TRANSFORMASI LINEAR

SKRIPSI

Diajukan untuk Memenuhi Salah Satu Syarat
Memperoleh Gelar Sarjana Pendidikan
Program Studi Pendidikan Matematika

Oleh :

Florentinus Joko Winarno

N I M : 89 414 018
NIRM : 890052010501120012

Jurusan Pendidikan Matematika Dan Ilmu Pengetahuan Alam
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
UNIVERSITAS SANATA DHARMA
YOGYAKARTA

1994

SKRIPSI

TRANSFORMASI LINEAR

Oleh

Florentinus Joko Winarno

NIM. 89 414 018

NIRM. 890052010501120012

telah disetujui oleh :

Pembimbing I

Dr. Frans. Susilo, S.J tanggal 28 Okt. 1994

Pembimbing II

Dra. A. Linda Yuliastuti tanggal 29 OKT 1994

SKRIPSI

TRANSFORMASI LINEAR

yang dipersiapkan dan disusun oleh

Florentinus Joko Winarno

NIM. 89 414 018

NIRM. 890052010501120012

telah dipertahankan di depan Panitia Penguji

pada tanggal 5 Oktober 1994

dan dinyatakan telah memenuhi syarat

Susunan Panitia Penguji

	Nama lengkap	Tanda tangan
Ketua	Dr. St. Suwarsono	....
Sekretaris	Dr. Y. Marpaung	....
Anggota	Dr. Frans. Susilo, S.J	....
Anggota	Dr. Y. Marpaung	....
Anggota	Dra. A Linda Yuliastuti	....

Yogyakarta, 31 Oktober 1994

Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan

Universitas Sanata Dharma

Dekan FKIP

Priyono Marwan

Dr. A. Priyono Marwan, S.J

DAFTAR ISI

Kupersembahkan untuk

yang tercinta

Bapak, Ibu

Mas Budi

Anton, Nduk Ely, Didid

Retno Purwandari

KATA PENGANTAR

Puji syukur kepada Tuhan Yang Maha Esa atas berkat dan rahmatNya sehingga penyusun dapat menyelesaikan skripsi berjudul Transformasi Linear yang merupakan hasil studi pustaka dalam bidang matematika murni.

Skripsi ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat memperoleh gelar sarjana pendidikan program studi pendidikan matematika.

Pada kesempatan ini, dengan rendah hati penyusun mengucapkan terima kasih kepada :

1. Romo Dr. Frans Susilo, S.J selaku dosen pembimbing I yang telah mencurahkan perhatian dan kesabaran dalam membimbing penyusunan skripsi ini.
2. Ibu Dra. A. Linda Yuliastuti selaku dosen pembimbing II yang telah dengan sabar membaca dan mengoreksi skripsi ini.
3. Bapak Dr. St. Suwarsono selaku ketua jurusan pendidikan matematika dan ilmu pengetahuan alam yang telah memberikan dukungan dalam penyusunan skripsi ini.
4. Bapak Drs. T. Sugiarto selaku ketua program studi pendidikan matematika yang telah memberikan dukungan dalam penyusunan skripsi ini.
5. Bapak/ Ibu dosen pendidikan matematika yang telah memberikan pengetahuan dan dukungan moril selama penyusun mengikuti kuliah.

6. Para karyawan yang telah memberikan pelayanan dengan baik.
7. Rekan-rekan mahasiswa yang telah memberikan dukungan moril.
8. Pihak lain yang tidak dapat penyusun sebutkan satu persatu.

Akhirnya penyusun mengharapkan kritik yang sifatnya membangun dari pembaca guna penyempurnaan skripsi ini. Dan semoga skripsi ini bermanfaat bagi para pembaca.

Yogyakarta, 19 September 1994

Penyusun

ABSTRAK

Transformasi linear adalah pemetaan antara dua ruang vektor yang mengawetkan operasi-operasi pada ruang vektor tersebut, yaitu operasi penjumlahan dan perkalian dengan skalar. Transformasi linear seringkali disebut juga homomorfisme. Himpunan semua transformasi linear dari ruang vektor V ke V akan dilambangkan Hom(V,V).

Terhadap operasi penjumlahan dan perkalian dengan skalar, Hom (V,V) merupakan ruang vektor atas field F. Dan terhadap operasi penjumlahan dan perkalian, Hom(V,V) merupakan suatu ring. Dan selanjutnya Hom(V,V) ternyata merupakan suatu aljabar. Aljabar ini disebut aljabar transformasi linear dan dilambangkan dengan A(V).

Akar karakteristik dari transformasi linear f ∈ A(V) merupakan akar polinomial minimal dari f tersebut. Bila ruang vektor V berdimensi n, maka setiap transformasi linear f ∈ A(V) mempunyai paling banyak n akar karakteristik yang berbeda.

Terhadap suatu basis tertentu dari ruang vektor V, setiap transformasi linear pada V menentukan suatu matriks bujur sangkar dan sebaliknya setiap matriks bujur sangkar membangkitkan suatu transformasi linear f ∈ A(V). Himpunan semua matriks bujur sangkar dengan elemen-elemen dari field F merupakan suatu aljabar yang isomorfis dengan aljabar transformasi linear A(V).

BAB I

PENDAHULUAN

Transformasi linear adalah pemetaan antara dua ruang vektor yang mengawetkan operasi-operasi pada ruang vektor tersebut, yaitu operasi penjumlahan dan perkalian dengan skalar. Transformasi linear seringkali disebut juga homomorfisme. Pembicaraan kita dalam karangan ini akan dibatasi pada transformasi linear f yang memetakan ruang vektor V ke V.

Dalam Bab II kita akan membicarakan definisi transformasi linear. Himpunan semua transformasi linear dari V ke V akan dilambangkan dengan Hom(V,V). Terhadap operasi penjumlahan dan perkalian dengan skalar, Hom(V,V) merupakan suatu ruang vektor pula atas field F. Di samping itu akan kita lihat bahwa terhadap operasi penjumlahan dan perkalian Hom(V,V) merupakan suatu ring. Dan selanjutnya Hom(V,V) ternyata merupakan suatu aljabar.

Pembicaraan pada Bab III adalah mengenai aljabar transformasi linear yang akan dilambangkan dengan A(V). Kita akan melihat bahwa aljabar ini mempunyai hubungan dengan polinomial-polinomial dalam F[x], yaitu himpunan semua polinomial dalam x dengan koefisien - koefisien dari field F. Hubungan ini akan kita lihat dalam kasus aljabar yang berdimensi berhingga. Dalam kasus ini, setiap elemen aljabar transformasi linear memenuhi suatu polinomial non-trivial dalam F[x] dengan derajat tidak lebih dari dimensi aljabar tersebut. Jika $f \in A(V)$ adalah regular, dimensi aljabar tersebut. Jika $f \in A(V)$ adalah regular, kita akan melihat bahwa inversnya adalah suatu polinomial dalam f atas field F. Sebaliknya, jika $f \in A(V)$ adalah singular, maka ada $g \neq 0 \in A(V)$ sedemikian sehingga $gf = fg = 0$. Di samping itu akan kita lihat juga bahwa ruang range dan ruang nul dari $f \in A(V)$ merupakan sub ruang vektor dari ruang vektor V atas field F.

Bab IV berisi pembahasan mengenai akar-akar karakteristik elemen aljabar transformasi linear berdimensi berhingga. Pembicaraan mengenai akar karakteristik berkaitan dengan akar polinomial minimal dari elemen aljabar, yaitu akar karakteristik dari elemen aljabar transformasi inear merupakan akar polinomial minimal dari elemen aljabar transformasi linear itu. Bagian ini membawa kita pada pembicaraan mengenai vektor-vektor karakteristik . Namun demikian tidak semua transformasi linear mempunyai vektor karakteristik. Vektor - vektor karakteristik yang ber- kaitan dengan akar-akar karakteristik yang berbeda merupakan himpunan vektor-vektor yang bebas linear dalam ruang vektor V. Banyaknya akar karakteristik yang berbeda dari suatu elemen aljabar transformasi linear tidak lebih dari dimensi ruang vektor V atas field F.

Di dalam Bab V kita akan melihat hubungan antara transformasi linear pada ruang vektor V dengan matriks. Setiap transformasi linear pada ruang vektor V menentukan suatu susunan matriks relatif terhadap basis tertentu. Dan sebaliknya terhadap suatu basis tertentu setiap matriks bujur sangkar menentukan suatu transformasi linear. Terhadap operasi penjumlahan, perkalian dengan skalar elemen dari field F, dan perkalian, himpunan semua matriks bujur sangkar dengan unsur-unsur dari F merupakan suatu aljabar atas field F. Akhirnya kita akan melihat bahwa aljabar ini isomorfis dengan aljabar transformasi linear A(V).

BAB II

TRANSFORMASI LINEAR

Dalam bagian ini, kita akan membahas fungsi bernilai vektor dari sebuah variabel vektor, yaitu fungsi yang berbentuk $w = f(v)$, di mana baik variabel bebas v maupun variabel tak bebas w adalah vektor. Pembicaraan kita dalam hal ini akan dibatasi pada fungsi vektor khusus yang dinamakan transformasi linear.

Jika V adalah ruang vektor atas field F, maka yang akan kita bahas adalah fungsi f yang memetakan elemen-elemen dari V ke V, dan kita tulis $f : V \longrightarrow V$.

Sebelum sampai pada pembahasan mengenai transformasi linear $f : V \longrightarrow V$, terlebih dahulu akan kita lihat definisi dari ruang vektor V atas field F.

Definisi 2.1

Andaikan V adalah himpunan yang tidak kosong. Maka V disebut *ruang vektor* atas field F jika V adalah grup abel terhadap operasi penjumlahan dan untuk setiap $\alpha \in F$, $v \in V$ αv didefinisikan sebagai suatu elemen dalam V dan untuk setiap $\alpha, \beta \in F$ dan $v, w \in V$ berlaku :

1. $\alpha(v + w) = \alpha v + \alpha w$
2. $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$
3. $\alpha(\beta v) = (\alpha\beta)v$
4. $1v = v$, di mana 1 adalah elemen satuan dalam F terhadap operasi perkalian.

<u>Definisi 2.2</u>

Andaikan V ruang vektor atas field F.

Pemetaan $f : V \longrightarrow V$ disebut *transformasi linear* jika :

1. $f(v + w) = f(v) + f(w)$ untuk tiap $v,w \in V$
2. $f(ku) = kf(u)$ untuk tiap $u \in V$ dan skalar $k \in F$

Kedua syarat di atas ternyata dapat disederhanakan menjadi satu syarat. Hal ini dinyatakan dalam teorema berikut.

<u>Teorema 2.1</u>

Andaikan V ruang vektor atas field F.

Pemetaan $f : V \longrightarrow V$ adalah suatu transformasi linear bila dan hanya bila $f(\alpha v + \beta w) = \alpha f(v) + \beta f(w)$ untuk tiap $v,w \in V$ dan $\alpha,\beta \in F$.

<u>Bukti :</u>

$(\Longrightarrow)$

Ambil sebarang $v,w \in V$ dan $\alpha,\beta \in F$. Maka

$f(\alpha v + \beta w) = f(\alpha v) + f(\beta w) = \alpha f(v) + \beta f(w)$.

$(\Longleftarrow)$

Diketahui $f(\alpha v + \beta w) = \alpha f(v) + \beta f(w)$ untuk tiap $v,w \in V$ dan $\alpha,\beta \in F$.

Bila diambil $\alpha = \beta = 1 \in F$, maka diperoleh $f(v + w) = f(v) + f(w)$ untuk tiap $v,w \in V$.

Bila diambil $\beta = 0 \in F$, maka diperoleh $f(\alpha v) = \alpha f(v)$ untuk tiap $v \in V$ dan $\alpha \in F$. ■

Transformasi linear $f : V \longrightarrow V$ seringkali disebut juga *homomorfisme*. Himpunan semua transformasi linear dari V ke dirinya sendiri kita nyatakan dengan lambang Hom(V,V).

Definisi 2.3

Andaikan V ruang vektor atas field F. Untuk $f,g \in$ Hom(V,V), dan $\alpha \in F$ didefinisikan :

1. $(f+g)(v) = f(v) + g(v)$, untuk tiap $v \in V$
2. $(\alpha f)(v) = \alpha f(v)$, untuk tiap $v \in V$, $\alpha \in F$

Teorema 2.2

Misalkan V adalah ruang vektor atas field F. Terhadap operasi penjumlahan dan perkalian dengan skalar seperti didefinisikan di atas, Hom(V,V) membentuk ruang vektor atas field F.

Bukti :

1. Akan dibuktikan bahwa penjumlahan dan perkalian dengan skalar dalam Hom(V,V) adalah well defined.

   a. Ambil $f,g \in$ Hom(V,V). Maka untuk tiap $v,w \in V$, dan $\alpha,\beta \in F$ berlaku :

   $$\begin{aligned}(f+g)(\alpha v+\beta w) &= f(\alpha v+\beta w) + g(\alpha v+\beta w)\\ &= \alpha f(v) + \beta f(w) + \alpha g(v) + \beta g(w)\\ &= \alpha(f+g)(v) + \beta(f+g)(w).\end{aligned}$$

   Jadi $f+g \in$ Hom(V,V).

b. Ambil sebarang $f \in Hom(V,V)$ dan $\alpha \in F$. Maka untuk tiap $v, w \in V$ dan $\beta, \gamma \in F$ berlaku :

$$(\alpha f)(\beta v + \gamma w) = \alpha f(\beta v + \gamma w)$$
$$= \alpha[\beta f(v) + \gamma f(w)]$$
$$= \beta(\alpha f)(v) + \gamma(\alpha f)(w)$$

Jadi $\alpha f \in Hom(V,V)$.

Jadi penjumlahan dan perkalian dengan skalar dalam $Hom(V,V)$ well defined.

2. a. Ambil sebarang $f, g \in Hom(V,V)$. Maka untuk setiap $v \in V$, berlaku

$$(f+g)(v) = f(v) + g(v) = g(v) + f(v) = (g+f)(v)$$

Jadi $f+g = g+f$.

b. Ambil $f,g,h \in Hom(V,V)$, maka untuk setiap $v \in V$

$$((f+g)+h)(v) = (f+g)(v) + h(v)$$
$$= (f(v) + g(v)) + h(v)$$
$$= f(v) + (g(v)+ h(v))$$
$$= f(v) + (g + h)(v)$$
$$= (f + (g + h))(v).$$

Jadi $(f+g)+h = f+(g+h)$.

c. Ambil pemetaan $0 \in Hom(V,V)$, yaitu $0 : V \longrightarrow V$ yang memetakan setiap $v \in V$ ke vektor nol di V, yaitu $0(v) = 0$ untuk tiap $v \in V$. Jelas bahwa 0 adalah transformasi linear dari V ke V, dan untuk setiap $f \in Hom(V,V)$, $(f + 0)(v) = f(v) + 0(v) = f(v) + 0 = f(v)$, yaitu $f+0 = f$.

d. Untuk setiap $f \in Hom(V,V)$ kita definisikan pemetaan

$-f : V \longrightarrow V$ dengan $(-f)(v) = -f(v)$ untuk setiap $v \in V$. Untuk setiap $v, w \in V$ dan $\alpha, \beta \in F$ berlaku $(-f)(\alpha v + \beta w) = -f(\alpha v + \beta w) = -f(\alpha v) + (-f(\beta y)) = \alpha(-f)(v) + \beta(-f)(y)$. Jadi $-f \in Hom(V,V)$.

Selanjutnya $(f + (-f))(v) = f(v) + (-f)(v) = f(v) - f(v) = 0$, untuk setiap $v \in V$. Ini berarti $f+(-f)=0$.

3.a. Ambil sebarang $f, g \in Hom(V,V)$. Maka untuk tiap $v \in V$ dan $\alpha \in F$ berlaku :

$$
\begin{aligned}
[\alpha(f + g)](v) &= \alpha(f + g)(v) && \text{(definisi)} \\
&= \alpha f(v) + \alpha g(v) && \text{(definisi)} \\
&= (\alpha f)(v) + (\alpha g)(v) \\
&= (\alpha f + \alpha g)(v).
\end{aligned}
$$

Jadi $\alpha(f + g) = \alpha f + \alpha g$.

b. Ambil sebarang $f \in Hom(V,V)$, maka untuk tiap $v \in V$ dan $\alpha, \beta \in F$ berlaku :

$$
\begin{aligned}
((\alpha + \beta)f)(v) &= (\alpha + \beta)f(v) \\
&= \alpha f(v) + \beta f(v) \\
&= (\alpha f)(v) + (\beta f)(v) \\
&= (\alpha f + \beta f)(v).
\end{aligned}
$$

Jadi $(\alpha + \beta)f = \alpha f + \beta f$.

c. Ambil sebarang $f \in Hom(V,V)$. Maka untuk tiap $v \in V$ dan $\alpha, \beta \in F$ berlaku $((\alpha\beta)f)(v) = (\alpha\beta)f(v) = \alpha(\beta f(v)) = \alpha(\beta f)(v) = (\alpha(\beta f))(v)$. Jadi $(\alpha\beta)f = \alpha(\beta f)$.

d. Untuk sebarang $f \in Hom(V,V)$ dan $1 \in F$ berlaku $(1f)(v) = 1f(v) = f(v)$, untuk tiap $v \in V$.

Jadi $1f = f$.

Jadi Hom(V,V) membentuk suatu ruang vektor atas field F. ∎

Definisi 2.4

Untuk $f, g \in \text{Hom}(V,V)$ didefinisikan operasi perkalian dua transformasi linear sebagai berikut : $(fg)(v) = (g \circ f)(v) = g(f(v))$ untuk setiap $v \in V$.

Definisi 2.5

Transformasi linear $I : V \longrightarrow V$ disebut *transformasi linear identitas* jika $I(v) = v$ untuk tiap $v \in V$.

Teorema 2.3

Hom(V,V) dengan operasi penjumlahan dan perkalian tersebut di atas merupakan suatu ring dengan elemen satuan I.

Bukti :

1. Operasi perkalian yang didefinisikan di atas adalah well-defined, yaitu bersifat tertutup pada Hom(V,V) :
   Ambil sebarang $f, g \in \text{Hom}(V,V)$, $\alpha, \beta \in F$, dan $v, w \in V$.
   Maka $(fg)(\alpha v + \beta w) = g(f(\alpha v + \beta w)) = g(\alpha f(v) + \beta f(w)) = \alpha(g(f)(v)) + \beta(g(f)(w)) = \alpha(fg)(v) + \beta(fg)(w)$.
   Jadi $fg \in \text{Hom}(V,V)$.
2. Hom(V,V) merupakan grup abel terhadap operasi penjumlahan (lihat bukti teorema 2.2).
3. Ambil $f, g, h \in \text{Hom}(V,V)$. Maka untuk tiap $v \in V$:

$$
\begin{aligned}
f(gh)(v) &= (gh)(f(v)) \\
&= h(g(f(v))) \\
&= h((fg)(v)) \\
&= ((fg)h)(v).
\end{aligned}
$$

Jadi $f(gh) = (fg)h$.

4. Ambil $f, g, h \in \text{Hom}(V,V)$. Maka untuk tiap $v \in V$

$$
\begin{aligned}
((f + g)h)(v) &= h((f + g)(v)) \\
&= h(f(v) + g(v)) \\
&= (fh)(v) + (gh)(v) \\
&= (fh + gh)(v).
\end{aligned}
$$

Jadi $(f+g)h = fh + gh$. Secara analog dapat dibuktikan : $f(g+h) = fg + fh$.

5. Ambil sebarang $v \in V$, maka

$$
\begin{aligned}
(fI)(v) &= I(f(v)) && \textit{(definisi 2.4)} \\
&= f(v) && \textit{(definisi 2.5)}
\end{aligned}
$$

dan

$$
\begin{aligned}
(If)(v) &= f(I(v)) && \textit{(definisi 2.4)} \\
&= f(v). && \textit{(definisi 2.5)}
\end{aligned}
$$

Jadi $(fI)(v) = f(v) = (If)(v)$ untuk tiap $v \in V$

$\therefore$ $fI = f = If$ untuk tiap $f \in \text{Hom}(V,V)$.

Jadi $\text{Hom}(V,V)$ adalah ring dengan elemen satuan I terhadap kedua operasi tersebut. ∎

BAB III

ALJABAR TRANSFORMASI LINEAR

Definisi 3.1

Suatu ring A disebut *Aljabar* atas field F jika A sekaligus adalah suatu ruang vektor atas field F sedemikian sehingga untuk $\forall a,b \in A$ dan $\alpha \in F$, berlaku $\alpha(ab) = (\alpha a)b = a(\alpha b)$.

Teorema 3.1

Terhadap operasi-operasi penjumlahan, perkalian, perkalian dengan skalar seperti didefinisikan dalam Bab II, Hom(V,V) merupakan suatu aljabar atas field F.

Bukti :

Ambil sebarang $f,g \in$ Hom(V,V) dan $\alpha \in F$. Karena $fg \in$ Hom(V.V), maka

$$\begin{aligned}(\alpha(fg))(v) &= \alpha(g(f(v))) \\ &= (\alpha g)(f(v)) \\ &= (f(\alpha g))(v).\end{aligned}$$

Juga

$$\begin{aligned}(\alpha(fg))(v) = \alpha(g(f(v))) &= g(\alpha f(v)) \\ &= ((\alpha f)g)(v).\end{aligned}$$

Jadi $\alpha(fg) = f(\alpha g) = (\alpha f)g$. ▪

Untuk selanjutnya aljabar transformasi linear akan kita tulis dengan lambang A(V), atau jika kita ingin menekankan peranan field F, kita bisa melambangkannya dengan $A_F(V)$.

Andaikan F[x] adalah himpunan semua polinomial dalam x dengan koefisien-koefisien dari field F dan A suatu aljabar dengan elemen satuan e atas field F. Andaikan p(x) $= \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_n x^n$ suatu polinomial dalam F[x]. Bila $a \in A$, maka $p(a) = \alpha_0 e + \alpha_1 a + \alpha_2 a^2 + \ldots + \alpha_n a^n \in A$. Jika $p(a) = 0$, maka dikatakan bahwa a *memenuhi* p(x). Suatu polinomial dikatakan *nontrivial* bila tidak semua koefisiennya sama dengan nol. *Dimensi* dari suatu ruang vektor ialah banyaknya vektor dalam suatu basis dari ruang vektor V.

Teorema 3.2

Andaikan A suatu aljabar dengan elemen satuan atas field F dan andaikan bahwa A berdimensi m atas field F. Maka setiap elemen dalam A memenuhi suatu polinomial non-trivial dalam $F[x]$ dengan derajat paling tinggi m.

Bukti :

Ambil sebarang elemen $a \in A$ dan andaikan e adalah elemen satuan dari A. Karena A berdimensi m atas field F, maka $e, a, a^2, \ldots, a^m$ tidak bebas linear atas field F. Maka terdapat $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m \in F$, yang tidak semuanya sama dengan nol sedemikian sehingga $\alpha_0 e + \alpha_1 a + \alpha_2 a^2 + \ldots + \alpha_m a^m = 0$. Karena $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m \in F$ tidak semuanya sama dengan nol, maka ada sekurang-kurangnya satu $\alpha_i \neq 0$, $0 \leq i \leq m$. Jika $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m \in F$ semuanya tidak sama dengan nol, maka a memenuhi polinomial nontrivial $p(x) = \alpha_0 +$

$\alpha_1 x + \ldots + \alpha_m x^m \in F[x]$ dengan derajat m. Jika $\alpha_m = 0$, maka a memenuhi polinomial nontrivial $p(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_m x^m \in F[x]$ dengan derajat $m-1 < m$. Jadi tiap $a \in A$ memenuhi polinomial nontrivial $p(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_m x^m$ dengan derajat paling tinggi m. ∎

__Corollary 3.1__

Jika V adalah ruang vektor berdimensi n atas field F, maka untuk tiap $f \in A(V)$ terdapat suatu polinomial nontrivial $p(x) \in F[x]$ dengan derajat paling tinggi n^2 sedemikian sehingga $p(f) = 0$.

__Bukti :__

A(V) adalah aljabar dengan elemen satuan I atas field F. Karena ruang vektor V berdimensi n, maka A(V) berdimensi n^2. Menurut teorema 3.2, maka tiap $f \in A(V)$ memenuhi suatu polinomial nontrivial $p(x) \in F[x]$ dengan derajat paling tinggi n^2. Jadi $p(f) = 0$. ∎

__Definisi 3.2__

Suatu elemen $f \in A(V)$ dikatakan *invertibel kanan* jika ada suatu $g \in A(V)$ sedemikian sehingga $fg = I$.

__Definisi 3.3__

Suatu elemen $f \in A(V)$ dikatakan *invertibel kiri* jika ada $h \in A(V)$ sedemikian sehingga $hf = I$.

Lemma 3.1

Jika f sekaligus invertibel kiri dan kanan dan jika $fg = hf = I$, maka $g = h$ dan g tunggal.

Bukti :

Andaikan $f \in Hom(V,V)$ invertibel kiri dan kanan. Maka ada $g,h \in Hom(V,V)$ sedemikian sehingga $fg = hf = I$.

Jadi $(hf)g = Ig$

$h(fg) = g$

$h\,I = g$

$h = g.$

Andaikan $g_1 \in Hom(V,V)$ dan $g_1 f = I = fg_1$. Maka

$(g_1 f)g = Ig$

$g_1(fg) = g$

$g_1 I = g$

$g_1 = g.$

Jadi g tunggal. ▪

Definisi 3.4

Suatu elemen $f \in A(V)$ disebut *invertibel* atau *regular*, jika f sekaligus invertibel kiri dan invertibel kanan . Jika ada suatu elemen $g \in A(V)$ sedemikian sehingga $gf = fg = I$, maka g kita tulis dengan lambang f^{-1}, dan disebut *invers* dari f.

Elemen yang invertibel kanan (kiri) dalam $A(V)$, belum tentu invertibel. Suatu elemen dalam $A(V)$ yang tidak invertibel (tidak regular) disebut *singular*.

Contoh :

Andaikan F field bilangan - bilangan real dan ruang vektor V adalah F[x]. Pemetaan - pemetaan $g : V \longrightarrow V$ dan $f : V \longrightarrow V$ yang berturut-turut didefinisikan sebagai berikut : $g(q(x)) = \dfrac{dq(x)}{dx}$ dan $f(q(x)) = \int_1^x q(t)dt$ adalah transformasi linear dari V ke V, yaitu $f,g \in A(V)$.

Di satu pihak

$$(gf)(p(x)) = f(g(p(x))) = f\left(\frac{d.p(x)}{dx}\right)$$

$$= \int_1^x \frac{dp(t)}{dt}dt$$

$$= p(x) - p(1).$$

Jadi $(gf)(p(x)) = p(x) - p(1)$, sehingga $gf \neq I$.

Di lain pihak,

$$(fg)(p(x)) = g(f(p(x))) = g\left[\int_1^x p(t)\ dt\right]$$

$$= \frac{d}{dx}\int_1^x p(t)\ dt$$

$$= p(x).$$

Yaitu $(fg)(p(x)) = p(x)$. Maka $fg = I$.

Jadi f invertibel kanan tetapi tidak invertibel.

Definisi 3.5

Polinomial p(x) disebut *polinomial minimal* dari a atas field F, jika p(x) adalah polinomial dengan derajat positif terkecil yang dipenuhi oleh a.

Teorema 3.3

Jika V ruang vektor berdimensi berhingga atas field F, maka $f \in A(V)$ adalah invertibel bila dan hanya bila suku konstan polinomial minimal dari f tidak sama dengan nol.

Bukti :

($\Longrightarrow$)

Andaikan $p(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_k x^k$ adalah polinomial minimal f atas field F, maka $p(f) = 0$. Akan dibuktikan bahwa suku konstan dari polinomial p(x) tersebut, yaitu α_0, tidak sama dengan nol.

Andaikan $\alpha_0 = 0$, maka $0 = \alpha_1 f + \alpha_2 f^2 + \ldots + \alpha_k f^k = (\alpha_1 + \alpha_2 f + \ldots + \alpha_k f^{k-1})f$.

Karena f invertibel, maka f punya invers yaitu f^{-1}.

Maka $(\alpha_1 + \alpha_2 f + \ldots + \alpha_k f^{k-1})ff^{-1} = 0$, sehingga

$\alpha_1 + \alpha_2 f + \ldots + \alpha_k f^{k-1} = 0$

Jadi f memenuhi polinomial $q(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \ldots + \alpha_k x^{k-1} \in F[x]$ dengan derajat lebih kecil daripada derajat p(x). Kontradiksi. Jadi α_0(suku konstan polinomial minimal dari f) tidak sama dengan nol. ∎

($\Longleftarrow$)

Andaikan $p(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_k x^k$, $\alpha_0 \neq 0$, $\alpha_k \neq 0$ adalah polinomial minimal dari f atas field F, maka $p(f) = 0$, yaitu :

$$
\begin{aligned}
0 &= \alpha_k f^k + \alpha_{k-1} f^{k-1} + \ldots + \alpha_1 f + \alpha_0 \\
\alpha_0 &= -(\alpha_k f^k + \alpha_{k-1} f^{k-1} + \ldots + \alpha_1 f) \\
\alpha_0^{-1} \alpha_0 &= -\alpha_0^{-1}(\alpha_k f^k + \alpha_{k-1} f^{k-1} + \ldots + \alpha_1 f) \\
I &= -\alpha_0^{-1}(\alpha_k f^k + \alpha_{k-1} f^{k-1} + \ldots + \alpha_1 f) \\
I &= -\alpha_0^{-1} f(\alpha_k f^{k-1} + \alpha_{k-1} f^{k-2} + \ldots + \alpha_1) \\
I &= f[-\alpha_0^{-1}(\alpha_k f^{k-1} + \alpha_{k-1} f^{k-2} + \ldots + \alpha_1)]
\end{aligned}
$$

Jadi f invertibel. ∎

Corollary 3.2

Jika V berdimensi berhingga atas field F dan $f \in A(V)$ adalah invertibel, maka f^{-1} adalah polinomial dalam f atas field F.

Bukti :

Karena f invertibel, maka menurut teorema 3.3, $0 = \alpha_k f^k + \alpha_{k-1} f^{k-1} + \ldots + \alpha_1 f + \alpha_0$ dengan $\alpha_0 \neq 0$. Sehingga diperoleh $I = f[-\alpha_0^{-1}(\alpha_k f^{k-1} + \alpha_{k-1} f^{k-2} + \ldots + \alpha_1)]$.

Jadi $f^{-1} = -\alpha_0^{-1}(\alpha_k f^{k-1} + \alpha_{k-1} f^{k-2} + \ldots + \alpha_1)$ merupakan suatu polinomial dalam f atas field F.

Corollary 3.3

Jika V ruang vektor berdimensi berhingga atas field F, dan $f \in A(V)$ adalah singular, maka ada $g \neq 0 \in A(V)$ sehingga $gf = fg = 0$.

Bukti :

Karena $f \in A(V)$ singular, yaitu f tidak invertibel, maka menurut teorema 3.3 suku konstan polinomial minimal f, yaitu $p(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_k x^k$ harus sama dengan nol. Jadi $\alpha_0 = 0$. Sehingga

$0 = \alpha_1 f + \alpha_2 f^2 + \ldots + \alpha_k f^k$

$0 = f(\alpha_1 + \alpha_2 f + \ldots + \alpha_k f^{k-1})$

$0 = fg$. di mana $g = \alpha_1 + \alpha_2 f + \ldots + \alpha_k f^{k-1}$.

Demikian juga

$0 = (\alpha_1 + \alpha_2 f + \ldots + \alpha_k f^{k-1})f$

$0 = gf$ di mana $g = \alpha_1 + \alpha_2 f + \ldots + \alpha_k f^{k-1}$

Karena derajat polinomial $\alpha_1 + \alpha_2 x + \ldots + \alpha_k x^{k-1}$ kurang dari derajat $p(x)$, maka $g \neq 0$.

Terbukti ada $g \in A(V)$, $g \neq 0$, sedemikian sehingga $gf = fg = 0$. ∎

Corollary 3.4

Jika V ruang vektor berdimensi berhingga atas field F dan $f \in A(V)$ invertibel kanan, maka f adalah invertibel/regular.

Bukti :

Andaikan f singular, maka ada $g \neq 0 \in A(V)$ sehingga $gf = 0$. Karena f invertibel kanan, maka ada $h \in A(V)$ sedemikian sehingga $fh = I$. Karena $gf = 0$, maka $(gf)h = 0$

$$g(fh) = 0$$

$$gI = 0$$

$$g = 0. \qquad \text{Kontradiksi}$$

Jadi f regular. ∎

Teorema 3.4

Jika V ruang vektor berdimensi berhingga atas F, maka $f \in A(V)$ singular bila dan hanya bila ada $v \neq 0 \in V$ sedemikian sehingga $f(v) = 0$.

Bukti :

(===>)

Dengan Corrolary 3.3, karena f singular, maka ada $g \neq 0$ dalam A(V) sedemikian sehingga $gf = fg = 0$. Karena $g \neq 0$, maka ada elemen $w \in V$ sedemikian sehingga $g(w) \neq 0$.

Andaikan $v = g(w)$, maka $f(v) = f(g(w)) = (gf)w = 0(w) = 0$

Jadi ada $v \neq 0 \in V$ sedemikian sehingga $f(v) = 0$.

(<===)

Ada $v \neq 0 \in V$ sedemikian sehingga $f(v) = 0$.

Andaikan $f \in A(V)$ regular/invertibel, maka ada $g \in A(V)$ sedemikian sehingga $fg = I$. Jadi $(fg)(v) = g(f(v)) = g(0) = 0$. Di lain pihak, karena $fg = I$ maka $(fg)(v) = I(v) = v$. Jadi $v = 0$. Kontradiksi.

$\therefore$ f Singular ∎

<u>Teorema 3.5</u>

Jika V berdimensi berhingga atas field F, maka $f \in A(V)$ adalah regular bila dan hanya bila f memetakan V onto V.

<u>Bukti :</u>

(===>)

Ambil $v \in V$ dan $f \in A(V)$ regular. Maka $f^{-1} \in A(V)$, sehingga $f^{-1}(v) \in V$. Dan $v = I(v) = f(f^{-1}(v))$, yaitu $v \in f(V)$.

Karena berlaku untuk setiap $v \in V$, maka $f(V) = V$.

Jadi f onto

(<===)

Misalkan dim $V = n$.

Andaikan f tidak regular. Akan ditunjukkan bahwa f tidak onto. Karena f tidak regular, maka menurut Teorema 3.4 ada sustu vektor $v_1 \neq 0 \in V$ sedemikian sehingga $f(v_1) = 0$. Karena v_1 bebas linear, maka kita dapat menentukan vektor-vektor $v_2, v_3, \ldots, v_n \in V$ sedemikian sehingga $v_1, v_2, \ldots, v_n$ basis dari V.

Ambil sebarang $z \in f(V)$. Maka terdapat $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in F$ sedemikian sehingga $z = f(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n) = \alpha_1 f(v_1) + \alpha_2 f(v_2) + \ldots + \alpha_n f(v_n)$. Jadi tiap $z \in f(V)$ dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari $f(v_1)$, $f(v_2), \ldots, f(v_n)$. Karena $f(v_1) = 0$ maka basis dari $f(V)$ paling banyak terdiri dari n-1 elemen. Sehingga $\dim(f(V)) \leq n-1 < n = \dim(V)$.

Jadi $V \neq f(V)$, maka f tidak onto.∎

Teorema di atas menunjukkan bahwa dalam kasus dimensi berhingga kita dapat membedakan elemen-elemen regular dan elemen-elemen singular dari suatu aljabar atas field F. Jika $f \in A(V)$, maka f regular bila dan hanya bila $\dim(f(V)) = \dim(V)$.

Definisi 3.6

Himpunan S yang merupakan subset dari ruang vektor V disebut *sub ruang vektor* jika untuk setiap $v, w \in S$ dan $\alpha \in F$, $v + w \in S$ dan $\alpha v \in S$.

Teorema 3.6

Jika $f \in A(V)$, maka $f(V)$ adalah sub ruang vektor dari V.

Bukti :

Ambil sebarang $a, b \in f(V)$ dan skalar $k \in F$.

Akan ditunjukkan bahwa $a + b \in f(V)$ dan $ka \in f(V)$.

Karena $a, b \in f(V)$, maka ada vektor $a_1, b_1 \in V$ sedemikian sehingga $f(a_1) = a$ dan $f(b_1) = b$. Maka

$$\begin{aligned} a + b &= f(a_1) + f(b_1) \\ &= f(a_1 + b_1) \\ &= f(v) \quad \text{di mana } v = a_1 + b_1 \in V \end{aligned}$$

Jadi $f(v) \in f(V)$, dan oleh karenanya $a + b \in f(V)$.

Demikian pula

$ka = kf(a_1) = f(ka_1) = f(w)$, di mana $w = ka_1 \in V$

Terbukti $ka \in f(V)$. ∎

Definisi 3.7

Jika $f \in A(V)$, maka *kernel* f, yaitu $Ker(f)$, didefinisikan sebagai $Ker(f) = \{ v \in V \mid f(v) = 0 \}$.

Teorema 3.7

Jika $f \in A(V)$, maka $Ker(f)$ adalah sub ruang vektor dari V.

Bukti :

Ambil sebarang $v, w \in Ker(f)$ dan skalar $k \in F$. Maka :

i. $f(v + w) = f(v) + f(w)$

$= 0 + 0 = 0$.

Jadi $(v + w) \in ker(f)$

ii. $f(kv) = kf(v) = k0 = 0$.

Jadi $kv \in Ker(f)$.

Dari i, ii terbukti $Ker(f)$ adalah sub ruang dari V. ∎

Dua sub ruang vektor di atas, yaitu f(V) dan Ker(f) berturut-turut disebut *ruang range* dan *ruang nul* dari f.

Teorema 3.8

Andaikan V ruang vektor atas field F, dan $f \in A(V)$. Ketiga pernyataan berikut adalah ekuivalen :

1. f regular
2. f injektif
3. Ker(f) = {0}

Bukti :

(1) ===> (2)

Andaikan $f \in A(V)$ regular dan f(v) = f(w). Maka

$f^{-1}(f(v)) = f^{-1}(f(w))$, sehingga

$(ff^{-1})(v) = (ff^{-1})(w)$

$I(v) = I(w)$

$v = w$. Terbukti f injektif.

(2) ===> (3)

Jelas bahwa $0 \in Ker(f)$. Bila diambil sebarang $v \in Ker(f)$, maka f(v) = 0 = f(0). Karena f injektif, maka haruslah v = 0. Jadi Ker(f) = {0}.

(3) ===> (1)

Andaikan $f \in A(V)$ singular. Maka menurut teorema 3.4 ada $v \neq 0 \in V$ sedemikian sehingga f(v) = 0.

Jadi $Ker(f) \neq \{0\}$. ▩

Definisi 3.8

Jika V berdimensi berhingga atas field F dan $f \in A(V)$, maka *rank* f dilambangkan dengan $r(f)$ adalah dimensi dari $f(V)$.

Teorema 3.9

Jika V berdimensi berhingga atas field F, maka untuk $f, g \in A(V)$ berlaku :

1. $r(fg) \leq r(g)$
2. $r(gf) \leq r(g)$
3. Jika f regular dalam A(V), maka $r(gf) = r(fg) = r(g)$

Bukti :

1. Karena $f(V) \subseteq V$, maka $(fg)(V) = g(f(V)) \subseteq g(V)$. Selanjutnya dipakai teorema : Jika V berdimensi berhingga dan W sub ruang vektor dari V, maka W berdimensi berhingga, dan dim W $\leq$ dim V . Maka dim $(fg)(V) \leq$ dim $g(V)$, sehingga $r(fg) \leq r(g)$.
2. Andai $r(g) = m$, berarti $g(V)$ mempunyai basis yang terdiri dari m elemen, yaitu $w_1, w_2, \ldots, w_m$. Maka $f(g(V))$ dapat dihasilkan oleh $f(w_1)$, $f(w_2)$, ... , $f(w_m)$, sehingga mempunyai dimensi paling banyak m, yaitu $\dim(f(g(V)) = \dim((gf)(V)) \leq m$.

   Jadi $r(gf) = \dim((gf)(V)) \leq m = \dim g(V) = r(g)$.

   $\therefore r(gf) \leq r(g)$.
3. Jika f invertibel (regular), maka menurut teorema 3.5 transformasi linear f memetakan V onto V, yaitu $f(V) =$

V, sehingga $(fg)(V) = g(f(V)) = g(V)$. Jadi $r(fg) = \dim((fg)(V)) = \dim(g(V)) = r(g)$. Andaikan $g(V)$ berdimensi m dengan basis $w_1, w_2, \ldots, w_m$. Maka $w_1, w_2, \ldots, w_m$ bebas linear. Sehingga bila $\alpha_1 w_1 + \ldots + \alpha_m w_m = 0$, maka $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_m = 0$.

Andaikan $\beta_1 f(w_1) + \ldots + \beta_m f(w_m) = 0$. Karena $f \in A(V)$, maka $\beta_1 f(w_1) + \ldots + \beta_m f(w_m) = f(\beta_1 w_1 + \ldots + \beta_m w_m) = 0$. Karena f regular, maka menurut teorema 3.8 $Ker(f) = \{0\}$. Sehingga $\beta_1 w_1 + \ldots + \beta_m w_m = 0$. Jadi $\beta_1 = \ldots = \beta_m = 0$. Jadi $f(w_1), \ldots, f(w_m)$ adalah bebas linear.

Ambil sebarang $z \in f(g(V))$. Maka terdapat $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m \in F$ sedemikiaan sehingga $z = f(\gamma_1 w_1 + \ldots + \gamma_m w_m) = \gamma_1 f(w_1) + \ldots + \gamma_m f(w_m)$. Jadi tiap $z \in f(g(V))$ dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari $f(w_1), \ldots, f(w_m)$. Sehingga $f(w_1), \ldots, f(w_m)$ adalah sistem generator untuk $f(g(V))$. Karena $f(w_1), \ldots, f(w_m)$ adalah bebas linear dan merupakan sistem generator untuk $f(g(V))$, maka $f(w_1), \ldots, f(w_m)$ adalah basis dari $f(g(V)) = (gf)(V)$. Jadi $\dim((gf)(V)) = \dim(g(V)) = m$. Maka $r(gf) = \dim((gf)(V)) = \dim(g(V)) = r(g)$.

Jadi $r(gf) = r(fg) = r(g)$.■

<u>Corollary 3.4</u>

Jika $f \in A(V)$ dan jika $g \in A(V)$ regular, maka $r(f) = r(gfg^{-1})$

Bukti :

Dengan menggunakan Teorema 3.9 bagian 3, $r(gfg^{-1}) = r(g(fg^{-1})) = r((fg^{-1})g) = r(f(g^{-1}g)) = r(fI) = r(f)$. ∎

BAB IV

AKAR-AKAR KARAKTERISTIK

Pada bagian ini, kita akan tetap membatasi diri pada transformasi linear pada ruang vektor berdimensi berhingga. Jadi V selalu melambangkan suatu ruang vektor berdimensi berhingga atas field F.

A(V) adalah aljabar dengan elemen satuan I. Untuk $\lambda \in F$, $f \in A(V)$ simbol $\lambda - f$ berarti $\lambda I - f$.

Definisi 4.1

Jika $f \in A(V)$,maka $\lambda \in F$ disebut *akar karakteristik* (nilai eigen) dari f jika $\lambda - f$ singular.

Teorema 4.1

Elemen $\lambda \in F$ adalah akar karakteristik dari $f \in A(V)$ bila dan hanya bila ada $v \neq 0 \in V$ sedemikian sehingga $f(v) = \lambda v$.

Bukti :

λ akar karakteristik dari f bila dan hanya bila $\lambda - f$ singular bila dan hanya bila (dengan teorema 3.4) ada vektor $v \neq 0 \in V$ sedemikian hingga

$$
\begin{aligned}
&(\lambda - f)(v) = 0 \\
\Longleftrightarrow\ &\lambda v - f(v) = 0 \\
\Longleftrightarrow\ &\lambda v = f(v). \quad ■
\end{aligned}
$$

Definisi 4.2

Elemen $v \neq 0 \in V$, disebut *vektor karakteristik* dari $f \in A(V)$ yang berkaitan dengan akar karakteristik $\lambda \in F$, jika $f(v) = \lambda v$.

Teorema 4.2

Jika $\lambda \in F$ akar karakteristik dari $f \in A(V)$, maka untuk setiap polinomial $q(x) \in F[x]$, $q(\lambda)$ adalah akar karakteristik dari $q(f)$.

Bukti :

Andaikan λ akar karakteristik dari f. Menurut teorema 4.1 ada $v \neq 0 \in V$ sedemikian sehingga $f(v) = \lambda v$.

Selanjutnya $f^2(v) = f(f(v)) = f(\lambda v) = \lambda(f(v)) = \lambda(\lambda v) = \lambda^2 v$. Dengan melanjutkan cara itu, kita akan memperoleh $f^k(v) = \lambda^k v$ untuk semua bilangan bulat positif k.

Jika $q(x) = \alpha_0 x^m + \alpha_1 x^{m-1} + \ldots + \alpha_m$, dengan $\alpha_i \in F$; $i = 0, 1, 2, \ldots, m$, maka

$$q(f) = \alpha_0 f^m + \alpha_1 f^{m-1} + \ldots + \alpha_m$$

$$\begin{aligned} q(f)(v) &= (\alpha_0 f^m + \alpha_1 f^{m-1} + \ldots + \alpha_m)(v) \\ &= \alpha_0(f^m(v)) + \alpha_1(f^{m-1}(v)) + \ldots + \alpha_m v \\ &= \alpha_0(\lambda^m v) + \alpha_1(\lambda^{m-1} v) + \ldots + \alpha_m v \\ &= (\alpha_0 \lambda^m)v + (\alpha_1 \lambda^{m-1})v + \ldots + \alpha_m v \\ &= (\alpha_0 \lambda^m + \alpha_1 \lambda^{m-1} + \ldots + \alpha_m)v \\ &= q(\lambda)v. \end{aligned}$$

Jadi $q(f)(v) = q(\lambda)v$ dengan $v \neq 0$. Menurut teorema 4.1, $q(\lambda)$

adalah akar karakteristik dari $q(f)$. ∎

Teorema 4.3

Jika $\lambda \in F$ adalah akar karakteristik dari $f \in A(V)$, maka λ adalah akar polinomial minimal dari f. Khususnya f hanya mempunyai berhingga banyak akar-akar karakteristik dalam F.

Bukti :

Andaikan $p(x)$ adalah polinomial minimal dari f atas field F, maka $p(f) = 0$. Menurut teorema 4.1, jika $\lambda \in F$ adalah akar karakteristik dari f, maka ada $v \neq 0 \in V$ sedemikian sehingga $f(v) = \lambda v$. Dari bukti teorema 4.2 di atas $p(f)(v) = p(\lambda)(v)$. Karena $p(f) = 0$, maka $p(\lambda)v = 0$. Karena $v \neq 0$, maka haruslah $p(\lambda) = 0$. Jadi λ adalah akar dari $p(x)$. Karena $\dim(V) = n$, maka $\dim(A(V)) = n^2$. Jadi derajat $p(x)$ paling tinggi n^2. Sehingga $p(x)$ hanya mempunyai berhingga banyak akar-akar di dalam F. Jadi f hanya mempunyai berhingga banyak akar-akar karakteristik di dalam F. ∎

Teorema 4.4

Jika $f, g \in A(V)$ dan jika g regular, maka f dan gfg^{-1} mempunyai polinomial minimal yang sama.

Bukti :

Jika $f, g \in A(V)$ dan g regular, maka $(gfg^{-1})^2 = g\,f^2\,g^{-1}$; $(gfg^{-1})^3 = g\,f^3 g^{-1}$; . . . , $(gfg^{-1})^k = g\,f^k\,g^{-1}$ untuk tiap bilangan bulat positif k. Misalkan $p(x) = \alpha_0 x^m + \alpha_1 x^{m-1} + \ldots + \alpha_m$ adalah polinomial minimal dari f. Maka $p(f) = 0$, dan

$$\begin{aligned} p(gfg^{-1}) &= \alpha_0(gfg^{-1})^m + \alpha_1(gfg^{-1})^{m-1} + \ldots + \alpha_m \\ &= \alpha_0(gf^m g^{-1}) + \alpha_1(gf^{m-1}g^{-1}) + \ldots + \alpha_m \\ &= \alpha_0 gf^m g^{-1} + \alpha_1 gf^{m-1} g^{-1} + \ldots + g\alpha_m g^{-1} \\ &= g\alpha_0 f^m g^{-1} + g\alpha_1 f^{m-1} g^{-1} + \ldots + g\alpha_m g^{-1} \\ &= g(\alpha_0 f^m + \alpha_1 f^{m-1} + \ldots + \alpha_m)g^{-1} \\ &= g\, p(f)\, g^{-1} = 0. \end{aligned}$$

Jadi $p(x)$ juga polinomial minimal untuk gfg^{-1}. ∎

Teorema 4.5

Transformasi linear $f \in A(V)$ mempunyai akar karakteristik $\lambda = 0$ bila dan hanya bila $Ker(f) \neq \{0\}$.

Bukti :

(===>)

Bila transformasi linear f mempunyai akar karakteristik $\lambda = 0$, maka ada $v \neq 0 \in V$ sedemikian sehingga $f(v) = \lambda v = 0v = 0$.

Jadi $v \neq 0 \in Ker(f)$.

$\therefore Ker(f) \neq \{0\}$.

(<===)

Bila $Ker(f) \neq \{0\}$, maka ada $v \neq 0 \in Ker(f)$ dan $f(v) = 0$. Maka $f(v) = 0 = 0v$. Menurut teorema 4.1, 0 adalah akar karakteristik dari f. ∎

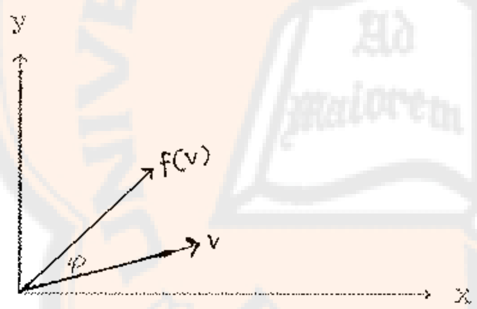
Tidak semua transformasi linear mempunyai vektor karakteristik.

Contoh :

Kita perhatikan rotasi pada bidang Euclid $\mathbb{R}^2$.

Setiap vektor v pada bidang diputar dengan sudut φ berlawanan dengan arah perputaran jarum jam menjadi vektor f(v). Maka $f : v \longrightarrow f(v)$ mendefinisikan suatu transformasi linear $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$.

Jelas bahwa semua arah vektor $v \neq 0 \in \mathbb{R}^2$ berubah. Jadi untuk tiap $v \neq 0 \in \mathbb{R}^2$, $f(v) \neq \lambda v$. Dengan demikian transformasi linear $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tidak mempunyai vektor karakteristik.



Teorema 4.6

Bila transformasi linear $f \in A(V)$ mempunyai akar - akar karakteristik λ_1 dan λ_2, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, dan vektor-vektor karakteristik v_1, v_2 yang berkaitan dengan λ_1, λ_2, maka $\{v_1, v_2\}$ bebas linear.

Bukti :

Andaikan $\{v_1, v_2\}$ tidak bebas linear dan misalkan $v_2 = \alpha v_1$ untuk suatu $\alpha \neq 0 \in F$. Maka $f(v_2) = f(\alpha v_1) = \alpha f(v_1)$. Di lain pihak, $f(v_2) = \lambda_2 v_2$ dan $\alpha f(v_1) = \alpha(\lambda_1 v_1)$. Jadi $\lambda_2 v_2 =$

$\alpha(\lambda_1 v_1)$. Karena $v_2 = \alpha v_1$, maka $\lambda_2(\alpha v_1) = \alpha(\lambda_1 v_1)$

$$\alpha(\lambda_2 v_1) = \alpha(\lambda_1 v_1)$$

$$\lambda_2 v_1 = \lambda_1 v_1$$

$$\lambda_2 = \lambda_1 \quad \text{Kontradiksi}$$

Jadi $\{v_1, v_2\}$ bebas linear. ∎

Dengan induksi matematik, dapat kita buktikan bahwa teorema di atas berlaku secara umum untuk tiap bilangan bulat positif k. Hal ini dapat kita lihat dalam teorema berikut :

Teorema 4.7

Bila transformasi linear $f \in A(V)$ mempunyai akar - akar karakteristik $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ yang saling berbeda dan vektor-vektor karakteristik $v_1, \ldots, v_k$ yang berkaitan dengan $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, maka $\{v_1, \ldots, v_k\}$ bebas linear.

Bukti :

Teorema benar untuk $k = 2$.

Andaikan teorema benar untuk $k-1$.

Akan dibuktikan teorema benar untuk k.

Andaikan $\{v_1, \ldots, v_k\}$ tidak bebas linear. Maka salah satu vektor v_i dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari vektor-vektor yang lain, misalkan v_k dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari vektor-vektor $\{v_1, \ldots, v_{k-1}\}$, yaitu : $v_k = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_{k-1} v_{k-1}$ sehingga

$$f(v_k) = f(\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_{k-1} v_{k-1})$$

$$\lambda_k v_k = f(\alpha_1 v_1) + \ldots + f(\alpha_{k-1} v_{k-1})$$

$$= \alpha_1 f(v_1) + \ldots + \alpha_{k-1} f(v_{k-1})$$

$$= \alpha_1 \lambda_1 v_1 + \ldots + \alpha_{k-1} \lambda_{k-1} v_{k-1}$$

Karena $v_k = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_{k-1} v_{k-1}$, maka $\lambda_k(\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_{k-1} v_{k-1}) = \alpha_1 \lambda_1 v_1 + \ldots + \alpha_{k-1} \lambda_{k-1} v_{k-1}$. Sehingga $\alpha_1(\lambda_k - \lambda_1)v_1 + \ldots + \alpha_{k-1}(\lambda_k - \lambda_{k-1})v_{k-1} = 0$. Menurut hipotesa induksi $\{v_1, \ldots, v_{k-1}\}$ bebas linear.

Maka diperoleh $\alpha_1(\lambda_k - \lambda_1) = \ldots = \alpha_{k-1}(\lambda_k - \lambda_{k-1}) = 0$.

Karena $\lambda_k - \lambda_i \neq 0$, untuk $i = 1, \ldots, k-1$, maka $\alpha_1 = \ldots = \alpha_{k-1} = 0$.

Jadi $v_k = 0$. Kontradiksi.

$\therefore \{v_1, \ldots, v_k\}$ bebas linear. ∎

<u>Corollary 4.1</u>

Jika $f \in A(V)$ dan $\dim(V) = n$, maka f mempunyai paling banyak n akar karakteristik yang berbeda dalam F.

<u>Bukti :</u>

Menurut teorema 4.7, tiap himpunan akar-akar karakteristik yang berbeda dari f membangkitkan himpunan vektor-vektor karakteristik yang berkaitan dan bebas linear dalam V. Karena $\dim(V) = n$, maka himpunan vektor - vektor yang bebas linear dalam V paling banyak memuat n elemen. Jadi haruslah f mempunyai paling banyak n akar karakteristik yang berbeda .∎

<u>Corollary 4.2</u>

Jika $f \in A(V)$ dan jika $\dim(V) = n$, dan jika f mempunyai n

akar-akar karakteristik yang berbeda dalam F, maka ada basis dari V yang terdiri dari vektor-vektor karakteristik dari f.

Bukti :

Menurut teorema 4.7, n akar-akar karakteristik yang berbeda dari f akan membangkitkan n vektor-vektor karakteristik yang berkaitan, misalnya. v_1, $v_2, \ldots,$ v_n, yang bebas linear. Karena dim(V) = n, maka untuk tiap y ∈ V, {v_1, $v_2, \ldots,$ v_n, y} tidak bebas linear. Jadi y dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari v_1, $v_2, \ldots,$ v_n. Maka v_1, $v_2, \ldots,$ v_n adalah basis untuk V. ∎

BAB V

TRANSFORMASI LINEAR DAN MATRIKS

Pada bagian ini, kita akan melihat hubungan antara transformasi linear pada ruang vektor berdimensi n dengan matriks. Hubungan ini akan kita lihat melalui teorema berikut.

<u>Teorema 5.1</u>

Setiap transformasi linear pada ruang vektor V berdimensi n atas field F menentukan secara tunggal n^2 buah skalar terhadap suatu basis tertentu. Dan sebaliknya setiap n^2 buah skalar dengan urutan tertentu menentukan secara tunggal suatu transformasi linear $f \in A(V)$.

<u>Bukti :</u>

Andaikan V ruang vektor berdimensi berhingga dan $v_1, \ldots, v_n$ adalah basis dari V atas field F. Ambil sebarang $f \in A(V)$. Maka $f(v_1)$, $f(v_2)$, ..., $f(v_n) \in V$, sehingga tiap $f(v_i)$ dapat dinyatakan secara tunggal sebagai suatu kombinasi linear dari vektor-vektor basis v_1, v_2, ..., v_n, yaitu :

$$f(v_i) = \alpha_{i1}v_1 + \alpha_{i2}v_2 + \ldots + \alpha_{in}v_n$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}v_j \qquad \text{untuk tiap } i = 1,2,\ldots,n.$$

Jadi tertentu secara tunggal n^2 buah skalar $\alpha_{ij} \in F$ untuk $i,j = 1, \ldots, n$.

Sebaliknya, Andaikan diberikan n^2 buah skalar α_{ij} dengan urutan tertentu, untuk i,j = 1, ..., n. Maka kita definisikan pemetaan $f : V \longrightarrow V$ dengan persamaan :

$$f(v_1) = \alpha_{11}v_1 + \alpha_{12}v_2 + \ldots + \alpha_{1n}v_n = w_1$$
$$f(v_2) = \alpha_{21}v_1 + \alpha_{22}v_2 + \ldots + \alpha_{2n}v_n = w_2$$
$$\vdots$$
$$f(v_n) = \alpha_{n1}v_1 + \alpha_{n2}v_2 + \ldots + \alpha_{nn}v_n = w_n$$

(di mana $v_1, \ldots, v_n$ adalah suatu basis untuk V)

dan untuk sebarang $v \in V$ (di mana $v = \beta_1 v_1 + \ldots + \beta_n v_n$ dengan $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n \in F$), $f(v) = f(\beta_1 v_1 + \ldots + \beta_n v_n) = \beta_1 w_1 + \ldots + \beta_n w_n$.

Akan kita tunjukkan bahwa pemetaan tersebut well-defined.

Ambil sebarang $v, w \in V$ sedemikian sehingga $v = w$. Maka

$f(v) = f(\beta_1 v_1 + \ldots + \beta_n v_n) = \beta_1 w_1 + \ldots + \beta_n w_n$

$f(w) = f(\gamma_1 v_1 + \ldots + \gamma_n v_n) = \gamma_1 w_1 + \ldots + \gamma_n w_n$

Karena $v = w$, maka $\beta_1 v_1 + \ldots + \beta_n v_n = \gamma_1 v_1 + \ldots + \gamma_n v_n$, sehingga $(\beta_1 - \gamma_1)v_1 + \ldots + (\beta_n - \gamma_n)v_n = 0$.

Karena $v_1, \ldots, v_n$ adalah bebas linear, maka $\beta_i - \gamma_i = 0$ untuk i = 1, 2, ..., n. Jadi $\beta_i = \gamma_i$ untuk i = 1, 2, ..., n. Sehingga $\beta_1 w_1 + \ldots + \beta_n w_n = \gamma_1 w_1 + \ldots + \gamma_n w_n$.

Jadi $f(v) = f(w)$.

Ambil sebarang $v, w \in V$, maka $v = \beta_1 w_1 + \ldots + \beta_n w_n$ dan $w = \gamma_1 w_1 + \ldots + \gamma_n w_n$. Sehingga

$$\begin{aligned} f(v + w) &= f(\beta_1 v_1 + \ldots + \beta_n v_n + \gamma_1 v_1 + \ldots + \gamma_n v_n) \\ &= f((\beta_1 + \gamma_1)v_1 + \ldots + (\beta_n + \gamma_n)v_n) \\ &= (\beta_1 + \gamma_1)w_1 + \ldots + (\beta_n + \gamma_n)w_n \\ &= \beta_1 w_1 + \ldots + \beta_n w_n + \gamma_1 w_1 + \ldots + \gamma_n w_n \end{aligned}$$

$$= f(\beta_1 v_1 + \ldots + \beta_n v_n) + f(\gamma_1 v_1 + \ldots + \gamma_n v_n)$$
$$= f(v) + f(w).$$

Untuk sebarang $v \in V$ dan $\alpha \in F$ berlaku

$$\begin{aligned} f(\alpha v) &= f(\alpha(\beta_1 v_1 + \ldots + \beta_n v_n)) \\ &= f(\alpha\beta_1 v_1 + \ldots + \alpha\beta_n v_n) \\ &= \alpha\beta_1 w_1 + \ldots + \alpha\beta_n w_n \\ &= \alpha(\beta_1 v_1 + \ldots + \beta_n v_n) \\ &= \alpha f(\beta_1 v_1 + \ldots + \beta_n v_n) \\ &= \alpha f(v). \end{aligned}$$

Jadi f adalah suatu transformasi linear dari V ke V. ∎

Pada pembicaraan selanjutnya, kita akan memperhatikan susunan berbentuk bujur sangkar dari n^2 buah skalar-skalar yang disebut *matriks*. Teorema 5.1 memberikan informasi kepada kita bahwa setiap transformasi linear menentukan suatu matriks relatif terhadap basis tertentu, dan sebaliknya terhadap suatu basis tertentu setiap matriks menentukan suatu transformasi linear.

Skalar-skalar α_{ij} bergantung pada pemilihan basis maupun pada transformasi linear f. Sebagai contoh, andaikan transformasi linear f adalah rotasi pada bidang sebesar 90^o dengan arah berlawanan arah jarum jam. Dengan mengacu pada koordinat kartesian, andaikan dipilih $v_1 = (1,0)$ dan $v_2 = (0,1)$ sebagai basis. Maka

$$f(v_1) = f((1,0)) = (0,1) = 0v_1 + 1v_2.$$
$$f(v_2) = f((0,1)) = (-1,0) = (-1)v_1 + 0v_2.$$

dan empat skalar yang mewakili f adalah :

$\alpha_{11} = 0$, $\alpha_{12} = 1$, $\alpha_{21} = -1$, $\alpha_{22} = 0$, yang dapat disusun sebagai matriks $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

Andaikan kita memilih basis yang lain, misalnya w_1 = (1,1) dan w_2 = (-1,0). Maka

$$f(w_1) = f((1,1)) = (-1,1) = 1w_1 + 2w_2.$$

$$f(w_2) = f((-1,0)) = (0,-1) = (-1)w_1 + (-1)w_2.$$

dan empat skalar yang mewakili f adalah :

$\beta_{11} = 1$, $\beta_{12} = 2$, $\beta_{21} = -1$, $\beta_{22} = -1$, yang dapat disusun sebagai matriks $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$

Definisi 5.1

Andaikan V adalah ruang vektor berdimensi-n dan andaikan $v_1, v_2, \ldots, v_n$ adalah basis dari V atas field F. Jika $f \in A(V)$, maka matriks dari f terhadap basis $v_1, v_2, \ldots, v_n$, yang dilambangkan dengan m(f), adalah

$$m(f) = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & & \alpha_{nn} \end{bmatrix}$$

di mana $f(v_i) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} v_j$ untuk tiap i = 1, 2, ..., n

Contoh 5.1 :

Andaikan V adalah himpunan semua polinomial dalam x dengan derajat tidak lebih dari (n-1) atas field F. Pada V didefinisikan pemetaan f dengan aturan $f(\beta_0 + \beta_1 x + \ldots + \beta_{n-1}x^{n-1}) = \beta_1 + 2\beta_2 x + \ldots + i\beta_i x^{i-1} + \ldots + (n-1)\beta_{(n-1)}x^{n-2}$. Jadi f tidak lain daripada operator turunan, yang jelas merupakan suatu transformasi linear. Tentukan matriks dari f jika vektor-vektor basis dari V adalah :

a. $v_1 = 1,\ v_2 = x,\ v_3 = x^2,\ \ldots,\ v_i = x^{i-1}, \ldots, v_n = x^{n-1}$

b. $w_1 = x^{n-1},\ w_2 = x^{n-2},\ \ldots,\ w_i = x^{n-i},\ \ldots,\ w_n = 1.$

c. $u_1 = 1,\ u_2 = 1+x,\ u_3 = 1+x^2,\ \ldots,\ u_n = 1+x^{n-1}$

Penyelesaian :

a. $f(v_1) = f(1) = 0 = 0v_1 + 0v_2 + \ldots + 0v_n$

$f(v_2) = f(x) = 1 = 1v_1 + 0v_2 + \ldots + 0v_n$

$f(v_3) = f(x^2) = 2x = 0v_1 + 2v_2 + \ldots + 0v_n$

$f(v_4) = f(x^3) = 3x^2 = 0v_1 + 0v_2 + 3v_3 + \ldots + 0v_n$

.

.

.

$f(v_n) = f(x^{n-1}) = (n-1)x^{n-2} = 0v_1 + 0v_2 + \ldots + 0v_{n-2} + (n-1)v_{n-1} + 0v_n$

Dengan menggunakan definisi 5.1, maka matriks dari f adalah :

$$m_1(f) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & (n-1) & 0 \end{bmatrix}$$

b. $f(w_1) = f(x^{n-1}) = (n-1)x^{n-2}$

$= 0w_1 + (n-1)w_2 + 0w_3 + \ldots + 0w_i + \ldots + 0w_n$

$f(w_2) = f(x^{n-2}) = (n-2)x^{n-3}$

$= 0w_1 + 0w_2 + (n-2)w_3 + \ldots + 0w_i + \ldots + 0w_n$

$f(w_3) = f(x^{n-3}) = (n-3)x^{n-4}$

$= 0w_1 + 0w_2 + 0w_3 + (n-3)w_4 + \ldots + 0w_i + \ldots +$

$0w_n$

.
.
.

$f(w_i) = f(x^{n-i}) = (n-i)x^{n-i-1}$

$= 0w_1 + 0w_2 + 0w_3 + \ldots + 0w_i + (n-i)w_{i+1} + \ldots$

$+ 0w_n$

$f(w_n) = f(1) = 0$

$= 0w_1 + 0w_2 + \ldots + 0w_n$

Jadi

$$m_2(f) = \begin{bmatrix} 0 & (n-1) & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (n-2) & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (n-3) & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ . & & & & & & \\ . & & & & & & \\ . & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \end{bmatrix}$$

c. $f(u_1) = f(1) = 0 = 0u_1 + 0u_2 + \ldots + 0u_n$

$f(u_2) = f(1+x) = 1 = 1u_1 + 0u_2 + \ldots + 0u_n$

$f(u_3) = f(1+x^2) = 2x$

$= 2(u_2 - u_1) = -2u_1 + 2u_2 + 0u_3 + \ldots + 0u_n$

.
.
.

$$f(u_n) = f(1+x^{n-1}) = (n-1)x^{n-2} = (n-1)(u_{n-1} - u_1)$$
$$= -(n-1)u_1 + 0u_2 + \ldots + 0u_{n-2} + (n-1)u_{n-1} + 0u_n$$

Jadi

$$m_3(f) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & & & & \\ \cdot & \cdot & & & & \\ \cdot & \cdot & & & & \\ -(n-1) & 0 & 0 & \ldots & (n-1) & 0 \end{bmatrix}$$

Dari tiga jawaban di atas, kita dapat melihat bahwa matriks dari f sepenuhnya tergantung pada basis yang digunakan. Meskipun $m_1(f)$, $m_2(f)$, $m_3(f)$ berbeda satu sama lain, tetapi mereka mewakili transformasi linear yang sama, yaitu : f.

Jika V ruang vektor berdimensi n atas field F dan f adalah transformasi linear pada V yang mempunyai n akar karakteristik yang berbeda $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in F$, maka dengan corollary 4.2 kita dapat menentukan suatu basis v_1, v_2, ..., v_n dari V sedemikian sehingga $f(v_i) = \lambda_i v_i$ untuk $i = 1, 2, \ldots, n$. Terhadap basis ini, f dapat dinyatakan dalam bentuk matriks

$$m(f) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & & & & & \\ \cdot & & & & & \\ \cdot & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Kita sudah melihat bahwa sekali basis dari V dipilih, setiap transformasi linear pada V dapat kita hubungkan dengan suatu matriks. Dan sebaliknya terhadap suatu basis $v_1, v_2, \ldots, v_n$ dari V atas field F, suatu matriks

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1n} \\ . & & . \\ . & & . \\ . & & . \\ \alpha_{n1} & \ldots & \alpha_{nn} \end{bmatrix},$$

di mana $\alpha_{ij} \in F$, untuk i,j = 1, 2, ..., n membangkitkan suatu transformasi linear f pada V yang didefinisikan oleh $f(v_i) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} v_j$ untuk tiap i = 1, ..., n. Perhatikan bahwa matriks dari transformasi linear f yang dibentuk dengan cara di atas adalah sama dengan matriks yang menentukan f. Jadi setiap susunan bujur sangkar yang mungkin dibentuk, dapat berfungsi sebagai matriks dari suatu transformasi linear terhadap basis tertentu.

Di dalam matriks

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1n} \\ . & & . \\ . & & . \\ . & & . \\ \alpha_{n1} & \ldots & \alpha_{nn} \end{bmatrix},$$

elemen α_{ij} adalah elemen *baris* ke-i *kolom* ke-j. Elemen tersebut akan kita sebut unsur (i,j) dari matriks. Untuk selanjutnya kita akan menuliskan (α_{ij}) untuk menunjukkan suatu matriks. Lambang tersebut menunjukkan bahwa unsur (i,j) dari matriks (α_{ij}) adalah elemen α_{ij}.

Andaikan V adalah ruang vektor berdimensi berhingga, dan $v_1, v_2, \ldots, v_n$ adalah basis dari V atas field F. Andaikan f dan g adalah transformasi-transformasi linear pada V, yang terhadap basis tersebut berturut-turut mempunyai matriks $m(f) = (\sigma_{ij})$, dan $m(g) = (\tau_{ij})$. Kita bermaksud untuk mentransfer struktur aljabar $A(V)$ ke himpunan matriks-matriks bujur sangkar dengan elemen-elemen dari F.

Perhatikan bahwa $f = g \iff f(v) = g(v)$ untuk tiap $v \in V$

$\iff f(v_i) = g(v_i)$ untuk tiap $v_1, v_2, \ldots, v_n$ yang merupakan basis dari V atas field F.

$\iff \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} v_j = \sum_{j=1}^{n} \tau_{ij} v_j$ untuk tiap $i = 1, \ldots, n$

$\iff \sigma_{ij} = \tau_{ij}$ untuk tiap $i,j = 1, 2, \ldots, n$

Karena f dan g adalah transformasi linear, maka

$$(f + g)(v_i) = f(v_i) + g(v_i)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} v_j + \sum_{j=1}^{n} \tau_{ij} v_j$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (\sigma_{ij} + \tau_{ij}) v_j \text{ untuk tiap } i = 1, \ldots, n.$$

Sehingga $m(f+g) = (\lambda_{ij})$, di mana $\lambda_{ij} = \sigma_{ij} + \tau_{ij}$ untuk tiap $i,j = 1, 2, \ldots, n$.

Dengan cara yang sama kita dapat menunjukkan bahwa untuk skalar $\varphi \in F$, $m(\varphi f) = (\mu_{ij})$, di mana $\mu_{ij} = \varphi\tau_{ij}$.

Untuk menentukan $m(gf)$ kita perhatikan bahwa

$$(gf)(v_i) = f(g(v_i))$$

$$= f\left(\sum_{j=1}^{n} \tau_{ij} v_j\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \tau_{ij} f(v_j)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \tau_{ij} \sum_{k=1}^{n} \sigma_{jk} v_k$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \tau_{ij} \; \sigma_{jk} \right) v_k$$

Jadi $m(gf) = (\nu_{ik})$, di mana $\nu_{ik} = \sum_{j=1}^{n} \tau_{ij} \; \sigma_{jk}$ untuk tiap $i,k = 1, 2, \ldots, n$.

Berdasarkan perhitungan tersebut di atas, unsur (i,j) dari m(gf) dapat diperoleh dengan cara sebagai berikut : Baris - baris dari m(g) dan kolom - kolom dari m(f) kita pandang sebagai vektor-vektor. Maka unsur (i,j) dari m(gf) tidak lain daripada perkalian skalar (*dot product*) baris ke-i dari m(g) dengan kolom ke-j dari m(f).

Contoh 5.2 :

Andaikan $m(f) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $m(g) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

Perkalian skalar (dot product) baris pertama dari m(g) dengan kolom pertama dari m(f) adalah (-1)(1) + (0)(3) = -1. Jadi unsur (1,1) dari m(gf) adalah -1. Perkalian baris pertama dari m(g) dengan kolom kedua dari m(f) adalah (-1)(2) + (0)(4) = -2. Jadi unsur (1,2) dari m(gf) adalah -2. Perkalian baris kedua dari m(g) dengan kolom pertama dari m(f) adalah (2)(1) + (3)(3) = 11. Jadi unsur (2,1) dari m(gf) adalah 11. Perkalian baris kedua dari m(g) dengan kolom kedua dari m(f) adalah (2)(2) + (3)(4) = 16. Jadi unsur (2,2) dari m(gf) adalah 16. Jadi

$$m(gf) = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 11 & 16 \end{bmatrix}$$

Andaikan $F_n = \{ (\alpha_{ij}) \mid \alpha_{ij} \in F \; ; \; i,j = 1,2, \ldots, n \}$.

Dalam F_n akan kita definisikan kesamaan dari elemen - elemennya, penjumlahan, perkalian skalar dengan elemen-elemen dari F, dan perkalian sedemikian sehingga F_n menjadi suatu aljabar atas field F.

Definisi 5.2

a. Dua matriks (α_{ij}) dan (β_{ij}) dalam F_n dikatakan *sama*, yaitu $(\alpha_{ij}) = (\beta_{ij})$ jika dan hanya jika $\alpha_{ij} = \beta_{ij}$ untuk tiap i dan j.

b. $(\alpha_{ij}) + (\beta_{ij}) = (\lambda_{ij})$, di mana $\lambda_{ij} = \alpha_{ij} + \beta_{ij}$ untuk tiap i dan j.

c. Untuk $\varphi \in F$, $\varphi(\alpha_{ij}) = (\mu_{ij})$, di mana $\mu_{ij} = \varphi\alpha_{ij}$ untuk tiap i dan j.

d. $(\alpha_{ij})(\beta_{ij}) = (\nu_{ij})$, di mana $\nu_{ij} = \sum_k \alpha_{ik}\beta_{kj}$ untuk tiap i dan j.

Teorema 5.2

Terhadap operasi-operasi penjumlahan, perkalian, dan perkalian dengan skalar seperti didefinisikan di atas, F_n merupakan suatu aljabar atas field F.

Bukti :

a. Ambil sebarang (α_{ij}), (β_{ij}), $(\gamma_{ij}) \in F_n$. Maka

I. 1. $(\alpha_{ij}) + (\beta_{ij}) = (\alpha_{ij} + \beta_{ij}) \in F_n$

$\therefore$ Tertutup terhadap operasi penjumlahan

2. $[(\alpha_{ij}) + (\beta_{ij})] + (\gamma_{ij}) = (\alpha_{ij} + \beta_{ij}) + (\gamma_{ij})$

$= ((\alpha_{ij} + \beta_{ij}) + \gamma_{ij})$

$$= (\alpha_{ij} + (\beta_{ij} + \gamma_{ij}))$$
$$= (\alpha_{ij}) + (\beta_{ij} + \gamma_{ij})$$
$$= (\alpha_{ij}) + [(\beta_{ij}) + (\gamma_{ij})]$$

$\therefore$ Operasi penjumlahan bersifat asosiatif.

3. Elemen identitas dalam F_n terhadap operasi penjumlahan adalah $0 \in F_n$, yaitu matriks bujur sangkar dengan semua unsur adalah $0 \in F$.
4. Invers dari $(\alpha_{ij}) \in F_n$ terhadap operasi penjumlahan adalah $(-\alpha_{ij}) \in F_n$.
5. $(\alpha_{ij}) + (\beta_{ij}) = (\alpha_{ij} + \beta_{ij}) = (\beta_{ij} + \alpha_{ij}) = (\beta_{ij}) + (\alpha_{ij})$. Operasi penjumlahan bersifat komutatif.

$\therefore$ $(F_n\ ,\ +)$ adalah grup abel

II. 1. $(\alpha_{ij})(\beta_{ij}) = (\sum_k \alpha_{ik}\beta_{kj}) \in F_n$

2. $[(\alpha_{ij})(\beta_{ij})](\gamma_{ij}) = (\nu_{ij})(\gamma_{ij}) = (\rho_{ij})$, di mana

$\rho_{ij} = \sum_k \nu_{ik}\gamma_{kj}$ untuk tiap i dan j.

$$= \sum_k (\alpha_{i1}\beta_{1k} + \ldots + \alpha_{in}\beta_{nk})\gamma_{kj}$$
$$= \sum_k (\alpha_{i1}\beta_{1k}\gamma_{kj} + \ldots + \alpha_{in}\beta_{nk}\gamma_{kj})$$
$$= \alpha_{i1}\beta_{11}\gamma_{1j} + \ldots + \alpha_{in}\beta_{n1}\gamma_{1j} +$$
$$\alpha_{i1}\beta_{12}\gamma_{2j} + \ldots + \alpha_{in}\beta_{n2}\gamma_{2j} +$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots +$$
$$\alpha_{i1}\beta_{1n}\gamma_{nj} + \ldots + \alpha_{in}\beta_{nn}\gamma_{nj}$$
$$= \alpha_{i1}(\sum_k \beta_{1k}\gamma_{kj}) + \ldots + \alpha_{in}(\sum_k \beta_{nk}\gamma_{kj})$$
$$= \sum_l \alpha_{il}(\sum_k \beta_{lk}\gamma_{kj})$$
$$= \sum_l \alpha_{il}\mu_{lj}\ ,\ \text{di mana } \mu_{lj} = \sum_k \beta_{lk}\gamma_{kj}$$

Jadi

$$(\rho_{ij}) = (\sum_{l} \alpha_{il}\mu_{lj})$$
$$= (\alpha_{ij})(\mu_{ij})$$
$$= (\alpha_{ij})(\sum_{k} \beta_{lk}\gamma_{kj})$$
$$= (\alpha_{ij})[(\beta_{ij})(\gamma_{ij})]$$

III. $(\alpha_{ij})[(\beta_{ij}) + (\gamma_{ij})] = (\alpha_{ij})(\nu_{ij})$, di mana $\nu_{ij} = \alpha_{ij} + \beta_{ij}$. Sehingga

$$(\alpha_{ij})[(\beta_{ij}) + (\gamma_{ij})] = (\sum_{k} \alpha_{ik}\nu_{kj})$$
$$= (\sum_{k} \alpha_{ik}(\beta_{kj} + \gamma_{kj}))$$
$$= (\sum_{k} \alpha_{ik}\beta_{kj}) + (\sum_{k} \alpha_{ik}\gamma_{kj})$$
$$= (\alpha_{ij})(\beta_{ij}) + (\alpha_{ij})(\gamma_{ij})$$

Demikian pula $[(\alpha_{ij}) + (\beta_{ij})]\ (\gamma_{ij}) = (\alpha_{ij})(\gamma_{ij}) + (\beta_{ij})(\gamma_{ij})$.

Dari I, II, III, terbukti bahwa $(F_n, +, .)$ adalah ring.

b. Akan ditunjukkan bahwa F_n adalah ruang vektor atas field F.

1. Sudah dibuktikan di atas bahwa terhadap operasi penjumlahan, F_n merupakan grup abel.
2. Ambil sebarang (α_{ij}), $(\beta_{ij}) \in F_n$. Maka untuk tiap $\gamma \in F$, berlaku

$$\gamma[(\alpha_{ij}) + (\beta_{ij})] = \gamma(\alpha_{ij} + \beta_{ij})$$
$$= (\gamma\alpha_{ij} + \gamma\beta_{ij})$$
$$= (\gamma\alpha_{ij}) + (\gamma\beta_{ij})$$
$$= \gamma(\alpha_{ij}) + \gamma(\beta_{ij})$$

3. Ambil sebarang $(\alpha_{ij}) \in F_n$. Maka untuk tiap γ, $\nu \in$

F, berlaku $(\gamma + \nu)(\alpha_{ij}) = ((\gamma + \nu)\alpha_{ij})$

$= (\gamma\alpha_{ij} + \nu\alpha_{ij})$

$= (\gamma\alpha_{ij}) + (\nu\alpha_{ij})$

$= \gamma(\alpha_{ij}) + \nu(\alpha_{ij})$

4. $(\gamma\nu)(\alpha_{ij}) = ((\gamma\nu)\alpha_{ij})$

$= (\gamma(\nu\alpha_{ij})) = \gamma(\nu(\alpha_{ij}))$

5. Untuk sebarang $(\alpha_{ij}) \in F_n$ dan $1 \in F$, berlaku $(\alpha_{ij})1 = (\alpha_{ij}) = 1(\alpha_{ij})$.

Jadi F_n adalah ruang vektor atas field F.

Ambil sebarang (α_{ij}), $(\beta_{ij}) \in F_n$ dan $\gamma \in F$. Maka

$\gamma((\alpha_{ij})(\beta_{ij})) = \gamma(\nu_{ij})$

$= (\gamma\nu_{ij})$

$= (\gamma \sum_k \alpha_{ik}\beta_{kj})$

$= (\sum_k [\gamma\alpha_{ik}]\beta_{kj})$

$= (\gamma\alpha_{ij})(\beta_{ij})$

$= (\gamma(\alpha_{ij}))(\beta_{ij})$

Demikian juga

$\gamma((\alpha_{ij})(\beta_{ij})) = \gamma(\nu_{ij})$

$= (\gamma\nu_{ij})$

$= (\gamma \sum_k \alpha_{ik}\beta_{kj})$

$= (\sum_k \alpha_{ik}[\gamma\beta_{kj}])$

$= (\alpha_{ij})(\gamma\beta_{ij})$

$= (\alpha_{ij})(\gamma(\beta_{ij}))$

Jadi $\gamma[(\alpha_{ij})(\beta_{ij})] = (\gamma(\alpha_{ij}))(\beta_{ij}) = (\alpha_{ij})(\gamma(\beta_{ij}))$.

Terbukti F_n merupakan suatu aljabar atas field F. ∎

Definisi 5.3

Andaikan A dan B adalah aljabar - aljabar atas field F. Pemetaan $\phi : A \longrightarrow B$ disebut *isomorfisme aljabar* jika ϕ adalah suatu transformasi linear yang bijektif dan mengawetkan operasi perkalian, yaitu $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$ untuk tiap $a, b \in A$.

Teorema 5.3

Andaikan V adalah ruang vektor berdimensi n, dengan basis $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Pemetaan $\phi : A(V) \longrightarrow F_n$ yang didefinisikan oleh $\phi(f) = (\alpha_{ij})$ untuk tiap $f \in A(V)$, di mana $f(v_i) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}v_j$, adalah suatu isomorfisme aljabar.

Bukti :

Ambil sebarang $f, g \in A(V)$ sedemikian sehingga $\phi(f) = (\alpha_{ij})$ dan $\phi(g) = (\beta_{ij})$ di mana $f(v_i) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}v_j$ dan $g(v_i) = \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij}v_j$. Karena $(f + g)(v_i) = \sum_{j=1}^{n} (\alpha_{ij} + \beta_{ij})v_j$ untuk tiap $i = 1, \ldots, n$, maka $\phi(f + g) = (\alpha_{ij} + \beta_{ij}) = (\alpha_{ij}) + (\beta_{ij}) = \phi(f) + \phi(g)$. Karena $(\gamma f)(v_i) = \gamma f(v_i) = \gamma \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}v_j = \sum_{j=1}^{n} \gamma\alpha_{ij}v_j$, maka $\phi(\gamma f) = (\gamma\alpha_{ij}) = \gamma(\alpha_{ij}) = \gamma\phi(f)$.

Demikian pula

$$(fg)(v_i) = g(f(v_i))$$
$$= g\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}v_j\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} g(v_j)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \sum_{k=1}^{n} \beta_{jk} v_k$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \beta_{jk} \right) v_k \quad \text{untuk tiap } i,\ k = 1,\dots,n.$$

Jadi $\phi(fg) = \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \beta_{jk} \right) = (\alpha_{ik})(\beta_{ik}) = \phi(f)\phi(g)$.

Menurut teorema 5.1 pemetaan ϕ tersebut adalah pemetaan yang bijektif.

Jadi $\phi : A(V) \longrightarrow F_n$ adalah suatu isomorfisme aljabar. ∎

Matriks satuan adalah elemen dari F_n, yang semua unsur diagonalnya adalah 1 dan unsur-unsur lainnya adalah 0. Matriks satuan akan dilambangkan dengan

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ . & & & & \\ . & & & & \\ . & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

dan merupakan elemen satuan dari F_n terhadap operasi perkalian, yaitu $I_n(\alpha_{ij}) = (\alpha_{ij})I_n = (\alpha_{ij})$ untuk tiap $(\alpha_{ij}) \in F_n$.

<u>Definisi 5.3</u>

Andaikan $(\alpha_{ij}) \in F_n$. Matriks $(\beta_{ij}) \in F$ yang memenuhi $(\alpha_{ij})(\beta_{ij}) = (\beta_{ij})(\alpha_{ij}) = I_n$ disebut *invers* dari (α_{ij}), dan dinyatakan dengan lambang $(\beta_{ij}) = (\alpha_{ij})^{-1}$.

Teorema 5.4

Jika suatu matriks mempunyai invers, maka invers itu tunggal.

Bukti :

Andaikan invers dari matriks A adalah B dan C dengan $B \neq C$, maka $AB = BA = I_n$ dan $AC = CA = I_n$

Jadi $B = BI_n = B(AC) = (BA)C = I_nC = C$.

Kontradiksi, sebab $B \neq C$.

Jadi invers dari matriks A tunggal. ∎

Jika I adalah transformasi linear identitas, maka terhadap basis $v_1, v_2, \ldots, v_n$ berlaku

$I(v_1) = 1v_1 + 0v_2 + \ldots + 0v_n$

$I(v_2) = 0v_1 + 1v_2 + 0v_3 + \ldots + 0v_n$

.

.

.

$I(v_n) = 0v_1 + 0v_2 + \ldots + 1v_n$

Dengan menggunakan definisi 5.1, maka matriks dari I adalah I_n.

Andaikan $f \in A(V)$ regular dan $\phi(f) = (\alpha_{ij})$, di mana ϕ adalah isomorfisme yang didefinisikan pada teorema 5.3. Maka terdapat $f^{-1} \in A(V)$ sedemikian sehingga $ff^{-1} = I = f^{-1}f$. Jadi $\phi(ff^{-1}) = \phi(f)\phi(f^{-1}) = (\alpha_{ij})(\beta_{ij})$, di mana $\phi(f^{-1}) = (\beta_{ij})$. Dilain pihak, $\phi(ff^{-1}) = \phi(I) = I_n$. Sehingga $I_n = (\alpha_{ij})(\beta_{ij})$, yaitu $(\beta_{ij}) = (\alpha_{ij})^{-1}$. Jadi, $\phi(f^{-1}) = (\beta_{ij}) = (\alpha_{ij})^{-1} = (\phi(f))^{-1}$.

Teorema 5.5

Jika V ruang vektor berdimensi berhingga atas field F dan $g \in A(V)$ mempunyai matriks A terhadap basis $v_1, v_2, \ldots, v_n$ dan matriks B terhadap basis $w_1, w_2, \ldots, w_n$ dari V, maka terdapat suatu matriks $C \in F_n$ sedemikian sehingga $B = C\,A\,C^{-1}$.

Bukti :

Andaikan $A = (\alpha_{ij})$ dan $B = (\beta_{ij})$. Maka $g(v_i) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} v_j$ dan $g(w_i) = \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} w_j$.

Andaikan f adalah transformasi linear dari V ke V yang didefinisikan oleh $f(v_i) = w_i$. Karena $v_1, v_2, \ldots, v_n$ dan $w_1, w_2, \ldots, w_n$ adalah basis dari V atas field F, maka f memetakan V onto V, sehingga menurut teorema 3.5 transformasi linear f adalah invertible di dalam A(V).

Di lain pihak $g(w_i) = \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} w_j$. Karena $f(v_i) = w_i$, maka $g(f(v_i)) = \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij}(f(v_j))$. Sehingga $(fg)(v_i) = f(\sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} v_j)$.

Karena f invertibel, maka $((fg)f^{-1})(v_i) = \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} v_j$. Jadi terhadap basis $v_1, v_2, \ldots, v_n$, $m((fg)f^{-1}) = (\beta_{ij}) = B$.

Karena pemetaan $g \longrightarrow \phi(g) = m(g)$ adalah suatu isomorfisme dari A(V) onto F_n, maka $\phi((fg)f^{-1}) = \phi(f)\,\phi(g)\,\phi(f^{-1}) = \phi(f)\,\phi(g)\,(\phi(f))^{-1}$. Karena terhadap basis $v_1, v_2, \ldots, v_n$, $\phi(g) = A$ dan $\phi((fg)f^{-1}) = B$, maka $B = C\,A\,C^{-1}$, di mana $C = \phi(f) = m(f)$, yaitu matriks dari f terhadap basis $v_1, v_2, \ldots, v_n$. ∎

Contoh 5.3

Andaikan V ruang vektor dari semua polinomial atas field F dengan derajat tidak lebih dari 3, dan andaikan g adalah operator turunan seperti didefinisikan pada contoh 5.1. Matriks dari g terhadap basis $v_1 = 1$, $v_2 = x$, $v_3 = x^2$, $v_4 = x^3$, adalah

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Dan matriks dari g terhadap basis $u_1 = 1$, $u_2 = 1 + x$, $u_3 = 1 + x^2$, $u_4 = 1 + x^3$ adalah

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Andaikan f adalah transformasi linear pada V yang didefinisikan oleh $f(v_1) = w_1 = v_1$; $f(v_2) = w_2 = 1 + x = v_1 + v_2$; $f(v_3) = w_3 = 1 + x^2 = v_1 + v_3$; $f(v_4) = w_4 = 1 + x^3 = v_1 + v_4$. Matriks dari f dalam basis v_1, v_2, v_3, v_4 adalah :

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Invers dari matriks C adalah

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{dan}$$

$$CAC^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} = B.$$

BAB VI

KESIMPULAN

Himpunan semua transformasi linear dari ruang vektor V ke V, yang kita nyatakan dengan lambang Hom(V,V), membentuk *ruang vektor* atas field F terhadap operasi penjumlahan dan perkalian dengan skalar elemen dari field F.

Terhadap operasi penjumlahan dan perkalian yang didefinisikan, Hom(V,V) juga merupakan suatu *ring*. Lebih lanjut Hom(V,V) ternyata merupakan suatu *aljabar* atas field F, yang kita lambangkan dengan A(V).

Setiap elemen aljabar transformasi linear A(V) dengan elemen satuan I atas field F memenuhi polinomial nontrivial $p(x) \in F[x]$ dengan derajat paling tinggi n^2 sedemikian sehingga $p(f) = 0$. Jika $f \in A(V)$ invertibel, maka suku konstan polinomial minimal dari f tidak sama dengan nol. Sebaliknya, jika suku konstan polinomial minimal dari f tidak sama dengan nol, maka $f \in A(V)$ invertibel. Di samping itu, jika $f \in A(V)$ singular, maka ada $g \neq 0 \in A(V)$ sehingga $gf = fg = 0$.

Vektor-vektor karakteristik yang berkaitan dengan akar-akar karakteristik yang berbeda dari $f \in A(V)$ merupakan himpunan vektor-vektor yang bebas linear dalam ruang vektor V atas field F. Akar karakteristik dari $f \in A(V)$ ternyata juga merupakan akar polinomial minimal dari f tersebut.

Jika kita memilih basis tertentu dari V, maka setiap transformasi linear pada V dapat kita hubungkan dengan suatu matriks bujur sangkar. Sebaliknya terhadap suatu basis tertentu dari V, setiap matriks bujur sangkar membangkitkan suatu transformasi linear f pada V. Terhadap operasi-operasi penjumlahan, perkalian dan perkalian dengan skalar, himpunan semua matriks bujur sangkar dengan unsur-unsur dari field F merupakan suatu aljabar yang isomorfis dengan aljabar transformasi linear A(V).

DAFTAR PUSTAKA

Finkbeiner, Daniel. T, II, 1960, *Intorduction to Matrices and Linear Tranformations*, San Fransisco, W.H. Freeman and Co

Graham May. W, 1970, *Linear Algebra*, USA, Scott, Foresman and Company

Herstein, I.N, 1965, *Topics In Algebra*, New York, Blaisdell Publishing Company

Leon, Steven J, 1986, *Linear Algebra with Applications*, New York, Macmillan Publishing Company

Lowell J, Paige/ Dean Swift, 1961, *Elements of Linear Algebra*, Los Angeles, Blaisdell Publishing Company