RING TERURUT

SKRIPSI

**Diajukan Untuk Memenuhi Salah Satu Syarat
Memperoleh Gelar Sarjana Pendidikan
Program Studi Pendidikan Matematika**

Oleh :

Martina Widi Budi Hastuti

N I M : 89 414 021
NIRM : 890052010501120014

JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
UNIVERSITAS SANATA DHARMA
YOGYAKARTA

1994

Skripsi

RING TERURUT

Oleh :

Martina Widi Budi Hastuti

N I M : 89 414 021
NIRM : 890052010501120014

telah disetujui oleh :

Pembimbing I

Dr. Frans Susilo, S.J

27 - 1 - 95
Tanggal

Pembimbing II

Dra. A. Linda Yuliastuti

27 JAN 1995
Tanggal

S k r i p s i

RING TERURUT

yang dipersiapkan dan disusun oleh

Martina Widi Budi Hastuti

Nim : 89 414 021

Nirm : 890052010501120014

telah dipertahankan di depan Panitia Penguji

pada tanggal 14 Desember 1994

dan dinyatakan telah memenuhi syarat

Susunan Panitia Penguji

	Nama lengkap	Tanda tangan
Ketua	Dr. St. Suwarsono	....
Sekretaris	Dr. Y. Marpaung	....
Anggota	Dr. Frans Susilo, S.J.	....
Anggota	Drs. A. Tutoyo, M.Sc.	....
Anggota	Dra. A. Linda Yuliastuti	....

Yogyakarta, 1994

Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan

Universitas Sanata Dharma

Dekan FKIP

Dr.A. Priyono Marwan, S.J.

KATA PENGANTAR

Walaupun dalam waktu yang cukup lama, akhirnya skripsi yang berjudul RING TERURUT dapat terselesaikan. Skripsi ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat memperoleh gelar sarjana pendidikan Program Studi Pendidikan Matematika di Jurusan Pendidikan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Universitas Sanata Dharma, Yogyakarta.

Puji syukur penyusun panjatkan kehadirat Tuhan Yesus Kristus, atas segala rahmat dan kasihNya, sehingga penyusun dapat menyelesaikan skripsi dengan baik.

Pada kesempatan yang berbahagia ini, tidak lupa pula penyusun mengucapkan terima kasih kepada :

1. Romo Dr. Frans Susilo, S.J., selaku pembimbing I yang telah mencurahkan perhatiannya dengan penuh kesabaran dan ketelitian dalam membimbing penyusunan skripsi ini.
2. Ibu Dra. A. Linda Yuliastuti, selaku pembimbing II yang telah membaca dan mengoreksi skripsi ini.
3. Bapak Dr. St. Suwarsono, selaku Ketua Jurusan Pendidikan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Sanata Dharma.
4. Rekan-rekan Mahasiswa yang telah memberikan dukungan moril kepada penyusun.
5. Semua pihak yang telah membantu dalam penyusunan skripsi ini.

Penyusun menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari sempurna, maka penyusun mengharap kritik dan saran yang membangun dari pembaca demi sempurnanya skripsi ini.

Pada akhirnya semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi para pembaca yang membutuhkannya.

Yogyakarta, November 1994

Penyusun

Kupersembahkan untuk :
Bapak, Ibu
mbak Purwantiningsih
mbak Rini
mbak Tri dan
mbak Anna.

DAFTAR ISI

ABSTRAK

RING TERURUT

Suatu ring dikatakan terurut bila memuat himpunan bagian, yang elemen-elemennya disebut elemen positif, sedemikian sehingga himpunan bagian tersebut tertutup terhadap penjumlahan dan perkalian dan setiap elemen dari ring itu memenuhi hukum trikotomi.

Suatu ring terurut dengan elemen satuan e mempunyai karakteristik nol. Suatu ring terurut dikatakan well-ordered bila himpunan elemen-elemen positifnya well-ordered dalam ring tersebut. Ada satu dan hanya ada satu ring terurut dengan elemen satuan yang well-ordered.

Urutan dalam suatu daerah integral D dapat diperluas menjadi urutan dalam perluasan field F_D, dengan mendefinisikan suatu urutan dalam F_D sedemikian sehingga bila urutan dalam F_D itu di batasi pada subdomain D, maka hasilnya adalah urutan semula dari D.

BAB I

PENDAHULUAN

Salah satu contoh ring adalah ring bilangan-bilangan bulat Z, dengan operasi penjumlahan dan perkalian. Bilangan-bilangan bulat ini dapat diurutkan. Urutan itu biasanya dinyatakan dengan relasi "a<b", yang berarti b-a adalah suatu bilangan bulat positif. Sifat-sifat relasi tersebut dapat diturunkan dari sifat-sifat bilangan bulat positif. Bertitik tolak dari hal tersebut, akan didefinisikan relasi urutan dalam suatu ring. Selanjutnya akan dibahas ring polinomial terurut yang merupakan kejadian khusus dari ring terurut. Akan dibahas pula field terurut sebagai perluasan dari suatu daerah integral terurut.

Sebelum membahas ring terurut, perlu dipahami dahulu definisi suatu ring. Tulisan ini akan dimulai dengan mendefinisikan ring itu sendiri, dan kemudian akan didefinisikan suatu ring terurut, di mana pengertian "urutan" di sini akan didefinisikan berdasarkan pengertian "positif". Definisi itu akan diberikan dalam bab 2. Selanjutnya dibahas pula ring polinomial, yaitu suatu ring yang elemen-elemennya berupa polinomial-polinomial dalam x, dengan koefisien-koefisien dari suatu ring R, dan dilambangkan dengan R[x]. Ring R[x] ini juga bisa dibentuk menjadi ring terurut.

Dalam bab 3 akan dibahas karakteristik suatu ring terurut dan ring terurut yang well-ordered. Dalam bab ini akan dibuktikan bahwa ring terurut dengan elemen satuan yang well-ordered isomorfik dengan $\mathbb{Z}$.

Dalam bab 4 akan dibahas field terurut. Sebelumnya akan dibahas dahulu field pembagi dari suatu daerah integral D, yang dilambangkan dengan F_D. Dalam bab ini akan dibuktikan bahwa jika daerah integral D merupakan daerah integral terurut, maka urutannya dapat diperluas menjadi urutan dalam field F_D.

Untuk mempelajari ring terurut tidak diperlukan pengetahuan prasyarat yang tinggi, sebab ring terurut merupakan pengembangan dari ring, sedangkan ring telah dipelajari dalam mata kuliah Struktur Aljabar. Karya tulis ini merupakan hasil studi pustaka. Penulis hanya menyusun kembali bahan-bahan dari kepustakaan yang ada menjadi tulisan yang bulat dan sistematis.

BAB II

RING TERURUT

2.1 Definisi dan Theorema

Ring yang akan dibahas dalam tulisan ini adalah ring yang dilengkapi dengan suatu urutan. Sebelum membahas ring terurut perlu dipahami dahulu definisi suatu ring.

Definisi 2.1.1 :

Suatu ring adalah suatu himpunan R bersama dengan dua operasi yang disebut "penjumlahan" (+) dan "perkalian" (·), sedemikian sehingga aksioma-aksioma berikut dipenuhi,

I. (R,+) merupakan grup Abel dengan elemen identitas 0, yang juga disebut **elemen nol** dalam R.

II. Operasi · bersifat assosiatif :
$(\forall a,b,c \in R)\ (ab)\ c = a(bc)$.

III. Operasi · bersifat distributif terhadap + :
$(\forall a,b,c \in R)\ a(b+c) = ab+ac$ dan $(b+c)a=ba+ca$.

Ring R disebut ring komutatif bila dan hanya bila
$(\forall a,b \in R)\ ab=ba$.

Sekarang pada ring akan didefinisikan suatu relasi urutan. Urutan sudah kita kenal pada bilangan-bilangan bulat. Bilangan-bilangan bulat dapat disajikan dengan cara sebagai berikut :

$\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$.

Urutan pada bilangan bulat biasanya dinyatakan dengan relasi $a < b$ di mana pernyataan $a < b$ (a lebih kecil dari b) yang berarti bahwa $b-a$ adalah suatu bilangan bulat positif. Setiap sifat dari relasi tersebut dapat diturunkan dari sifat-sifat bilangan-bilangan bulat positif. Dengan kata lain, pengertian "urutan" dapat didefinisikan dengan menggunakan pengertian "positif". Berdasarkan uraian tersebut akan didefinisikan pengertian urutan dalam suatu ring.

Definisi 2.1.2 :

Suatu ring R dikatakan **terurut** bila R memuat suatu himpunan bagian R^+, yang elemen-elemennya disebut elemen **positif** dari R, sedemikian sehingga dipenuhi sifat-sifat sebagai berikut :

(i) Jika $a,b \in R^+$, maka $a + b \in R^+$
(R^+ tertutup terhadap penjumlahan).

(ii) Jika $a,b \in R^+$, maka $ab \in R^+$
(R^+ tertutup terhadap perkalian).

(iii) Untuk setiap $a \in R$, tepat satu di antara tiga pernyataan ini berlaku :
$a=0$, $a \in R^+$, $-a \in R^+$ (hukum trikotomi).

Elemen-elemen **bukan** nol yang tidak berada dalam R^+ disebut **elemen negatif** dari R.

Selanjutnya akan ditunjukan bahwa R^+ dapat digunakan untuk mendefinisikan suatu relasi urutan pada R.

Definisi 2.1.3 :

Andaikan R suatu ring terurut dan $a,b \in R$, maka $a>b$ (atau

$b < a$) bila dan hanya bila $a-b \in R^+$. Jika $a > b$, maka dikatakan "a lebih besar daripada b" atau "b lebih kecil daripada a". Jelaslah bahwa $a > 0$ bila dan hanya bila $a \in R^+$, yaitu a adalah suatu elemen positif dari R. Demikian pula $a<0$ bila dan hanya bila $-a \in R^+$, yang berarti bahwa $a \neq 0$ dan $a \notin R^+$, yaitu a adalah suatu elemen negatif dari R. Maka ketiga sifat dari Definisi 2.1.2 di atas dapat dinyatakan kembali dalam bentuk sebagai berikut :

(i) Jika $a > 0$ dan $b > 0$, maka $a + b > 0$.

(ii) Jika $a > 0$ dan $b > 0$, maka $ab > 0$.

(iii) Jika $a \in R$, maka tepat satu dari tiga pernyataan ini berlaku $a = 0$, $a > 0$, dan $-a > 0$.

Selanjutnya kita sepakati bahwa :

$a \geq b$ bila hanya bila $a > b$ atau $a = b$.

$a \leq b$ bila hanya bila $a < b$ atau $a = b$.

Lemma 2.1.1 :

Jika R adalah ring terurut, $a \in R$, n bilangan bulat positif, maka $na \in R^+$ bila hanya bila $a \in R^+$.

Bukti:

($\Rightarrow$)

Diketahui $na = a+a+...+a \in R^+$.

Andaikan $a \notin R^+$.

Maka $a=0$ atau $-a \in R^+$.

Bila $a=0$, maka $na = a+a+...+a = 0 \notin R^+$. Kontradiksi.

Bila $-a \in R^+$, maka $n(-a) = -a+(-a)+...+(-a) = -(a+a+...+a)=$

$-(na) \in R^+$. Jadi $na \notin R^+$. Kontradiksi.

Jadi terbukti bahwa $a \in R^+$.

($\Leftarrow$)

Bukti dengan induksi matematis:

Untuk $n = 1$ jelas $1.a = a \in R^+$. Andaikan $k.a \in R^+$, maka $(k + 1)a = ka + a \in R^+$.

Jadi $na \in R^+$, untuk setiap bilangan bulat positif n.■

Theorema 2.1.1 :

Andaikan R suatu ring terurut dan $a, b, c \in R$, maka :

(i) $a > b$ bila hanya bila $c + a > c + b$.

(ii) Bila $a > b$ dan $c > 0$, maka $ac > bc$.

(iii) Bila $a > b$ dan $c < 0$, maka $ac < bc$.

(iv) Bila $a > b$ dan $b > c$, maka $a > c$.

(v) $a > b$ bila hanya bila $-a < -b$.

(vi) $a > 0$ bila hanya bila $a > -a$.

(vii) $a < 0$ bila hanya bila $-a > a$.

(viii) $a \geq b$ dan $a \leq b$ bila hanya bila $a = b$.

Bukti :

Karena R adalah suatu ring terurut, maka R memuat himpunan bagian R^+ yang merupakan himpunan elemen-elemen positif R.

Ambil sembarang a, b, dan $c \in R$, maka :

(i) ($\Rightarrow$) Jika $a > b$, maka $a - b \in R^+$, sehingga

$(c+a) - (c + b) = a - b \in R^+$.

Jadi $c + a > c + b$.

($\Leftarrow$) Jika $c + a > c + b$, maka $c + a - (c + b) = a - b \in R^+$. Jadi $a > b$.

(ii) Jika $a > b$ dan $c > 0$, maka $(a - b) \in R^+$, dan $c \in R^+$, sehingga $(a - b)c \in R^+$,
yaitu $ac - bc \in R^+$.
Jadi $ac > bc$.

(iii) Jika $a > b$ dan $c < 0$, maka $a - b \in R^+$ dan $-c \in R^+$, sehingga $(a - b)(-c) = -ac + bc \in R^+$,
yaitu $bc - ac \in R^+$.
Jadi $bc > ac$ atau $ac < bc$.

(iv) Jika $a > b$ dan $b > c$, maka $a - b \in R^+$ dan $b - c \in R^+$, sehingga $(a - b) + (b - c) \in R^+$,
yaitu $a - c \in R^+$.
Jadi $a > c$.

(v) ($\Rightarrow$) Jika $a > b$, maka $a - b \in R^+$.
Padahal $a - b = -(-a)+(-b) = -b-(-a)$,
sehingga $(-b)-(-a) \in R^+$.
Jadi $-b > -a$ atau $-a < -b$.
($\Leftarrow$) Jika $-a < -b$, maka $-b - (-a) = a - b \in R^+$.
Jadi $a > b$.

(vi) ($\Rightarrow$) Jika $a>0$, berarti $a \in R^+$ sehingga $a+a \in R^+$.
Padahal $a+a = a - (-a)$.
Maka $a - (-a) \in R^+$.
Jadi $a>-a$.
($\Leftarrow$) Jika $a>-a$, maka $a-(-a) = a+a \in R^+$.

Jadi menurut Lemma 2.1.1, $a \in R^+$, yaitu $a>0$.

(vii) ($\Rightarrow$) Jika $a<0$, maka $-a \in R^+$.

Jadi $-a + (-a) \in R^+$ yang berarti bahwa $-a>a$.

($\Leftarrow$) Jika $-a>a$, maka $-a -a = 2(-a) \in R^+$.

Jadi menurut Lemma 2.1.1, $-a \in R^+$, yaitu $a<0$.

(viii) $a \geq b$ dan $a \leq b$ bhb $(a>b \vee a=b) \wedge (a<b \vee a=b)$ bhb $[(a-b) \in R^+ \vee (a-b=0)] \wedge [-(a-b) \in R^+ \vee a-b=0]$ bhb $[(a-b) \in R^+ \wedge -(a-b) \in R^+] \vee (a-b)=0$.

R ring terurut sedemikan sehingga tepat salah satu dari pernyataan berikut berlaku, yaitu $(a-b) \in R^+$ atau $-(a-b) \in R^+$ atau $a-b=0$. Jadi $[(a-b) \in R^+ \wedge -(a-b) \in R^+] \vee (a-b) = 0$ bhb $a-b=0$ bhb $a=b$.■

Theorema 2.1.2 :

Bila ring R dilengkapi dengan relasi "<" yang memenuhi :

Untuk setiap $a,b,c \in R$:

1. Tepat salah satu pernyataan berikut berlaku yaitu : $a<b$, $b<a$, $a=b$.
2. Bila $a<b$ dan $b<c$, maka $a<c$.
3. Bila $b<c$, maka $a+b < a+c$.
4. Bila $0 < a$ dan $b < c$, maka $ab<ac$.

Maka R adalah suatu ring terurut.

Bukti :

Didefinisikan $R^+=\{ a \in R \mid 0 < a \}$.

(i) Ambil sebarang $a, b \in R^+$, maka $0<a$ dan $0<b$. Dengan

(3) diperoleh $a+0 < a+b$, yaitu $a<a+b$. Karena $0<a$ dan $a<a+b$ maka dengan (2) diperoleh $0<a+b$.

Jadi $a+b \in R^+$.

Demikian pula dengan (4) diperoleh $a.0 < ab$, yaitu $0 < ab$. Jadi $ab \in R^+$.

(ii) Karena $0 \in R$, maka menurut (1), untuk setiap $c \in R$ tepat satu pernyataan berikut berlaku : $0<c$, yang berarti $c \in R^+$, atau $c<0$, sehingga $0<-c$ yang berarti $-c \in R^+$, atau $c=0$. Jadi hukum trikotomi dipenuhi.

Jadi terbukti bahwa R adalah suatu ring terurut. ■

Contoh ring terurut adalah ring bilangan-bilangan bulat $\mathbb{Z}$, ring bilangan-bilangan rasional $\mathbb{Q}$, dan ring bilangan-bilangan real $\mathbb{R}$. Ring bilangan-bilangan bulat $\mathbb{Z}$ adalah ring terurut sebab ring $\mathbb{Z}$ memuat himpunan bagian $\mathbb{Z}^+$, yaitu himpunan semua bilangan bulat positif, yang memenuhi ketiga sifat ring terurut. Berdasarkan hal itu di bawah ini akan dibuktikan bahwa ring bilangan-bilangan rasional $\mathbb{Q}$ merupakan ring terurut.

Theorema 2.1.3 :

Ring bilangan-bilangan rasional $\mathbb{Q}$ adalah ring terurut dengan $\mathbb{Q}^+$ adalah himpunan semua bilangan-bilangan rasional $\frac{a}{b}$, di mana a dan b adalah bilangan-bilangan bulat, $b \neq 0$ dan $ab > 0$.

Bukti :

Andaikan $a,b,c,d \in \mathbb{Z}$, dengan $b\neq0$, $d\neq0$.

Akan ditunjukkan bahwa jika $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ dan ab > 0, maka cd > 0.

Karena $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ maka ad = bc.

Bilangan-bilangan bulat a dan b kedua-duanya adalah positif, atau kedua-duanya negatif, sebab ab > 0. Akibatnya : c dan d juga harus kedua-duanya positif atau kedua-duanya negatif. Jadi cd > 0.

Maka himpunan Q^+ adalah well-defined.

Ambil sebarang $\frac{a}{b}$ dan $\frac{c}{d} \in Q^+$.

Maka a,b,c,d ∈ Z, b ≠ 0, d ≠ 0, dan ab > 0 dan cd > 0.

Selanjutnya $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$.

Tapi $(ad + bc)bd = abd^2 + cdb^2 > 0$, sebab ab > 0, cd>0, $b^2>0$, $d^2 > 0$. Jadi $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} \in Q^+$.

Demikian pula $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \in Q^+$,

sebab (ac)(bd) = a(cb)d = (ab)(cd) > 0.

Ambil sebarang $\frac{a}{b} \neq 0$ (a ∈ Z, b ∈ Z, b ≠ 0) ∈ Q

Maka haruslah a ≠ 0, oleh karena itu ab ≠ 0.

Jadi ab > 0 atau ab < 0.

Bila ab > 0, maka $\frac{a}{b} \in Q^+$.

Bila ab < 0, maka $-\frac{a}{b} > 0$, yaitu $-\frac{a}{b} \in Q^+$

Jadi berlaku hukum trikotomi.

Terbukti bahwa ring bilangan-bilangan rasional Q adalah ring terurut.

Ring bilangan-bilangan real $\mathbb{R}$ adalah ring terurut sebab ring $\mathbb{R}$ memuat himpunan bagian $\mathbb{R}^+$, yaitu himpunan semua bilangan real positif, yang memenuhi ketiga sifat ring terurut. Tidak semua ring dapat menjadi ring terurut. Contoh ring yang tidak dapat dibentuk menjadi ring terurut ialah ring bilangan-bilangan kompleks $\mathbb{C}$. Hal ini akan ditunjukkan di bawah ini.

Ambil sebarang himpunan bagian P dari $\mathbb{C}$ yang memenuhi (i) dan (ii) dari Definisi 2.1.2.

Jelas bahwa $1 \neq 0$. Andaikan $1 \notin P$, yang berarti $-1 \in P$. Maka $(-1)(-1) = 1 \in P$. Kontradiksi. Jadi $1 \in P$. Jelas bahwa $i \neq 0$. Andaikan $i \in P$, maka $i.i = -1 \in P$. Jadi $1 \notin P$. Kontradiksi. Jadi $i \notin P$. Andaikan $-i \in P$, maka $(-i)(-i) = -1 \in P$. Jadi $1 \notin P$. Kontradiksi. Jadi $-i \notin P$. Jadi ada elemen dalam $\mathbb{C}$ yang tidak memenuhi hukum trikotomi. Jadi $\mathbb{C}$ bukan ring terurut.

Selanjutnya theorema di bawah ini akan menunjukkan bahwa ring yang memuat pembagi nol tidak dapat dibentuk menjadi ring terurut.

Theorema 2.1.4 :

Andaikan R suatu ring terurut, maka R tidak memuat pembagi nol.

Bukti :

Ring R tidak memuat pembagi nol bhb $(\forall\ a,b \in R)\ a \neq 0$ dan $b \neq 0 \Rightarrow ab \neq 0$.

Ambil sebarang elemen $a,b \in R$, di mana $a \neq 0$ dan $b \neq 0$. Maka $a \in R^+$ atau $-a \in R^+$. Demikian pula $b \in R^+$ atau $-b \in R^+$. Oleh karena itu :

1. Jika $a,b \in R^+$, maka $ab \in R^+$. Jadi $ab \neq 0$.
2. Jika $a,(-b) \in R^+$, maka $a(-b) = -(ab) \in R^+$. Jadi $ab \neq 0$.
3. Jika $(-a),b \in R^+$, maka $(-a)b = -(ab) \in R^+$. Jadi $ab \neq 0$.
4. Jika $(-a),(-b) \in R^+$, maka $(-a)(-b) = ab \in R^+$. Jadi $ab \neq 0$.

Terbukti bahwa R tidak memuat pembagi nol. ■

Corrolary 2.1.1:

Ring yang memuat pembagi nol tidak dapat dibentuk menjadi ring terurut.

Bukti:
Kontraposisi dari Theorema 2.1.4. ■

Misalnya $Z_6 = \{ \bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5} \}$.
Z_6 memuat pembagi nol yaitu $\bar{2}$ dan $\bar{3}$ karena $\bar{2}.\bar{3} = \bar{0}$.
Ring Z_6 bukan ring terurut.

Definisi 2.1.4 :

Suatu ring yang komutatif, memuat elemen satuan, dan tidak memuat pembagi nol disebut **daerah integral**.

Corrolary 2.1.2 :

Suatu ring terurut yang komutatif dan memuat elemen satuan pasti merupakan daerah integral.

Bukti:

Karena ring terurut maka tidak memuat pembagi nol, maka ring tersebut merupakan daerah integral.■

Theorema 2.1.5 :

Bila R adalah ring terurut yang memuat subring E, maka E juga merupakan ring terurut.

Bukti:

Didefinisikan $E^+ = E \cap R^+$.

i) Jika $a, b \in E^+$, maka $a, b \in E$ dan $a, b \in R^+$.
Karena E subring dari R, maka $a+b \in E$. Karena R ring terurut, maka $a+b \in R^+$. Jadi $a+b \in E^+$.

ii) Demikian pula $ab \in E$ dan $ab \in R^+$. Jadi $ab \in E^+$.

iii) Ambil sebarang elemen $a \in E$. Maka $a \in R$ sebab E subring dari R. Karena di dalam R berlaku hukum trikotomi, maka $a \in R^+$ atau $-a \in R^+$ atau $a=0$. Jika $a \in R^+$, maka $a \in E \cap R^+ = E^+$. Jika $-a \in R^+$, maka $-a \in E \cap R^+ = E^+$, sebab $-a \in E$ (E subring dari R).
Jadi di dalam E berlaku hukum trikotomi.

Dari i, ii, dan iii terbukti bahwa E ring terurut.■

2.2 Nilai Mutlak

Relasi urutan dalam suatu ring terurut dapat mengantar kita pada konsep "**nilai mutlak**", sebagai berikut :

Definisi 2.2.1 :

Andaikan R adalah suatu ring terurut dan $a \in R$, maka nilai mutlak dari a, ditulis $| a |$, didefinisikan sebagai berikut:

(i) jika $a \geq 0$, maka $| a | = a$,

(ii) Jika $a < 0$, maka $| a | = -a$.

Dari definisi tersebut, tampak bahwa $| 0 | = 0$ dan jika $a \neq 0$, maka $| a | > 0$.

Berikut ini diberikan beberapa sifat-sifat ring terurut R yang berkaitan dengan nilai mutlak. Untuk sebarang $a,b \in R$ berlaku :

(1) $|a + b| \leq |a| + |b|$,

(2) $|ab| = |a||b|$,

(3) $||a|-|b|| \leq |a - b|$,

(4) $-|a| \leq a \leq |a|$.

Bukti (1) :

Andaikan R ring terurut , dan $a,b \in R$.

Kita buktikan dengan memperhatikan semua kejadian yang mungkin yaitu :

(i) Jika $a = 0$ dan $b = 0$, maka $a + b = 0 + 0 = 0$, sehingga $|a + b| = 0$, demikian pula $|a| = 0$ dan $|b| = 0$, sehingga $|a + b| = |a| + |b|$.

(ii) Jika $a > 0$ dan $b > 0$, maka $a + b > 0$, sehingga $|a + b| = a + b$, demikian pula $|a| = a$ dan $|b| = b$, sehingga $|a + b| = |a| + |b|$.

(iii) Jika $a < 0$ dan $b < 0$, maka $a + b < 0$, sehingga $|a + b| = -(a + b) = -a + (-b)$.

Karena $a < 0$ dan $b<0$, maka $|a| = -a$ dan $|b| = -b$.

Jadi $|a + b| = |a| + |b|$.

(iv) Jika $a > 0$ dan $b < 0$, maka $a + b > 0$ atau $a+b < 0$

atau $a + b = 0$.

Kejadian pertama $a + b > 0$:

Karena $b < 0$, maka $-b > b$,

sehingga $-b + a > b + a$ atau $a+b < a+(-b)$.

Jadi $|a + b| = a + b < a + (-b) = |a| + |b|$.

Jadi $|a + b| < |a| + |b|$.

Kejadian kedua $a + b < 0$:

Karena $a + b<0$, maka $|a + b| = -(a + b) = -a+(-b)$.

Karena $a>0$, maka $a>-a$, sehingga $a+(-b) > -a + (-b)$

atau $(-a) + (-b) < a + (-b)$.

Maka $|a + b| = -a + (-b) < a + (-b) = |a| + |b|$.

Terbukti $|a + b| < |a| + |b|$.

Kejadian ketiga $a + b = 0$:

Karena $a + b =0$ maka $a = -b$.

Maka $|a + b| = 0 < a + a = a + (-b) = |a| + |b|$.

Jadi $|a + b| < |a| + |b|$.

Kemungkinan-kemungkinan lain, yaitu :

$a < 0$ dan $b > 0$,

$a = 0$ dan $b < 0$,

$a = 0$ dan $b > 0$,

$a < 0$ dan $b = 0$,

$a > 0$ dan $b = 0$,

dibuktikan secara analog.

Bukti (2) :

Andaikan R ring terurut, dan $a,b \in R$.

Dibuktikan dengan memperhatikan semua kejadian yang mungkin :

(i) Jika $a > 0$ dan $b > 0$, maka $ab > 0$,
sehingga $|ab| = ab = |a|\ |b|$.
Terbukti $|ab| = |a|\ |b|$.

(ii) Jika $a < 0$ dan $b < 0$, maka $ab > 0$,
sehingga $|\ ab\ | = ab = (-a)(-b) = |a||b|$.

(iii) Jika $a > 0$ dan $b < 0$, maka $ab < 0$,
sehingga $|ab| = -(ab) = a(-b) = |a||b|$.

Kejadian-kejadian lain yaitu :

$a < 0$ dan $b > 0$,

$a = 0$ dan $b = 0$,

$a = 0$ dan $b < 0$,

$a = 0$ dan $b > 0$,

$a > 0$ dan $b = 0$,

$a < 0$ dan $b = 0$,

dibuktikan secara analog.

Bukti (3):

Ambil sebarang elemen $a,b \in R$.

Akan dibuktikan dengan memperhatikan semua kejadian yang mungkin.

(1) Jika $a=0$ dan $b = 0$, maka $a-b = 0$.
Jadi $||a| - |b|| = |a-b|$.

(2) Jika $a < 0$ dan $b < 0$, maka $|a|= -a$ dan $|b|= -b$.

Jadi $||a| - |b|| = |-a - (-b)| = |-(a - b)| = |a-b|$.

(3) Jika $a > 0$ dan $b > 0$, maka $|a| = a$ dan $|b| = b$.

Jadi $||a| - |b|| = |a - b|$.

(4) Jika $a < 0$ dan $b > 0$, maka $|a| = -a$ dan $|b| = b$, sehingga $||a|-|b|| = |-a -b| = |-(a+b)|$ dan $|-(-a + b)| = |a - b|$. Tetapi $a + b \leqslant -a+b$.

Jadi $||a| - |b|| \leqslant |a - b|$.

(5) Jika $a > 0$ dan $b < 0$ maka $|a|= a$ dan $|b| = -b$, demikian pula $||a| - |b|| = |a -(-b)| = |a + b|$, sehingga $|a + b| < |a - b|$, sebab $b < -b$.

Jadi $||a| - |b|| \leqslant |a - b|$.

Kemungkinan - kemungkinan yang lainnya dibuktikan secara analog.

Bukti (4) :

1) Untuk setiap $a>0$, maka $|a| = a$, sehingga

$$|a|+(-a) = a + (-a)$$

$$-|a|+|a|+(-a) = -|a|$$

$$-a = -|a|.$$

Karena $a>0$, maka $-a<a$ sehingga $-|a| < a = |a|$.

2) Untuk $a=0$, maka $|a|=0$, sehingga $-|a| = a = |a|$.

3) Untuk setiap $a<0$, maka $|a| = -a$, sehingga

$$|a|+a = -a + a$$

$$-|a|+ |a|+ a = -|a|$$

$$a = -|a|, \text{ sehingga}$$

$$-|a| = a < |a|$$

Jadi untuk setiap $a \in R$ berlaku $-|a| \leqslant a \leqslant |a|$. ■

2.3 Ring Polinomial Terurut

Suatu ring yang elemen-elemennya berupa polinomial-polinomial dalam x, dengan koefisien-koefisien dari suatu ring terurut R, juga merupakan ring yang disebut ring polinomial terurut, dan dilambangkan dengan R[x]. Sebelum membentuk ring polinomial terurut perlu dipahami dahulu tentang polinomial.

Definisi 2.3.1 :

Andaikan R adalah suatu ring komutatif. Suatu **polinomial** atau **suku banyak** dalam x atas ring R ialah suatu ekspresi berbentuk : $a_0x^0+a_1x+a_2x^2+ \ldots +a_nx^n$, di mana $a_i \in R$ ($i = 0, 1, 2, \ldots, n$) dan x adalah variabel.

Masing-masing a_i itu disebut **koefisien** dari x^i, dan ax^i disebut **suku** dari polinomial tersebut. Dengan menggunakan notasi sigma suatu polinomial dapat ditulis sebagai berikut : $\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$.

Suatu a_0x^0 biasanya ditulis a_0 saja, a_1x^1 ditulis a_1x, dan $1x^i$ ditulis x^i.

Bila $a_n \neq 0$, maka bilangan bulat n tersebut disebut **derajat** dari polinomial yang bersangkutan. Suatu polinomial dikatakan sama dengan nol bila dan hanya bila $a_i = 0$ untuk setiap i.

Dua buah polinomial dikatakan sama bila dan hanya bila koefisien dari x dengan pangkat yang sama adalah sama. Himpunan polinomial-polinomial dalam x dengan koefisien-koefisien dari ring R, biasanya dilambangkan dengan R[x].

Definisi 2.3.2 :

Pada R[x] didefinisikan operasi penjumlahan dan perkalian sebagai berikut :

Jika $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$

$q(x) = \sum_{i=0}^{m} b_i x^i = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_m x^m$, maka

1. Jika $m=n$, maka

   $$p(x)+q(x) = \sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i) x^i .$$

   Jika $m>n$, maka

   $$p(x)+q(x) = \sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i) x^i + \sum_{i=n+1}^{m} b_i x^i .$$

   Jika $n>m$, maka

   $$p(x)+q(x) = \sum_{i=0}^{m} (a_i + b_i) x^i + \sum_{i=m+1}^{n} a_i x^i .$$

2. $$p(x)q(x) = (\sum_{i=0}^{n} a_i x^i)(\sum_{i=0}^{m} b_i x^i) = \sum_{i=0}^{n+m} (\sum_{k=0}^{i} a_k \; b_{i-k}) x^i .$$

Theorema 2.3.1 :

Jika R ring komutatif dan memuat elemen satuan e, maka dengan kedua operasi yang didefinisikan dalam Definisi 2.3.2 tersebut di atas, R[x] merupakan ring komutatif yang memuat elemen satuan.

Bukti:

Untuk setiap $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, $q(x) = \sum_{i=0}^{m} b_i x^i$, dan

$$r(x) = \sum_{i=0}^{l} c_i x^i$$

di dalam R[x], berlaku :

1. Jika $m=n$, maka $p(x)+q(x) = \sum_{i=0}^{n} (a_i+b_i)x^i$.

   Jika $m>n$, maka $p(x)+q(x) = \sum_{i=0}^{n} (a_i+b_i)x^i + \sum_{i=n+1}^{m} b_i x^i$

   di dalam R[x], karena $a_i + b_i$ di dalam R untuk setiap a_i, b_i di dalam R.

2. Jika $m=n$, maka $p(x)+q(x) = \sum_{i=0}^{n} (a_i+b_i)x^i$

$$= \sum_{i=0}^{n} (b_i+a_i)x^i$$

$= q(x) + p(x)$, sebab untuk setiap a_i, $b_i \in R$ berlaku $a_i+b_i = b_i+a_i$.

   Jika $m>n$, maka $p(x)+q(x) = \sum_{i=0}^{n} (a_i+b_i)x^i + \sum_{i=n+l}^{m} b_i x^i$.

$$= \sum_{i=0}^{n} (b_i+a_i)x^i + \sum_{i=n+1}^{m} b_i x^i$$

$= q(x) + p(x)$, sebab untuk setiap a_i, $b_i \in R$ berlaku $a_i+b_i = b_i+a_i$.

   Jika $n>m$, maka $p(x)+q(x) = \sum_{i=0}^{m} (a_i+b_i)x^i + \sum_{i=m+1}^{n} a_i x^i$.

$$= \sum_{i=0}^{m} (b_i + a_i)x^i + \sum_{i=m+1}^{n} a_i x^i .$$

$= q(x)+p(x)$, sebab untuk

setiap $a_i, b_i \in R$ berlaku $a_i + b_i = b_i + a_i$.

3. Untuk sifat assosiatif terhadap penjumlahan terdapat banyak kemungkinan, tetapi di sini hanya akan dibuktikan untuk beberapa saja. Sedangkan kemungkinan-kemungkinan yang lain analog.

Jika $m=n=l$, maka

$$(p(x)+q(x))+r(x) = \sum_{i=0}^{n} (a_i+b_i)x^i + \sum_{i=0}^{n} c_i x^i$$

$$= \sum_{i=0}^{n} ((a_i+b_i)+c_i)x^i$$

$$= \sum_{i=0}^{n} (a_i+(b_i+c_i))x^i$$

$$= \sum_{i=0}^{n} a_i x^i + \sum_{i=0}^{n} (b_i+c_i)x^i$$

$$= p(x)+(q(x)+r(x)).$$

Jika $m=n>l$, maka

$$(p(x)+q(x))+r(x) = \sum_{i=0}^{n} (a_i+b_i)x^i + \sum_{i=0}^{l} c_i x^i$$

$$= \sum_{i=0}^{l} ((a_i+b_i)+c_i)x^i + \sum_{i=l+1}^{n} (a_i+b_i)x^i$$

$$= \sum_{i=0}^{l} (a_i + (b_i + c_i))x^i + \sum_{i=l+1}^{n} a_i x^i + \sum_{i=l+1}^{n} b_i x^i$$

$$= \sum_{i=0}^{n} a_i x^i + [\sum_{i=0}^{l} (b_i + c_i)x^i + \sum_{i=l+1}^{m} b_i x^i]$$

$$= p(x)+(q(x)+r(x)).$$

Jika $m>n>l$, maka

$$(p(x)+q(x))+r(x) = [\sum_{i=0}^{n} (a_i+b_i)x^i + \sum_{i=n+1}^{m} b_i x^i] + \sum_{i=0}^{l} c_i x^i$$

$$= [\sum_{i=0}^{l} [(a_i+b_i)+c_i]x^i + \sum_{i=l+1}^{n} (a_i + b_i)x^i + \sum_{i=n+1}^{m} b_i x^i$$

$$= [\sum_{i=0}^{l} [a_i+(b_i+c_i)]x^i + \sum_{i=l+1}^{n} a_i x^i + \sum_{i=l+1}^{m} b_i x^i$$

$$= \sum_{i=0}^{n} a_i x^i + [\sum_{i=0}^{l} (b_i + c_i)x^i + \sum_{i=l+1}^{m} b_i x^i]$$

$$= p(x)+(q(x)+r(x)).$$

Jika $m<n=l$, maka

$$(p(x)+q(x))+r(x) = [\sum_{i=0}^{m} (a_i+b_i)x^i + \sum_{i=m+1}^{n} a_i x^i] + \sum_{i=0}^{n} c_i x^i$$

$$= [\sum_{i=0}^{m} [(a_i+b_i)+c_i]x^i + \sum_{i=m+1}^{n} (a_i + c_i)x^i$$

$$= \sum_{i=0}^{m} [a_i+(b_i+c_i)]x^i + \sum_{i=m+1}^{n} (a_i+c_i)x^i$$

$$= \sum_{i=0}^{n} a_i x^i + [\sum_{i=0}^{m} (b_i + c_i) x^i + \sum_{i=m+1}^{n} c_i x^i]$$

$$= p(x) + (q(x) + r(x)).$$

4. Ada elemen identitas, yaitu $0 = \sum_{i=0}^{n} 0x^i$ di dalam $R[x]$, sedemikian sehingga untuk setiap $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in R[x]$ berlaku $p(x) + 0 = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i + \sum_{i=0}^{n} 0\, x^i = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$.

5. Untuk setiap $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in R[x]$ ada elemen $-p(x) = \sum_{i=0}^{n} (-a_i) x^i \in R[x]$, sedemikian sehingga $p(x) + (-p(x)) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i + \sum_{i=0}^{n} (-a_i) x^i = \sum_{i=0}^{n} 0x^i = 0$ sebab untuk setiap $a_i \in R$ ada elemen $-a_i \in R$, sedemikian sehingga $a_i + (-a_i) = 0 \in R$.

6. $p(x)q(x) = \sum_{i=0}^{n+m} (\sum_{k=0}^{i} a_k\, b_{i-k}) x^i \in R[x]$ sebab untuk setiap $a_k,\ b_{i-k} \in R$, maka $a_k\, b_{i-k} \in R$.

7. $(p(x)q(x))r(x) = (\sum_{k=0}^{n+m} (\sum_{i=0}^{k} a_i\, b_{k-i}) x^k)(\sum_{i=0}^{l} c_i x^i)$

$$= \sum_{k=0}^{n+m+l} [\sum_{r=0}^{k} (\sum_{i=0}^{r} a_i b_{r-i}) c_{k-r} \; x^k]$$

$$= \sum_{k=0}^{n+m+l} \sum_{i+j+s=0}^{k} (a_i \; b_j c_s) \; x^k$$

$$= \sum_{k=0}^{m+n+l} [\sum_{r=0}^{k} a_{k-r} (\sum_{j=0}^{r} b_j c_{r-j} \;)] x^k$$

$$= (\sum_{i=0}^{m} a_i x^i \;)[(\sum_{r=0}^{n+l} \; (\sum_{j=0}^{n} b_j c_{r-j}) x^r \;]$$

$$= \; p(x)(q(x)r(x)).$$

8. Jika $m=n=l$, maka

$$p(x)[q(x) + r(x)] = (\sum_{i=0}^{n} a_i x^i \;)(\sum_{i=0}^{n} \; [b_i + c_i] x^i)$$

$$= \sum_{i=0}^{n+n} \sum_{k=0}^{i} (a_k [b_{i-k} + c_{i-k}]) x^i$$

$$= \sum_{i=0}^{n+n} \sum_{k=0}^{i} (a_k b_{i-k} + \; a_k c_{i-k}) x^i$$

$$= \sum_{i=0}^{n+n} (\sum_{k=0}^{i} a_k b_{i-k}) x^i \; + \sum_{i=0}^{n+n} (\sum_{k=0}^{i} a_k c_{i-k}) x^i$$

$$= p(x)q(x)+p(x)r(x)$$

Jika $m>n>l$, maka

$$p(x)[q(x) + r(x)] = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \; [\sum_{i=0}^{l} (b_i + c_i) x^i + \sum_{i=l+1}^{m} \; b_i x^i]$$

$$= \sum_{i=0}^{n} a_i x^i [\sum_{i=0}^{l}(b_i+c_i)x^i + \sum_{i=l+1}^{m} (b_i+c_i)x^i],$$

(di mana $c_i=0$, untuk $i>l$)

$$= \sum_{i=0}^{n} a_i x \quad [\sum_{i=0}^{m} (b_i+c_i)x^i]$$

$$= \sum_{i=0}^{n+m} \sum_{k=0}^{i} a_k(b_{i-k}+c_{i-k})x^i$$

$$= \sum_{i=0}^{n+m} \sum_{k=0}^{i}(a_k \, b_{i-k}+ a_k c_{i-k})x^i$$

$$= \sum_{i=0}^{n+m} \sum_{k=0}^{i} a_k \, b_{i-k}x^i + \sum_{i=0}^{n+m} \sum_{k=0}^{i} a_k c_{i-k}x^i$$

$$= \sum_{i=0}^{n+m} \sum_{k=0}^{i} a_k \, b_{i-k}x^i + \sum_{i=0}^{n+l} \sum_{k=0}^{i} a_k c_{i-k}x^i$$

$$= p(x)q(x) + p(x)r(x).$$

Jika $n<m=l$, maka

$$p(x)[q(x) + r(x)] = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \quad [\sum_{i=0}^{m} (b_i+c_i)x^i]$$

$$= \sum_{i=0}^{n+m} \sum_{k=0}^{i} a_k(b_{i-k}+c_{i-k})x^i$$

$$= \sum_{i=0}^{n+m} \sum_{k=0}^{i} (a_k b_{i-k} + a_k c_{i-k})x^i$$

$$= \sum_{i=0}^{n+m} \sum_{k=0}^{i} a_k b_{i-k}x^i + \sum_{i=0}^{n+m} \sum_{k=0}^{i} a_k c_{i-k}x^i$$

$$= p(x)q(x) + p(x)r(x).$$

Jika $n=m>l$, maka

$$p(x)(q(x)+r(x)) = \sum_{i=o}^{n} a_i x^i \left(\sum_{i=o}^{l} [b_i+c_i]x^i + \sum_{i=l+1}^{n} b_i x^i\right)$$

$$= \sum_{i=o}^{n} a_i x^i \left(\sum_{i=o}^{l} [b_i+c_i]x^i + \sum_{i=l+1}^{n} [b_i+c_i]x^i\right)$$

(di mana $c_i=0$, untuk k $i>l$)

$$= \sum_{i=o}^{n} a_i x^i \left(\sum_{i=o}^{n} [b_i+c_i]x^i\right)$$

$$= \sum_{i=o}^{n+n} \sum_{k=o}^{i} a_k(b_{i-k}+c_{i-k})x^i$$

$$= \sum_{i=o}^{n+n} \sum_{k=o}^{i} (a_k b_{i-k}+a_k c_{i-k})x^i$$

$$= \sum_{i=o}^{n+n} \sum_{k=o}^{i} a_k b_{i-k} x^i + \sum_{i=o}^{n+n} \sum_{k=o}^{i} a_k c_{i-k} x^i$$

$$= \sum_{i=o}^{n+n} \sum_{k=o}^{i} a_k b_{i-k} x^i + \sum_{i=o}^{n+l} \sum_{k=o}^{i} a_k c_{i-k} x^i$$

$$= p(x)q(x) + p(x)r(x).$$

Kemungkinan-kemungkinan lain dibuktikan secara analog.

9. $$p(x)q(x) = \sum_{k=o}^{n+m} \left(\sum_{i=o}^{k} a_i b_{k-i}\right)x^k$$

$$= \sum_{k=o}^{m+n} \left(\sum_{i=o}^{k} b_{k-i} a_i\right)x^k$$

$$= q(x)p(x).$$

10. Terdapat elemen satuan yaitu $ex^o=e$, sedemikian sehingga

- untuk setiap $p(x) = (\sum_{i=o}^{m} a_i x^i)$ berlaku

$ex^o p(x) = (\sum_{i=o}^{m} ea_i x^i) = (\sum_{i=o}^{m} a_i x^i)$, sebab $ea_i = a_i$ untuk setiap $a_i \in R$.

Dari 1,2,3,...,10 terbukti bahwa R[x] adalah ring komutatif dengan elemen satuan ex^o.■

Theorema 2.3.2 :

Jika ring R tidak memuat pembagi nol, maka ring R[x] juga tidak memuat pembagi nol.

Bukti:

Misalkan $p(x) = \sum_{i=o}^{n} a_i x^i$ dan $q(x) = \sum_{i=o}^{m} b_i x^i$ di dalam R[x].

$p(x) \neq 0$ dan $q(x) \neq 0$. Karena $p(x) \neq 0$, maka terdapat koefisien dari x^i yang tidak sama dengan nol, misalkan a_r adalah koefisien dengan indeks tertinggi yang tidak sama dengan nol. Karena $q(x) \neq 0$, maka terdapat koefisien dari x^i yang tidak sama dengan nol, misalkan b_m adalah koefisien dengan indeks tertinggi yang tidak sama dengan nol. Sehingga $p(x)q(x) = a_o b_o + (a_o b_1 + a_1 b_o)x + \ldots + a_r b_m x^{r+m}$.

Karena R tidak memuat pembagi nol, maka $a_r b_m \neq 0$.

Jadi $p(x)q(x) \neq 0$.

Jadi ring R[x] tidak memuat pembagi nol.■

Definisi 2.3.3 :

Dalam R[x] didefinisikan $(a_0+a_1x + a_2x^2+....+a_nx^n)\in R^+[x]$, $a_n \neq 0$, bila hanya bila $a_n \in R^+$.

Theorema 2.3.3 :

Jika R adalah ring terurut, dengan R^+ adalah himpunan yang memuat semua elemen positif dari R, maka R[x] juga merupakan ring terurut, dengan $R^+[x]$ sebagai himpunan elemen-elemen positifnya.

Bukti:

1. Jika $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ dan $q(x) = \sum_{i=0}^{m} b_i x^i$ di dalam $R^+[x]$, maka $a_n, b_m \in R^+$.

   Jika $m=n$, maka

   $$p(x) + q(x) = \sum_{i=0}^{n} (a_i+b_i)x^i \in R^+[x] \text{ sebab } a_n+b_n \in R^+.$$

   Jika $m<n$, maka

   $$p(x) + q(x) = \sum_{i=0}^{m} (a_i+b_i)x^i + \sum_{i=m+1}^{n} a_i x^i \in R^+[x] \text{ sebab } a_n \in R^+.$$

   Jika $n<m$, maka

   $$p(x) + q(x) = \sum_{i=0}^{n} (a_i+b_i)x^i + \sum_{i=n+1}^{m} b_i x^i \in R^+[x] \text{ sebab } b_m \in R^+.$$

   Demikian pula untuk

   $$p(x)q(x) = \sum_{i=0}^{m+n} (\sum_{k=0}^{i} a_k b_{i-k})x^i \text{ di dalam } R^+[x], \text{ sebab}$$

$a_n b_m \in R^+$.

2. Ambil sebarang $p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \in R[x]$, di mana $a_i \in R$ $(i = 0,1,2,3,\ldots,n)$, $a_n \neq 0$. Maka $p(x) \neq 0$.

   Karena R terurut, maka tepat satu dari pernyataan ini berlaku : $a_n \in R^+$, yang berarti

   $p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \in R^+[x]$, atau $-a_n \in R^+$, yang

   berarti $-p(x) = -a_0 + (-a_1 x) + \ldots + (-a_n x^n) \in R^+[x]$.

Terbukti bahwa R[x] merupakan ring polinomial terurut.■

BAB III

RING TERURUT YANG WELL-ORDERED

3.1 Karakteristik Ring Terurut

Suatu ring mempunyai karakteristik tertentu. Definisi karakteristik suatu ring diberikan di bawah ini.

Definisi 3.1.1 :

Karakteristik suatu ring R ialah bilangan bulat positif terkecil n, sedemikian sehingga $na=0$, untuk setiap $a \in R$.

Bila bilangan bulat seperti yang disebutkan dalam definisi di atas tidak ada, maka dikatakan ring R mempunyai karakteristik nol. Jika ring R mempunyai elemen satuan e dan karakteristiknya $n \neq 0$, maka jelas bahwa $ne=0$. Di lain pihak jika $ne=0$ dan $a \in R$, maka $na=n(ea)= (ne)a = 0a=0$. Oleh karena itu, untuk ring R dengan elemen satuan e, karakteristik dapat didefinisikan secara lain, yaitu sebagai bilangan bulat positif terkecil n sedemikian sehingga $ne = 0$. Di bawah ini akan ditunjukkan bahwa ring terurut dengan elemen satuan e mempunyai karakteristik nol. Sebelumnya perlu dipahami Lemma berikut ini.

Lemma 3.1.1 :

Jika R adalah ring terurut, $a \in R$ dan $a \neq 0$, maka $a^2 \in R^+$.

Bukti:

Karena $a \neq 0$ maka menurut hukum trikotomi : $a \in R^+$ atau $-a \in R^+$.

Jika $a \in R^+$, maka $a.a = a^2 \in R^+$.

Jika $-a \in R^+$, maka $(-a)(-a) = a^2 \in R^+$.■

Corrolary 3.1.1:

Jika ring terurut R mempunyai elemen satuan e, maka $e \in R^+$.

Bukti :

$e \neq 0$ dan $e^2 = e \in R^+$.■

Theorema 3.1.1 :

Jika R ring terurut dengan elemen satuan e, maka R mempunyai karakteristik nol.

Bukti:

Bila ring R terurut dengan elemen satuan e, maka menurut Corrolary 3.1.1, $e \in R^+$. Jadi menurut Lemma 2.1.1, $ne \in R^+$ untuk setiap bilangan bulat positif n.

Jadi $ne \neq 0$, untuk setiap bilangan bulat positif n.

Terbukti karakteristik R adalah nol.■

Theorema 3.1.2 :

Jika R adalah ring terurut dengan elemen satuan e, maka R memuat subring yang isomorfik dengan $\mathbb{Z}$.

Bukti :

Andaikan R ring terurut dengan elemen satuan e.

Didefinisikan pemetaan $\theta : \mathbb{Z} \longrightarrow R$ dengan aturan $\theta(n)=ne$, untuk setiap $n \in \mathbb{Z}$.

Ambil sebarang $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$. Jika $n_1=n_2$, maka $n_1e = n_2e$, yaitu $\theta(n_1) = \theta(n_2)$. Jadi pemetaan θ adalah well-defined. Jika $\theta(n_1) = \theta(n_2)$, maka $n_1e = n_2e$, sehingga $n_1e - n_2e = 0$, jadi $(n_1-n_2)e=0$. Karena R adalah ring terurut dengan elemen satuan e, maka menurut Theorema 3.1.1, R mempunyai karakteristik nol. Jadi $n_1 - n_2 = 0$, yaitu $n_1 = n_2$.

Jadi θ injektif.

Sehingga $\theta: \mathbb{Z} \longrightarrow \theta(\mathbb{Z})$ adalah pemetaan bijektif.

Jika $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$, maka

$\theta(n_1 + n_2) = (n_1 + n_2)e = n_1e + n_2e = \theta(n_1) + \theta(n_2)$, dan $\theta(n_1n_2) = (n_1n_2)e = (n_1e)(n_2e) = \theta(n_1)\theta(n_2)$, yang membuktikan bahwa θ homomorfisme. Maka $\theta(\mathbb{Z})$ subring dalam ring R, dan $\theta : \mathbb{Z} \longrightarrow \theta(\mathbb{Z})$ adalah suatu isomorfisme.

Terbukti bahwa $\mathbb{Z} \approx \theta(\mathbb{Z}) \subseteq R$.■

Corrolary 3.1.2 :

Suatu ring berhingga dengan elemen satuan pasti tidak terurut.

Bukti:

Suatu ring berhingga dengan elemen satuan e tidak dapat memuat subring yang isomorfik dengan $\mathbb{Z}$. Jadi ring berhingga pasti bukan ring terurut.■

Contoh :

Untuk setiap bilangan bulat positif n, $\mathbb{Z}_n$ merupakan ring berhingga dengan elemen satuan e, maka $\mathbb{Z}_n$ bukan ring terurut.

Corrolary 3.1.3 :

Di dalam ring terurut R dengan elemen satuan berlaku $(\forall a\in R)(\exists c\in R)\ c>a$, yaitu dalam R tidak terdapat elemen terbesar.

Bukti:

Menurut Theorema 3.1.2, ring R memuat subring yang isomorfik dengan Z.

Ambil sebarang elemen $a\in Z$. Elemen $1\in Z^+$. Padahal $1 = a+1-a$. Jadi $a+1-a \in Z^+$. Berarti $a+1>a$. Jadi untuk setiap $a\in Z$ terdapat $c=a+1 \in Z$ sedemikian sehingga $c>a$, yaitu tidak terdapat elemen terbesar dalam Z.■

3.2 Ring Terurut yang Well-ordered

Definisi 3.2.1 :

Suatu elemen a di dalam himpunan bagian $S\neq\emptyset$ dari suatu ring terurut R disebut **elemen terkecil** di dalam S bila $a<x$ untuk setiap $x\in S$ di mana $x\neq a$.

Untuk memperjelas Definisi 3.2.1 akan diberikan contoh-contoh di bawah ini.

Contoh 1 :

Elemen 1 adalah elemen terkecil dalam himpunan bilangan - bilangan bulat positif Z^+.

Contoh 2 :

Elemen 1 adalah juga elemen terkecil di dalam $Z^+[x]$. Hal ini dapat ditunjukkan seperti di bawah ini.

Jelas bahwa $1 \in Z^+[x]$. Ambil sebarang polinomial $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n \in Z^+[x]$. Maka $a_n \in Z^+$.

Selanjutnya $p(x)-1 = (a_0-1) + a_1x + \ldots + a_nx^n$.

Karena a_n tetap di dalam Z^+, $p(x)-1 \in Z^+[x]$, yang berarti $1 < p(x)$. Jadi 1 adalah elemen terkecil di dalam $Z^+[x]$.

Definisi 3.2.2 :

Suatu himpunan bagian S dari ring terurut R dikatakan **well-ordered** bila setiap himpunan bagian yang tidak kosong dari S memuat elemen terkecil.

Definisi 3.2.3 :

Suatu ring terurut dikatakan well-ordered bila R^+ well-ordered dalam R.

Ring terurut Z adalah well-ordered, karena setiap himpunan bagian yang tidak kosong dari Z^+ memuat elemen terkecil. Ring terurut Q tidak well-ordered, karena Q^+ tidak memuat elemen terkecil. Demikian juga halnya dengan $Z[x]$, meskipun Z adalah ring terurut yang well-ordered. Untuk menunjukkan bahwa $Z[x]$ adalah ring terurut yang tidak well-ordered, akan ditunjukkan bahwa ada himpunan bagian dari $Z^+[x]$ yang tidak mempunyai elemen terkecil. Untuk membuktikan itu, terlebih dahulu akan ditunjukkan bahwa di dalam Z tidak ada elemen terkecil, yaitu $(\forall a \in Z)(\exists c \in Z)\ c < a$.

Ambil sebarang elemen $a \in Z$. Elemen $1 \in Z^+$. Padahal $1=a-(a-1)$. Jadi $a-(a-1) \in Z^+$. Berarti $a-1 < a$. Jadi untuk setiap $a \in Z$ terdapat $c = a-1 \in Z$ sedemikian sehingga $c<a$, yaitu tidak terdapat elemen terkecil dalam Z.

Andaikan $P=\{a_o+x \mid a_o \in Z\} \subset Z^+[x]$. Andaikan ada elemen terkecil dalam P, yaitu $q(x)=r_o+x$, di mana $r_o \in Z$. Maka $q(x)<p(x)$ untuk setiap $p(x) = a_o+x$ $(a_o \in Z)$ di dalam P, di mana $p(x) \neq q(x)$. Jadi $p(x)-q(x) = a_o-r_o \in Z^+[x]$ $\forall p(x) \neq q(x) \in P$. Maka $a_o-r_o \in Z^+$ $\forall a_o \in Z$. Berarti r_o merupakan elemen terkecil dalam Z. Kontradiksi. Jadi tidak ada elemen terkecil di dalam P. Terbukti bahwa $Z[x]$ tidak well-ordered.

Selanjutnya Theorema di bawah ini akan menunjukkan bahwa Z adalah satu-satunya daerah integral terurut yang well-ordered.

Theorema 3.2.1 :

Jika R adalah ring terurut yang well-ordered dan mempunyai elemen satuan e, maka e adalah elemen terkecil dalam R^+.

Bukti:

Karena R well-ordered, maka R^+ haruslah memuat elemen terkecil, misalnya a. Andaikan $a \neq e$. Karena $e \in R^+$, maka $a<e$ dan $a>0$, maka $a^2<a$. Kontradiksi, sebab a adalah elemen terkecil di dalam R^+. Jadi $a=e$. ■

Theorema 3.2.2 :

Setiap ring terurut dengan elemen satuan e, yang well-ordered pasti isomorfik dengan $\mathbb{Z}$.

Bukti:

Andakan R adalah ring terurut dengan elemen satuan e yang well-ordered .

Didefinisikan pemetaan $\theta : \mathbb{Z} \longrightarrow R$ dengan aturan $\theta(n)=ne$ untuk setiap $n \in \mathbb{Z}$. Dalam Theorema 3.1.2, sudah dibuktikan bahwa $\mathbb{Z} \approx \theta(\mathbb{Z})$.

Tinggal membuktikan bahwa $\theta(\mathbb{Z}) = R$.

Andaikan $\theta(\mathbb{Z}) \neq R$. Maka ada $d \in R$ tetapi $d \notin \theta(\mathbb{Z})$. Akibatnya $-d \notin \theta(\mathbb{Z})$, sebab andaikan $-d \in \theta(\mathbb{Z})$, maka karena $\theta(\mathbb{Z})$ subring dalam R, maka $-(-d) = d \in \theta(\mathbb{Z})$. Kontradiksi sebab $d \notin \theta(\mathbb{Z})$. Karena $d \notin \theta(\mathbb{Z})$ dan $0 \in \theta(\mathbb{Z})$ ($\theta(\mathbb{Z})$ subring), maka $d \neq 0$, sehingga $d \in R^+$ atau $-d \in R^+$. Jadi dapat disimpulkan bahwa ada elemen positif di dalam R tetapi tidak di dalam $\theta(\mathbb{Z})$, yaitu $A = R^+ \backslash \theta(\mathbb{Z}) \neq \emptyset$.

Karena R adalah ring yang well-ordered, maka A pasti memuat elemen terkecil, namakan s.

Karena $\theta(1) = 1e = e$, maka $e \in \theta(\mathbb{Z})$. Karena $s \notin \theta(\mathbb{Z})$, maka $e \neq s$. Menurut Theorema 3.2.1, e elemen terkecil di dalam R^+. Padahal $e \in R^+$. Jadi $s > e$, sehingga $s - e > 0$, yaitu $s-e \in R^+$.

Sekarang andaikan $s-e \notin \theta(\mathbb{Z})$.

Maka $s -e \in R^+ \backslash \theta(\mathbb{Z}) = A$.

Sehingga $s < s-e$, sebab e elemen terkecil dalam A.

Padahal $s > s - e$, sebab $s-(s-e) = e \in R^+$.

Jadi haruslah $s-e \in \theta(\mathbb{Z})$.

Berarti ada $k \in \mathbb{Z}$ sedemikian sehingga $\theta(k) = s-e$, yaitu

$ke = s-e$.

Jadi $\theta(k+1) = (k+1)e = ke + e = (s-e)+e = s$, yang berarti bahwa $s \in \theta(\mathbb{Z})$. Kontradiksi, sebab $s \in A = R^{+} \setminus \theta(\mathbb{Z})$.

Jadi haruslah $\theta(\mathbb{Z}) = R$. ∎

Menurut Corrolary 2.1.2, ring terurut yang komutatif dan memuat elemen satuan merupakan daerah integral. Daerah integral terurut adalah daerah integral yang sebagai ring merupakan ring terurut. Contoh daerah integral terurut adalah ring bilangan-bilangan bulat $\mathbb{Z}$, ring bilangan-bilangan rasional $\mathbb{Q}$, dan ring bilangan-bilangan real $\mathbb{R}$. Menurut Theorema 3.2.2, $\mathbb{Z}$ adalah satu-satunya daerah integral terurut yang well-ordered.

BAB IV

FIELD TERURUT

4.1 Field Pembagi

Suatu field pasti merupakan daerah integral. Tetapi suatu daerah integral belum tentu merupakan field. Dari suatu daerah integral dapat dibentuk suatu field, yang disebut field pembagi, dan yang memuat daerah integral tersebut. Sebelum menguraikan field pembagi terlebih dahulu akan didefinisikan field itu sendiri.

Definisi 4.1.1:

Suatu ring disebut **field** bila elemen-elemennya yang bukan nol membentuk grup komutatif terhadap operasi perkalian.

Sekarang akan dibangun suatu field yang memuat daerah integral D yang diketahui. Andaikan S adalah suatu himpunan yang elemen-elemennya berupa pasangan - pasangan berurutan (a,b) di mana $a,\ b \in D$ dan $b \neq 0$, yaitu :

$S = \{(a,b) \mid a,\ b \in D,\ b \neq 0\}$.

Selanjutnya didefinisikan suatu relasi " ~ " pada S, yaitu :$(a,b) \sim (c,d)$ bila hanya bila $ad = bc$, untuk setiap (a,b) dan $(c,d) \in S$.

Akan ditunjukkan bahwa relasi ~ tersebut pada S adalah relasi ekuivalensi.

Untuk setiap $(a,b), (c,d)$, dan $(f,g) \in S$ berlaku :

1. $(a,b) \sim (a,b)$ karena $ab=ba$.

2. Jika $(a,b) \sim (c,d)$, maka $ad = bc$. Karena $ad = da$ dan $bc = cb$, maka $cb = da$, sehingga $(c,d) \sim (a,b)$.
3. Jika $(a,b) \sim (c,d)$ dan $(c,d) \sim (f,g)$, maka $ad = bc$ dan $cg = df$. Dengan demikian $adg = bcg$ dan $bcg = bdf$. Maka $adg = bdf$, sehingga $(ag)d = (bf)d$. Karena $d \neq 0$, maka hukum kanselasi berlaku sehingga $ag = bf$.

   Jadi $(a,b) \sim (f,g)$.■

Kelas ekuivalensi yang memuat (a,b) dilambangkan dengan $[a,b]$. Jadi $[a,b] = \{(x,y) \in S \mid (x,y) \sim (a,b)\}$.
Sekarang andaikan F_D adalah himpunan semua kelas ekuivalensi yang dibangkitkan oleh relasi ekuivalensi tersebut. Jadi $F_D = \{[a,b] \mid (a,b) \in S\}$.

Theorema 4.1.1:

Dalam F_D berlaku sifat-sifat sebagai berikut (untuk setiap $a, b, c, d \in D$):

1) $[a,b]=[c,d] \Leftrightarrow (a,b) \sim (c,d)$.
2) $[a,a]=[e,e]$.
3) $[ac,bc]=[a,b]$.
4) $[-a,b]=[a,-b]$.
5) $[0,a]=[0,b]$.

Bukti :

1) $[a,b]$ adalah kelas ekuivalensi yang memuat (a,b) yaitu $(a,b) \in [a,b]$. Karena $[a,b] = [c,d]$, maka $(a,b) \in [c,d]$. Jadi $(a,b) \sim (c,d)$. Jika sebarang elemen $(x,y) \in [a,b]$, maka $(x,y) \sim (a,b)$. Diketahui $(a,b) \sim (c,d)$.

Maka dengan hukum transitif diperoleh $(x,y)\sim(c,d)$. Jadi $(x,y)\in[c,d]$. Jika sembarang elemen $(x,y)\in [c,d]$, maka $(x,y) \sim (c,d)$. Diketahui $(a,b) \sim (c,d)$ yang berarti juga $(c,d)\sim(a,b)$. Dengan hukum transitif diperoleh $(x,y) \sim (a,b)$. Jadi $(x,y) \in [a,b]$.

Terbukti $[a,b]=[c,d]$.

2) $(a,a) \sim (e,e)$ sebab $ae=ae$. Jadi $[a,a]=[e,e]$.

3) $(ac,bc)\sim(a,b)$ sebab $acb=bca$. Jadi $[ac,bc]=[a,b]$.

4) $(-a,b)\sim(a,-b)$ sebab $(-a)(-b)=ab=ba$. Jadi $[-a,b]=[a,-b]$.

5) $(0,a) \sim (0,b)$ sebab $0b = 0a = 0$. Jadi $[0,a]=[0,b]$. ■

Definisi 4.1.2 :

Didefinisikan operasi "penjumlahan" dan "perkalian" pada F_D sebagai berikut :

$[a,b] + [c,d] = [ad + bc, bd]$, dan $[a,b][c,d] = [ac,bd]$, untuk setiap $[a,b]$ dan $[c,d] \in F_D$.

Berikut ini akan ditunjukkan bahwa operasi-operasi tersebut adalah well-defined.

Andaikan $[a,b] = [a',b']$ dan $[c,d] = [c',d']$. Akan dibuktikan bahwa :

$$[a,b]+[c,d] = [a',b']+[c',d']$$

dan

$$[a,b][c,d] = [a',b'][c',d'].$$

Bukti:

Karena $[a,b] = [a',b']$, maka $(a,b) \sim (a',b')$, berarti $a\ b' = b\ a'$.

Dan karena $[c,d] = [c',d']$, maka $(c\ ,d\ ) \sim (c',d')$,

berarti $c\ d' = d\ c'$.

Sehingga $(a\ d + b\ c\ )(b'd') = a\ d\ b'd' + b\ c\ b'd'$

$$= a\ b'd\ d' + b\ b'c\ d'$$

$$= b\ a'd\ d' + b\ b'c\ d'$$

$$= b\ d\ a'd' + b\ d\ b'c'$$

$$= b\ d\ (a'd' + b'c').$$

Jadi $[a\ d + b\ c\ ,b\ d\ ] = [a'd' + b'c',\ b'd']$, yaitu

$$[a,b]+[c,d]=[a',b']+[c',d'].$$

Demikian pula $(ac)(b'd') = a\ b'c\ d'$

$$= b\ a'd\ c'$$

$$= b\ d\ a'c'$$

$$= (bd)(a'c').$$

Jadi $[a\ c,bd] = [a'c',b'd']$, yaitu

$$[a,b][c,d]=[a',b'][c',d'].\blacksquare$$

Theorema 4.1.2 :

Dengan operasi penjumlahan dan perkalian pada F_D yang didefinisikan dalam Definisi 4.1.2 tersebut di atas F_D merupakan field (yang disebut **field pembagi** dari daerah integral D). Dan lagi $D' = \{[a,e] \in F_D \,|\, a \in D\}$ adalah subdaerah integral dari F_D, yang isomorfik dengan D.

Bukti :

Untuk setiap $[a,b]$, $[c,d]$, dan $[f,g]$ di dalam F_D, berlaku:

1. $[a,b]+[c,d] = [ad+bc,bd]$ di dalam F_D karena $ad+bc \in D$ dan $bd \neq 0$ untuk setiap $[a,b]$, $[c,d]$ di dalam F_D.

2. $[a,b]+[c,d] = [ad+bc,bd] = [da+cb,db] = [cb+da,db] = [c,d]+[a,b]$.
3. $([a,b] + [c,d]) + [f,g] = [ad+bc,bd] + [f,g]$

$$= [(ad+bc)g+(bd)f,(bd)g]$$
$$= [(ad)g+(bc)g+(bd)f,(bd)g]$$
$$= [a(dg)+b(cg)+(bd)f,(bd)g]$$
$$= [a(dg)+b(cg+df),b(dg)]$$
$$= [a,b] + [cg+df,dg]$$
$$= [a,b] + ([c,d] + [f,g]).$$

4. Terdapat $[0,d] \in F_D$ untuk sebarang $d \neq 0 \in D$, sedemikian sehingga untuk setiap $[a,b] \in F_D$, berlaku $[a,b]+[0,d]= [ad+b0,bd] = [ad,bd] = [a,b]$.
5. Untuk setiap $[a,b] \in F_D$, terdapat $[-a,b] \in F_D$ sedemikian sehingga $[a,b]+[-a,b] = [ab + b(-a),bb] = [0,bb]$.
6. $[a,b][c,d]=[ac,bd]$ di dalam F_D karena $ac \in D$ dan $bd \neq 0$ untuk setiap $[a,b],[c,d] \in F_D$.
7. $[a,b][c,d] = [ac,bd] = [ca,db] = [c,d][a,b]$.
8. $([a,b][c,d])[f,g] = [ac,bd][f,g] = [(ac)f,(bd)g] = [a(cf),b(dg)] = [a,b][cf,dg] = [a,b]([c,d][f,g])$.
9. Terdapat $[e,e] \in F_D$ sedemikian sehingga untuk setiap $[a,b] \in F_D$ berlaku $[a,b][e,e] = [ae,be] = [a,b]$.
10. Jika $[a,b] \in F_D$ dan $[a,b] \neq [0,d]$, maka $a \neq 0$ di dalam D, sehingga $[b,a]$ di dalam F_D, dan $[a,b][b,a] = [ab,ba] = [ab,ab]=[e,e]$ dalam F_D.
11. $[a,b]([c,d]+[f,g]) = [a,b][cg+df,dg]$

$$= [a(cg+df),bdg]$$
$$= [acg+adf,bdg]$$

$$= [b(acg)+adf), b(bdg)]$$
$$= [(ac)(bg)+(bd)(af), (bd)(bg)]$$
$$= [ac, bd] + [af, bg]$$
$$= [a,b]\ [c,d] + [a,b][f,g].$$

Jadi F_D adalah field.

$D' = \{[a,e] \in F_D \mid a \in D\}$.

Didefinisikan pemetaan $\theta : D \longrightarrow D'$ dengan aturan $\theta(a)=[a,e]$ untuk setiap $a \in D$. Bila $\theta(a) = \theta(b)$, maka $[a,e]= [b,e]$.

Jadi $(a,e) \sim (b,e)$ yang berarti bahwa $ae = be$, yaitu $a=b$.

Dan jelas bahwa untuk setiap $[a,e] \in D'$ pasti terdapat $a \in D$.

Untuk setiap $a,b \in D$ berlaku :

$\theta(a+b) = [a+b,e] = [ae+eb,ee] = [a,e]+ [b,e] = \theta(a) + \theta(b)$

dan

$\theta(ab) = [ab,e] = [ab,ee] = [a,e][b,e] = \theta(a)\theta(b)$.

Jadi $D \approx \theta(D) = D'$, dan $\theta(D) = D'$ merupakan subdaerah integral dari F_D.■

Theorema 4.1.3 :

Jika F_D adalah field pembagi dari daerah integral D dan K suatu field yang memuat daerah integral yang isomorfik dengan D, maka K memuat field yang isomorfik dengan F_D.

Bukti:

Karena dua daerah integral yang isomorfik dapat dianggap "sama", maka daerah integral D dapat dipandang sebagai subring dari K. Didefinisikan pemetaan $\phi : F_D \longrightarrow K$, dengan aturan $\phi([a,b]) = ab^{-1}$, untuk setiap $[a,b] \in F_D$ (yaitu untuk setiap $a,b \in D$ dengan $b \neq 0$).

Ambil sebarang elemen $[a,b]$, $[c,d] \in F_D$ sedemikian sehingga $[a,b] = [c,d]$.

Maka

$$
\begin{aligned}
(a,b) &\sim (c,d) \\
ad &= bc \\
add^{-1} &= bcd^{-1} \\
ab^{-1} &= bcd^{-1}b^{-1} \\
ab^{-1} &= cd^{-1} \\
\theta([a,b]) &= \theta([c,d])
\end{aligned}
$$

Jadi pemetaan θ well-defined.

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa θ injektif.

Bila $\theta([a,b]) = \theta([c,d])$, maka

$$
\begin{aligned}
ab^{-1} &= cd^{-1} \\
ab^{-1}b &= cd^{-1}b \\
ad &= bc \\
(a,b) &\sim (c,d) \\
[a,b] &= [c,d]
\end{aligned}
$$

Jadi θ injektif.

Selanjutnya

$$
\begin{aligned}
\theta([a,b] + [c,d]) &= \theta([ad+bc,bd]) \\
&= (ad+bc)(bd)^{-1} \\
&= (ad)(bd)^{-1} + (bc)(bd)^{-1} \\
&= (ad)(d^{-1}b^{-1}) + (bc)(d^{-1}b^{-1}) \\
&= ab^{-1} + cd^{-1} \\
&= \theta([a,b]) + \theta([c,d])
\end{aligned}
$$

dan

$$
\begin{aligned}
\theta([a,b]\,[c,d]) = \theta([ac,bd]) &= (ac)(bd)^{-1} \\
&= (ac)(d^{-1}b^{-1}) \\
&= (ab^{-1})(cd^{-1})
\end{aligned}
$$

$= \theta([a,b])\,\theta([c,d])$.

Jadi F_D isomorfik dengan suatu subfield dari K.■

Corrolary 4.1.1 :

Jika K adalah suatu field dengan karakteristik nol, maka K memuat subfield yang isomorfik dengan Q.

Bukti:

Memakai bukti Theorema 3.1.2 kita memperoleh bahwa K memuat subring (daerah integral) yang isomorfik dengan Z. Maka dengan Theorema 4.1.3, K pasti memuat field yang isomorfik dengan F_Z = Q.■

4.2 Field Pembagi Terurut

Dengan menggunakan sifat-sifat pada ring terurut akan didefinisikan field terurut.

Definisi 4.2.1.:

Suatu field F disebut **field terurut** bila sebagai ring F merupakan ring terurut.

Jadi field F adalah terurut bila memuat himpunan bagian F^+, yang terdiri dari elemen-elemen positif dari F, yang memenuhi sifat-sifat tertutup terhadap penjumlahan dan perkalian dan memenuhi hukum trikotomi.

Contoh field terurut adalah field bilangan-bilangan rasional Q, dan field bilangan-bilangan real R. Jika D daerah integral terurut, maka urutan dalam D dapat diperluas menjadi urutan dalam F_D, dalam arti dapat didefinisikan suatu urutan dalam F_D sedemikian sehingga bila urutan dalam F_D itu dibatasi untuk subdomain D, maka hasilnya adalah urutan semula dari D.

Theorema 4.2.1 :

Jika D daerah integral terurut dan F_D field pembagi dari D, maka urutan dalam D dapat diperluas menjadi urutan dalam F_D.

Bukti:

Didefinisikan $F_D^+ = \{[a,b] \in F_D \mid ab \in D^+\}$.

Menurut Lemma 3.1.1 : jika $a \in D$ dan $a \neq 0$, maka $a^2 \in D^+$.

Jika $[a,b], [c,d] \in F_D{}^+$, maka $ab \in D^+$, $cd \in D^+$, $b^2 \in D^+$, $d^2 \in D^+$. Maka :

1) $[a,b]+[c,d] = [ad+bc, bd] \in F_D^+$, sebab $(ad+bc)(bd)$
$= abd^2 + cdb^2 \in D^+$.

2) $[a,b][c,d] = [ac,bd] \in F_D{}^+$, sebab $(ac)(bd) =$
$(ab)(cd) \in D^+$.

3) Untuk setiap $[a,b] \in F_D$ berlaku tepat salah satu pernyatan berikut : $ab \in D^+$, yang berarti $[a,b] \in F_D^+$, atau $-ab \in D^+$, yang berarti $[-a,b] \in F_D^+$, atau $ab = 0$, yang berarti $a = 0$ (karena $b \neq 0$), sehingga $[a,b] = [0,e]$. Jadi hukum trikotomi berlaku.

Jadi F_D adalah field terurut.

Sekarang akan dibuktikan bahwa bila urutan pada F_D dibatasi pada $D \approx D' = \{[a,e] | a \in D\}$, hasilnya adalah urutan semula dari D. Untuk itu akan dibuktikan bahwa $F_D^+ \cap D' = D^+$, di mana $D^+ \approx D'^+ = \{[a,e] \in F_D | a \in D^+\}$. Ambil sebarang elemen $[a,b] \in F_D^+ \cap D'$. Maka $[a,b]$ di dalam F_D^+ dan $[a,b]$ di dalam D'. Berarti $ab \in D^+$ dan $b=e$, sehingga $ab = ae = a$. Jadi $a \in D^+$. Maka $[a,b] \in D'^+$. Ambil elemen sebarang $[a,b]$ di dalam D'^+. Maka jelas bahwa $[a,b]$ di dalam D', dan $a \in D^+$ dan $b=e$, sehingga $ab=ae=a$. Jadi $ab \in D^+$, yang berarti $[a,b] \in F_D^+$. Maka $[a,b] \in F_D^+ \cap D'$.

Terbukti bahwa $F_D^+ \cap D' = D^+$.■

Theorema 4.2.2 :

Dalam field pembagi terurut F_D dari daerah integral terurut D, berlaku sifat-sifat sebagai berikut (untuk setiap a, b, c, d $\in$ D):

1) $[0,d] < [e,b] \Leftrightarrow [0,d] < [b,e]$.
2) $[0,d] < [a,e] < [b,e] \Leftrightarrow [0,d] < [e,b] < [e,a]$.
3) $[a,e] < [b,e] < [0,d] \Leftrightarrow [e,b] < [e,a] < [0,d]$.
4) $[a,b] < [c,d] \Leftrightarrow [abd^2,e] < [b^2cd,e]$.

Bukti:

(1) ($\Rightarrow$)

Andaikan $[0,d] < [e,b]$.

Karena $b \neq 0$, maka $b^2 \in D^+$, sehingga $[b^2,e] \in F_D^+$. Maka

$[0,d][b^2,e] < [e,b][b^2,e]$

$[0,d] < [b^2,b]$

$[0,d] < [b,e]$.

($\Leftarrow$)

Andaikan $[0,d] < [b,e]$.

Karena $[e,b^2] \in F_D^+$, maka

$[0,d][e,b^2] < [b,e][e,b^2]$, yaitu $[0,db^2] < [b,b^2]$.

Jadi $[0,d] < [e,b]$.

2) ($\Rightarrow$)

Andaikan $[0,d] < [a,e] < [b,e]$.

Karena $[0,d] < [a,e]$, maka $[a,e]-[0,d] = [a,e]+[0,d] = [ad,d] = [a,e] \in F_D^+$. Jadi $a \in D^+$. Demikian pula $[0,d] < [b,e]$, maka $[b,e] - [0,d] = [b,e] + [0,d] = [bd,d] = [b,e] \in F_D^+$. Jadi $b \in D^+$. Karena $a \in D^+$ dan $b \in D^+$ maka $ab \in D^+$. Dengan demikian $[e,ab] \in F_D^+$. Maka $[0,d][e,ab] < [a,e][e,ab] < [b,e][e,ab]$, yaitu $[0,dab] < [a,ab] < [b,ab]$. Jadi $[0,d] < [e,b] < [e,a]$.

($\Leftarrow$)

Andaikan $[0,d] < [e,b] < [e,a]$.

Karena $[0,d] < [e,b]$, maka $[e,b]-[0,d] = [e,b]+[0,d] = [d,bd] = [e,b] \in F_D^+$. Jadi $b \in D^+$. Demikian pula $[0,d] < [e,a]$, maka $[e,a] - [0,d] = [e,a] + [0,d] = [d,ad] = [e,a] \in F_D^+$. Jadi $a \in D^+$. Karena $a \in D^+$ dan $b \in D^+$ maka $(-a)(-b) = ab \in D^+$.. Dengan demikian $[ab,e] \in F_D^+$. Maka

$[0,d][ab,e] < [e,b][ab,e] < [e,a][ab,e]$, yaitu

$[0,d] < [ab,b] < [ab,a]$. Jadi $[0,d] < [a,e] < [b,e]$.

3) $(\Rightarrow)$

Andaikan $[a,e] < [b,e] < [0,d]$.

Karena $[a,e] < [0,d]$, maka $[0,d]-[a,e] = [0,d]+[-a,e] = [d(-a),d] = [-a,e] \in F_D^+$. Jadi $-a \in D^+$. Demikian pula $[b,e] < [0,d]$, maka $[0,d]-[b,e] = [0,d] + [-b,e] = [d(-b),d]=[-b,e] \in F_D^+$. Jadi $-b \in D^+$. Karena $(-a) \in D^+$ dan $(-b) \in D^+$, maka $(-a)(-b)=ab \in D^+$. Sehingga $[e,ab] \in F_D^+$. Maka $[a,e][e,ab] < [b,e][e,ab] < [0,d][e,ab]$, yaitu $[a,ab] < [b,ab] < [0,dab]$. Jadi $[e,b] < [e,a] < [0,d]$.

$(\Leftarrow)$.

Andaikan $[e,b] < [e,a] < [0,d]$.

Karena $[e,a] < [0,d]$, maka $[0,d]-[e,a] = [0,d]+[e,-a] = [d,d(-a)] = [e,-a] \in F_D^+$. Jadi $-a \in D^+$. Demikian pula $[e,b] < [0,d]$, maka $[0,d] - [e,b] = [0,d] + [e,-b] = [d,d(-b)] = [e,-b] \in F_D^+$. Jadi $-b \in D^+$. Karena $-a \in D^+$ dan $-b \in D^+$, maka $(-a)(-b) = ab \in D^+$. Sehingga $[ab,e] \in F_D^+$. Maka $[e,b][ab,e] < [e,a][ab,e] < [0,d][ab,e]$, yaitu $[ab,b] < [ab,a] < [0,d]$. Jadi $[a,e] < [b,e] < [0,d]$.

4) $(\Rightarrow)$

Andaikan $[a,b] < [c,d]$.

$[b^2d^2,e] \in F_D^+$ sebab $b^2d^2 \in D^+$, sehingga

$$[a,b][b^2d^2,e] < [c,d][b^2d^2,e]$$

$$[ab^2d^2,be] < [cb^2d^2,de]$$

$$[abd^2,e] < [cb^2d\ ,e].$$

($\Leftarrow$)

Andaikan $[abd^2,e] < [b^2cd,e]$.

Karena $[e,b^2d^2] \in F_D^+$, maka

$$[abd^2,e][e,b^2d^2] < [b^2cd,e][e,b^2d^2]$$

$$[abd^2,b^2d^2] < [b^2cd,b^2d^2]$$

$$[a,b] < [c,d]. \blacksquare$$

Dari Corrolary 4.1.1 dapat langsung diturunkan :

Corrolary 4.2.1 :

Jika K adalah suatu field terurut, maka K memuat subfield yang isomorfik dengan Q.

Bukti:

Menurut Theorema 3.1.1, K mempunyai karakteristik nol. Jadi dengan Corrolary 4.1.1, K memuat subfield yang isomorfik dengan Q.$\blacksquare$

BAB V

KESIMPULAN

Dari uraian-uraian pada bab-bab sebelumnya dapat disimpulkan bahwa:

1. Suatu ring R dikatakan terurut bila R memuat suatu himpunan bagian R^+, yang elemen-elemennya disebut elemen positif dari R, sedemikian sehingga dipenuhi sifat-sifat sebagai berikut :
   i) Jika $a,b \in R^+$, maka $a+b \in R^+$.
      (R^+ tertutup terhadap penjumlahan).
   ii) Jika $a,b \in R^+$, maka $ab \in R^+$.
      (R^+ tertutup terhadap perkalian).
   iii) Untuk setiap $a \in R$, tepat salah satu di antara tiga pernyataan ini berlaku: $a=0$, $a \in R^+$, $-a \in R^+$ (hukum trikotomi).
2. Suatu ring terurut dengan elemen satuan mempunyai karakteristik nol. Setiap ring terurut dengan elemen satuan yang well-ordered pasti isomorfik dengan $\mathbf{Z}$. Jadi $\mathbf{Z}$ adalah satu-satunya ring terurut dengan elemen satuan yang well-ordered.
3. Suatu daerah integral D dapat diperluas menjadi field, yang disebut field pembagi F_D. Apabila daerah integral tersebut terurut, maka urutannya juga dapat diperluas menjadi urutan dalam field F_D.

DAFTAR PUSTAKA

Birkhoff, G. and Mac Lane, S.
1959 *A Survey of Modern of Algebra*. New York: The Macmillan Company.

Dubisch, Roy.
1962 *Higher Algebra for the Undergraduate*. New York: John Wiley.

Mac Lane, S. and Birkhoff, G.
1967 *Algebra*. New York: The Macmillan Company.

Soehakso, R.M.J.T.
1980 *Aljabar Abstrak (Ring, Ideal, dan Field)*. Yogyakarta: FMIPA UGM.

Durbin, J.R.
1985 *Modern Algebra*. New York: John Wiley.

Mc Coy, Neal.
1987 *Introduction to Modern Algebra*. Boston: Allyn and Bacon.