TEORI PERMAINAN

UNTUK DUA PIHAK

SKRIPSI

Oleh

Adniyanti

NIM : 88414013

NIRM : 880052010501120012

FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN

UNIVERSITAS SANATA DHARMA

YOGYAKARTA

1993

TEORI PERMAINAN
UNTUK DUA PIHAK

SKRIPSI

Diajukan Untuk Memenuhi Salah Satu Syarat
Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Strata Satu
Pendidikan Matematika
Pada Program Studi Pendidikan Matematika
Jurusan Pendidikan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Oleh
Adniyanti
NIM : 88414013
NIRM : 880052010501120012

FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
UNIVERSITAS SANATA DHARMA
YOGYAKARTA
1993

Persembahan untuk yang tercinta :

Bapak, Ibu, adik

dan kakak

SKRIPSI

TEORI PERMAINAN
UNTUK DUA PIHAK

Oleh

Adniyanti

NIM : 88414013

NIRM : 880052010501120012

Telah diperiksa, dibaca dan disetujui

oleh para pembimbing

Pembimbing I

Drs. B. Susanta Tanggal ....

Pembimbing II

Dra. Lina Aryati Tanggal ....

Pembimbing III

Dra. Ch. Rini Indrati Tanggal ....

SKRIPSI

T E O R I   P E R M A I N A N
UNTUK DUA PIHAK

Yang dipersiapkan dan disusun oleh

Adniyanti

NIM : 88414013

NIRM : 880052010501120012

Telah dipertahankan di depan Dewan Penguji

pada tanggal 21 Oktober 1993

dan dinyatakan telah memenuhi syarat

DEWAN PENGUJI

Ketua	: DR. F. Susilo, S.J.	, ...
Anggota	: Drs. B. Susanta	, ...
Anggota	: Drs. A. Tutoyo, M.Sc	, ...
Anggota	: Dra. Ch. Rini Indrati	, ...

Yogyakarta, ...

Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan

Universitas Sanata Dharma

Dekan

DR. J. Bismoko

KATA PENGANTAR

Skripsi berjudul Teori Permainan untuk Dua Pihak disusun untuk memenuhi salah satu syarat mencapai gelar sarjana pendidikan matematika.

Banyak kesulitan yang penulis hadapi sejak saat pemilihan topik, pengajuan proposal hingga selesainya tulisan ini. Adapun seluruh proses pembuatan tulisan ini, termasuk semua kesulitan yang dihadapi, merupakan latihan untuk belajar menulis karya ilmiah.

Penulis mengucapkan terima kasih kepada bapak Dr. St. Suwarsono, selaku Ketua Jurusan Pendidikan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Sanata Dharma, yang telah memberikan dorongan dan pengarahan kepada penulis untuk mulai merumuskan masalah yang hendak dijadikan pokok pembicaraan pada tulisan ini.

Banyak terima kasih penulis ucapkan kepada bapak Drs. B. Susanta selaku pembimbing I, Ibu Dra. Lina Aryati selaku pembimbing II, dan Ibu Dra. Ch. Rini Indrati selaku pembimbing III, yang dengan tekun dan bijaksana telah memberikan bimbingan, petunjuk dan saran yang sangat berarti sampai terselesaikannya tulisan ini.

Tidak lupa penulis mengucapkan terima kasih kepada Bapak dan Ibu dosen, serta teman-teman yang telah membantu selesainya tulisan ini.

Penulis menyadari bahwa tulisan ini masih jauh dari sempurna. Masih banyak kekurangan yang harus dibenahi. Penulis sangat mengharapkan kritik dan saran yang dapat menyempurnakan tulisan ini.

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR LAMBANG

$x = (x_1, x_2, \ldots, x_k)$

$y = (y_1, y_2, \ldots, y_k)$

$x < y \iff x_1 < y_1,\ x_2 < y_2,\ \ldots,\ x_k < y_k$.

P_1 = pemain 1 (pihak 1)

P_2 = pemain 2 (pihak 2)

x = vektor strategi untuk P_1

y = vektor strategi untuk P_2

X = himpunan vektor strategi untuk P_1

Y = himpunan vektor strategi untuk P_2

$\mathbb{X}$ = matriks untuk x

$\mathbb{Y}$ = matriks untuk y

x^* = strategi optimal untuk P_1

y^* = strategi optimal untuk P_2

$\mathbb{A}=(a_{ij})$ = matriks pembayaran dengan unsur-unsur a_{ij}

$E(x,y)$ = nilai harapan

V_L = nilai terendah permainan untuk P_1

V_U = nilai tertinggi permainan untuk P_2

V_L^M = nilai terendah permainan dengan himpunan vektor strategi X dan Y

V_U^M = nilai tertinggi permainan dengan himpunan vektor strategi X dan Y

v = nilai permainan

E_I = nilai maksimin permainan tanpa kerjasama untuk P_1

E_{II} = nilai maksimin permainan tanpa kerjasama untuk P_2

t_I = nilai maksimin permainan dengan kerjasama untuk P_1

t_{II} = nilai maksimin permainan dengan kerjasama untuk P_2

(u,v) = pasangan pembayaran permainan dengan kerjasama

(u^*,v^*) = pasangan pembayaran yang optimal dalam permainan dengan kerjasama

ABSTRAK

Teori permainan untuk dua pihak merupakan kejadian khusus dari teori pengambilan keputusan di bawah kondisi tidak pasti. Dalam suatu permainan, masing-masing pemain sudah mengetahui aturan permainan yang dinyatakan dalam bentuk matriks pembayaran. Dengan demikian , setiap pemain akan menghadapi lawan, yang masing-masing berpikir secara rasional dan berusaha mengoptimalkan perolehannya.

Dalam permainan berjumlah nol, ada dua cara penyelesaian permainan yang tergantung ada tidaknya titik pelana dalam matriks tersebut. Apabila ada titik pelana maka penyelesaian dengan menggunakan strategi murni. Apabila tidak ada titik pelana maka penyelesaian dengan menggunakan strategi campuran. Dalam strategi campuran ada beberapa macam teknik penyelesaian, antara lain : secara aljabar, secara grafik dan dengan pemrograman linear. Dalam permainan ini, pihak yang bermain sebagai pemain pertama akan berusaha memaksimalkan keuntungannya, sedangkan pihak lawan (pemain kedua) akan meminimalkan kerugiannya.

Penyelesaian permainan tidak berjumlah nol tergantung kepada apakah permainan tersebut tanpa kerjasama atau dengan kerjasama. Dalam permainan ini, setiap pihak akan berusaha memaksimalkan keuntungannya.

BAB I

PENDAHULUAN

Alasan Pemilihan Judul

Teori permainan (*Game Theory*) yang merupakan kejadian khusus dari pengambilan keputusan (*Decision Making*) adalah salah bentuk matematika terapan. Teori permainan ini menarik perhatian dan minat penulis, karena banyak masalah dalam kehidupan sehari-hari yang dapat diselesaikan dengan menggunakan teori permainan, antara lain : kontrak dan program tawar-menawar serta keputusan-keputusan penetapan harga. Selain itu penulis juga berminat untuk memperdalam materi teori permainan yang pernah diperoleh dalam kuliah.

Metode Penulisan

Skripsi ini ditulis dengan menggunakan metode studi literatur. Jadi belum ada penelitian yang bersifat eksperimen.

Latar Belakang

Teori permainan mula-mula dikemukakan oleh seorang ahli matematika Perancis Emile Borel pada tahun 1920. Kemudian Von Neumann dan Morgenstern mengembangkan lebih lanjut sebagai alat untuk merumuskan perilaku ekonomi yang bersaing, yang ditulis dalam buku "Theory of Games and

Economic Behaviour" pada tahun 1944.

Teori permainan diangkat dari masalah sehari-hari, khususnya dalam konflik kehidupan. Dengan demikian, banyak masalah kehidupan dapat dibawa ke dalam masalah permainan, seperti ekonomi, politik, strategi militer dan psikologi. Bahkan perkembangan teori permainan sangat pesat pada saat Perang Dunia II. Hal ini disebabkan karena banyak masalah-masalah militer dapat dibawa ke dalam bentuk permainan berjumlah nol untuk dua pihak dan teori permainan dapat memberikan penyelesaiannya.

Teori permainan merupakan masalah pengambilan keputusan di bawah kondisi tidak pasti (*uncertainty*) dengan sifat khusus yaitu orang yang mengambil keputusan menghadapi pihak lain (lawan) yang berpikir secara rasional. Hal ini dapat dilihat dalam permainan catur dan bridge. Setiap pemain akan menghadapi lawan yang mengambil keputusan secara rasional. Lain halnya dalam rolet (*roulette*). Di sini pemain menghadapi lawan yang berpikir secara tidak rasional, mereka bermain secara "untung-untungan".

Teori permainan dikembangkan untuk menganalisa situasi kompetitif yang mencakup kepentingan yang bertentangan (*conflicting interest*). Secara umum dapat digambarkan sebagai berikut : ada dua pihak atau lebih yang saling berhadapan, setiap pihak akan berpikir secara rasional untuk menentukan strategi yang dapat mengoptimalkan perolehannya. Adapun keputusan yag diambil oleh suatu pihak adalah independen . Lebih lanjut dianggap bahwa permainan ini dimainkan secara simultan dan berulang-ulang serta dianggap bahwa setiap pemain mengetahui tujuan yang akan dicapai oleh pihak lawan.

Permainan yang akan dibahas adalah permainan berjumlah nol dan tidak berjumlah nol untuk dua pihak dengan strategi berhingga (*finite*). Istilah "jumlah nol" berarti bahwa dalam setiap permainan keuntungan (penerimaan) seorang pemain adalah sama dengan kerugian (kehilangan) dari pemain lainnya. Dengan kata lain, jumlah aljabar dari keuntungan dan kerugian tersebut adalah sama dengan nol. Sedangkan istilah "tidak berjumlah nol" berarti keuntungan seorang pemain tidak harus berupa kerugian bagi pemain yang lain.

Di dalam suatu permainan, secara konsepsional dapat diramalkan seluruh kemungkinan strategi dan kemungkinan hasil (nilai permainan) yang optimal. Strategi ini dinyatakan dalam bentuk nilai probabilitas . Adapun "nilai probabilitas" ini menyatakan banyaknya langkah yang harus dikerjakan dalam suatu permainan. Sedangkan urutan dari masing-masing langkah yang harus dimainkan tidak dibahas. Dengan demikian apabila suatu permainan akan dimainkan 1000 kali dan kemungkinan strategi yang harus dimainkan adalah $(\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$

maka $(\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$ ini merupakan suatu nilai probabilitas dengan banyak langkah untuk masing-masing nilai probabilitas adalah

$$(\frac{1}{4} \times 1000 , \frac{3}{4} \times 1000) = (250,750) \text{ langkah.}$$

Sedangkan langkah yang mana yang harus dimainkan terlebih dahulu tidak diperhatikan. Selanjutnya apabila permainan ini dilaksanakan dan ternyata hasil akhirnya tidak sama dengan hasil ramalan, hal ini disebabkan karena urutan dalam memainkan masing-masing langkah tidak diperhatikan.

Ruang Lingkup

Permainan yang akan dibahas adalah permainan berjumlah nol dan tidak berjumlah nol untuk dua pihak dengan strategi berhingga. Adapun untuk permainan n pihak dan permainan dengan strategi tak berhingga (*infinite*) tidak dibahas.

Secara garis besar tulisan ini terbagi atas tiga bagian, yaitu : Pendahuluan, Isi dan Penutup, yang secara keseluruhan diuraikan dalam 6 bab. Pendahuluan ditulis dalam Bab I, sedangkan penutup pada Bab VI. Isi dari tulisan ini dimuat dalam Bab II sampai Bab V. Adapun uraian secara ringkas sebagai berikut.

Perumusan masalah permainan berjumlah nol dan tidak berjumlah nol untuk dua pihak dengan strategi berhingga ditulis dalam Bab II. Selanjutnya pembicaraan pokok dalam tulisan ini, secara keseluruhan dibahas dalam Bab III dan

Bab IV. Di sini akan dibahas bagaimana seorang pemain menetapkan strategi-strateginya agar perolehannya optimal.

Bab V membicarakan penerapan permainan dalam kehidupan sehari-hari seperti politik, ekonomi dan bisnis.

Materi Prasyarat

Beberapa materi prasyarat yang diperlukan dalam pembahasan adalah matriks, pemrogaman linear (khususnya masalah dualitas dan metode simpleks), analisis real dan kalkulus.

BAB II

PERUMUSAN MASALAH PERMAINAN UNTUK DUA PIHAK

2.1 Permainan Berjumlah Nol

Suatu masalah permainan pada umumnya disusun dalam bentuk tabel pembayaran. **Tabel pembayaran** ini menyatakan besarnya pembayaran setiap pemain bila ia menggunakan strategi tertentu. **Vektor strategi permainan** adalah rangkaian kegiatan atau rencana menyeluruh dari seorang pemain, sebagai reaksi atas kemungkinan aksi yang dilakukan lawannya.

Diberikan tabel pembayaran sebagai berikut :

		P_2				
		y_1	y_2	y_3	...	y_n
	x_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	...	a_{1n}
	x_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	...	a_{2n}
P_1	x_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	...	a_{3n}
	$\vdots$					
	x_m	a_{m1}			...	a_{mn}

Tabel 2.1

dengan x_i = probabilitas pemain 1 (pihak 1 atau P_1) menggunakan strategi i , $1 \le i \le m$.

y_j = probabilitas pemain 2 (pihak 2 atau P_2) menggunakan strategi j , $1 \le j \le n$.

a_{ij}= pembayaran P_2 kepada P_1 apabila P_1 menggunakan strategi i dan P_2 menggunakan strategi j.

Tabel pembayaran di atas dapat disusun dalam bentuk matriks yaitu :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Matriks yang disusun dari tabel pembayaran disebut **matriks pembayaran** (*payoff matrix*). Baris dan kolom matriks bersesuaiandengan strategi-strategi yang digunakan pemain, dengan baris bersesuaian dengan strategi untuk P_1 dan kolom bersesuaian dengan strategi dari pemain yang lain (lawan atau P_2). Unsur-unsur dalam matriks menunjukkan pembayaran dari strategi permainan yang berbeda-beda. Baris matriks menyatakan pembayaran kepada P_1 dan pembayaran untuk P_2 dinyatakan dengan lawan transpos matriks tersebut, sehingga unsur positif dalam matriks menunjukkan keuntungan (penerimaan) bagi P_1 dan kerugian (kehilangan) bagi P_2.

Contoh 2.1 :

Diberikan tabel pembayaran sebagai berikut :

		P_2		
		y_1	y_2	y_3
P_1	x_1	0	-3	-4
	x_2	1	2	0

Tabel 2.2

Matriks pembayaran untuk tabel 2.2 adalah

$$\begin{bmatrix} 0 & -3 & -4 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriks tersebut menyatakan keuntungan atau kerugian setiap pemain. Di sini P_1 akan kehilangan 3 bila ia menggunakan strategi 1 dan P_2 menggunakan strategi 2. Apabila P_1 memilih strategi 2 dan P_2 memilih strategi 1, ini berarti P_1 menerima 1 dari P_2 (dengan kata lain bahwa P_2 akan kehilangan 1). Kemudian karena pembayaran dilihat dari sudut pemain yang strateginya berhubungan dengan baris dari matriks, maka matriks pembayaran tersebut adalah matriks pembayaran untuk P_1, sedangkan matriks pembayaran untuk P_2 adalah lawan transpos matriks pembayaran untuk P_1 yaitu :

$$-\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 2 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3 & -2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Dalam suatu permainan, setiap pemain akan berusaha mengoptimalkan perolehannya. P_1 akan memaksimalkan keuntungan dan P_2 akan meminimalkan kekalahannya. Karena setiap pemain berusaha mengoptimalkan perolehannya, hal ini berakibat bahwa pemain-pemain akan cenderung pada pasangan strategi yang dapat mengoptimalkan perolehannya. Pada contoh di atas (lihat tabel 2.2) dapat dikatakan bahwa dengan memainkan strategi 1, P_1 akan kehilangan 4 dan dengan memainkan strategi 2 maka P_1 sekurang-kurangnya seimbang (pada titik seimbang). Oleh karena itu P_1 cenderung untuk memilih strategi 2. Demikian pula P_2, bila ia memilih strategi 1 atau 2 maka ia akan kehilangan 1 atau 2. Apabila ia memainkan strategi 3, sekurang-kurangnya P_2 akan berada pada keadaan seimbang, sehingga P_2 akan cenderung memilih strategi 3.

Diketahui bahwa masing-masing pemain akan memainkan strategi yang mengoptimalkan perolehannya, maka perumusan matematis permainan berjumlah nol untuk dua pihak adalah

Pihak I : menentukan $x_i \geq 0$

yang memaksimalkan $E = \sum_i \sum_j x_i \; a_{ij} \; y_j$

dan memenuhi $\sum_i x_i = 1$

Pihak II: menentukan $y_j \geq 0$

yang meminimalkan $E = \sum_j \sum_i y_j \; a_{ij} \; x_i$

dan memenuhi $\sum_j y_j = 1$

dengan $1 \leq i \leq m$ dan $1 \leq j \leq n$.

Perumusan matematis di atas menunjukkan bahwa permasalahan bagi P_1 adalah menentukan $x_i \geq 0$, $\sum_i x_i = 1$, $1 \leq i \leq m$, yang memaksimalkan harapannya untuk menang. Kemudian permasalahan bagi P_2 adalah menentukan $y_j \geq 0$, $\sum_j y_j = 1$, $1 \leq j \leq n$, yang meminimalkan harapannya untuk kalah.

Contoh 2.2 :

Dalam suatu kota hanya terdapat 2 buah toko buku yaitu A dan B. Masing-masing toko bersaing untuk menarik pembeli sebanyak-banyaknya dengan menggunakan 2 buah strategi yang sama. Kedua strategi tersebut adalah memberikan potongan harga 5% untuk setiap pembelian dan menyediakan minuman secara cuma-cuma. Diberikan tabel yang menyatakan banyaknya pembeli yang pindah dari toko buku B ke toko buku A bila setiap toko buku menggunakan strategi tersebut.

		Toko Buku B	
		Potongan harga 5%	Menyediakan minuman cuma-cuma
Toko Buku A	Potongan harga 5%	2	1
	Menyediakan minuman cuma-cuma	-3	2

Tabel 2.3

Permasalahannya adalah bagaimana setiap toko buku menggunakan strateginya agar mereka dapat menarik pembeli sebanyak mungkin.

Misalkan x_1 dan x_2 adalah probabilitas toko buku A menggunakan strategi 1 dan 2 dengan strategi 1 adalah memberikan potongan harga 5% , strategi 2 adalah menyediakan minuman secara cuma-cuma. Kemudian probabilitas untuk toko buku B adalah y_1

dan y_2 dengan strategi 1 untuk pemberian potongan harga 5%, strategi 2 adalah menyediakan minuman secara cuma-cuma. Kemudian E_I melambangkan harapan toko buku A untuk menarik pembeli dan E_{II} untuk toko buku B. Perumusan matematis untuk permasalahan di atas adalah mencari probabilitas x_1, x_2, y_1, y_2 yang mengoptimalkan banyaknya pembeli.

Tabel pembayaran untuk masalah ini adalah

		B	
		y_1	y_2
A	x_1	2	1
	x_2	-3	2

Tabel 2.4

dengan matriks pembayaran

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Perumusan masalah untuk toko buku A adalah

menentukan $x_i \geq 0$, $i = 1,2$

yang memaksimalkan
$$\begin{aligned} E_I &= \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} x_i \, a_{ij} \, y_j \\ &= x_1(2)y_1 + x_1(1)y_2 + \\ &\quad x_2(-3)y_1 + x_2(2)y_2 \\ &= 2x_1y_1 + x_1y_2 - 3x_2y_1 + 2x_2y_2 \end{aligned}$$

dan memenuhi $\sum_{i=1}^{2} x_i = 1$

Perumusan masalah untuk toko buku B adalah

menentukan $y_j \geq 0$, $j = 1,2$

yang meminimalkan $E_I = \sum_{j=1}^{2} \sum_{i=1}^{2} y_j \; a_{ij} \; x_j$

$$= y_1(2)x_1 + y_1(-3)x_2 + y_2(1)x_1 + y_2(2)x_2$$

$$= 2y_1x_2 - 3y_1x_2 + y_2x_1 + 2y_2x_2$$

dan memenuhi $\sum_{j=1}^{2} y_j = 1$

Misalkan toko buku A memainkan strateginya masing-masing dengan probabilitas $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = \frac{2}{3}$. Toko buku B memainkan suatu strategi dengan probabilitas $y_1 = \frac{1}{2}$, $y_2 = \frac{1}{2}$.

Diperoleh

$$E_I = 2(\tfrac{1}{3})(\tfrac{1}{2}) + (\tfrac{1}{3})(\tfrac{1}{2}) - 3(\tfrac{2}{3})(\tfrac{1}{2}) + 2(\tfrac{2}{3})(\tfrac{1}{2})$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{6} - 1 + \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$$

$$E_{II} = 2(\tfrac{1}{2})(\tfrac{1}{3}) - 3(\tfrac{1}{2})(\tfrac{2}{3}) + (\tfrac{1}{2})(\tfrac{1}{3}) + 2(\tfrac{1}{2})(\tfrac{2}{3})$$

$$= \frac{1}{3} - 1 + \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

Dengan demikian harapan toko buku A untuk memperoleh pembeli adalah $\frac{1}{6}$ dan harapan toko B untuk kehilangan pembeli adalah $\frac{1}{6}$.

Apabila diambil $x_1 = \frac{1}{4}$, $x_2 = \frac{3}{4}$, $y_1 = \frac{7}{8}$, $y_2 = \frac{1}{8}$, maka dengan mensubstitusikan probabilitas tersebut ke dalam E_I dan E_{II} akan diperoleh

$$E_I = 2(\tfrac{1}{4})(\tfrac{7}{8}) + (\tfrac{1}{4})(\tfrac{1}{8}) - 3(\tfrac{3}{4})(\tfrac{7}{8}) + 2(\tfrac{3}{4})(\tfrac{1}{8})$$

$$= \frac{7}{16} + \frac{1}{32} - \frac{63}{32} + \frac{3}{16} = \frac{42}{32} = 1\,\frac{5}{16}$$

dan

$$E_{II} = 2(\tfrac{1}{4})(\tfrac{7}{8}) - 3(\tfrac{3}{4})(\tfrac{7}{8}) + (\tfrac{1}{4})(\tfrac{1}{8}) + 2(\tfrac{3}{4})(\tfrac{1}{8})$$

$$= \frac{7}{16} - \frac{63}{32} + \frac{1}{32} + \frac{3}{16} = \frac{42}{16} = 1\,\frac{5}{16}$$

Dengan melihat contoh di atas dapat disimpulkan bahwa besarnya E_I dan E_{II} tergantung kepada x_1, x_2, y_1, y_2.

2.2 Permainan Tidak Berjumlah Nol

Masalah permainan tidak berjumlah nol disusun dalam bentuk matriks. Matriks tersebut menyatakan pembayaran yang harus dilakukan oleh setiap pemain. Dalam permainan tidak berjumlah nol, pembayaran seorang pemain tidak harus berupa lawan dari pembayaran pemain yang lain.

Diketahui P_1 mempunyai m kemungkinan strategi dan P_2 mempunyai n kemungkinan strategi.

Misalkan :

a_{ij} = pembayaran untuk P_1 bila P_1 memainkan strategi i dan P_2 memainkan strategi j

b_{ij} = pembayaran untuk P_2 bila P_2 memainkan strategi j dan P_2 memainkan strategi i

(a_{ij}, b_{ij}) = pembayaran untuk masing-masing pemain

x_i = probabilitas P_1 menggunakan strategi i

y_j = probabilitas P_2 menggunakan strategi j

E_I = harapan P_1 untuk mengoptimalkan perolehannya

E_{II} = harapan P_2 untuk mengoptimalkan perolehannya

dengan $1 \leq i \leq m$ dan $1 \leq j \leq n$.

Diberikan tabel pembayaran

		P_2			
		y_1	y_2	...	y_n
	x_1	(a_{11},b_{11})	(a_{12},b_{12})	...	(a_{1n},b_{1n})
P_1	x_2	(a_{21},b_{21})		...	(a_{2n},b_{2n})
		$\vdots$			$\vdots$
	x_m	(a_{m1},b_{m1})	(a_{m2},b_{m2})	...	(a_{mn},b_{mn})

Tabel 2.5

Matriks pembayaran untuk tabel pembayaran di atas adalah

$$\begin{bmatrix} (a_{11},b_{11}) & \cdots & (a_{1n},b_{1n}) \\ (a_{21},b_{21}) & \cdots & (a_{2n},b_{2n}) \\ \vdots & & \vdots \\ (a_{m1},b_{m1}) & \cdots & (a_{mn},b_{mn}) \end{bmatrix}$$

Setiap unsur matriks tersebut terdiri atas dua komponen dengan komponen ke-1 menyatakan pembayaran untuk P_1 dan komponen ke-2 adalah pembayaran untuk P_2. Karena setiap unsur dalam matriks pembayarannya terdiri atas dua komponen maka permainan tidak berjumlah nol disebut juga **permainan bimatriks** (*bimatrix game*). Diketahui $\mathbb{A}$ merupakan matriks dengan unsur-unsur a_{ij} dan $\mathbb{B}$ merupakan matriks dengan unsur-unsur b_{ij}. Matriks pembayaran untuk P_1 adalah

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

dan matriks pembayaran untuk P_2 adalah

$$\mathbb{B}^t = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{21} & \cdots & b_{m1} \\ b_{12} & & \cdots & b_{m2} \\ \vdots & & & \vdots \\ b_{1n} & & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

dengan matriks $\mathbb{B}$ adalah

$$\mathbb{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ b_{m1} & & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

Seperti halnya dalam permainan berjumlah nol, unsur positif dalam permainan tidak berjumlah nol menyatakan penerimaan (keuntungan) bagi pemain dan unsur negatif dalam matriks pembayaran adalah kehilangan (kerugian).

Diketahui setiap pemain akan mengoptimalkan perolehannya. Perumusan matematis permainan tidak berjumlah nol untuk dua pihak adalah

Pihak I : menentukan $x_i \geq 0$

yang memaksimalkan $E_I = \sum_i \sum_j x_i \; a_{ij} \; y_j$

dan memenuhi $\sum_i x_i = 1$

Pihak II: menentukan $y_j \geq 0$

yang memaksimalkan $E_{II} = \sum_j \sum_i y_j \; b_{ij} \; x_i$

dan memenuhi $\sum_j y_j = 1$

dengan $1 \leq i \leq m$ dan $1 \leq j \leq n$.

Contoh 2.3 :

Diberikan tabel pembayaran sebagai berikut :

		P_2 y_1	y_2
P_1	x_1	(8,4)	(6,5)
	x_2	(6,2)	(3,7)

Tabel 2.6

Matriks pembayaran untuk tabel 2.6 adalah

$$\begin{bmatrix} (8,4) & (6,5) \\ (6,2) & (3,7) \end{bmatrix}$$

dan terdiri atas 2 buah matriks $\mathbb{A}$ dan $\mathbb{B}$ yaitu

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 8 & 6 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} \qquad \mathbb{B} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$$

Adapun matriks pembayaran untuk P_1 adalah $\begin{bmatrix} 8 & 6 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$

dan untuk P_2 adalah $\mathbb{B}^t = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$

Matriks pembayaran tabel 2.6 menyatakan bahwa bila P_1 memainkan strategi 1 dan P_2 dengan strategi 1, maka P_1 akan menerima 8 dan P_2 menerima 4. Apabila setiap pemain memilih strategi 2 maka hal ini akan berarti bahwa P_1 menerima 3 dan P_2 menerima 7.

Perumusan masalah untuk P_1 adalah

menentukan $x_i \geq 0$, $i=1,2$

yang memaksimalkan $E_I = \sum_i \sum_j x_i \; a_{ij} \; y_j$

$$= x_1(8)y_1 + x_1(6)y_2 + x_2(6)y_1 + x_2(3)y_2$$

$$= 8x_1y_1 + 6x_1y_2 + 6x_2y_1 + 3x_2y_2$$

dan memenuhi $\sum_{i=1}^{2} x_i = 1$

Perumusan masalah untuk P_2 adalah

menentukan $y_j \geq 0$, $j = 1,2$

yang memaksimalkan $E_{II} = \sum_j \sum_i y_j \, b_{ij} \, x_i$

$= y_1(4)\, x_1 + y_1\,(2)\, x_2 + y_2(5)\, x_2 + y_2(7)\, x_2$

$= 4y_1x_1 + 2y_1x_2 + 5y_2x_1 + 7y_2x_2$

dan memenuhi $\sum_{j=1}^{2} y_j = 1$

2.3 Permainan n Pihak

Apabila ada n pihak yang bermain, permainan itu dikembalikan kedalam bentuk permainan dua pihak. Cara mengubah permainan dari n pihak menjadi 2 pihak adalah dengan membuat 2 buah kelompok pemain.

Diketahui N = himpunan semua pemain

S = himpunan pemain dalam kelompok I

T = himpunan pemain dalam kelompok II.

Kedua kelompok pemain yang akan dibentuk harus memenuhi syarat 1. $S \neq \emptyset$, $T \neq \emptyset$

2. $S \cap T = \emptyset$

3. $S \cup T = N$

Dalam keadaan seperti ini S bermain sebagai P_1 dan T bermain sebagai P_2. Karena ada banyak kemungkinan untuk membentuk S dan T, maka akan diperoleh beberapa pasangan S dan T yang memenuhi syarat-syarat di atas.

Bagaimana untuk permainan dua pihak ? Dengan mengambil $N = \{P_1, P_2\}$, $S = \{P_1\}$ dan $T = \{P_2\}$ maka syarat-syarat untuk membentuk dua kelompok pemain dipenuhi yaitu :

1. $S \neq \emptyset$, $T \neq \emptyset$
2. $S \cup T = \{P_1\} \cup \{P_2\} = \{P_1, P_2\} = N$
3. $S \cap T = \{P_1\} \cap \{P_2\} = \emptyset$.

Sehingga dapat dikatakan bahwa permainan dua pihak merupakan kejadian khusus dari permainan n pihak.

Contoh 2.4 :

Permainan 3 pihak dengan $N = \{P_1, P_2, P_3\}$. Banyak kemungkinan membuat pasangan S dan T yang memenuhi syarat-syarat di atas adalah

1. $S = \{P_1\}$, $T = \{P_2, P_3\}$
2. $S = \{P_2\}$, $T = \{P_1, P_3\}$
3. $S = \{P_3\}$, $T = \{P_1, P_2\}$.

Contoh 2.5 :

Permainan 4 pihak dengan $N = \{P_1, P_2, P_3, P_4\}$. Banyak kemungkinan membuat pasangan S dan T yang memenuhi syarat di atas adalah

1. $S = \{P_1\}$, $T = \{P_2, P_3, P_4\}$
2. $S = \{P_2\}$, $T = \{P_1, P_3, P_4\}$
3. $S = \{P_3\}$, $T = \{P_1, P_2, P_4\}$
4. $S = \{P_4\}$, $T = \{P_1, P_2, P_3\}$
5. $S = \{P_1, P_2\}$, $T = \{P_3, P_4\}$
6. $S = \{P_1, P_3\}$, $T = \{P_2, P_4\}$
7. $S = \{P_1, P_4\}$, $T = \{P_2, P_3\}$.

Untuk selanjutnya, permainan n pihak tidak dibahas dalam skripsi ini.

BAB III

PERMAINAN BERJUMLAH NOL

3.1 Nilai Harapan

Dalam teori probabilitas nilai harapan didefinisikan sebagai hasil kali antara probabilitas dan nilai yang terkait dengan probabilitas tersebut. Dengan menggunakan definisi di atas, maka **nilai harapan** (*expected value*) untuk permainan adalah jumlah dari semua hasil kali probabilitas setiap pemain yang menggunakan strategi-strateginya dan pembayaran yang terkait dengan probabilitas tersebut. Ini berarti bahwa nilai harapan merupakan nilai yang diharapkan setiap pemain apabila mereka menggunakan strategi-strateginya. Nilai harapan disebut juga dengan **pembayaran harapan** (*expected payoff*).

Diberikan tabel pembayaran sebagai berikut :

		P_2			
		y_1	y_2	...	y_n
	x_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}
	x_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}
P_1	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
	x_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}

Tabel 3.1

dengan x_i = probabilitas P_1 menggunakan strategi i

$(1 \leq i \leq m)$

y_j = probabilitas P_2 menggunakan strategi j
($1 \le j \le n$)

a_{ij} = pembayaran P_2 kepada P_1 bila P_2 menggunakan strategi j dan P_1 menggunakan strategi i.

Nilai harapan (E) permainan berjumlah nol untuk 2 pihak adalah :

$$E = \sum_i \sum_j x_i \, a_{ij} \, y_j$$

$$= (x_1 \; x_2 \; . \; . \; . \; x_m) \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Apabila $\mathbf{x} = (x_1, x_2 \; \dots \; x_m)$ adalah vektor strategi untuk P_1 yang secara matriks ditulis dengan $\mathbb{X}$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ adalah vektor strategi untuk P_2 yang secara matriks ditulis dengan $\mathbb{Y}$ dan $\mathbb{A} = (a_{ij})$ melambangkan matriks pembayaran maka nilai harapan di atas dapat ditulis lagi sebagai :

$$E = \mathbb{X} \, \mathbb{A} \, \mathbb{Y}^t$$

Untuk selanjutnya kedua lambang $\mathbf{x}$ dan $\mathbb{X}$ akan digunakan dalam arti yang sama, demikian juga lambang $\mathbf{y}$ dan $\mathbb{Y}$.

Definisi 3.1 :

Nilai harapan untuk permainan dengan matriks pembayaran $\mathbb{A} = (a_{ij})$, $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots x_m)$ menyatakan vektor strategi untuk P_1 dan $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ menyatakan vektor strategi untuk P_2 adalah :

$$E = \sum_i \sum_j x_i \, a_{ij} \, y_j = \mathbb{X} \, \mathbb{A} \, \mathbb{Y}^t$$

Contoh 3.1 :

Lihat kembali tabel 2.3 pada contoh 2.2, yaitu :

		P_2	
		y_1	y_2
P_1	x_1	2	1
	x_2	-3	2

Nilai harapan untuk permainan ini adalah :

$$E = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} x_i \; a_{ij} \; y_j$$

$$= x_1(2)\, y_1 + x_1(1)\, y_2 + x_2(-3)\, y_1 + x_2(2)\, y_2$$

$$= 2\, x_1\, y_1 + x_1\, y_2 - 3\, x_2\, y_2 + 2\, x_2\, y_2$$

Apabila $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ dan $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ menyatakan matriks pembayaran, maka nilai harapan permainan di atas dapat dinyatakan dalam bentuk matriks yaitu :

$$E = \mathbb{X}\, \mathbb{A}\, \mathbb{Y}^t$$

$$= (x_1 \;\; x_2) \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

3.2 Teorema Minimaks

Diketahui setiap pemain berusaha mengoptimalkan perolehan. P_1 akan memaksimalkan pembayaran dari P_2 dan P_2 akan berusaha meminimalkan pembayaran kepada P_1. Ini berarti bahwa P_1 harus menetapkan unsur terkecil setiap baris dalam matriks pembayaran, kemudian menetapkan strategi permainannya sehingga mencapai maksimal dari unsur terkecil dan hal ini disebut dengan **kriteria maksimin**.

Definisi 3.2 :

Andaikan $\min_j a_{ij}$ menyatakan unsur terkecil dari baris i dan V_L adalah maksimal dari unsur terkecil setiap baris, $V_L = \text{maks}_i \min_j a_{ij}$ disebut **nilai terendah** permainan.

Dengan menggunakan cara yang sama, P_2 harus menetapkan unsur terbesar setiap kolom, kemudian menentukan strategi permainannya sehingga mencapai minimal dari unsur terbesarnya.

Definisi 3.3 :

Apabila $\text{maks}_i a_{ij}$ menyatakan unsur terbesar dari kolom j dan V_U adalah minimal dari unsur terbesar setiap kolom , $V_U = \min_j \text{maks}_i a_{ij}$ disebut **nilai tertinggi** permainan.

Dengan menggunakan kriteria ini, P_2 dapat menjamin bahwa P_1 tidak akan memperoleh pembayaran yang lebih besar dari V_U.

Teorema 3.1 :

$V_L \leq V_U$

Bukti :

Misalnya nilai terendah terjadi pada baris h dan nilai tertinggi pada kolom k.

a_{hj} : unsur terkecil baris h dan a_{ik} : unsur terbesar kolom k, dengan $j \neq k$, $i \neq h$.

Karena a_{hk} merupakan unsur yang terletak pada baris h dan kolom k, maka :

$$a_{hj} \leq a_{hk} \quad \text{dan} \quad a_{hk} \leq a_{ik}$$

Jadi

$$V_L = a_{hj} \leq a_{hk} \leq a_{ik} = V_U$$

$$\Longleftrightarrow V_L \leq V_U$$

Akibat :

Bila $V_L = V_U$ maka $a_{hj} = a_{hk} = a_{ik}$ dan a_{hk} merupakan unsur terkecil baris h dan unsur terbesar kolom k.

Von Neumann (1937) telah membuktikan bahwa dalam setiap permainan dapat ditemukan strategi terbaik untuk P_1 (dengan menggunakan kriteria maksimin) dan strategi terbaik untuk P_2, sehingga setiap pemain dapat mengoptimalkan nilai harapannya.

Definisi 3.4 :

Diketahui $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_m)$ vektor strategi untuk P_1 , $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ adalah vektor strategi untuk P_2 dan $E(\mathbf{x},\mathbf{y})$ nilai harapan, maka $V_L^M = \underset{x \in X}{\text{maks}} \; \underset{y \in Y}{\text{min}} \; E(\mathbf{x},\mathbf{y})$ dan $V_U^M = \underset{y \in Y}{\text{min}} \; \underset{x \in X}{\text{maks}} \; E(\mathbf{x},\mathbf{y})$ adalah nilai terendah dan nilai tertinggi permainan dengan himpunan vektor strategi X dan Y.

Misalnya $X = \{\mathbf{x}_1, \ldots \mathbf{x}_m\}$ adalah himpunan vektor strategi untuk P_1 yang tertutup.

$Y = \{\mathbf{y}_1, \ldots \mathbf{y}_n\}$ adalah himpunan vektor strategi untuk P_2 yang tertutup.

E = fungsi bernilai real dengan $E : X \times Y \longrightarrow \mathbb{R}$ yang mewakili nilai harapan untuk P_1

X dan Y adalah himpunan bagian (subset) dalam ruang Euclides $\mathbb{R}^k$.

Definisi 3.5 :

$X \subset \mathbb{R}^k$ dengan $X = \{ \mathbf{x} \mid \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k),\ x_i \in \mathbb{R},\ 1 \le i \le k \}$.

$Y \subset \mathbb{R}^k$ dengan $Y = \{ \mathbf{y} \mid \mathbf{y} = (y_1, \dots, y_k),\ y_j \in \mathbb{R},\ 1 \le j \le k \}$.

Teorema 3.2 :

Diberikan X dan Y adalah himpunan berhingga dalam $\mathbb{R}^k$ dan E adalah fungsi kontinu dengan $E : X \times Y \longrightarrow \mathbb{R}$.

$\left[\max_{\mathbf{x}\in X} \min_{\mathbf{y}\in Y} E(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \min_{\mathbf{y}\in Y} \max_{\mathbf{x}\in X} E(\mathbf{x},\mathbf{y}) \right]$ bila dan hanya bila $\left[(\exists\, \mathbf{x}_o \in X,\ \mathbf{y}_o \in Y,\ v \in \mathbb{R})\ (E(\mathbf{x}_o,\mathbf{y}) \ge v,\ \forall\, \mathbf{y} \in Y \text{ dan } E(\mathbf{x},\mathbf{y}_o) \le v,\ \forall\, \mathbf{x} \in X) \right]$

Bukti :

i) Diketahui $\max_{\mathbf{x}\in X} \min_{\mathbf{y}\in Y} E(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \min_{\mathbf{y}\in Y} \max_{\mathbf{x}\in X} E(\mathbf{x},\mathbf{y})$

Karena X dan Y adalah himpunan bagian kompak dan E fungsi kontinu, maka $\max_{\mathbf{x}\in X} E(\mathbf{x},\mathbf{y})$ dan $\min_{\mathbf{y}\in Y} E(\mathbf{x},\mathbf{y})$ juga kontinu. Karena $\max_{\mathbf{x}\in X} E(\mathbf{x},\mathbf{y})$ kontinu dan Y kompak, maka

$$(\exists\, \mathbf{y}_o \in Y)(\max_{\mathbf{x}\in X} E(\mathbf{x},\mathbf{y}_o) = \min_{\mathbf{y}\in Y} \max_{\mathbf{x}\in X} E(\mathbf{x},\mathbf{y}) = v) \qquad \dots (3.1)$$

Karena $\min_{y\in Y} E(x,y)$ kontinu dan X kompak, maka

$$(\exists\, x_o \in X)\ (\min_{y\in Y} E(x_o,y) = \max_{x\in X} \min_{y\in Y} E(x,y) = v) \qquad \ldots(3.2)$$

Dari (3.1) dan (3.2) didapatkan

$$E(x_o,y) \geq v \text{ dan } E\,(x,y_o) \leq v$$

ii) Diketahui $(\exists x_o \in X, y_o \in Y, v \in \mathbb{R})\ (E(x_o,y) \geq v\ ,\ \forall y \in Y$ dan $E(x,y_o) \leq v,\ \forall x \in X)$.

Karena $E(x_o,y) \geq v,\ \forall y \in Y$ maka $\min_{y\in Y} E(x_o,y) \geq v$ dan

$$\max_{x\in X} \min_{y\in Y} E(x,y) \geq v\ . \qquad \ldots(3.3)$$

Karena $E(x,y_o) \leq v,\ \forall x \in X$ maka $\max_{x\in X} E(x,y_o) \leq v$ dan

$$\min_{y\in Y} \max_{x\in X} E(x,y) \leq v \qquad \ldots(3.4)$$

Dari (3.3) dan (3.4) didapatkan

$$\min_{y\in Y} \max_{x\in X} E(x,y) \leq v \leq \max_{x\in X} \min_{y\in Y} E(x,y) \qquad \ldots(3.5)$$

Karena X dan Y adalah himpunan bagian kompak dan E adalah fungsi kontinu maka

$$\max_{x\in X} \min_{y\in Y} E(x,y) \leq \min_{y\in Y} \max_{x\in X} E(x,y) \qquad \ldots(3.6)$$

Jadi dari (3.5) dan (3.6) didapatkan

$$\max_{x\in X} \min_{y\in Y} E(x,y) = \min_{y\in Y} \max_{x\in X} E(x,y)$$

###

Lemma 3.1 :

Bila $x \in X$ dan $b \in \mathbb{R}^m$ maka $\max_{x\in X} \sum_i x_i b_i = \max_i b_i$ dengan $1 \leq i \leq m\ ,\ \sum_i x_i = 1$.

Bukti :

Untuk setiap $1 \le i \le m$, karena $\sum_i x_i = 1$

maka $\sum_i x_i b_i \le \text{maks}_i\, b_i \sum_i x_i = \text{maks}_i\, b_i$

$\Longleftrightarrow \sum_i x_i b_i \le \text{maks}_i\, b_i$

Selanjutnya batas atas benar-benar tercapai di $b_j = \text{maks}_i\, b_i$ dengan strateginya $\mathbf{x} = (0,\ldots,0,1,0,\ldots,0) \in X$ dengan $x_j = 1$.

Dengan demikian diperoleh

$$\max_{x \in X} \sum_i x_i b_i = \text{maks}_i\, b_i$$

###

Definisi 3.6 :

Apabila $a \in \mathbb{R}^m$, $a \neq 0$ dan $\alpha \in \mathbb{R}$ maka himpunan $H = \{\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^m \mid \mathbf{x}.\mathbf{a} = \alpha \,\}$ disebut suatu **bidang hiper** (*hyperplane*) dalam $\mathbb{R}^m$.

Definisi 3.7 :

Sebarang bidang hiper dalam $\mathbb{R}^m$ menentukan dua buah **setengah bidang** (*half-spaces*) tertutup H_1 dan H_2 dengan

$$H_1 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m \mid \mathbf{x}.\mathbf{a} \ge \alpha \} \text{ dan } H_2 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m \mid \mathbf{x}.\mathbf{a} \le \alpha\}.$$

Definisi 3.8 :

Suatu bidang hiper H dengan $H = \{\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^m \mid \mathbf{x}.\mathbf{a} = \alpha \,\}$ merupakan "supporting hyperplane (*support plane*)" untuk himpunan konveks S bila

$$S \subseteq H_1 \quad \text{dan} \quad \inf_{\mathbf{x} \in S} \mathbf{x}.\mathbf{a} = \alpha$$

atau

$$S \subseteq H_2 \quad \text{dan} \quad \sup_{x \in S} x \cdot a = \alpha .$$

Teorema 3.3 (Teorema Minimaks) :

Dalam suatu permainan berjumlah nol untuk 2 pihak dengan P_1 mempunyai m strategi dan P_2 mempunyai n strategi (m dan n berhingga) maka

$$V_L^M = \max_{x \in X} \min_{y \in Y} E(x,y) = \min_{y \in Y} \max_{x \in X} E(x,y) = V_U^M$$

Bukti :

Diberikan himpunan konveks Γ dalam $\mathbb{R}^m$ dengan

$$\Gamma = \{ \sum_j y_j a_{ij},\ y_j \geq 0,\ \sum_j y_j = 1,\ 1 \leq j \leq n \}$$

dan diberikan

$$Q_\lambda = \{ x = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m ,\ x_i \leq \lambda ,\ 1 \leq i \leq m \}$$

dengan λ adalah sebarang bilangan real.

λ disebut Γ-admissible bila $Q_\lambda \cap \Gamma \neq \emptyset$.

Apabila μ melambangkan himpunan semua λ yang merupakan Γ-admissible dan didefinisikan $\lambda_o = \inf_{\lambda \in \mu} \lambda$ maka Q_{λ_o} merupakan himpunan konveks dengan

$$Q_{\lambda_o} = \{ x = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m ,\ x_i \leq \lambda_o ,\ 1 \leq i \leq m \}.$$

λ_o ini juga merupakan Γ-admissible terhadap dirinya sendiri karena $Q_{\lambda_o} \cap \Gamma \neq \emptyset$ dan $\lambda_o \in \mu$.

Oleh karena Q_{λ_o} dan Γ merupakan himpunan yang "non - overlapping" (sebab irisan dari himpunan ini hanyalah titik batas, yaitu titik singgungnya) maka ada bidang hiper H^o yang memisah (*separates*) titik-titik interior himpunan O_{λ_o} dan Γ dengan

$$H^o = \{ \xi \varepsilon O_{\lambda_o} \mid \xi .x^o = \lambda_o \}$$

dengan $x^o = (x_1^o, \ldots, x_m^o)$, $x_i \geq 0$, $\sum_i x_i = 1$, $1 \leq i \leq m$ adalah normal untuk H^o. Selanjutnya karena O_{λ_o} dan Γ adalah saling bersinggungan maka H^o merupakan "support plane" untuk O_{λ_o}, sehingga diperoleh

$$\sum_{i=1}^{m} \xi_i \, x_i^c \leq \lambda_o, \; \forall \xi \varepsilon O_{\lambda_o} \quad \text{dan} \quad \sum_{i=1}^{m} \xi_i \, x_i^o \geq \lambda_o, \; \forall \xi \varepsilon \Gamma$$

Bila $y \varepsilon Y$ dan $\xi_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \, y_j \, \varepsilon \Gamma$ maka

$$\sum_{i=1}^{m} x_i^c \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \, y_j \geq \lambda_o$$

Ini berarti bahwa

$$E(x^o, y) \geq \lambda_o \quad , \forall y \varepsilon Y \qquad \ldots (3.7)$$

Sebaliknya, bila $y^o = (y_1, \ldots y_n)$ melambangkan suatu vektor strategi yang bersesuaian dengan suatu titik dalam $O_{\lambda_o} \cap \Gamma$, maka dengan menggunakan definisi O_{λ_o} didapatkan

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \, y_j^o \leq \lambda_o, \quad 1 \leq i \leq m$$

Menggunakan Lemma 3.1 dengan $b_i = \sum_j a_{ij} \, y_j^o$ akan diperoleh

$$\sum_{i=1}^{m} x_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \, y_j^o \leq \lambda_o$$

Ini berarti bahwa

$$E(x, y^o) \leq \lambda_o \quad , \quad \forall x \varepsilon X \qquad \ldots (3.8)$$

Dari (3.7) dan (3.8) akan diperoleh

$((\exists\, x^o \varepsilon X, y^o \varepsilon Y, \lambda_o \varepsilon \mathbb{R})\ (E(x^o, y) \geq \lambda_o\ ,\ \forall y \varepsilon Y$ dan $E(x, y^o) \leq \lambda_o\ ,\ \forall x \varepsilon X\ ))$.

Jadi berdasarkan teorema 3.2 diperoleh

$$(\underset{x \varepsilon X}{\text{maks}}\ \underset{y \varepsilon Y}{\text{min}}\ E(x,y) = \underset{y \varepsilon Y}{\text{min}}\ \underset{x \varepsilon X}{\text{maks}}\ E(x,y)).$$

Hal ini berarti bahwa

$$V_L^M = \underset{x \varepsilon X}{\text{maks}}\ \underset{y \varepsilon Y}{\text{min}}\ E(x,y) = \underset{y \varepsilon Y}{\text{min}}\ \underset{x \varepsilon X}{\text{maks}}\ E(x,y) = V_U^M.$$

###

Definisi 3.9 :

Bila $x^* \varepsilon X$ adalah vektor strategi untuk P_1 dengan menggunakan kriteria maksimin yang membuat maksimal dari $\underset{y \varepsilon Y}{\text{min}}\ E(x,y)$ dalam teorema 3.3 dan bila $y \varepsilon Y^*$ adalah vektor strategi untuk P_2 dengan kriteria ini yang membuat minimal dari $\underset{x \varepsilon X}{\text{maks}}\ E(x,y)$ dalam teorema 3.3 , maka $E(x^*, y^*)$ minimal $= V_L^M$ (karena vektor strategi x^*) dan maksimal $= V_U^M$ (karena vektor strategi y^*). Karena $V_L^M = V_U^M$ maka $E(x^*, y^*) = V_L^M = V_U^M = v$ dengan v dinamakan **nilai permainan**. Nilai v dan strategi optimal x^* dan y^* dinamakan **penyelesaian permainan**. Apabila $v = 0$ maka permainan disebut **adil** (*fair*).

Berdasarkan definisi ini maka nilai permainan adalah suatu nilai harapan apabila setiap pemain menggunakan strategi-strategi yang optimal.

Contoh 3.2 :

Diberikan tabel pembayaran

$$
\begin{array}{cc|cccc}
 & & & P_2 & & \\
 & & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\
\hline
 & x_1 & 5 & 2 & 3 & 4 \\
P_1 & x_2 & 5 & 6 & 4 & 8 \\
 & x_3 & 4 & 4 & 2 & 2
\end{array}
$$

Tabel 3.2

Tabel di atas mempunyai matriks pembayaran sebagai berikut :

$$
\begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 4 & 8 \\ 4 & 4 & 2 & 2 \end{bmatrix}
$$

Adapun unsur terkecil setiap baris dan unsur terbesar setiap kolom adalah

$$
\begin{array}{lc}
 & \text{unsur terkecil} \\
 \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 4 & 8 \\ 4 & 4 & 2 & 2 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{matrix} \\
\text{unsur terbesar} \quad \begin{matrix} 5 & 6 & 4 & 8 \end{matrix} &
\end{array}
$$

Jadi diperoleh V_L = maksimal dari unsur terkecil setiap baris = 4

V_U = minimal dari unsur terbesar setiap kolom = 4.

Karena $V_L = V_U$, maka $V_L = V_U = 4$ adalah unsur terkecil baris 2 dan unsur terbesar kolom 3 (berdasar "akibat" dari teorema 3.1).

Contoh 3.3 :

Diberikan tabel pembayaran sebagai berikut

		P_2	
		y_1	y_2
P_1	x_1	0	-1
	x_2	$-\frac{1}{2}$	0

Tabel 3.3

dengan $x_2 = 1 - x_1$ dan $y_2 = 1 - y_1$

$$E(\mathbf{x},\mathbf{y}) = x_1(0)y_1 + x_1(-1)(1-y_1) + (1-x_1)(-\tfrac{1}{2})y_1 + (1-x_1)(0)(1-y_1)$$

$$= -x_1 + x_1y_1 - \tfrac{1}{2}y_1 + \tfrac{1}{2}x_1y_1$$

$$= -x_1 - \tfrac{1}{2}y_1 + \tfrac{3}{2}x_1y_1$$

Misalnya diambil $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = \frac{2}{3}$

Diperoleh $V_L^M = \underset{\mathbf{x}^*=(\frac{1}{3},\frac{2}{3})\varepsilon X}{\text{maks}} \quad \underset{\mathbf{y}\varepsilon Y}{\min} E(\mathbf{x},\mathbf{y})$

$$= -(\tfrac{1}{3}) - \tfrac{1}{2}y_1 + \tfrac{3}{2}(\tfrac{1}{3})y_1 = -\tfrac{1}{3}$$

Misalnya diambil $y_1 = \frac{2}{3}$, $y_2 = \frac{1}{3}$

Diperoleh $V_U^M = \underset{\mathbf{y}^*=(\frac{2}{3},\frac{1}{3})\varepsilon Y}{\min} \quad \underset{\mathbf{x}\varepsilon X}{\text{maks}} E(\mathbf{x},\mathbf{y})$

$$= -x_1 - \tfrac{1}{2}(\tfrac{2}{3}) + \tfrac{3}{2}x_1(\tfrac{2}{3})$$

$$= -x_1 - \tfrac{1}{3} + x_1$$

$$= -\tfrac{1}{3}$$

Ternyata apabila diambil $\mathbf{x}^* = (\frac{1}{3},\frac{2}{3})$ dan $\mathbf{y}^*=(\frac{2}{3},\frac{1}{3})$

$$V_L^M = V_U^M = -\tfrac{1}{3}$$

Dengan demikian nilai permainannya adalah $-\frac{1}{3}$ dan strategi optimal permainan ini adalah $\mathbf{x}^* = (\frac{1}{3},\frac{2}{3})$ dan $\mathbf{y}^*=(\frac{2}{3},\frac{1}{3})$.

Karena $v = -\frac{1}{3}$ maka permainan disebut tidak adil.

3.3 Penyusutan Matriks Pembayaran

Suatu cara yang berguna untuk menyusutkan matriks pembayaran adalah dengan menghapus baris atau kolom yang didominasi. Penyusutan matriks pembayaran ini disebut dengan **dominasi** atau **duplikasi**. Permainan yang matriks pembayarannya disusutkan disebut **permainan yang disusutkan**, sedangkan permainan dengan matriks pembayaran yang belum disusutkan disebut **permainan yang asli**.

Definisi 3.10 :

Ditentukan permainan dengan matriks pembayaran m x n. Baris h didominasi oleh baris i bila $(\forall j\ ,\ 1 \le j \le n)\ (a_{hj} \le a_{ij})$. Kolom k didominasi oleh kolom j bila $(\forall_i ,\ 1 \le i \le m)\ (a_{ik} \ge a_{ij})$.

Teorema 3.4 :

Apabila baris atau kolom yang didominasi dihapus dari matriks pembayaran, maka penyelesaian permainan yang disusutkan ini adalah suatu penyelesaian permainan yang asli.

Bukti :

Misalnya dalam permainan mxn yang asli baris 1 didominasi oleh baris 2.

Ini berarti bahwa $(\forall_j ,\ 1 \le j \le n)(a_{1j} \le a_{2j})$

Bila $\mathbf{x}^* = (x_2^*, x_3^*, \ldots, x_m^*)$, $\mathbf{y}^* = (y_1^*, y_2^*, \ldots, y_n^*)$ dan v adalah penyelesaian permainan yang disusutkan (dengan menghapus baris 1) maka

$$E(\mathbf{x}^*,\mathbf{y}) \ge v \;, \; \forall \; \mathbf{y}\varepsilon Y \qquad \ldots(3.9)$$

dan

$$E(\mathbf{x},\mathbf{y}^*) \le v \;, \; \forall \mathbf{x}\varepsilon X^T \qquad \ldots(3.10)$$

dengan X^T adalah himpunan vektor strategi P_1 dalam permainan yang disusutkan. Akan dibuktikan bahwa $\mathbf{x}^* = (0,x_2^*, \ldots, x_m^*)$, $\mathbf{y}^* = (y_1^*, \ldots, y_n^*)$ dan v adalah penyelesaian permainan yang asli.

Untuk itu cukup diperlihatkan

i) $E(\mathbf{x}^*,\mathbf{y}) \ge v$, $\forall \mathbf{y}\varepsilon Y$

ii) $E(\mathbf{x},\mathbf{y}^*) \le v$, $\forall \mathbf{x}\varepsilon X$

Kasus i) Dari (3.9), terbukti bahwa

$$E(\mathbf{x}^*,\mathbf{y}) \ge v, \; \forall \mathbf{y}\varepsilon Y$$

Kasus ii) Diambil sebarang $\mathbf{x} = (x_1,x_2, \ldots, x_m) \varepsilon X$ maka

$$\begin{aligned} E(\mathbf{x},\mathbf{y}^*) &= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i \, a_{ij} \, y_j^* \\ &= x_1 \sum_{j=1}^{n} a_{1j} \, y_j^* + \sum_{i=2}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i \, a_{ij} \, y_j^* \\ &\le x_1 \sum_{j=1}^{m} a_{2j} \, y_j^* + \sum_{i=2}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i \, a_{ij} \, y_j^* \\ &= E(\mathbf{x}',\mathbf{y}^*) \end{aligned}$$

dengan $\mathbf{x}' = (0,x_1+x_2,x_3, \ldots,x_m) \varepsilon X^T$

Dengan menggunakan (3.10)

$$E(\mathbf{x},\mathbf{y}^*) \le E(\mathbf{x}',\mathbf{y}^*) \le v$$

Jadi terbukti bahwa

$$E(\mathbf{x},\mathbf{y}^*) \le v, \; \forall \mathbf{x}\varepsilon X.$$

###

Untuk contoh diagram alur dapat dilihat pada lampiran 1.a halaman 159.

Contoh 3.4 :

Diberikan tabel pembayaran

		P_2				
		y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
P_1	x_1	−3	6	3	5	0
	x_2	2	1	10	0	−4
	x_3	4	3	12	−2	6
	x_4	2	5	7	5	7

Tabel 3.4

Dapat dilihat bahwa kolom 2 didominasi oleh kolom 4, kolom 3 didominasi oleh kolom 5. Sehingga kolom 2 dan kolom 3 dapat dihapus.

$$\begin{bmatrix} -3 & 6 & 3 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 10 & 0 & -4 \\ 4 & 3 & 12 & -2 & 6 \\ 2 & 5 & 7 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

Baris 1 didominasi baris 4 dan baris 2 didominasi oleh baris 4, sehingga baris 1 dan baris 2 dapat dihapus dari matriks pembayaran.

$$\begin{bmatrix} -3 & 6 & 3 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 10 & 0 & -4 \\ 4 & 3 & 12 & -2 & 6 \\ 2 & 5 & 7 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

Kolom 5 dapat dihapus dari matriks pembayaran karena kolom 5 didominasi oleh kolom 4.

$$\begin{bmatrix} -3 & 6 & 3 & 5 & 0 \\ -2 & 1 & 10 & 0 & -4 \\ 4 & 3 & 12 & -2 & 6 \\ 2 & 5 & 7 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

Dengan demikian didapatkan matriks pembayaran 2x2 hasil penyusutan, yaitu :

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

3.4 Pasangan Keseimbangan

Dalam suatu permainan apabila setiap pemain memilih strategi x dan y sedemikian sehingga dapat mengoptimalkan nilai harapannya maka strategi tersebut dikatakan suatu **pasangan keseimbangan** *(equilibrium)*.

Definisi 3.11 :

Suatu pasangan vektor strategi $x^*\varepsilon X$, $y^*\varepsilon Y$ adalah pasangan keseimbangan bila

$$(\forall x\varepsilon X, y\varepsilon Y)\ (E(x,y^*) \le E(x^*,y^*) \le E(x^*,y))$$

Lemma 3.2 :

Bila (x_1,y_1), (x_2,y_2) adalah pasangan-pasangan keseimbangan maka $E(x_1,y_1) = E(x_2,y_2)$

Bukti :

Karena (x_1, y_1) adalah pasangan keseimbangan maka

$$E(x_2, y_1) \le E(x_1, y_1) \le E(x_1, y_2) \qquad \ldots(3.11)$$

Karena (x_2, y_2) adalah pasangan keseimbangan maka

$$E(x_1, y_2) \le E(x_2, y_2) \le E(x_2, y_1) \qquad \ldots(3.12)$$

Dari (3.11) dan (3.12) diperoleh

$$E(x_1, y_1) = E(x_2, y_2)$$

###

Teorema 3.5 :

Bila (x^*, y^*) suatu pasangan vektor strategi dalam permainan berjumlah nol untuk 2 pihak dengan matriks pembayaran m x n, maka (x^*, y^*) suatu pasangan keseimbangan bila dan hanya bila $(x^*, y^*, E(x^*, y^*))$ adalah penyelesaian permainan.

Bukti :

i) (x^*, y^*) adalah pasangan keseimbangan maka

$$(\forall\, x \varepsilon X,\ y \varepsilon Y)\ (\ E(x, y^*) \le E(x^*, y^*) \le E(x^*, y)\ )$$

Ini berarti bahwa

$$\underset{x \varepsilon X}{\text{maks}}\ E(x, y^*) \le E(x^*, y^*) \le \underset{y \varepsilon Y}{\min}\ E(x^*, y)$$

$$V_U^M = \underset{y \varepsilon Y}{\min}\ \underset{x \varepsilon X}{\text{maks}}\ E(x, y) \le \underset{y = y^*}{\min}\ \underset{x \varepsilon X}{\text{maks}}\ E(x, y)$$

$$= \underset{x \varepsilon X}{\text{maks}}\ E(x, y^*)$$

$$\le E(x^*, y^*) \le \underset{y \varepsilon Y}{\min}\ E\ (x^*, y) = \underset{x = x^*}{\text{maks}}\ \underset{y \varepsilon Y}{\min}\ E(x^*, y)$$

$$\le \underset{x \varepsilon X}{\text{maks}}\ \underset{y \varepsilon Y}{\min}\ E(x, y) = V_L^M$$

Dengan demikian

$$V_U^M \le V_L^M \qquad \ldots (3.13)$$

Diambil sebarang $x' \varepsilon X, y' \varepsilon Y$, maka

$$\min_{y \varepsilon Y} E(x',y) \le E(x',y') \le \max_{x \varepsilon X} E(x,y')$$

Ini berarti bahwa

$$V_L^M = \max_{x \varepsilon X} \min_{y \varepsilon Y} E(x,y) = \min_{y \varepsilon Y} E(x',y) \le E(x',y')$$

$$\le \max_{x \varepsilon X} E(x,y') < \min_{y \varepsilon Y} \max_{x \varepsilon X} E(x,y) = V_U^M$$

dengan x' adalah pembuat maksimal untuk $\min_{y \varepsilon Y} E(x',y)$

dan y' adalah pembuat minimal untuk $\max_{x \varepsilon X} E(x,y')$.

Dengan demikian

$$V_L^M \le V_U^M \qquad \ldots (3.14)$$

Dari (3.13) dan (3.14) diperoleh

$$V_L^M = V_U^M = E(x^*,y^*)$$

dan $(x^*,y^*$, $E(x^*,y^*)$ adalah penyelesaian permainan.

ii) $(x^*,y^*$, $E(x^*,y^*)$ adalah penyelesaian permainan maka

$$E(x,y^*) \le \max_{x \varepsilon X} E(x,y^*) = \min_{y \varepsilon Y} \max_{x \varepsilon X} E(x,y) = E(x^*,y^*)$$

$$= \max_{x \varepsilon X} \min_{y \varepsilon Y} E(x,y) = \min_{y \varepsilon Y} E(x^*,y) \le E(x^*,y)$$

Ini berarti bahwa

$$E(x,y^*) \le E(x^*,y^*) \le E(x^*,y)$$

Dengan demikian diperoleh (x^*,y^*) adalah pasangan keseimbangan. ###

Akibat :

Bila permainan berjumlah nol untuk 2 pihak dengan strategi yang berhingga mempunyai lebih dari satu penyelesaian maka penyelesaian tersebut mempunyai nilai yang sama.

Dari sini dapat dikatakan bahwa pasangan keseimbangan adalah suatu pasangan strategi yang mengoptimalkan nilai harapan.

Contoh 3.5 :

Diberikan tabel pembayaran

		P_2	
		y_1	y_2
P_1	x_1	-1	0
	x_2	0	3

Tabel 3.5

Akan diperlihatkan suatu contoh pasangan strategi yang bukan pasangan keseimbangan.

Nilai harapan permainan ini adalah

$$E(\mathbf{x},\mathbf{y}) = x_1(-1)y_1 + x_1(0)y_2 + x_2(0)y_1 + x_2(3)y_2$$
$$= -x_1y_1 + 3x_2y_2$$

Misalnya diambil $\mathbf{x}^* = (\frac{1}{2},\frac{1}{2})$, $\mathbf{y}^* = (\frac{1}{3},\frac{2}{3})$ maka $\forall x \in X,\ y \in Y$

$$E(\mathbf{x}^*,\mathbf{y}) = -(\tfrac{1}{2})y_1 + 3(\tfrac{1}{2})y_2 = -\tfrac{1}{2}\,y_1 + \tfrac{3}{2}\,y_2$$

$$E(\mathbf{x},\mathbf{y}^*) = -x_1(\tfrac{1}{3}) + 3x_2(\tfrac{2}{3}) = -\tfrac{1}{3}\,x_1 + 2x_2$$

$$E(x^*,y^*) = -(\tfrac{1}{2})(\tfrac{1}{3}) + 3(\tfrac{1}{2})(\tfrac{2}{3}) = -\tfrac{1}{6} + 1 = \tfrac{5}{6}.$$

Dapat dilihat bahwa

$$E(x^*,y) \le E(x^*,y^*) \le E(x,y^*)$$

Dengan demikian $(x^*=(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}), y^*=(\tfrac{1}{3},\tfrac{2}{3}))$ adalah bukan pasangan keseimbangan.

Contoh 3.6 :

Dilihat kembali tabel 3.3 pada contoh 3.3 , yaitu :

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -\tfrac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

Nilai harapan adalah

$$E(x,y) = x_1(0)y_1 + x_1(-1)y_2 + x_2(-\tfrac{1}{2})y_1 + x_2(0)y_2$$
$$= -x_1y_2 - \tfrac{1}{2}x_2y_1 .$$

Akan diperlihatkan suatu pasangan strategi yang merupakan pasangan keseimbangan dan yang bukan pasangan keseimbangan.

a).Contoh strategi yang bukan pasangan keseimbangan.

Misalnya diambil $x' = (\tfrac{1}{4},\tfrac{3}{4})$, $y'=(\tfrac{4}{5},\tfrac{1}{5})$ maka $\forall x \varepsilon X, y \varepsilon Y$

$$E(x',y) = -(\tfrac{1}{4})y_2 - \tfrac{1}{2}(\tfrac{3}{4})y_1 = -\tfrac{1}{4}y_2 - \tfrac{3}{8}y_1$$
$$E(x,y') = -x_1(\tfrac{1}{5}) - \tfrac{1}{2}x_2(\tfrac{4}{5}) = -\tfrac{1}{5}x_1 - \tfrac{2}{5}x_2$$
$$E(x',y') = -(\tfrac{1}{4})(\tfrac{1}{5}) - \tfrac{1}{2}(\tfrac{3}{3})(\tfrac{4}{5}) = -\tfrac{1}{20} - \tfrac{3}{10} = -\tfrac{7}{20} .$$

Dapat dilihat bahwa

$$E(x',y) \le E(x',y') \le E(x,y')$$

sehingga (x',y') adalah bukan pasangan keseimbangan dan nilai harapan untuk permainan ini (dengan strategi $x', y')$ adalah $E(x', y') = -\frac{7}{10}$

b). Contoh strategi yang merupakan pasangan keseimbangan.

Misalnya diambil $x^* = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, $y^* = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ maka

$\forall x \in X, y \in Y$

$$E(x^*, y) = -(\tfrac{1}{3})y_2 - \tfrac{1}{2}(\tfrac{2}{3})y_1 = -\tfrac{1}{3}y_2 - \tfrac{1}{3}y_1$$

$$E(x, y^*) = -x_1(\tfrac{1}{3}) - \tfrac{1}{2}x_2(\tfrac{2}{3}) = -\tfrac{1}{3}x_1 - \tfrac{1}{3}x_2$$

$$E(x^*, y^*) = -(\tfrac{1}{3})(\tfrac{1}{3}) - \tfrac{1}{2}(\tfrac{2}{3})(\tfrac{2}{3}) = -\tfrac{1}{9} - \tfrac{2}{9} = -\tfrac{1}{3}$$

Terlihat bahwa

$$E(x, y^*) \le E(x^*, y^*) \le E(x^*, y)$$

sehingga (x^*, y^*) adalah suatu pasangan keseimbangan dengan nilai harapan $E(x^*, y^*) = -\frac{1}{3}$.

Pada subbab 2.1, contoh 3.3 dengan tabel 3.2 ini telah diselesaikan dengan menggunakan teorema Minimaks dan memberikan nilai permainan $E = -\frac{1}{3}$, strategi optimal $x^* = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, $y^* = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$.

Dengan demikian dapat dikatakan bahwa nilai permainan $E(x^*, y^*) = -\frac{1}{3}$ adalah suatu nilai harapan apabila setiap pemain memainkan strategi optimal x^* dan y^*.

Contoh 3.7 :

Akan diperlihatkan bahwa apabila (x_1, y_1) dan (x_2, y_2) adalah pasangan keseimbangan maka $E(x_1, y_1) = E(x_2, y_2)$.

Diberikan tabel pembayaran

		P_2	
		y_1	y_2
P_1	x_1	1	1
	x_2	0	-1

Tabel 3.6

dengan $x_2 = 1-x_1$, $y_2 = 1-y_1$

Karena baris 2 didominasi oleh baris 1, maka baris 2 dapat dihapus dari matriks pembayaran, sehingga matriks pembayarannya adalah

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$$

dengan strategi $x_2 = 0$, $x_1 = 1$

Nilai harapan untuk permainan ini adalah

$$E(x,y) = x_1y_1 + x_1y_2$$

Misalnya diambil $x^* = (1,0)$, $y_1^* = (1,0)$ maka $\forall x \in X$, $y \in Y$

$$E(x,y_1^*) = x_1(1) + x_1(0) = x_1 = 1$$

$$E(x^*,y) = (1)y_1 + (1)y_2 = y_1 + y_2 = 1$$

$$E(x^*,y^*) = (1)(1) + (1)(0) = 1$$

Jadi $E(x,y_1^*) = E(x^*,y^*) = E(x^*,y)$ ...(3.15)

Terlihat bahwa persamaan (3.15) memenuhi definisi pasangan keseimbangan sehingga (x^*,y_1^*) adalah pasangan keseimbangan.

Misalnya diambil $x^* = (1,0)$, $y_2^* = (0,1)$ maka $\forall x \in X, y \in Y$

$$E(x,y_2^*) = x_1(0) + x_1(1) = x_1 = 1$$

$$E(x^*, y) = (1)y_1 + (1)y_2 = y_1 + y_2 = 1$$

$$E(x^*, y_2^*) = (1)(0) + (1)(1) = 1$$

Jadi $E(x, y_2^*) = E(x^*, y^*) = E(x^*, y)$ dan hal ini memenuhi definisi dari pasangan keseimbangan.

Dengan demikian (x^*, y_2^*) adalah pasangan keseimbangan.

Dari sini diperoleh bahwa

(x^*, y_1^*) dan (x^*, y_2^*) adalah pasangan keseimbangan dengan $E(x^*, y_1^*) = 1$ dan $E(x^*, y_2^*) = 1$.

Dapat dilihat bahwa Lemma 3.2 dipenuhi, yaitu bila (x^*, y_1^*) dan (x^*, y_2^*) suatu pasangan keseimbangan maka $E(x^*, y_1^*) = E(x^*, y_2^*) = 1$.

3.5 Strategi Campuran dan Strategi Murni

Definisi 3.12 :

Strategi campuran untuk P_1 adalah sebuah vektor $x = (x_1, \ldots, x_m)$ dengan x_i bilangan real tidak negatif yang memenuhi syarat $x_1 + \ldots + x_m = 1$, yang menyatakan bahwa P_1 memainkan strategi i dengan probabilitas x_i, $1 \le i \le m$.

Dengan cara yang sama didefinisikan strategi campuran untuk P_2.

Definisi 3.13 :

Strategi campuran untuk P_2 adalah sebuah vektor $y = (y_1, \ldots, y_n)$ dengan y_j bilangan real tidak negatif yang memenuhi syarat $y_1 + \ldots + y_n = 1$, yang menyatakan bahwa P_2 memainkan strategi j dengan probabilitas y_j, $1 \leq j \leq n$.

Suatu strategi yang hanya memainkan satu baris atau satu kolom saja disebut **strategi murni**. Strategi ini merupakan keadaan khusus dari strategi campuran. Sebagai contoh $\mathbf{x} = (0,1,0, \ldots,0)$ adalah suatu strategi campuran yang bersesuaian dengan strategi murni untuk P_1 bila P_1 memainkan strategi 2 dengan probabilitas $x_2 = 1$.

Definisi 3.14 :

Strategi murni h untuk P_1 adalah sebuah vektor $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_m)$ dengan $x_h = 1$ dan $x_i = 0$, untuk setiap $i \neq h$ (dengan $1 \leq i \leq m$).

Strategi murni k untuk P_2 adalah sebuah vektor $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ dengan $y_k = 1$ dan $y_j = 0$, untuk setiap $j \neq k$ (dengan $1 \leq j \leq n$).

3.5.1 Strategi Murni

Suatu permainan yang mempunyai **titik pelana** (*saddle point*) disebut permainan dengan strategi murni. Titik pelana merupakan suatu keadaan dengan setiap pemain hanya memainkan satu strategi saja. Ada 2 cara untuk mendapatkan titik pelana yaitu :

1. Menggunakan kriteria maksimin

   Titik pelana merupakan maksimal dari unsur terkecil setiap baris dan minimal dari unsur terbesar setiap kolom.

2. Menyusutkan matriks pembayaran sedemikian sehingga menjadi matriks 1 x 1

Dalam masalah ini titik pelana merupakan unsur dari matriks 1 x 1 tersebut.

Definisi 3.15 :

Suatu unsur a_{hk} dalam matriks pembayaran A merupakan titik pelana bila $\min_j a_{hj} = a_{hk} = \text{maks}_i\, a_{ik}$ yaitu bila a_{hk} adalah unsur terkecil baris h dan unsur terbesar kolom k.

Teorema 3.6 :

Diketahui $V_L = \text{maks}_i \min_j a_{ij}$, $V_U = \min_j \text{maks}_i\, a_{ij}$ dan A adalah matriks pembayaran.

$V_L = V_U$ bila dan hanya bila matriks A mempunyai titik pelana.

Bukti :

i) Diketahui $V_L = V_U$

"Akibat" dari teorema 3.1 (dalam subbab 3.2) membuktikan bahwa $V_L = V_U$ merupakan keadaan terjadinya titik pelana.

ii) Diketahui a_{hk} adalah titik pelana

Karena a_{hk} adalah unsur terbesar kolom k dengan semua unsur lain dalam kolom k harus kurang atau sama dengan a_{hk}, maka dari unsur terkecil setiap baris (kecuali baris h) harus kurang atau sama dengan a_{hk}. Namun a_{hk} juga merupakan unsur terkecil baris h sehingga

a_{hk} = maksimal dari unsur terkecil setiap baris

$= V_L$ ...(3.16)

Karena a_{hk} adalah unsur terkecil baris h dengan semua unsur lain dalam baris h harus lebih atau sama dengan a_{hk}, maka nilai dari unsur terbesar setiap kolom (kecuali kolom k) harus lebih atau sama dengan a_{hk}. Namun a_{hk} juga merupakan unsur terbesar kolom k sehingga

a_{hk} = minimal dari unsur terbesar setiap kolom

$= V_U$ ...(3.17)

Dari (3.16) dan (3.17) diperoleh

$$V_L = V_U$$

###

Teorema 3.7 :

Diketahui a_{hk} adalah titik pelana dari matriks pembayaran A. Diberikan x_1 adalah strategi murni h dan y_1 adalah strategi murni k, maka x_1 dan y_1 adalah strategi yang optimal dan nilai permainannya adalah a_{hk}.

Bukti :

Diketahui $x_1 = (0,\ldots,0,x_h=1,0,\ \ldots,0)$ adalah strategi murni h

$y_1 = (0,\ldots,0,y_k=1,0,\ldots,0)$ adalah strategi murni k.

Misalkan a_{hk} adalah titik pelana maka

$$E(x_1,y_1) = \sum_i \sum_j x_i\, a_{ij}\, y_j$$
$$= x_h\, a_{hk}\, y_k \;=\; a_{hk}$$

a_{hk} adalah unsur terbesar kolom k, sehingga $\forall x \in X$

$$E(x,y_1) = \sum_i \sum_j x_i a_{ij}\, y_j$$
$$= \sum_i x_i\, a_{ik}\, y_k$$
$$= \sum_i x_i\, a_{ik}$$
$$\leq \sum_i x_i\, a_{hk} \;=\; a_{hk} \sum_i x_i \;=\; a_{hk}$$
$$= E(x_1,y_1) \qquad \ldots(3.18)$$

a_{hk} adalah unsur terkecil baris h, sehingga $\forall y \in Y$

$$E(x_1,y) = \sum_i \sum_j x_i\, a_{ij}\, y_j$$
$$= \sum_j x_h\, a_{hj}\, y_j$$
$$= \sum_j a_{hj}\, y_j$$
$$\geq \sum_j a_{hk}\, y_j \;=\; a_{hk} \sum_j y_j \;=\; a_{hk}$$
$$= E(x_1,y_1) \qquad \ldots(3.19)$$

Dari (3.18) dan (3.19) diperoleh

$$E(x,y_1) \leq E(x_1,y_1) = a_{hk} \leq E(x_1,y)$$

Jadi berdasarkan definisi pasangan keseimbangan dan teorema 3.5 diperoleh bahwa x_1 dan y_1 adalah strategi yang optimal dengan a_{hk} adalah nilai permainannya.

Contoh 3.8 :

Lihat kembali tabel 3.2 pada contoh 3.2. Matriks pembayaran tabel 3.2 tersebut mempunyai unsur terbesar dan unsur terkecil sebagai berikut :

$$\begin{array}{cccc|c} & & & & \text{unsur terkecil} \\ \multicolumn{4}{c|}{\begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 & 3 \\ 5 & 6 & 4 & 8 \\ 4 & 4 & 2 & 2 \end{bmatrix}} & \begin{matrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{matrix} \\ \text{unsur terbesar} \;\; 5 & 6 & 4 & 8 & \end{array}$$

V_L = maksimal dari unsur terkecil setiap baris = 4

V_U = minimal dari unsur terbesar setiap kolom = 4

Dari sini diperoleh $V_L = V_U = 4$ dengan V_L bersesuaian dengan strategi 2 dan V_U bersesuaian dengan strategi 3. Jadi $a_{23} = 4$ adalah titik pelana dengan $\mathbf{x} = (0,1,0)$ dan $\mathbf{y} = (0,0,1,0)$ adalah strategi murni (yang optimal) dan nilai permainannya adalah 4.

3.5.2 Strategi Campuran

Nilai harapan dapat ditulis dalam bentuk matriks yaitu :

$$E = \sum_i \sum_j x_i \, a_{ij} \, y_j = \mathbb{X} \, \mathbb{A} \, \mathbb{Y}^t$$

Misalnya $\mathbb{A}_{(i)}$ melambangkan baris ke i matriks $\mathbb{A}$ dan $\mathbb{A}^{(j)}$ adalah kolom ke j matriks $\mathbb{A}$. Untuk permainan dengan matriks pembayaran $\mathbb{A}$ apabila P_1 menggunakan strategi murni i dan P_2 menggunakan vektor strategi $\mathbf{y}$ maka nilai harapannya adalah $E = \mathbb{X}\mathbb{A}\mathbb{Y}^t = \mathbb{A}_{(i)}\mathbb{Y}^t$. Apabila P_1 menggunakan vektor strategi $\mathbf{x}$ dan P_2 menggunakan strategi murni j, maka nilai harapannya adalah $E = \mathbb{X}\mathbb{A}\mathbb{Y}^t = \mathbb{X}\mathbb{A}^{(j)}$. Dengan demikian apabila P_2 menggunakan strategi murni j maka $\mathbb{X}\mathbb{A}\mathbb{Y}^t$ dapat ditulis dengan

$$\mathbb{X}\mathbb{A}\mathbb{Y}^t = (\mathbb{X}\mathbb{A})\mathbb{Y}^t = \sum_j \mathbb{X}\mathbb{A}^{(j)} y_j$$
$$= \mathbb{X}\mathbb{A}^{(j)}$$

dan apabila P_1 menggunakan strategi murni i maka $\mathbb{X}\mathbb{A}\mathbb{Y}^t$ dapat ditulis dengan

$$\mathbb{X}\mathbb{A}\mathbb{Y}^t = \mathbb{X}(\mathbb{A}\mathbb{Y}^t) = \sum_i x_i \mathbb{A}_{(i)}\mathbb{Y}^t$$
$$= \mathbb{A}_{(i)}\mathbb{Y}^t$$

dengan $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_m)$, $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$.

Teorema 3.8 :

Bila P_1 memilih strategi tetap (*fixed*) $\mathbf{x}$ maka

$$\min_{y \in Y} \mathbb{X}\mathbb{A}\mathbb{Y}^t = \min_{1 \le j \le n} \mathbb{X}\mathbb{A}^{(j)}$$

Bila P_2 memilih strategi tetap (*fixed*) $\mathbf{y}$ maka

$$\operatorname{maks}_{x \in X} \mathbb{X}\mathbb{A}\mathbb{Y}^t = \operatorname{maks}_{1 \le i \le n} \mathbb{A}_{(i)}.\mathbb{Y}^t$$

Bukti :

i) Dibuat suatu strategi tetap $\mathbf{x}$ untuk P_1. Di sini $\mathbb{X}\mathbb{A}^{(j)}$ merupakan bilangan real untuk setiap j.

Diberikan $w = \min_{1 \le j \le n} \mathbb{X}\mathbb{A}^{(j)}$

Untuk sebarang $y \in Y$,

$$\mathbb{X}\mathbb{A}\mathbb{Y}^t = \sum_j \mathbb{X}\mathbb{A}^{(j)} . y_j \ge \sum_j w\, y_j$$
$$= w \sum_j y_j$$
$$= w$$

Akan tetapi nilai $\mathbb{X}\mathbb{A}^{(j)}$ termuat dalam himpunan $\{\mathbb{X}\mathbb{A}\mathbb{Y}^t \mid y \in Y\}$, apabila P_2 menggunakan strategi murni j, sehingga

$$\min_{y \in Y} XAY^t = \min_{1 \le j \le n} XA^{(j)}$$

ii) Dibuat suatu strategi tetap y untuk P_2. Di sini $A_{(i)}Y^t$ merupakan bilangan real untuk setiap i.

Diberikan $z = \max_{1 \le i \le m} A_{(i)}Y^t$

Untuk sebarang $x \in X$,

$$XAY^t = \sum_i x_i A_{(i)}Y^t \le \sum_i x_i \; z$$
$$= z$$

Akan tetapi nilai $A_{(i)}Y^t$ termuat dalam himpunan $\{XAY^t \mid x \in X\}$, apabila P_1 menggunakan strategi murni i, sehingga

$$\text{maks}_{x \in X} XAY^t = \text{maks}_{1 \le i \le m} A_{(i)}Y^t$$

###

Akibat :

Diberikan matriks pembayaran A, maka nilai terendah permainan bagi P_1 adalah

$$V_L^M = \text{maks}_{x \in X} \min_{y \in Y} XAY^t = \text{maks}_{x \in X} \min_{1 \le j \le n} X A^{(j)}$$

dan nilai tertinggi permainan bagi P_2 adalah

$$V_U^M = \min_{y \in Y} \text{maks}_{x \in X} XAY^t = \min_{y \in Y} \text{maks}_{1 \le i \le m} A_{(i)}Y^t .$$

Definisi 3.16 :

Diberikan matriks pembayaran A , maka strategi (campuran) x_o adalah strategi optimal untuk P_1 bila

$$V_L^M = \min_{y \in Y} X_o AY^t = \min_{1 \le j \le n} X_o A^{(j)}$$

dan strategi (campuran) y_o adalah strategi optimal untuk P_2 bila

$$V_U^M = \underset{x \in X}{\text{maks}} \; XAY_o^t = \underset{1 \le i \le m}{\text{maks}} \; A_{(i)} Y_o^t$$

Teorema 3.9 (Teorema Fundamental/Teorema Neumann) :

Untuk sebarang permainan berjumlah nol, selalu dapat ditemukan strategi optimal untuk kedua pemain, dengan V_L^M dan V_U^M yang sama.

Bukti :

Diketahui $A = (a_{ij})$ adalah matriks pembayaran dengan $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$. Supaya permainan dapat diselesaikan dengan menggunakan pemrograman linear maka V_L^M dan V_U^M harus positif. Tentu saja V_L^M dan V_U^M akan positif bila semua $a_{ij} > 0$. Sedangkan bila ada $a_{ij} < 0$ maka akan dilakukan modifikasi sedemikian sehingga diperoleh matriks pembayaran baru $A' = (a_{ij}')$ dengan $a_{ij}' > 0$.

Kasus 1 Untuk setiap $a_{ij} > 0$

i) Diketahui $V_L^M = \underset{x \in X}{\text{maks}} \; \underset{y \in Y}{\min} \; XAY^t = \underset{x \in X}{\text{maks}} \; \underset{1 \le j \le n}{\min} \; XA^{(j)}$

Dalam menentukan V_L^M pertama kali harus dihitung $\min XA^{(j)}$ untuk sebarang $x \in X$, yaitu minimal dari n besaran

$$a_{11}x_1 + a_{21}\,x_2 + \ldots + a_{m1}\,x_m$$

$$a_{12}x_1 + a_{22}\,x_2 + \ldots + a_{m2}\,x_m$$

$$\vdots$$

$$a_{1n}x_1 + a_{2n}\,x_2 + \ldots + a_{mn}\,x_m$$

Minimal dari n besaran ini akan sama dengan sekurang-kurangnya satu di antara mereka , yaitu yang terkecil. Dengan demikian minimal tersebut adalah suatu bilangan real terbesar ω yang memenuhi n pertidaksamaan

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{21}\, x_2 + \ldots + a_{m1}\, x_m &\geq \omega \\ a_{12}x_1 + a_{22}\, x_2 + \ldots + a_{m2}\, x_m &\geq \omega \\ &\vdots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}\, x_2 + \ldots + a_{mn}\, x_m &\geq \omega \end{aligned} \qquad \ldots(3.20)$$

Dari sini untuk setiap $\mathbf{x} \in X$ akan ditunjukkan maksimal ω yang memenuhi (3.20) adalah sama dengan V_L^M.

Karena $\mathbf{x} = \{(x_1, \ldots, x_m) \mid \sum_i x_i = 1,\ x_i \geq 0,\ 1 \leq i \leq m\}$ maka V_L^M sama dengan maksimal ω , yang memenuhi

$$\begin{aligned} a_{11}\, x_1 + a_{21}\, x_2 + \ldots + a_{m1}\, x_m &\geq \omega \\ a_{12}\, x_1 + a_{22}\, x_2 + \ldots + a_{m2}\, x_m &\geq \omega \\ &\vdots \\ a_{in}\, x_1 + a_{2n}\, x_2 + \ldots + a_{mn}\, x_m &\geq \omega \\ x_1 + x_2 + \ldots + x_m &= 1 \\ x_i \geq 0,\quad 1 \leq i \leq m & \end{aligned} \qquad \ldots(3.21)$$

Oleh karena itu, suatu titik $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_m)$ yang mencapai maksimal merupakan strategi optimal untuk P_1. Karena $a_{ij} > 0$ maka $V_L^M > 0$. Kemudian persamaan dan pertidaksamaan dalam (3.21) dibagi dengan ω, sehingga diperoleh

memaksimalkan ω

$$\text{yang memenuhi } a_{11}\frac{x_1}{\omega} + \ldots + a_{m1}\frac{x_m}{\omega} \geq 1$$
$$\vdots$$
$$a_{1n}\frac{x_1}{\omega} + \ldots + a_{mn}\frac{x_m}{\omega} \geq 1$$
$$\frac{x_1}{\omega} + \ldots + \frac{x_m}{\omega} = \frac{1}{\omega}$$
$$\frac{x_i}{\omega} \geq 0,\ 1 \leq i \leq m \qquad \ldots(3.22)$$

Diberikan $x_i' = \frac{x_i}{\omega}$, $1 \leq i \leq m$. Karena masalah di atas ekuivalen dengan masalah meminimalkan $\frac{1}{\omega}$ maka masalah optimasi (3.22) ekuivalen dengan masalah

meminimalkan $x_1' + \ldots x_m'$ $(= \frac{1}{\omega})$

yang memenuhi

$$a_{11}x_1' + \ldots + a_{m1}x_m' \geq 1$$
$$\vdots$$
$$a_{1n}x_1' + \ldots + a_{mn}x_m' \geq 1$$
$$x_i' \geq 0,\ 1 \leq i \leq m \qquad \ldots(3.23)$$

Misalnya $\mathbf{x}' = (x_1', \ldots, x_m')^t$, $b = (1,1, \ldots,1)^t$, $c = (1, \ldots, 1)^t$ dengan b adalah ganda m (m-*tuple*) dan c adalah ganda n (n-*tuple*), maka (3.23) dapat ditulis sebagai

meminimalkan $b\mathbb{X}'$

yang memenuhi $\mathbb{A}^t\mathbb{X}' \geq c$, $\mathbb{X}' \geq 0$

Di sini penukaran nilai minimal fungsi obyektif $b\mathbb{X}'$ pada masalah pemrograman linear (3.23) adalah sama dengan V_L^M. Karena $\omega(x', \ldots, x_m') = (x_1, \ldots, x_m)$ maka hasilkali koordinat titik-titik $\mathbf{x}'$ dengan minimal ω memberikan strategi optimal untuk P_1.

ii) Diketahui $V_U^M = \min_{y \in Y} \max_{x \in X} XAY^t = \min_{y \in Y} \max_{1 \le i \le m} A_{(i)}Y^t$

Diberikan suatu strategi tetap $\mathbf{y} = (y_1, \ \ldots \ ,y_n)$ dengan maksimal dari m besaran adalah bilangan real terkecil z yang memenuhi

$$\begin{aligned} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n &\le z \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n &\le z \\ &\vdots \\ a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + \ldots + a_{mn}y_n &\le z \end{aligned}$$

Karena V_U^M adalah minimal z untuk setiap $\mathbf{y} \in Y$ maka V_U^M sama dengan minimal z , yang memenuhi

$$\begin{aligned} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n &\le z \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n &\le z \\ &\vdots \\ a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + \ldots + a_{mn}y_n &\le z \\ y_1 + \ldots + y_n &= 1 \\ y_j \ge 0, \ 1 \le j &\le n \end{aligned} \qquad \ldots(3.24)$$

dan suatu titik yang mencapai nilai minimal adalah strategi optimal untuk P_2.

Karena $V_U^M > 0$ maka semua z yang memenuhi (3.24) bernilai positif. Kemudian persamaan dan pertidaksamaan dalam (3.24) dibagi dengan z, sehingga diperoleh

meminimalkan z

$$\text{yang memenuhi } a_{11}\frac{y_1}{z} + \ldots + a_{1n}\frac{y_n}{z} \leq 1$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}\frac{y_1}{z} + \ldots + a_{mn}\frac{y_n}{z} \leq 1 .$$

$$\frac{y_1}{z} + \ldots + \frac{y_n}{z} = \frac{1}{z}$$

$$\frac{y_j}{z} \geq 0,\ 1 \leq j \leq n \qquad \ldots(3.25)$$

Diberikan $y_j' = (\frac{y_j}{z})$, $1 \leq j \leq n$. Dengan demikian (3.25) ekuivalen dengan

$$\text{memaksimalkan } y_1' + \ldots + y_n' \quad (= \frac{1}{z})$$

$$\text{yang memenuhi } a_{11}y_1' + \ldots + a_{1n}y_n' \leq 1$$

$$a_{m1}y_1' + \ldots + a_{mn}y_n' \leq 1$$

$$y_j' \geq 0,\ 1 \leq j \leq n \qquad \ldots(3.26)$$

Apabila $y' = (y_1, \ldots, y_n)^t$ maka masalah di atas dapat ditulis kembali sebagai

memaksimalkan $c\mathcal{Y}'$

yang memenuhi $A\mathcal{Y}' \leq b$, $\mathcal{Y}' \geq 0$

Sama seperti sebelumnya, penukaran nilai maksimal fungsi obyektif $c\mathcal{Y}'$ pada (3.26) adalah sama dengan V_U^M dan hasil kali koordinat titik-titik y' dengan maksimal z akan memberikan strategi optimal untuk P_2.

Dapat dilihat bahwa masalah (3.23) dan (3.26) merupakan masalah dual linear dengan

Masalah primal : memaksimalkan $c\mathcal{Y}'$

yang memenuhi $\mathbb{A}\mathbb{Y}' \le b$, $\mathbb{Y}' \ge 0$

dan

Masalah dual : meminimalkan $b\mathbb{X}'$

yang memenuhi $\mathbb{A}^t\mathbb{X}' \ge c$, $\mathbb{X}' \ge 0$.

Karena $b\mathbb{X}' = (x_1', \ldots, x_m') \ge 0$ dan semua unsur a_{ij} positif maka ada penyelesaian fisibel untuk $\mathbb{A}^t\mathbb{X}' \ge c$. Jadi masalah dual mempunyai penyelesaian optimal yang berhingga . Berdasarkan teorema Dualitas maka kedua masalah tersebut mempunyai penyelesaian yang berhingga dengan nilai optimal yang sama. Dengan demikian ada strategi yang optimal untuk kedua pemain dan $V_L^M = V_U^M$.

Kasus 2 Ada $a_{ij} \le 0$

Dipilih sebarang konstanta r yang memenuhi $a_{ij} + r > 0$ untuk setiap $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$. Di sini r dipilih dengan $r = 1 - \min\limits_{i,j} a_{ij}$. Diberikan $\mathbb{E}$ adalah matriks m x n dengan $a_{ij} = 1$ untuk setiap i,j dan ditentukan permainan dengan matriks pembayaran $\mathbb{A} + r\mathbb{E}$. Nilai harapan permainan ini (untuk setiap strategi $\mathbf{x}$ dan $\mathbf{y}$) adalah

$$\mathbb{X}(\mathbb{A}+r\mathbb{E})\,\mathbb{Y}^t = \mathbb{X}\mathbb{A}\mathbb{Y}^t + r\,\mathbb{X}\mathbb{E}\mathbb{Y}^t$$

Karena $\mathbf{x}$ dan $\mathbf{y}$ adalah strategi-strategi maka

$$\mathbb{X}\mathbb{E}\mathbb{Y}^t = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \vdots & & & \\ 1 & 1 & \ldots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$= \left(x_1+x_2+\ \ldots\ +x_m \quad \ldots \quad x_1+x_2+\ \ldots\ +x_m\right)\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$= \left(1 \quad 1 \quad \ldots \quad 1\right)\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$= \left(y_1+y_2+\ \ldots\ +y_n\right) = 1$$

Dengan demikian nilai harapannya adalah

$$\mathbb{X}\mathbb{A}\mathbb{Y}^t + r$$

yaitu nilai harapan untuk permainan dengan matriks $\mathbb{A}$ ditambah dengan konstanta r. Karena nilai harapan $\mathbb{X}\mathbb{A}\mathbb{Y}^t$ dan $\mathbb{X}\,(\mathbb{A} + r\,\mathbb{E})\mathbb{Y}^t$ hanya berbeda oleh konstanta r maka permainan dengan matriks pembayaran $\mathbb{A}$ dan $\mathbb{A} + r\,\mathbb{E}$ akan mempunyai strategi optimal yang sama dan nilai permainan hanya berbeda oleh konstanta r. Karena permainan dengan matriks $\mathbb{A} + r\,\mathbb{E}$ semua unsurnya positif ($a_{ij}>0$) maka hasil dari kasus 1 di atas dapat digunakan untuk permainan ini. Jadi untuk permainan dengan matriks pembayaran $\mathbb{A}$, strategi optimal ada dan $V_L^M = V_U^M$.

###

Akibat :

Jika diberikan $\mathbf{x}_o$ dan $\mathbf{y}_o$ adalah strategi yang optimal, maka untuk sebarang vektor strategi $\mathbf{x}$ dan $\mathbf{y}$

$$\mathbb{X}\mathbb{A}\mathbb{Y}_o^t \le \mathbb{X}_o\,\mathbb{A}\mathbb{Y}_o^t \le \mathbb{X}_o\mathbb{A}\mathbb{Y}^t$$

Ini berarti bahwa pasangan vektor strategi (x_o, y_o) adalah suatu pasangan keseimbangan.

Penyelesaian Permainan Tanpa Titik Pelana

Apabila permainan mempunyai titik pelana maka penyelesaian permainan dapat ditentukan dengan mudah. Sebaliknya, apabila permainan tersebut tidak mempunyai titik pelana (walaupun matriks pembayarannya telah disusutkan) maka ada beberapa cara untuk menentukan penyelesaian permainan yaitu :

a. Secara aljabar

b. Secara grafik

c. Pemrograman linear.

Untuk lebih jelasnya perhatikan uraian berikut.

a. <u>Penyelesaian Permainan Secara Aljabar</u>

Cara ini dapat dipergunakan apabila matriks pembayarannya adalah matriks 2x2 dan tidak dapat disusutkan.

Diberikan $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

Teorema 3.10 :

A tidak mempunyai titik pelana bila dan hanya bila a dan d keduanya lebih besar atau kurang dari b dan c, yaitu bila dan hanya bila $a > b$, $a > c$, $d > b$, $d > c$ atau $a < b$, $a < c$, $d < b$, $d < c$.

Bukti :

i) Diketahui A tidak mempunyai titik pelana. Akan dibuktikan $a > b$, $a > c$, $d > b$, $d > c$ atau $a < b$, $a < c$, $d < b$, $d<c$.

Andaikan $\mathbb{A}$ mempunyai titik pelana.

Diberikan $a_{11} = a$ adalah titik pelana.

Dari sini a merupakan unsur terkecil baris 1 dan unsur terbesar kolom 1.

Karena a adalah unsur terkecil baris 1 maka $a < b$.

Karena a adalah unsur terbesar kolom 1 maka $a > c$.

Hal ini berlawanan dengan pengandaian.

Jadi pengandaian salah.

Terbukti bahwa $\mathbb{A}$ tidak mempunyai titik pelana.

ii) Andaikan $a > b$, $a > c$, $d > b$, $d > c$.

Unsur terkecil setiap baris ialah $\{b,c\}$ dan unsur terbesar setiap kolom ialah $\{a,d\}$. Dengan demikian

$$V_L = \underset{i}{\text{maks}}\ \{b,c\} \neq \underset{j}{\min}\ \{a,d\} = V_U \qquad \ldots(3.27)$$

Andaikan $a > b$, $a < c$, $d < b$, $d < c$.

Unsur terkecil setiap baris ialah $\{a,d\}$ dan unsur unsur terbesar setiap kolom ialah $\{b,c\}$. Dengan demikian

$$V_L = \underset{i}{\text{maks}}\ \{a,d\} \neq \underset{j}{\min}\ \{b;c\} = V_U \qquad \ldots(3.28)$$

Dari (3.27) dan (3.28) dapat disimpulkan bahwa

$$V_L \neq V_U$$

Jadi berdasarkan teorema 3.6, matriks $\mathbb{A}$ tidak mempunyai titik pelana.

###

Teorema 3.11 :

Apabila A tidak mempunyai titik pelana dan diberikan $r = a+d-b-c$, maka nilai permainannya adalah

$$v = \frac{ad - bc}{r}$$

dan strategi optimal x_o dan y_o untuk P_1 dan P_2 adalah

$$x_o = \left(\frac{d-c}{r}, \frac{a-b}{r}\right), \quad y_o = \left(\frac{d-b}{r}, \frac{a-c}{r}\right)$$

Bukti :

Berdasarkan teorema 3.10 maka $r \neq 0$

Misalnya $x_o = \left(\frac{d-c}{r}, \frac{a-b}{r}\right)$ dan $y_o = \left(\frac{d-b}{r}, \frac{a-c}{r}\right)$ adalah strategi-strategi, v adalah nilai permainan, maka akan diperoleh

$$v = X_o A Y_c^t = \begin{bmatrix} \frac{d-c}{r} & \frac{a-b}{r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{d-b}{r} \\ \frac{a-c}{r} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{(ad-ac)+(ac-bc)}{r} & \frac{(bd-bc)+(ad-bd)}{r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{d-b}{r} \\ \frac{a-c}{r} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{ad-bc}{r} & \frac{ad-bc}{r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{d-b}{r} \\ \frac{a-c}{r} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{(ad-bc)(d-b)}{r^2} + \frac{(ad-bc)(a-c)}{r^2}$$

$$= \frac{ad - bc}{r} \qquad \ldots(3.29)$$

Karena x_o adalah strategi optimal maka untuk sebarang $y = (y_1, y_2)$ akan diperoleh $V_L^M = \min_{y \in Y} X_o A Y^t$

dengan

$$
\mathbb{X}_o \mathbb{A} \mathbb{Y}^t = \begin{pmatrix} \frac{d-c}{r} & \frac{a-b}{r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} \frac{(ad-ac)+(ac-bc)}{r} & \frac{(bd-bc)+(ad-bd)}{r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} \frac{ad-bc}{r} & \frac{ad-bc}{r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}
$$

$$
= \frac{ad-bc}{r} y_1 + \frac{ad-bc}{r} y_2
$$

$$
= \left(\frac{ad-bc}{r} \right) \left(y_1 + y_2 \right)
$$

$$
= \frac{ad-bc}{r} \qquad \ldots(3.30)
$$

Karena y_o adalah strategi optimal maka untuk sebarang $x = (x_1, x_2)$ akan diperoleh $V_L^M = \underset{x \in X}{\text{maks}} \; \mathbb{X}\mathbb{A}\mathbb{Y}_o^t$ dengan

$$
\mathbb{X}\mathbb{A}\mathbb{Y}_o^t = (x_1 \quad x_2) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{d-b}{r} \\ \frac{a-c}{r} \end{pmatrix}
$$

$$
= (x_1 \quad x_2) \begin{pmatrix} \frac{(ad-ab)+(ab-bc)}{r} \\ \frac{(cd-bc)+(ad-cd)}{r} \end{pmatrix}
$$

$$
= (x_1 \quad x_2) \begin{pmatrix} \frac{ad-bc}{r} \\ \frac{ad-bc}{r} \end{pmatrix}
$$

$$
= (x_1 + x_2) \left(\frac{ad-bc}{r} \right) = \frac{ad-bc}{r} \qquad \ldots(3.31)
$$

Dari (3.29), (3.30) dan (3.31) diperoleh

$$
\mathbb{X}\mathbb{A}\mathbb{Y}_o^t \le \mathbb{X}_o \mathbb{A} \mathbb{Y}_o^t = \frac{ad-bc}{r} \le \mathbb{X}_o \mathbb{A} \mathbb{Y}^t
$$

Berdasarkan "akibat" dari teorema 3.9 diperoleh

$$
x_o = \left(\frac{d-c}{r} \; , \; \frac{a-b}{r} \right)
$$

$$
y_o = \left(\frac{d-b}{r} \; , \; \frac{a-c}{r} \right)
$$

adalah strategi yang optimal, dengan nilai permainan

$$v = \frac{ad-bc}{r}$$

###

Dari teorema 3.11 diperoleh suatu rumus sederhana untuk menyelesaikan permainan dengan matriks pembayaran 2x2 yang tidak mempunyai titik pelana.

Untuk contoh diagram alur dapat dilihat pada lampiran 1.b halaman 161.

Contoh 3.9 :

Diketahui matriks pembayaran A dengan

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Matriks A tidak mempunyai titik pelana karena 8 dan 6 keduanya lebih besar dari 1 dan 4. Dengan menggunakan teorema 3.11 diperoleh

$$r = a+d-b-c = 8+6-1-4 = 9$$

$$v = \frac{ad-bc}{r} = \frac{8.6 - 1.4}{9} = \frac{44}{9} = 4\frac{8}{9}$$

$$x_o = \left(\frac{d-c}{r}, \frac{a-b}{r}\right) = \left(\frac{6-4}{9}, \frac{8-1}{9}\right) = \left(\frac{2}{9}, \frac{7}{9}\right)$$

$$y_o = \left(\frac{d-b}{r}, \frac{a-c}{r}\right) = \left(\frac{6-1}{9}, \frac{8-4}{9}\right) = \left(\frac{5}{9}, \frac{4}{9}\right)$$

Jadi nilai permainannya adalah $4\frac{8}{9}$ dengan strategi optimal untuk P_1 adalah $(\frac{2}{9}, \frac{7}{9})$ dan strategi optimal untuk P_2 adalah $(\frac{5}{9}, \frac{4}{9})$. Permainan dengan matriks A ini adalah tidak adil.

Contoh 3.10 :

Diberikan suatu permainan dengan matriks pembayaran

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -6 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$$

Matriks A tidak mempunyai titik pelana karena 7 dan 8 keduanya lebih besar dari 5 dan -6. Karena ada unsur yang tidak positif yaitu $a_{12} = -6$, maka dipilih

$$r = 1 - \min_{i,j} a_{ij} = 1 - (-6) = 7$$

Dibuat matriks pembayaran yang baru A + r E dengan

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

sehingga

$$A + rE = \begin{bmatrix} 7 & -6 \\ 5 & 8 \end{bmatrix} + 7 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 14 & 1 \\ 12 & 15 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan teorema 3.10, matriks A + r E juga tidak mempunyai titik pelana, dan dengan menggunakan teorema 3.11 akan diperoleh

$$r = a+d-b-c = 14+15-12-1 = 16$$

$$v = \frac{ad-bc}{r} = \frac{14.15 - 1.12}{16} = 12\frac{3}{8}$$

$$x_o = \left(\frac{d-c}{r}, \frac{a-b}{r}\right) = \left(\frac{15-12}{16}, \frac{14-1}{16}\right) = \left(\frac{3}{16}, \frac{13}{16}\right)$$

$$y_o = \left(\frac{d-b}{r}, \frac{a-c}{r}\right) = \left(\frac{15-1}{16}, \frac{14-12}{16}\right) = \left(\frac{7}{8}, \frac{1}{8}\right)$$

Jadi penyelesaian permainan ini adalah

$\left(\frac{3}{16}, \frac{13}{16}\right)$ sebagai strategi optimal untuk P_1

$\left(\frac{7}{8}, \frac{1}{8}\right)$ sebagai strategi optimal untuk P_2

dengan nilai permainan $v = 12\frac{3}{8} - 7 = 5\frac{3}{8}$.

b. <u>Penyelesaian Permainan dengan Menggunakan Grafik</u>

Apabila matriks pembayarannya 2xn atau mx2 maka permainan dapat diselesaikan dengan menggunakan grafik. Ada 2 buah metode untuk menyelesaikan secara grafik.

Metode b.1 :

Apabila $\mathbf{x}^*$ dan $\mathbf{y}^*$ adalah penyelesaian permainan dan v adalah nilai permainan maka $\forall \mathbf{x} \in X, \mathbf{y} \in Y$ berlaku

$$E(\mathbf{x},\mathbf{y}^*) \le E(\mathbf{x}^*,\mathbf{y}^*) \le E(\mathbf{x}^*,\mathbf{y}) \quad \ldots(3.32)$$

Untuk permainan 2 x n , $E(\mathbf{x}^*,\mathbf{y})$ dari pertidaksamaan (3.32) berarti

$$\sum_{i=1}^{2} a_{ij}\, x_i \ge v$$

dengan P_2 menggunakan strategi murni j.

Apabila P_1 memilih $\mathbf{x}^*$ yang membuat nilai v sebesar mungkin maka $\mathbf{x}^*$ dan v harus memenuhi

memaksimalkan v

$$\text{yang memenuhi} \quad \sum_{i=1}^{2} a_{ij}\, x_i \ge v, \quad 1 \le j \le n$$

$$x_i \ge 0, \quad \sum_i x_i = 1 \quad \ldots(3.33)$$

Bentuk ini merupakan bentuk masalah pemrograman linear. Dengan melakukan substitusi $x_2 = 1 - x_1$ ke dalam (3.33) akan diperoleh bentuk masalah dalam 2 variabel (yaitu dalam v dan x_1). Selanjutnya permainan diselesaikan secara grafik dengan x_1 sebagai sumbu mendatar dan v sebagai sumbu tegak. Kemudian karena x_i adalah suatu probabilitas maka x_i harus bilangan real tidak negatif dengan $0 \le x_i \le 1$.

Untuk permainan m x 2, $E(x,y^*)$ dari pertidaksamaan (3.32) berarti

$$\sum_{j=1}^{2} a_{ij}\, y_j \le v$$

dengan P_1 menggunakan strategi murni i.

Apabila P_2 memilih y^* yang membuat nilai v sekecil mungkin maka y^* dan v harus memenuhi

$$\begin{aligned} &\text{meminimalkan } v \\ &\text{yang memenuhi } \sum_{j=1}^{2} a_{ij}\, y_i \le v\ ,\ 1 \le i \le m \\ &\qquad y_j \ge 0,\ \sum_j y_j = 1 \qquad \ldots(3.34) \end{aligned}$$

Seperti halnya dalam permainan 2 x n , bentuk (3.34) dapat diselesaikan secara grafik (dengan melakukan substitusi $y_2 = 1-y_1$). Adapun sumbu mendatarnya adalah y_1 dan sumbu tegak v dengan $0 \le y_1 \le 1$.

Misalnya F adalah daerah fisibel yang memenuhi (3.33) atau (3.34) , maka nilai optimal dari daerah fisibel F tersebut diperoleh dengan menggeser garis selidik v. Adapun garis selidik untuk bentuk (3.33) atau (3.34) adalah garis v = c dengan c suatu konstanta. Garis selidik ini berupa garis yang sejajar dengan sumbu mendatar. Apabila permasalahannya adalah pemaksimalan maka garis v = c digeser ke atas dan apabila peminimalan maka garis v = c digeser ke bawah.

Metode b.2 :

Kolom atau baris matriks pembayaran dinyatakan sebagai koordinat titik-titik . Disusun poligon konveks K dengan cara menyusun kombinasi konveks koordinat titik-titik tersebut. Daerah poligon konveks ini disebut dengan himpunan strategi. Diambil garis ℓ dengan persamaan $y_1 = y_2$ atau $x_1 = x_2$. Untuk permainan 2 x n , kolom matriks dinyatakan sebagai koordinat titik-titik dan permainan diselesaikan untuk P_2. Vektor strategi campuran untuk P_2 merupakan kombinasi konveks dari n buah titik. Diambil garis ℓ dengan persamaan $x_1 = x_2$. Garis ini membagi himpunan strategi menjadi dua daerah yaitu $x_1 < x_2$ dan $x_1 > x_2$. Oleh karena P_2 ingin mencari minimal dari $\{x_1, x_2\}$ maka untuk daerah

i) $x_1 < x_2$, P_2 ingin meminimalkan x_2

ii) $x_1 > x_2$, P_2 ingin meminimalkan x_1.

Sedangkan untuk permainan m x 2, baris matriks dinyatakan sebagai titik-titik koordinat dan permainan diselesaikan untuk P_1 . Vektor strategi campuran untuk P_1 merupakan kombinasi konveks dari m buah titik. Diambil garis l dengan persamaan $y_1 = y_2$. Garis ini membagi himpunsn strategi menjadi dua daerah yaitu $y_1 < y_2$ dan $y_1 > y_2$. Oleh karena P_1 ingin mencari maksimal dari $\{y_1, y_2\}$ maka untuk daerah

i) $y_1 < y_2$, P_1 ingin memaksimalkan y_1

ii) $y_1 > y_2$, P_1 ingin memaksimalkan y_2.

Contoh 3.11 :

Diberikan matriks pembayaran

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 & 7 & 6 \\ 6 & 5 & 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Akan dihitung nilai permainan (v) dan strategi optimal dari setiap pemain.

Karena kolom 4 didominasi oleh kolom 5 dan kolom 1 didominasi oleh kolom 2 maka kolom 4 dan kolom 1 dapat dihapus, sehingga diperoleh matriks pembayaran yang baru yaitu :

$$\begin{bmatrix} -2 & 3 & 6 \\ 5 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Metode b.1 :

Karena matriks pembayarannya 2x3 maka soal akan diselesaikan untuk P_1.

Perumusan masalah bagi P_1

memaksimalkan v

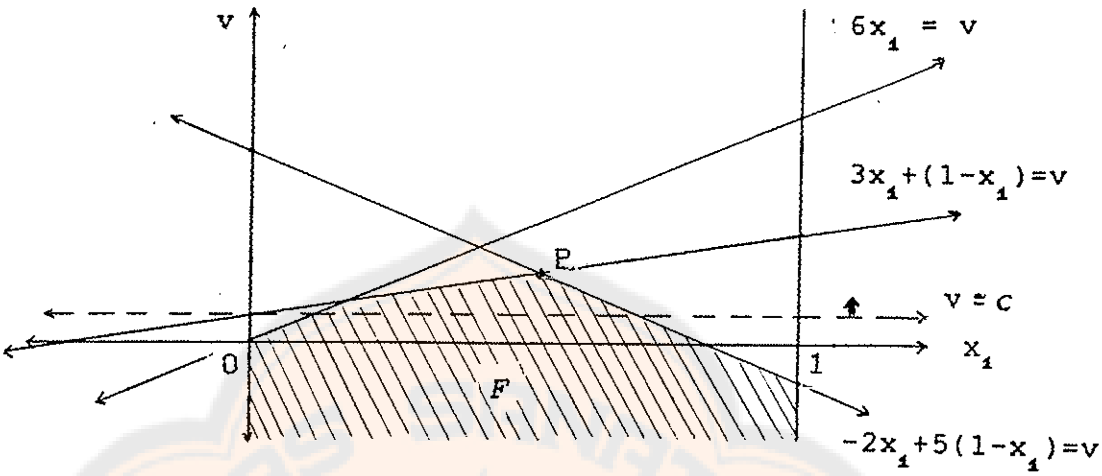
$$\begin{aligned} \text{yang memenuhi}\quad -2\,x_1 + 5\,x_2 &\geq v \\ 3\,x_1 + \,x_2 &\geq v \\ 6\,x_1 &\geq v \\ x_1, x_2 \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{2} x_i &= 1 \qquad \ldots(3.37) \end{aligned}$$

Karena $x_2 = 1 - x_1$ maka (3.37) dapat ditulis sebagai

memaksimalkan v

$$\begin{aligned} \text{yang memenuhi}\quad -2x_1 + 5\,(1-x_1) &\geq v \\ 3x_1 + (1-x_1) &\geq v \\ 6x_1 &\geq v \\ x_1 &\geq 0 \end{aligned}$$

Grafik :



Gambar 3.1

Karena permasalahannya adalah pemaksimalan maka pada daerah *F* garis $v = c$ digeser ke atas. Dengan demikian penyelesaian yang optimal terletak di titik P yang merupakan perpotongan garis $3x_1+(1-x_1)= v$ dan $-2x_1+5(1-x_1) = v$, yaitu

$$3x_1+(1-x_1) = -2x_1+5(1-x_1)$$
$$1+2x_1 = 5-7x_1$$
$$9x_1 = 4$$
$$x_1 = \frac{4}{9}$$
$$x_2 = 1-x_1 = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9} .$$

Selanjutnya

$$v = 3x_1 +(1-x_1) = 3(\tfrac{4}{9}) + (1-\tfrac{4}{9}) = \frac{17}{9} = 1\ \frac{8}{9}$$

Strategi optimal y^* diperoleh dengan menggunakan teorema dualitas komplementer.

Tabel dual :

$$\begin{array}{ccccc} & & 0 & 0 & 0 \\ & & \wedge & \wedge & \shortparallel \\ & & y_1 & y_2 & y_3 \\ 0 < x_1 & & \left[\begin{array}{c} -2 \\ 5 \end{array}\right. & \begin{array}{c} 3 \\ 1 \end{array} & \left.\begin{array}{c} 6 \\ 0 \end{array}\right] & \begin{array}{c} = \frac{17}{9} \\ = \frac{17}{9} \end{array} \\ 0 < x_2 & & & & \\ & & \shortparallel & \shortparallel & \vee \\ & & \frac{17}{9} & \frac{17}{9} & \frac{17}{9} \end{array}$$

Jadi diperoleh

$$-2y_1 + 3y_2 + 6(0) = \frac{17}{9} \qquad \ldots(3.38)$$

$$5y_1 + y_2 = \frac{17}{9} \qquad \ldots(3.39)$$

Kemudian bentuk (3.38) dan (3.39) diselesaikan dengan eliminasi.

$$\begin{array}{rcl|l|rcl} -2y_1+3y_2 & = & \frac{17}{9} & \times\ 1 & -2y_1+3y_2 & = & \frac{17}{9} \\ 5y_1+ y_2 & = & \frac{17}{9} & \times\ 3 & 15y_1+3y_2 & = & \frac{51}{9} \\ \hline & & & & -17y_1 & = & 1\,\frac{34}{9} \\ & & & & y_1 & = & \frac{2}{9} \\ & & & & y_2 & = & \frac{17}{9} - 5\left(\frac{2}{9}\right) = \frac{7}{9} \end{array} -$$

Jadi penyelesaian permainan adalah

$\left(\frac{4}{9}, \frac{5}{9}\right)$ sebagai strategi optimal untuk P_1

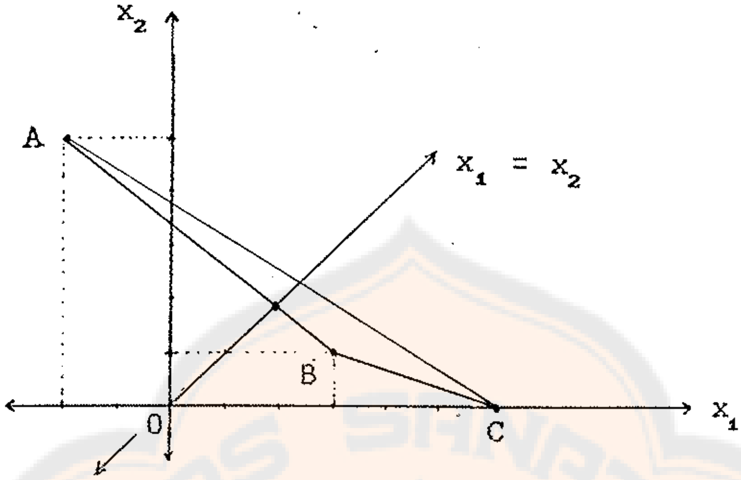
$(0, \frac{2}{9}, \frac{7}{9}, 0, 0)$ sebagai strategi optimal untuk P_2

dengan nilai permainan $v = 1\,\frac{8}{9}$.

Metode b.2 :

Karena ordo matriksnya 2×3, maka permainan diselesaikan untuk P_2, dengan kolom-kolom matriks dinyatakan sebagai titik A(-2,5), B(3,1), C(6,0). Vektor strategi campuran untuk P_2 merupakan kombinasi konveks $y_1\mathbb{A} + y_2\mathbb{B} + y_3\mathbb{C}$ dengan $\sum_j y_j = 1$, $y_j \geq 0$, $1 \leq j \leq 3$ dan kombinasi konveks ini menghasilkan himpunan strategi yang konveks .

Grafik :



Gambar 3.2

Dibuat garis ℓ dengan persamaan $x_1 = x_2$.

Daerah di bawah garis $x_1 = x_2$ merupakan daerah dengan $x_1 > x_2$ dan daerah di atas garis $x_1 = x_2$ merupakan daerah dengan $x_1 < x_2$. Oleh karena P_2 ingin mencari minimal dari $\{x_1, x_2\}$ maka untuk daerah

i) $x_1 < x_2$, P_2 akan meminimalkan x_2 .
x_2 akan minimal pada titik potong $x_1 = x_2$ dengan $\overline{AB}$.

ii) $x_1 > x_2$, P_2 akan meminimalkan x_1.
x_1 akan minimal pada titik potong $x_1 = x_2$ dengan $\overline{AB}$.

Sehingga penyelesaian optimal pada titik potong $x_1 = x_2$ dengan $\overline{AB}$.

Persamaan garis yang melalui titik A(-2,5) dan

$$\frac{x_2 - 5}{1 - 5} = \frac{x_1 - (-2)}{3 - (-2)}$$

$$x_2 = \frac{-4}{5} x_1 + \frac{17}{5}$$

Dengan demikian titik potong $x_1 = x_2$ dengan $x_2 = \frac{-4}{5} x_1 + \frac{17}{5}$ adalah

$$x_1 = x_2$$
$$= \frac{-4}{5} x_1 + \frac{17}{5}$$
$$x_1 = \frac{17}{9}$$

Jadi nilai permainannya adalah $v = \frac{17}{9}$.

Karena nilai optimal terjadi pada titik potong $x_1 = x_2$ dengan $x_2 = \frac{-4}{5} x_1 + \frac{17}{5}$ maka strategi-strategi yang optimal bersesuaian dengan matriks

$$\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$

Karena ada unsur-unsur matriks yang tidak positif maka dipilih $r = 1 - \min_{i,j} a_{ij} = 1 -(-2) = 3$. Dibuat matriks yang baru

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}$$

Jadi

$$x_o = \left(\frac{d-c}{a+d-b-c}, \frac{a-b}{a+d-b-c}\right) = \left(\frac{4-8}{1+4-6-8}, \frac{1-6}{1+4-6-8}\right)$$
$$= \left(\frac{4}{9}, \frac{5}{9}\right)$$
$$y_o = \left(\frac{d-b}{a+d-b-c}, \frac{a-c}{a+d-b-c}\right) = \left(\frac{4-6}{1+4-6-8}, \frac{1-8}{1+4-6-8}\right)$$
$$= \left(\frac{2}{9}, \frac{7}{9}\right) .$$

Dengan demikian penyelesaian permainan adalah

$\left(\frac{4}{9}, \frac{5}{9}\right)$ sebagai strategi optimal untuk P_1

$\left(0, \frac{2}{9}, \frac{7}{9}, 0, 0\right)$ sebagai strategi optimal untuk P_2

dengan nilai permainan $v = \frac{17}{9} = 1\frac{8}{9}$.

Ini berarti bahwa apabila setiap pemain menggunakan strategi optimalnya maka kemenangan (keuntungan) yang maksimal bagi P_1 adalah $1\frac{8}{9}$ dan kekalahan (kerugian) yang minimal bagi P_2 adalah $1\frac{8}{9}$. Dengan kata lain bahwa P_1 menang sebesar $1\frac{8}{9}$.

Contoh 3.12 :

Diberikan matriks pembayaran

$$\begin{bmatrix} -3 & 6 \\ 6 & 3 \\ 8 & -2 \end{bmatrix}$$

Karena baris atau kolom dalam matriks tidak ada yang didominasi oleh unsur lain maka matriks tidak dapat disusutkan. Akan tetapi karena matriksnya adalah 3x2 maka permainan akan diselesaikan secara grafik.

Metode b.1 :

Karena matriksnya adalah 3x2 maka soal akan diselesaikan untuk P_2.

Perumusan masalah bagi P_2

meminimalkan v

yang memenuhi $-3y_1 + 6y_2 \le v$

$6y_1 + 3y_2 \le v$

$8y_1 - 2y_2 \le v$

$y_1, y_2 \ge 0, \; y_1 + y_2 = 1 \quad \ldots(3.40)$

Dengan mensubstitusikan $y_2 = 1-y_1$ maka bentuk (3.40) dapat ditulis sebagai

meminimalkan v

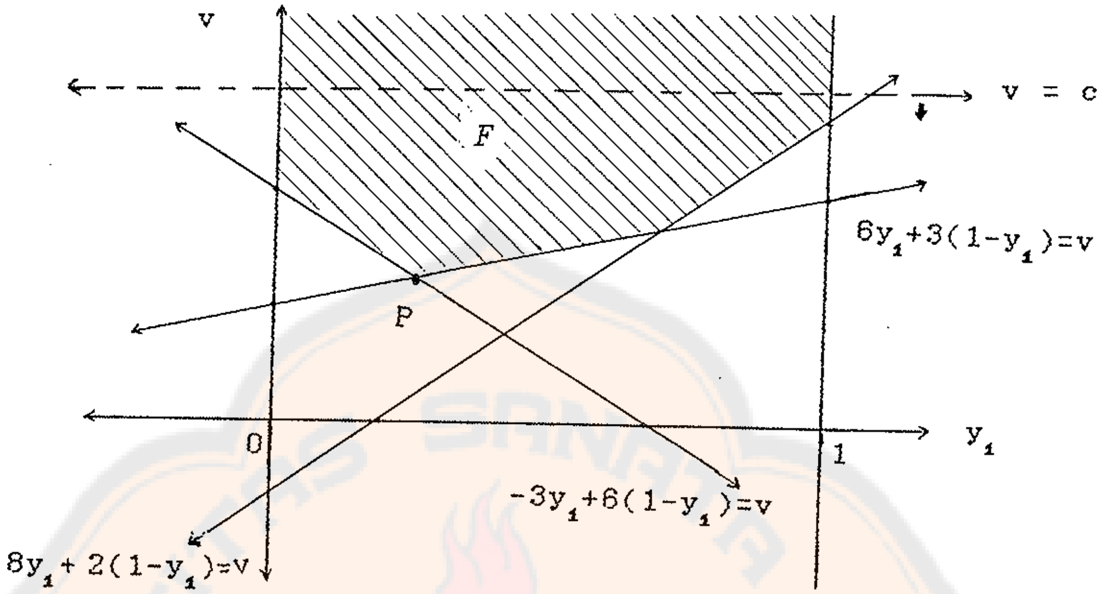
yang memenuhi $-3y_1 + 6(1-y_1) \le v$

$6y_1 + 3(1-y_1) \le v$

$8y_1 - 2(1-y_1) \le v$

$y_1 \ge 0$

Grafik :



Gambar 3.3

Karena permasalahannya adalah peminimalan maka pada daerah fisibel *F* garis $v = c$ digeser ke bawah. Dari sini diperoleh penyelesaian optimal yang terletak pada perpotongan garis $-3y_1+6(1-y_1)=v$ dan $6y_1+3(1-y_1)=v$, yaitu di titik P , sehingga

$$6y_1+ 3(1-y_1) = -3y_1+6(1-y_1)$$

$$y_1 = \frac{1}{4}$$

$$y_2 = 1-y_1 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Strategi optimal x^* dicari dengan menggunakan teorema dualitas komplementer.

Tabel dual :

$$\begin{array}{ccc}
 & \begin{array}{cc} 0 & 0\\ \wedge & \wedge \\ y_1 & y_2\end{array} & \\
\begin{array}{c} 0 < x_1\\ 0 < x_2\\ 0 = x_3\end{array} & \begin{bmatrix} -3 & 6\\ 6 & 3\\ 8 & -2\end{bmatrix} & \begin{array}{l} = 3\frac{2}{4}\\ = 3\frac{3}{4}\\ < 3\frac{3}{4}\end{array}\\
 & \begin{array}{cc} \| & \| \\ 3\frac{3}{4} & 3\frac{3}{4}\end{array} &
\end{array}$$

$$-3x_1 + 6x_2 + 8(0) = 3\tfrac{3}{4} \qquad \ldots(3.41)$$

$$6x_1 + 3x_2 - 2(0) = 3\tfrac{3}{4} \qquad \ldots(3.42)$$

Dengan melakukan eliminasi bentuk (3.41) dan (3.42) diperoleh

$$\begin{array}{r|c|rcl} -3x_1 + 6x_2 + 8(0) = 3\frac{3}{4} & \times 1 & -3x_1+6x_2 & = & 3\frac{3}{4} \\ 6x_1 + 3x_2 - 2(0) = 3\frac{3}{4} & \times 2 & 12x_1+6x_2 & = & 7\frac{1}{2} \\ \hline & & -15x_1 & = & -3\frac{3}{4} \\ & & x_1 & = & \frac{1}{4} \end{array}$$

$$6(\tfrac{1}{4})+3x_2 = 3\tfrac{3}{4}$$

$$x_2 = \tfrac{3}{4}$$

Jadi penyelesaian permainan adalah

$(\frac{1}{4},\frac{3}{4},0)$ sebagai strategi optimal untuk P_1

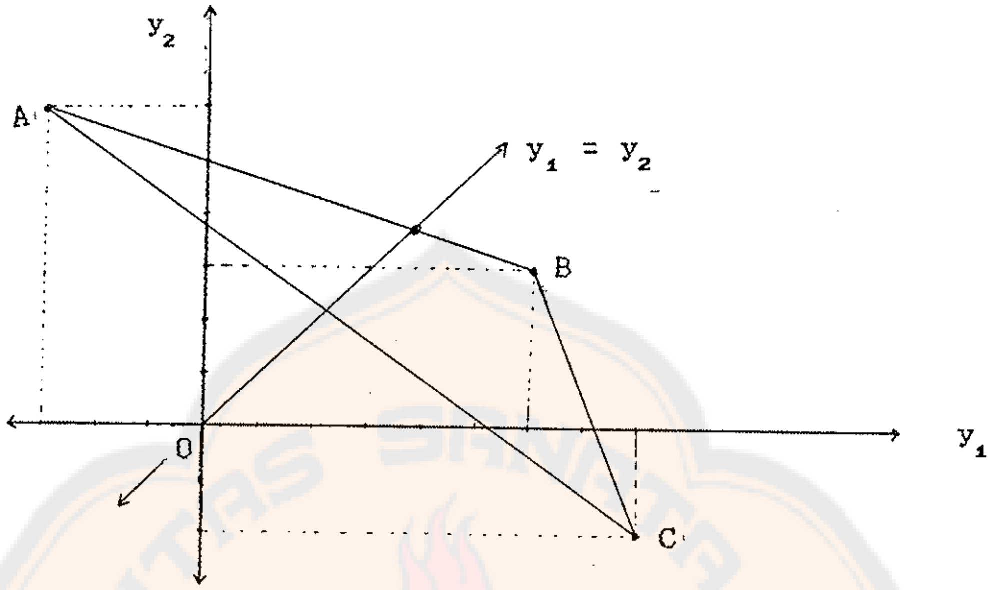
$(\frac{1}{4},\frac{3}{4})$ sebagai strategi optimal untuk P_2

dengan nilai permainan $v = 3\frac{3}{4}$.

Metode b.2 :

Karena ordo matriksnya 3 x 2 , maka permainan diselesaikan untuk P_1 , dengan baris-baris matriks dinyatakan sebagai titik A(-3,6), B(6,3) dan C(8,-2). Vektor strategi campuran untuk P_1 merupakan kombinasi konveks dari titik A , B , C yaitu $x_1\mathbb{A} + x_2\mathbb{B} + x_3\mathbb{C}$ dengan $\sum_i x_i = 1$, $x_i \geq 0$, $1 \leq i \leq 3$ dan kombinasi konveks ini menghasilkan himpunan strategi yang konveks.

Grafik :



Gambar 3.4

Dibuat garis ℓ dengan persamaan $y_1 = y_2$.

Daerah di bawah garis $y_1 = y_2$ adalah suatu daerah dengan $y_1 > y_2$ dan daerah di atas garis $y_1 = y_2$ adalah daerah dengan $y_1 < y_2$. Oleh karena P_1 ingin mencari maksimal dari $\{y_1, y_2\}$ maka untuk daerah

i) $y_1 < y_2$, P_1 ingin memaksimalkan y_1.
y_1 akan maksimal pada titik potong $y_1 = y_2$ dengan $\overline{AB}$.

ii) $y_1 > y_2$, P_1 ingin memaksimalkan y_2 .
y_2 akan maksimal pada titik potong $y_1 = y_2$ dengan $\overline{AB}$.

Dengan demikian penyelesaian optimal pada titik potong $y_1 = y_2$ dengan $\overline{AB}$.

Persamaan garis yang melalui titik A(-3,6) dan B(6,3) adalah

$$\frac{y_2 - 6}{3 - 6} = \frac{y_1 - (-3)}{6 - (-3)}$$

$$y_2 = -\tfrac{1}{3}\, y_1 + 5$$

Dengan demikian titik potong $y_1 = y_2$ dengan

$y_2 = -\frac{1}{3} y_1 + 5$ adalah

$$y_1 = y_2$$
$$= -\frac{1}{3} y_1 + 5$$
$$y_1 = \frac{15}{4} = 3\frac{3}{4}$$

Jadi nilai permainannya adalah $3\frac{3}{4}$.

Karena nilai optimal terjadi pada titik potong $y_1 = y_2$ dengan $y_2 = -\frac{1}{3} y_1 + 5$ maka strategi-strategi yang optimal bersesuaian dengan matriks

$$\begin{bmatrix} -3 & 6 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$$

Karena ada unsur-unsur matriks yang tidak positif maka dipilih $r = 1 \min_{i,j} a_{ij} = 1 - (-3) = 4$.

Dibuat matriks yang baru

$$\begin{bmatrix} 1 & 10 \\ 10 & 7 \end{bmatrix}$$

Jadi

$$x_o = \left(\frac{d-c}{a+d-b-c}, \frac{a-b}{a+d-b-c}\right) = \left(\frac{7-10}{1+7-10-10}, \frac{1-10}{1+7-10-10}\right)$$
$$= \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$$
$$y_o = \left(\frac{d-b}{a+d-b-c}, \frac{a-c}{a+d-b-c}\right) = \left(\frac{7-10}{1+7-10-10}, \frac{1-10}{1+7-10-10}\right)$$
$$= \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right).$$

Dengan demikian penyelesaian permainan adalah

$\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, 0\right)$ sebagai strategi optimal untuk P_1

$\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$ sebagai strategi optimal untuk P_2

dengan nilai permainan $v = 3\frac{3}{4}$.

Ini berarti bahwa apabila setiap pemain menggunakan strategi optimalnya maka keuntungan (kemenangan) yang maksimal bagi P_1 adalah $3\frac{3}{4}$ dan kerugian (kekalahan) yang minimal bagi P_2 adalah $3\frac{3}{4}$ .Dengan kata lain P_1 menang sebesar $3\frac{3}{4}$.

c. Penyelesaian Permainan dengan Pemrograman Linear

Permainan berjumlah nol untuk 2 pihak merupakan suatu masalah optimisasi yang linear. Oleh karena itu dapat diselesaikan dengan metode pemrograman linear (dengan menggunakan metode grafik yang sudah dibahas di muka dan metode simpleks yang akan dibahas di bawah ini). Dengan demikian permainan dengan matriks pembayaran m x n dapat diselesaikan dengan cara ini.

Misal $x^* = (x_1, \ldots, x_m)$ dan $y^* = (y_1, \ldots y_n)$ adalah penyelesaian permainan dengan nilai v, maka $\forall x \varepsilon X$, $y \varepsilon Y$ berlaku

$$E(x,y^*) \le E(x^*,y^*) = v \le E(x^*,y) \qquad \ldots(3.43)$$

$E(x,y^*)$ dalam pertidaksamaan (3.43) berarti

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, y_j^* \le v \quad , 1 \le i \le m$$

dengan P_1 menggunakan strategi murni i.

Apabila P_2 memilih y^* yang membuat nilai v sekecil mungkin yaitu yang membuat V_U^M = v sekecil mungkin, maka permasalahan bagi P_2 adalah memilih v dan y^* yang memenuhi

$$\begin{aligned} &\text{meminimalkan } v \\ &\text{yang memenuhi } \sum_{j}^{n} a_{ij}\, y_j \le v \quad , 1 \le i \le m \\ &\qquad\qquad y_j \ge 0,\ \sum_j y_j = 1,\ 1 \le j \le n \end{aligned} \qquad \ldots(3.44)$$

$E(x^*,y)$ dalam pertidaksamaan (3.43) berarti

$$\sum_{i=1}^{m} x_i^*\, a_{ij} \ge v \quad , 1 \le j \le n$$

dengan P_2 menggunakan strategi murni j.

Apabila P_1 memilih x^* yang membuat nilai v sebesar mungkin yaitu membuat V_L^M = v sebesar mungkin maka permasalahan bagi P_1 adalah memilih v dan x^* yang memenuhi.

memaksimalkan v

yang memenuhi $\sum_i x_i a_{ij} \geq v$, $1 \leq j \leq n$

$$x_i \geq 0,\ \sum_i x_i = 1,\ 1 \leq i \leq m \quad \ldots(3.45)$$

Kemudian diberikan $y_j' = \left(\frac{y_j}{v}\right)$, $1 \leq j \leq n$ dan $y_1' + \ldots + y_n' = \sum_j \frac{y_j}{v} = \frac{1}{v}$. Diketahui bahwa masalah meminimalkan v adalah ekuivalen dengan masalah memaksimalkan $\frac{1}{v}$. Misal $v > 0$ maka bentuk (3.44) dapat ditulis sebagai

memaksimalkan $y_1' + \ldots + y_n'$

yang memenuhi $\sum_j a_{ij} y_j' \leq 1$, $1 \leq i \leq m$

$$y_j' \geq 0,\ \sum_j y_j' = 1,\ 1 \leq j \leq n \quad ..(3.46)$$

Bentuk ini merupakan bentuk standar masalah pemrograman linear, sehingga dapat diselesaikan dengan metode simpleks.

Dalam pemrograman linear setiap masalah dapat diselesaikan melalui dualnya. Nilai optimal fungsi obyektif untuk masalah primal dan dual adalah sama. Dual untuk (3.46) adalah

meminimalkan $x_1' + \ldots + x_m'$

yang memenuhi $\sum_i x_i' a_{ij} \geq 1$, $1 \leq j \leq n$

$$x_i' \geq 0,\ \sum_i x_i' = 1,\ 1 \leq i \leq m \quad \ldots(3.47)$$

Diberikan $x_i' = \left(\frac{x_i}{v}\right)$ dan $x_1' + \ldots + x_m' = \sum_i \frac{x_i}{v} = \frac{1}{v}$.

Dengan melakukan substitusi $x_i' = (\frac{x_i}{v})$ ke dalam (3.47) maka akan diperoleh bentuk (3.45) yang merupakan perumusan masalah bagi P_1. Ini berarti bahwa permasalahan bagi P_1 merupakan masalah dual dari P_2.

Penyelesaian bentuk (3.46) dengan metode simpleks akan memberikan nilai permainan dan strategi optimal y^*. Namun dalam penyelesaian dengan metode simpleks ini akan diperoleh juga strategi optimal untuk P_1 karena nilai perubah dual dapat dibaca pada tabel optimal soal primal.

Apabila ada unsur-unsur dalam matriks pembayaran yang negatif maka dibuat matriks pembayaran yang baru dengan menambah suatu konstanta r (dapat dipilih $r = 1-\min_{i,j} a_{ij}$). Strategi optimal untuk permainan ini sama dengan strategi optimal apabila matriks pembayaran tidak ditambah dengan konstanta r. Akan diperlihatkan bahwa strategi optimal untuk kedua matriks pembayaran sama dan nilai permainannya hanya berbeda oleh konstanta r.

Misal kedua matriks pembayaran tersebut adalah $A = (a_{ij})$ dan $A' = (a_{ij} + r)$. Diketahui (x^*, y^*) adalah pasangan strategi optimal untuk matriks A dengan nilai permainan $E(x^*, y^*)$ dan teorema Fundamental berlaku untuk $A' = (a_{ij} + r)$. Berdasarkan "akibat" dari teorema Fundamental maka

$$(\forall x \varepsilon X,\ y \varepsilon Y)(\exists x^* \varepsilon X,\ y^* \varepsilon Y)\ (E'(x, y^*) \le E'(x^*, y^*) \le E'(x^*, y)$$

Akan tetapi
$$\begin{aligned} E'(x^*, y^*) &= \sum_i \sum_j x_i^* (a_{ij} + r)\, y_j^* \\ &= \sum_i \sum_j x_i^*\, a_{ij}\, y_j^* + \sum_i x_i \sum_j y_j\, r \\ &= E(x^*, y^*) + r \end{aligned}$$

Demikian juga

$$E'(x, y^*) = E(x, y^*) + r$$

$$E'(x^*, y) = E(x^*, y) + r$$

sehingga

$$E'(x, y^*) \le E'(x^*, y^*) \le E'(x^*, y)$$

$$E(x, y^*) \le E'(x^*, y^*) - r = E(x^*, y^*) \le E(x^*, y)$$

Ini berarti bahwa (x^*, y^*) adalah strategi optimal untuk matriks pembayaran $A' = (a_{ij} + r)$. Kemudian nilai permainannya adalah $E'(x^*, y^*) = E(x^*, y^*) + r$.

Ini berarti bahwa strategi optimal untuk permainansama walaupun unsur-unsur dari matriks pembayarannya ditambah dengan konstanta r. Sedangkan nilai permainannya hanya berbeda oleh konstanta r.

Untuk contoh diagram alur dapat dilihat pada lampiran 1.c halaman 162.

Contoh 3.13 :

Diberikan matriks pembayaran sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} -3 & -1 & -3 \\ -3 & 3 & -1 \\ -4 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

Karena ada unsur yang negatif, dipilih

$r = 1 - \min_{i,j} a_{ij} = 1 - (-4) = 5$.

Matriks pembayaran yang baru adalah

$$\begin{bmatrix} -3 & -1 & -3 \\ -3 & 3 & -1 \\ -4 & -3 & 3 \end{bmatrix} + 5 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 4 & 2 \\ 2 & 8 & 4 \\ 1 & 2 & 8 \end{bmatrix}$$

Perumusan masalah bagi P_2

meminimalkan v

yang memenuhi
$$8y_1 + 4y_2 + 2y_3 \le v$$
$$2y_1 + 8y_2 + 4y_3 \le v$$
$$y_1 + 2y_2 + 8y_3 \le v$$
$$\sum_{j=1}^{3} y_j = 1,\ y_j \ge 0,\ 1 \le j \le 3$$

Diberikan $y'_j = \dfrac{y_j}{v}$ dan $y'_1 + y'_2 + y'_3 = \sum_j \dfrac{y_j}{v} = \dfrac{1}{v}$

Jadi perumusan masalah di atas ekuivalen dengan

memaksimalkan $y'_1 + y'_2 + y'_3$

yang memenuhi $8y_1' + 4y_2' + 2y_3' \le 1$

$$2y_1' + 8y_2' + 4y_3' \le 1$$

$$y_1' + 2y_2' + 8y_3' \le 1$$

$$\sum_j y_j' = 1,\ y_j' \ge 0,\quad 1 \le j \le 3 \qquad \ldots(3.48)$$

Perumusan masalah bagi P_1 :

meminimalkan $x_1' + x_2' + x_3'$

yang memenuhi $8x_1' + 2x_2' + x_3' \ge 1$

$$4x_1' + 8x_2' + 2x_3 \ge 1$$

$$2x_1' + 4x_2' + 8x_3 \ge 1$$

$$\sum_i x_i' = 1,\ x_i' \ge 0,\ 1 \le i \le 3 \qquad \ldots(3.49)$$

Dapat dilihat bahwa bentuk (3.48) dan (3.49) merupakan bentuk standar maksimal dan minimal masalah pemrograman linear yang ternyata saling dual dan salah satu dapat diselesaikan dengan metode simpleks. Karena pertidaksamaan pada bentuk (3.48) hanya mempunyai 3 buah variabel kelonggaran (*slack*) sedangkan pertidaksamaan pada bentuk (3.49) mempunyai 3 buah variabel kelonggaran dan 3 buah variabel semu (*artificial*) maka permainan ini diselesaikan melalui bentuk (3.48).

Bentuk siap simpleks untuk (3.48) adalah :

Menentukan $y_j' \ge 0$, $\sum_j y_j' = 1$

yang memenuhi $8y_1' + 4y_2' + 2y_3' + s_1 = 1$

$$2y_1' + 8y_2' + 4y_3' + s_2 = 1$$

$$y_1' + 2y_2' + 8y_3' + s_3 = 1$$

dan memaksimalkan $y_1'+y_2'+y_3'+0s_1+0s_2+0s_3$

Tabel simpleks :

	c_j	1	1	1	0	0	0		
$\bar{c}_i$	$\bar{x}_i$ \ x_i	y_1'	y_2'	y_3'	s_1	s_2	s_3	b_i	R_i
0	s_1	8	4	2	1	0	0	1	$^1/_8$
0	s_2	2	8	4	0	1	0	1	$^1/_2$
0	s_3	1	2	8	0	0	1	1	1
	z_j	0	0	0	0	0	0	0	
	$z_j - c_j$	-1	-1	0	0	0	0	0	
1	y_1'	1	$^1/_2$	$^1/_4$	$^1/_8$	0	0	$^1/_8$	$^1/_2$
0	s_2	0	7	$^7/_2$	$-^1/_4$	1	0	$^3/_4$	$^3/_{14}$
0	s_3	0	$^3/_2$	$^{31}/_4$	$-^1/_8$	0	1	$^7/_8$	$^7/_{62}$
	z_j	1	$^1/_2$	$^1/_4$	$^1/_8$	0	0	$^1/_8$	
	$z_j - c_j$	0	$-^1/_2$	$-^3/_4$	$^1/_8$	0	0	$^1/_8$	
1	y_1'	1	$^{14}/_{31}$	0	$^4/_{31}$	0	$-^1/_{31}$	$^3/_{31}$	$^3/_{14}$
0	s_2	0	$^{196}/_{31}$	0	$-^6/_{31}$	1	$-^{14}/_{31}$	$^{11}/_{31}$	$^{11}/_{196}$
1	y_3'	0	$^6/_{31}$	1	$-^1/_{62}$	0	$^4/_{31}$	$^7/_{62}$	$^7/_{12}$
	z_j	1	$^{20}/_{21}$	0	$^7/_{62}$	0	$^3/_{31}$	$^{13}/_{62}$	
	$z_j - c_j$	0	$-^{11}/_{31}$	0	$^7/_{62}$	0	$^3/_{31}$	$^{13}/_{64}$	
1	y_1'	1	0	0	$^1/_7$	$\frac{-1}{14}$	0	$\frac{1}{14}$	
1	y_2'	0	1	0	$-^3/_{98}$	$\frac{31}{196}$	$\frac{-1}{14}$	$\frac{11}{196}$	
1	y_3'	0	0	1	$-^1/_{98}$	$\frac{-3}{98}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{5}{49}$	
	z_j	1	1	1	$^5/_{49}$	$\frac{11}{196}$	$\frac{1}{14}$	$\frac{45}{196}$	
	$z_j - c_j$	0	0	0	$^5/_{49}$	$\frac{11}{196}$	$\frac{1}{14}$	$\frac{45}{196}$	

Diperoleh : $y_1' = \frac{1}{14}$, $y_2' = \frac{11}{196}$, $y_3' = \frac{5}{49}$

$$\frac{1}{v} = \frac{45}{196}$$

$$x_1' = \frac{5}{49} , \quad x_2' = \frac{11}{196} , \quad x_3' = \frac{1}{14}$$

Karena $y_j' = \frac{y_j}{v}$ dan untuk dualnya $x_i' = \frac{x_i}{v}$ maka

$y_1 = \frac{1}{14} \cdot \frac{196}{45} = \frac{14}{45}$ $\qquad$ $x_1 = \frac{5}{49} \cdot \frac{196}{45} = \frac{20}{45} = \frac{4}{9}$

$y_2 = \frac{11}{196} \cdot \frac{196}{45} = \frac{11}{45}$ $\qquad$ $x_2 = \frac{11}{196} \cdot \frac{196}{45} = \frac{11}{45}$

$y_3 = \frac{5}{49} \cdot \frac{196}{45} = \frac{20}{45} = \frac{4}{9}$ $\qquad$ $x_3 = \frac{1}{14} \cdot \frac{196}{45} = \frac{14}{45}$

nilai permainan $= \frac{196}{45} - 5 = -\frac{29}{45}$.

Dengan demikian penyelesaian permainan adalah

$\left(\frac{4}{9}, \frac{11}{45}, \frac{14}{45}\right)$ sebagai strategi optimal untuk P_1

$\left(\frac{14}{45}, \frac{11}{45}, \frac{4}{9}\right)$ sebagai strategi optimal untuk P_2

dengan nilai permainan $v = -\frac{29}{45}$.

Ini berarti bahwa P_2 menang sebesar $\frac{29}{45}$.

BAB IV

PERMAINAN TIDAK BERJUMLAH NOL

4.1 Permainan Tanpa Kerjasama

Dalam permainan tidak berjumlah nol apabila antara pemain tidak ada bentuk komunikasi (tidak diperbolehkan saling bekerjasama) maka hal ini disebut **permainan tanpa kerjasama**. Karena tidak ada kerjasama maka setiap pemain akan berusaha memaksimalkan perolehannya. Dengan demikian permainan tanpa kerjasama dapat dipandang sebagai permainan berjumlah nol dengan dua buah matriks $\mathbb{A}$ dan $\mathbb{B}$. Permainan berjumlah nol untuk P_1 adalah permainan dengan $\mathbb{A}$ sebagai matriks pembayaran dan P_1 bermain melawan pihak lain (pihak lain tersebut bukan P_2). Demikian pula permainan berjumlah nol untuk P_2. Di sini P_2 dianggap sebagai pemain ke-1 dan bermain melawan pihak lain (pihak lain tersebut bukan P_1) dengan matriks pembayaran $\mathbb{B}^t$. Adapun cara menentukan strategi optimal dan nilai permainan dari setiap pemain juga berdasarkan definisi dan teorema dalam permainan berjumlah nol.

4.1.1 Pasangan Keseimbangan dan Pasangan-pasangan Maksimin

Diketahui $\mathbb{A}$ adalah matriks pembayaran untuk P_1 dan $\mathbb{B}^t$ adalah matriks pembayaran untuk P_2 dengan

a_{ij} = pembayaran untuk P_1 apabila P_1 memilih strategi i dan P_2 memilih strategi j.

b_{ij} = pembayaran untuk P_2 apabila P_1 memilih strategi i dan P_2 memilih strategi j

x_i = probabilitas P_1 apabila ia menggunakan strategi i, $1 \le i \le m$

y_j = probabilitas P_2 apabila ia menggunakan strategi j, $1 \le j \le n$.

nilai harapan untuk P_1 (yang dilambangkan dengan E_I) dan nilai harapan untuk P_2 (dilambangkan dengan E_{II}) adalah :

$$E_I(x,y) = \sum_i \sum_j x_i \, a_{ij} \, y_j \text{ dan } E_{II}(x,y) = \sum_j \sum_i y_j \, b_{ij} \, x_i$$

(lihat kembali subbab 2.2).

Apabila P_1 memainkan strategi optimal $x^* \varepsilon X$ yang membuat E_I optimal maka x^* disebut **strategi maksimin untuk** P_1 dan E_I disebut **nilai maksimin untuk** P_1. Demikian juga apabila P_2 memainkan $y^* \varepsilon Y$ yang membuat E_{II} optimal maka y^* disebut **strategi maksimin untuk** P_2 dan E_{II} adalah **nilai maksimin untuk** P_2. Kemudian (x^*, y^*) dinamakan sebagai **pasangan maksimin**.

Dalam permainan tidak berjumlah nol juga terdapat suatu pasangan keseimbangan.

Definisi 4.1 :

Suatu pasangan strategi $x^* \varepsilon X$, $y^* \varepsilon Y$ disebut pasangan keseimbangan untuk permainan tidak berjumlah nol apabila

$$(\forall x \varepsilon X,\ y \varepsilon Y)\ \big(\ E_I(x,y^*) \le E_I(x^*,y^*) \quad \text{dan} \quad E_{II}(x^*,y) \le E_{II}(x^*,y^*)\big)$$

Di sini setiap pasangan maksimin belum tentu berupa pasangan keseimbangan. Ini disebabkan karena tidak semua pasangan maksimin memenuhi definisi 4.1.

Contoh 4.1 :

Diberikan matriks pembayaran

$$\begin{bmatrix} (1,10) & (10,1) \\ (0,-10) & (0,-9) \end{bmatrix}$$

Akan diperlihatkan bahwa pasangan maksimin dari permainan ini adalah tidak sama dengan pasangan keseimbangan.

Dari matriks pembayaran di atas diperoleh

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 10 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ dan } \mathbb{B} = \begin{bmatrix} 10 & 1 \\ -10 & -9 \end{bmatrix}$$

a) Matriks pembayaran untuk P_1 adalah

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 10 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Karena $\mathbb{A}$ mempunyai titik pelana maka dengan mengggunakan kriteria maksimin (dalam permainan berjumlah nol) diperoleh

$x^* = (1,0)$ adalah strategi optimal untuk P_1

$E_I = 1$ adalah nilai permainan untuk P_1

Karena $x^* \varepsilon X$ suatu strategi yang membuat E_I optimal maka $x^* = (1,0)$ disebut strategi maksimin untuk P_1 dan $E_I = 1$ adalah nilai maksimin untuk P_1.

Matriks pembayaran untuk P_2 adalah

$$\mathbb{B}^t = \begin{bmatrix} 10 & -10 \\ 1 & -9 \end{bmatrix}$$

Karena $\mathbb{B}^t$ mempunyai titik pelana maka dengan menggunakan kriteria maksimin diperoleh

$y^* = (0,1)$ adalah strategi optimal untuk P_2

$y^* = (0,1)$ adalah strategi optimal untuk P_2

$E_{II} = -9$ adalah nilai permainan untuk P_2

Jadi $y^* = (0,1)$ adalah strategi maksimin untuk P_2 dan $E_{II} = -9$ adalah nilai maksimin untuk P_2

Dengan demikian $(x^* = (1,0),\ y^* = (0,1))$ pasangan maksimin.

Akan diperlihatkan bahwa $x^* = (1,0)$ dan $y^* = (0,1)$ adalah bukan pasangan keseimbangan.

Dari matriks $\mathbb{A}$ dan $\mathbb{B}^t$ diperoleh

$$E_I(x,y) = x_1(1)y_1 + x_1(10)y_2 + x_2(0)y_1 + x_2(0)y_2$$
$$= x_1y_1 + 10\,x_1y_2$$

$$E_{II}(x,y) = y_1(10)x_1 + y_1(-10)x_2 + y_2(1)x_1 + y_2(-9)x_2$$
$$= 10y_1x_1 - 10y_1x_2 + y_2x_1 - 9y_2x_2$$

sehingga $\forall x \in X,\ y \in Y$ diperoleh

$$E_I(x,y^*) = x_1(0) + 10x_1(1) = 10x_1$$

$$E_I(x^*,y^*) = (1)(0) + 10(1)(1) = 10$$

$$E_{II}(x^*,y) = 10y_1(1) - 10y_1(0) + y_2(1) - 9y_2(0)$$
$$= 10y_1 + y_2$$

$$E_{II}(x^*,y^*) = 10(0)(1) - 10(0)(0) + (1)(1) - 9(1)(0) = 1$$

Dapat dilihat bahwa

$$E_I(x,y^*) = 10x_1 \le 10 = E_I(x^*,y^*)$$

dan

$$E_{II}(x^*,y^*) = 1 \le 10y_1 + y_2 = E_{II}(x^*,y)$$

Jadi $(x^* = 1,0),\ y^* = (0,1)$ adalah bukan pasangan keseimbangan.

b) Misal diambil $x^* = (1,0)$, $y^* = (1,0)$

Dengan demikian $\forall x \in X,\ y \in Y$ diperoleh

$$E_I(x,y^*) = x_1(1)+10x_1(0) = x_1$$

$$E_I(x^*,y^*) = (1)(1)+10(1)(0) = 1$$

$$E_{II}(x^*,y) = 10y_1(1)-10y_1(0)+y_2(1)-9y_2(0)$$

$$= 10\ y_1+y_2$$

$$E_{II}(x^*,y^*) = 10(1)(1)-10(1)(0)+(0)(1)-9(0)(0) = 10.$$

Dapat dilihat bahwa

$$E_I(x,y^*) = x_1 \le 1 = E_I\ (x^*,y^*)$$

dan

$$E_{II}(x^*,y) = 10\ y_1+y_2 \le 10 = E_{II}(x^*,y^*)\ .$$

Jadi $(x^*=(1,0),\ \ y^*=(1,0))$ adalah pasangan keseimbangan.

Di sini dapat dilihat bahwa pasangan maksimin adalah tidak sama dengan pasangan keseimbangan.

Contoh 4.2 :

Diberikan matriks pembayaran

$$\begin{bmatrix} (0,1) & (10,-1) \\ (-1,10) & (2,2) \end{bmatrix}$$

Akan diperlihatkan bahwa pasangan maksimin adalah sama dengan pasangan keseimbangan.

Dari matriks pembayaran di atas diperoleh 2 buah matriks yaitu :

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 0 & 10 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \text{ dan } \mathbb{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 10 & 2 \end{bmatrix}$$

Matriks pembayaran untuk P_1 dan P_2 adalah

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 0 & 10 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \text{ dan } \mathbb{B}^t = \begin{bmatrix} 1 & 10 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Karena kedua matriks tersebut mempunyai titik pelana maka dengan menggunakan kriteria maksimin diperoleh

$x^* = (1,0)$, $E_I = 0$

$y^* = (1,0)$, $E_{II} = 1$.

Jadi $(x^*=(1,0),\ y^*=(1,0))$ adalah pasangan maksimin untuk permainan ini dengan nilai maksimin untuk P_1 adalah $E_I = 0$ dan nilai maksimin untuk P_2 adalah $E_{II} = 1$.

Diketahui $E_I(x,y) = x_1(0)y_1 + x_1(10)y_2 + x_2(-1)y_1 + x_2(2)y_2$

$= 10x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2$

$E_{II}(x,y) = y_1(1)x_1 + y_1(10)x_2 + y_2(-1)x_1 + y_2(2)x_2$

$= y_1x_1 + 10y_1x_2 - y_2x_1 + 2y_2x_2$

Dengan demikian $\forall x \varepsilon X$, $y \varepsilon Y$ diperoleh

$E_I\ (x,y^*) = 10x_1(0) - x_2(1) + x_2(0) = -x_2$

$E_I(x^*,y^*) = 10(1)(0) - (0)(1) + 2(0)(0) = 0$

$E_{II}(x^*,y) = y_1(1) + 10y_1(0) - y_2(1) + 2y_2(0)$

$= y_1 - y_2$

$E_{II}(x^*,y^*) = (1)(1) + 10(1)(0) - (0)(1) + 2(0)(0)$

$= 1$

Terlihat bahwa

$E_I(x,y^*) = -x_2 \le 0 = E_I(x^*,y^*)$

dan

$E_{II}(x^*,y) = y_1 - y_2 \le 1 = E_{II}(x^*,y^*)$

sehingga $(x^*=(1,0), y^*=(1,0))$ adalah suatu pasangan keseimbangan.

Jadi dalam permainan ini suatu pasangan maksimin adalah sama dengan pasangan keseimbangan.

4.1.2 Teorema Nash dan Sketsa Pembuktiannya

Teorema 4.1 (Teorema Titik Tetap Brouwer /Brouwer Fixed Point Theorem) :

Bila f suatu fungsi yang memetakan titik-titik pada himpunan S yang tertutup, terbatas dan konveks dalam ruang Euclides ke dalam himpunan S dan bila f adalah fungsi kontinu maka sekurang-kurangnya ada satu titik dalam S yang dipetakan ke dirinya sendiri (titik tetap).

Bukti untuk teorema ini dapat dilihat pada buku "Some Topics in Two Person Games" yang ditulis oleh T.Parthasarathy dan T.E.S. Raghavan, 1977.

Teorema 4.2 (Teorema Nash) :

Sebarang permainan untuk dua pihak (berjumlah nol atau tidak berjumlah nol) dengan sejumlah strategi yang berhingga mempunyai sekurang-kurangnya satu pasangan keseimbangan.

Dengan menggunakan teorema Titik Tetap Brouwer, akan diberikan sketsa untuk pembuktian teorema Nash.

Bukti :

Diberikan $S = \{(\mathbf{x},\mathbf{y}) | \mathbf{x} \varepsilon X, \mathbf{y} \varepsilon Y\}$ adalah himpunan semua pasangan-pasangan vektor strategi yang mungkin. Karena X dan Y adalah himpunan vektor strategi yang berhingga, dalam hal ini S adalah tertutup dan terbatas (dari teori analisis Real). Himpunan S juga merupakan himpunan yang konveks.

Misal $E_I(I_i,y)$ adalah nilai harapan untuk P_1 bila P_1 menggunakan strategi murni i.

$E_{II}(x,II_j)$ adalah nilai harapan untuk P_2 bila P_2 menggunakan strategi murni j.

Didefinisikan $(\forall x \in X, y \in Y)$ berlaku

$$c_i(x,y) = \text{maks}\ \{0, E_I(I_i,y) - E_I(x,y)\},\ 1 \le i \le m$$

$$d_j(x,y) = \text{maks}\ \{0, E_{II}(x,II_j) - E_{II}(x,y)\}, 1 \le j \le n$$

Diberikan fungsi f yang memetakan titik-titik pada himpunan S ke dalam himpunan S dengan

$$f(x,y) = (x',y') \quad \text{dengan}$$

$$x_i' = \frac{x_i + c_i(x,y)}{1 + \sum_i c_i(x,y)} \quad , 1 \le i \le m$$

$$y_j' = \frac{y_j + d_j(x,y)}{1 + \sum_j d_j(x,y)} \quad , 1 \le j \le n$$

Fungsi f adalah suatu fungsi yang kontinu karena apabila diambil sebarang $x \in X, y \in Y$ dengan perubahan kecil dalam x dan y, akan menyebabkan perubahan kecil dalam x' dan y', maka akan diperoleh $f(x,y) = (x',y')$. Dengan demikian menurut teorema Titik Tetap Brouwer ada suatu titik tetap (x^*,y^*) dengan

$$f(x^*,y^*) = (x^*,y^*) \qquad \ldots(4.1)$$

Di sini tidak mungkin terjadi bahwa

$$(\forall\ i,\ 1 \le i \le m) \quad (E_I(I_i,y^*) > E_I(x^*,y^*))$$

yang terjadi adalah

$$E_I(x^*,y^*) = \sum_i x_i^* E_I(x^*,y^*) \ge \sum_i x_i^*\ E_I(I_i,y^*)$$
$$= E_I(I_i,y^*)$$

Jadi untuk suatu i dipunyai

$$c_i(\mathbf{x}^*,\mathbf{y}^*) = 0$$

Dari (4.1) diperoleh

$$x_i^* = \frac{x_i^* + c_i(\mathbf{x}^*,\mathbf{y}^*)}{1 + \sum_i c_i(\mathbf{x}^*,\mathbf{y}^*)} \qquad \text{...(4.2)}$$

dan untuk i dengan $c_i(\mathbf{x}^*,\mathbf{y}^*) = 0$ maka dalam bentuk (4.2) di atas $\sum_i c_i(\mathbf{x}^*,\mathbf{y}^*) = 0$

Jadi $\forall i$, $1 \le i \le m$, $c_i(\mathbf{x}^*,\mathbf{y}^*) = 0$ berlaku

$$E_I(\mathbf{x}^*,\mathbf{y}^*) \ge E_I(I_i,\mathbf{y}^*)$$

sehingga dari sini diperoleh

$$(\forall \mathbf{x} \in X)(E_I(\mathbf{x}^*,\mathbf{y}^*) \ge E_I(I_i,\mathbf{y}^*)) \qquad \text{...(4.3)}$$

Demikian juga untuk $\forall j$, $1 \le j \le n$ tidak mungkin terjadi bahwa

$$(\forall j, 1 \le j \le m)\ (E_{II}(\mathbf{x},II_j) > E_{II}(\mathbf{x}^*,\mathbf{y}^*))$$

yang terjadi adalah

$$E_{II}(\mathbf{x}^*,\mathbf{y}^*) = \sum_j y_j E_{II}(\mathbf{x}^*,\mathbf{y}^*) \ge \sum_j y_j^* E_{II}(\mathbf{x},II_j)$$
$$= E_{II}(\mathbf{x}^*,II_j)$$

Jadi untuk suatu j,

$$d_j(\mathbf{x}^*,\mathbf{y}^*) = 0 .$$

Dari (4.1) diperoleh

$$y_j^* = \frac{y_j^* + d_j(\mathbf{x}^*,\mathbf{y}^*)}{1 + \sum_j d_j(\mathbf{x}^*,\mathbf{y}^*)} \qquad \text{...(4.4)}$$

dan untuk j dengan $d_j(\mathbf{x}^*,\mathbf{y}^*) = 0$ maka dalam bentuk (4.4) di atas $\sum_j d_j(\mathbf{x}^*,\mathbf{y}^*) = 0$.

Jadi $\forall j$, $1 \le j \le n$, $d_j(\mathbf{x}^*,\mathbf{y}^*) = 0$ berlaku

$$E_{II}(\mathbf{x}^*,\mathbf{y}^*) \ge E_{II}(\mathbf{x}^*,II_j)$$

sehingga dari sini diperoleh

$$(\forall y \varepsilon Y)\ (E_{II}(x^*,y^*) \geq E_{II}(x^*,II_j)) \quad \ldots(4.5)$$

Dari (4.3) dan (4.5) diperoleh

$$E_I(x,y^*) \leq E_I(x^*,y^*) \quad \text{dan}$$

$$E_{II}(x^*,y) \leq E_{II}(x^*,y^*)$$

Dengan demikian berdasarkan definisi pasangan keseimbangan untuk permainan tidak berjumlah nol maka (x^*,y^*) adalah suatu pasangan keseimbangan.

###

4.1.3 Menemukan Pasangan Keseimbangan Untuk Permainan 2x2

Untuk menentukan pasangan keseimbangan dalam permainan 2x2 dapat dengan menggunakan metode grafik. Diketahui matriks pembayaran untuk P_1 dan P_2 adalah

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \text{dan } \mathbb{B}^t = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix}$$

dengan strategi untuk P_1 adalah $x = (x,1-x) \varepsilon X$ dan strategi untuk P_2 adalah $y = (y,1-y) \varepsilon Y$.

Nilai harapan untuk P_1 adalah

$$E_I(x,y) = x(a_{11}y+a_{12}(1-y))+(1-x)(a_{21}y+a_{22}(1-y)) \quad \ldots(4.6)$$

Apabila (x^*,y^*) adalah pasangan keseimbangan maka

$$E_I(x^*,y^*) \geq E_I(x,y^*)$$

Dengan demikian untuk y tertentu maka dari persamaan (4.6) dapat ditentukan x yang memaksimalkan $E_I(x,y)$ dan bila y adalah suatu bagian dari pasangan keseimbangan maka dapat ditentukan x yang juga pasti merupakan bagian dari pasangan keseimbangan. Kemudian, karena persamaan (4.6) adalah persamaan dalam 2 variabel (yaitu x dan y) maka persamaan tersebut dapat diselesaikan secara grafik dengan x sebagai sumbu mendatar, y sebagai sumbu tegak dan $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$

Selanjutnya dapat dilihat nilai harapan untuk P_2 yaitu

$$E_{II}(x,y)=y(b_{11}x+b_{21}(1-x))+(1-y)(b_{12}x+b_{22}(1-x)) \qquad \ldots(4.7)$$

Apabila (x^*,y^*) adalah pasangan keseimbangan maka

$$E_{II}(x^*,y^*) \geq E_{II}(x^*,y)$$

Dengan demikian untuk x tertentu maka dari persamaan (4.7) dapat ditemukan y yang memaksimalkan $E_{II}(x,y)$ dan bila x adalah bagian dari pasangan keseimbangan maka dapat ditentukan y yang juga pasti merupakan bagian dari pasangan keseimbangan. Kemudian, karena persamaan (4.7) adalah persamaan dalam 2 variabel maka persamaan tersebut dapat diselesaikan menggunakan grafik dengan x sebagai sumbu mendatar, y sebagai sumbu tegak dan $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$.

Dari (4.6) diperoleh vektor strategi x yang memaksimalkan $E_I(x,y^*)$ sedemikian sehingga $E_I(x^*,y^*) \geq E_I(x,y^*)$ dan dari (4.7) diperoleh vektor strategi y yang memaksimalkan $E_{II}(x^*,y)$ sehingga $E_{II}(x^*,y^*) \geq E_{II}(x^*,y)$. Dengan demikian berdasarkan definisi pasangan keseimbangan maka pasangan keseimbangan untuk permainan 2x2 ini adalah titik-titik potong antara grafik dari (4.6) dan (4.7). Selanjutnya apabila diperhatikan bahwa gabungan grafik antara (4.6) dan (4.7) terlihat sebagai suatu swastika sehingga metode ini disebut juga **metode swastika**.

Contoh 4.3 :

Diberikan matriks pembayaran

$$\begin{bmatrix} (0,1) & (1,0) \\ (1,0) & (0,1) \end{bmatrix}$$

Akan dicari pasangan keseimbangan untuk permainan.

a) Diketahui matriks pembayaran untuk P_1 adalah

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

dengan $E_I(x,y) = x((0)y + (1)(1-y)) + (1-x)((1)y + (0)(1-y))$

$$= x(1-y)+(1-x)y$$

$$= x(1-2y) + y \qquad \ldots(4.8)$$

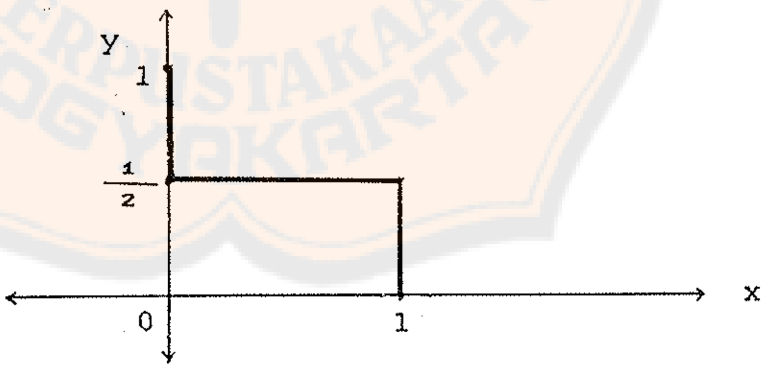
Dari persamaan (4.8) diperoleh

bila $y < \frac{1}{2}$ maka $E_I(x,y)$ dimaksimalkan oleh $x = 1$

bila $y = \frac{1}{2}$ maka $E_I(x,y)$ dimaksimalkan oleh $0 \le x \le 1$

bila $y > \frac{1}{2}$ maka $E_I(x,y)$ dimaksimalkan oleh $x = 0$

Grafik :



Gambar 4.1

Matriks pembayaran untuk P_2 adalah

$$\mathbb{B}^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

dengan $E_{II}(x,y) = x((1)y \ +(0)(1-y))+$

$(1-x)((0)y+(1)(1-y))$

$= xy+(1-x)(1-y)$

$= y(2x-1)+1-x \qquad \ldots(4.9)$

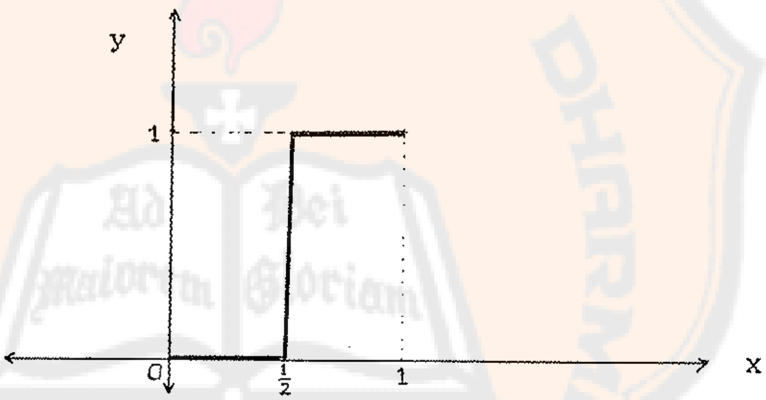
Dari persamaan (4.9) diperoleh

bila $x < \frac{1}{2}$ maka $E_{II}(x,y)$ dimaksimalkan oleh $y=0$

bila $x = \frac{1}{2}$ maka $E_{II}(x,y)$ dimaksimalkan oleh $0 \le y \le 1$

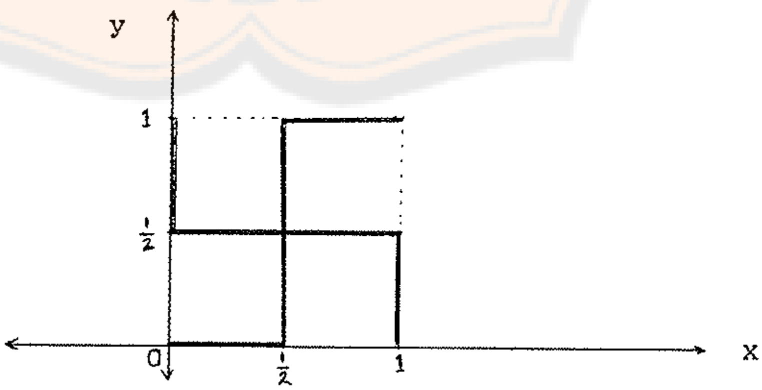
bila $x > \frac{1}{2}$ maka $E_{II}(x,y)$ dimaksimalkan oleh $y=1$

Grafik :



Gambar 4.2

Kemudian pasangan keseimbangan diperoleh dari perpotongan grafik pada Gambar 4.1 dan Gambar 4.2, yaitu :



Gambar 4.3

Terlihat bahwa titik potong kedua grafik tersebut adalah $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ dengan $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{2}$.

Jadi $(x^* = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), y^* = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}))$ adalah pasangan keseimbangan.

b) Akan diperlihatkan bahwa (x^*, y^*) adalah pasangan keseimbangan dengan $x^* = (\frac{1}{2},\frac{1}{2})$, $y^* = (\frac{1}{2},\frac{1}{2})$

Di sini $(\forall x \in X,\ y \in Y)$ diperoleh

$$E_I(x,y^*) = x(1-2.\tfrac{1}{2}) + \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2}$$

$$E_I(x^*,y^*) = \tfrac{1}{2}(1-2.\tfrac{1}{2}) + \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2}$$

$$E_{II}(x^*,y) = y(2.\tfrac{1}{2} - 1) + 1- \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2}$$

$$E_{II}(x^*,y^*) = \tfrac{1}{2}\ (2.\tfrac{1}{2} - 1) + 1 - \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2}$$

Terlihat bahwa

$$E_I(x,y^*) = E_I(x^*,y^*) \quad \text{dan} \quad E_{II}(x^*,y) = E_{II}(x^*,y^*) \qquad \ldots(4.10)$$

Ternyata bentuk (4.10) memenuhi definisi pasangan keseimbangan. Jadi $(x^* = (\frac{1}{2},\frac{1}{2}), y^* = (\frac{1}{2},\frac{1}{2}))$ adalah pasangan keseimbangan.

Contoh 4.4 :

Diberikan matriks pembayaran untuk permainan tidak berjumlah nol

$$\begin{bmatrix} (3,2) & (2,1) \\ (0,3) & (4,4) \end{bmatrix}$$

Akan dicari pasangan keseimbangan untuk permainan ini dan nilai permainan untuk setiap pasangan keseimbangan

Matriks pembayaran untuk P_1 adalah

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

dengan $E_I(x,y)=x((3)y+(2)(1-y))+(1-x)((0)y+(4)(1-y))$

$= x(3y+2-2y)+(1-x)(4-4y)$

$= x(5y-2) + 4 - 4y$ ...(4.11)

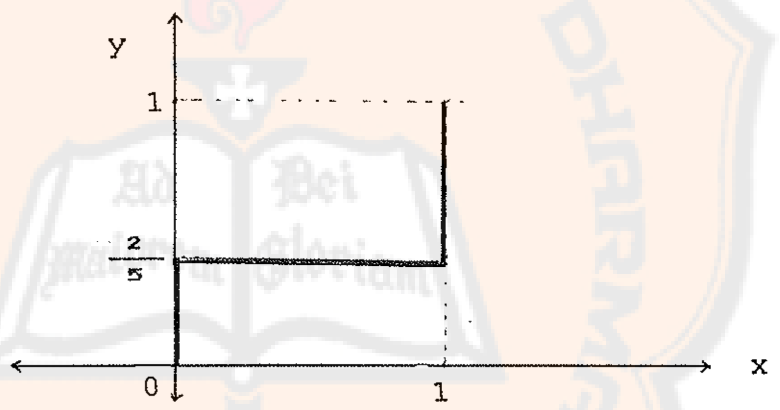
Dari persamaan (4.11) diperoleh

bila $y < \frac{2}{5}$ maka $E_I(x,y)$ dimaksimalkan oleh $x = 0$

bila $y = \frac{2}{5}$ maka $E_I(x,y)$ dimaksimalkan oleh $0 \le x \le 1$

bila $y > \frac{2}{5}$ maka $E_I(x,y)$ dimaksimalkan oleh $x = 1$

Grafik :



Gambar 4.4

Matriks pembayaran untuk P_2 adalah

$$\mathbb{B}^t = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

dengan $E_{II}(x,y)= y((2)x + (3)(1-x)) + (1-y)((1)x +$

$(4)(1-x))$

$= y(2x+3-3x)+(1-y)(x+4-4x)$

$= y(2x-1)+4-3x$ ...(4.12)

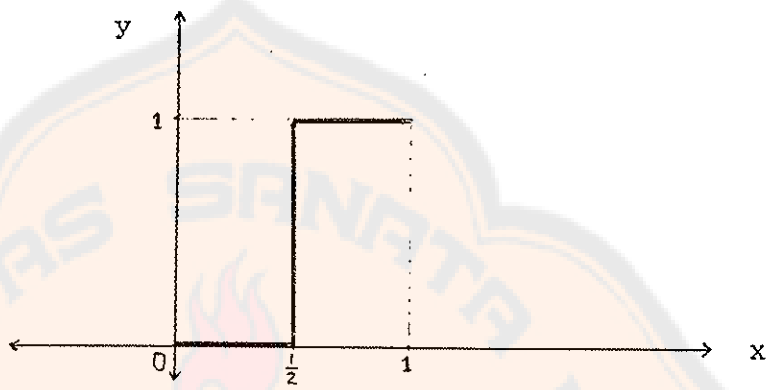
Dari persamaan (4.12) diperoleh

bila $x < \frac{1}{2}$ maka $E_{II}(x,y)$ dimaksimalkan oleh $y = 0$

bila $x = \frac{1}{2}$ maka $E_{II}(x,y)$ dimaksimalkan oleh $0 \le y \le 1$

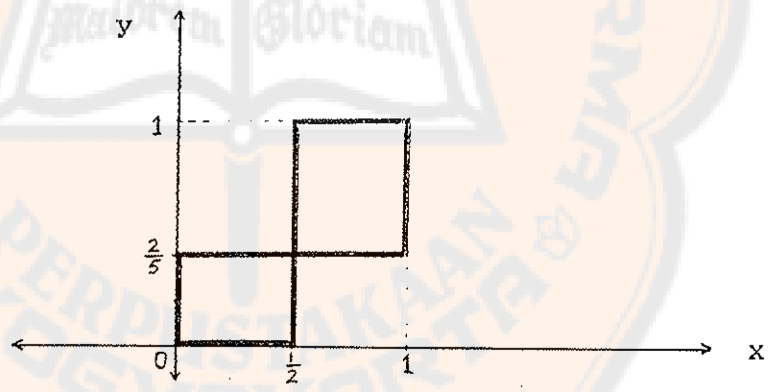
bila $x > \frac{1}{2}$ maka $E_{II}(x,y)$ dimaksimalkan oleh $y = 1$

Grafik :



Gambar 4.5

Pasangan keseimbangan terletak pada perpotongan grafik dari Gambar 4.4 dan Gambar 4.5.



Gambar 4.6

Dari Gambar 4.6 diperoleh 3 buah titik potong yaitu A(0,0), B $(\frac{1}{2},\frac{2}{5})$ dan C (1,1). Sehingga pasangan keseimbangan dan nilai permainan untuk permainan ini adalah

1. $(x_1^* = (0,1),\ y_1^* = (0,1))$ dengan nilai permainan

   $E_I(x_1^*,y_1^*) = 4$ dan $E_{II}(x_1^*,y_1^*) = 4$

2. ($x_2^* = (\frac{1}{2},\frac{1}{2})$, $y_2^* = (\frac{2}{5},\frac{3}{5})$) dengan nilai permainan $E_I(x_2^*,y_2^*) = 2,4$ dan $E_{II}(x_2^*,y_2^*) = 2,5$
3. ($x_3^* = (1,0)$, $y_3^* = (1,0)$) dengan nilai permainan $E_I(x_3^*,y_3^*) = 3$ dan $E_{II}(x_3^*,y_3^*) = 2$.

Karena ada 3 buah pasangan keseimbangan dengan nilai permainan yang berbeda-beda maka setiap pemain akan cenderung memilih pasangan keseimbangan dengan nilai permainan yang besar. Dengan demikian P_1 dan P_2 akan memilih pasangan strategi ($x_1^* = (0,1)$, $y_1^* = (0,1)$) dengan nilai permainan $E_I(x_1^*,y_1^*) = 4$, $E_{II}(x_1^*,y_1^*) = 4$.

Contoh 4.5 :

Dilema Napi

Dua orang napi (yang tertangkap karena melakukan pencurian) diinterogasi secara terpisah oleh polisi. Mereka hanya mempunyai dua pilihan : mengaku atau tutup mulut. Apabila keduanya mengaku, mereka akan dihukum 9 tahun dalam penjara. Sebaliknya bila tutup mulut mereka akan dihukum 1 tahun. Seandainya salah satu dari mereka mengaku maka napi yang mengaku akan bebas dan yang lain dihukum 10 tahun.

Penulisan pembayaran untuk n tahun dalam penjara adalah -n , maka matriks pembayarannya adalah

$$\begin{array}{ll} & \begin{array}{cc} \text{mengaku} & \text{tutup mulut} \end{array} \\ \begin{array}{l} \text{mengaku} \\ \text{tutup mulut} \end{array} & \begin{bmatrix} (-9,-9) & (0,-10) \\ (-10,0) & (-1,-1) \end{bmatrix} \end{array}$$

Penyelesaian mana yang terbaik untuk dilema ini ?

Sebelum menjawab penyelesaian mana yang terbaik, akan dicari dahulu pasangan maksimin dan pasangan keseimbangan.

Matriks pembayaran untuk setiap napi adalah

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} -9 & 0 \\ -10 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{dan} \quad \mathbb{B}^t = \begin{pmatrix} -9 & 0 \\ -10 & -1 \end{pmatrix}$$

dengan $E_I(x,y) = x-9y-1$ dan $E_{II}(x,y) = y-9x-1$.

Karena kolom 2 dari matriks dapat dihapus. Kemudian baris 2 didominasi oleh baris 1 maka baris 2 dapat dihapus. Dari sini diperoleh bahwa $(x^*=(1,0),\ y^*=(1,0))$ adalah pasangan maksimin dengan nilai maksiminnya $E_I(x^*,y^*) = -9$, $E_{II}(x^*,y^*) = -9$.

Selanjutnya untuk setiap $x \varepsilon X$ diperoleh

$$E_I(x,y^*) = x - 9(1) - 1 = x - 10 .$$

Mengingat $0 \le x \le 1$ maka $x - 10 \le -9$. Kemudian untuk setiap $y \varepsilon Y$ diperoleh

$$E_{II}(x^*,y) = y - 9(1) - 1 = y - 10$$

dan mengingat $0 \le y \le 1$ maka $y - 10 \le -9$.

Dengan demikian

$$(\forall x \varepsilon X, y \varepsilon Y) \begin{Bmatrix} E_I(x,y^*) \le E_I(x^*,y^*) \text{ dan} \\ E_{II}(x^*,y) \le E_{II}(x^*,y^*) \end{Bmatrix}$$

Jadi $(x^* = (1,0),\ y^* = (1,0))$ adalah pasangan keseimbangan.

Ini berarti bahwa pasangan terbaik untuk kedua napi tersebut adalah mengaku dan mereka akan dihukum masing-masing selama 9 tahun. Walaupun begitu hal ini bukan suatu penyelesaian yang menyenangkan karena misalkan keduanya tutup mulut maka mereka hanya dihukum 1 tahun.

Dilema ini merupakan suatu konflik antara pertimbangan individu yang memaksa seseorang akan mengaku atau pertimbangan kesetia-kawanan yaitu untuk tutup mulut. Di sini jelas ada keterkaitan psikologis dalam permainan.

4.2 Permainan dengan Kerjasama

Dalam permainan tidak berjumlah nol apabila setiap pemain diijinkan saling mengadakan kerjasama maka permainan ini disebut permainan dengan kerjasama. Apabila (u,v) adalah pembayaran untuk P_1 dan P_2 maka setiap pasangan pembayaran (u,v) dapat digambarkan dalam bidang koordinat dengan u sebagai sumbu mendatar dan v sebagai sumbu tegak. Kemudian dari sini nanti akan diperoleh suatu daerah konveks *K* yang disusun dengan kombinasi konveks yang kemudian disebut dengan daerah pembayaran untuk permainan ini.

4.2.1 Himpunan Tawar-menawar (*Bargaining or Negotiation Set*)

Definisi 4.2 :

Suatu pasangan pembayaran (u,v) dalam permainan dengan kerjasama disebut **didominasi secara bersama-sama** (*jointly dominated*) oleh (u′,v′) bila $u' \geq u$, $v' \geq v$ dan $(u',v') \neq (u,v)$.

Definisi 4.3 :

Suatu pasangan pembayaran (u,v) adalah **optimal**

Pareto bila (u,v) tidak didominasi secara bersama-sama.

Apabila P_1 dan P_2 tidak mengadakan kerjasama dengan $E_I(x,y)$ dan $E_{II}(x,y)$ melambangkan nilai harapan untuk P_1 dan P_2. Selanjutnya didefinisikan

$$t_I = \underset{x\in X}{\text{maks}}\ \underset{y\in Y}{\min}\ E_I(x,y) \text{ dan } t_{II} = \underset{y\in Y}{\text{maks}}\ \underset{x\in X}{\min}\ E_{II}(x,y)$$

adalah nilai maksimin apabila P_1 dan P_2 menggunakan strategi maksiminnya, maka dalam masalah tawar-menawar ini pembayaran untuk P_1 sekurang-kurangnya t_I dan untuk P_2 sekurang-kurangnya t_{II}.

Definisi 4.4 :

Himpunan tawar-menawar B adalah

$$B = \{(u,v) \mid u \geq t_I,\ v \geq t_{II},\ (u,v) \text{ optimal Pareto dalam } K\}$$

Von Neumann dan Morgenstern (1944) mengatakan bahwa sebarang penyelesaian untuk permainan dengan kerjasama harus merupakan bagian dari himpunan tawar-menawar B.

Contoh 4.6 :

Diberikan matriks pembayaran

$$\begin{pmatrix} (0,5) & (-1,1) \\ (1,-1) & (5,0) \end{pmatrix}$$

Akan ditentukan himpunan tawar-menawar B.

Misalkan setiap pemain tidak mengadakan kerjasama maka matriks pembayaran untuk P_1 dan P_2 adalah

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{dan} \quad \mathbb{B}^t = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

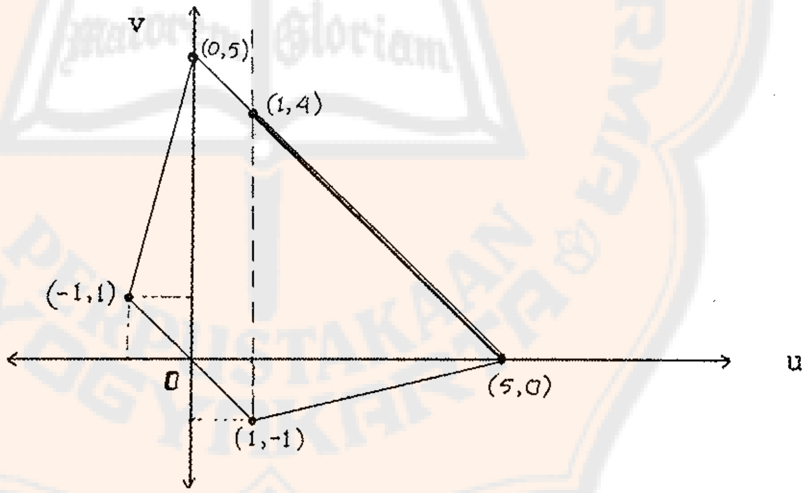
Karena matriks $\mathbb{A}$ dan $\mathbb{B}^t$ mempunyai titik pelana maka dengan menggunakan kriteria maksimin diperoleh

$E_I(x,y) = 1$ dan $E_{II}(x,y) = 0$

Hal ini berarti $t_I = 1$ dan $t_{II} = 0$ ...(4.13)

Dari matriks pembayaran di atas dapat dilihat bahwa pasangan pembayaran (-1,1) didominasi secara bersama-sama oleh (0,5) dan (1,-1) didominasi secara bersama-sama oleh (5,0), sedangkan (0,5) dan (5,0) tidak didominasi secara bersama-sama oleh pasangan yang manapun, sehingga (0,5) dan (5,0) adalah optimal Pareto ...(4.14)

Untuk mencari himpunan tawar-menawar B maka setiap pasangan pembayaran (u,v) digambarkan dalam bidang koordinat.



Gambar 4.7

Karena $B = \{(u,v) | u \geq t_I, v \geq t_{II}, (u,v)$ optimal Pareto dalam $K\}$ maka dari (4.13) dan (4.14) diperoleh

$u \geq 1$, $v \geq 0$,

(0,5) dan (5,0) adalah optimal Pareto dalam K.

Dengan demikian himpunan tawar-menawar B merupakan suatu ruas garis yang menghubungkan titik (1,4) dan (5,0) dengan $1 \leq u \leq 5$.

4.2.2 Aksioma-aksioma Nash Untuk Tawar-menawar

Nash (1950) mengatakan bahwa daerah pembayaran dengan strategi-strategi yang berhingga adalah tertutup, terbatas dan konveks. Diketahui P adalah himpunan pasangan pembayaran yang tertutup, terbatas dan konveks, maka ada $(u_o,v_o) \varepsilon P$ yang merupakan suatu pembayaran minimal bila setiap pemain saling kerjasama.

Titik $(u_o,v_o) \varepsilon P$ ini disebut **titik batas** (*status quo point*).

Didefinisikan

ψ adalah prosedur penengah (*arbitration procedure*) apabila ψ memetakan (u_o,v_o) dan P ke suatu titik $(u^*,v^*) \varepsilon P$, yaitu

$$\psi\ ((u_o,v_o),P) = (u^*,v^*)\ .$$

dengan (u^*,v^*) adalah penyelesaian permainan.

Aksioma-aksioma Nash :

1. Pertimbangan Individu (*Individual rationality*)

   $u^* \geq u_o,\ v^* \geq v_o$

2. Kelayakan (*Feasibility*)

   $(u^*,v^*) \varepsilon P$

3. Optimalitas Pareto (*Pareto optimality*)

   Bila $(u,v) \varepsilon P$, $u \geq u^*$ dan $v \geq v^*$ maka $u=u^*$, $v=v^*$

4. Bebas dari kemungkinan-kemungkinan yang tidak terkait (*Independence of irrelevant alternatives*)

Bila $(u^*,v^*) \varepsilon P_1 \subset P_2$ dan $\psi((u_o,v_o),P_2) = (u^*,v^*)$ maka $\psi((u_o,v_o),P_1) = (u^*,v^*)$

5. Tak terpengaruh oleh transformasi linear (*Invariance under linear transformations*)

   Diberikan P′ yang ditentukan dari P dengan transformasi

   $$u' = au+b,\ v' = cv + d\ ,\quad a,c > 0$$

   bila $\psi((u_o,v_o),P) = (u^*,v^*)$ maka

   $$\psi((au_o + b,\ cv_o + d),\ P') = (au^*+b,\ cv^*+d)$$

6. Simetri (*Symmetry*)

   Bila P adalah simetrik sedemikian sehingga

   i> $(u,v) \varepsilon P \Longrightarrow (v,u) \varepsilon P$

   ii> $u_o = v_o$

   iii> $\psi((u_o,v_o),P) = (u^*,v^*)$

   maka $u^* = v^*$.

Aksioma ke-1 menyatakan bahwa hasil dari penengah ini sekurang-kurangnya adalah titik batas. Aksioma ke-4 menyatakan bahwa bila (u^*,v^*) adalah penyelesaian untuk prosedur $((u_o,v_o),P_2)$ berarti bila $(u^*,v^*) \varepsilon P_1 \subset P_2$ maka (u^*,v^*) juga harus merupakan penyelesaian untuk prosedur $((u_o,v_o),P_1)$.

Didefinisikan fungsi kontinu f dengan

$$f(u,v) = (u-u_o)(v-v_o)$$

Lemma 4.1 :

Bila ada $(u,v)\varepsilon P$, $u > u_o$, $v > v_o$ maka $f(u,v)=(u-u_o)(v-v_o)$ selalu mempunyai maksimal di $(u,v)\varepsilon P$, $u > u_o$, $v > v_o$ dan maksimal tersebut adalah tunggal.

Bukti :

i> Akan dibuktikan bahwa $f(u,v)$ selalu mempunyai maksimal.

Diketahui bahwa P adalah himpunan yang tertutup dan terbatas. Dengan demikian apabila diambil suatu irisan tertutup dengan daerah $u \geq u_o$, $v \geq v_o$ maka irisan ini juga tertutup dan terbatas.

Karena f adalah suatu fungsi kontinu pada himpunan yang tertutup dan terbatas maka f mempunyai maksimal. Maksimal dari f ini adalah bernilai positif dan tidak akan terletak pada garis $u=u_o$ atau $v = v_o$ (karena pada kedua garis ini nilai f adalah nol). Jadi ada maksimal untuk f pada $(u,v) \in P$, $u>u_o$, $v>v_o$.

ii> Akan dibuktikan bahwa maksimal tersebut adalah tunggal.

Misalnya ada 2 titik yaitu (u_1,v_1) dan (u_2,v_2) yang membuat f maksimal dan diberikan $M > 0$ adalah nilai maksimal. Bila $u_1 = u_2$ maka $v_1 = v_2$.

Andaikan $u_1 < u_2$ (akibatnya $v_1 > v_2$).

Diambil $(u_3,v_3) = \frac{1}{2}(u_1,v_1) + \frac{1}{2}(u_2,v_2)$.

Oleh karena itu $u_3>u_o, v_3>v_o$ dan karena P adalah konveks maka $(u_3,v_3) \in P$.

Selanjutnya

$$f(u_3,v_3) = (\tfrac{1}{2}(u_1+u_2)-u_o)(\tfrac{1}{2}(v_1+v_2)-v_o)$$

$$f(u_3,v_3) = (\tfrac{1}{2}(u_1+u_2)-u_0)(\tfrac{1}{2}(v_1+v_2)-v_0)$$

$$= \frac{(u_1-u_0)+(u_2-u_0)}{2} \cdot \frac{(v_1-v_0)+(v_2-v_0)}{2}$$

$$= \frac{(u_1-u_0)(v_1-v_0)}{2} + \frac{(u_2-u_0)(v_2-v_0)}{2} + \frac{(u_2-u_1)(v_1-v_2)}{4}$$

$$= \tfrac{1}{2} f(u_1,v_1)+\tfrac{1}{2} f(u_2,v_2)+\frac{(u_2-u_1)(v_1-v_2)}{4}$$

$$= M + \frac{(u_2-u_1)(v_2-v_1)}{4} > M$$

Karena $u_1 < u_2$ dan $v_1 > v_2$ maka hal ini akan menyebabkan $f(u_3,v_3) > M$. Hal ini tidak mungkin karena nilai maksimal dari fungsi f adalah M , sehingga pengandaian salah. Jadi yang benar $u_1 = u_2$ dan $v_1 = v_2$.

Dengan cara yang sama, dapat diperlihatkan bahwa nilai maksimal dari fungsi f tidak mungkin terjadi bila $u_1 > u_2$ dan $v_1 < v_2$, tetapi $u_1 = u_2$ dan $v_1 = v_2$.

Ini berarti bahwa sifat ketunggalan telah terbukti.

###

Lemma 4.2 :

Diketahui $\psi((u_0,v_0),P) = (u^*,v^*)$.

Diberikan $h(u,v) = (v^*-v_0)\,u + (u^*-u_0)\,v$ sehingga

$(\forall(u,v)\in P)$ berlaku

$$h(u,v) \le h(u^*,v^*)$$

Bukti :

Andaikan $(u,v) \in P$ dengan $h(u,v) > h(u^*,v^*)$.

Karena h adalah linear maka

$$h(u-u^*,\ v-v^*) = (v^*-v_o)(u-u^*)+(u^*-u_o)(v-v^*)$$
$$= h\ (u,v)\ -\ h(u^*,v^*)$$
$$= \Delta > 0$$

Diberikan $0 < \theta < 1$ dan didefinisikan

$$(u',v') = \theta(u,v) + (1-\theta)(u^*,v^*)$$
$$= (u^*,v^*) + \theta\ (u-u^*,v-v^*) \quad \ldots(4.15)$$

Dengan menggunakan teorema Taylor, bila $f(u',v')$ dideretkan di sekitar titik (u^*,v^*) diperoleh

$$f(u',v') = f(u^*,v^*)+(u'-u^*)(v^*-v_o)+(v'-v^*)(u^*-u_o)$$
$$+ (u'-u^*)(v'-v^*) \quad \ldots(4.16)$$

Persamaan (4.15) dapat ditulis sebagai

$$(u',v') - (u^*,v^*) = \theta\ (u-u^*,v-v^*)$$
$$\Longleftrightarrow \quad (u'-u^*,v'-v^*) = (\ \theta(u-u^*),\ \theta(v-v^*)\ )$$
$$\ldots(4.17)$$

Dengan demikian apabila (4.17) disubstitusikan ke dalam (4.16) diperoleh

$$f(u',v') = f(u^*,v^*)+\theta(u-u^*)(v^*-v_o)+\theta(v-v^*)(u^*-u_o)$$
$$+ \theta(u-u^*)\ \ \theta(v-v^*)$$
$$= f(u^*,v^*)+\theta((u-u^*)(v^*-v_o)+(v-v^*)(u^*-u_o))$$
$$+\ \theta^2\ (u-u^*)(v-v^*)$$
$$= f(u^*,v^*) + \theta\ h(u-u^*,v-v^*)\ +$$
$$\theta^2(u-u^*)(v-v^*)$$
$$= f(u^*,v^*) + \theta\ \Delta + \theta^2(u-u^*)(v-v^*)$$

Dipilih θ, $0<\theta<1$, yang memenuhi $\theta|(u-u^*)(v-v^*)|<\Delta$, sehingga $\theta\ \Delta + \theta^2(u-u^*)(v-v^*) > 0$. Dengan demikian diperoleh

$$f(u',v') > f(u^*,v^*)$$

Hal ini bertentangan dengan pernyataan bahwa (u^*,v^*) adalah maksimal dari $f(u,v)$, sehingga

$$(\forall(u,v)\varepsilon P)\ (h(u,v) \le h(u^*,v^*))$$

###

Teorema 4.3 (Teorema Nash) :

Jika ada $(u,v)\varepsilon P$, $u > u_o$, $v > v_o$ dan maksimal untuk $f(u,v) = (u-u_o)(v-v_o)$ terjadi di titik (u^*,v^*), maka titik (u^*,v^*) adalah tunggal dan fungsi $\psi(u_o,v_o),P) = (u^*,v^*)$ adalah fungsi tunggal yang memenuhi aksioma-aksioma Nash.

Bukti :

i) Akan dibuktikan bahwa (u^*,v^*) adalah tunggal. (u^*,v^*) adalah titik tunggal yang memaksimalkan $f(u,v)$ dan keberadaannya dijamin oleh Lemma 4.1.

ii) Jelas bahwa (u^*,v^*) memenuhi aksioma 1 dan 2. Bila $u \ge u^*$ dan $v \ge v^*$ dengan $(u,v) \neq (u^*,v^*)$ maka $f(u,v) > f(u^*,v^*)$. Ini bertentangan dengan pernyataan bahwa maksimal $f(u,v)$ terjadi pada (u^*,v^*). Jadi $(u,v) = (u^*,v^*)$. Dengan demmikian aksioma 3 terpenuhi. Aksioma 4 juga dipenuhi , karena bila (u^*,v^*) memaksimalkan $f(u,v)$ pada $P_2 \cap \{(u,v)|u\ge u_o, v\ge v_o\}$ maka (u^*,v^*) juga memaksimalkan $f(u,v)$ pada $P_1 \cap \{(u,v)|u\ge u_o,v\ge v_o\}$ Menurut aksioma 5 apabila

$$u' = au + b,\ v' = cv + d \quad , a,c>0$$

maka

$$f'(u',v') = (u'-(au_o+b)(v'-(cv_o+d))$$
$$= ac\ f(u,v)$$

Di sini apabila (u^*,v^*) memaksimalkan $f(u,v)$ maka hal ini berakibat bahwa $(au^*+b,\ cv^*+d)$ memaksimalkan $f'(u',v')$.

Kemudian (u^*,v^*) juga memenuhi aksioma 6 karena jika $((u_o,v_o),P)$ simetrik seperti pengertian dalam aksioma 6, maka

$$u_o=v_o \quad \text{dan } (v^*,u^*) \in P \cap \{(u,v)|u\geq u_o, v\geq v_o\}$$

sehingga $f(v^*,u^*) = (v^*-u_o)(u^*-v_o)$
$$= (v^*-v_o)(u^*-u_o)$$
$$= f(u^*,v^*)$$

Karena (u^*,v^*) adalah titik tunggal yang memaksimalkan $f(u,v)$, maka hal ini berakibat bahwa $(v^*,u^*) = (u^*,v^*)$, yaitu $u^* = v^*$.

iii) Akan dibuktikan bahwa $\psi(u_o,v_o),P) = (u^*,v^*)$ adalah tunggal.

Telah dibuktikan bahwa $\psi((u_o,v_o),P) = (u^*,v^*)$ memenuhi aksioma-aksioma Nash. Perhatikan setengah bidang tertutup

$$H = \{(u,v)|\ h(u,v) \leq h(u^*,v^*)\}$$

dengan $h(u,v)$ seperti yang didefinisikan dalam Lemma 4.2. Dengan menggunakan Lemma 4.2 maka $P \subset H$.

Diberikan H' yang diperoleh dari H dengan transformasi linear.

$$u' = \frac{u - u_o}{u^*-u_o} \quad , \quad v' = \frac{v - v_o}{v^*-v_o} \qquad \ldots(4.18)$$

Jadi setengah bidang tertutup untuk H' adalah

$H' = \{(u',v') | u'+v' \leq 2\}$.

Karena $u^* > u_o$ dan $v^* > v_o$ maka transformasi (4.18) adalah suatu transformasi untuk bentuk yang ditentukan dalam aksioma 5.

Dengan menggunakan transformasi H --> H' dan

$$u_o \longrightarrow 0, \quad v_o \longrightarrow 0$$
$$u^* \longrightarrow 1, \quad v^* \longrightarrow 1 .$$

Perhatikan masalah tawar-menawar $((0,0),H')$. Karena H' adalah simetrik maka dengan menggunakan aksioma 6 penyelesaian pasti berada pada garis $u' = v'$. Selanjutnya dengan aksioma 3 diperoleh bahwa $(1,1)$ adalah penyelesaian tunggal untuk $((0,0), H')$.

Dengan menggunakan aksioma 5 dan invers dari transformasi (4.18) maka (u^*,v^*) adalah penyelesaian tunggal untuk $((u_o,v_o), H)$. Kemudian dengan menggunakan $P \subset H$ dan $(u^*,v^*) \in P$ maka (u^*,v^*) adalah penyelesaian tunggal untuk $((u_o,v_o),P)$.

Jadi $\psi((u_o,v_o),P) = (u^*,v^*)$ adalah tunggal.

Dengan demikian terbukti bahwa (u^*,v^*) adalah titik tunggal dan $\psi((u_o,v_o),P) = (u^*,v^*)$ merupakan fungsi tunggal yang memenuhi aksioma-aksioma Nash.

###

4.2.3 Penyelesaian Tawar-menawar Maksimin

Dalam permainan dengan kerjasama, daerah pembayaran merupakan daerah yang konveks. Oleh karena itu, untuk menentukan titik batas dapat digunakan model tawar-menawar Nash. Misal $u_o = t_I$, $v_o = t_{II}$ adalah nilai maksimin untuk P_1 dan P_2. Dengan menggambar grafik untuk setiap pasangan pembayaran (u,v) maka dapat ditentukan himpunan tawar-menawar B. Berdasarkan aksioma Nash yaitu aksioma 1,2 dan 3 maka penyelesaian arbitrasi harus dalam B. Hasil dari prosedur tawar-menawar Nash ini disebut **penyelesaian tawar-menawar maksimin** atau **penyelesaian Shapley**.

Contoh 4.7 :

Diketahui suatu permainan dengan matriks pembayaran

$$\begin{bmatrix} (1,2) & (8,3) \\ (4,4) & (2,1) \end{bmatrix}$$

Akan dicari penyelesaian tawar-menawar maksimin.

Matriks pembayaran untuk P_1 dan P_2 adalah

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad \mathbb{B}^t = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Karena matriks $\mathbb{A}$ dan $\mathbb{B}^t$ tidak mempunyai titik pelana maka untuk mencari t_I dan t_{II} menggunakan penyelesaian secara aljabar.

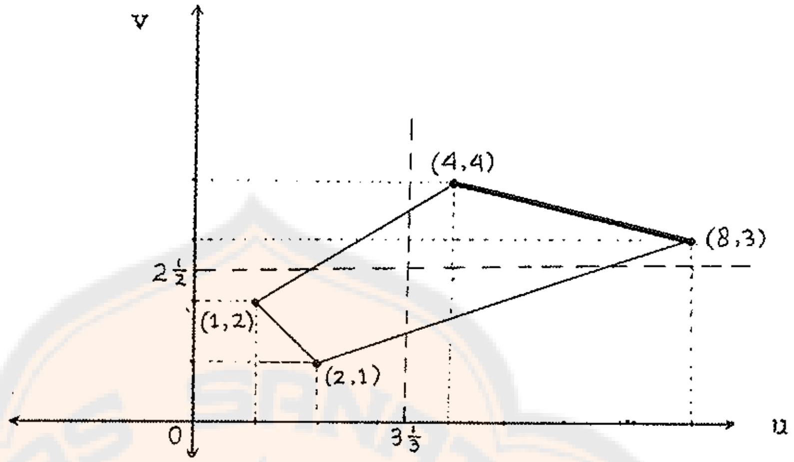
$$\text{Diperoleh } t_I = \frac{ad - bc}{a+d-b-c} = \frac{1.2-8.4}{1+2-8-4} = 3\tfrac{1}{3} \qquad \ldots(4.19)$$

$$t_{II} = \frac{ad - bc}{a+d-b-c} = \frac{2.1-4.3}{2+1-4-3} = 2\tfrac{1}{2} \qquad \ldots(4.20)$$

Dengan melihat matriks pembayaran di atas maka diperoleh (4,4) dan (8,3) adalah optimal Pareto .

...(4.21)

Grafik :



Gambar 4.8

Persamaan garis yang menghubungkan (4,4) dan (8,3) adalah

$$\frac{u-4}{8-4} = \frac{v-4}{3-4}$$

$$\Longleftrightarrow \quad u + 4v = 20 \qquad \ldots(4.22)$$

Dari (4.19), (4.20), (4.21), dan (4.22) maka himpunan tawar- menawar B yang memenuhi $\{(u,v)|u \geq t_I,\ v \geq t_{II},\ (u,v)$ optimal Pareto dalam K $\}$ adalah

$$B = \{(u,v)|\ u + 4v = 20\ ,\ 4 \leq u \leq 8\}$$

Diketahui bahwa $f(u,v) = (u-u_o)(v-v_o)$ akan dimaksimalkan untuk (u,v) dalam B , sehingga untuk contoh ini akan dimaksimalkan

$$f(u,v) = (u-3\tfrac{1}{3})\ (v-2\tfrac{1}{2})\ ,\ 4 \leq u \leq 8\ .$$

Apabila $v = 5 - \frac{1}{4}u$ disubstitusikan ke dalam f(u,v) maka diperoleh

$$g(u) = (u-3\tfrac{1}{3})\ (5 - \tfrac{u}{4} - 2\tfrac{1}{2})\ .$$

Pembuat maksimal g(u) dapat diperoleh dengan memberikan turunan pertama sama dengan nol sehingga

$$\frac{d}{du}\; g(u) = 0$$

$$\Longleftrightarrow\; 1.(5 - \frac{u}{4} - 2\frac{1}{2}) + (u - 3\frac{1}{3})(-\frac{1}{4}) = 0$$

$$\Longleftrightarrow\; \frac{1}{2}u = 5 - 2\frac{1}{2} + \frac{10}{12}$$

$$\Longleftrightarrow\; u = 6\frac{2}{3}$$

kemudian $u + 4v = 20$

$$\Longleftrightarrow\; 6\frac{2}{3} + 4v = 20$$

$$\Longleftrightarrow\; v = 3\frac{1}{3}$$

Jadi $(u^*, v^*) = (6\frac{2}{3}, 3\frac{1}{3})$ adalah penyelesaian tunggal untuk prosedur Nash. Hal ini berarti bahwa penyelesaian tawar-menawar maksimin adalah $(6\frac{2}{3}, 3\frac{1}{3})$.

Contoh 4.8 :

Diberikan matriks pembayaran sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} (1,4) & (-1,-4) \\ (-4,-1) & (4,1) \end{bmatrix}$$

Akan dicari penyelesian tawar-menawar maksimin.

Matriks pembayaran untuk P_1 dan P_2 adalah

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 4 \end{bmatrix} \text{ dan } \mathbb{B}^t = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriks $\mathbb{A}$ dan $\mathbb{B}^t$ tidak mempunyai titik pelana sehingga t_I dan t_{II} dicari dengan menggunakan penyelesaian secara aljabar. Oleh karena ada unsur-unsur dalam matriks yang tidak positif maka dibuat matriks pembayaran yang baru dengan dipilih

$$r = 1 - \min_{i,j} a_{ij} = 1 - (-4) = 5$$

Matriks pembayaran yang baru adalah

$$A_1 = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 1 & 9 \end{bmatrix} \text{ dan } B_1^t = \begin{bmatrix} 9 & 4 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$$

sehingga diperoleh

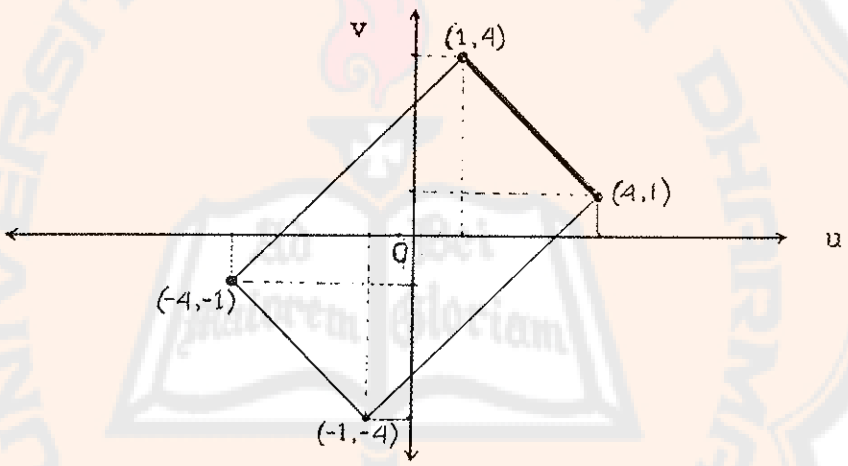
$$t_I = \frac{ad - bc}{a+d-b-c} - r = \frac{6.9-4.1}{6+9-4-1} - 5 = 0 \quad \ldots(4.23)$$

$$t_{II} = \frac{ad - bc}{a+d-b-c} - r = \frac{6.9-4.1}{6+9-4-1} - 5 = 0 \quad \ldots(4.24)$$

Dengan melihat matriks pembayaran di atas diperoleh bahwa (1,4) dan (4,1) adalah optimal Pareto

...(4.25)

Grafik :



Gambar 4.9

Persamaan garis yang menghubungkan (1,4) dan (4,1) adalah

$$\frac{u - 1}{4 - 1} = \frac{v - 4}{1 - 4}$$

$$\Longleftrightarrow \quad u + v = 5 \quad \ldots(4.26)$$

Dari (4.23), (4.24), (4.25) dan (4.26) diperoleh himpunan tawar-menawar B dengan

$$B = \{(u,v) | u + v = 5,\ 1 \le u \le 4\}$$

Dari Gambar 4.9 dapat dilihat bahwa daerah pembayarannya adalah simetri dan berdasarkan aksioma 6 maka penyelesaian (u^*, v^*) pasti $u^* = v^*$.

Dalam masalah ini (u,v) harus memenuhi

$$f(u,v) = (u-u_o)(v-v_o)$$

$$= (u-0)\ (v-0) \quad , \quad 1 \le u \le 4 \ .$$

Apabila $v = 5 - u$ disubstitusikan ke dalam $f(u,v)$ maka diperoleh

$$g(u) = (u-0)\ (5-u-0)$$

$$= 5u - u^2$$

Dengan demikian

$$\frac{d}{du}\ g(u) = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad 5 - 2u = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad u = 2\tfrac{1}{2}$$

dan $\quad u + v = 5$

$$\Longleftrightarrow \quad 2\tfrac{1}{2} + v = 5$$

$$v = 2\tfrac{1}{2}$$

Diperoleh bahwa $(u^*, v^*) = (2\frac{1}{2},\ 2\frac{1}{2})$ dan terlihat bahwa $u^* = v^* = 2\frac{1}{2}$. Jadi penyelesaian tawar-menawar maksimin adalah $(2\frac{1}{2},\ 2\frac{1}{2})$.

4.2.4 Penyelesaian Tawar-menawar dengan Ancaman

Nash (1950) mengusulkan mengubah titik batas dari nilai permainan menjadi beberapa hasil ancaman. Idenya adalah P_1 dan P_2 dengan bebas melakukan ancaman untuk memainkan vektor strategi $\mathbf{x}$ dan $\mathbf{y}$. Kemudian bila masing-masing mengetahui yang lain mengancam maka mereka kemudian berunding untuk menentukan pembayarannya. Namun apabila tidak setuju dengan hasil perundingan maka mereka akan memainkan ancamannya.

Apabila seorang pemain telah menetapkan ancamannya maka permainan ini dapat dipikirkan sebagai permainan tanpa kerjasama. Kemudian apabila P_1 meminta pembayaran sebesar u dan P_2 meminta sebesar v maka pembayarannya adalah

$$(u,v) \text{ apabila } (u,v) \in P$$

atau

$$(E_I(x,y),\ E_{II}(x,y) \text{ apabila } (u,v) \notin P$$

dengan P = himpunan pasangan pembayaran yang tertutup, terbatas dan konveks (lihat subbab 4.2.2)

$E_I(x,y)$ dan $E_{II}(x,y)$ = nilai permainan bila P_1 dan P_2 memainkan permainan tanpa kerjasama (lihat subbab 4.1).

Permainan ini mempunyai sejumlah pasangan keseimbangan tetapi Nash mengusulkan bagaimana memilih pasangan keseimbangan yang baik yaitu dengan menggunakan prosedur tawar-menawar Nash dengan titik batas $(E_I(x,y),\ E_{II}(x,y)$. Adapun penyelesaian dari permainan ini disebut **penyelesaian tawar-menawar dengan ancaman** atau **penyelesaian tawar-menawar Nash**.

Definisi 4.5 :

Permainan tanpa kerjasama untuk 2 pihak dengan $E_I(x,y)$ adalah pembayaran untuk P_1 dan $E_{II}(x,y)$ adalah pembayaran untuk P_2 merupakan suatu permainan berjumlah nol bila semua hasilnya adalah optimal Pareto yaitu bila ($E_I(x_1,y_1)$, $E_{II}(x_1,y_1)$) dan ($E_I(x_2,y_2)$, $E_{II}(x_2,y_2)$) adalah 2 buah hasil yang mungkin dan apabila $E_I(x_2,y_2) \le E_I(x_1,y_1)$ maka $E_{II}(x_2,y_2) \ge E_{II}(x_1,y_1)$.

Teorema 4.4 :

Diperhatikan permainan (untuk 2 pihak dengan kerjasama) dengan strategi yang berhingga. Apabila setiap pemain memilih strategi ancaman untuk menentukan batas-batas pembayaran (*status quo point*) dan hasil tawar-menawar diberikan dengan prosedur tawar-menawar Nash maka sekurang-kurangnya ada satu pasangan keseimbangan untuk strategi ancaman dan semua pasangan keseimbangan memberikan penyelesaian yang sama.

Bukti :

i) Teorema ini menyatakan bagaimana menentukan ancaman yang optimal.

Jika $\{(u,v)|au+v=b,\ c_1 \le u \le c_2\}$ adalah himpunan tawar-menawar dengan au + v = b adalah ruas garis yang memenuhi B = $\{(u,v)|u \ge t_I, v \ge t_{II}, (u,v)$ adalah optimal Pareto$\}$ dan a , b , c_1, c_2 adalah konstanta-konstanta. Kemudian x melambangkan strategi ancaman untuk P_1 dan y adalah strategi ancaman untuk P_2, maka P_1 akan memilih u yang memaksimalkan

$$f(u,v) = (u-E_I(\mathbf{x},\mathbf{y}))\ (v-E_{II}(\mathbf{x},\mathbf{y}))$$

Apabila $v = b - au$ disubstitusikan ke dalam $f(u,v)$ maka diperoleh

$$g(u) = (u - E_I(\mathbf{x},\mathbf{y})\ (b-au-E_{II}(\mathbf{x},\mathbf{y}))\ .$$

Dengan demikian P_1 akan memilih u yang memaksimalkan g(u) yaitu pada titik

$$\frac{d}{du}\ g(u) = 0$$

$$\Longleftrightarrow\ (1.(b-au-E_{II}(\mathbf{x},\mathbf{y}))+((u-E_I(\mathbf{x},\mathbf{y}).-a) = 0$$

$$\Longleftrightarrow\ u = \frac{1}{2a}\ (b+a.\ E_I(\mathbf{x},\mathbf{y}) - E_{II}(\mathbf{x},\mathbf{y}))$$

$$= \frac{1}{2a}\ (b + \sum_i \sum_j x_i\ (a.a_{ij} - b_{ij})\ y_j)$$

dengan $E_I(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sum_i \sum_j x_i\ a_{ij}\ y_j$

$$E_{II}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sum_i \sum_j x_i\ b_{ij}\ y_j$$

$$1 \le i \le n\ ,\quad 1 \le j \le m\ .$$

Selanjutnya untuk membuat u yang sebesar mungkin maka P_1 akan memilih $\mathbf{x}$ yang memaksimalkan

$$\sum_i \sum_j x_i\ (a.a_{ij} - b_{ij})\ y_j\ ,\ \forall \mathbf{y}\ .$$

Demikian juga P_2, ia akan memilih v yang memaksimalkan

$$f(u,v) = (u-E_I(\mathbf{x},\mathbf{y})\ \ (v-E_{II}(\mathbf{x},\mathbf{y}))\ .$$

Apabila $u = \frac{b}{a} - \frac{v}{a}$ disubstitusikan ke dalam $f(u,v)$ maka diperoleh

$$h(v) = (\frac{b}{a} - \frac{v}{a} - E_I(\mathbf{x},\mathbf{y})\ \ (v-E_{II}(\mathbf{x},\mathbf{y}))$$

sehingga P_2 akan memilih v yang memaksimalkan h(v) yaitu pada titik

$$\frac{d}{dv}\ h(v) = 0$$

$$\Longleftrightarrow \left(-\frac{1}{a}\left(v-E_{II}(x,y)\right)\right)+\left(\left(\frac{b}{a}-\frac{v}{a}-E_{I}(x,y)\right).1\right)=0$$

$$v=\frac{1}{2}\left(b-\sum_{i}^{m}\sum_{j}^{n}x_i(a.a_{ij}-b_{ij})y_j\right)$$

Selanjutnya P_2 akan memilih y yang meminimalkan

$$\sum_i\sum_j x_i\,(a.a_{ij}-b_{ij})\,y_j \quad , \forall x$$

Dapat dilihat bahwa dalam menentukan ancaman optimalnya P_1 dan P_2 memainkan permainan berjumlah nol dengan matriks pembayaran $(a.a_{ij}-b_{ij})$. Strategi optimal permainan ini merupakan ancaman yang optimal dan titik batasnya adalah $(E_I(x,y),\ E_{II}(x,y))$.

Misal p^* adalah nilai permainan untuk matriks $(a.a_{ij}-b_{ij})$ maka penyelesaian tawar-menawar dengan ancaman adalah

$$u^*=\frac{1}{2a}(b+p^*),\quad v^*=\frac{1}{2}(b-p^*),$$

dengan $c_1 \le u^* \le c_2$.

ii) Akan dibuktikan bahwa semua pasangan keseimbangan memberikan penyelesaian yang sama .

Diberikan (x_1,y_1), (x_2,y_2) adalah pasangan keseimbangan .

Akan dibuktikan bahwa

$$(E_I(x_1,y_1),E_{II}(x_2,y_2))=(E_I(x_2,y_2),E_{II}(x_2,y_2))$$

Misalnya $E_I(x_1,y_1) \le E_I(x_2,y_2)$ ...(4.27)

Karena (x_2,y_2) adalah pasangan keseimbangan

$$(\forall x\varepsilon X, y\varepsilon Y)\quad (E_{II}(x_2,y_1) \le E_{II}(x_2,y_2))$$

dan karena permainannya adalah berjumlah nol maka

$$E_I(x_2,y_1) \geq E_I(x_2,y_2) \qquad \ldots(4.28)$$

Karena (x_1,y_1) adalah pasangan keseimbangan maka

$$(\forall x \varepsilon X, y \varepsilon Y)\ (E_I(x_2,y_1) \leq E_I(x_1,y_1)) \qquad ..(4.29)$$

Dari (4.28) dan (4.29) diperoleh

$$E_I(x_2,y_2) \leq E_I\ (x_2,y_1) \leq E_I(x_1,y_1)$$

$$\Longleftrightarrow \quad E_I(x_2,y_2) \leq E_I\ (x_1,y_1) \qquad \ldots(4.30)$$

sehingga dari (4.27) dan (4.30) diperoleh

$$E_I(x_1,y_1) = E_I(x_2,y_2)$$

Misal $E_{II}(x_1,y_1) \leq E_{II}(x_2,y_2)$ $\qquad \ldots(4.31)$

Karena (x_2,y_2) adalah pasangan keseimbangan maka

$$(\forall x \varepsilon X, y \varepsilon Y)\ (E_I(x_1,y_2) \leq E_I(x_2,y_2))$$

dan karena permainannya adalah berjumlah nol maka

$$E_{II}(x_1,y_2) \geq E_{II}(x_2,y_2) \qquad \ldots(4.32)$$

Karena (x_1,y_1) adalah pasangan keseimbangan maka

$$(\forall x \varepsilon X, y \varepsilon Y)(E_{II}(x_1,y_2) \leq E_{II}(x_1,y_1)) \qquad ..(4.33)$$

Dari (4.32) dan (4.33) diperoleh

$$E_{II}(x_2,y_2) \leq E_{II}(x_1,y_2) \leq E_{II}(x_1,y_1)$$

$$\Longleftrightarrow \quad E_{II}(x_2,y_2) \leq E_{II}(x_1,y_1) \qquad \ldots(4.34)$$

Dengan demikian dari (4.31) dan (4.34) diperoleh

$$E_{II}(x_1,y_1) = E_{II}(x_2,y_2)$$

###

Contoh 4.9 :

Lihat kembali contoh 4.8 dalam subbab 4.2.3. dengan matriks pembayaran

$$\begin{bmatrix} (1,4) & (-1,-4) \\ (-4,-1) & (4,\ 1) \end{bmatrix}$$

Akan dicari ancaman-ancaman yang optimal.

Diketahui bahwa himpunan tawar-menawar B adalah

$B = \{(u,v) | u + v = 5,\ 1 \le u \le 4\}$ dengan $a=1$, $b = 5$

Ini berarti bahwa untuk menentukan ancaman optimalnya P_1 dan P_2 memainkan permainan berjumlah nol dengan matriks pembayaran $(a.a_{ij} - b_{ij})$ yaitu

$$1.a_{ij} - b_{ij} = 1 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$$

Dalam matriks ini ternyata kolom 2 didominasi oleh kolom 1 sehingga kolom 2 dapat dihapus. Dengan demikian diperoleh penyelesaian $(x^* = (x,1-x),$ $y^* = (1,0))$ dengan nilai permainan $p^* = -3$, sehingga

$$u^* = \frac{1}{2a}(b + p^*) = \frac{1}{2.1}(5 + (-3) = 1$$

$$v^* = \frac{1}{2}(b - p^*) = \frac{1}{2}(5 - (-3)) = 4 .$$

Jadi penyelesaiAn tawar-menawar dengan ancaman adalah (1,4).

Untuk mengecek kebenarannya maka diambil sebarang strategi optimal untuk matriks $\begin{bmatrix} -3 & 3 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$.

Apabila diambil $(x^* = (0,1),\ y^* = (1,0))$ yang merupakan salah satu strategi optimal, maka $(x^*=(0,1), y^*=(1,0))$ ini juga sebagai ancaman yang optimal. Batas pembayaran untuk permainan ini adalah $(E_I(x^*,y^*),\ E_{II}(x^*,y^*)) = (-4,-1)$.

Dengan menggunakan prosedur tawar-menawar Nash, akan dimaksimalkan

$$f(u,v) = (u-(-4))\,(v-(-1))$$
$$= (u+4)\,(v+1)$$

yang memenuhi $u + v = 5$.

Ini berarti bahwa memaksimalkan

$$f(u,v) = (u+4)\,(v+1)\,.$$

Apabila $v = 5 - u$ disubstitusikan ke dalam $f(u,v)$ maka diperoleh

$$g(u) = (u+4)\,(5-u+1)$$

sehingga

$$\frac{d}{du}\,(u+4)\,(5-u+1) = 0$$
$$\Longleftrightarrow \qquad u = 1$$

dan $u + v = 5$

$$\Longleftrightarrow \qquad v = 4\,.$$

Jadi penyelesaian tawar-menawar dengan ancaman adalah (1,4).

Dalam contoh 4.8 subbab 4.2.3 telah diperoleh penyelesaian tawar-menawar maksimin adalah $(2\frac{1}{2},\ 2\frac{1}{2})$. Terlihat bahwa P_1 akan lebih untung bila dia memilih penyelesaian tawar-menawar maksimin, sedangkan P_2 lebih untung apabila memilih penyelesaian tawar-menawar dengan ancaman, sehingga kemungkinan besar soal ini diselesaikan dengan ancaman karena P_2 pasti tidak mau diajak berunding untuk menyelesaikan permainan dengan penyelesaian tawar-menawar maksimin sehingga P_2 akan memainkan ancamannya.

Contoh 4.10 :

Pada contoh 4.7 subbab 4.2.3. diketahui matriks pembayaran

$$\begin{bmatrix} (1,2) & (8,3) \\ (4,4) & (2,1) \end{bmatrix}$$

mempunyai himpunan tawar-menawar Nash

$B = \{(u,v) \mid u+4v = 20,\ 4 \le u \le 8\}$

dan penyelesaian tawar-menawar maksimin adalah $(6\frac{2}{3}, 3\frac{1}{3})$.

Akan dicari penyelesaian tawar-menawar Nash.

Himpunan tawar-menawar Nash di atas juga dapat ditulis $B = \{(u,v) \mid \frac{1}{4}u+v = 5,\ 4 \le u \le 8\}$ dengan $a = \frac{1}{4}$, $b = 5$.

Dalam menentukan ancaman optimalnya maka P_1 dan P_2 memainkan permainan berjumlah nol dengan matriks pembayaran

$$a.a_{ij}-b_{ij} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1\frac{3}{4} & -1 \\ -3 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Dalam matriks ini kolom 2 didominasi oleh kolom 1 maka kolom 2 dapat dihapus. Kemudian baris 2 didominasi oleh baris 1 sehingga baris 2 dihapus. Dengan demikian diperoleh $p^* = -\ 1\frac{3}{4}$. Selanjutnya dapat dihitung u^* dan v^* yaitu

$$u^* = \frac{1}{2a}(b + p^*) = \frac{1}{2\ (\frac{1}{4})}(5 + (1\tfrac{3}{4})) = 6\tfrac{1}{2}$$

$$v^* = \tfrac{1}{2}(b - p^*) = \tfrac{1}{2}(5 - (-1\tfrac{3}{4})) = 3\tfrac{3}{8}$$

Jadi penyelesaian tawar-menawar Nash adalah $(6\frac{1}{2}, 3\frac{3}{8})$ dengan ancaman optimalnya $(x^*=(1,0), y^*=(1,0))$.

Terlihat bahwa penyelesaian tawar-menawar maksimin lebih menguntungkan bagi P_1 sedangkan penyelesaian tawar-menawar dengan ancaman lebih menguntungkan P_2. Oleh karena itu, kemungkinan besar P_2 tidak mau menyelesaikan permainan dengan penyelesaian tawar-menawar maksimin. Jadi soal ini diselesaikan melalui penyelesaian tawar-menawar dengan ancaman.

Apabila himpunan tawar-menawar tersebut memuat lebih dari satu ruas garis maka penyelesaian dengan ancaman juga dapat ditentukan.

Lemma 4.3 :

Bila (u^*, v^*) adalah penyelesaian untuk prosedur tawar-menawar Nash dengan titik batas (u_o, v_o) dan himpunan tawar-menawar pada (u^*, v^*) adalah suatu garis lurus dengan (u^*, v^*) bukan titik ujung (*end point*), maka gradien garis yang menghubungkan (u_o, v_o) dan (u^*, v^*) adalah berupa lawan dari gradien himpunan tawar-menawar pada (u^*, v^*).

Bukti :

Misal (u^*, v^*) terletak pada $au+v= b$, $c_1<u<c_2$.

Dengan menggunakan prosedur Nash, akan dimaksimalkan

$$f(u,v) = (u-u_o)\ (v-v_o)\ .$$

Apabila $v = b - au$ disustitusikan ke dalam $f(u,v)$ maka diperoleh

$$g(u) = (u - u_o)\ (b-au-v_o)\ .$$

Karena $f(u,v)$ terletak dalam "interior" dari himpunan $c_1<u<c_2$ maka $\frac{d}{du}\ g(u) = 0$ pada titik (u^*,v^*) adalah

$$(b - au^* - v_o) - a\ (u^* - u_o) = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad u^* = \frac{b - v_o + au_o}{2a}$$

$$v^* = \frac{b + v_o + au_o}{2}$$

Diketahui gradien dari himpunan tawar-menawar $a\ u + v = b$ adalah $-a$. Sehingga gradien garis yang menghubungkan (u_o,v_o) dan (u^*,v^*) adalah

$$\frac{v^* - v_o}{u^* - u_o} = \frac{\dfrac{b+v_o-au_o}{2} - v_o}{\dfrac{b - v_o + au_o}{2a} - u_o}$$

$$= \frac{b+v_o - au_o - 2\ v_o}{2} \cdot \frac{2a}{b-v_o+au_o-2au_o}$$

$$= a\ .$$

###

Contoh 4.11 :

Diketahui suatu permainan dengan matriks pembayaran

$$\begin{bmatrix} (2,1) & (3,2) & (0,4) \\ (0,1) & (4,0) & (2,1) \end{bmatrix}$$

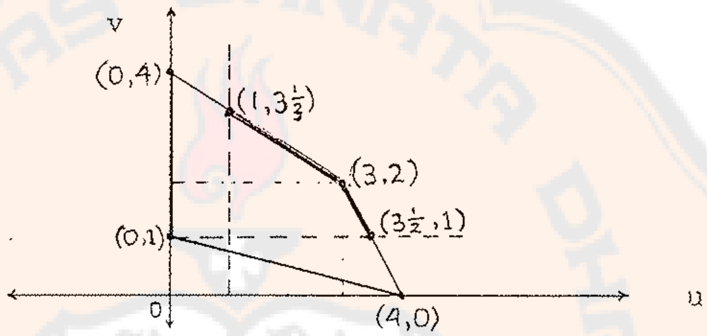
Akan dicari penyelesaian tawar-menawar dengan ancaman.

Dari matriks pembayaran di atas diperoleh

$t_I = 1 \quad t_{II} = 1$

(3,2), (0,4), (4,0) adalah optimal Pareto

Grafik :



Gambar 4.10

Persamaan garis yang menghubungkan (0,4) dan (3,2) adalah

$$\frac{v - 4}{2 - 4} = \frac{u - 0}{3 - 0}$$

$\iff \quad 2u + 3v = 12$

$\iff \quad \frac{2}{3} u + v = 4$

Persamaan garis yang menghubungkan (3,2) dan (4,0) adalah

$$\frac{v - 2}{0 - 2} = \frac{u - 3}{4 - 3}$$

$\iff \quad 2u + v = 8$

Jadi himpunan tawar-menawar B adalah

$B = \{(u,v) \mid \frac{2}{3} u + v = 4,\ 1 \le u \le 3\} \ \cup$

$\{(u,v) \mid 2u + v = 8,\ 3 \le u \le 3\frac{1}{2}\}.$

i> Akan dicari penyelesaian tawar-menawar Nash untuk

$B = \{(u,v) \mid \frac{2}{3}u+v=4,\ 1 \le u \le 3\}$.

Diketahui $a = \frac{2}{3}$, $b = 4$.

Dalam menentukan ancaman optimalnya maka P_1 dan P_2 memainkan permainan berjumlah nol dengan matriks pembayaran

$$a.a_{ij} - b_{ij} = \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & -4 \\ -1 & \frac{8}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Terlihat bahwa kolom 2 didominasi oleh kolom 3 sehingga kolom 2 dapat dihapus. Oleh karena itu matriks pembayarannya menjadi

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -4 \\ -1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Karena matriks tidak mempunyai titik pelana maka strategi optimalnya diperoleh secara aljabar, yaitu

$$x = \left(\frac{d-c}{a+d-b-c},\ \frac{a-b}{a+d-b-c}\right)$$

$$= \left(\frac{\frac{1}{3}-(-1)}{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-(-4)-(-1)},\ \frac{\frac{1}{3}-(-4)}{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-(-4)-(-1)}\right)$$

$$= \left(\frac{1\frac{1}{3}}{5\frac{2}{3}},\ \frac{4\frac{1}{3}}{5\frac{2}{3}}\right) = \left(\frac{4}{17},\ \frac{13}{17}\right)$$

$$y = \left(\frac{d-b}{a+d-b-c},\ \frac{a-c}{a+d-b-c}\right)$$

$$= \left(\frac{\frac{1}{3} - (-4)}{\frac{1}{3} + \frac{1}{3} - (-4) - (-1)}, \frac{\frac{1}{3} - (-1)}{\frac{1}{3} + \frac{1}{3} - (-4) - (-1)} \right)$$

$$= \left(\frac{4\frac{1}{3}}{5\frac{2}{3}}, \frac{1\frac{1}{3}}{5\frac{2}{3}} \right) = \left(\frac{13}{17}, \frac{4}{17} \right)$$

$$p^* = \frac{ad - bc}{a+d-b-c} = \frac{(\frac{1}{3})(\frac{1}{3}) - (-4)(-1)}{\frac{1}{3} + \frac{1}{3} - (-4) - (-1)} = \frac{-3\frac{8}{9}}{5\frac{2}{3}} = -\frac{35}{51}$$

Dengan demikian strategi optimal yang merupakan ancaman optimal untuk permainan adalah ($x^* = (\frac{4}{17}, \frac{13}{17})$, $y^* = (\frac{13}{17}, 0, \frac{4}{17})$) dengan nilai permainan $p^* = -\frac{35}{51}$.

Jadi diperoleh

$$u^* = \frac{1}{2a}(b + p^*) = \frac{1}{2\frac{2}{3}}(4 + (-\frac{35}{51})) = 2\,\frac{33}{68}$$

$$v^* = \frac{1}{2}(b - p^*) = \frac{1}{2}(4 - (-\frac{35}{51})) = 2\,\frac{35}{102}$$

Oleh karena itu penyelesaian tawar-menawar Nash adalah $(2\frac{33}{68}, 2\frac{35}{102})$.

ii) Akan dicari penyelesaian tawar-menawar Nash untuk $B = \{(u,v) | 2u+v = 8,\ 3 \le u \le 3\frac{1}{2}\}$.

Diketahui a = 2, b = 8.

Dalam menentukan ancaman optimalnya maka P_1 dan P_2 memainkan permainan berjumlah nol dengan matriks pembayaran

$$2.a_{ij} - b_{ij} = 2\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 4 & -4 \\ -1 & 8 & 3 \end{pmatrix}$$

Terlihat bahwa kolom 2 didominasi oleh kolom 1 sehingga kolom 2 dapat dihapus. Jadi matriks pembayarannya adalah

$$\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Karena matriks tersebut tidak mempunyai titik pelana maka strategi optimalnya diperoleh secara aljabar yaitu

$$\mathbf{x} = \left(\frac{d-c}{a+d-b-c}\ ,\ \frac{a-b}{a+d-b-c}\right)$$

$$= \left(\frac{3-(1)}{3+3-(-4)-(-1)}\ ,\ \frac{3-(-4)}{3+3-(-4)-(-1)}\right)$$

$$= \left(\frac{4}{11}\ ,\ \frac{7}{11}\right)$$

$$\mathbf{y} = \left(\frac{d-b}{a+d-b-c}\ ,\ \frac{a-c}{a+d-b-c}\right)$$

$$= \left(\frac{3-(-4)}{3+3-(-4)-(-1)}\ ,\ \frac{3-(-1)}{3+3-(-4)-(-1)}\right)$$

$$= \left(\frac{7}{11}\ ,\ \frac{4}{11}\right)$$

$$p^* = \frac{ad - bc}{a+d-b-c} = \frac{(3)(3)-(-4)(-1)}{3+3-(-4)-(-1)} = \frac{5}{11}$$

sehingga strategi optimal yang merupakan ancaman optimal adalah ($\mathbf{x}^* = (\frac{4}{11}, \frac{7}{11})$, $\mathbf{y}^* = (\frac{7}{11}, 0, \frac{4}{11})$) dan nilai permainan $p^* = \frac{5}{11}$.

Dengan demikian diperoleh

$$u^* = \frac{1}{2a}(b + p^*) = \frac{1}{2.2}(8+\frac{5}{11}) = 2\frac{5}{44}$$

$$v^* = \frac{1}{2}(b - p^*) = \frac{1}{2}(8 - \frac{5}{11}) = 3\frac{17}{22}$$

Terlihat bahwa $u^* = 2\frac{5}{44}$ tidak terletak pada $3 \le u \le 3\frac{1}{2}$, sehingga $(2\frac{5}{44}, 3\frac{17}{22})$ bukan penyelesaian.

Dari (i) dan (ii) dapat disimpulkan bahwa penyelesaian tawar-menawar Nash adalah $(2\frac{33}{68},\ 2\frac{35}{102})$ dan ancaman optimalnya $(\mathbf{x}^* = (\frac{4}{17},\frac{13}{17}),\ \mathbf{y}^* = (\frac{13}{17},0,\frac{4}{17}))$.

Telah diperoleh bahwa himpunan tawar-menawar B adalah B = $\{(u,v) \mid \frac{2}{3}u + v = 4,\ 1 \le u \le 3\}$ $\cup$ $\{(u,v) \mid 2u + v = 8,\ 3 \le u \le 3\frac{1}{2}\}$ dengan $t_I = 1$, $t_{II} = 1$, maka penyelesaian tawar-menawar maksiminnya diperoleh dengan memaksimalkan

$$f(u,v) = (u-1)\ (v-1)$$

yang memenuhi himpunan tawar-menawar B.

Untuk B = $\{(u,v) \mid \frac{2}{3}u + v = 4,\ 1 \le u \le 3\}$ maka dengan mensubstitusikan $v = 4 - 2\frac{2}{3}u$ ke dalam f(u,v) akan diperoleh

$$g(u) = (u-1)\ (4-\frac{2}{3}u-1)$$
$$= (u-1)\ (3 - \frac{2}{3}u)$$

dengan

$$\frac{d}{du}(u-1)\ (3-\frac{2}{3}u) = 0$$

$\Longleftrightarrow$ $u = \frac{11}{4} = 2\frac{3}{4}$

dan $\frac{2}{3}u + v = 4$

$\Longleftrightarrow$ $v = 2\frac{1}{6}$.

Jadi $(u^*, v^*) = (2\frac{3}{4},\ 2\frac{1}{6})$.

Untuk B = $\{(u,v) \mid 2u+v = 8,\ 3 \le u \le 3\frac{1}{2}\}$ maka dengan mensubstitusikan $v = 8 - 2u$ ke dalam f(u,v) akan diperoleh

$$g(u) = (u-1(\ (8-2u-1)$$
$$= (u-1)\ (7-2u)$$

dengan

$$\frac{d}{du}\,(u-1)\,(7-2u) = 0$$

$\Longleftrightarrow \qquad u = \frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$

dan $\qquad 2u + v = 8$

$\Longleftrightarrow \qquad v = 3\frac{1}{2}$

Karena $u = 2\frac{1}{2} \notin 3 \leq u \leq 3\frac{1}{2}$ maka $(2\frac{1}{4},\ 3\frac{1}{2})$ adalah bukan penyelesaian.

Jadi penyelesaian tawar-menawar maksimin adalah $(2\frac{3}{4}, 2\frac{1}{6})$.

Terlihat bahwa P_1 lebih untung dengan penyelesaian tawar-menawar maksimin sedangkan P_2 lebih untung apabila permainan diselesaikan secara penyelesaian tawar-menawar dengan ancaman. Oleh karena itu, soal ini diselesaikan dengan penyelesaian tawar-menawar dengan ancaman karena P_2 tidak mau diajak berunding untuk menentukan pembayaran yang maksimin. Karena kalau P_2 mau diajak berunding maka pembayaran yang diperolehnya akan lebih rendah.

Dari sini dapat disimpulkan bahwa suatu soal (permainan dengan kerjasama) belum tentu memperoleh pembayaran yang optimal apabila hanya dikerjakan dengan salah satu penyelesaian saja. Apabila diberikan suatu tabel pembayaran maka setiap pemain sebaiknya menghitung pembayarannya yang optimal, apakah dia harus menggunakan penyelesaian tawar-menawar maksimin atau dengan ancaman. Apabila setiap pemain ternyata lebih untung bila menggunakan penyelesaian tawar-menawar maksimin maka mereka akan menyelesaikan tawar-menawar dengan cara tersebut. Demikian juga bila setiap pemain lebih untung memilih penyelesaian tawar-menawar dengan ancaman, maka mereka akan menyelesaikan dengan cara tersebut. Namun apabila ada salah seorang pemain yang dirugikan maka permainan pasti diselesaikan melalui penyelesaian tawar-menawar dengan ancaman.

BAB V

BEBERAPA TERAPAN

Di bawah ini akan diberikan beberapa contoh permainan yang diterapkan dalam kehidupan sehari-hari.

Contoh 5.1 :

Manajer pabrik harus membangun reaktor yang menghasilkan tipe politena dengan menggunakan proses 1, 2, 3, 4 dan 5. Sayangnya bahan baku kimia harus bervariasi dalam kadar nitrogen 3, 4, 5, atau 6%. Kadar nitrogen ini mempengaruhi efisiensi relatif dari lima proses tersebut. Dengan kadar 3%, kelima proses mempunyai hasil (output) 50, 45, 60, 50 dan 30 ton. Dengan kadar 4%, hasilnya berturut-turut 60, 70, 75, 90 dan 60 ton. Hasil untuk kadar 5% adalah 30, 55, 60, 45 dan 70 ton. Sedangkan dengan 6% nitrogen, hasilnya adalah 45, 80, 80, 65 dan 85 ton. Pengujian kadar nitrogen praktis adalah terlalu mahal. Proses manakah yang harus digunakan manajer pabrik untuk memaksimalkan hasil yang diharapkan ?

Jawab :

Tabel pembayaran untuk masalah ini adalah

Proses (x_i)	Kadar Nitrogen (y_j) 3%	4%	5%	6%
1	50	60	30	45
2	45	70	55	80
3	60	75	60	80
4	50	90	45	65
5	30	60	70	85

Tabel 5.1

dengan proses pembuatan politena sebagai P_1 dan kadar nitrogen sebagai P_2.

Matriks pembayarannya adalah :

$$\begin{pmatrix} 50 & 60 & 30 & 45 \\ 45 & 70 & 55 & 80 \\ 60 & 75 & 60 & 80 \\ 50 & 90 & 45 & 65 \\ 30 & 60 & 70 & 85 \end{pmatrix}$$

Karena unsur-unsur dari matriks ini hanya terdiri dari satu komponen, maka permainannya merupakan masalah permainan berjumlah nol.

Perumusan matematis

Untuk P_1 : menentukan x_i, $1 \le i \le 5$

yang memaksimalkan $E_I(x,y) = \sum_{i=1}^{5} \sum_{j=1}^{4} x_i a_{ij} y_j$

dengan $\sum_i x_i = 1$

Untuk P_2 : menentukan y_j, $1 \le j \le 4$

yang meminimalkan $E_{II}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sum_{j=1}^{4} \sum_{i=1}^{5} y_j a_{ij} x_i$

dengan $\sum_j y_j = 1$.

Di sini ada 2 buah alternatif penyelesaian, yaitu :

1. Menyusutkan matriks pembayaran
2. Kriteria maksimin.

Oleh karena itu, permainan akan diselesaikan dengan menggunakan kriteria maksimin.

Dengan demikian diperoleh

$$\begin{array}{r c c}
 & & \text{Unsur terkecil} \\
 & \begin{pmatrix} 50 & 60 & 30 & 45 \\ 45 & 70 & 55 & 80 \\ 60 & 75 & 60 & 80 \\ 50 & 90 & 45 & 65 \\ 30 & 60 & 70 & 85 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 30 \\ 45 \\ 60 \\ 45 \\ 30 \end{array} \\
\text{Unsur terbesar :} & \begin{array}{cccc} 60 & 90 & 70 & 85 \end{array} &
\end{array}$$

V_L = maksimal dari unsur terkecil setiap baris = 60

V_U = minimal dari unsur terbesar setiap kolom = 60.

Berdasarkan teorema 3.6 dan 3.7 maka nilai permainannya adalah $v = V_L = V_U = 60$ dan strategi optimalnya ($\mathbf{x}^* = (0,0,1,0,0)$, $\mathbf{y}^* = (1,0,0,0)$).

Ini berarti bahwa manajer pabrik sebaiknya membangun reaktor pabrik untuk menghasilkan tipe politena dengan menggunakan proses 3 dan kadar nitrogen 3%. Adapun hasil maksimal yang diharapkan adalah sebesar 60 ton.

Contoh 5.2 :

Pemerintah Indonesia mengadakan suatu program yaitu ingin menyuntik warga negaranya untuk mencegah virus influensa tertentu. Virus tersebut mempunyai dua keturunan dan tidak diketahui bagaimana perbandingan kedua keturunan tersebut di dalam populasi virus. Tiga buah vaksin telah dikembangkan dengan keefektifan yang berbeda-beda melawan kedua keturunan tersebut. Vaksin ke - 1 adalah 85% efektif melawan keturunan I dan 70% efektif melawan keturunan II. Vaksin ke-2 adalah 60% efektif melawan keturunan I dan 90% efektif melawan keturunan II. Vaksin ke-3 adalah 50% efektif melawan keturunan I dan 50% efektif melawan keturunan II. Kebijaksanaan penyuntikan yang bagaimanakah seharusnya diambil oleh pemerintah?

Jawab :

Dalam masalah ini yang bertindak sebagai P_1 adalah jenis vaksin, sedangkan P_2 adalah keturunan dari virus influensa dengan tabel pembayaran sebagai berikut :

		Keturunan (y_j) I	II
Vaksin (x_i)	1	0,85	0,7
	2	0,6	0,9
	3	0,5	0,5

Tabel 5.2

Matriks pembayarannya adalah

$$\begin{bmatrix} 0,85 & 0,7 \\ 0,6 & 0,9 \\ 0,5 & 0,5 \end{bmatrix}$$

Dapat dilihat bahwa matriks tersebut unsur-unsurnya hanya terdiri dari satu komponen, maka permainan ini merupakan masalah permainan berjumlah nol.

Perumusan matematis

Untuk P_1 :menentukan $x_i \geq 0,\ 1 \leq i \leq 3$

yang memaksimalkan $E_I\ (\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sum_i^3 \sum_j^2 x_i a_{ij} y_j$

$= x_1(0,85\ y_1 + 0,7\ y_2) +$

$x_2\ (0,6\ y_1 + 0,9\ y_2) +$

$x_3\ (0,5\ y_1 + 0,5\ y_2)$

dengan $\sum_i x_i = 1$

Untuk P_2 :menentukan $y_j \geq 0,\ 1 \leq j \leq 2$

yang meminimalkan $E_{II}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sum_j^2 \sum_i^3 y_j a_{ij} x_i$

$= y_1(0,85x_1 + 0,6x_2 + 0,5x_3) +$

$y_2(0,7x_1 + 0,9x_2 + 0,5x_3)$

dengan $\sum_j y_j = 1$.

Karena ordo dari matriks adalah 3x2 maka langkah pertamanya adalah menyusutkan matriks pembayaran. Terlihat baris 3 didominasi oleh baris 1 sehingga baris 3 dapat dihapus. Dengan demikian matriks pembayarannya menjadi

$$\begin{bmatrix} 0,85 & 0,7 \\ 0,6 & 0,9 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya dapat dilihat bahwa matriks pembayarannya tidak mempunyai titik pelana, akibatnya teorema 3.11 dapat diterapkan dalam masalah ini (yaitu diselesaikan secara aljabar), sehingga diperoleh

$$\mathbf{x} = \left(\frac{d-c}{a+d-b-c} , \frac{a-b}{a+d-b-c} \right)$$

$$= \left(\frac{0,9 - 0,6}{0,85 + 0,9 - 0,7 - 0} , \frac{0,85 - 0,7}{0,85 + 0,9 - 0,7 - 0,6} \right)$$

$$= \left(\frac{2}{3} , \frac{1}{3} \right)$$

$$\mathbf{y} = \left(\frac{d-b}{a+d-b-c} , \frac{a-c}{a+d-b-c} \right)$$

$$= \left(\frac{0,9 - 0,7}{0,85 + 0,9 - 0,7 - 0} , \frac{0,85 - 0,6}{85 + 0,9 - 0,7 - 0,6} \right)$$

$$= \left(\frac{4}{9} , \frac{5}{9} \right)$$

$$v = \frac{ad - bc}{a+d-b-c} = \frac{(0,85)(0,9) - (0,7)(0,6)}{0,85 + 0,9 - 0,7 - 0,6}$$

$$= \frac{0,345}{0,45} = 0,7666 \ldots$$

Dengan demikian diperoleh $\mathbf{x}^* = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0)$, $\mathbf{y}^* = (\frac{4}{9}, \frac{5}{9})$ dan $v = 0,7666$.

Ini berarti bahwa strategi optimal untuk pemerintah adalah menyuntik $\frac{2}{3}$ warga negara dengan vaksin ke-1 dan menyuntik $\frac{1}{3}$ warganya dengan vaksin ke-2. Dengan demikian hal ini akan menjamin bahwa 76,7% warga negara akan tahan terhadap serangan virus, tidak peduli bagaimana distribusi dari kedua keturunan virus tersebut.

Sebaliknya distribusi virus sebesar $\frac{4}{9}$ dari keturunan I dan $\frac{5}{9}$ dari keturunan II akan menghasilkan juga 76,7% warga negara yang tahan terhadap serangan virus, tidak peduli bagaimanapun strategi penyuntikan yang diambil oleh pemerintah.

Contoh 5.3 :

Pasukan A bermaksud mengangkut berbagai suplai dengan truk ke pos depan suatu perbatasan yang diperkirakan akan diserang oleh pasukan B. Depot suplai terdekat yang dihubungkan ke pos depan ini melalui dua buah jalan yang terpisah yaitu melalui hutan-hutan dan melalui dataran- dataran. Konvoi suplai bergerak lebih cepat melalui rute dataran tetapi mengalami penyamaran yang lebih baik bila melewati rute hutan. Konvoi ini harus mengambil salah satu dari kedua rute tersebut.

Pasukan B mengharapkan adanya suatu usaha suplai melalui salah satu rute dan merencanakan untuk merintangi-nya dengan berbagai serangan udara. Pasukan B hanya mempunyai satu skuadron pesawat terbang saja, yang tidak dapat dibagi. Bila pasukan B mengirimkan pesawat-pesawat terbangnya di atas rute hutan dan menemukan pasukan A di sana maka pasukan B akan mempunyai waktu untuk melakukan empat serangan terhadap konvoi. Bila pasukan B mengirimkan pesawatnya di atas rute dataran dan pasukan A menggunakan rute itu maka pasukan B mempunyai waktu untuk tiga kali serangan. Apabila pasukan B mengirimkan pesawat-pesawatnya ke rute yang salah maka hilanglah waktu berharganya. Begitu ia menyadari kesalahannya dan menentukan tempat konvoi untuk rute yang lainnya maka pasukan B akan mempunyai waktu untuk melakukan dua serangan di atas rute dataran, sedangkan untuk rute hutan hanya satu serangan (karena ada kesulitan tambahan yaitu mencari konvoi yang melalui pohon-pohon). Tentukan strategi-strategi optimal dari kedua tentara ini.

Jawab :

Apabila P_1 adalah pasukan B dan P_2 adalah pasukan A.

Tabel pembayaran untuk contoh ini adalah

		Pasukan A (y_j)	
		rute hutan	rute dataran
Pasukan (x_i)	rute hutan	4	1
	rute dataran	2	3

Tabel 5.3

dengan matriks pembayaran

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Terlihat bahwa unsur-unsur dari matriks ini terdiri dari satu komponen saja, maka masalah ini adalah masalah permainan berjumlah nol.

Perumusan matematis

Untuk P_1 : menentukan $x_i \geq 0,\ 1 \leq i \leq 2$

yang memaksimalkan $E_1(x,y) = \sum_i^2 \sum_j^2 x_i a_{ij} y_j$

$$= x_1(4\ y_1 + y_2) + x_2(2\ y_1 + 3\ y_2)$$

dengan $x_1 + x_2 = 1$

Untuk P_2 : menentukan $y_j \geq 0,\ 1 \leq j \leq 2$

yang meminimalkan $E_{II}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sum_j \sum_i y_j\ a_{ij}\ x_i$

$$= y_1(4\ x_1 + 2\ x_2) + y_2(x_1 + 3\ x_2)$$

dengan $y_1 + y_2 = 1$.

Terlihat bahwa matriks pembayaran untuk permainan ini adalah tidak mempunyai titik pelana, sehingga berdasarkan teorema 3.11 akan diperoleh

$$\mathbf{x}^* = \left(\frac{d-c}{a+b-b-c}, \frac{a-b}{a+d-b-c}\right) = \left(\frac{3-2}{4+3-1-2}, \frac{4-1}{4+3-1-2}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$$

$$\mathbf{y}^* = \left(\frac{d-b}{a+b-b-c}, \frac{a-c}{a+d-b-c}\right) = \left(\frac{3-1}{4+3-1-2}, \frac{4-2}{4+3-1-2}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$v = \frac{ad-bc}{a+d-b-c} = \frac{(4)(3) - (1)(2)}{4+3-1-2} = \frac{10}{4} = 2\ \frac{1}{2}\ .$$

Jadi tentara A menggunakan rute hutan dengan probabilitas $\frac{1}{4}$ dan rute dataran dengan probabilitas $\frac{3}{4}$. Sedangkan tentara B menyerang setiap rute dengan probabilitas $\frac{1}{2}$. Adapun keberhasilan tentara B dalam menyerang konvoi suplai adalah $2\ \frac{1}{2}$.

Contoh 5.4 :

Satu hari sebelum pemilihan, kedua calon Gubernur telah mentargetkan sebuah kota yang sama sebagai kota yang menentukan. Karena kunjungan ini hanya ada manfaatnya kalau para staf dari tiap-tiap calon telah menyelesaikan persiapan-persiapan secukupnya, maka masing-masing calon harus membuat rencana sebelum mengetahui pilihan lawannya. Badan-badan penyelidikan pendapat umum yang diangkat oleh kedua belah pihak ternyata memberikan kesimpulan yang sama, yaitu strategi apa yang harus digambarkan. Adapun penambahan suara (dalam ribuan) untuk setiap calon sebagai berikut :

		Calon II	
		Strategi A	Strategi B
Calon I	Strategi A	(2,5)	(3,2)
	Strategi B	(1,0)	(6,2)

Tabel 5.4

a. Apabila strategi-strategi yang dipilih oleh seorang calon tidak diketahui oleh calon yang lain. Berapakah perolehan untuk penambahan suara bagi kedua calon tersebut ?

b. Apabila kedua calon tersebut saling berunding satu sama lain untuk menentukan strategi yang akan dipilih. Berapakah penambahan suara yang akan diperolehnya ?

Jawab :

Matriks pembayaran untuk tabel 5.4 adalah

$$\begin{bmatrix} (2,5) & (3,2) \\ (1,0) & (6,2) \end{bmatrix}$$

Dapat dilihat bahwa setiap unsur dalam matriks tersebut adalah terdiri dari 2 komponen, maka masalah ini adalah masalah permainan tidak berjumlah nol.

a). Karena strategi yang dipilih oleh masing-masing calon tidak diketahui, maka masalah ini termasuk dalam permainan tanpa kerjasama.

Matriks pembayaran untuk P_1 adalah

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$$

dengan

$$\begin{aligned} E_I(x,y) &= x(2.y+3(1-y))+(1-x)(1.y+6(1-y)) \\ &= x(3-y)+(1-x)(6-5y) \\ &= x(4y-3) + 6-5y \qquad \ldots(5.1) \end{aligned}$$

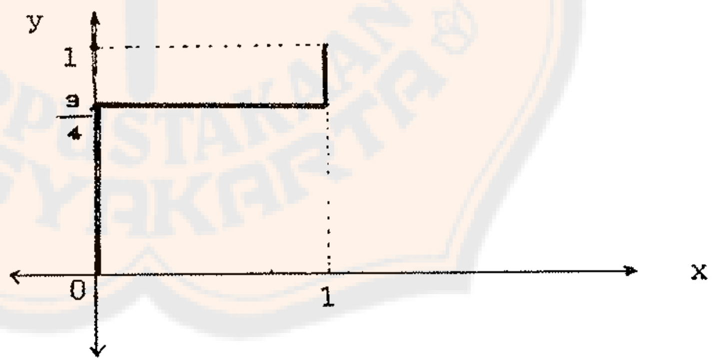
Dari (5.1) diperoleh

Bila $y < \frac{3}{4}$ maka $E_I(x,y)$ dimaksimalkan oleh $x = 0$

Bila $y = \frac{3}{4}$ maka $E_I(x,y)$ dimaksimalkan oleh $0 \le x \le 1$

Bila $y > \frac{3}{4}$ maka $E_I(x,y)$ dimaksimalkan oleh $x = 1$

Grafik :



Gambar 5.1

Matriks pembayaran untuk P_2 adalah

$$\mathbb{B}^t = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

dengan

$$E_{II}(x,y) = y(5.x+0\ (1-x))+(1-y)(2.x+2(1-x))$$
$$= y(5x) + (1-y)\ (2)$$
$$= y(5x-2) + 2 \qquad \ldots(5.2)$$

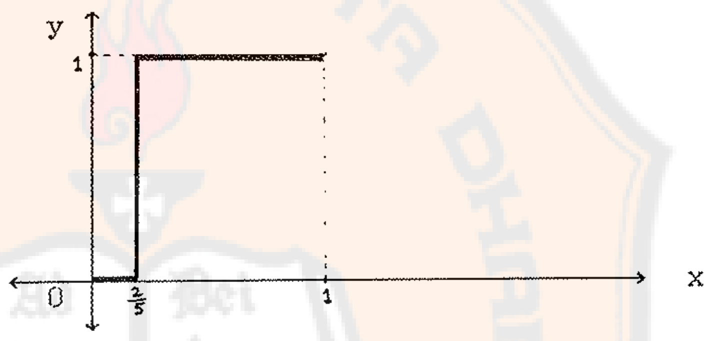
Dari persamaan (5.2) diperoleh

bila $x < \frac{2}{5}$ maka $E_{II}(x,y)$ dimaksimalkan oleh $y = 0$

bila $x = \frac{2}{5}$ maka $E_{II}(x,y)$ dimaksimalkan oleh $0 \le y \le 1$

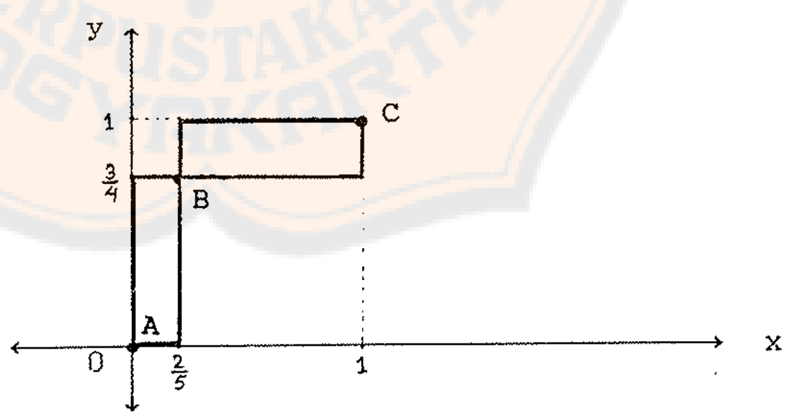
bila $x > \frac{2}{5}$ maka $E_{II}(x,y)$ dimaksimalkan oleh $y = 1$.

Grafik :



Gambar 5.2

Kemudian pasangan keseimbangan diperoleh dari perpotongan grafik pada Gambar (5.1) dan Gambar (5.2).



Gambar 5.3

Dari Gambar (5.3) diperoleh 3 buah titik potong, yaitu A (0,0), B($\frac{2}{5}$,$\frac{3}{4}$), C(1,1), sehingga pasangan keseimbangan dan nilai permainannya adalah

1). Untuk titik A(0,0) diperoleh

$(x_1^* = (0,1),\ y_1^* = (0,1))$ dengan nilai permainan

$E_I(x_1^*, y_1^*) = 6$ dan $E_{II}(x_1^*, y_1^*) = 2$

2). Untuk titik B ($\frac{2}{5}$, $\frac{3}{4}$) diperoleh

$(x_2^* = (\frac{2}{5}, \frac{3}{5}), y_2^* = (\frac{3}{4}, \frac{1}{4}))$ dengan nilai permainan

$E_I(x_2^*, y_2^*) = 2\frac{1}{4}$ dan $E_{II}(x_2^*, y_2^*) = 2$

3). Untuk titik C (1,1) diperoleh

$(x_3^* = (1,0), y_3^* = (1,0))$ dengan nilai permainan

$E_I(x_3^*, y_3^*) = 2$ dan $E_{II}(x_3^*, y_3^*) = 5$

Dalam permainan ini, P_1 dan P_2 dan cenderung memilih pasangan strategi $(x_2^* = (\frac{2}{5}, \frac{3}{5}),\ y_2^* = (\frac{3}{4}, \frac{1}{4}))$ dengan nilai permainan $E_I(x_2^*, y_2^*) = 2\,\frac{1}{4}$ dan $E_{II}(x_3^*, y_3^*) = 2$.

b). Karena kedua calon Gubernur dalam menentukan strategi yang akan dipilih saling berunding terlebih dahulu, maka masalah ini merupakan masalah permainan dengan kerjasama. Kemudian untuk menentukan penyelesaian yang optimal, P_1 dan P_2 akan menghitung pembayaran yang diperolehnya apabila menggunakan penyelesaian tawar-menawar maksimin atau dengan ancaman.

(i) Akan dicari penyelesaian tawar-menawar maksimin.

Matriks pembayaran untuk P_1 adalah

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$$

Terlihat bahwa kolom 2 didominasi oleh kolom 1, sehingga kolom 1 dapat dihapus. Kemudian baris 2 didominasi oleh baris 1, jadi baris 2 dihapus.

Dari sini diperoleh $t_I = 2$.

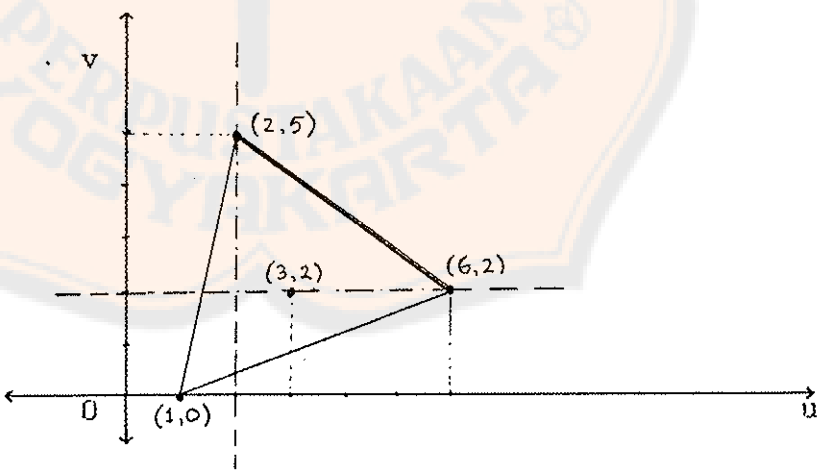
Matriks pembayaran untuk P_2 adalah

$$\mathbb{B}^t = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Dalam matriks tersebut, kolom 1 didominasi oleh kolom 2, sehingga kolom 1 dihapus. Selanjutnya baris 1 dihapus dari matriks karena baris 1 didominasi oleh baris 2. Sehingga diperoleh $t_{II} = 2$.

Kemudian dapat dilihat bahwa dalam matriks pembayaran untuk tabel 5.4 , pasangan pembayaran (2,5) dan (6,2) merupakan pasangan yang optimal Pareto.

Grafik:



Gambar 5.4

Ruas garis yang menghubungkan (2,5) dan (6,1) adalah :

$$\frac{v - 5}{2 - 5} = \frac{u - 2}{6 - 2}$$

$$\Longleftrightarrow \quad 3u + 4v = 26 \ .$$

Jadi himpunan tawar-menawar B adalah

$B = \{(u,v) \mid 3u + 4v = 26 \ , \quad 2 \leq u \leq 6\}$.

Fungsi yang akan dimaksimalkan adalah

$$f(u,v) = (u - u_o)\ (v - v_o)$$
$$= (u - 2)\ (v - 2) \ .$$

Apabila $v = \dfrac{26 - 3u}{4}$ disubstitusikan ke dalam $f(u,v)$ maka akan diperoleh

$$g(u) = (u - 2)\ \left(\frac{26 - 3u}{4} - 2\right)$$
$$= (u - 2)\ \left(4\tfrac{1}{2} - \tfrac{3}{4}\ u\right)$$

yang akan mencapai maksimal pada

$$\frac{d}{du}\ (u - 2)\ \left(4\tfrac{1}{2} - \tfrac{3}{4}\ u\right) = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad 1.\left(4\tfrac{1}{2} - \tfrac{3}{4}\ u\right) + (u - 2)\ \left(-\tfrac{3}{4}\right) = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad u = 4$$

dan $\quad 3u + 4v = 26$

$$\Longleftrightarrow \quad v = 3\tfrac{1}{2} \ .$$

Dengan demikian penyelesaian tawar-menawar maksimin adalah $(4, 3\tfrac{1}{2})$.

ii) Akan dicari penyelesaian tawar-menawar dengan ancaman.

Di atas telah diperoleh bahwa

$B = \{(u,v) \mid 3u + 4v = 26,\ 2 \le u \le 6\}$ atau dengan kata lain $B = \{(u,v) \mid \frac{3}{4} u + v = 6\frac{1}{2},\ 2 \le u \le 6\}$ dengan $a = \frac{3}{4}$, $b = 6\frac{1}{2}$.

Dalam masalah ini, setiap pemain akan memainkan permainan berjumlah nol dengan matriks pembayaran.

a. $a_{ij} - b_{ij} = \frac{3}{4} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} \frac{7}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

Karena matriks tidak mempunyai titik pelana maka strategi optimalnya diperoleh secara aljabar, yaitu

$$\mathbf{x} = \left(\frac{d - c}{a+d-b-c} , \frac{a - b}{a+d-b-c} \right)$$

$$= \left(\frac{\frac{5}{2} - \frac{3}{4}}{\frac{7}{2} + \frac{5}{2} - \frac{1}{4} - \frac{3}{4}} , \frac{\frac{7}{2} - \frac{1}{4}}{\frac{7}{2} + \frac{5}{2} - \frac{1}{4} - \frac{3}{4}} \right)$$

$$= \left(\frac{7}{20} , \frac{13}{20} \right)$$

$$\mathbf{y} = \left(\frac{d - b}{a+d-b-c} , \frac{a - c}{a+d-b-c} \right)$$

$$= \left(\frac{\frac{5}{2} - \frac{1}{4}}{\frac{7}{2} + \frac{5}{2} - \frac{1}{4} - \frac{3}{4}} , \frac{\frac{7}{2} - \frac{3}{4}}{\frac{7}{2} + \frac{5}{2} - \frac{1}{4} - \frac{3}{4}} \right)$$

$$= \left(\frac{9}{20} , \frac{11}{20} \right)$$

$$p^* = \frac{ad - bc}{a+d-b-c} = \frac{\left(\frac{7}{2}\right)\left(\frac{5}{2}\right) - \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)}{\frac{7}{2} + \frac{5}{2} - \frac{1}{4} - \frac{3}{4}}$$

$$= \frac{137}{80} .$$

Jadi diperoleh

$\mathbf{x}^* = (\frac{7}{20} , \frac{13}{20})$, $\mathbf{y}^* = (\frac{9}{20} , \frac{11}{20})$ dan $p^* = \frac{137}{80}$.

Kemudian

$$u^* = \frac{1}{2a} (b + p^*) = \frac{1}{2.(\frac{3}{4})} (6 \frac{1}{2} + \frac{137}{80}) = 5 \frac{19}{40}$$

$$v^* = \frac{1}{2} (b - p^*) = \frac{1}{2} (6\frac{1}{2} - \frac{137}{80}) = 2\frac{63}{80} .$$

Sehingga penyelesaian tawar-menawar dengan ancaman adalah $(5\frac{19}{40} , 2\frac{63}{80})$ dengan ancaman optimalnya $(\mathbf{x}^* = (\frac{7}{20} , \frac{13}{20}) , \mathbf{y}^* = (\frac{9}{20} , \frac{11}{20}))$.

Dapat dilihat bahwa P_1 lebih untung apabila memilih penyelesaian tawar-menawar, sedangkan P_2 lebih untung bila permainan diselesaikan dengan penyelesaian tawar-menawar maksimin. Oleh karenaa itu, soal ini diselesaikan dengan ancaman karena P_1 tidak mau diajak berunding untuk menentukan pembayaran yang maksimin. Dengan demikian penyelesaian untuk permainan ini adalah $(5\frac{19}{20}, 2\frac{63}{80})$.

Hal ini berarti bahwa apabila kedua calon Gubernur tersebut dalam menentukan strateginya tanpa berunding terlebih dahulu, maka penambahan suara bagi calon I adalah 2 $\frac{1}{4}$ dan bagi calon II adalah 2 (dalam ribuan). Namun apabila keduanya saling berunding dahulu, maka penambahan suatu bagi calon I adalah $5\frac{19}{40}$ ribu, sedangkan calon II adalah $2\frac{63}{80}$ ribu suara. Dengan demikian disarankan agar dalam kampanye hari terakhir, kedua calon Gubernur saling berunding untuk menentukan strategi kampanye.

BAB VI

PENUTUP

Dalam menyelesaikan masalah permainan, ada beberapa asumsi (anggapan) yang harus diperhatikan. Asumsi-asumsi tersebut adalah

1. Lawan berpikir secara rasional
2. Permainan dimainkan secara simultan dan berulang-ulang
3. Setiap pemain akan mengoptimalkan perolehannya.

Adapun keputusan yang diambil oleh suatu pihak adalah independen.

Dalam permainan berjumlah nol, ternyata penyelesaian permainan ditentukan oleh ada tidaknya titik pelana dalam matriks pembayaran. Apabila matriks tersebut mempunyai titik pelana maka penyelesaian dengan menggunakan strategi murni dan apabila tidak ada titik pelana maka penyelesaiannya dengan strategi campuran. Semua metode penyelesaian permainan ini akan memberikan pasangan strategi yang seimbang dan nilai permainan yang optimal.

Permainan tidak berjumlah nol ternyata dikelompokkan menjadi dua, yaitu permainan tanpa kerjasama dan permainan dengan kerjasama. Penyelesaian permainan tanpa kerjasama diperoleh melalui suatu cara yang disebut metode Swastika. Dengan metode ini akan diperoleh suatu pasangan keseimbangan yang keberadaannya dijamin oleh teorema Nash. Sedangkan untuk permainan dengan kerjasama, ada dua macam penyelesaian yaitu :

1. Penyelesaian tawar-menawar maksimin (penyelesaian Shapley)
2. Penyelesaian tawar-menawar dengan ancaman (penyelesaian tawar-menawar Nash).

Dengan menggunakan kedua penyelesaian tersebut, akan diperoleh pasangan pembayaran yang optimal. Selanjutnya, apabila setiap pemain lebih untung bila menggunakan penyelesaian tawar-menawar maksimin, maka mereka akan menyelesaikan permainan dengan cara tersebut. Demikian juga bila mereka lebih untung menyelesaikan permainan dengan ancaman maka kedua pemain tersebut akan menyelesaikan permainan dengan ancaman. Kemudian apabila ada salah seorang dari pemain yang dirugikan, maka permainan pasti diselesaikan melalui penyelesaian tawar-menawar dengan ancaman. Dengan demikian pasangan pembayaran yang optimal tersebut merupakan suatu pasangan keseimbangan karena pembayaran tersebut merupakan hasil kesepakatan kedua pemain.

Selanjutnya dapat dilihat bahwa penyelesaian permainan tanpa kerjasama dan permainan dengan kerjasama merupakan suatu pasangan keseimbangan. Apabila diberikan suatu masalah yang merupakan permainan tidak berjumlah nol maka penyelesaian masalah tersebut tergantung kepada penyelesaian permainan tanpa kerjasama dan dengan kerjasama. Apabila mereka lebih untung menggunakan penyelesaian dengan kerjasama maka mereka akan menggunakan penyelesaian tersebut. Namun apabila ada salah seorang pemain yang dirugikan maka permainan pasti diselesaikan melalui permainan tanpa kerjasama.

Cara untuk menyelesaikan permainan n pihak adalah dengan membawa soal itu ke bentuk permainan dua pihak.

Tulisan ini dapat dilanjutkan dengan membahas permainan n pihak dan permainan dengan stategi tak berhingga.

Selanjutnya, untuk lebih mengatasi teknik penyelesaian permainan yang lebih besar, ada baiknya langkah-langkah penyelesaian dituangkan dalam bentuk program-program komputer. Dengan demikian manfaat teori permainan akan lebih luas lagi.

DAFTAR PUSTAKA

Churchman, C. W., Ackoff, R.L., dan Arnoff, E. L., **Introduction to Operation Research**, New York, John Wiley & Sons, Inc., 1968.

Glicksman, A. M., **An Introduction to Linear Programming and the Theory of Games**, New York, John Wiley Sons, Inc., 1963.

Jones, A. J., **Game Theory: Mathematical Models of Conflict**, New York, John Wiley & Sons, Inc., 1980.

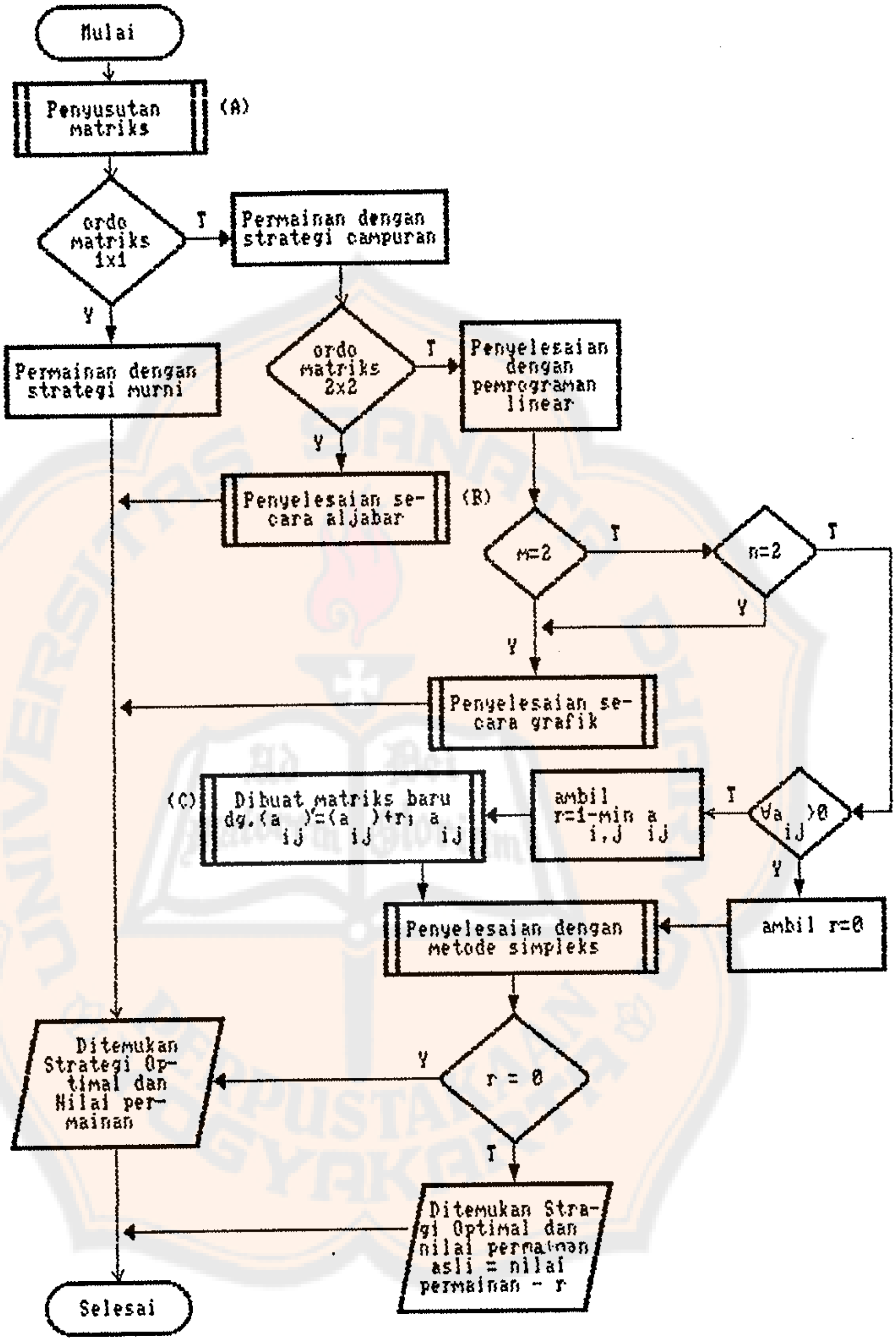
Kaplan, E. L., **Mathematical Programming and Games**, New York, John Wiley & Sons, Inc., 1982.

Thie, Paul R., **An Introduction to Linear Programming and Games Theory**, New York, John Wiley & Sons, Inc., 1979.

Thomas, L. C., **Games, Theory and Applications**, New York, John Wiley & Sons, Inc., 1984.

L A M P I R A N

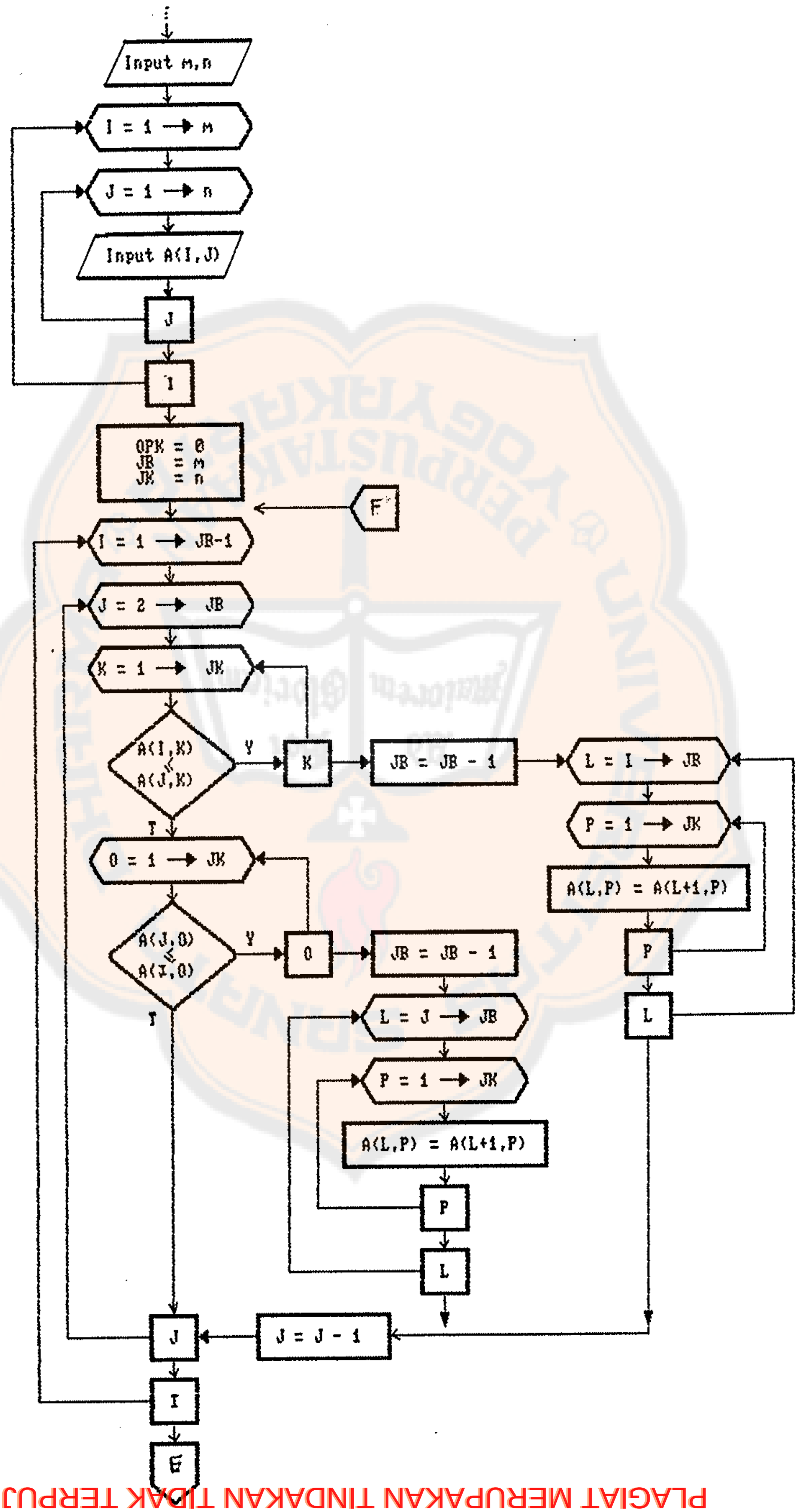
1. Contoh diagram alur permainan berjumlah nol (lihat Bab III halaman 20)

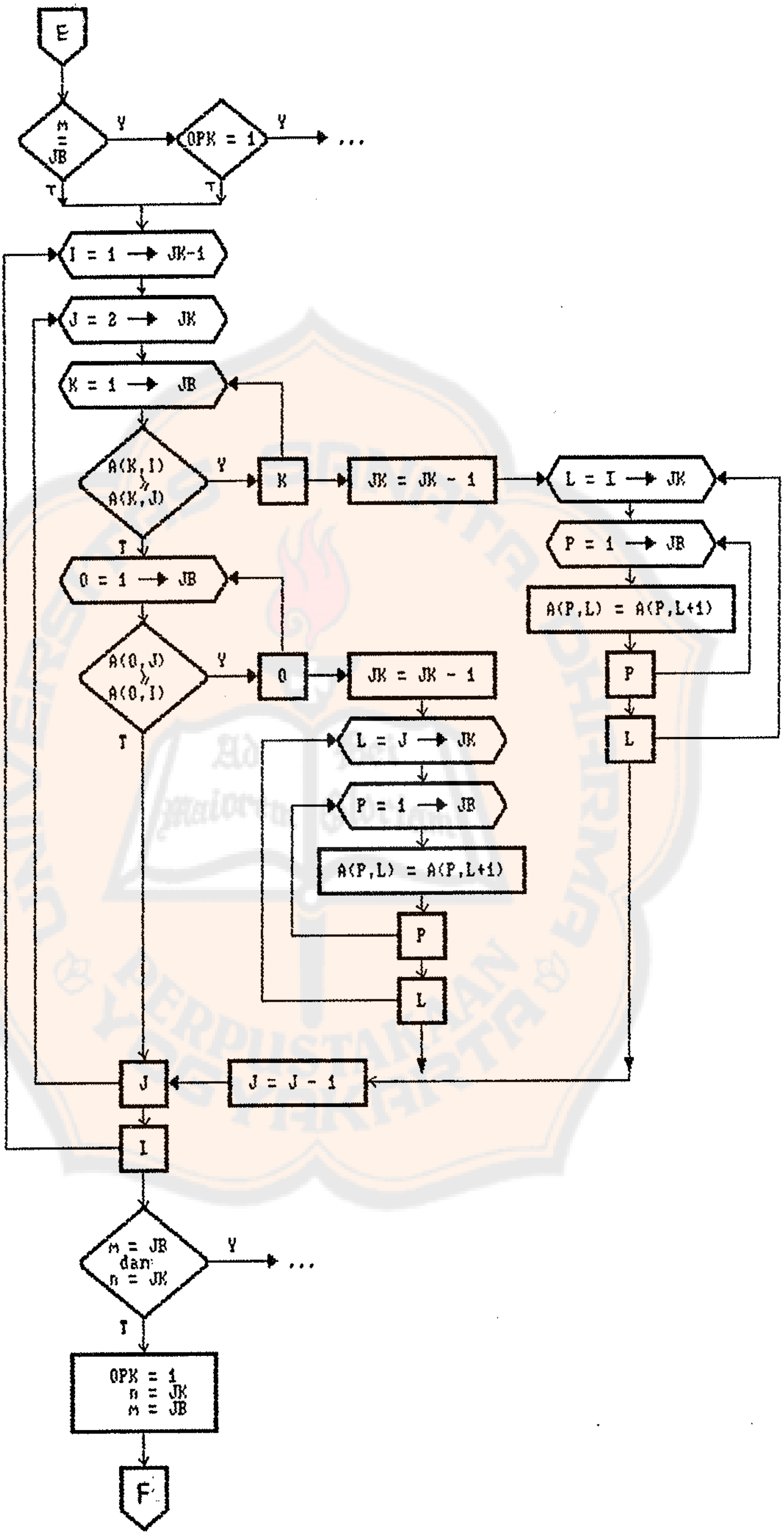


Keterangan : Y = Ya
T = Tidak

Subprogram A = penyusutan matriks
B = penyelesaian secara aljabar
C = membuat matriks baru A'

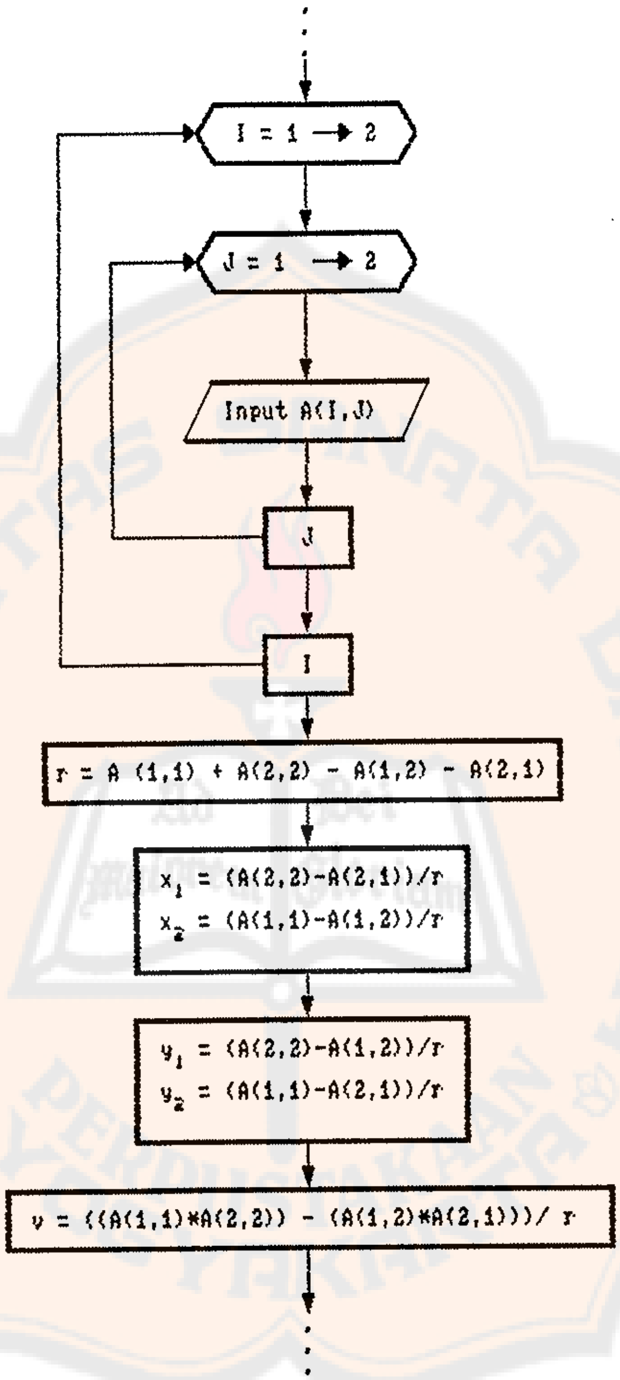
1.a) Subprogram A (dari diagram 1 halaman 158)
Untuk uraiannya lihat subbab 3.3 halaman 33.




E
m = JB
Y
OPK = 1
Y
...
T
T
I = 1 → JK-1
J = 2 → JK
K = 1 → JB
A(K,I) ≥ A(K,J)
Y
K
JK = JK - 1
L = I → JK
P = 1 → JB
A(P,L) = A(P,L+1)
P
L
T
O = 1 → JB
A(O,J) ≥ A(O,I)
Y
O
JK = JK - 1
L = J → JK
P = 1 → JB
A(P,L) = A(P,L+1)
P
L
T
J
J = J - 1
I
m = JB dan n = JK
Y
...
T
OPK = 1
n = JK
m = JB
F

1.b) Subprogram B (dari diagram 1 halaman 158)

Untuk uraiannya lihat subbab 3.5.2 halaman 48.



1.c) Subprogram C (dari diagram 1 halaman 158)
Untuk uraiannya lihat subbab 3.5.2 halaman 48.