan kabur tersebut? Nilai kebenaran dalam logika kabur biasanya dinyatakan dengan menggunakan ukuran kabur yang berupa ukuran posibilitas dan ukuran nesesitas. Mengapa demikian? Penjelasan selengkapnya dapat ditemui dalam pembahasan berikut ini.

Makna pernyataan p yang berbentuk "X mengambil nilai dalam A", disingkat "X adalah A", adalah menentukan tepat tidaknya nilai variabel X dalam semesta S dengan memakai predikat A yang merupakan himpunan bagian S. Berkaitan dengan makna tersebut, pernyataan p yang berbentuk "X adalah s" dengan $s \in S$ disebut sebagai pernyataan elementer dan diberi notasi p_s. Jika berkaitan dengan semesta S, pernyataan elementer merupakan pernyataan yang tepat (*precise*). Sebaliknya, pernyataan non elementer merupakan pernyataan yang tidak tepat (*imprecise*). Pernyataan yang berbentuk "X adalah ∅" merupakan pernyataan yang salah (*false*) karena pernyataan tersebut berarti "X tidak mengambil nilai dalam S" dan itu bertentangan dengan definisi bahwa x mengambil nilai dalam S. Sebaliknya, pernyataan "X adalah S" pasti merupakan pernyataan yang benar (*true*) sebab pernyataan tersebut berarti "X mengambil nilai dalam S" dan itu selalu terjadi.

Dari penjelasan di atas, jika A bukan merupakan singleton maka pernyataan p : "X adalah A" bukan merupakan pernyataan yang tepat. Jadi pernyataan tersebut mempunyai ketidakpastian. Ukuran kabur yang mengevaluasi ketidakpastian pernyatan-pernyataan p tersebut adalah ukuran posibilitas Π. Mengenai hal ini akan dibicarakan secara lebih rinci dalam definisi 4.7. Sebelum membicarakan definisi tersebut, terlebih dahulu akan dibahas himpunan $\mathcal{P}$ yang merupakan himpunan pernyataan-

pernyataan. Uraian selengkapnya diberikan dalam definisi 5.6 berikut ini.

Definisi 5.6 Himpunan $\mathcal{P}$ adalah himpunan pernyataan-pernyataan sedemikian hingga

1. jika $p \in \mathcal{P}$,maka $\neg p \in \mathcal{P}$ ("$\neg$" merupakan lambang negasi)
2. jika $p \in \mathcal{P}$ dan $q \in \mathcal{P}$, maka $p \wedge q \in \mathcal{P}$ ("$\wedge$" merupakan lambang kenjungsi).

Dalam definisi 5.6 tersebut operator disjungsi ($\vee$) dan implikasi ($\Longrightarrow$) tidak disinggung. Hal itu disebabkan karena operator disjungsi dapat dinyatakan dengan menggunakan operator negasi dan operator konjungsi, sedangkan operator implikasi dapat dinyatakan dengan menggunakan operator negasi dan disjungsi, yaitu $p \vee q \equiv \neg(\neg p \wedge \neg q)$ dan $p \Longrightarrow q \equiv \neg p \vee q$.

Pernyataan $\nu(p \Longrightarrow q) = 1$ diartikan sebagai "p mengakibatkan q". Sedangkan pernyataan $\nu(p \wedge q\ ) = 0$ mempunyai arti bahwa "p dan q tidak kompatibel" karena jika satu pernyataan merupakan pernyataan yang benar maka pernyataan yang lain pasti salah. Oleh karena itu pernyataan "$\nu(p \wedge q) = 0$" ekuivalen dengan "$\nu(p \Longrightarrow \neg q) = 1$" karena "p menyebabkan tidak q".

Definisi 5.7 Jika p merupakan pernyataan dalam $\mathcal{P}$ maka ukuran posibilitas Π yang mengevaluasi ketidakpastian pernyataan p didefinisikan dengan

$$\Pi(p) = \sup \{\pi(p_s) | \, \upsilon(p_s \Longrightarrow p) = 1\}$$

di mana $\pi(p_s)$ merupakan distribusi posibilitas.

Definisi 5.7 tersebut analog dengan definisi 2.21, yaitu jika S himpunan berhingga maka

$$\Pi(A) = \mathrm{Sup} \{\pi(s) | \, s \in A\}$$

di mana $\pi(s)$ merupakan distribusi posibilitas. Selanjutnya bagaimana menentukan distribusi posibilitas $\pi(p_s)$ pada definisi 5.7 di atas ? Masalah tersebut dibicarakan dalam definisi 5.8 berikut ini.

Definisi 5.8 Diberikan pernyataan p : "X adalah $\tilde{A}$" dengan $\tilde{A}$ merupakan himpunan kabur normal dalam S.

Pernyataan p tersebut dapat direpresentasikan oleh distribusi posibilitas

$$\{\pi(p_s) | \, s \in S\}$$

yang didefinisikan dengan

$$\pi(p_s) = \mu_{\tilde{A}}(s) \triangleq \pi_X(s)$$

Notasi $\pi_X(s)$ dalam definisi 5.8 di atas merupakan notasi untuk distribusi posibilitas yang berhubungan dengan variabel X (lihat definisi 3.7).

Sampai sekarang kita telah membicarakan bahwa ukuran posibilitas Π dapat digunakan untuk mengevaluasi ketidak-pastian pernyataan-pernyataan p dalam $\mathcal{P}$. Selain itu juga telah dibicarakan bahwa pernyataan kabur p = "X adalah $\tilde{A}$" dapat direpresentasikan dengan menggunakan distribusi posibilitas $\{\pi(p_s) | s \in S\}$. Tetapi sejauh ini kita belum membahas bagaimana menentukan nilai kebenaran suatu pernyataan kabur? Jawaban untuk pertanyaan tersebut dibahas dalam pembicaraan berikut ini yang akhirnya menghasilkan definisi 5.9.

Pada prinsipnya nilai kebenaran suatu pernyataan kabur ditentukan dengan cara membandingkan makna/isi pernyataan tersebut dengan kenyataan (realita). Dengan kata lain nilai kebenaran suatu pernyataan kabur adalah ukuran kesesuaian antara isi pernyataan dengan referensi atau realita yang digunakan. Dalam perhitungan-perhitungan selanjutnya, ukuran kesesuaian tersebut dinyatakan dengan menggunakan ukuran posibilitas dan ukuran nesesitas. Jika "X adalah $\tilde{F}$" merupakan pernyataan yang akan dievaluasi dan "X adalah $\tilde{A}$" merupakan referensi (realita) maka keduanya akan dinyatakan sebagai distribusi posibilitas $\mu_{\tilde{F}}(s)$ dan $\mu_{\tilde{A}}(s)$. Kedua distribusi posibilitas tersebut menyatakan pembatas untuk variabel X.

Definisi 5.9 Diberikan pernyataan "X adalah $\tilde{F}$" sebagai pernyataan yang akan dievaluasi dan "X adalah $\tilde{A}$" yang merupakan pernyataan referensi (realita).

Nilai posibilitas dan nesesitas pernyataan "X adalah $\tilde{F}$" jika diketahui "X adalah $\tilde{A}$" adalah

$$\Pi(\tilde{F};\tilde{A}) = \sup_{s \in S} \min\,(\mu_{\tilde{F}}(s),\ \mu_{\tilde{A}}(s)) = \Pi(\tilde{A};\tilde{F})$$

$$N(\tilde{F};\tilde{A}) = \inf_{s \in S} \max\,(\mu_{\tilde{F}}(s),\ 1 - \mu_{\tilde{A}}(s))$$

Dengan demikian nilai kebenaran suatu pernyataan kabur dinyatakan sebagai ukuran posibilitas atau ukuran nesesitas. Pada pembicaraan selanjutnya ada kemungkinan hanya akan dinyatakan dengan ukuran posibilitas saja. Hal itu tidak menjadi masalah karena pada teorema 3.5 telah dibuktikan bahwa $\Pi(A) = 1 - N(A')$ dan hal itu juga berlaku untuk pernyatan kabur.

Teorema 5.1 Jika referensi A bukan himpunan kabur yang berarti bahwa referensi yang diberikan adalah referensi yang tepat atau lengkap maka $\Pi(\tilde{F};A) = N(\tilde{F};A)$.

Bukti : Jika referensi A adalah referensi yang tepat, menurut pembicaraan tentang pernyataan elementer di atas, A merupakan singleton dalam semesta S.

$$\text{Jika } A = \{s_o\} \text{ maka } \mu_A(s) = \begin{cases} 1 \ , & s = s_o \\ 0 \ , & s \neq s_o \end{cases}$$

Dengan demikian

$$\begin{aligned} \text{a. } \Pi(\tilde{F};A) &= \sup_{s \in S} \min \left(\mu_{\tilde{F}}(s), \mu_{\tilde{A}}(s)\right) \\ &= \sup \min \left(\mu_{\tilde{F}}(s_o), \mu_{\tilde{A}}(s_o)\right) \\ &= \min \left(\mu_{\tilde{F}}(s_o), 1\right) \\ &= \mu_{\tilde{F}}(s_o) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b. } N(\tilde{F};A) &= \inf_{s \in S} \max \left(\mu_{\tilde{F}}(s), 1 - \mu_{\tilde{A}}(s)\right) \\ &= \max \left(\mu_{\tilde{F}}(s_o), 1 - \mu_{\tilde{A}}(s_o)\right) \\ &= \max \left(\mu_{\tilde{F}}(s_o), 1 - 1\right) \\ &= \max \left(\mu_{\tilde{F}}(s_o), 0\right) \\ &= \mu_{\tilde{F}}(s_o) \end{aligned}$$

Dari hasil (a) dan (b) terbukti bahwa

$$\Pi(\tilde{F};A) = N(\tilde{F};A)$$ ■

Teorema 5.2 Jika F merupakan himpunan tegas maka apapun keadaan A (Himpunan tegas atau himpunan kabur normal) akan berlaku salah satu yang berikut

a. $\Pi(F;A) = 1$

b. $N(F;A) = 0$

Bukti : a. Jika $s \in F$ maka $\mu_{\tilde{F}}(s) = 1$

Berarti $\min(\mu_{\tilde{F}}(s), \mu_{\tilde{A}}(s))$

$= \mu_{\tilde{A}}(s)$

Karena $\tilde{A}$ merupakan himpunan kabur normal atau himpunan tegas maka ada kemungkinan $\mu_{\tilde{A}}(s) = 1$ sehingga $\Pi(F;A) = 1$

b. Jika $s \notin F$ maka $\mu_{\tilde{F}}(s) = 0$

Berarti $\max(\mu_{\tilde{F}}(s), 1 - \mu_{\tilde{A}}(s))$

$= 1 - \mu_{\tilde{A}}(s)$

Karena $\tilde{A}$ merupakan himpunan kabur normal atau himpunan tegas maka ada kemungkinan $\mu_{\tilde{A}}(s) = 1$ sehingga $N(F;A) = 0$ ■

Dari teorema 5.1 dan 5.2 dapat disimpulkan bahwa jika referensinya lengkap dan F bukan himpunan kabur maka pernyataan p = "X adalah F" merupakan pernyataan klasik yang hanya mempunyai dua nilai kebenaran.

$$\nu(p) = \Pi(F;\{s_o\}) = N(F;\{s_o\}) = \mu_{\tilde{F}}(s_o) \in \{0, 1\}$$

D. Penarikan Kesimpulan Dengan Premis-premis Yang Tidak Pasti

Dalam pembicaraan tentang logika Boolean telah dibahas dua aturan penarikan kesimpulan yang sering digunakan. Kedua aturan tersebut adalah modus ponens dan modus tolens. Dalam pembahasan tersebut nilai kebenaran suatu pernyataan hanya dua (benar atau salah), sehingga pernyataan atau premis-premis yang diberikan merupakan pernyataan tegas. Bukti kesahihan kedua aturan penarikan kesimpulan tersebut dapat dengan mudah dibuat, yaitu dengan menggunakan hukum de Morgan dan sifat distribusi konjungsi terhadap disjungsi atau sebaliknya, yang akhirnya diperoleh suatu tautologi.

Bagaimana jika premisnya merupakan pernyataan kabur yang nilai kebenarannya dinyatakan dengan ukuran posibilitas dan ukuran nesesitas? Pertanyaan tersebut akan dijawab dalam pembahasan teorema 5.3 sampai teorema 5.7. Bukti-bukti yang dibuat tidak didasarkan pada tautologi melainkan berdasarkan sifat-sifat ukuran posibilitas dan nesesitas serta sifat-sifat operator "min" dan "max". Pembahasan selengkapnya adalah sebagai berikut:

Teorema 5.3 Diberikan pernyataan kabur p dan q, maka berlaku penarikan kesimpulan sebagai berikut:

$$\frac{\begin{array}{c} N(p \Longrightarrow q) \geq a \\ N(p) \geq b \end{array}}{N(q) \geq \min\ (a,\ b)}$$

Bukti : Karena $\quad p \wedge q \equiv p \wedge (\neg p \vee q)$

$$\equiv p \wedge (p \Longrightarrow q)$$

dan $\quad N(q) \geq N(p \wedge q)$

maka $\quad N(q) \geq N(p \wedge q) = N(p \wedge (p \Longrightarrow q)$

$$= \min\ (N(p),\ N(p \Longrightarrow q))$$

sehingga $\quad N(q) \geq \min\ (N(p \Longrightarrow q),\ N(p))$.

Karena $\quad N(p \Longrightarrow q) \geq a \quad$ dan $\quad N(p) \geq b$

maka $\quad \min\ (N(p \Longrightarrow q),\ N(p)) \geq \min\ (a,\ b)$

sehingga $\quad N(q) \geq \min\ (N(p \Longrightarrow q),\ N(p))$

$$\geq \min\ (a,\ b)$$

Jadi $\quad N(q) \geq \min\ (a,\ b)$ ∎

Teorema 5.4 Diberikan pernyataan kabur p dan q, maka berlaku penarikan kesimpulan sebagai berikut:

$$\frac{\begin{array}{c} N(p \Longrightarrow q) \geq a \\ \Pi(p) \geq b \end{array}}{\Pi(q) \geq b\ .\ \nu(a + b > 1)}$$

di mana $\nu(a + b > 1) = \begin{cases} 1 & \text{jika } a + b > 1 \\ 0 & \text{jika } a + b \leq 1 \end{cases}$

Bukti : Karena $\neg p \wedge \neg q \equiv \neg q \wedge (\neg p \vee q)$

$$\equiv \neg q \wedge (p \Longrightarrow q)$$

maka

$$N(\neg p) \geq N(\neg p \wedge \neg q) = N(\neg q \wedge (p \Longrightarrow q))$$

$$= \min\,(N(\neg p),\ N(p \Longrightarrow q))$$

sehingga $N(\neg p) \geq \min\,(N(\neg p),\ N(p \Longrightarrow q))$.

Karena $\Pi(p) = 1 - N(\neg p)$

maka $\Pi(p) \leq 1 - \min\,(N(\neg p),\ N(p \Longrightarrow q))$

$$= \max\,(1 - N(\neg q),\ 1 - N(p \Longrightarrow q))$$

$$= \max\,(\Pi(q),\ 1 - N(p \Longrightarrow q))$$

sehingga $\Pi(p) \leq \max\,(\Pi(q),\ 1 - N(p \Longrightarrow q))$

Karena $\Pi(p) \geq b$ dan $N(p \Longrightarrow q) \geq a$

maka

$$b \leq \Pi(p) \leq \max\,(\Pi(q),\ 1 - N(p \Longrightarrow q))$$

$$\leq \max\,(\Pi(q),\ 1 - a)$$

sehingga $b \leq \max\,(\Pi(q),\ 1 - a)$

a. Jika $1 - a < b$

maka karena $b \leq \max\,(\Pi(q),\ 1 - a)$

dapat dipastikan bahwa

$$\max\,(\Pi(q),\ 1 - a) = \Pi(q)$$

Jadi $\Pi(q) \geq b$

b. Jika $1 - a \geq b$

maka karena $b \leq \max(\Pi(q), 1 - a)$

tidak ada yang dapat disimpulkan tentang $\Pi(q)$ kecuali $\Pi(q) \geq 0$ (dari definisi ukuran posibilitas)

Hasil (a) dan (b) dapat diringkas menjadi

$\Pi(q) \geq b \cdot \nu(a + b > 1)$

$$\text{di mana } \nu(a + b > 1) \begin{cases} 1 & \text{jika } a + b > 1 \\ 0 & \text{jika } a + b \leq 1 \end{cases}$$ ■

Teorema 5.5 Diberikan pernyataan kabur p dan q, maka berlaku penarikan kesimpulan sebagai berikut:

$$\begin{array}{c} \Pi(p \Longrightarrow q) \geq a \\ N(p) \geq b \\ \hline \Pi(q) \geq a \cdot \nu(a + b > 1) \end{array}$$

$$\text{di mana } \nu(a + b > 1) = \begin{cases} 1 & \text{jika } a + b > 1 \\ 0 & \text{jika } a + b \leq 1 \end{cases}$$

Bukti : Karena $p \Longrightarrow q \equiv \neg p \vee q$

dan $\Pi(p) = 1 - N(\neg p)$

maka $\Pi(p \Longrightarrow q) = \Pi(\neg p \vee q)$

$$= \max(\Pi(\neg p), \Pi(q))$$

$$= \max(1 - N(p), \Pi(q))$$

Karena $\Pi(p \Longrightarrow q) \geq a$ dan $N(p) \geq b$

maka

$$a \leq \Pi(p \Longrightarrow q) = \max(1 - N(p), \Pi(q))$$

$$\leq \max(1 - b, \Pi(q))$$

sehingga $a \leq \max(1 - b, \Pi(q))$

a. Jika $1 - b < a$

maka karena $a \leq \max(1 - b, \Pi(q))$

dapat dipastikan bahwa

$$\max(1 - b, \Pi(q)) = \Pi(q)$$

jadi $\Pi(q) \geq a$

b. Jika $1 - b \geq a$

maka karena $a \leq \max(1 - b, \Pi(q))$

tidak dapat diambil kesimpulan tentang $\Pi(q)$ kecuali $\Pi(q) \geq 0$ (definisi ukuran posibilitas).

Hasil (a) dan (b) dapat diringkas menjadi

$$\Pi(q) \geq a \,.\, \nu(a + b > 1)$$

di mana $\nu(a + b > 1) = \begin{cases} 1 & \text{jika } a + b > 1 \\ 0 & \text{jika } a + b \leq 1 \end{cases}$

■

Teorema 5.3, 5.4, dan 5.5 yang baru saja dibahas tersebut merupakan perluasan aturan modus ponens. Perluasan aturan modus tolens diberikan dalam teorema 5.6 dan 5.7 berikut ini.

Teorema 5.6 Diberikan pernyataan kabur p dan q, maka berlaku penarikan kesimpulan sebagai berikut:

$$\frac{\begin{array}{l} N(p \Longrightarrow q) \geq a \\ N(q) \leq b \end{array}}{N(p) \leq \begin{cases} 1 & \text{jika} \quad a \leq b \\ b & \text{jika} \quad a > b \end{cases}}$$

Bukti : Karena $p \wedge q \equiv p \wedge (\neg p \vee q)$

$\equiv p \wedge (p \Longrightarrow q)$

dan $N(q) \geq N(p \wedge q)$

maka

$N(q) \geq N(p \wedge q) = N(p \wedge (p \Longrightarrow q))$

$= \min\ (N(p),\ N(p \Longrightarrow q))$

sehingga $N(q) \geq \min\ (N(p),\ N(p \Longrightarrow q))$

Karena $N(p \Longrightarrow q) \geq a$ dan $N(q) \leq b$

maka $b \geq N(q) \geq \min\ (N(p),\ N(p \Longrightarrow q))$

$\geq \min\ (N(p),\ a)$

sehingga $b \geq \min\ (N(p),\ a)$

a. Jika $a > b$

maka karena $b \geq \min(N(p), a)$

dapat dipastikan bahwa

$$\min(N(p), a) = N(p)$$

jadi $N(p) \leq b$

b. Jika $a \leq b$

maka karena $b \geq \min(N(p), a)$

tidak dapat disimpulkan tentang $N(p)$ kecuali $N(p) \leq 1$ (dari definisi ukuran nesesitas).

Hasil (a) dan (b) dapt diringkas menjadi

$$N(p) \leq \begin{cases} 1 & \text{jika } a \leq b \\ b & \text{jika } a > b \end{cases}$$ ∎

Teorema 5.7 Diberikan pernyataan kabur p dan q, maka berlaku penarikan kesimpulan sebagai berikut:

$$\begin{array}{l} N(p \Longrightarrow q) \geq a \\ \Pi(q) \leq b \\ \hline \Pi(p) \leq \max(1 - a, b) \end{array}$$

Bukti : Karena $\neg p \wedge \neg q \equiv \neg q \wedge (\neg p \vee q)$

$\equiv \neg q \wedge (p \Longrightarrow q)$

dan $N(\neg p) \geq N(\neg p \wedge \neg q)$

maka $N(\neg p) \geq N(\neg p \wedge \neg q)$

$= N(\neg q \wedge (p \Longrightarrow q))$

$= \min\ (N(\neg q),\ N(p \Longrightarrow q))$

sehingga $N(\neg p) \geq \min\ (N(\neg q),\ N(p \Longrightarrow q))$

Karena $\Pi(p) = 1 - N(\neg p)$

maka $\Pi(p) \leq 1 - \min\ (N(\neg q),\ N(p \Longrightarrow q))$

$= \max\ (1 - N(\neg q),\ 1 - N(p \Longrightarrow q))$

$= \max\ (\Pi(p),\ 1 - N(p \Longrightarrow q))$

sehingga

$$\Pi(p) \leq \max\ (\Pi(p),\ 1 - N(p \Longrightarrow q))$$

Karena $N(p \Longrightarrow q) \geq a$ dan $\Pi(q) \leq b$

maka

$$\Pi(p) \leq \max\ (\Pi(p),\ 1 - N(p \Longrightarrow q))$$

$$\leq \max\ (b,\ 1 - a)$$

jadi $\Pi(p) \leq \max\ (1 - a,\ b)$ ∎

Teorema 5.8 berikut merupakan teorema yang disusun berdasarkan teorema 5.3, 5.4, 5.6, dan 5.7.

Teorema 5.8 Diberikan pernyataan kabur p dan q, maka berlaku penarikan kesimpulan sebagai berikut:

$$\frac{\begin{array}{l} N(p \Longrightarrow q) \geq a \\ N(q \Longrightarrow p) \geq a' \\ N(p) \in [b, b'], \Pi(p) \in [c, c'] \text{ dan } \max(1-b, c') = 1 \end{array}}{}$$

$$N(q) \in \left[\min(a, b), \begin{cases} 1 & \text{jika } a' \leq b' \\ b' & \text{jika } a' > b' \end{cases} \right]$$

$$\Pi(q) \in \left[c \,.\, \nu(a + c > 1), \max(1 - a', c') \right]$$

Bukti : Diketahui bahwa $N(p) \in [b, b']$ dan $\Pi(p) \in [c, c']$, berarti $b \leq N(p) \leq b'$ dan $c \leq \Pi(p) \leq c'$.

1. Berdasarkan teorema 5.3 dan 5.4 diperoleh pernyataan-pernyataan

   a. $$\frac{\begin{array}{l} N(p \Longrightarrow q) \geq a \\ N(p) \geq b \end{array}}{N(q) \geq \min(a, b)}$$

   b. $$\frac{\begin{array}{l} N(q \Longrightarrow p) \geq a' \\ N(p) \leq b' \end{array}}{N(q) \leq \begin{cases} 1 & \text{jika } a' \leq b' \\ b' & \text{jika } a' > b' \end{cases}}$$

Dari hasil 1a dan 1b dapat disimpulkan

bahwa

$$\min(a,b) \le N(q) \le \begin{cases} 1 & \text{jika } a' \le b' \\ b' & \text{jika } a' > b' \end{cases}$$

Jadi diperoleh

$$N(q) \in \left[\min(a, b), \begin{cases} 1 & \text{jika } a' \le b' \\ b' & \text{jika } a' > b' \end{cases} \right]$$

2. Berdasarkan teorema 5.4 dan 5.7 diperoleh pernyataan

a. $N(p \Longrightarrow q) \ge a$

$\Pi(p) \ge c$

$\Pi(q) \ge c \cdot \nu(a + c > 1)$

b. $N(q \Longrightarrow p) \ge a'$

$\Pi(p) \le b'$

$\Pi(q) \le \max(1 - a', c')$

Dari hasil 2a dan 2b dapat disimpulkan bahwa

$$(c \cdot \nu(a + c > 1)) \le \Pi(q) \le \max(1 - a', c')$$

Jadi

$$\Pi(q) \in \left[c \cdot \nu(a + c > 1), \max(1 - a', c')\right] \qquad \blacksquare$$

Syarat bahwa $\max(1 - b, c') = 1$ dalam teorema 5.8 tersebut dapat diartikan sebagai:

1. $b > 0 \Longrightarrow c' = 1$
2. $c' < 1 \Longrightarrow b = 0$.

Syarat tersebut berdasarkan pada teorema 3.8 yang mengatakan bahwa a. $N(A) > 0 \Longrightarrow \Pi(A) = 1$

b. $\Pi(A) < 1 \Longrightarrow N(A) = 0$

E. Pernyataan Kabur Berbentuk "Jika X adalah $\tilde{A}$ maka Y adalah $\tilde{B}$"

Dalam definisi 5.8 telah dibahas pernyataan kabur yang berbentuk "X adalah $\tilde{A}$" di mana X merupakan variabel yang mengambil nilai pada semesta S. Dalam pembahasan tersebut, pernyataan p = "X adalah $\tilde{A}$" dapat direpresentasikan oleh $\{\pi(p_s) \mid s \in S\}$ di mana distribusi posibilitas $\pi(p_s)$ ditentukan oleh persamaan

$$\pi(p_s) = \mu_{\tilde{A}}(s) \mathrel{\hat{=}} \mu_X(s).$$

Dalam bagian ini kita akan membahas pernyataan yang berbentuk "jika X adalah $\tilde{A}$ maka Y adalah $\tilde{B}$" di mana X dan Y berturut-turut merupakan variabel pada semesta S dan T. $\tilde{A}$ merupakan himpunan kabur dalam S dan $\tilde{B}$ merupakan himpunan kabur dalam T. Pembahasan berikut difokuskan pada bagaimana merepresentasikan pernyataan "jika X adalah $\tilde{A}$ maka Y adalah $\tilde{B}$" tersebut.

Hubungan sebab akibat dari X ke Y pada pernyataan tersebut dinyatakan dengan menggunakan distribusi posibilitas bersyarat $\pi_{Y/X}$ yang membatasi nilai Y untuk nilai X yang diberikan. Selanjutnya jika diberikan distribusi posibilitas $\pi_X(s)$ yang merepresentasikan pernyataan "X adalah $\tilde{A}$" maka distribusi posibilitas $\pi_Y(t)$ yang membatasi variabel Y dapat dihitung dengan menggunakan rumus

$$\forall t \in T,\ \pi_Y(t) = \sup_{s \in S} \min\ (\pi_{Y/X}(t,s),\ \pi_X(s)) \qquad 5.1$$

Persamaan (5.1) tersebut analog dengan Teorema Probabilitas Total (*Total Probability Theorem*) dalam teori probabilitas, yaitu

$$P(B) = \sum_i P(A_i)\ .\ P(B|A_i) \qquad 5.2$$

Selanjutnya jika X merupakan variabel random yang mengambil nilai dalam S dan Y merupakan variabel random untuk T maka persamaan (5.2) di atas dapat dinyatakan dengan

$$\forall t \in T,\ P_Y(t) = \sum_i P_{Y/X}(t,s)\ .\ P_X(s) \qquad 5.3$$

Jika p dan q merupakan pernyataan-pernyataan elementer, yaitu p = "X adalah s" dan q = "Y adalah t" maka $\pi_{Y/X}(t,s) = \Pi(q|p)$. $\Pi(q|p)$ merupakan ukuran posibilitas yang mengukur bahwa q dapat diturunkan dari p dan didefinisikan dengan

$$\Pi(p \wedge q) = \min\ (\Pi(q|p),\ \Pi(p)) \qquad 5.4$$

dengan p dan q merupakan pernyataan tegas. Persamaan (5.4) tersebut sebenarnya analog dengan probabilitas bersyarat pada teori probabilitas, yaitu

$$P(A \cap B) = P(B|A)\ .\ P(A) \qquad 5.5$$

Kembali pada persoalan di atas, jika p = "X = s" dan q = "Y = t" maka π_Y adalah proyeksi distribusi posibilitas $\pi_{(X,Y)}$ pada himpunan T. Berdasarkan persamaan (5.5) di atas, distribusi posibilitas $\pi_{(X,Y)}$ dapat didefinisikan dengan

$$\pi_{(X,Y)} = \min\ (\pi_{Y/X},\ \pi_X) \qquad 5.6$$

Jika p dan q merupakan pernyataan kabur, maka $\Pi(q|p)$ secara implisit ditentukan dengan pertidaksamaan

$$\Pi(p \wedge q) \geq \min\ (\Pi(q|p),\ \Pi(p)) \qquad 5.7$$

Selanjutnya, berdasarkan pertidaksamaan (5.7) tersebut dan kenyataan bahwa $\Pi(q) \geq \Pi(p \wedge q) \geq \min\ (\Pi(q|p),\ \Pi(p))$, maka pernyataan "jika X adalah $\tilde{A}$ maka Y adalah $\tilde{B}$" dapat direpresantasikan dengan

$$\forall t \in T,\ \mu_{\tilde{B}}(t) \geq \sup_{s \in S} \min\ (\pi_{Y/X}(t,s),\ \mu_{\tilde{A}}(s)) \qquad 5.8$$

di mana $\mu_{\tilde{A}}$ dan $\mu_{\tilde{B}}$ berturut-turut merupakan distribusi posibilitas yang berkaitan dengan variabel X dan Y, sementara itu $\pi_{Y/X}$ belum diketahui.

Penyelesaian maksimal untuk pertidaksamaan (5.8) tersebut akan diperoleh jika dipenuhi

$$\pi_{Y/X}(t,s) = \mu_{\tilde{A}}(s) \overset{*}{\longrightarrow} \mu_{\tilde{B}}(t) \qquad 5.9$$

di mana $a \overset{*}{\longrightarrow} b = \sup \{s \mid a * s \leq b\},\ s \in [0,\ 1]$

Operator "*" pada persamaan (5.9) di atas merupakan norma segitiga kontinu (*continous triangular norm*) yang antara lain berupa operator "min", "produk"/hasil kali, dan $s * t = \max (0,\ s+t-1)$. Karena selama ini operator yang kita gunakan adalah operator "min" maka definisi untuk $a \overset{*}{\longrightarrow} b$ yang dipakai dalam pembicaraan selanjutnya adalah yang menggunakan operator "min". Pembahasan selengkapnya diberikan dalam teorema 5.9 berikut ini.

Teorema 5.9 Implikasi Gödel

Jika $a * b = \min (a,\ b)$ maka

$$a \overset{*}{\longrightarrow} b = \begin{cases} 1, & \text{jika } a \leq b \\ b, & \text{jika } a > b \end{cases}$$

Bukti : $a \overset{*}{\longrightarrow} b = \sup \{s \mid a * s \leq b\}$

Karena $a * b = \min (a,\ b)$ maka

$a \overset{*}{\longrightarrow} b = \sup \{s \mid \min (a,\ s) \leq b\}$

a. jika $a \leq b$

maka berapapun nilai s pasti berlaku

$$\min(a,s) \le b$$

sehingga $\sup\{s \mid \min(a,s) \le b\} = 1$

b. jika $a > b$

maka $\min(a,s) \le b$ hanya terjadi jika

$s \le b$, sehingga

$\sup\{s \mid \min(a,s) \le b\} = b$

Dari hasil (a) dan (b) dapat disimpulkan

bahwa $a \overset{*}{\longrightarrow} b = \begin{cases} 1 & \text{, jika } a \le b \\ b & \text{, jika } a > b \end{cases}$ ■

Akhirnya kita sampai pada teorema yang membicarakan penarikan kesimpulan dengan premis yang berbentuk "jika X adalah $\tilde{A}$ maka Y adalah $\tilde{B}$". Oleh Zadeh teorema ini diberi nama "modus ponens yang digeneralisasi (*generalized modus ponens*)". Teorema tersebut adalah sebagai berikut:

Teorema 5.10 Diberikan premis/aturan "jika X adalah $\tilde{A}$ maka Y adalah $\tilde{B}$" dan diketahui "X adalah $\tilde{A}'$", maka dapat disimpulkan bahwa "Y adalah $\tilde{B}'$" dengan $\mu_{\tilde{B}'}$ ditentukan oleh rumus

$$\forall t \in T,\ \mu_{\tilde{B}'}(t) = \sup_{s \in S} \min\left(\mu_{\tilde{A}'}(s),\ \mu_{\tilde{A}}(s) \overset{*}{\longrightarrow} \mu_{\tilde{B}}(t)\right) \qquad 5.10$$

di mana

$$\mu_{\tilde{A}}(s) \overset{*}{\longrightarrow} \mu_{\tilde{B}}(t) = \begin{cases} 1, & \text{jika } \mu_{\tilde{A}}(s) \le \mu_{\tilde{B}}(t) \\ \mu_{\tilde{B}}(t), & \text{jika } \mu_{\tilde{A}}(s) > \mu_{\tilde{B}}(t) \end{cases}$$

Dalam bentuk yang lebih ringkas, teorema di atas dinyatakan dengan

$$\begin{array}{l} \text{Jika X adalah } \tilde{A} \text{ maka Y adalah } \tilde{B} \\ \quad \text{X adalah } \tilde{A}' \\ \hline \qquad\qquad \text{Y adalah } \tilde{B}' \end{array}$$

Rumus (5.10) di atas dapat dinyatakan dengan notasi $\tilde{B}' = \tilde{A}' \circ (\tilde{A} \overset{*}{\longrightarrow} \tilde{B})$

Bukti : Dari persamaan (5.1) didapat

$$\forall t \in T \ \pi_Y(t) = \sup_{s \in S} \min (\pi_{Y/X}(t,s), \pi_X(s))$$

Karena $\pi_Y(t) = \mu_{\tilde{B}'}(t)$ dan $\pi_X(s) = \mu_{\tilde{A}'}(s)$

serta $\pi_{Y/X}(t,s) = \mu_{\tilde{A}}(s) \overset{*}{\longrightarrow} \mu_{\tilde{B}}(t)$

maka

$$\forall t \in T,\ \mu_{\tilde{B}'}(t) = \sup_{s \in S} \min (\mu_{\tilde{A}'}(s), \mu_{\tilde{A}}(s) \overset{*}{\longrightarrow} \mu_{\tilde{B}}(t)) \qquad \blacksquare$$

Dari teorema 5.10 dapat diturunkan beberapa sifat yang selengkapnya dibahas dalam teorema-teorema berikut ini.

Teorema 5.11 $\tilde{A} \circ (\tilde{A} * \longrightarrow \tilde{B}) = \tilde{B}$

Bukti : Andaikan $t \in T$

$$\mu_{\tilde{A}}(s) * \longrightarrow \mu_{\tilde{B}}(t) = \begin{cases} 1, & \text{jika } \mu_{\tilde{A}}(s) \le \mu_{\tilde{B}}(t) \\ \mu_{\tilde{B}}(t), & \text{jika } \mu_{\tilde{A}}(s) > \mu_{\tilde{B}}(t) \end{cases}$$

1. Jika $\mu_{\tilde{A}}(s) \le \mu_{\tilde{B}}(t)$

maka $\mu_{\tilde{A}}(s) * \longrightarrow \mu_{\tilde{B}}(t) = 1$

sehingga

$$\begin{aligned} \mu_{\tilde{B}'}(t) &= \sup_{s \in S} \min\,(\mu_{\tilde{A}}(s),\ \mu_{\tilde{A}}(s) * \longrightarrow \mu_{\tilde{B}}(t)) \\ &= \operatorname{Sup}_{s \in S} \min\,(\mu_{\tilde{A}}(s),\ 1) \\ &= \operatorname{Sup}_{s \in S} \mu_{\tilde{A}}(s) \\ &= \mu_{\tilde{B}}(t) \end{aligned}$$

2. Jika $\mu_{\tilde{A}}(s) > \mu_{\tilde{B}}(t)$

maka $\mu_{\tilde{A}}(s) * \longrightarrow \mu_{\tilde{B}}(t) = \mu_{\tilde{B}}(t)$

sehingga

$$\begin{aligned} \mu_{\tilde{B}'}(t) &= \sup_{s \in S} \min\,(\mu_{\tilde{A}}(s),\ \mu_{\tilde{A}}(s) * \longrightarrow \mu_{\tilde{B}}(t)) \\ &= \sup_{s \in S} \min\,(\mu_{\tilde{A}}(s),\ \mu_{\tilde{B}}(t)) \\ &= \sup_{s \in S} \mu_{\tilde{B}}(t) = \mu_{\tilde{B}}(t) \end{aligned}$$

Dari (1) dan (2) dapat disimpulkan bahwa

$$\begin{aligned} \forall t \in T,\ \mu_{\tilde{B}'}(t) &= \operatorname{Sup}_{s \in S} \min\,(\mu_{\tilde{A}}(s),\ \mu_{\tilde{A}}(s) * \longrightarrow \mu_{\tilde{B}}(t)) \\ &= \mu_{\tilde{B}}(t) \end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa

$$\tilde{A} \circ (\tilde{A} \overset{*}{\longrightarrow} \tilde{B}) = \tilde{B} \qquad \blacksquare$$

Teorema 5.12 $\forall\ \tilde{A}'$ normal, $\tilde{A}' \subseteq \tilde{A} \Longrightarrow \tilde{B}' = \tilde{B}$

Bukti : Jika $\tilde{A}'$ normal maka $\sup_{s\in S} \mu_{\tilde{A}'}(s) = 1$

Jika $\tilde{A}' \subseteq \tilde{A}$ maka $\forall s \in S,\ \ \mu_{\tilde{A}'}(s) \le \mu_{\tilde{A}}(s)$

sehingga $\sup \mu_{\tilde{A}'}(s) \le \sup \mu_{\tilde{A}}(s)$.

Dari theorema 5.10 diketahui bahwa

$$\forall t \in T,\ \mu_{\tilde{B}'}(t) = \sup_{s\in S} \min\ (\mu_{\tilde{A}'}(s),\ \mu_{\tilde{A}}(s) \overset{*}{\longrightarrow} \mu_{\tilde{B}}(t))$$

1. Jika $\mu_{\tilde{A}}(s) \le \mu_{\tilde{B}}(t)$

   maka $\mu_{\tilde{A}}(s) \overset{*}{\longrightarrow} \mu_{\tilde{B}}(t) = 1$

   sehingga

$$\begin{aligned}\mu_{\tilde{B}'}(t) &= \sup_{s\in S} \min\ (\mu_{\tilde{A}'}(s),\ \mu_{\tilde{A}}(s) \overset{*}{\longrightarrow} \mu_{\tilde{B}}(t))\\ &= \sup_{s\in S} \min\ (\mu_{\tilde{A}'}(s),\ 1)\\ &= \sup_{s\in S} \mu_{\tilde{A}'}(s) \le \sup_{s\in S} \mu_{\tilde{A}}(s) \le \mu_{\tilde{B}}(t)\end{aligned}$$

   Diperoleh ketidaksamaan

$$\mu_{\tilde{B}'}(t) = \sup_{s\in S} \mu_{\tilde{A}'}(s) \le \mu_{\tilde{B}}(t)$$

   karena $\tilde{A}'$ normal maka diperoleh

$$\mu_{\tilde{B}'}(t) = 1 \le \mu_{\tilde{B}}(t)$$

   Karena tidak mungkin $\mu_{\tilde{B}}(t) > 1$ maka

$$\mu_{\tilde{B}'}(t) = \mu_{\tilde{B}}(t) = 1$$

2. Jika $\mu_{\tilde{A}}(s) > \mu_{\tilde{B}}(t)$

maka $\mu_{\tilde{A}}(s) \ast\!\!\longrightarrow \mu_{\tilde{B}}(t) = \mu_{\tilde{B}}(t)$

sehingga

$$\mu_{\tilde{B}'}(t) = \sup_{s\in S} \min\,(\mu_{\tilde{A}'}(s),\ \mu_{\tilde{A}}(s) \ast\!\!\longrightarrow \mu_{\tilde{B}}(t))$$

$$= \sup_{s\in S} \min\,(\mu_{\tilde{A}'}(s),\ \mu_{\tilde{B}}(t))$$

a. Jika $\mu_{\tilde{A}'}(s) > \mu_{\tilde{B}}(t)$

maka $\mu_{\tilde{B}'}(t) = \sup_{s\in S} \min\,(\mu_{\tilde{A}'}(s),\ \mu_{\tilde{B}'}(t))$

$$= \sup_{s\in S} \mu_{\tilde{B}}(t)$$

$$= \mu_{\tilde{B}}(t)$$

b. Jika $\mu_{\tilde{A}'}(s) \le \mu_{\tilde{B}}(t)$

maka $\mu_{\tilde{B}'}(t) = \sup_{s\in S} \min\,(\mu_{\tilde{A}'}(s),\ \mu_{\tilde{B}'}(t))$

$$= \sup_{s\in S} \mu_{\tilde{A}'}(s)$$

$$= \mu_{\tilde{B}}(t)$$

Dari hasil (1), (2a), dan (2b) dapat disimpulkan bahwa $\forall t \in T$, $\mu_{\tilde{B}'}(t) = \mu_{\tilde{B}}(t)$.

Jadi terbukti bahwa $\tilde{B}' = \tilde{B}$.

Teorema 5.13 $\forall\ \tilde{A}'$ normal , $\tilde{B}' \supseteq \tilde{B}$

Bukti : Dari Teorema 5.10 didapat persamaan

$$\forall t \in T,\ \mu_{\tilde{B}'}(t) = \sup_{s\in S} \min\,(\mu_{\tilde{A}'}(s),\ \mu_{\tilde{A}}(s) \ast\!\!\longrightarrow \mu_{\tilde{B}}(t))$$

1. Jika $\mu_{\tilde{A}}(s) \le \mu_{\tilde{B}}(t)$

maka $\mu_{\tilde{A}}(s) \ast\!\!\longrightarrow \mu_{\tilde{B}}(t) = 1$

sehingga

$$\mu_{\tilde{B}'}(t) = \sup_{s\in S} \min \left(\mu_{\tilde{A}'}(s),\ \mu_{\tilde{A}}(s) *\!\!\longrightarrow \mu_{\tilde{B}}(t)\right)$$

$$= \sup_{s\in S} \min \left(\mu_{\tilde{A}'}(s),\ 1\right)$$

$$= \sup_{s\in S} \mu_{\tilde{A}'}(s) = 1$$

Karena tidak mungkin $\mu_{\tilde{B}}(t) > 1$ maka

pasti dipenuhi bahwa $1 \geq \mu_{\tilde{B}}(t)$

Sehingga $\mu_{\tilde{B}'}(t) = \sup_{s\in S} \mu_{\tilde{A}'}(s) = 1 \geq \mu_{\tilde{B}}(t)$

atau $\mu_{\tilde{B}'}(t) \geq \mu_{\tilde{B}}(t)$

2. Jika $\mu_{\tilde{A}}(s) > \mu_{\tilde{B}}(t)$

maka $\mu_{\tilde{A}}(s) *\!\!\longrightarrow \mu_{\tilde{B}}(t) = \mu_{\tilde{B}}(t)$

sehingga

$$\mu_{\tilde{B}'}(t) = \sup_{s\in S} \min \left(\mu_{\tilde{A}'}(s),\ \mu_{\tilde{A}}(s) *\!\!\longrightarrow \mu_{\tilde{B}}(t)\right)$$

$$= \sup_{s\in S} \min \left(\mu_{\tilde{A}'}(s),\ \mu_{\tilde{B}}(t)\right)$$

a. Jika $\mu_{\tilde{A}'}(s) \leq \mu_{\tilde{B}}(t)$

$$\mu_{\tilde{B}'}(t) = \sup_{s\in S} \min \left(\mu_{\tilde{A}'}(s),\ \mu_{\tilde{B}}(t)\right)$$

$$= \sup_{s\in S} \mu_{\tilde{A}'}(s) = 1 = \mu_{\tilde{B}}(t)$$

b. Jika $\mu_{\tilde{A}'}(s) > \mu_{\tilde{B}}(t)$

maka $\mu_{\tilde{B}'}(t) = \sup_{s\in S} \min \left(\mu_{\tilde{A}'}(s),\ \mu_{\tilde{B}}(t)\right)$

$$= \sup_{s\in S} \mu_{\tilde{B}}(t)$$

$$= \mu_{\tilde{B}}(t)$$

Dari (1), (2a) dan (2b) terbukti bahwa

$\forall_{\tilde{A}'}$ normal , $\tilde{B}' \geq \tilde{B}$

Teorema 5.14 $\forall\ \tilde{A}'$, $\mu_{\tilde{B}}(t) \geq \sup \{\mu_{\tilde{A}'}(s) \mid \mu_{\tilde{A}}(s) = 0\}$

Bukti : Diberikan $s \in S$ sedemikian hingga $\mu_{\tilde{A}}(s) = 0$

Sehingga dipenuhi $\mu_{\tilde{A}}(s) \leq \mu_{\tilde{B}}(t)$

Dengan dengan demikian diperoleh

$$\sup_{s} \min\ (\mu_{\tilde{A}'}(s),\ \mu_{\tilde{A}}(s) \ast\!\!\longrightarrow \mu_{\tilde{B}}(t))$$

$$= \sup_{s} \min\ (\mu_{\tilde{A}'}(s),\ 1)$$

$$= \sup_{s} \mu_{\tilde{A}'}(s)$$

Karena

$$\mu_{\tilde{B}'}(t) = \sup_{s \in S} \min\ (\mu_{\tilde{A}'}(s),\ \mu_{\tilde{A}}(s) \ast\!\!\longrightarrow \mu_{\tilde{B}}(t)) \geq$$

$$\sup_{s} \min\ (\mu_{\tilde{A}'}(s),\ \mu_{\tilde{A}}(s) \ast\!\!\longrightarrow \mu_{\tilde{B}}(t))$$

maka $\mu_{\tilde{B}'}(t) \geq \sup_{s \in S} \{\mu_{\tilde{A}'}(s) \mid \mu_{\tilde{A}}(s) = 0\}$ ■

Teorema 5.14 tersebut mempunyai arti bahwa tingkat ketidakpastian akan terjadi jika bagian yang signifikan dari $\tilde{A}'$ tidak termasuk dalam $\tilde{A}$, secara intuitif tampak dalam kehidupan sehari-hari. Terlebih jika $\exists s \in S$, $\mu_{\tilde{A}'}(s) = 1$ dan $\mu_{\tilde{A}}(s) = 0$ maka $\tilde{B}' = T$ (ketidakpastian yang lengkap). Jika diketahui $\tilde{A}'$ "dekat" (tetapi pantas untuk berbeda) dengan $\tilde{A}$ berkenaan dengan suatu ukuran tertentu maka penarikan kesimpulan dengan menggunakan "modus ponens yang digeneralisasi" tidak boleh dilakukan kecuali jika terdapat informasi lebih lanjut mengenai kontinuitas dan monotonitas pada hubungan sebab akibat X $\longrightarrow$ Y di sekitar (*neighbourhood*) ($\tilde{A}$, $\tilde{B}$).

Sebuah contoh sederhana yang dapat memperjelas pembahasan tersebut adalah sebagai berikut:

Diberikan pernyataan "jika tomat <u>merah</u> maka tomat tersebut <u>matang</u>". Jika diketahui dari fakta bahwa ada tomat yang warnanya <u>sangat</u> <u>merah</u>, apakah dapat disimpulkan bahwa tomat tersebut sangat matang? Jawabnya <u>tidak</u>. Kita tidak boleh mengambil kesimpulan bahwa tomat tersebut sangat matang kecuali jika terdapat informasi bahwa tingkat kematangan sebanding dengan tingkat/derajat kemerahan.

Permasalahan yang muncul selanjutnya adalah bagaimana menghitung $\mu_{\tilde{B}'}(t)$? Didier Dubois dan Henry Prade dalam bukunya yang berjudul <u>Possibility Theory</u>, Plenum Press, New York, 1988, hal.: 152 - 158 memberikan salah satu pendekatan untuk menghitung $\mu_{\tilde{B}'}(t)$ tersebut.

Untuk memudahkan perhitungan-perhitungan selanjutnya, diambil himpunan $\tilde{A}$, $\tilde{A}'$, dan $\tilde{B}$ yang merupakan trapezoid.

$$\tilde{A} = (\underline{a},\ \bar{a},\ \alpha,\ \beta)_{LR}$$

$$\tilde{A}' = (\underline{a}',\ \bar{a}',\ \alpha',\ \beta')_{RL}$$

$$\tilde{B} = (\underline{b}, \bar{b}, \gamma, \delta)_{RL}$$

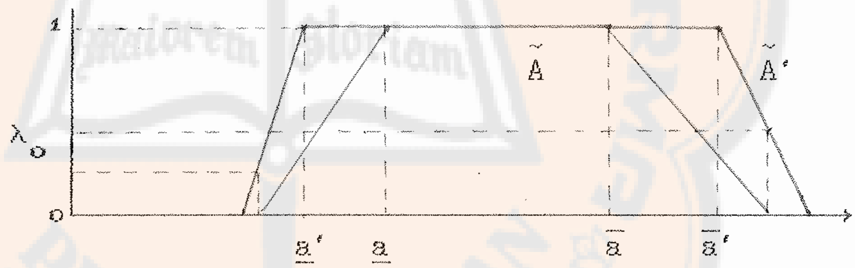
di mana $L(x) = R(x) = \max(0, 1 - x)$

Himpunan kabur $\tilde{B}'$ yang diperoleh dari penarikan kesimpulan dengan menggunakan "modus ponens yang digeneralisasi" didekati oleh himpunan kabur

$$\tilde{B}^{\#} = (\underline{b}', \bar{b}', \gamma', \delta')_{LR}$$

Untuk dapat menghitung $\underline{b}'$, $\bar{b}'$, γ', dan δ' terlebih dahulu harus dihitung λ_o dan λ_1 yang didefinisikan di bawah ini.

a. λ_o adalah tingkat ketidakpastian (1 - nesesitas) distribusi premis $\tilde{A}$ terhadap fakta.



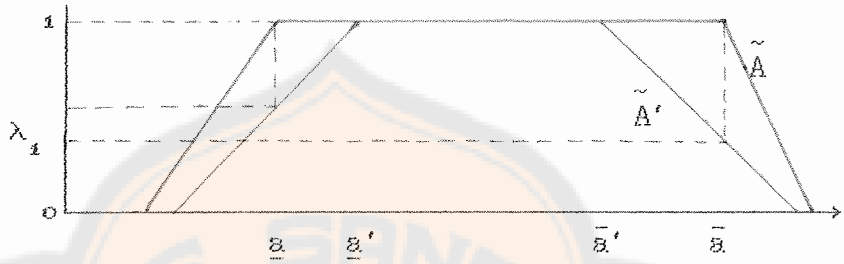
Gambar 5.1

Menentukan λ_o

Andaikan $u_l = \underline{a} - \alpha$ dan $u_r = \bar{a} + \beta$

maka $\lambda_o = \max \{ \mu_{\tilde{A}'}(u_l), \mu_{\tilde{A}'}(u_r) \}$ 5.11

b. λ_1 adalah tingkat inklusi inti distribusi fakta terhadap premis yang diberikan.



Gambar 5.2
Menentukan λ_1

λ_1 dihitung dengan menggunakan rumus berikut:

$$\lambda_1 = \min\ (\mu_{\tilde{A}'}(\underline{a}),\ \mu_{\tilde{A}'}(\bar{a})) \qquad 5.12$$

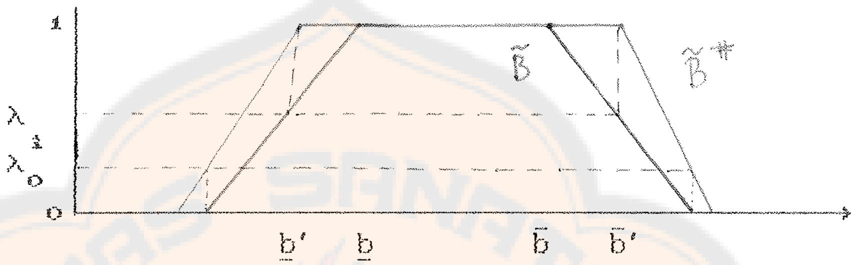
Selanjutnya $\underline{b}'$, $\bar{b}'$, γ', dan δ' dihitung dengan menggunakan rumus-rumus berikut:

$$\underline{b}' = \underline{b} - \gamma(1 - \lambda_1)$$

$$\bar{b}' = \bar{b} + \delta(1 - \lambda_1)$$

$$\gamma' = \frac{\lambda_1 \gamma}{1 - \lambda_0}$$

$$\delta' = \frac{\lambda_1 \delta}{1 - \lambda_0}$$



Gambar 5.3

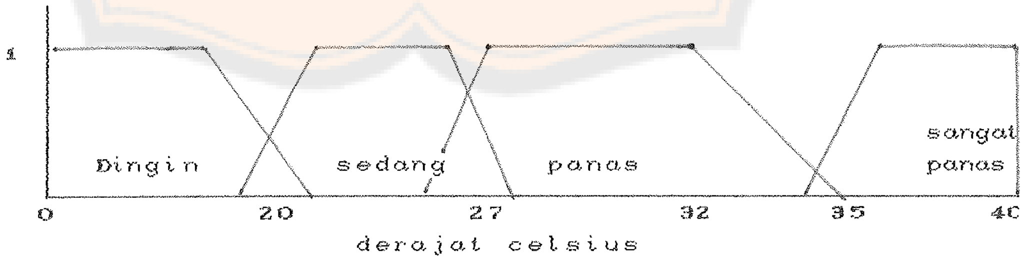
Menentukan $\tilde{B}^{\#}$ jika diberikan λ_0 dan λ_1

Contoh 5.8 Diberikan sebuah premis sebagai berikut:

"Jika suhu ruangan panas maka AC akan bekerja maksimal".

Beberapa fakta yang berlaku adalah sebagai berikut:

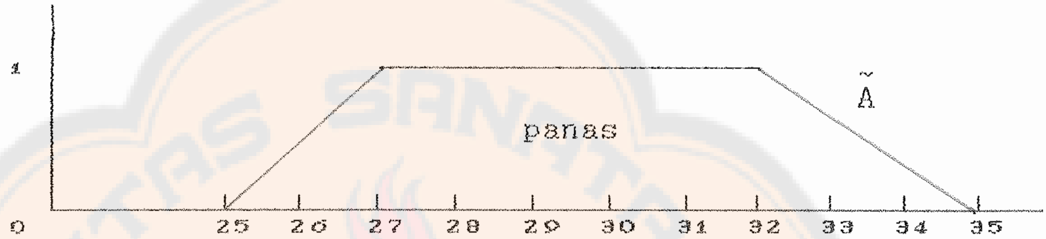
1. Suhu diukur dalam derajat celsius dan himpunan kabur untuk variabel "suhu" didefinisikan sebagai berikut:



Gambar 5.4

Himpunan kabur untuk variabel bahasa suhu

Khusus untuk himpunan kabur "panas" didefinisikan sebagai berikut:

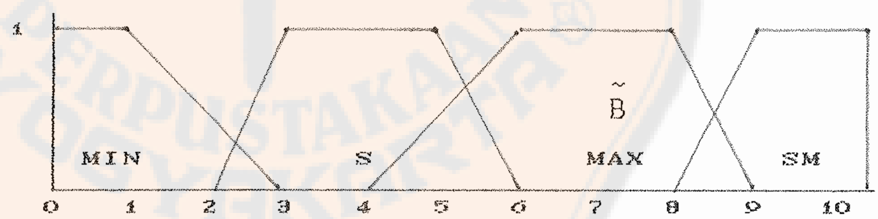


Gambar 5.5

Himpunan kabur "panas"

Jadi $\tilde{A}$ = "panas" = $(27,\ 32,\ 2,\ 3)_{LR}$

2. Kerja AC dinyatakan dengan bilangan 0 - 10 yang didefinisikan sebagai berikut:



MIN : Minimum
S : Sedang
MAX : Maksimum
SM : Sangat Maksimum

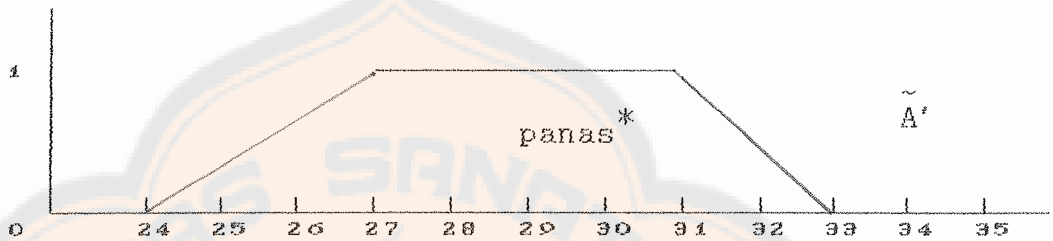
Gambar 5.6

Himpunan kabur untuk variabel kerja AC

Jadi $\tilde{B}$ = "maksimum" = $(6,\ 8,\ 2,\ 1)_{LR}$

3. Fakta suhu udara pada suatu hari adalah

$$\tilde{A}' = \text{"panas}^{*}\text{"} = (27,\ 31,\ 3,\ 2)_{LR}$$

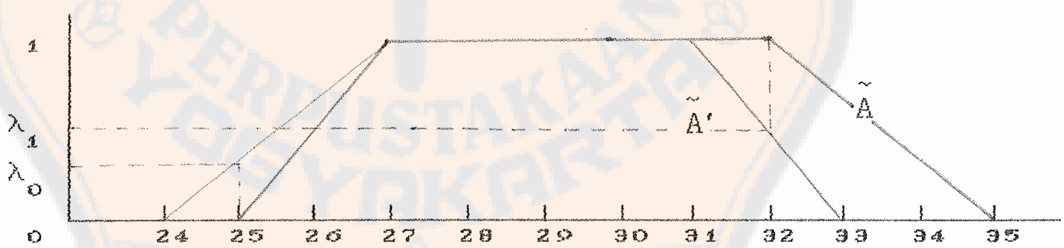


Gambar 5.7

Himpunan kabur "panas*"

4. Pada soal ini $L(x) = R(x) = \max\ (0,\ 1 - x)$

Dari premis dan fakta yang diberikan, dapat dihitung $\tilde{B}^{\#}$ sebagai berikut:



Gambar 5.8

Menentukan λ_o dan λ_1

$u_1 = 27 - 2 = 25$ dan $u_r = 32 + 3 = 35$

$\mu_{\tilde{A}'}(u_1) = \mu_{\tilde{A}'}(25) = \frac{1}{3}$

dan $\mu_{\tilde{A}'}(u_r) = \mu_{\tilde{A}'}(35) = 0$

Sehingga $\lambda_0 = \max\{\mu_{\tilde{A}'}(u_1),\ \mu_{\tilde{A}'}(u_r)\}$

$= \max\{\ \frac{1}{3}\ ,\ 0\ \}$

$= \frac{1}{3}$

$\lambda_1 = \min\{\mu_{\tilde{A}'}(27),\ \mu_{\tilde{A}'}(32)\}$

$= \min\{\ 1,\ \frac{1}{2}\ \}$

$= \frac{1}{2}$

$\underline{b}' = 6 - 2(1 - \frac{1}{2})$

$= 6 - 2(\frac{1}{2})$

$= 6 - 1$

$= 5$

$\bar{b}' = 8 + 1(1 - \frac{1}{2})$

$= 8 + 1(\frac{1}{2})$

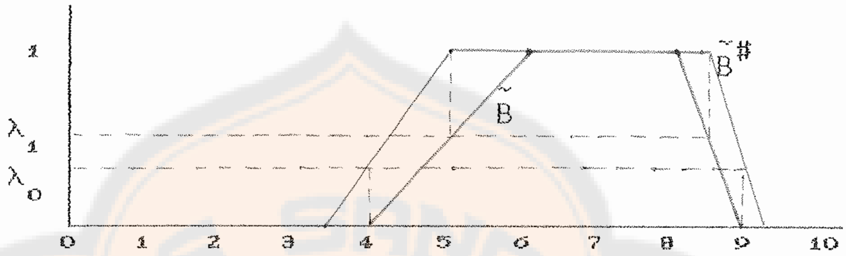
$= 8 + \frac{1}{2}$

$= 8\frac{1}{2}$

$$\gamma' = \frac{\frac{1}{2} \times 2}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}$$

$$\delta' = \frac{\frac{1}{2} \times 1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{4}$$

Jadi $B^{\#} = (5,\ 8\frac{1}{2},\ \frac{3}{2},\ \frac{3}{4})_{LR}$



Gambar 5.9

Menentukan $\tilde{B}^{\#}$

Pada kenyataan yang ada dalam kehidupan sehari-hari, aturan yang digunakan tidak sesederhana pada contoh 5.8 di atas. Misalnya, AC bekerja tidak hanya ditentukan oleh suhu saja melainkan juga ditentukan oleh kelembaban udara pada ruangan. Kualitas seseorang tidak hanya ditentukan oleh kemampuan intelektual saja melainkan juga ditentukan oleh kemampuan sosialisasi, dan kemampuan dalam bidang olahraga, atau kesenian (budaya). Dengan demikian premis yang diberikan tidak hanya berdasarkan satu aspek saja melainkan beberapa aspek yang akan dipakai untuk menarik kesimpulan. Premis yang demikian akan berbentuk:

Jika X_1 adalah $\tilde{A}_1$
dan X_2 adalah $\tilde{A}_2$
dan ...
dan X_n adalah $\tilde{A}_n$

maka Y adalah $\tilde{B}$.

Bila diberikan premis yang berbentuk seperti tersebut di atas berikut fakta-faktanya, cara menarik kesimpulan ($\tilde{B}'$) tidak berbeda jauh dengan penjelasan atau contoh di atas, meskipun memerlukan perhitungan tambahan yaitu untuk menentukan λ_0 dan λ_1 gabungan. Untuk setiap fakta yang diberikan yaitu $\tilde{A}'_i$, $i = 1, \ldots ,n$ akan dapat ditentukan λ_{0i} dan λ_{1i}. Cara menentukan λ_{0i} dan λ_{1i} berdasarkan pada persamaan 4.11 dan 4.12. λ_0 dan λ_1 gabungan ditentukan dengan menggunakan rumus berikut:

$$\lambda_0 = \max \{\lambda_{0i}, i = 1, \ldots ,n\} \text{ dan}$$

$$\lambda_1 = \min \{\lambda_{1i}, i = 1, \ldots ,n\}.$$

Contoh 5.9 Diberikan aturan:

"Jika hasil tes intelegensi ´baik´ dan tes wawancara ´cukup´ maka kualitas seseorang adalah ´memuaskan´".

Untuk premis tersebut terdapat beberapa ketentuan:

1. Score penilaian untuk tes intelegensi dan tes wawancara adalah 0 - 20.
2. $\tilde{A}_1$ = baik = $(14,\ 17,\ 2,\ 2)_{LR}$

   $\tilde{A}_2$ = cukup = $(9,\ 12,\ 2,\ 2)_{LR}$

   $\tilde{B}$ = memuaskan = $(14,\ 17,\ 1,\ 2)_{LR}$
3. Fakta-fakta:

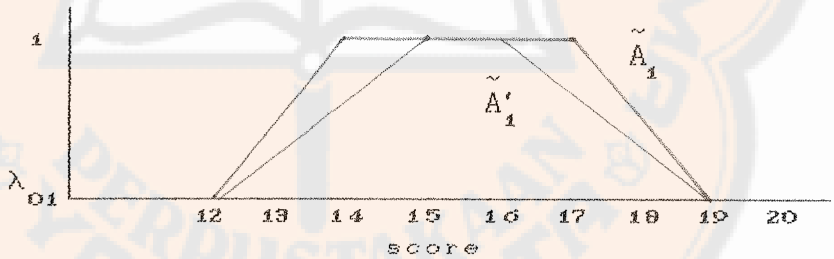
$\tilde{A}'_1$ = baik* = $(15,\ 16,\ 3,\ 3)_{LR}$

$\tilde{A}'_2$ = cukup* = $(10,\ 13,\ 2,\ 3)_{LR}$

4. Pada soal ini $L(x) = R(x) = \max(0,\ 1 - x)$

Dari fakta-fakta yang diberikan, kita dapat menghitung λ_{01}, λ_{02}, λ_{11}, λ_{12} sebagai berikut:

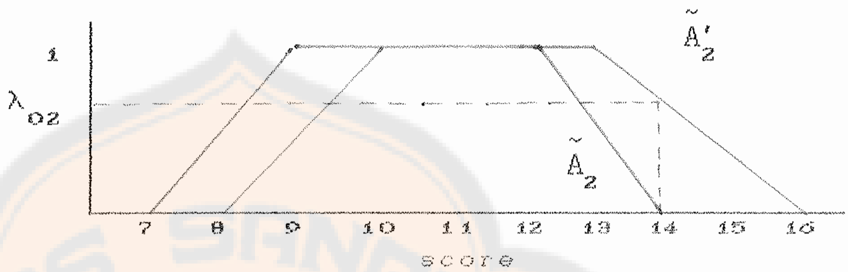
$$\lambda_{01} = \max(\mu_{A'_1}(14 - 2),\ \mu_{A'_1}(17 + 2))$$
$$= \max(\mu_{A'_1}(12),\ \mu_{A'_1}(19))$$
$$= \max(0,\ 0)$$
$$= 0$$



Gambar 5.10

Menentukan λ_{01}

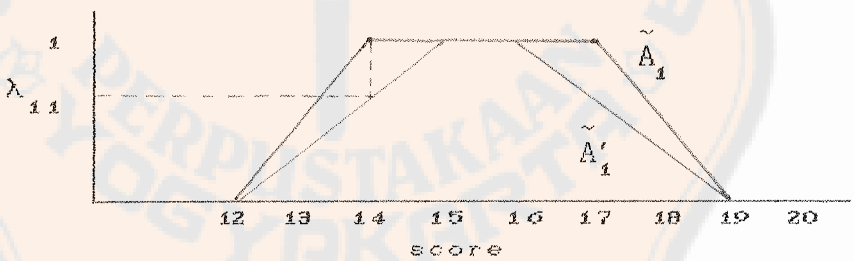
$$\lambda_{02} = \max(\mu_{\tilde{A}'_2}(9 - 2),\ \mu_{\tilde{A}'_2}(12 + 2))$$
$$= \max(\mu_{A'_2}(7),\ \mu_{A'_2}(14))$$
$$= \max(0,\ \tfrac{2}{3})$$
$$= \tfrac{2}{3}$$



Gambar 5.11

Menentukan λ_{02}

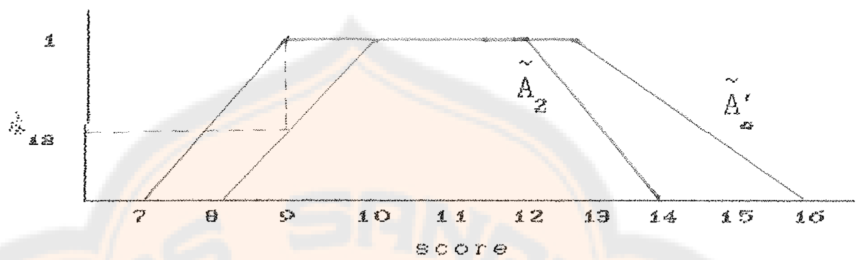
$$\lambda_{11} = \min\,(\mu_{A'_1}(14),\ \mu_{A'_1}(17))$$
$$= \min\,(\tfrac{2}{3},\ \tfrac{2}{3})$$
$$= \tfrac{2}{3}$$



Gambar 5.12

Menentukan λ_{11}

$$\lambda_{12} = \min\,(\mu_{\tilde{A}'_2}(9),\ \mu_{\tilde{A}'_2}(12))$$
$$= \min\,(\tfrac{1}{2},\ 1)$$
$$= \tfrac{1}{2}$$



Gambar 5.13

Menentukan λ_{12}

$$\lambda_0 = \max(\lambda_{01}, \lambda_{02})$$

$$= \max(0, \tfrac{2}{3})$$

$$= \tfrac{2}{3}$$

$$\lambda_1 = \min(\lambda_{11}, \lambda_{12})$$

$$= \min(\tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{2})$$

$$= \tfrac{1}{2}$$

$$\underline{b}' = 14 - 1(1 - \tfrac{1}{2})$$

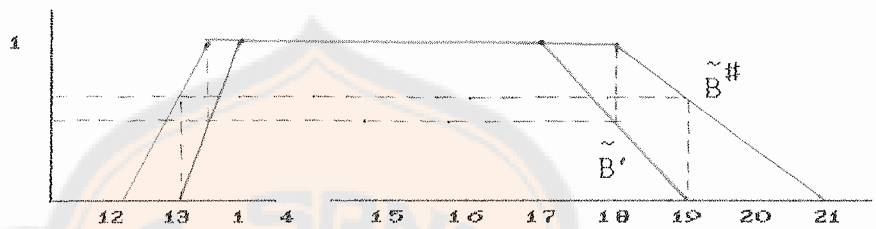
$$= 13\tfrac{1}{2}$$

$$\bar{b}' = 17 + 2(1 - \tfrac{1}{2})$$

$$= 18$$

$$\gamma' = 1\tfrac{1}{2} \qquad \text{dan } \delta' = 3$$

$$\tilde{B}^{\#} = (13\tfrac{1}{2}, 18, 1\tfrac{1}{2}, 3)_{LR}$$



G ambar 5.14

M e nentukan $\tilde{B}^{\#}$

BAB VI
SISTEM KONTROL LOGIKA KABUR

Tidak dapat disangkal bahwa teori kontrol telah digunakan dalam berbagai bidang. Tidak hanya dunia industri saja yang telah menggunakan teori kontrol tetapi juga dunia bisnis atau ekonomi bahkan ibu-ibu rumah tangga sudah memakai alat-alat yang menggunakan dasar-dasar teori kontrol. Teori kontrol dalam dunia industri banyak diaplikasikan pada mesin-mesin yang bekerja otomatis. Dalam dunia bisnis, teori kontrol diaplikasikan antara lain dalam tehnik pengendalian. Misalnya bagaimana mengendalikan harga suatu produk agar tidak turun.

Di dalam tubuh manusia terdapat sangat banyak pengontrol yang fungsinya mempertahankan kondisi tubuh agar tetap sehat. Mata akan berakomodasi menyesuasikan jarak objek yang dilihat. Jika cuaca panas maka tubuh akan mengeluarkan keringat. Jika ada bagian tubuh yang terluka, maka kelenjar limfa segera membuat lekosi-lekosit untuk mencegah infeksi.

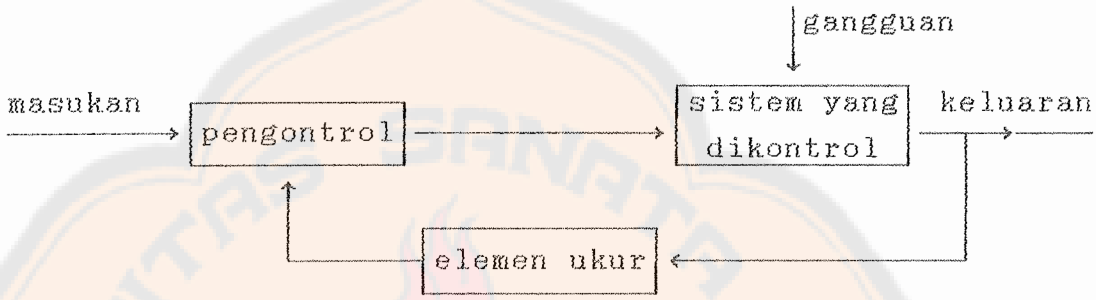
Di dalam kehidupan sehari-hari sudah sangat banyak alat-alat yang menggunakan sistem kontrol. Lemari es mempunyai *thermostat* yang akan memutus arus jika suhu dalam lemari es sudah mencapai suhu tertentu. Demikian pula dengan pendingin ruangan (AC), AC akan menyala jika suhu ruangan berada pada keadaan tertentu. Setrika otomatis juga bekerja berdasar sistem kontrol.

A. Definisi Sistem Kontrol

<u>Sistem</u> adalah sekumpulan objek-objek yang disatukan oleh bentuk interaksi atau saling ketergantungan. Yang menarik dalam sebuah sistem adalah sifat dinamis sistem. Objek-objek pembentuk sistem tidak selalu dalam keadaan setimbang satu sama lain. Dengan demikian sistem akan selalu berubah setiap waktu. Perubahan tersebut diakibatkan oleh adanya gangguan *(disturbance)* yang dapat bersifat eksternal (dari luar) maupun internal (dari dalam). Gangguan yang bersifat internal berasal dari keadaan sistem itu sendiri.

Secara prinsip, seseorang dapat mempengaruhi suatu sistem dengan memanipulasi masukan-masukan sistem tersebut. Misal dalam sistem mesin, kita dapat mempengaruhi daya kerja mesin tersebut dengan memanipulasi bahan bakar yang dikonsumsi. Prinsip tersebut dapat juga dipakai untuk mempertahankan keadaan suatu sistem. Dengan kata lain, seseorang dapat memanipulasi masukan-masukan suatu sistem agar sistem tersebut dapat mempertahankan keadaannya. Jadi **Sistem Kontrol** adalah proses pengaturan masukan-masukan suatu sistem agar sistem tersebut berada pada keadaan tertentu.

Jika menggunakan diagram blok, sistem kontrol dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 6.1
Diagram blok sistem kontrol

Keluaran (*output*) suatu sistem dapat digunakan untuk melihat keadaan sistem tersebut. Jika keluaran sistem tersebut tidak sesuai dengan yang dikehendaki berarti dalam sistem tersebut ada gangguan. Agar keluaran sistem kembali pada keadaan semula maka masukannya (*input*) harus diubah.

Salah satu contoh sistem kontrol sederhana adalah seseorang yang sedang mengendarai mobil. Dia menghendaki mobilnya berjalan dengan kecepatan 40 km/jam. Karena jalan agak menurun, kendaraannya melaju lebih cepat menjadi 50 km/jam. Agar kecepatan kembali menjadi 40 km/jam maka orang tersebut harus mengecilkan "gas" sehingga kecepatan mobil kembali seperti yang dikehendaki.

Dalam contoh tersebut, keluaran yang dikehendaki adalah kecepatan 40 km/jam. Gangguan pada sistem adalah jalan yang menurun. Elemen ukur adalah speedometer. Pengontrol dalam sistem tersebut adalah pengendara mobil. Sistem yang dikontrol adalah mobil. Masukan sistem adalah "gas", yaitu campuran udara dan bahan bakar yang dimasukkan ke dalam karburator.

Sistem yang telah dibicarakan di atas merupakan <u>sistem kontrol lup tertutup</u>, yaitu sistem kontrol yang sinyal keluarannya mempunyai pengaruh langsung terhadap aksi pengotrolan. Contoh yang diberikan di depan adalah contoh <u>sistem kontrol manual lup tertutup</u> karena pengontrolnya adalah manusia. Jika pengontrolnya diganti dengan pengontrol otomatis maka menjadi <u>sistem kontrol otomatis lup tertutup</u>.

Beberapa contoh sistem kontrol automatik lup tertutup adalah setrika listrik otomatis, lemari es, pemanas air otomatis, dan sistem pendingin ruangan otomatis. Pengontrol pada setrika akan memutus arus listrik jika panas setrika telah sampai pada keadaan tertentu. Jika panas seterika turun sampai keadaan tertentu, maka pengontrol akan menghubungkan setrika dengan arus listrik kembali.

Jika keluaran suatu sistem tidak berpengaruh pada aksi pengontrolan maka sistem kontrol tersebut disebut <u>sistem kontrol lup terbuka</u>. Diagram blok sistem kontrol lup terbuka adalah sebagai berikut:

Gambar 6.2
Diagram blok sistem kontrol lup terbuka

Contoh sistem kontrol jenis ini adalah seseorang yang mengendarai kendaraan tanpa speedometer. Pengendara tidak tahu berapa kecepatan kendaraan yang dikendarainya. Contoh lain adalah mesin cuci, oven, rice cooker, dan lampu pengatur lalu lintas yang bekerja berdasarkan waktu. Jika mesin cuci sudah diatur untuk beroperasi selama 2 menit, maka mesin itu akan berhenti bekerja jika waktu kerjanya sudah 2 menit, tidak perduli bagaimana keadaan pakaian yang dicuci, sudah bersih atau belum.Lampu merah atau hijau pada lampu pengatur lalu lintas akan menyala dalam waktu yang tertentu tanpa dipengaruhi kondisi lalu lintas pada saat itu. Keadaan lalu lintas padat atau lengang lampu merah atau hijau akan menyala dengan waktu yang tetap.

B. Sistem kontrol konvensional dan sistem kontrol kabur (*Fuzzy Logic Control*)

Tujuan akhir suatu sistem kontrol adalah mendapatkan keluaran tertentu dari masukan-masukan yang diberikan. Untuk mendapatkan hasil tersebut, cara sederhana yang dilakukan pada sistem kontrol konvensional adalah dengan menggunakan tabel. Tabel tersebut berisi daftar keluaran yang didapat untuk setiap masukan atau kombinasi masukan yang mungkin.

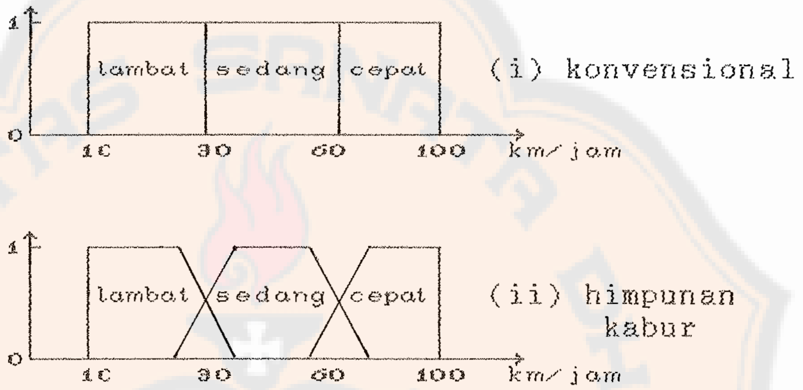
Pada sistem kontrol yang sederhana cara ini sudah cukup memadai tetapi jika diaplikasikan pada sistem kontrol yang kompleks dengan parameter kontrol yang banyak, penggunaan tabel bukanlah cara yang sesuai. Tabel yang dibutuhkan akan sangat banyak dan panjang. Pengontrol sistem tersebut akan membutuhkan memori yang banyak. Selain itu pengontrol harus berpindah dari satu tabel ke tabel yang lain untuk mendapatkan data yang dikendaki.

Jalan keluar yang lain adalah dengan model matematika. Dalam sistem kontrol konvensional, yang menjadi fokus perhatian adalah sistem atau proses yang dikontrol. Untuk membuat pengontrol suatu sistem, langkah pertama yang harus dilakukan adalah mencari model matematika yang tepat/cocok untuk sistem atau proses yang dikontrol. Model matematika tersebut merupakan kumpulan persamaan differensial. Penyelesaian persaman-persamaan differensial tersebut akan menjadi acuan bagi pengontrol untuk mengatur parameter-parameter kontrol yang ada pada sistem tersebut. Pengontrol yang demikian dikenal dengan nama Pengontrol PID (*Proportional, Integral, and Differential Controller*). Selain itu juga ada pengontrol konvensional jenis lain yang disebut Pengontrol DDC (*Direct Digital Control Controller*).

Secara teoritis, persamaan matematika yang diperoleh dapat menghasilkan keluaran kontrol yang akurat. Tetapi dalam praktek, sulit untuk menentukan persamaan matematika yang dapat melibatkan semua parameter yang ada. Andaikan dapat, maka persamaan matematika itu akan menjadi sangat kompleks dan rumit. Sehingga meskipun memerlukan bantuan komputer untuk menyelesaikannya memerlukan waktu yang cukup lama. Hal itu akan sangat merugikan, khususnya bagi alat-alat yang memerlukan ketepatan waktu dengan presisi yang tinggi.

Berbeda dengan pengontrol konvensional, yang menjadi fokus dalam pengontrol kabur adalah tingkah laku operator manusia. Pengaturan parameter-parameter kontrol ditangani oleh aturan-aturan kabur yang berdasarkan pada expert sistem, yaitu menggunakan model logis proses berfikir manusia yang mengontrol sistem tersebut. Jika pengontrol kabur diaplikasikan untuk menjalankan kendaraan, maka pengaturan kecepatan akan mendekati pengaturan yang dilakukan oleh manusia. Dapat dikatakan bahwa pengontrol kabur "meniru" proses pengontrolan yang dilakukan oleh manusia.

Perbedaan yang lain adalah pengontrol kabur menanggapi perubahan kondisi secara halus, tidak tiba-tiba atau sekonyong-konyong. Sebagai contoh, kondisi kecepatan mobil yang diperlihatkan pada gambar 6.3 di bawah ini.

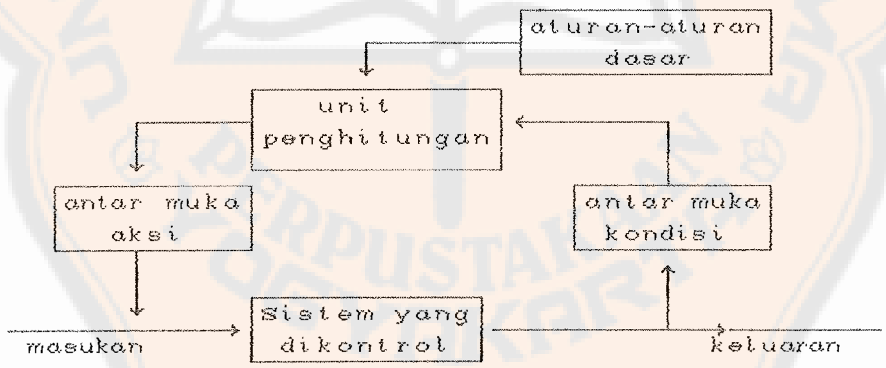


Gambar 6.3

Kontrol konventional hanya mengenal kondisi yang 100% lambat atau tidak lambat sama sekali. Dalam gambar 6.3 (i) jika mobil mempunyai kecepatan 29,9 km/jam masih dikatagorikan lambat sedangkan kecepatan 30,1 km/jam sudah dikatagorikan kecepatan sedang. Dengan demikian perbedaan kecepatan yang hanya 0.2 km/jam sudah mempunyai akibat yang berbeda. Perubahan dari kecepatan lambat ke kecepatan sedang terjadi dengan tiba-tiba/sekonyong-konyong. Selain itu bagaimana jika kecepatan mobil adalah 30 km/jam? Termasuk lambat atau sedang?

Karena kontrol kabur berbasis pada himpunan kabur, yang mengenal derajad keanggotaan suatu objek, maka kondisi dari lambat ke sedang tidak terjadi dengan tiba-tiba. Dalam gambar 6.3 (ii) kecepatan 29 km/jam masih dalam katagori lambat tetapi sudah tidak 100%. Pada saat kecepatan mobil 31 km/jam, kendaraan sudah pada katagori kecepatan sedang tetapi belum 100%. Jika kendaraan mempunyai kecepatan 30 km/jam maka pada gambar 6.3 (ii) tampak bahwa kecepatan kendaraan berada pada katagori lambat sekaligus sedang.

Sistem kontrol kabur (*Fuzzy Logic Control*) adalah sistem kontrol yang berdasarkan pada aturan logika kabur (*Fuzzy Logic*) "jika ... maka ...", dan menggunakan himpunan-himpunan kabur untuk masukan dan keluarannya. Diagram blok sistem kontrol kabur adalah sebagai berikut:



Gambar 6.4

Diagram blok kontrol kabur

Kontrol kabur mempunyai tiga tahapan utama:

1. **Tahap Fuzzification**

Pada tahap ini kondisi keluaran dinyatakan sebagai anggota suatu himpunan kabur beserta derajat keanggotaannya. Misalnya pada pengaturan kecepatan mobil di atas, kondisi sistem yang dikontrol termasuk lambat, sedang, atau cepat. Yang melakukan tahap ini adalah antar muka kondisi (*Condition interface*).

2. **Tahap Evaluasi Aturan** (*Rule Evaluation*)

   Pada tahap ini terjadi evaluasi pada kondisi sistem yang dikontrol. Aturan-aturan dasar yang digunakan berbentuk "jika ... maka ...". Misal "Jika kecepatan cepat maka udara dan bahan bakar ke karburator sedikit". Yang berperan pada tahap ini adalah unit penghitungan (*Computation Unit*) yang bekerja berdasarkan aturan-aturan dasar (*Base Rule*).

3. **Tahap Deffuzification**

   Pada tahap ini hasil pada evaluasi tahap kedua akan dikombinasikan dalam suatu nilai diskrit tertentu agar dapat dipakai untuk melakukan pengontrolan. Misal mengatur suplai udara dan bahan bakar. Yang berperan pada tahap ini adalah antar muka aksi (*interface action*).

Dari tahapan-tahapan yang ada, tampak bahwa dalam sistem kontrol kabur tidak dibutuhkan perhitungan dan pemodelan matematis yang rumit, melainkan hanya diperlukan penggunaan logika dan pengetahuan menyeluruh tentang sistem yang dikontrol.

C. Contoh Penyusunan Kontrol Kabur Pada Kombinasi *Steam engine* Dan *Boiler*

1. Sistem yang dikontrol

Cara kerja mesin ini ditentukan oleh dua *input*, yaitu *input* panas (*Heat*) untuk *boiler* dan *input* bukaan katup (*throttle*) untuk silinder. Sedangkan *output* untuk mesin ini adalah tekanan (*presure*) pada *boiler* dan kecepatan (*speed*) mesin. Pada waktu mesin bekerja, *presure* dan *speed* distel atau di-*set* pada nilai tertentu. Karena adanya *gangguan-gangguan* baik internal maupun eksternal, *speed* dan *presure* pasti akan berubah. Jika *presure* pada *boiler* berubah maka *input Heat* juga diubah sedemikian hingga *presure* kembali ke keadaan (*state*) semula. Demikian halnya jika *speed* pada mesin berubah maka *throttle* harus diatur sedemikian hingga *speed* kembali pada keadaan semula.

2. Tahap Fuzzifikasi

a. Variabel bahasa

Variabel bahasa yang diperlukan untuk merancang kontrol kabur ini adalah sebagai berikut:

a. SE (*Speed Error*)

yaitu perbedaan antara kecepatan mesin sekarang dengan kecepatan yang telah ditentukan.

b. PE (*Presure Error*)

yaitu perbedaan tekanan pada *boiler* saat ini dengan tekanan yang sudah ditentukan.

c. CSE (*Change in Speed Error*)

yaitu variabel yang mengukur perbedaan SE sekarang dengan SE pada pengukuran sebelumnya.

d. CPE (*Change in Presure Error*)

yaitu variabel yang mengukur perbedaan PE sekarang dengan PE pada pengukuran sebelumnya.

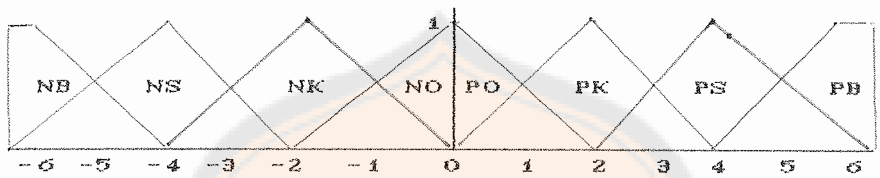
e. HC (*Heat Change*)

yaitu variabel aksi yang mengatur perubahan suhu (*Heat*) pada *boiler*.

f. TC (*Throttle Change*)

yaitu variabel aksi yang mengatur bukaan katub (*Throttle*) untuk silinder mesin.

Himpunan kabur yang dapat dipasangkan pada variabel PE dan SE adalah sebagai berikut:

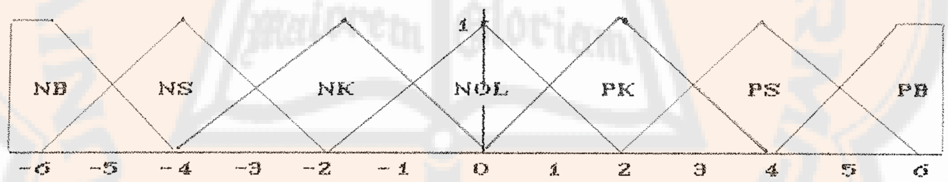


Gambar 6.5

NB : Negatif Besar
NS : Negatif Sedang
NK : Negatif Kecil
NO : Negatif Nol

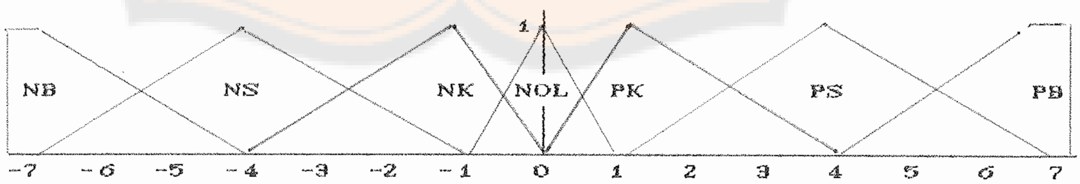
PB : Positif Besar
PS : Positif Sedang
PK : Positif Kecil
PO : Positif Nol

Himpunan Kabur yang dapat dipasangkan pada variabel CPE dan CSE adalah sebagai berikut:



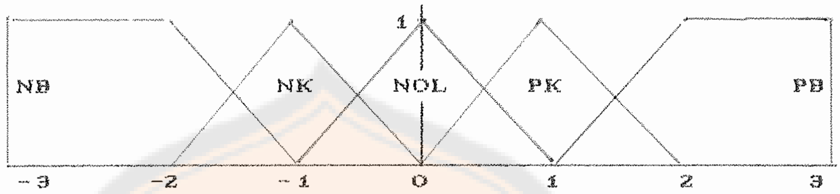
Gambar 6.6

Himpunan kabur yang dapat dipasangkan pada variabel HC adalah sebagai berikut:



Gambar 6.7

Himpunan kabur yang dapat dipasangkan pada variabel TC adalah sebagai berikut:



Gambar 6.8

3. Tahap Evaluasi Aturan

a. Aturan-aturan Dasar

Aturan-aturan dasar yang digunakan pada kontrol kabur berbentuk "jika PB adalah NB maka HC adalah PB". Dalam aturan-aturan berikut terdapat operator "tidak" dan "atau", misalnya "tidak (NB atau NS)". Operator "tidak" sama artinya dengan "komplemen" sedangkan operator "atau" sama artinya dengan "union/ gabungan". Untuk setiap premis-premis yang diberikan akan dihubungkan dengan operator "kalau tidak" dan secara matematis diartikan sebagai operator "max".

Aturan-aturan untuk Pemanas adalah sebagai berikut:

Jika PE = NB
dan CPE = tidak (NB atau NS)
maka HC = PB

kalau tidak

jika PE = NB atau NS
dan CPE = NK
maka HC = PS

kalau tidak

```
          jika    PE  = NK
          dan     CPE = PK atau NO
          maka    HC  = PS
     kalau tidak
          jika    PE  = NO
          dan     CPE = PB atau PS
          maka    HC  = PS
     kalau tidak
          jika    PE  = NO
          dan     CPE = NB atau NS
          maka    HC  = NS
     kalau tidak
          jika    PE  = PO atau NO
          dan     CPE = NOL
          maka    HC  = NOL
     kalau tidak
          jika    PE  = PO
          dan     CPE = NB atau NS
          maka    HC  = PS
     kalau tidak
          jika    PE  = PS
          dan     CPE = PB atau PS
          maka    HC  = NS
     kalau tidak
          jika    PE  = PK
```

dan CPE = PK atau NO
maka HC = NS
kalau tidak
jika PE = PB atau PS
dan CPE = NK
maka HC = NS
kalau tidak
jika PE = PB
dan CPE = tidak (NB atau NS)
maka HC = NB
kalau tidak
jika PE = NO
dan CPE = PK
maka HC = PK
kalau tidak
jika PE = NO
dan CPE = NK
maka HC = NK
kalau tidak
jika PE = PO
dan CPE = NK
maka HC = PK
kalau tidak
jika PE = PO
dan CPE = PK

maka HC = NK

Aturan-aturan untuk bukaan katub (*Throttle*) adalah sebagai berikut:

Jika SE = NB
dan CSE = tidak (NB atau NS)
maka TC = PB

kalau tidak

jika SE = NS
dan CSE = PB atau PS atau PK
maka TC = PK

kalau tidak

jika SE = NK
dan CSE = PB atau PS
maka TC = PK

kalau tidak

jika SE = NO
dan CSE = PB
maka TC = PK

kalau tidak

jika SE = PO atau NO
dan CSE = PK atau NK atau NOL
maka TC = NOL

kalau tidak

jika SE = PO

dan CSE = PB atau PS

maka TC = NK

kalau tidak

jika SE = PS

dan CSE = PB atau PS atau PK

maka TC = NK

kalau tidak

jika SE = PB

dan CSE = tidak (NB atau NS)

maka TC = NB

b. Unit Penghitungan

Unit penghitungan mempunyai tugas melakukan evaluasi terhadap kondisi sistem berdasarkan aturan-aturan dasar yang dimiliki. Ada beberapa cara melakukan evaluasi terhadap kondisi sistem, antara lain dengan metoda Komposisional maks-min (*max-min Compositional*), Komposisional maks-dot, dan modus ponens yang digeneralisasi. Karena yang telah kita bicarakan adalah metoda modus ponens yang digeneralisasi, maka metoda inferensi yang digunakan dalam kontrol kabur ini menggunakan metoda tersebut.

Dalam praktek, hasil pengukuran kecepatan mesin atau tekanan pada *boiler*, yang dilakukan oleh alat ukur, hanya berupa bilangan yang tegas. Padahal input-input untuk unit penghitungan harus berupa himpunan kabur. Bagaimana hal ini dipecahkan? "Penerjemahan" bilangan tegas menjadi himpunan kabur ini merupakan tugas antar muka kondisi (*condition interface*). Cara penerjemahanya sangat bergantung pada sistem yang dikontrol. Cara penerjemahan yang diberikan pada contoh 6.1 di bawah ini adalah dengan mempergunakan kesalahan pengukuran (*error measurement*). Dalam setiap pengukuran pasti terdapat kesalahan pengukuran. Kesalahan pengukuran ini dianggap sebagai sebaran (*spread*) himpunan kabur hasil pengukuran tersebut.

Contoh 6.1 Dari hasil pengukuran diketahui bahwa perbedaan kecepatan mesin dengan kecepatan standar adalah positif 3,5 dengan kesalahan ukur 0,5. Sedangkan perbedaan antara beda kecepatan sekarang dengan beda kecepatan sebelumnya adalah 5 dengan kesalahan ukur 1.

Dari data-data yang diberikan, bagaimana mengubah bukaan katup agar sistem berjalan seperti yang diinginkan?

Jawab : Dari hasil pengukuran tersebut diperoleh :

SE $= (3{,}5\ ,\ 3{,}5\ ,\ 0{,}5\ ,\ 0{,}5)_{LR}$, dan

CSE $= (5,\ 5,\ 1,\ 1)_{LR}$

dengan $L(x) = R(x) = \max\ (1 - x)$

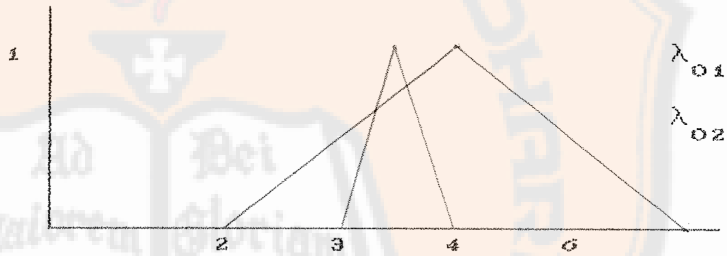
Aturan dasar ayng sesuai untuk fakta-fakta tersebut adalah:

Jika SE = PS

dan CSE = PB atau PS atau PK

maka TC = NK

Dari fakta-fakta yang diberikan, kita dapat menghitung λ_o, λ_1, dan $\tilde{B}^{\#}$ sebagai berikut:

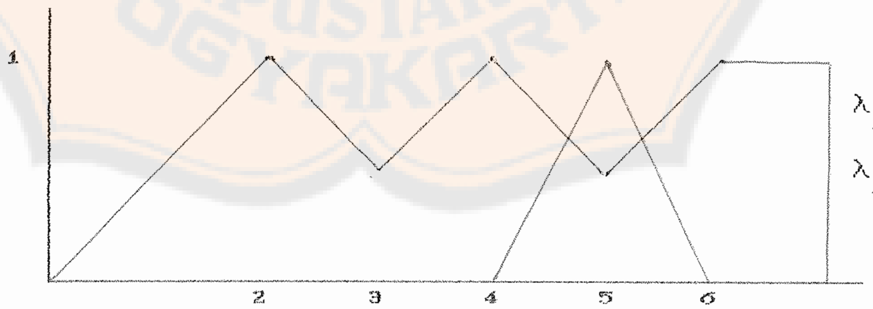


$\lambda_{o1} = 0$

$\lambda_{o2} = 0$

Gambar 6.9

Menentukan λ_{o1} dan λ_{o2}

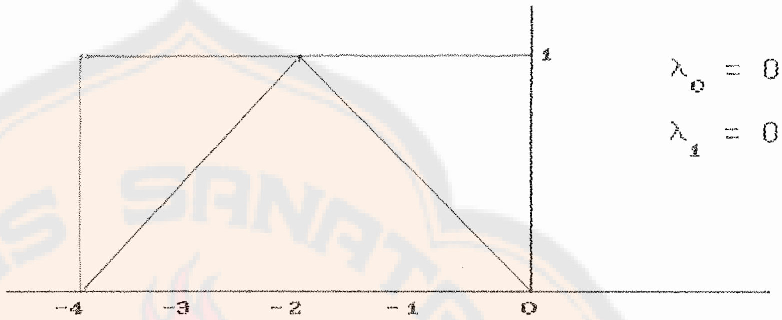


$\lambda_{11} = 0$

$\lambda_{12} = 0$

gambar 6.10

Menentukan λ_{11} dan λ_{12}



$\lambda_0 = 0$

$\lambda_1 = 0$

Gambar 6.11

Menentukan $\tilde{B}^{\#}$

Jadi $\tilde{B}^{\#} = (-4,\ 0,\ 0,\ 0)_{LR}$

4. Tahap Defuzzyfikasi

Output tahap evaluasi tidak dapat secara langsung dipergunakan untuk mengatur sistem. Hal itu dikarenakan pengaturan bukaan katup atau pemanas hanya memerlukan bilangan yang tegas, sedangkan output dari unit penghitungan masih berupa himpunan kabur. Agar himpunan kabur hasil kerja unit penghitungan dapat dipakai untuk mengatur kerja sistem, maka perlu penerjemah yang menerjemahkan himpunan kabur tersebut menjadi bilangan tegas untuk mengatur bukaan katub atau pemanas. Alat yang demikian disebut antar muka aksi (*action interface*).

Cara menerjemahkan himpunan kabur menjadi bilangan yang tegas bergantung pada sistem yang dikontrol.

Biasanya, jika output hasil unit perhitungan berupa himpunan kabur yang berbentuk segitiga, maka bilangan tegas yang dipakai untuk aksi kontrol adalah bilangan yang mempunyai fungsi keanggotaan terbesar. Tetapi bagaimana jika himpunan kaburnya berbentuk trapesium atau persegi panjang? Hal itu sangat bergantung pada sistem yang dikontrol.

D. Aplikasi Kontrol Kabur Pada Pabrik Pembuatan Semen

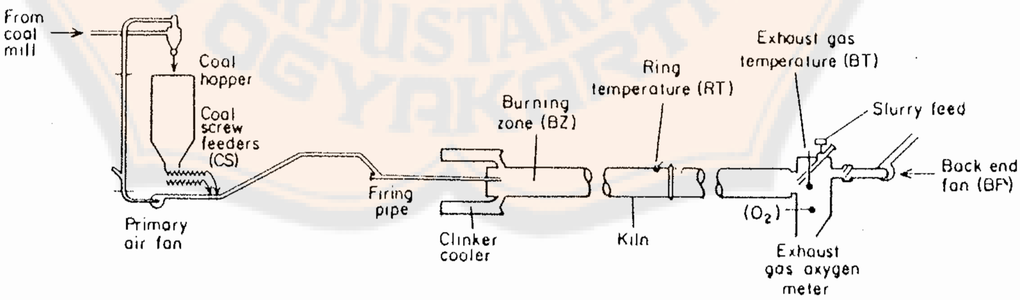
1. Sistem yang dikontrol

Semen dibuat dengan memanaskan adonan (*slurry*) yang terdiri dari tanah liat, batu kapur, pasir, dan biji besi pada temperatur yang memungkinkan terbentuknya senyawa kompleks pada semen yaitu Dikalsium Silikat (C_2S), Trikalsium Silikat (C_3S), Trikalsium Aluminium (C_3Al), dan Tetrakalsium Aluminium (C_4Al). Proses tahap pertama adalah mengeringkan adonan dan membuang kelebihan air. Proses tahap kedua adalah pembentukan kalsium dengan cara memecahkan kalsium karbonat menjadi kalsium oksida dan karbon dioksida. Akhirnya campuran tersebut dibakar pada temperatur 1250° - 1450° Celsius dengan dicampur kapur bebas dan bahan-bahan lain untuk membentuk senyawa semen. Hasil akhir proses ini disebut *clinker*.

Tungku pembakar terbuat dari baja yang penjangnya 130 m dan berdiameter 5 m. Tungku tersebut diletakkan miring dan dikelilingi batu-bata tahan api. Tungku diputar secara perlahan, kira-kira 1 putaran per menit. Adonan dimasukkan melalui lubang yang berada di atas atau di akhir tungku. Kemiringan dan perputaran tungku menyebabkan bahan-bahan yang dimasukkan mengalir dalam tungku pembakar selama 3 jam 15 menit, selanjutnya masuk dalam tungku pendingan selama 45 menit.

Panas dalam tungku diperoleh dari pembakaran batu bara yang dicampur udara dari kipas utama (*primary air fan*). Oleh kipas yang terletak diakhir tungku (*back end fan*), gas panas tersebut dihisap masuk kedalam tungku pembakar.

Gambar 6.12 berikut ini memperjelas proses tersebut.



Gambar 6.12

Proses pembuatan semen

Masalah utama dalam pembuatan model matematika untuk mengontrol pembuatan semen tersebut adalah adanya hubungan yang komplek antara variabel-variabel input dan variabel-variabel kontrol, tidak linear, serta memuat kesenjangan waktu (*time gap*) dan hubungan yang timbal balik. Selain itu tanggapan (*response*) tungku pembakar terhadap input kontrol tergantung pada kondisi tungku pembakar yang berlaku saat itu. Keadaan tersebut merupakan salah satu alasan mengapa perlu dirancang dan digunakan kontrol kabur.

2. Variabel-variabel input dan variabel-variabel kontrol

Dari sekian banyak variabel input dan variabel kontrol yang mungkin, berikut ini dipilih beberapa variabel yang relevan.

a. Variabel input

1. BT : suhu gas buang (*exhaust gas temperatur —— back-end temperatur*)
2. RT : suhu gas di tengah tungku (*intermediate gas temperature —— ring temperatur*)
3. BZ : suhu daerah pembakaran (*burning-zone temperatur*)
4. O_2 : presentase oksigen dalam gas buang (*oxygen percentage ini exhaust gases*)
5. LW : Kualitas *clinker* (*liter weight —— indicates*

cliker quality)

b. Variabel kontrol

1. KS : proses dalam tungku (*kiln process*)
2. CS : pengisian batu bara untuk bahan bakar (*coal feed —— fuel*)
3. BF : Kecepatan kipas angin yang menyedot gas panas ke dalam tungku (*induced draught-fan speed*)

Tahap-tahap yang terjadi pada proses kontrol adalah sebagai berikut:

1. mengukur kesalahan (*error*) dan laju perubahan (*rate of change*) kesalahan tersebut.
2. mengubah hasil tahap 1 yang berupa suatu bilangan menjadi himpunan kabur yang merupakan nilai untuk variabel-variabel input.
3. menentukan kesimpulan berdasarkan fakta-fakta tahap nomer 2 dan aturan-aturan dasar yang diberikan.
4. mengubah hasil tahap 3 yang masih berupa himpunan kabur menjadi masukan yang tegas guna mengatur proses pembuatan semen.

3. Aturan-aturan Dasar

Tujuan komputerisasi pada sistem kontrol pembuatan semen adalah untuk otomatisasi strategi kontrol yang dilakukan oleh operator berpengalaman. Komputerisasi tersebut dibuat berdasarkan kajian yang seksama terhadap proses kontrol yang dilakukan oleh operator berpengalaman.

Hasil kajian tersebut adalah aturan-aturan yang menunjukkan hubungan antara variabel-variabel yang sedang diteliti, misalnya:

1. Jika laju pengisian batu bara naik, maka pengisian tungku pembakaran dengan bahan-bahan pembuat semen dan suhu dalam ruang asap (*smoke chamber*) akan naik, sedangkan presentase oksigen dan kadar kapur bebas akan menurun.
2. Jika aliran udara naik, maka suhu dalam ruang asap dan kadar kapur bebas akan naik, sedangkan pengisian tungku pembakar dan presentase oksigen akan menurun.

Akhirnya, berdasarkan pembicaraan-pembicaraan yang intensif dengan para operator berpengalaman, didefinisikan 75 kondisi operasi sebagai aturan-aturan dasar sistem kontrol. Aturan-aturan tersebut berbentuk:

JIKA	tingkat pengisian tungku pembakar adalah (DL, SL, OK, SH, DH)
DAN	pengisian tungku pembakar adalah (DL, SL, OK, SH, DH)
DAN	suhu ruang asap adalah (L, OK, H)

MAKA perubahan presentase oksigen adalah
(VN, N, SN, ZN, OK, ZP, SP, P, VP)
DAN perubahan aliran udara adalah
(VN, N, SN, ZN, OK, ZP, SP, P, VP)

Singkatan-singkatan di atas adalah nama-nama himpunan kabur untuk variabel yang diukur (*measured variabel*):

1. DL : sangat rendah (*drastically low*)
2. L : rendah (*low*)
3. SL : agak rendah (*slowly low*)
4. OK : Oke
5. SH : agak tinggi (*slightly high*)
6. H : tinggi (*high*)
7. DH : sangat tinggi (*drastically high*)

Himpunan kabur yang dipergunakan untuk variabel kontrol (*control variabel*) adalah:

1. VN : sangat negatif (*very negative*)
2. N : negatif (*negative*)
3. SN : negatif kecil (*small negative*)
4. ZN : negatif dekat nol (*zero negative*)
5. Ok : oke
6. ZP : positif dekat nol (*zero positif*)
7. SP : positif kecil (*small positive*)
8. P : positif (*positive*)

9. VP : sangat positif (*very positive*)

Himpunan-himpunan kabur tersebut merupakan himpunan kabur berbentuk trapesium yang mengambil nilai dalam interval [-1, 1].

E. Aplikasi Kontrol Kabur pada Sitem Operasi Kereta Api Otomatis (ATO)

Karena kondisi lalu lintas di kota Senday, Jepang, telah berkembang menjadi sangat padat, perencana kota memulai perencanaan sistem tranportasi bawah tanah (*sub way system*) yang dapat memberikan tingkat kenyamanan, keamanan, dan efisiensi yang tinggi pada masyarakat. Untuk tujuan ini, kontrol kabur pada operasi kereta api nampaknya merupakan kontrol yang sesuai guna mendapatkan akselerasi, deselerasi, dan pengereman yang mulus.

Strategi pengoperasian kereta api dibagi menjadi dua fungsi, yaitu:

1. CSC : kontrol kecepatan konstan (*constan speed control*)
2. TASC : kontrol penghentian kereta api secara otomatis (*train automatic stop control*)

CSC bertugas menjalankan kereta api dan menjaga kecepatan kereta api tersebut pada kecepatan yang sudah ditentukan. TASC bertugas menurunkan laju kereta api dan akhirnya menghentikan kereta api pada posisi yang sudah ditentukan.

Jenis kontrol kabur yang digunakan untuk kereta api ini adalah kontrol kabur prediktif (*predictif fuzzy control*) dengan aturan-aturan kontrol yang berbentuk:

R_i : "Jika (u adalah C_i $\Longrightarrow$ x adalah A_i dan y adalah B_i),
maka u adalah C_i"

Jika aturan tersebut dibaca dengan kata-kata maka akan berbunyi: "Jika variabel-variabel keadaan (*state ariabel*) x adalah A_i dan y adalah B_i, dan bila pada saat itu aksi kontrol yang dipilih adalah aksi kontrol C_i maka aksi kontrol yang ditetapkan sebagai output pengontrol adalah C_i". Dalam aturan tersebut x dan y merupakan variabel-variabel keadaan dan u adalah aksi kontrol.

Variabel keadaan melakukan evaluasi terhadap sistem kereta api dengan mengacu pada kriteria tertentu dan didefinisikan dengan himpunan-himpunan kabur berikut ini:

a. S : Indeks daya guna keamanan (*safety performance in-dexes*)
   1. SD : Bahaya (*danger*)
   2. SS : Aman (*safe*)

b. C : Indeks daya guna kenyamanan (*Comfort performance indexes*)
   1. CG : Baik (*good comfort*)
   2. CP : Buruk (*poor comfort*)

c. E : Indeks daya guna penghematan energi (*Energi saving performance indexes*)

1. ES : Hemat (*energy-saved running*)

2. EN : Tidak hemat (*not energy-saved running*)

d. T : Indeks daya guna kemampuan mencari jejak (*Trace bility performance indexes*)

1. TG : Pencarian jejak yang baik (*good trace*)

2. TA : Pencarian jejak yang akurat (*accurate trace*)

3. TL : Kecepatan rendah (*low speed*)

e. R : Indeks daya guna lama perjalanan (*Running time performance indexes*)

1. RT : Dalam daerah TASC (*in TASC zone*)

2. RF : Di luar daerah TASC (*not in TASC zone*)

f. G : Indeks daya guna penghentian kereta api (*Stopgap performance indexes*)

1. GG : Penghentian yang baik (*good stop*)

2. GA : Penghentian yang akurat (*accurate stop*)

Aksi kontrol yang mungkin adalah:

1. Pn : tingkat tenaga (*powering notch*)
2. Bn : tingkat pengereman (*braking notch*)
3. DN : perbedaan tingkat (*difference of notches*)
4. N : tingkat kontrol perintah (*control command notch*) untuk tingkat tenaga atau tingkat pengereman.

Aturan-aturan dasar yang dipergunakan pada kontrol kabur prediktif dibuat berdasarkan variabel keadaan dan variabel aksi kontrol di atas. Dalam praktek, sistem ATO mengevaluasi keadaan sistem setiap 100 m. Jadi setian 100 meter aturan-aturan dasar itu dipakai untuk mengevaluasi kondisi sistem, dan kesimpulannya dipakai untuk aksi kontrol berikutnya.

Contoh aturan-aturan dasar tersebut adalah sebagai berikut:

1. Aturan untuk CSC

   Jika (N adalah 0 $\Longrightarrow$ S adalah SS, C adalah CG, dan E adalah ES) maka N adalah 0.

   Jika (DN adalah 0 $\Longrightarrow$ S adalah SS dan T adalah TG) maka DN adalah 0.

2. Aturan untuk TASC

   Jika (DN adalah 0 $\Longrightarrow$ R adalh RT dan G adalah GG) maka DN adalah 0.

   Jika (N adalah 1 $\Longrightarrow$ R adalah RT dan C adalah CG) maka N adalah 1.

Pada waktu dikembangkannya ATO kabur, para ahli melakukan penelitian untuk melihat keunggulan dan kelemahan ATO kabur dibandingkan dengan ATO konvensional. Kriteria-kriteria yang dipakai dalam penelitian tersebut adalah:

1. kenaikan kenyamanan (*riding confort*)
2. ketepatan berhenti (*stopgap accuracy*)
3. konsumsi energi (*energy consumtion*), dan
4. lama perjalanan (*running time*)

Hasil penelitian tersebut adalah:

1. Kenaikan kenyamanan dan ketepatan berhenti

Dari penyelidikan diketahui bahwa banyaknya perubahan tingkat (*notch changes*) pada ATO kabur setengah ATO konvensional. Sedangkan ketepatan berhenti, yang diukur berdasarkan deviasi terhadap target yang diberikan, adalah tiga kali dari ATO konvensional. Dengan demikian, ATO kabur dapat dipakai sebagai pengontrol dengan kenaikan kenyamanan dan ketepatan yang baik.

2. Konsumsi energi dan lamanya perjalanan

Dari penyelidikan diketahui bahwa ATO kabur dapat menghemat penggunaan energi lebih dari 10% dan lamanya perjalanan lebih sedikit jika dibandingkan dengan lama perjalanan ATO konvensional.

BAB VII

PENUTUP

Himpunan kabur yang baru dimunculkan dua puluh lima tahun yang lalu ternyata menarik minat para peneliti. Mengapa para peneliti sangat tertarik pada teori himpunan kabur tersebut? Jawabnya adalah karena teori himpunan kabur merupakan teori himpunan yang menerima ketidak-tegasan. Apakah mungkin Matematika yang merupakan ilmu eksak dapat membicarakan teori yang memuat ketidak tegasan? Ternyata Matematika mampu mengembangkan teori himpunan kabur menjadi dasar bagi pengembangan teori-eori lain dalam bidang Matematika maupun aplikasi dalam berbagai bidang.

Jika himpunan tegas dapat menjadi dasar atau landasan untuk cabang-cabang ilmu Matematika, himpunan kabur pun dapat menjadi dasar bagi cabang-cabang ilmu Matematika. Beberapa diantaranya adalah logika kabur, ukuran posibilitas, ukuran nesesitas, dan variabel bahasa. Dari pengertian himpunan kabur yang memuat ketidak tegasan tersebut, muncul pengertian bilangan dan interval kabur yang juga memuat ketidak tegasan yang justru sering dijumpai dalam kehidupan sehari-hari. Meskipun himpunan kabur memuat ketidak tegasan, proses pengembangan secara matematis tetap mempergunakan kaidah-kaidah matematika yang eksak dan tegas. Semua definisi dan teorema dibahas dengan penalaran yang eksak.

Salah satu aplikasi yang kini berkembang dengan pesat, khususnya di Jepang, adalah aplikasi pada teori kontrol. Teori kontrol yang merupakan aplikasi himpunan kabur tersebut diberi nama teori kontrol kabur. Prinsip kerja kontrol kabur sangat berbeda dengan prinsip kerja kontrol konvensional. Kontrol konvensional bekerja berdasarkan persamaan-persamaan differensial, sedangkan kontrol kabur bekerja berdasarkan logika yang dipergunakan oleh operator manusia. Oleh karena itu kontrol kabur sering disebut juga sebagai kontrol logika kabur.

Karena logika kabur merupakan logika yang tidak hanya mengenal dua macam nilai kebenaran (dwi nilai), melainkan mengenal tak berhingga banyak nilai kebenaran, maka kontrol kabur menerima input yang berupa himpunan kabur. Salah satu cara penarikan kesimpulan dalam logika kabur adalah modus ponens yang digeneralisasi. Modus ponens ini dapat dipakai sebagai salah satu cara penarikan kesimpulan dalam kontrol kabur.

Pembahasan dalam tulisan ini masih sangat mungkin untuk dikembangkan. Dalam tulisan ini, pembahasan himpunan kabur masih sangat sedikit, hanya yang mendukung kontrol kabur saja. Pembaca masih dapat membahas relasi kabur, grafik kabur, operasi-operasi aljabar dengan bilangan kabur, fungsi kabur. Kalkulus kabur belum disinggung dalam skripsi ini, misalnya integral kabur, dan diferensial kabur. Mengenai ukuran ketidak pastian, penulis hanya membicarakan ukuran posibilitas dan ukuran nesesitas saja sehingga pembaca masih dapat membahas mengenai probabilitas kabur.

Dalam pembicaraan tentang logika kabur, fokus perhatian penulis hanya pada modus ponens yang digeneralisasi. Dengan demikian pembaca masih dapat mengembangkan logika kabur, misalnya dengan membahas modus tolens atau penarikan kesimpulan lainnya.

Penarikan kesimpulan dalam kontrol kabur yang dibicarakan dalam skripsi ini hanya penarikan kesimpulan berdasarkan modus ponens yang digeneralisasi saja. Masih ada cara penarikan kesimpulan yang lain yang tidak dibahas dalam skripsi ini.

Bagi pembaca yang menggeluti bidang elektronika atau komputer dapat mengembangkan skripsi ini dengan membuat interface atau program komputer yang sesuai dengan kontrol kabur. Tentu saja baik program komputer maupun interface tersebut harus sesuai dengan sistem yang dikontrol.

DAFTAR PUSTAKA

1. Buku

Dubois, Didier dan Prade, Henri
1988 *Possibility Theory, An Approach to Computerized Processing of Uncetainty*. New York : Plenum Press.

Elger, Olle I.
1967 *Control System Theory*. Tokyo : McGraw-Hill Kogakusha, Ltd.

Zimerman, H.J.
1991 *Fuzzy Sets Theory and Its Aplications*. Boston : Kluwer Academic Publishers.

2. Artikel

Larsen, P. Martin. "Industrial Applications of Fuzzy Logic Control," *Fuzzy Reasoning and Its Applications* (1981) : 335 - 342.

Mamdani, E. H. dan Assilian, S. "An Experiment in Linguistic Synthesis with a Fuzzy Logic Controller," *Fuzzy Reasoning and Its Applications* (1981) : 311 - 323.

Schwartz, Daniel G. dan Klir, George J. "Fuzzy Logic Flowers in Japan," *IEEE Spectrum* (July 1992) : 32 - 35.

Umbers, I. G. dan King, P. J. "An Analysis of Human Decision-making in Cemen Kiln Control and The Implications for Automation," *Fuzzy Reasoning and Its Applications* (1987) : 369 - 381

Zadeh, L. A. "Fuzzy Sets," *Informations and Control* 8 (1965) : 338 - 353.

LAMPIRAN

Ruang Borel

Diberikan semesta S. $\mathscr{B}$ merupakan ruang Borel semesta S jika memenuhi sifat-sifat berikut:

a. $S \in \mathscr{B}$ dan $\emptyset \in \mathscr{B}$

b. $A \in \mathscr{B} \Longrightarrow A' \in \mathscr{B}$

c. $A_1, A_2, \ldots \in \mathscr{B} \Longrightarrow \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{B}$

d. $A_1, A_2, \ldots \in \mathscr{B} \Longrightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{B}$