LATIS DAN ALJABAR BOOLE

SKRIPSI

Diajukan untuk Memenuhi Salah Satu Syarat

Memperoleh Gelar Sarjana Pendidikan

Program Studi Pendidikan Matematika

oleh

Tan Siak Tjuang
NIM.89414023
NIRM.890052010501120076

JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN

UNIVERSITAS SANATA DHARMA

YOGYAKARTA

1994

SKRIPSI

LATIS DAN ALJABAR BOOLE

Oleh

Tan Siak Tjuang
NIM.89414023
NIRM.890052010501120076

telah disetujui oleh :

Pembimbing I

Dr. Frans Susilo, S.J tanggal 30-5-1994

Pembimbing II

Dra. A. Linda Yuliastuti tanggal 30 MEI 1994

Skripsi

LATIS DAN ALJABAR BOOLE

yang dipersiapkan dan disusun oleh

Tan Siak Tjuang
NIM.89414023
NIRM.890052010501120076

telah dipertahankan di depan Panitia Penguji
pada tanggal 19 Mei 1994
dan dinyatakan telah memenuhi syarat

Panitia Penguji

Nama Lengkap	Tanda Tangan
Dr. Frans Susilo, S.J.	....
Drs. A. Tutoyo, MSc.	....
Dra. A. Linda Yuliastuti	....
Dr. Yansen Marpaung	....
Drs. Eka Priyatma, MSc.	....

Yogyakarta, 6 Juni 1994
Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan
Universitas Sanata Dharma
Dekan,

Priyono Marwan

Dr. A. Priyono Marwan, S.J.

KATA PENGANTAR

Puji syukur kepada Tuhan Yang Maha Esa, atas karunia dan welas asihNya kepada penyusun, sehingga terselesaikannya skripsi berjudul LATIS DAN ALJABAR BOOLE yang merupakan hasil dari suatu studi literatur dalam bidang matematika murni.

Penyusunan skripsi ini dimaksudkan untuk memenuhi salah satu syarat memperoleh Gelar Sarjana Pendidikan Program Studi Pendidikan Matematika di Jurusan Pendidikan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Universitas Sanata Dharma , Yogyakarta.

Pada kesempatan ini, penyusun ingin mengucapkan terima kasih kepada:

- Romo Dr. Frans Susilo, S.J, selaku Pembimbing I yang telah mencurahkan perhatian dan kesabaran dalam membimbing penyusunan skripsi ini.
- Ibu Dra. A. Linda Yuliastuti, selaku Pembimbing II yang telah dengan sabar dan teliti dalam membaca dan mengkoreksi skripsi ini.
- Bapak Dr. St. Suwarsono, selaku Ketua Jurusan Pendidikan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Sanata Dharma.
- Bapak Drs. T. Sugiarto, selaku Ketua Program Studi Pendidikan Matematika, Universitas Sanata Dharma.
- Bapak dan Ibu Dosen Universitas Sanata Dharma yang telah memberikan pengetahuan dan dukungan moril selama penyusun mengikuti kuliah di Universitas Sanata Dharma.

- Bapak dan Ibu Karyawan Universitas Sanata Dharma yang telah memberikan dukungan moril dan pelayanan kepada penyusun.
- Rekan-rekan Mahasiswa di Universitas Sanata Dharma khususnya Mahasiswa di Program Studi Pendidikan Matematika yang telah memberi dukungan moril kepada penyusun.
- Pihak-pihak lain yang memungkinkan terselesaikannya skripsi ini.

Penyusun menyadari bahwa masih terdapat kekurangan-kekurangan dalam skripsi ini. Oleh karena itu segala masukkan yang sifatnya menyempurnakan skripsi ini akan penyusun terima dengan senang hati. Akhirnya, penyusun berharap semoga skripsi ini berguna bagi para pembaca terutama para pecinta matematika.

Yogyakarta, April 1994

Penyusun

DAFTAR ISI

Halaman

ABSTRAK

LATIS DAN ALJABAR BOOLE

Dua sistem aljabar yang paling mendasar, yaitu grup dan ring, memuat satu atau lebih operasi seperti operasi penjumlahan dan perkalian. Di samping itu terdapat sistem yang memuat konsep urutan (*order*) di antara dua elemen dalam sistem tersebut, seperti relasi $\subseteq$ untuk himpunan-himpunan dan relasi $\leq$ untuk bilangan-bilangan.

Relasi urutan $\mathcal{R}$ yang memenuhi sifat refleksif, antisimetris, dan transitif, disebut relasi urutan parsial (*partial order*). Himpunan yang dilengkapi dengan relasi urutan parsial disebut himpunan terurut parsial (*partially ordered set*) atau singkatnya poset. Poset yang setiap dua elemennya mempunyai batas atas terkecil (suprimum) dan batas bawah terbesar (infimum) disebut latis. Suprimum dan infimum dari dua elemen a dan b dalam suatu latis, berturut- turut dilambangkan dengan "$a \vee b$" (baca a join b) dan "$a \wedge b$" (baca a meet b). Jika L adalah latis, maka $\vee$ dan $\wedge$ dapat dipandang sebagai operasi-operasi pada L, dan operasi-operasi ini mempunyai sifat - sifat yang serupa dengan sifat-sifat operasi + dan . dalam suatu ring.

Latis juga dapat didefinisikan dengan cara lain. Jika suatu himpunan L dilengkapi dengan dua operasi $\vee$ dan $\wedge$ yang memenuhi hukum komutatif, assosiatif, absorpsi, dan idempoten, maka himpunan L tersebut merupakan suatu latis. Definisi pertama dan definisi kedua merupakan dua definisi yang ekuivalen bila relasi urutan $\mathcal{R}$ didefinisikan dengan menggunakan operasi $\vee$ atau $\wedge$ sebagai berikut: $a\mathcal{R}b$ bila dan hanya bila $a \vee b = b$ atau $a \wedge b = a$ untuk setiap $a, b \in L$.

Aljabar Boole merupakan latis yang sangat khusus, yaitu latis komplemen yang distributif dan memuat elemen satuan dan elemen nul. Aljabar Boole juga dapat didefinisikan secara lain. Jika suatu himpunan B dilengkapi dua operasi biner $\vee$ dan $\wedge$, dan satu operasi $'$ (komplemen) yang memenuhi hukum komutatif, assosiatif, distributif, mempunyai elemen satuan dan elemen nul, dan setiap elemennya mempunyai komplemen, maka himpunan B ini merupakan Aljabar Boole. Seperti halnya dengan latis, kedua definisi Aljabar Boole ini adalah ekuivalen.

Aljabar Boole yang dilengkapi dengan operasi jumlahan dan perkalian yang didefinisikan sebagai kombinasi dari operasi join, meet, dan komplemen, merupakan suatu ring.

BAB I

PENDAHULUAN

Dua sistem aljabar yang paling mendasar, yaitu grup dan ring, dalam Aljabar Modern seringkali disebut Struktur Aljabar. Sistem tersebut memuat satu atau lebih operasi seperti operasi penjumlahan dan perkalian. Di samping itu masih terdapat beberapa sistem aljabar yang tidak kalah menariknya untuk dipelajari. Salah satunya adalah latis (*lattice*). Latis merupakan sistem aljabar yang memuat konsep urutan (*order*), seperti misalnya relasi $\subseteq$ untuk himpunan-himpunan dan relasi $\leq$ untuk bilangan-bilangan. Latis menarik untuk dipelajari mengingat penerapannya yang cukup luas, seperti pada Aljabar Modern, Geometri Proyektif, Teori Himpunan, Logika Pernyataan, Teori Probabilitas, dan Analisis Fungsi.

Secara historis, latis merupakan generalisasi dari suatu aljabar, yaitu Aljabar Boole. Penamaan ini dimaksudkan untuk mengenang penemunya, yaitu seorang matematikawan berkebangsaan Inggris yang bernama George Boole (1815-1864). Pada tahun 1847, George Boole menerbitkan suatu karangan singkat yang berjudul *The Mathematical Analysis of Logic*. Boole mencoba untuk mensimbolisasikan pernyataan-pernyataan dalam logika dan memanipulasi simbol-simbol tersebut seperti pada aljabar. Aljabar Boole merupakan suatu sistem aljabar dengan dua operasi biner, yaitu $\vee$ (join) dan $\wedge$ (meet), serta satu operasi uner, yaitu komplemen, yang memenuhi aksioma-aksioma tertentu. Contoh paling dasar dari Aljabar Boole adalah himpunan semua subset dari suatu himpunan tidak kosong dengan operasi $\vee$ didefinisikan sebagai $\cup$ (gabungan), $\wedge$ didefinisikan sebagai $\cap$ (irisan), dan operasi komplemen dalam arti biasa.

Di dalam aljabar himpunan terdapat satu relasi antar himpunan yang dapat diabstraksikan untuk menghasilkan Aljabar Boole, yaitu relasi himpunan bagian $\subseteq$. Relasi tersebut dapat didefinisikan dengan menggunakan operasi gabungan sebagai berikut : $A \subseteq B$ bila dan hanya bila $A \cup B = B$. Abstraksi dari relasi $\subseteq$ untuk Aljabar Boole, menghasilkan relasi **urutan** $\mathcal{R}$, yang didefinisikan dengan menggunakan operasi $\vee$ sebagai berikut: $a\mathcal{R}b$ bila dan hanya bila $a \vee b = b$, untuk setiap dua elemen a dan b dalam Aljabar Boole.

Relasi urutan $\mathcal{R}$ dalam Aljabar Boole memenuhi sifat refleksif, antisimetris, dan transitif. Suatu relasi yang memenuhi ketiga sifat tersebut, disebut relasi **urutan parsial** *(partial order)*, dan suatu himpunan yang dilengkapi dengan relasi urutan parsial, disebut **himpunan terurut parsial** *(partially ordered set)* atau singkatnya **poset.** Hal ini akan dibicarakan dalam Bab II dari tulisan ini.

Tidak semua poset merupakan Aljabar Boole. Aljabar Boole merupakan poset yang sangat khusus, banyak syarat yang harus dipenuhi oleh suatu poset untuk menjadi suatu Aljabar Boole. Di dalam poset didefinisikan konsep **batas atas terkecil** dan **batas bawah terbesar** untuk subset-subsetnya. Poset yang setiap dua elemennya mempunyai batas atas terkecil dan batas bawah terbesar disebut latis. Pembicaraan tentang definisi latis akan dibahas pada Bab III dari tulisan ini.

Merupakan latis adalah salah satu syarat yang harus dipenuhi oleh suatu poset untuk menjadi Aljabar Boole. Pada tahun 1897, Richard Dedekind (1831-1916) matematikawan Jerman, memperkenalkan konsep latis modular dan latis distributif. Hukum distributif merupakan salah satu syarat yang harus dipenuhi oleh suatu latis untuk menjadi Aljabar Boole. Beberapa syarat lain yang diperlukan oleh poset untuk menjadi suatu Aljabar Boole akan disajikan pada Bab IV dari tulisan ini.

Akhirnya kita akan mendefinisikan Aljabar Boole sebagai suatu latis khusus. Dapat dibuktikan bahwa definisi Aljabar Boole sebagai latis khusus adalah ekuivalen dengan definisi Aljabar Boole sebagai suatu sistem aljabar yang memenuhi aksioma-aksioma tertentu. Kita juga akan melihat bahwa Aljabar Boole berhingga mempunyai struktur yang sama dengan himpunan semua subset dari suatu himpunan berhingga. Pembicaraan tentang Aljabar Boole akan kita akhiri dengan suatu contoh aplikasi dari Aljabar Boole, yang sangat berguna bagi penyederhanaan jaringan sirkuit listrik. Kesemuanya ini akan disajikan pada Bab V dari tulisan ini.

BAB II

HIMPUNAN TERURUT PARSIAL

2.1 Himpunan Terurut Parsial

Relasi $\mathcal{R}$ pada himpunan P disebut **urutan parsial** (*partial order*) pada P bila $\mathcal{R}$ bersifat refleksif, antisimetris, dan transitif. Himpunan P yang dilengkapi dengan relasi $\mathcal{R}$ seperti ini disebut **himpunan terurut parsial** *(partially ordered set)* atau singkatnya **poset**.

Relasi $\mathcal{R}$ ini biasanya dituliskan dengan lambang " $\leq$ ". Definisi poset secara lengkap dapat dinyatakan sebagai berikut:

Definisi 2.1.1

Poset P adalah himpunan P yang dilengkapi dengan relasi $\leq$, yang memenuhi aksioma- aksioma berikut:

(A1) refleksif : Jika $a \in P$, maka $a \leq a$

(A2) antisimetris : Jika $a,b \in P$, $a \leq b$ dan $b \leq a$, maka $a = b$

(A3) transitif : Jika $a,b,c \in P$, $a \leq b$ dan $b \leq c$, maka $a \leq c$.

Untuk $a,b \in P$, notasi $a < b$ berarti $a \leq b$ dan $a \neq b$; $b \geq a$ berarti $a \leq b$; dan $b > a$ berarti $a < b$. Jika berlaku $a \leq b$ atau $b \leq a$, maka a dan b dikatakan "dapat dibandingkan", jika tidak demikian, a dan b dikatakan "tak dapat dibandingkan". Dari definisi terlihat bahwa sembarang dua elemen dalam poset belum tentu dapat dibandingkan.

Definisi 2.1.2

Poset P disebut **himpunan terurut total** (*totally ordered set*) atau **rantai** (*chain*) bila memenuhi aksioma berikut:

(A4) Untuk setiap $a, b \in P$ berlaku $a \leq b$ atau $b \leq a$.

Contoh 2.1.1 Himpunan bilangan real $\mathbb{R}$ adalah rantai dengan relasi $\leq$ didefinisikan sebagai relasi "lebih kecil atau sama dengan". Catatan :*Dalam contoh-contoh lain, relasi $\leq$ diganti dengan relasi yang sesuai, yang didefinisikan pada masing-masing himpunan.*

Contoh 2.1.2 Himpunan bilangan asli $\mathbb{N}$ adalah poset dengan $a \leq b$ didefinisikan sebagai a faktor dari b, ditulis $a|b$.

Contoh 2.1.3 Andaikan $\mathcal{P}(S)$ adalah himpunan semua subset dari sembarang himpunan S yang tidak kosong. Maka $\mathcal{P}(S)$ adalah poset dengan $A \leq B$ di dalamnya didefinisikan sebagai $A \subseteq B$.

2.2 Diagram Poset Berhingga

Yang dimaksud dengan poset berhingga di sini adalah poset yang mempunyai jumlah anggota yang berhingga. Sebelum sampai pada penyajian poset dengan diagram, perlu didefinisikan pengertian berikut:

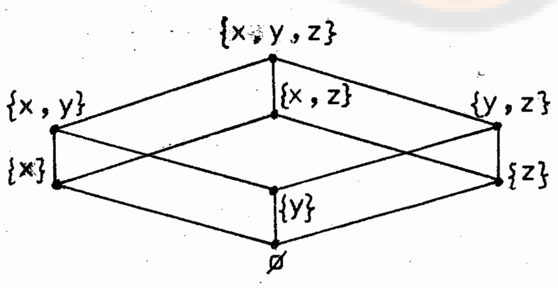
Definisi 2.2.1

Elemen b di dalam poset P disebut **melingkupi** elemen a yang berada dalam P, jika $a < b$ dan tidak ada $x \in P$ sedemikian hingga $a < x < b$. Keadaan ini disimbolkan dengan "$a \prec b$".

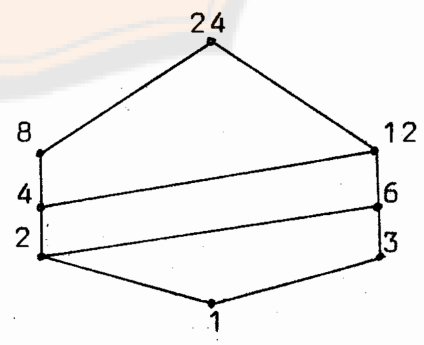
Contoh 2.2.1 Dalam poset $\mathcal{P}(S)$ (Contoh 2.1.3), $A \lessdot B$ bila dan hanya bila $B = A \cup \{b\}$, di mana b adalah sembarang elemen dari himpunan $B-A$. Pada poset bilangan real $\mathbb{R}$ (Contoh 2.1.1), tidak ada elemen yang melingkupi elemen lainnya, sebab di antara dua bilangan real selalu terdapat bilangan real lainnya.

Cara penyajian poset berhingga dengan diagram adalah sebagai berikut: Setiap elemen dalam poset disajikan dengan sebuah titik (atau simbol lain) dan jika $a \lessdot b$, maka titik untuk b digambarkan terletak "lebih tinggi" dari titik untuk a, kemudian kedua titik langsung dihubungkan dengan sepotong ruas garis. Selanjutnya, untuk menyingkat penulisan, kita gunakan simbol "T_n" untuk menyatakan "titik untuk elemen n". Dengan cara ini, maka $c<d$ bila dan hanya bila T_d terletak lebih tinggi dari T_c dan terdapat $e_1, e_2, \ldots, e_n$ dari poset tersebut sedemikian hingga $c=e_1 \lessdot e_2 \lessdot \ldots \lessdot e_n=d$. Gambar yang dihasilkan merupakan diagram untuk poset berhingga.

Contoh 2.2.1 Gambar 2.2.1 menunjukkan diagram untuk poset semua subset dari $\{x,y,z\}$ dengan relasi himpunan bagian $\subseteq$.



Gambar 2.2.1



Gambar 2.2.2

Contoh 2.2.2 Gambar 2.2.2 menunjukkan diagram untuk poset semua faktor dari 24, dengan relasi $a \leq b$ didefinisikan sebagai $a | b$.

2.3 Batas Atas dan Batas Bawah

Definisi 2.3.1

Diketahui **P** adalah poset dan **A** subset dari **P**. Elemen $u \in P$ disebut **batas atas** untuk **A** jika $x \leq u$ untuk setiap $x \in A$. Elemen $u \in P$ disebut **batas atas terkecil** (suprimum) untuk **A** jika u adalah batas atas untuk **A** dan untuk setiap batas atas lain v untuk **A**, berlaku $u \leq v$.

Definisi 2.3.2

Diketahui **P** adalah poset dan **A** subset dari **P**. Elemen $u \in P$ disebut **batas bawah** untuk **A** jika $u \leq x$ untuk setiap $x \in A$. Elemen $u \in P$ disebut **batas bawah terbesar** (infimum) untuk **A** jika u adalah batas bawah untuk **A** dan untuk setiap batas bawah lain v untuk **A**, berlaku $v \leq u$.

Teorema 2.3.1

Jika subset suatu poset mempunyai suprimum (infimum), maka suprimum (infimum) tersebut tunggal.

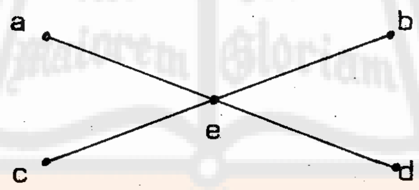
Bukti

Andaikan u_1 dan u_2 keduanya adalah suprimum (infimum) untuk **A**, maka $u_1 \leq u_2$ dan $u_2 \leq u_1$, dan oleh karenanya $u_1 = u_2$. ∎

Contoh 2.3.1 Pada poset bilangan asli $\mathbb{N}$ (Contoh 2.1.2), jika **A** adalah subset berhingga dari $\mathbb{N}$, maka kelipatan persekutuan terkecil *(least common multiple)* dari bilangan-bilangan bulat dalam **A** merupakan suprimum untuk **A**, dan faktor persekutuan terbesar *(greatest common divisor)* dari bilangan-bilangan bulat dalam **A** merupakan infimum untuk **A**.

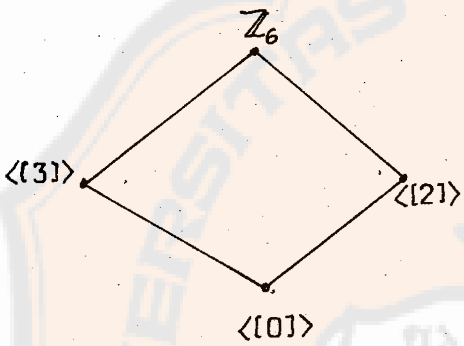
Contoh 2.3.2 Pada poset $\mathcal{P}(S)$ (Contoh 2.1.3), bila **A,B** $\in \mathcal{P}(S)$, maka **A∪B** adalah suprimum untuk **{A,B}**, dan setiap himpunan yang memuat **A∪B** merupakan batas atas untuk **{A,B}**. Sedangkan infimum untuk **{A,B}** adalah **A∩B**. Secara umum, jika $\mathcal{K}$ adalah sembarang subset dari $\mathcal{P}(S)$, maka gabungan (union) dari semua anggota $\mathcal{K}$ merupakan suprimum untuk $\mathcal{K}$; dan irisan (interseksi) semua anggota $\mathcal{K}$ merupakan infimum untuk $\mathcal{K}$.

Contoh 2.3.3 Diagram pada Gambar 2.3.1 menyajikan poset di mana {a,b} tak mempunyai batas atas, dan {c,d} tak mempunyai batas bawah.

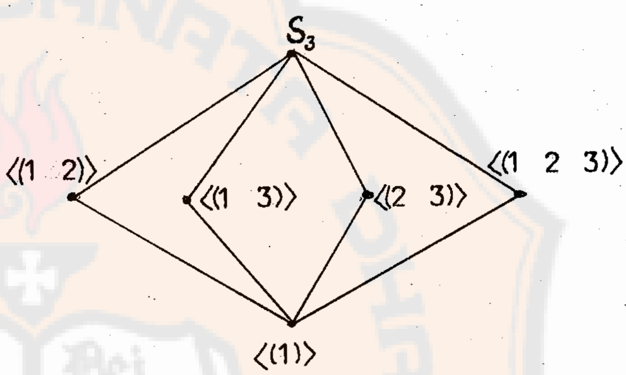


Gambar 2.3.1

Contoh 2.3.4 Andaikan **G** adalah sembarang grup. Himpunan semua subgrup dari **G** adalah poset dengan relasi $\subseteq$. Dalam teori grup telah diketahui bahwa *jika S adalah sembarang subset dari suatu grup G, dan <S> adalah interseksi semua subgrup dari G yang memuat S, maka <S> adalah subgrup terkecil dari G yang memuat S. Dikatakan <S> adalah subgrup yang dihasilkan oleh S.* Andaikan $\mathcal{G}$ adalah suatu keluarga subgrup-subgrup dari **G**. Maka subgrup yang dihasilkan oleh $S = \bigcup_{H \in \mathcal{G}} H$ merupakan suprimum dari $\mathcal{G}$. Gabungan subgrup - subgrup pada umumnya bukanlah subgrup, tetapi dari contoh di atas nampak bahwa keluarga subgrup-subgrup itu mempunyai suprimum. Interseksi semua subgrup dari suatu keluarga subgrup-subgrup adalah infimum keluarga tersebut. Gambar 2.3.2 menunjukkan diagram untuk subgrup-subgrup dari $\mathbb{Z}_6$ (bilangan modulo 6); dan Gambar 2.3.3 menunjukkan diagram untuk subgrup-subgrup dari S_3 (Grup simetri dari {1,2,3})



Gambar 2.3.2



Gambar 2.3.3

2.4 Subset Istimewa dari Poset

Definisi 2.4.1

Andaikan a adalah sembarang elemen dari poset **P**. Himpunan semua elemen $x \in P$ yang memenuhi $x \leq a$ ($a \leq x$) akan dilambangkan dengan (a] ([a)).

Definisi 2.4.2

Andaikan a dan b adalah elemen-elemen dari poset **P** sedemikian hingga $a \leq b$. Himpunan semua elemen $x \in P$ yang memenuhi $a \leq x \leq b$ dilambangkan dengan [a,b] disebut **interval** dari **P**.

Definisi 2.4.3

Subset C dari poset **P** disebut **subrantai** dari **P** jika C merupakan rantai terhadap relasi urutan dalam **P**.

2.5 Isomorfisme Poset

Definisi 2.5.1

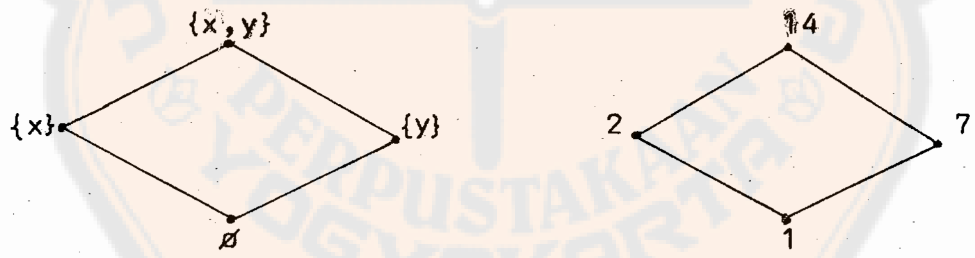
Andaikan P_1 dan P_2 adalah poset. Maka pemetaan $\theta : P_1 \longrightarrow P_2$ dikatakan **homomorfisme** (urutan) bila untuk setiap $a,b \in P_1$ berlaku

$$a \leq b \text{ bila dan hanya bila } \theta(a) \leq \theta(b).$$

$\theta(P_1)$ disebut **bayangan homomorfis** dari P_1.

Bila homomorfisme θ adalah suatu pemetaan yang bijektif, maka θ disebut **isomorfisme**. Dua poset dikatakan **isomorfis** bila dan hanya bila terdapat suatu isomorfisme di antara kedua poset tersebut.

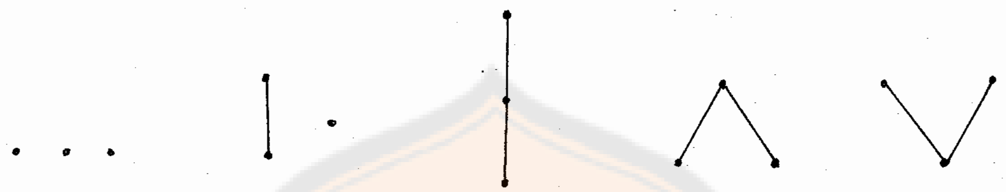
Contoh 2.5.1 Poset semua subset dari himpunan $\{x,y\}$ dengan relasi $\subseteq$ isomorfik dengan poset semua faktor dari bilangan 14 dengan $a \leq b$ didefinisikan sebagai $a|b$. Diagram dari kedua poset ini terlihat pada Gambar 3.5.1.



Gambar 2.5.1

Terlihat bahwa diagram untuk poset semua faktor dari bilangan 14 dapat diperoleh dari diagram poset semua subset dari $\{x,y\}$ dengan mengganti $\{x,y\}$ dengan 14, $\{x\}$ dengan 2, $\{y\}$ dengan 7, dan terakhir $\emptyset$ dengan 1. Hal ini menunjukkan adanya suatu isomorfisme di antara kedua poset.

Contoh 2.5.2 Gambar 2.5.2 menunjukkan lima klas isomorfisme untuk poset dengan tiga elemen.



a) b) c) d) e)

Gambar 2.5.2

BAB III

L A T I S

3.1 L a t i s

Definisi 3.1.1

Latis adalah poset yang setiap dua elemennya mempunyai suprimum dan infimum.

Suprimum untuk dua elemen a dan b dalam latis dilambangkan dengan $a \vee b$, dan dibaca "a join b", sedangkan infimumnya dilambangkan dengan $a \wedge b$, dan dibaca "a meet b".

Jelas bahwa untuk setiap a dan b di dalam suatu latis berlaku

$$a \leq a \vee b \quad \text{dan} \quad a \wedge b \leq a.$$

Contoh 3.1.1 Poset bilangan real $\mathbb{R}$ (Contoh 2.1.1) merupakan latis. Jika diberi sembarang dua bilangan real, maka selalu dapat ditentukan mana dari keduanya yang lebih kecil, atau mana dari keduanya yang lebih besar. Bilangan yang lebih besar adalah suprimum untuk kedua bilangan tersebut dan bilangan yang lebih kecil merupakan infimum untuk kedua bilangan tersebut.

Contoh 3.1.2 Poset bilangan asli $\mathbb{N}$ (Contoh 2.1.2) merupakan latis, sebab setiap dua bilangan asli mempunyai kelipatan persekutuan terkecil dan faktor persekutuan terbesar, yang secara berturut-turut menjadi suprimum dan infimum untuk kedua bilangan asli tersebut.

Contoh 3.1.3 Poset $\mathcal{P}(S)$ (Contoh 2.1.3) merupakan latis, sebab untuk $\mathbf{A},\mathbf{B} \in \mathcal{P}(S)$, $\mathbf{A} \cup \mathbf{B}$ dan $\mathbf{A} \cap \mathbf{B}$ masing-masing adalah suprimum dan infimum untuk $\{\mathbf{A},\mathbf{B}\}$.

Contoh 3.1.4 Setiap rantai adalah latis. **Bukti :** Ambil sembarang dua elemen a dan b dalam rantai. Maka menurut (**A4**), $a \le b$ atau $b \le a$. Bila $a \le b$, maka $a \vee b = b$ dan $a \wedge b = a$. Bila $b \le a$, maka $a \vee b = a$ dan $a \wedge b = b$. Ini menunjukkan elemen a dan b mempunyai suprimum dan infimum. Jadi sembarang dua elemen dalam rantai selalu mempunyai suprimum dan infimum.∎

Teorema 3.1.1

Untuk sembarang elemen a,b,c,d di dalam latis **L** berlaku jika $a \le b$ dan $c \le d$, maka $a \vee c \le b \vee d$ dan $a \wedge c \le b \wedge d$.

Bukti

Karena $b \le b \vee d$ dan $d \le b \vee d$, maka dengan sifat transitif didapat $a \le b \vee d$ dan $c \le b \vee d$. Jadi $b \vee d$ adalah batas atas untuk a dan c. Karena $a \vee c$ adalah suprimum untuk a dan c, maka $a \vee c \le b \vee d$.

Karena $a \wedge c \le a$ dan $a \wedge c \le c$, maka dengan sifat transitif didapat $a \wedge c \le b$ dan $a \wedge c \le d$. Jadi $a \wedge c$ adalah batas bawah untuk a dan c. Karena $b \wedge d$ adalah infimum untuk b dan d, maka $a \wedge c \le b \wedge d$.∎

Definisi latis mensyaratkan bahwa setiap dua elemennya mempunyai suprimum dan infimum. Hal ini membawa kita pada teorema berikut ini

Teorema 3.1.2

Setiap subset berhingga (tidak kosong) dari latis pasti mempunyai suprimum dan infimum.

Bukti

Andaikan subset berhingga itu adalah $X = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Dengan induksi matematis akan dibuktikan bahwa $(((a_1 \vee a_2) \vee a_3) \ldots) \vee a_{n-1}) \vee a_n$ dan $(((a_1 \wedge a_2) \wedge a_3) \ldots) \wedge a_{n-1}) \wedge a_n$

berturut- turut adalah suprimum dan infimum untuk **X**.

Tahap 1. Pernyataan benar untuk n=2, sebab menurut definisi $a_1 \vee a_2$ adalah suprimum untuk $\{a_1, a_2\}$.

Tahap 2. Andaikan pernyataan benar untuk n=k−1, maka $(((a_1 \vee a_2) \vee a_3) \; . \; . \; . \;) \vee a_{k-1}$ misalkan sama dengan u, adalah suprimum untuk $\{a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}\}$.

Untuk n=k didapat

$$u \vee a_k$$

yang merupakan suprimum untuk $\{u, a_k\}$. Karena u adalah suprimum untuk $\{a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}\}$, maka $u \vee a_k$ adalah suprimum untuk $\{a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, a_k\}$. Jadi pernyataan benar untuk n=k.

Dengan demikian $(((a_1 \vee a_2) \vee a_3) \; . \; . \; . \;) \vee a_n$ adalah suprimum untuk **X**. Dengan jalan yang analog dapat ditunjukkan bahwa $(((a_1 \wedge a_2) \wedge a_3) \; . \; . \; . \;) \wedge a_n$ adalah infimum untuk **X**. ∎

Untuk selanjutnya, suprimum dan infimum untuk subset berhingga $\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$ berturut-turut akan dinyatakan dengan notasi :

$$a_1 \vee a_2 \vee a_3 \vee \ldots \vee a_n \quad \text{dan} \quad a_1 \wedge a_2 \wedge a_3 \wedge \ldots \wedge a_n .$$

Walaupun setiap subset berhingga (tidak kosong) dari latis mempunyai sekaligus suprimum dan infimum, tetapi tidaklah demikian halnya dengan subset tak berhingganya. Sebagai contoh, dalam latis bilangan real $\mathbb{R}$ (Contoh 3.1.1), himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$, tidak mempunyai suprimum maupun infimum. Dalam latis bilangan asli $\mathbb{N}$ (Contoh 3.1.2), semua subset tak berhingganya tidak mempunyai suprimum, akan tetapi mempunyai infimum.

Pada teorema 2.3.1, bukti ketunggalan infimum untuk subset suatu poset, diperoleh dengan menggantikan suprimum dengan infimum dan menggantikan relasi $\leq$ dengan $\geq$ pada semua pernyataan dalam bukti ketunggalan suprimum. Juga pada teorema 3.1.2, bukti eksistensi suprimum untuk subset berhingga suatu latis dapat ditransformasikan menjadi bukti eksistensi dari infimum, yaitu dengan mengganti suprimum dengan infimum dan $\vee$ dengan $\wedge$. Kesemuanya ini merupakan aplikasi dari suatu prinsip yang sangat berguna dalam latis, yang dapat dinyatakan sebagai berikut :

Prinsip Dualitas Latis

Setiap pernyataan yang benar untuk suatu latis akan tetap benar jika relasi $\leq$ dan $\geq$ dan operasi $\vee$ dan $\wedge$ dalam pernyataan tersebut saling dipertukarkan.

Prinsip dualitas ini valid disebabkan oleh tiga hal. Pertama, relasi $\geq$, maupun relasi $\leq$, kedua-duanya sama-sama bersifat refleksif, antisimetris, dan transitif. Kedua, infimum didefinisikan dengan mengganti $\leq$ dengan $\geq$ dalam definisi suprimum. Ketiga, sebuah pernyataan adalah benar untuk setiap latis hanya apabila kebenaran pernyataan itu dapat dibuktikan dari sifat refleksif, antisimetris, dan transitif, dan dari adanya suprimum dan infimum himpunan-himpunan bagian berhingganya.

Jika $\leq$ dan $\geq$ dipertukarkan dan suprimum dan infimum dipertukarkan dalam suatu pernyataan, maka pernyataan baru yang didapat disebut **dual** dari pernyataan asli (**primal**). Sebagai contoh, dual dari $a \vee a = a$ adalah $a \wedge a = a$.

3.2 Definisi yang Ekuivalen untuk Latis

Sifat-sifat dasar operasi $\vee$ dan $\wedge$ dalam suatu latis adalah sebagai berikut:

Teorema 3.2.1

Operasi-operasi $\vee$ dan $\wedge$ pada latis L, memenuhi setiap hukum berikut ini:

(L1)	**hukum komutatif**	: $a\vee b=b\vee a$	$a\wedge b=b\wedge a$
(L2)	**hukum assosiatif**	: $a\vee(b\vee c)=(a\vee b)\vee c$	$a\wedge(b\wedge c)=(a\wedge b)\wedge c$
(L3)	**hukum absorpsi**	: $a\vee(a\wedge b)=a$	$a\wedge(a\vee b)=a$
(L4)	**hukum idempoten**	: $a\vee a=a$	$a\wedge a=a$

untuk semua $a,b,c \in L$.

Bukti

(L1) Elemen $a\vee b$ maupun $b\vee a$ adalah suprimum untuk $\{a,b\}$. Karena suprimum adalah tunggal, maka $a\vee b=b\vee a$.

Dengan dualnya didapat $a\wedge b=b\wedge a$.

(L2) Pertama dibuktikan untuk operasi $\vee$.

Andaikan $a\vee(b\vee c) = g$ dan $(a\vee b)\vee c = h$.

Maka $a\leq g$ dan $b\vee c\leq g$. Lebih jauh $b\leq g$ dan $c\leq g$. Karena $a\vee b$ adalah suprimum untuk a dan b, dari $a\leq g$ dan $b\leq g$ didapat $a\vee b\leq g$ yang bersama-sama dengan $c\leq g$, memberikan $(a\vee b)\vee c\leq g$.

Dengan demikian telah ditunjukkan bahwa $h \leq g$.

Dengan jalan yang analog, dapat ditunjukkan bahwa $g \leq h$.

Menurut sifat antisimetris dari $\leq$, dapat disimpulkan $g = h$.

Dengan prinsip dualitas diperoleh sifat assosiatif untuk operasi $\wedge$.

(L3) Andaikan $a\wedge b = g$ dan $a\vee g = a\vee(a\wedge b) = h$.

Maka $g\leq a$, $g\leq b$, dan $a\leq h$, $g\leq h$.

Karena $a\leq a$, menurut (A1), dan $g\leq a$, maka a merupakan batas

atas untuk a dan g. Tetapi h adalah suprimum untuk a dan g, maka $h \leq a$. Dari $a \leq h$ dan $h \leq a$, diperoleh $a = h = a \vee (a \wedge b)$. Dengan dualnya didapat $a \wedge (a \vee b) = a$.

(**L4**) Bila pada hukum absorpsi $a \vee (a \wedge b) = a$, b diganti dengan $a \vee b$, maka diperoleh $a = a \vee (a \wedge (a \vee b)) = a \vee a$. Jadi $a \vee a = a$. Demikian juga pada hukum absorpsi $a \wedge (a \vee b) = a$, bila b diganti dengan $a \wedge b$, maka diperoleh $a = a \wedge (a \vee (a \wedge b)) = a \wedge a$. Jadi $a \wedge a = a$. ∎

Definisi yang ekuivalen untuk latis dituangkan dalam teorema berikut:

Teorema 3.2.2

Jika himpunan L dilengkapi dengan operasi $\vee$ dan $\wedge$ yang memenuhi hukum komutatif (**L1**), hukum assosiatif (**L2**), hukum absorpsi (**L3**), dan hukum idempoten (**L4**), dan jika pada L didefinisikan relasi $\leq$ sebagai berikut:

(1) $\quad a \leq b$ bila dan hanya bila $a \vee b = b$

maka himpunan L merupakan suatu l a t i s.

Bukti

Pertama-tama akan ditunjukkan bahwa syarat $a \vee b = b$ pada (1) ekuivalen dengan $a \wedge b = a$. Asumsikan bahwa $a \vee b = b$. Maka

$$\begin{aligned} a \wedge b &= a \wedge (a \vee b) && (a \vee b = b) \\ &= a && (\text{hukum absorpsi}) \end{aligned}$$

Dengan mengasumsikan $a \wedge b = a$, dapat diturunkan $a \vee b = b$.

Sekarang akan dibuktikan bahwa L adalah poset terhadap relasi $\leq$. Jika $a \in L$, maka menurut salah satu hukum idempoten $a \wedge a = a$, dan oleh karena itu $a \leq a$ menurut (1). Jadi relasi $\leq$

bersifat refleksif. Jika $a \leq b$ dan $b \leq a$, maka $a \wedge b = a$ dan $b \wedge a = b$, sehingga $a = b$, karena menurut hukum komutatif $a \wedge b = b \wedge a$. Jadi relasi $\leq$ bersifat antisimetris. Jika $a \leq b$ dan $b \leq c$, maka $a \wedge b = a$ dan $b \wedge c = b$, sehingga

$$a \wedge c = (a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c) = a \wedge b = a.$$

Jadi $a \leq c$. Ini menunjukkan bahwa relasi $\leq$ bersifat transitif.

Untuk melengkapkan pembuktian ini, harus pula ditunjukkan bahwa $a \vee b$ adalah suprimum dan $a \wedge b$ adalah infimum untuk $\{a,b\}$. Periksa $a \vee b$. Pertama $a \leq a \vee b$ sebab menurut hukum absorpsi $a \wedge (a \vee b) = a$. Dengan jalan yang analog didapat $b \leq a \vee b$. Jadi $a \vee b$ adalah batas atas untuk $\{a, b\}$. Sekarang asumsikan bahwa $a \leq c$ dan $b \leq c$. Maka $a \vee c = c$ dan $b \vee c = c$, sehingga

$$(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c) = a \vee c = c$$

yang berarti $(a \vee b) \leq c$. Ini menunjukkan bahwa $a \vee b$ adalah suprimum untuk $\{a, b\}$.

Dengan jalan yang analog dapat ditunjukkan bahwa $a \wedge b$ adalah infimum untuk $\{a,b\}$. ∎

Teorema 3.2.3

Pemetaan bijektif θ dari L_1 onto L_2 adalah suatu isomorfisme bila dan hanya bila untuk setiap $a, b \in L_1$ berlaku

(2) $\theta(a \vee b) = \theta(a) \vee \theta(b)$ dan $\theta(a \wedge b) = \theta(a) \wedge \theta(b)$.

Syarat (2) di atas disebut homomorfisme (operasi).

Bukti

($\Rightarrow$) Asumsikan θ adalah pemetaan bijektif dari L_1 onto L_2 yang memenuhi : $a \leq b$ bila dan hanya bila $\theta(a) \leq \theta(b)$.

Ambil sembarang dua elemen $a, b \in L_1$. Andaikan $d = a \vee b$. Maka $a \leq d$ dan $b \leq d$. Oleh karena itu $\theta(a) \leq \theta(d)$ dan $\theta(b) \leq \theta(d)$. Jadi $\theta(d)$

adalah batas atas dari $\theta(a)$ dan $\theta(b)$. Sekarang andaikan $\theta(x)$ adalah sembarang elemen L_2 sedemikian hingga $\theta(a)\leq\theta(x)$ dan $\theta(b)\leq\theta(x)$, yaitu batas atas dari $\theta(a)$ dan $\theta(b)$ yang lain dengan $\theta(d)$, dan andaikan $x\in L_1$ adalah bayangan invers dari $\theta(x)$. Maka $a\leq x$ dan $b\leq x$. Oleh karena itu $d=a\vee b\leq x$ dan $\theta(d)\leq\theta(x)$. Jadi $\theta(d)$ adalah batas atas terkecil dari $\theta(a)$ dan $\theta(b)$. Jadi $\theta(a\vee b)=\theta(a)\vee\theta(b)$.

Dengan dualnya dapat ditunjukkan bahwa $\theta(a\wedge b)=\theta(a)\wedge\theta(b)$.

($\Leftarrow$) Ambil sembarang dua elemen $a,b\in L$. Jika $a\leq b$, maka $a\vee b=b$. Sehingga $\theta(a\vee b)=\theta(b)$ dan oleh sebab itu $\theta(a)\vee\theta(b)=\theta(b)$. Jadi $\theta(a)\leq\theta(b)$. Sebaliknya, jika $\theta(a)\leq\theta(b)$, maka $\theta(a)\vee\theta(b)=\theta(b)$. Sehingga $\theta(a\vee b)=\theta(b)$ dan $a\vee b=b$ karena θ bijektif. Jadi $a\leq b$.∎

3.3 Elemen Satuan, Elemen Nul, dan Komplemen

Definisi 3.3.1

Suatu elemen dalam latis L disebut elemen **satuan** (*unity* atau *identity*) untuk L, ditulis dengan lambang 1, jika untuk setiap $a\in L$ berlaku $a\leq 1$.

Definisi 3.3.2

Suatu elemen dalam latis L disebut elemen **nul** (*zero*) untuk L, ditulis dengan lambang 0, jika untuk setiap $a\in L$ berlaku $0\leq a$.

Contoh 3.3.1 Di dalam latis bilangan real $\mathbb{R}$ (Contoh 3.1.1), tidak ada elemen satuan dan elemen nul.

Contoh 3.3.2 Di dalam latis bilangan asli $\mathbb{N}$ (Contoh 3.1.2), tidak terdapat elemen satuan, tetapi ada elemen nul, yaitu bilangan 1.

Contoh 3.3.3 Di dalam latis $\mathcal{P}(S)$ (Contoh 3.1.3), S adalah elemen satuan dan $\emptyset$ adalah elemen nul.

Contoh 3.3.4 Di dalam latis subgrup dari grup G (Contoh 2.3.4) G adalah elemen satuan dan $\{e\}$ adalah elemen nul, di mana e adalah elemen identitas dari grup G.

Teorema 3.3.1

Sembarang latis berhingga (latis dengan jumlah elemen berhingga) mempunyai elemen satuan dan elemen nul.

Bukti

Teorema 3.1.2 menyatakan bahwa setiap subset berhingga yang tidak kosong dari suatu latis pasti mempunyai suprimum dan infimum. Karena suatu latis merupakan subset dari dirinya sendiri, maka latis berhingga pasti mempunyai suprimum dan infimum, yang merupakan elemen satuan dan elemen nul.∎

Teorema 3.3.2

Jika sebuah latis mempunyai elemen satuan (elemen nul), maka elemen satuan (elemen nul) tersebut pasti tunggal.

Bukti

Andaikan terdapat dua elemen satuan (elemen nul) dalam sebuah latis, misal a dan b, maka $a \leq b$ dan $b \leq a$. Jadi $a = b$.∎

Teorema 3.3.3

Jika elemen satuan 1 dan elemen 0 ada di dalam suatu latis L, maka untuk setiap $a \in L$ berlaku

(a) $a \vee 1 = 1$ dan $a \wedge 1 = a$

(b) $a \vee 0 = a$ dan $a \wedge 0 = 0$.

Bukti

(a) Jelas $1 \leq a \vee 1$. Karena 1 adalah elemen satuan, maka

$a\vee 1\le 1$. Jadi $a\vee 1 = 1$. Juga $a\wedge 1\le a$. Karena $a\le a$ dan $a\le 1$, maka menurut teorema 3.1.1, $a\wedge a\le a\wedge 1$. Karena $a\wedge a=a$, maka $a\le a\wedge 1$. Jadi $a\wedge 1=a$.

(b) Dengan jalan yang analog dapat ditunjukkan $a\vee 0 = a$ dan $a\wedge 0=0$. ∎

Di dalam latis $\mathcal{P}(S)$ dengan relasi $\subseteq$, subset A dan subset B akan memenuhi $A\cap B = \emptyset$ dan $A\cup B = S$, bila $B=A^c$. Himpunan B disebut komplemen dari A. Secara analog, akan didefinisikan istilah komplemen suatu elemen di dalam suatu latis sebagai berikut:

Definisi 3.3.3

Andaikan L adalah latis dengan elemen satuan 1 dan elemen nul 0. Elemen $a'\in L$ disebut *komplemen* dari elemen $a\in L$ jika

(3) $a\vee a'=1$ dan $a\wedge a'=0$.

Jika a′ adalah komplemen dari a, maka menurut (L1) dan definisi di atas, a adalah komplemen dari a′. Definisi 3.3.3 tidak mensyaratkan bahwa komplemen dari suatu elemen bila ada, adalah tunggal (hal ini bisa kita lihat pada contoh-contoh yang akan diberikan). Tetapi persamaan $0\vee x=1$ $1\wedge x=0$, benar hanya untuk $x=1$. Demikian juga persamaan $1\vee x=1$ dan $1\wedge x=0$, benar hanya untuk $x=0$. Ini menunjukkan bahwa komplemen dari 1 hanyalah 0 dan sebaliknya. Jadi $1'=0$ dan $0'=1$.

Teorema 3.3.4

Andaikan A dan B adalah latis-latis yang memuat elemen satuan dan elemen nul. Jika pemetaan θ dari A onto B adalah suatu isomorfisme, maka

(a) $\theta(1_A) = 1_B$ dan $\theta(0_A) = 0_B$

(b) Jika $a' \in$ **A** adalah komplemen dari $a \in$**A**, maka $\theta(a')=\theta(a)'$.

Bukti

(a) Karena 1_A adalah elemen satuan untuk **A**, maka $a \le 1_A$ untuk setiap $a \in$**A**. Menurut Definisi 2.5.1, maka $\theta(a) \le \theta(1_A)$. Tetapi $\theta(a) \in$**B** dan pemetaan θ bijektif, maka semua elemen **B**$\le \theta(1_A)$. Dengan demikian $\theta(1_A)$ adalah elemen satuan untuk **B**. Jadi $\theta(1_A)=1_B$. Dengan dualnya kita dapatkan $\theta(0_A)=0_B$.

(b) Akan ditunjukkan bahwa $\theta(a')$ adalah komplemen dari $\theta(a)$. Menurut Teorema 3.2.3 dan menurut bagian (a) di atas, $\theta(a) \vee \theta(a')=\theta(a \vee a')=\theta(1_A)=1_B$ dan $\theta(a) \wedge \theta(a')= \theta(a \wedge a')= \theta(0_A)=0_B$. Menurut Definisi 3.3.3, $\theta(a')$ adalah komplemen dari $\theta(a)$. Jadi $\theta(a')=\theta(a)'$. ∎

3.4 Sublatis dan Ideal

Adanya definisi latis sebagai suatu sistem aljabar dengan operator $\vee$ dan $\wedge$, memungkinkan kita berbicara tentang subsistem dari latis, yaitu sublatis.

Definisi 3.4.1

Subset **M** dari latis L disebut **sublatis** bila **M** tertutup terhadap operator $\vee$ dan $\wedge$ dari L, yaitu

(4) Jika $a,b \in$ **M**, maka $a \vee b \in$ **M** dan $a \wedge b \in$ **M**

Jelas bahwa **M** juga suatu latis, sebab memenuhi (**L1**)-(**L4**). Latis L merupakan sublatis dari dirinya sendiri.

Contoh 3.4.1 Pada latis bilangan asli (Contoh 3.1.2), himpunan semua faktor dari suatu bilangan bulat positif membentuk sublatis. Sebagai contoh, lihat gambar 2.2.2, yang menyajikan latis semua faktor dari bilangan 24.

Perlu diketahui bahwa mungkin sekali subset dari suatu latis L menjadi latis *tanpa* menjadi sublatis dari latis L. Sebagai contoh, andaikan G adalah grup, $\mathcal{P}(G)$ adalah latis semua subset dari G (lihat Contoh 3.1.3), dan $\mathcal{H}(G)$ adalah himpunan semua subgrup dari G. Jelas $\mathcal{H}(G) \subseteq \mathcal{P}(G)$ dan $\mathcal{H}(G)$ adalah latis (lihat Contoh 2.3.4), tetapi $\mathcal{H}(G)$ bukanlah sublatis dari $\mathcal{P}(G)$, sebab gabungan dua subgrup pada umumnya bukan subgrup.

Contoh 3.4.2 Setiap subset dari latis L yang terdiri dari satu elemen merupakan sublatis dari L. Ambil sembarang subset $\{a\} \subseteq L$. Maka menurut **(L4)**, $a \vee a = a$ dan $a \wedge a = a$. Jadi (4) dipenuhi.

Contoh 3.4.3 Jika u adalah elemen dari latis L, maka setiap $(u]$ dan $[u)$ adalah sublatis dari L. Ambil sembarang dua elemen $x, y \in (u]$, maka $x \leq u$ dan $y \leq u$. Sehingga $x \vee y \leq u$ dan $x \wedge y \leq u$. Jadi $x \vee y \in (u]$, $x \wedge y \in (u]$. Dengan dualnya, dapat ditunjukkan bahwa $[u)$ adalah sublatis dari L.

Contoh 3.4.4 Setiap interval dari latis L adalah sublatis dari L. Ambil sembarang dua elemen x, $y \in [a,b]$, maka $a \leq x \leq b$ dan $a \leq y \leq b$. Menurut teorema 3.1.1 dan **(L4)**, maka $a \leq x \vee y \leq b$ dan $a \leq x \wedge y \leq b$. Jadi $a \vee b \in [a,b]$ dan $a \wedge b \in [a,b]$.

Contoh 3.4.5 Setiap subrantai C dari latis L adalah sublatis dari L. Ambil sembarang dua elemen $a, b \in C$. Menurut **(A4)**, $a \leq b$ atau $b \leq a$. Sehingga ($a \vee b = b$ dan $a \wedge b = a$) atau ($a \vee b = a$ dan $a \wedge b = b$). Jadi $a \vee b \in C$ dan $a \wedge b \in C$.

Definisi 3.4.2

Subset (tidak kosong) I dari latis L disebut **ideal** dari L, jika I memenuhi dua syarat berikut:

(5) Jika $a \in I$ dan $b \in I$, maka $a \vee b \in I$

(6) Jika $a \in I$, maka $a \wedge x \in I$ untuk setiap $x \in L$.

Syarat (6) pada definisi ideal di atas dapat diganti

(7) Jika $a \in I$ dan $x \leq a$, maka $x \in I$.

Akan kita tunjukkan bahwa pernyataan (6) ekuivalen dengan pernyataan (7). Andaikan (6) berlaku, jika $a \in I$ dan $x \leq a$, maka $x = x \wedge a \in I$. Sebaliknya, andaikan (7) berlaku, jika $a \in I$ dan $x \in L$, maka $a \wedge x \leq a$. Jadi $a \wedge x \in I$.

Dari definisi di atas jelaslah bahwa setiap ideal adalah sublatis.

Contoh 3.4.6 Jika u adalah elemen dari latis L, maka $(u]$ adalah ideal dari L. Ambil sembarang dua elemen $a, b \in (u]$. Maka $a \leq u$ dan $b \leq u$. Sehingga $a \vee b \leq u$. Jadi $a \vee b \in (u]$. Syarat (5) dipenuhi. Jika $a \in (u]$ dan $x \leq a$, maka $a \leq u$ dan $x \leq a$. Menurut (A3), $x \leq u$. Jadi $x \in (u]$. Syarat (7) dipenuhi. Dengan demikian $(u]$ adalah ideal dari L. Ideal semacam ini disebut **ideal utama.**

BAB IV

LATIS-LATIS KHUSUS

4.1 Latis Komplemen

Definisi 4.1.1

Latis L disebut **latis komplemen** bila setiap elemen dalam L mempunyai komplemen.

Contoh 4.1.1 Latis $\mathcal{P}(S)$ dengan relasi $\subseteq$, merupakan latis komplemen, sebab setiap elemennya mempunyai komplemen seperti yang kita ketahui dalam teori himpunan dan komplemen setiap elemennya adalah tunggal.

Contoh 4.1.2 Latis pada Gambar 2.2.2, bukanlah latis Ambil bilangan 2, maka tidak ada elemen x dalam latis tersebut yang memenuhi persamaan $2 \vee x = 24$ dan $2 \wedge x = 1$.

Contoh 4.1.3 Latis pada Gambar 2.4.2 dan 2.4.3 merupakan latis komplemen. Gambar 2.3.3, menunjukkan bahwa komplemen suatu elemen dalam latis tidak selalu tunggal (masing-masing elemen <(1 2)>, <(1 3)>, <(2 3)>, dan <(1 2 3)> merupakan komplemen dari tiga elemen lainnya).

4.2 Latis Distributif

Definisi 4.2.1

Suatu latis L disebut **latis distributif**, jika operator $\vee$ dan $\wedge$ dalam L memenuhi hukum distributif yaitu:

(L6) Untuk setiap $a,b,c \in L$: $a\vee(b\wedge c) = (a\vee b) \wedge (a\vee c)$.

Latis yang tidak memenuhi hukum distributif disebut latis **non-distributif**.

Teorema 4.2.1

Dalam sembarang latis L, hukum distributif (L6) ekuivalen dengan :

(L6') Untuk setiap $a,b,c \in L$: $a\wedge(b\vee c) = (a\wedge b) \vee (a\wedge c)$.

Bukti

Asumsikan (L6) berlaku, maka

$$\begin{aligned}(a\wedge b) \vee (a\wedge c) &= ((a\wedge b)\vee a) \wedge ((a\wedge b)\vee c) && \text{menurut (L6)}\\ &= (a\vee(a\wedge b)) \wedge ((a\wedge b)\vee c) && \text{(L1)}\\ &= a \wedge ((a\wedge b)\vee c) && \text{(L3)}\\ &= a \wedge ((a\vee c) \wedge (b\vee c)) && \text{(L6)}\\ &= (a\wedge(a\vee c)) \wedge (b\vee c) && \text{(L2)}\\ &= a\wedge(b\vee c) && \text{(L3)}\end{aligned}$$

Dengan dualnya, dari (L6') dapat diturunkan (L6).∎

Teorema 4.2.2

Di dalam sembarang latis L, berlaku ketidaksamaan berikut :

(8) $a\wedge(b\vee c) \geq (a\wedge b) \vee (a\wedge c)$

(9) $a\vee(b\wedge c) \leq (a\vee b) \wedge (a\vee c)$

untuk setiap $a,b,c \in L$.

Bukti

Kita tahu bahwa $a\leq a$, $b\leq b\vee c$, dan $c\leq b\vee c$. Maka menurut Teorema 3.1.1, $a\wedge b \leq a\wedge(b\vee c)$ dan $a\wedge c \leq a\wedge (b\vee c)$. Jadi

$$(a\wedge b) \vee (a\wedge c) \leq a\wedge(b\vee c).$$

Dengan dualnya didapat $a\vee(b\wedge c) \leq (a\vee b) \wedge (a\vee c)$.∎

Dengan adanya Teorema 4.2.2 dan mengingat Definisi 4.2.1, maka suatu latis akan disebut latis distributif bila memenuhi ketidaksamaan berikut:

(10) $a\wedge(b\vee c) \leq (a\wedge b) \vee (a\wedge c)$ atau

(11) $a \vee (b \wedge c) \geq (a \vee b) \wedge (a \vee c)$

untuk setiap elemen a,b, dan c dalam latis tersebut.

Contoh 4.2.1 Latis $\mathcal{P}(S)$ dengan relasi $\subseteq$, merupakan latis distributif. Dalam teori himpunan, untuk $A, B, C \in \mathcal{P}(S)$, berlakulah $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Contoh 4.2.2 Latis pada Gambar 2.2.2 dan Gambar 2.3.2 juga merupakan latis distributif, tetapi latis pada Gambar 2.3.3 merupakan latis non-distributif. Ambil $\langle(1\ 2)\rangle$, $\langle(1\ 3)\rangle$, dan $\langle(2\ 3)\rangle$, maka

$$\langle(1\ 2)\rangle \wedge [\langle(1\ 3)\rangle \vee \langle(2\ 3)\rangle] = \langle(1\ 2)\rangle \wedge S_3 = \langle(1\ 2)\rangle.$$

Di lain pihak

$$[\langle(1\ 2)\rangle \wedge \langle(1\ 3)\rangle] \vee [\langle(1\ 2)\rangle \wedge \langle(2\ 3)\rangle] = \langle(1)\rangle.$$

Contoh 4.2.3 Setiap rantai adalah latis distributif. Ambil sembarang elemen a,b, dan c dari rantai. Kita bedakan dalam enam kasus, yaitu $a \leq b \leq c$, $a \leq c \leq b$, $b \leq a \leq c$, $b \leq c \leq a$, $c \leq a \leq b$, dan $c \leq b \leq a$. Tetapi untuk membuktikan terpenuhinya hukum distributif, enam kasus ini dapat dikelompokkan menjadi dua kasus saja. Dua kasus pertama dikelompokkan menjadi kasus (i) $a \leq b$ dan $a \leq c$, dan empat kasus terakhir dikelompokkan menjadi kasus (ii) $a \geq b$ atau $a \geq c$. Untuk kasus, (i) didapat $a \vee (b \wedge c) = b \wedge c$ dan $(a \vee b) \wedge (a \vee c) = b \wedge c$. Pada kasus (ii), $a \vee (b \wedge c) = a$ dan $(a \vee b) \wedge (a \vee c) = a \wedge a = a$. dengan demikian (L6) dipenuhi oleh setiap rantai.

Teorema 4.2.3

Setiap sublatis dan bayangan homomorfis dari latis distributif juga merupakan latis distributif.

Bukti

Karena (L6) harus dipenuhi oleh semua elemen dalam latis maka elemen-elemen dalam sublatis juga memenuhi (L6). Jadi sublatis dari latis distributif juga merupakan latis distributif.

Jika $\mathfrak{L}$ adalah bayangan homomorfis dari latis distributif L dengan homomorfisme φ dan $\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c}$ adalah sembarang elemen dari $\mathfrak{L}$, maka terdapat $a,b,c \in L$, sedemikian hingga $\varphi(a)=\mathfrak{a}$, $\varphi(b)=\mathfrak{b}$, dan $\varphi(c)=\mathfrak{c}$. Kita peroleh

$$\begin{aligned}
\mathfrak{a}\wedge(\mathfrak{b}\vee\mathfrak{c}) &= \varphi(a) \wedge (\varphi(b) \vee \varphi(c)) \\
&= \varphi(a) \wedge (\varphi\ (a\vee c)) \\
&= \varphi(a\wedge(b\vee c)) \\
&= \varphi((a\wedge b) \vee (a\wedge c)) \\
&= \varphi(a\wedge b) \vee \varphi(a\wedge c) \\
&= (\varphi(a) \wedge \varphi(b)) \vee (\varphi(a) \wedge \varphi(c)) \\
&= (\mathfrak{a}\wedge\mathfrak{b}) \vee (\mathfrak{a}\wedge\mathfrak{c}).
\end{aligned}$$

Jadi $\mathfrak{L}$ adalah latis distributif.∎

Teorema 4.2.4

Di dalam latis distributif, jika sebuah elemen mempunyai komplemen, maka komplemen tersebut tunggal.

Bukti

Andaikan elemen a mempunyai dua komplemen x dan y, yaitu $a\vee x = 1$ dan $a\wedge x = 0$, dan $a\vee y = 1$ dan $a\wedge y = 0$.

Didapat
$$\begin{aligned}
x &= x\wedge 1 \\
&= x\wedge(a\vee y) \\
&= (x\wedge a) \vee (x\wedge y) \\
&= 0 \vee (x\wedge y) \\
&= (a\wedge y) \vee (x\wedge y) = (a\vee x)\wedge y = 1\wedge y = y.
\end{aligned}$$ ∎

4.3 Latis Modular

Definisi 4.3.1

Latis L disebut **latis modular** bila memenuhi hukum modular sebagai berikut:

(L7) Untuk setiap $a,b,c \in L$: Bila $a \le c$, maka $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge c$.

Latis yang tidak memenuhi (L7) disebut latis **non-modular**.

Teorema 4.3.1

Di dalam sembarang latis L, berlaku ketidaksamaan modular berikut:

(12) Untuk setiap $a,b,c \in L$: Bila $a \le c$, maka $a \vee (b \wedge c) \le (a \vee b) \wedge c$.

Bukti

Ambil sembarang elemen $a,b,c \in L$, dengan $a \le c$. Menurut teorema 4.2.2, berlakulah $a \vee (b \wedge c) \le (a \vee b) \wedge (a \vee c)$. Karena $a \le c$, maka $a \vee (b \wedge c) \le (a \vee b) \wedge c$.∎

Dengan adanya Teorema 4.3.1 dan Definisi 4.3.1, maka suatu latis disebut latis modular bila memenuhi

(13) Untuk setiap $a,b,c \in L$: Bila $a \le c$, maka $a \vee (b \wedge c) \ge (a \vee b) \wedge c$.

Teorema 4.3.2

Latis L adalah latis modular bila dan hanya bila

(L8) Untuk setiap $a,b,c \in L$: $a \vee (b \wedge (a \vee c)) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$.

Bukti

($\Rightarrow$) Andaikan L latis modular. Karena $a \le a \vee c$, maka menurut (L7) $a \vee (b \wedge (a \vee c)) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$.

($\Leftarrow$) Andaikan (L8) berlaku. Jika $a \le c$, maka $a \vee c = c$. Substitusikan $a \vee c = c$ ke (L8), maka $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge c$.∎

Contoh 4.3.1 Himpunan semua subgrup normal dari grup G dengan relasi $\subseteq$, merupakan latis modular. **Bukti** :Andaikan $\mathcal{N}(G)$ adalah himpunan semua subgrup normal dari grup G dan andaikan **H** dan **K** $\in \mathcal{N}(G)$. Di dalam teori grup telah dibuktikan bahwa $H\cap K$ dan **HK** juga merupakan subgrup normal dari grup **G**. **HK** adalah himpunan semua elemen hk $\in$ **G**, di mana $h\in H$ dan $k\in K$. Subgrup yang dihasilkan oleh **H** dan **K**, yaitu $\langle H,K\rangle$, merupakan suprimum untuk **H** dan **K**. Dalam teori grup telah dibuktikan $\langle H,K\rangle$ = **HK** (Lihat John T. Moore, 1962,h.79). Seperti pada latissubgrup, $H\cap K$ merupakan infimum untuk **H** dan **K**. $\mathcal{N}(G)$ bersama relasi $\subseteq$ dengan $H\vee K = HK$ dan $H\wedge K = H\cap K$ merupakan latis. Di dalam latis $\mathcal{N}(G)$, $H\leq K$ bila dan hanya bila $H\subseteq K$.

Akan kita tunjukkan $\mathcal{N}(G)$ adalah latis modular, yaitu untuk $A,B,C \in \mathcal{N}(G)$ dan $A\subseteq C$ berlaku $A(B\cap C) = AB \cap C$. Menurut akibat teorema 4.3.1 cukup ditunjukkan bahwa $AB\cap C \subseteq A(B\cap C)$. Ambil sembarang elemen $x \in AB\cap C$. Maka $x\in AB$ dan $x\in C$. Maka terdapat $a\in A$ dan $b\in B$ sedemikian hingga $x=ab$. Jadi $b=a^{-1}x$ di mana $a^{-1}\in A \subseteq C$. Jadi $b\in C$, sehingga $b\in B\cap C$. Akibatnya $x(=ab) \in A(B\cap C)$.■

Teorema 4.3.3

Setiap sublatis dan bayangan homomorfis dari suatu latis modular juga merupakan latis modular.

Bukti

Jelas bahwa sublatis dari suatu latis modular adalah latis modular.

Andaikan $\mathfrak{L}$ adalah bayangan homomorfis dari latis modular L dengan homomorfisme φ dan $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, dan $\mathfrak{c} \in \mathfrak{L}$, maka terdapatlah

a, b, dan $c \in L$, sedemikian hingga $\varphi(a)=\mathfrak{a}$, $\varphi(b)=\mathfrak{b}$, dan $\varphi(c)=\mathfrak{c}$. Kita peroleh

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{a}\vee(\mathfrak{b}\wedge\mathfrak{c}) &= \varphi(a) \vee (\varphi(b) \wedge \varphi(c)) \\
&= \varphi(a) \vee (\varphi(a\wedge c)) \\
&= \varphi(a\vee(b\wedge c)) \\
&= \varphi((a\vee b)\wedge c) \\
&= \varphi(a\vee b) \wedge \varphi(c) \\
&= (\varphi(a) \vee \varphi(b)) \wedge \varphi(c) \\
&= (\mathfrak{a}\vee\mathfrak{b})\wedge\mathfrak{c}.
\end{aligned}
$$

Jadi $\mathfrak{L}$ adalah latis modular. ∎

Teorema 4.3.4

Setiap latis distributif adalah modular.

Bukti

Andaikan **L** adalah latis distributif. Ambil sembarang elemen $a,b,c\in L$ dengan $a\leq c$. Maka

$$
\begin{aligned}
a\vee(b\wedge c) &= (a\vee b) \wedge (a\vee c) && \text{menurut (L6)} \\
&= (a\vee b)\vee c && \text{sebab } a\leq c.
\end{aligned}
$$

Menurut Definisi 4.3.1, maka **L** adalah latis modular. ∎

4.4 Kriteria Non-Modular Dedekind dan Kriteria Non-Distributif Birkhoff

Setelah membahas tentang syarat cukup bagi suatu latis distributif dan latis modular, kini akan kita selidiki syarat cukup dan perlu bagi suatu latis non-distributif dan latis non-modular, yang berturut-turut diperkenalkan oleh Birkhoff dan Dedekind. Sebelum sampai ke sana perlu didefinisikan terlebih istilah **median** dalam suatu latis.

Definisi 4.4.1

Andaikan L adalah latis. Jika untuk elemen a, b, dan c $\in$ L berlaku

(L9) $(a \wedge b) \vee (b \wedge c) \vee (c \wedge a) = (a \vee b) \wedge (b \vee c) \wedge (c \vee a)$

maka elemen a, b, dan c dikatakan mempunyai **median.**

Teorema 4.4.1

Di dalam sembarang latis L, berlaku ketidaksamaan berikut:

(14) $(a \wedge b) \vee (b \wedge c) \vee (c \wedge a) \leq (a \vee b) \wedge (b \vee c) \wedge (c \vee a)$

untuk setiap $a, b, c \in L$.

Bukti

Ambil sembarang tiga elemen $a, b, c \in L$.

Dari $a \leq a$ dan $b \leq b \vee c$, kita dapatkan $a \wedge b \leq a \wedge (b \vee c) \leq b \vee c$.

Dari $b \leq b$ dan $a \leq c \vee a$, kita dapatkan $a \wedge b \leq b \wedge (c \vee a) \leq c \vee a$.

Dari $a \wedge b \leq a \vee b$, $a \wedge b \leq b \vee c$, dan $a \wedge b \leq c \vee a$, kita peroleh

$$a \wedge b \leq (a \vee b) \wedge (b \vee c) \wedge (c \vee a).$$

Degan cara yang analog, akan kita peroleh

$$b \wedge c \leq (a \vee b) \wedge (b \vee c) \wedge (c \vee a) \text{ dan } c \wedge a \leq (a \vee b) \wedge (b \vee c) \wedge (c \vee a).$$

Jadi $(a \wedge b) \vee (b \wedge c) \vee (c \wedge a) \leq (a \vee b) \wedge (b \vee c) \wedge (c \vee a)$. ∎

Kita dapat mendefinisikan latis modular atau latis distributif dengan menggunakan konsep median dari tiga elemennya.

Lemma 4.4.1

Suatu latis L adalah latis modular bila dan hanya bila untuk setiap tiga elemen a, b, c $(a \leq c) \in L$ mempunyai median.

Bukti

($\Rightarrow$) Andaikan L adalah latis modular. Ambil sembarang elemen a, b, dan c $\in$ L dan $a \leq c$. Maka

$$
\begin{aligned}
(a\wedge b) \vee (b\wedge c) \vee (c\wedge a) &= (a\wedge b) \vee (b\wedge c) \vee a \\
&= a\vee(a\wedge b) \vee (b\wedge c) && \text{menurut } (L1) \\
&= a\vee(b\wedge c) && (L3) \\
&= (a\vee b)\wedge c && (L7) \\
&= (a\vee b)\wedge c\wedge(b\vee c) && (L3) \\
&= (a\vee b) \wedge (b\vee c) \wedge c && (L1) \\
&= (a\vee b) \wedge (b\vee c) \wedge (c\vee a) && (a\le c).
\end{aligned}
$$

Jadi setiap tiga elemen dari L mempunyai median.

($\Leftarrow$) Andaikan L adalah latis yang setiap tiga elemennya mempunyai median. Ambil sembarang tiga elemen a, b, c $\in$ L dengan $a\le c$. Maka

$$
\begin{aligned}
a\vee(b\wedge c) &= a\vee(a\wedge b)\vee(b\wedge c) && \text{menurut } (L3) \\
&= (a\wedge c)\vee(a\wedge b)\vee(b\wedge c) && (a\le c) \\
&= (a\wedge b)\vee(b\wedge c)\vee(c\wedge a) && (L1) \\
&= (a\vee b)\wedge(b\vee c)\wedge(c\vee a) && (L9) \\
&= (a\vee b)\wedge(b\vee c)\wedge c && (a\le c) \\
&= (a\vee b)\wedge c && (L3)
\end{aligned}
$$

Dengan demikian L adalah latis modular. ∎

Lemma 4.4.2

Suatu latis L adalah latis distributif bila dan hanya bila setiap tiga elemennya mempunyai median.

Bukti

($\Rightarrow$) Andaikan L adalah latis distributif. Ambil sembarang tiga elemen a,b,c $\in$ L. Maka

$$
\begin{aligned}
(a\vee b)\wedge(b\vee c)\wedge(c\vee a) &= \{(a\vee b)\wedge(b\vee c)\wedge c\} \vee \{(a\vee b)\wedge(b\vee c)\wedge a\} && (L6) \\
&= \{(a\vee b)\wedge c\wedge(b\vee c)\} \vee \{a\wedge(a\vee b)\wedge(b\vee c)\} && (L1) \\
&= \{(a\vee b)\wedge c\} \vee \{a\wedge(b\vee c)\} && (L3)
\end{aligned}
$$

$= \{(a\wedge c)\vee(b\wedge c)\} \vee \{(a\wedge b)\vee(a\wedge c)\}$ (L6)

$= (a\wedge b)\vee(b\wedge c)\vee(a\wedge c)\vee(a\wedge c)$ (L1)

$= (a\wedge b)\vee(b\wedge c)\vee(c\wedge a)$ (L4),(L1)

Jadi setiap tiga elemen dalam latis L mempunyai median.

(⇐) Asumsikan bahwa setiap tiga elemen mempunyai median. Menurut lemma 4.4.1, L merupakan latis modular. Ambil sembarang elemen a, b, c ∈ L. Maka

$a\wedge(b\vee c) = a\wedge(a\vee b)\wedge(b\vee c)$ menurut (L3)

$= a\wedge(a\vee c)\wedge(a\vee b)\wedge(b\vee c)$ (L3)

$= a\wedge\{(a\vee b)\wedge(b\vee c)\wedge(c\vee a)\}$ (L1)

$= a\wedge\{(a\wedge b)\vee(b\wedge c)\vee(c\wedge a)\}$ (L9)

$= a\wedge\{(b\wedge c)\vee(c\wedge a)\vee(a\wedge b)\}$ (L1)

Karena L latis modular dan $(c\wedge a) \vee (a\wedge b) \leq a$, maka ruas kanan persamaan di atas

$= a \wedge \{(b\wedge c) \vee [(c\wedge a) \vee (a\wedge b)]\}$

$= \{a\wedge(b\wedge c)\} \vee \{(a\wedge c) \vee (a\wedge b)\}$

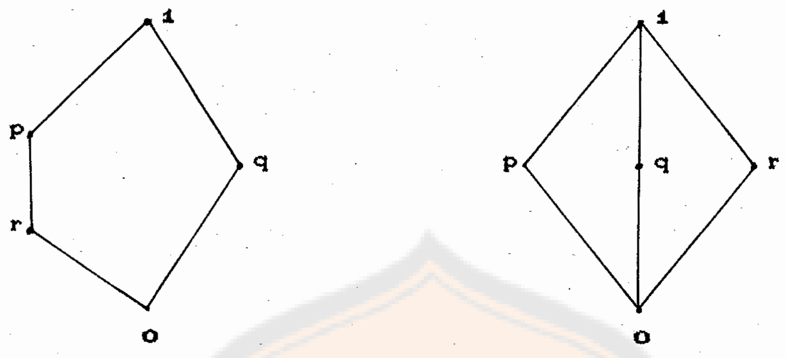
$= (a\wedge c) \vee (a\wedge b)$

sebab $a\wedge(b\wedge c) \leq (a\wedge b) \vee (a\wedge c)$.

Menurut Definisi 4.2.1, L adalah latis distributif.∎

Teorema 4.4.2 Kriteria Non-Modular Dedekind

Latis L adalah latis non-modular bila dan hanya bila L memuat sublatis yang isomorfis dengan latis N5 seperti yang didiagramkan pada Gambar 4.4.1.



N5 M5

Gambar 4.4.1

Bukti

($\Rightarrow$) Andaikan **L** adalah latis non-modular. Menurut Definisi dan Teorema 4.3.1 dan akibatnya, maka terdapat $x,y,z \in$ **L**, sedemikian hingga

(15) $\quad x \leq z$ dan $x \vee (y \wedge z) < (x \vee y) \wedge z$

Akan kita tunjukkan bahwa di dalam **L**, subset **R** yang mempunyai elemen-elemen sebagai berikut :

(16) $\quad u = y \wedge z$, $a = x \vee (y \wedge z)$, $b = y$, $c = (x \vee y) \wedge z$, dan $v = x \vee y$

adalah sublatis yang isomorfis dengan N5.

Dari (15) dan (16) didapat

(17) $\quad u \leq a < c \leq v \quad$ dan $\quad u \leq b \leq v$

Oleh sebab itu

$$u \leq a \wedge b \leq c \wedge b = (x \vee y) \wedge z \wedge y = y \wedge z = u$$

$$v \geq c \vee b \geq a \vee b = x \vee (y \wedge z) \vee y = x \wedge y = v$$

Jadi

(18) $\quad a \wedge b = c \wedge b = u \quad$ dan $a \vee b = c \vee b = v$

Menurut (17), elemen-elemen u dan v merupakan elemen batas dari subset **R** dan menurut (18) setiap dua elemen dari **R** mempunyai suprimum dan infimum dalam **R**. Jadi **R** adalah sublatis dari **L**.

Hal terakhir yang perlu ditunjukkan adalah bahwa elemen-elemen **R** yang didefinisikan pada (16) semuanya berbeda. Mengingat (17), cukup kita tunjukkan $u \neq b$, $v \neq b$, $u \neq a$, $v \neq c$, $a \neq b$, $c \neq b$.

Pertama-tama, dengan menggunakan (18) dan (**L4**), jika $u=b$, maka $a \wedge b=b$, sehingga $a \vee b=a \vee (a \wedge b)=a$. Jadi $v=a$. Ini bertentangan dengan (17). Jadi $u \neq b$.

Jika $v=c$, maka $c \vee b=c$, sehingga $c \wedge b=(c \vee b) \wedge b=b$. Jadi $u=b$. Dan jika $a=b$, maka $u = b \wedge b = b$. Kontradiksi sebab $u \neq b$. Jadi $v \neq c$ dan $a \neq b$.

Dengan jalan yang analog, dapat ditunjukkan $v \neq b$, $u \neq a$, dan $c \neq b$ (dengan menggantikan u dengan v dan menggantikan a dengan c di dalam pembuktian $u \neq b$, $v \neq c$, dan $a \neq b$). Dengan demikian elemen-elemen dalam **R** berbeda.

Dari (17) dan (18) terlihat adanya suatu isomorfisme antara latis N5 dengan sublatis dengan elemen seperti pada (16), yaitu pemetaan θ yang didefinisikan sebagai berikut:

$$\theta(v)=1,\ \theta(a)=r,\ \theta(b)=q,\ \theta(c)=p,\ \text{dan}\ \theta(u)=0.$$

Jadi sublatis**R** isomorfis dengan latis N5.

($\Leftarrow$) Asumsikan latis **L** memuat sublatis yang isomorfis dengan latis N5. Karena latis N5 adalah latis non-modular ($p \vee (q \wedge r) = p \vee 0 = p$ dan $(p \vee q) \wedge r = 1 \wedge r = r$), maka hukum modular (**L7**) tidak berlaku untuk semua elemen **L**. Menurut Definisi 4.3.1, latis **L** adalah non-modular.∎

Teorema 4.4.3 Kriteria Non-Distributif Birkhoff

Latis L adalah latis non-distributif bila dan hanya bila L memuat sublatis yang isomorfis dengan latis N5 atau latis M5 seperti yang didiagramkan pada Gambar 4.4.1.

Bukti

($\Rightarrow$) Asumsikan L adalah latis non-distributif. Jika L non-modular, maka menurut Kriteria Non-Modular Dedekind, L pasti memuat sublatis yang isomorfis dengan latis N5. Andaikan L adalah modular. Menurut Teorema 4.4.1 dan Lemma 4.4.2, terdapat $x,y,z \in$ L sedemikian hingga

(19) $$(x\wedge y)\vee(y\wedge z)\vee(z\wedge x) < (x\vee y)\wedge(y\vee z)\wedge(z\vee x)$$

Akan ditunjukkan subset R yang mempunyai elemen-elemen sebagai berikut:

$$u = (x\wedge y)\vee(y\wedge z)\vee(z\wedge x)$$

$$v = (x\vee y)\wedge(y\vee z)\wedge(z\vee x)$$

(20) $$a = u\vee(x\wedge v) = (u\vee x)\wedge v$$

$$b = u\vee(y\wedge v) = (u\vee y)\wedge v$$

$$c = u\vee(z\wedge v) = (u\vee z)\wedge v$$

membentuk sublatis yang isomorfis dengan M5.

Pertama-tama akan kita tunjukkan bahwa elemen-elemen yang didefinisikan dalam (20) memenuhi

(21) $a\wedge b = b\wedge c = c\wedge a = u$ dan $a\vee b = b\vee c = c\vee a = v$.

(Dengan (21) nantinya akan terbukti bahwa elemen-elemen dalam R tidak sama satu dengan yang lain).

Untuk elemen a dan b kita tulis

$$a\vee b = \{u\vee(x\wedge v)\} \vee \{u\vee(y\wedge v)\}$$

$= u \vee (x \wedge v) \vee (y \wedge v)$ menurut (L4)

$= u \vee \{[x \wedge (x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (z \vee x)] \vee$

$[y \wedge (x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (z \vee x)]\}$ (20)

$= u \vee \{[x \wedge (y \vee z)] \vee [y \wedge (z \vee x)]\}$ (L3)

Karena $x \wedge (y \vee z) \leq x \leq (z \vee x)$, maka menurut (L7)

$$a \vee b = u \vee \{[(x \wedge (y \vee z)) \vee y\ ] \wedge (z \vee x)\}$$

Karena $(x \wedge (y \vee z)) \vee y = (x \vee y) \wedge (y \vee z)$, maka

$$a \vee b = u \vee \{(x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (z \vee x)\}$$

$$= u \vee v$$

Menurut (20), $a \vee b = v$.

Dengan dualnya daxat ditunjukkan bawa $a \wedge b = u$. Untuk bagian-bagian lainnya dalam (21) dikerjakan dengan cara yang analog.

Dengan terbuktinya (21), maka elemen-elemen dalam **R** berbeda satu dengan yang lain. Sebagai contoh, jika $u=a$, maka menurut (21), $v=b$ dan $v=c$. Jadi $v = v \wedge v = b \wedge c = u$. Kontradiksi dengan (20), yaitu $u<v$. Jadi $u \neq a$. Dengan cara yang analog dapat ditunjukkan bahwa $u \neq b$ dan $u \neq c$. Dengan dualnya dapat ditunjukkan bahwa $v \neq a,b,c$. Juga $a=b=c$ adalah mustahil. Jika $a=b$, $a=c$, dan $b=c$, maka $u = a \wedge b = a \wedge a = a$, $u = a \wedge c = a \wedge a = a$, dan $u = b \wedge c = c \wedge c = c$. Kontradiksi dengan $u \neq a \neq c$. Dengan demikian semua elemen dalam sublatis **R** berbeda satu dengan yang lain .

Dari (20) dan (21) terlihat adanya suatu isomorfisme antara sublatis **R** dengan latis M5, yaitu suatu pemetaan θ yang didefinisikan sebagai berikut :

$$\theta(v)=1,\ \theta(a)=p,\ \theta(b)=q,\ \theta(c)=r,\ \text{dan } \theta(u)=0.$$

Jadi sublatis **R** isomorfis dengan M5.

($\Leftarrow$) Andaikan latis **L** memuat sublatis yang isomorfis dengan latis N5 dan M5. Karena latis N5 dan M5 adalah latis-latis non-distributif (Untuk N5, $p \vee (q \wedge r) = p$ dpn $(p \vee r) \wedge (p \vee q) = r \wedge 1 = r$; untuk M5 $p \vee (q \wedge r) = p \vee 0 = p$ dpn $(p \vee q) \wedge (p \vee r) = 1 \wedge 1 = 1$), maka hukum distributif tidak berlaku untuk semua elemen **L**. Menurut Definisi 4.2.1, latis **L** adalah latis non-distributif. ∎

BAB V

ALJABAR BOOLE

5.1 Aljabar Boole

Definisi 5.1.1

Aljabar Boole adalah latis komplemen yang distributif, dan memuat elemen satuan 1 dan elemen nul 0.

Pada bagian 3.1., kita telah membicarakan latis dalam dua bentuk yang berbeda. Pertama, latis didefinisikan sebagai himpunan dengan relasi urutan $\leq$, seperti yang dituangkan dalam definisi 3.1.1, kemudian latis didefinisikan sebagai sistem aljabar dengan operasi $\vee$ (join) dan $\wedge$ (meet), seperti yang dituangkan dalam teorema 3.2.2. Seperti halnya dengan latis, Aljabar Boole lebih banyak dibicarakan dalam bentuknya yang kedua, yaitu sebagai suatu sistem aljabar yang memenuhi aksioma-aksioma tertentu. Maka kita sampai pada Definisi berikut:

Definisi 5.1.2

Aljabar Boole adalah himpunan **B** dengan operasi $\vee$ dan $\wedge$ dalam B, yang memenuhi aksioma-aksioma berikut :

(H1) **Hukum Komutatif** : $a\vee b = b\vee a$ $\qquad$ $a\wedge b = b\wedge a$

(H2) **Hukum Assosiatif** : $a\vee(b\vee c) = (a\vee b)\vee c$ $\qquad$ $a\wedge(b\wedge c) = (a\wedge b)\wedge c$

(H3) **Hukum Distributif** : $a\vee(b\wedge c) = (a\vee b) \wedge (a\vee c)$

$a\wedge(b\vee c) = (a\wedge b) \vee (a\wedge c)$

(H4) **Mempunyai elemen satuan dan elemen nul**, yaitu elemen 1 dan elemen 0 di dalam **B** sedemikian hingga

$a\vee 0 = a$ $\qquad$ dan $\qquad$ $a\wedge 1 = a$

untuk setiap $a \in B$.

(H5) Mempunyai Komplemen : Untuk setiap $a \in B$, terdapat elemen $a' \in B$ sedemikian hingga

$$a \vee a' = 1 \quad \text{dan} \quad a \wedge a' = 0$$

Teorema 5.1.1

Jika B adalah Aljabar Boole (sesuai Definisi 5.1.1) dan $a, b \in B$, maka berlaku

(a) $(a')' = a$

(b) $(a \vee b)' = a' \wedge b'$

(c) $(a \wedge b)' = a' \vee b'$

Bukti

(a) Sifat merupakan akibat dari Definisi 3.4.3 dan ketunggalan komplemen suatu elemen dalam latis distributif.

(b) Untuk membuktikan $(a \vee b)' = a' \wedge b'$, dengan mengingat sifat ketunggalan komplemen suatu elemen cukup dibuktikan:

$$(a \vee b) \vee (a' \wedge b') = 1 \quad \text{dan} \quad (a \vee b) \wedge (a' \wedge b') = 0.$$

Dengan hukum distributif diperoleh

$$\begin{aligned} (a \vee b) \vee (a' \wedge b') &= (a \vee b \vee a') \wedge (a \vee b \vee b') \\ &= (a \vee a' \vee b) \wedge (a \vee b \vee b') \\ &= (1 \vee b) \wedge (a \vee 1) = 1 \wedge 1 = 1 \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} (a \vee b) \wedge (a' \wedge b') &= (a \wedge a' \wedge b') \vee (b \wedge a' \wedge b') \\ &= (a \wedge a' \wedge b') \vee (b \wedge b' \wedge a') \\ &= (0 \wedge b') \vee (0 \wedge a') = 0 \vee 0 = 0 \end{aligned}$$

(c) Dengan cara yang analog akan diperoleh $(a \wedge b)' = a' \vee b'$. ∎

Sifat (b) dan (c) pada teorema di atas disebut **Hukum De Morgan,** sebagai penghargaan terhadap matematikawan Inggris Augustus De Morgan (1806–1871), yang banyak sumbangannya dalam bidang Logika Matematik.

Teorema 5.1.2 Definisi 5.1.1 Ekuivalen Definisi 5.1.2

Operasi $\vee$ dan $\wedge$ dalam Aljabar Boole menurut definisi 5.1.1, memenuhi semua aksioma dari Aljabar Boole menurut definisi 5.1.2. Sebaliknya, Aljabar Boole menurut definisi 5.1.2 adalah Aljabar Boole seperti yang didefinisikan pada definisi 5.1.1, dengan relasi $\leq$ didefinisikan sebagai berikut:

$$a \leq b \quad \text{bhb} \quad a \vee b = b$$

Bukti

($\Rightarrow$) Asumsikan **B** adalah Aljabar Boole menurut definisi 5.1.1. Maka **B** adalah latis. Menurut teorema 3.2.1, operasi $\vee$ dan $\wedge$ memenuhi hukum komutatif dan hukum assosiatif. Lebih jauh juga dibuktikan bahwa **B** adalah latis komplemen yang distributif dengan elemen satuan 1 dan elemen nul 0. Menurut teorema 3.3.2, untuk setiap $a \in$ **B** berlaku $a \vee 0 = a$ dan $a \wedge 1 = a$. Terakhir, menurut Definisi 4.1.1, setiap elemen dalam **B** mempunyai komplemen sebab **B** latis komplemen.

($\Leftarrow$) Asumsikan **B** adalah Aljabar Boole menurut definisi 5.1.2. Untuk menunjukkan bahwa **B** adalah Aljabar Boole sesuai dengan definisi 5.1.1, maka dengan teorema 3.2.2, cukup ditunjukkan bahwa operasi $\vee$ dan $\wedge$ dalam **B** memenuhi hukum absorpsi dan hukum idempoten.

Untuk hukum absorpsi:

Dengan menggunakan (**H3**), (**H4**), dan Teorema 3.3.2, didapat

$$a \vee (a \wedge b) = (a \wedge 1) \vee (a \wedge b) = a \wedge (1 \vee b) = a \wedge 1 = a.$$

Untuk hukum idempoten:

Dengan menggunakan (3) dan (**H3**) didapat

$$a = a \wedge 1 = a \wedge (a \vee a') = (a \wedge a) \vee (a \wedge a') = (a \wedge a) \vee 0 = a \wedge a.$$

Dengan menukar operasi $\vee$ dengan $\wedge$, dan menukar 1 dengan 0 dalam bukti-bukti di atas, akan diperoleh $a \wedge (a \vee b) = a$ dan $a \vee a = a$ (lihat Prinsip Dualitas di bawah).∎

Dual dari suatu pernyataan di dalam Aljabar Boole adalah pernyataan yang dihasilkan dengan menukar $\vee$ dan $\wedge$, dan menukar 0 dan 1. Karena dual dari setiap aksioma Aljabar Boole pada Definisi 5.1.2 adalah juga aksioma dari Aljabar Boole, maka kita sampai pada Prinsip Dualitas untuk Aljabar Boole.

Prinsip Dualitas

Setiap pernyataan yang benar untuk suatu Aljabar Boole akan tetap benar jika operasi $\vee$ dengan operasi $\wedge$ dan elemen satuan 1 dengan elemen nul 0 dalam pernyataan tersebut saling dipertukarkan .

Sebagai contoh, $a \wedge (a \vee b) = a$ adalah benar untuk suatu Aljabar Boole sebab $a \vee (a \wedge b) = a$ benar untuk sembarang Aljabar Boole, seperti yang kita pakai pada bagian terakhir dari pembuktian Teorema 5.1.2.

Contoh 5.1.1 Jika S adalah sembarang himpunan yang tidak kosong, maka himpunan semua subset dari S, yaitu $\mathcal{P}(S)$

adalah Aljabar Boole terhadap $\cup$ dan $\cap$. Elemen satuannya adalah S sendiri dan elemen nulnya adalah $\emptyset$, dan komplemen dari sembarang subset T dalam $\mathcal{P}(S)$ adalah $S - T$. Pada bagian 5.2 akan kita lihat bahwa semua Aljabar Boole berhingga mempunyai struktur yang sama dengan Aljabar Boole $\mathcal{P}(S)$ ini, untuk S berhingga.

Contoh 5.1.2 Sistem aljabar yang terdiri dari dua elemen 1 dan 0 dengan operasi-operasi yang didefinisikan sebagai berikut:

x	y	$x \vee y$	$x \wedge y$	x'
1	1	1	1	0
1	0	1	0	0
0	1	1	0	1
0	0	0	0	1

Tabel 1

membentuk Aljabar Boole, sebab memenuhi semua aksioma dalam Aljabar Boole. Aljabar Boole ini kita lambangkan dengan $\mathcal{B}(1,0)$.

Contoh 5.1.3 Pernyataan adalah kalimat yang bernilai benar atau bernilai salah. Dua pernyataan dikatakan ekuivalen bila keduanya bernilai benar atau bernilai salah. Jika p dan q adalah pernyataan, maka *disjungsi* dari p dan q adalah pernyataan "p atau q", dan dilambangkan dengan $p \vee q$; pernyataan $p \vee q$ bernilai benar jika p benar atau q benar atau p dan q keduanya benar. *Konjungsi* dari p dan q adalah pernyataan "p dan q", dan dilambangkan dengan $p \wedge q$; pernyataan $p \wedge q$ bernilai benar jika p dan q keduanya bernilai benar. *Negasi* dari p adalah pernyataan "tidak p", dan dilambangkan dengan p'; pernyataan p' bernilai benar jika p salah dan bernilai salah jika p benar. Berikut ini adalah *tabel kebenaran* untuk operasi-operasi di atas, di mana "B" menyatakan nilai benar dan "S" menyatakan nilai salah.

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$	p'
B	B	B	B	S
B	S	B	S	S
S	B	B	S	B
S	S	S	S	B

Tabel 2

Himpunan semua pernyataan dengan operasi disjungsi, konjungsi, dan negasi tersebut membentuk suatu Aljabar Boole.

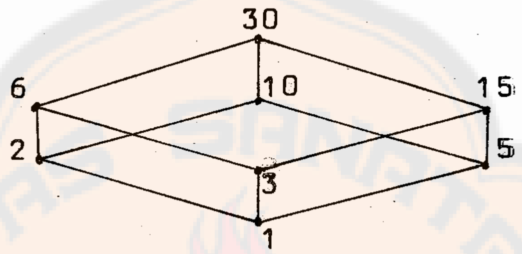
Perbandingan Tabel 1 dan Tabel 2, menunjukkan bahwa kedua tabel tersebut serupa. Bila kita korespondensikan pernyataan p dan q secara berturut-turut dengan elemen x dan y dari $\mathcal{B}(1,0)$, dan B dan S berturut-turut dengan 1 dan 0, maka kedua sistem di atas tidak dapat dibedakan. Dengan perkataan lain "Aljabar Logika" (Algebra of Logic) atau "Kalkulus Preposisi" (Proposional Calculus) isomorfis dengan Aljabar Boole $\mathcal{B}(1,0)$. Dengan alasan inilah kadang-kadang Aljabar Boole ini disebut Aljabar Logika, dan bentuk inilah yang diciptakan oleh George Boole.

5.2 Aljabar Boole Berhingga

Pada bagian ini, kita akan membuktikan bahwa Aljabar Boole berhinggga mempunyai struktur yang sama dengan Aljabar Boole himpunan semua subset dari suatu himpunan berhingga, seperti yang akan dirumuskan pada Teorema 5.2.2.

Sebelum kita sampai pada pembuktian teorema 5.2.2, perlu ditelusuri terlebih dahulu bagaimana ide dari teorema ini muncul. Untuk itu perhatikan contoh berikut :

Contoh 5.2.1 Himpunan semua faktor dari bilangan 30 membentuk Aljabar Boole dengan $a \le b$ didefinisikan sebagai $a|b$. Diagramnya seperti tersaji pada Gambar 5.2.1.



Gambar 5.2.1

Perbandingan antara Gambar 5.2.1 dan Gambar 2.2.1, yaitu diagram untuk Aljabar Boole himpunan semua subset dari {x,y,z}, mengisyaratkan suatu isomorfisme θ yang ditentukan dengan $\theta(2)=\{x\}$, $\theta(3)=\{y\}$, dan $\theta(5)=\{z\}$. Syarat $\theta(a \vee b) = \theta(a) \vee \theta(b)$ mengharuskan $\theta(6)=\{x,y\}$, $\theta(10)=\{x.z\}$, $\theta(15)=\{y,z\}$, dan $\theta(30)=\{x,y,z\}$. Demikian pula dengan syarat $\theta(a \wedge b) = \theta(a) \wedge \theta(b)$ mengharuskan $\theta(1)=\emptyset$. Pemetaan θ ini adalah suatu isomorfisme. Ide pokok yang ingin dikemukakan di sini adalah mengawankan elemen-elemen yang melingkupi 1 (faktor-faktor prima dari 30) dengan elemen-elemen yang melingkupi $\emptyset$ (subset dengan elemen tunggal dari {x,y,z}). Ide yang sederhana dan penting inilah yang menjadi kunci dari Teorema 5.2.2.

Kita akan membuktikan Teorema 5.2.2 dengan sebuah definisi dan beberapa lemma. Akan kita perlihatkan bahwa setiap Aljabar Boole berhingga mempunyai elemem-elemen yang sama peranannya dengan subset-subset berelemen tunggal dari Aljabar Boole himpunan semua subset dari suatu himpunan berhingga. *Untuk selanjutnya simbol $\mathcal{B}$ akan digunakan untuk menyatakan Aljabar Boole berhingga.*

Definisi 5.2.1

Elemen $a \in \mathcal{B}$ disebut **atom** dari $\mathcal{B}$ jika a melingkupi 0 (elemem nul dari $\mathcal{B}$), yaitu jika $0<a$ dan tidak ada $x \in \mathcal{B}$ sedemikian hingga $0<x<a$. Secara ekuivalen, a adalah atom dari $\mathcal{B}$ bhb

(22) $\qquad a \neq 0$, dan $x \wedge a = a$ atau $x \wedge a = 0$

untuk setiap $x \in \mathcal{B}$.

Atom-atom dari Aljabar Boole himpunan semua subset dari suatu himpuan berhingga adalah subset yang beranggotakan satu elemen. Atom-atom dari himpunan semua faktor dari bilangan 30 adalah faktor-faktor prima dari 30, yaitu 2, 3, dan 5.

Lemma 5.2.1

Jika $b \in \mathcal{B}$ dan $b \neq 0$, maka terdapat sebuah atom $a \in \mathcal{B}$ sedemikian hingga $a \leq b$.

Bukti

Jika b sendiri adalah atom dari $\mathcal{B}$, ambil $a=b$. Jika b bukan atom, pilih elemen $a_1 \in \mathcal{B}$ sedemikian hingga $0<a_1<b$; elemen a_1 itu pasti ada jika b bukan atom. Jika a_1 adalah sebuah atom, ambil $a=a_1$. Jika a_1 bukan ataom, pilih $a_2 \in \mathcal{B}$ sedemikian hingga $0<a_2<a_1<b$. Jika a_2 adalah atom, ambil $a=a_2$. Teruskan jika perlu, untuk mendapatkan

$$0< \ldots <a_3<a_2<a_1<b.$$

Proses ini tidak akan berlanjut sampai tak berhingga, sebab

$\mathcal{B}$ berhingga. Oleh karena itu, pasti ada bilangan bulat positif k sedemikian sehingga a_k merupakan sebuah atom; ambil $a=a_k$. ∎

Lemma 5.2.2

Jika a_1 dan a_2 adalah atom-atom dalam $\mathcal{B}$ dan $a_1 \wedge a_2 \neq 0$, maka $a_1 = a_2$.

Bukti

Gunakan (22) dengan mengambil $a=a_1$ dan $x=a_2$, kemudian ambil $a=a_2$ dan $x=a_1$, maka akan diperoleh $a_2 \wedge a_1 = a_1$ dan $a_1 \wedge a_2 = a_2$, sebab $a_1 \wedge a_2 \neq 0$. Jadi $a_1 = a_2$. ∎

Lemma 5.2.3

Untuk $b,c \in \mathcal{B}$, syarat-syarat berikut adalah ekuivalen

(a) $b \leq c$

(b) $b \wedge c' = 0$

(c) $b' \vee c = 1$.

Bukti

Akan kita buktikan (a) ⇒ (b), (b) ⇒ (c), dan (c) ⇒ (a).

(a)⇒(b): Jika $b \leq c$, maka $b \vee c = c$, sehingga (dengan menggunakan substitusi dan De Morgan)

$$\begin{aligned} b \wedge c' &= b \wedge (b \vee c)' \\ &= b \wedge (b' \wedge c') \\ &= (b \wedge b') \wedge c' \\ &= 0 \wedge c' = 0. \end{aligned}$$

(b)⇒(c): Jika $b \wedge c' = 0$, maka $(b \wedge c')' = 0'$. Oleh karena itu, dengan menggunakan hukum DeMorgan, kita dapatkan $b' \vee c = 1$.

(c)⇒(a): Jika $b' \vee c = 1$, maka

$$\begin{aligned} b &= b \wedge (b' \vee c) \\ &= (b \wedge b') \vee (b \wedge c) \\ &= 0 \vee (b \wedge c) \\ &= b \wedge c. \end{aligned}$$

Jadi $b \leq c$. ∎

Lemma 5.2.4

Jika b adalah sebuah atom dan $b \leq x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_n$, maka $b \leq x_i$ untuk suatu i ($1 \leq i \leq n$).

Bukti

Andaikan $b \not\leq x_i$ untuk semua i. Maka $b \wedge x_i \neq b$, dan menurut definisi atom, haruslah $b \wedge x_i = 0$. Tetapi

$$\begin{aligned} b = b \wedge (x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_n) &= (b \wedge x_1) \vee (b \wedge x_2) \vee \ldots \vee (b \wedge x_n) \\ &= 0 \vee 0 \vee \ldots \vee 0 = 0. \end{aligned}$$

Kontradiksi, karena b adalah atom. Jadi haruslah $b \leq x_i$ untuk suatu i. ∎

Lemma 5.2.5

Jika a adalah atom dan $a \leq x'$, maka $a \not\leq x$.

Bukti

Menurut Definisi 4.1.1, $a \leq 1 = x \vee x'$. Maka menurut Lemma 5.2.4, $a \leq x$ atau $a \leq x'$. Tetapi diketahui bahwa $a \leq x'$. Jadi haruslah $a \not\leq x$. ∎

Lemma 5.2.6

Jika $b, c \in \mathcal{B}$ dan $b \not\leq c$, maka terdapat atom $a \in \mathcal{B}$ sedemikian hingga $a \leq b$ dan $a \not\leq c$.

Bukti

Jika $b \nleq c$, maka $b \wedge c' \neq 0$ menurut Lemma 5.2.3. Oleh karena itu, menurut Lemma 5.2.1, terdapat atom $a \in \mathcal{B}$ sedemikian hingga $a \leq b \wedge c'$. Maka, $a \leq b$ dan $a \nleq c$ (Jika $a \leq c'$, maka $a \nleq c$). ∎

Lemma 5.2.7

Jika $b \in \mathcal{B}$, dan $a_1, a_2, \ldots, a_m$ adalah semua atom-atom $\leq b$, maka $b = a_1 \vee a_2 \vee \ldots \vee a_m$.

Bukti

Andaikan $c = a_1 \vee a_2 \vee \ldots \vee a_m$. Maka $c \leq b$ sebab $a_i \leq b$ untuk semua i $(1 \leq i \leq m)$. Oleh karena itu, cukup kita tunjukkan bahwa $c \geq b$. Asumsikan $c \ngeq b$. Maka menurut Lemma 5.2.6 terdapat atom a sedemikian hingga $a \leq b$ dan $a \nleq c$. Karena $a \leq b$, maka $a = a_i$ untuk suatu i $(1 \leq i \leq m)$ menurut definisi a_i. Berarti $a \leq c$. Kontradiksi. Maka haruslah $c \geq b$. ∎

Lemma berikut memperlihatkan bahwa jika salah satu atom a_i $(1 \leq i \leq m)$ pada Lemma 5.2.7 dihilangkan, maka b bukan suprimum dari atom-atom yang tersisa.

Lemma 5.2.8

Jika $b \in \mathcal{B}$, dan $a, a_1, a_2, \ldots, a_m$ adalah atom-atom dari $\mathcal{B}$, dengan $a \leq b$ dan $b = a_1 \vee a_2 \vee \ldots \vee a_m$, maka $a = a_i$ untuk suatu i.

Bukti

Dari $a \leq b$, kita peroleh $a \wedge b = a$. Oleh karena itu

$$a \wedge (a_1 \vee a_2 \vee \ldots \vee a_m) = (a \wedge a_1) \vee (a \wedge a_2) \vee \ldots \vee (a \wedge a_m) = a.$$

Maka $a \wedge a_i \neq 0$ untuk suatu i. Menurut Lemma 5.2.2, $a = a_i$. ∎

Teorema 5.2.2

Setiap Aljabar Boole berhinggga isomorfis dengan Aljabar Boole himpunan semua subset dari suatu himpunan berhingga.

Bukti

Andaikan $\mathcal{B}$ adalah Aljabar Boole berhingga, dan andaikan S adalah himpunan semua atom dalam $\mathcal{B}$. Akan kita buktikan bahwa $\mathcal{B}$ isomorfis $\mathcal{P}(S)$ yaitu dengan himpunan semua subset dari S.

Jika $b \in \mathcal{B}$, maka menurut Lemma 5.2.7 dan 5.2.8 b dapat ditulis secara tunggal dalam bentuk $b = a_1 \vee a_2 \vee \ldots \vee a_m$ dengan $a_1, a_2, \ldots, a_m \in S$, dan $\{a_1, a_2, \ldots, a_m\} = \{a \in S \mid a \leq b\}$. Oleh karena itu kita dapat mendefinisikan sebuah pemetaan $\psi : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{P}(S)$ dengan

$$\psi(b) = \psi(a_1 \vee a_2 \vee \ldots \vee a_m) = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\} = \{a \in S \mid a \leq b\}$$

untuk tiap $b \in \mathcal{B}$.

Jelas ψ merupakan pemetaan yang surjektif (onto).

Untuk menunjukkan bahwa ψ adalah pemetaan injektif, cukup ditunjukkan bahwa jika $b, c \in \mathcal{B}$ dan $b \neq c$, maka $\psi(b) \neq \psi(c)$. Kita tahu bahwa $b \neq c$ bila dan hanya bila $b \nleq c$ atau $b \ngeq c$. Maka menurut Lemma 5.2.6, terdapat $a \in S$ sedemikian hingga $a \leq b$ dan $a \nleq c$, atau terdapat $a \in S$ sedemikian hingga $a \nleq b$ dan $a \leq c$. Jadi $a \in \psi(b)$ dan $a \notin \psi(c)$, atau $a \notin \psi(b)$ dan $a \in \psi(c)$. Ini menunjukkan $\psi(b) \neq \psi(c)$.

Sekarang akan kita tunjukkan untuk setiap $b, c \in \mathcal{B}$ berlaku $\psi(b \vee c) = \psi(b) \cup \psi(c)$ dan $\psi(b \wedge c) = \psi(b) \cap \psi(c)$. Untuk yang pertama, ambil sembarang elemen $a \in \psi(b \vee c)$. Maka $a \in S$ dan $a \leq b \vee c$. Karena a adalah atom, maka $a \leq b$ atau $a \leq c$ menurut Lemma 5.2.4. Jadi $a \in \psi(b)$ atau $a \in \psi(c)$. Ini menunjukkan bahwa $a \in$

$\psi(b) \cup \psi(c)$. Maka $\psi(b \vee c) \subseteq \psi(b) \cup \psi(c)$. Ambil sembarang elemen $a \in \psi(b) \cup \psi(c)$. Maka $a \in \psi(b)$ atau $a \in \psi(c)$. Oleh karena itu $a \leq b$ atau $a \leq c$, sehingga $a \leq b \vee c$. Ini menunjukkan bahwa $a \in \psi(b \vee c)$. Maka $\psi(b) \cup \psi(c) \subseteq \psi(b \vee c)$. Jadi $\psi(b \vee c) = \psi(b) \vee \psi(c)$. Bagian yang kedua dibuktikan dengan cara yang analog.∎

Akibat Teorema 5.2.2

Jika $\mathcal{B}$ adalah Aljabar Boole berhingga, maka banyaknya eleman dari $\mathcal{B}$ adalah 2^n untuk suatu bilangan positif n.

Dengan adanya Teorema 5.2.1 dan Akibatnya, kita tidak dapat membentuk Aljabar Boole berhingga dengan jumlah elemennya sembarang , sebab Aljabar Boole berhingga mempunyai jumlah elemen sebanyak 2^n , untuk suatu untuk suatu bilangan bulat positif n. Jadi syarat perlu untuk suatu himpunan berhingga dapat membentuk Aljabar Boole adalah jumlah elemennya merupakan perpangkatan bulat positif dari 2.

Contoh 5.2.1 Himpunan semua faktor dari 12, yaitu {1,2,3,4,6,12} dengan $a \leq b$ didefinisikan sebagai $a \mid b$, tidak dapat membentuk Aljabar Boole, sebab banyaknya elemen dari himpunan ini bukanlah perpangkatan bulat positif dari 2.

5.3 Ring Boole

Pada bagian ini, kita akan melihat hubungan antara ring dalam struktur aljabar dengan Aljabar Boole.

Definisi 5.3.1

Ring **R** disebut Ring Boole , jika untuk setiap $x \in \mathbf{R}$, berlaku $x^2 = x$.

Jika dalam suatu ring **R** berlaku $x^2 = x$ untuk setiap $x \in \mathbf{R}$, maka **R** adalah ring komutatif dan $2x=0$. Untuk membuktikan ini, ambil sembarang elemen $a,b \in \mathbf{R}$. Maka

$$a+b+ab+ba = a^2+b^2+ab+ba = (a+b)^2 = a+b$$

Oleh sebab itu $ab+ba=0$. Untuk $b=a$ didapat $a+a=0$ atau $2a=0$, dan juga $a=-a$. Maka $ab-ba=0$. Jadi $ab=ba$.

Teorema 5.3.1

Andaikan **R** adalah ring Boole dengan elemen satuan 1. Pada **R** didefinisikan operasi-operasi $\vee$ dan $\wedge$ dengan

(23) $\quad a \vee b = a+b-ab$

(24) $\quad a \wedge b = ab$

Maka **R** adalah Aljabar Boole dengan elemen satuan 1, elemen nul 0 dan komplemen dari a adalah $1-a$ untuk setiap $a \in \mathbf{R}$.

Bukti

Akan ditunjukkan bahwa **R** adalah latis komplemen yang distributif, dengan elemen satuan 1 dan elemen nul 0.

Pertama-tama akan ditunjukkan bahwa **R** dengan operasi seperti yang didefinisikan pada (23) dan (24) merupakan suatu latis. Menurut teorema 3.2.2, harus ditunjukkan dipenuhinya **(L1)-(L4)**.

Ambil sembarang elemen a, b, $c \in \mathbf{R}$.

(i) Hukum komutatif dipenuhi, yaitu

$$a \vee b = a+b-ab = b+a-ba = b \vee a$$

dan

$$a \wedge b = ab = ba = b \wedge a.$$

(ii) Hukum assosiatif dipenuhi.

Untuk operasi $\vee$,

$$a \vee (b \vee c) = a+(b+c-bc) - a(b+c-bc)$$
$$= a+b+c-bc-ab-ac+abc.$$
$$= a+b-ab+c-(a+b-ab)c$$
$$= (a \vee b) \vee c.$$

(iii) Hukum absorpsi dipenuhi,

$$a \vee (a \wedge b) = a+ab-aab = a+ab-a^2b = a+ab-ab = a$$

dan

$$a \wedge (a \vee b) = a(a+b-ab) = a^2+ab-a^2b = a+ab-ab = a.$$

(iv) Hukum idempoten dipenuhi,

$$a \vee a = a+a-a^2 = a+a-a = a$$

dan

$$a \wedge a = a^2 = a.$$

Jadi **R** dengan operasi $\vee$ dan $\wedge$ merupakan latis.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa **R** adalah latis distributif.

Ambil sembarang elemen a, b, c $\in$ **R**.

Maka

$$(a \wedge b) \vee (a \wedge c) = ab+ac-(ab)(ac) = ab+ac-a^2bc = ab+ac-abc.$$
$$= a(b+c-bc)$$
$$= a \wedge (b \vee c).$$

Jadi $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$.

Akan ditunjukkan bahwa 1 dan 0 adalah elemen satuan dan nul untuk latis **R**. Ambil sembarang elemen $a \in$ **R**. Maka

$$a \wedge 1 = a.1 = a \qquad \text{dan} \qquad a \vee 0 = a+0-a.0 = a+0-0 = a$$

Terakhir akan ditunjukkan bahwa komplemen dari sembarang elemen $a \in$ **R** ialah elemen $(1-a) \in$ **R**:

$$a \wedge (1-a) = a(1-a) = a-a^2 = a-a = 0$$

dan

$$a \vee (1-a) = a+(1-a) - a(1-a) = a+1-a-0 = 1.$$

Jadi 1-a adalah komplemen dari a.▮

Teorema 5.3.2

Aljabar Boole yang dilengkapi dengan operasi jumlahan dan perkalian yang didefinisikan sebagai

(25) $a + b = (a \wedge b') \vee (a' \wedge b)$

(26) $ab = a \wedge b$

merupakan Ring Boole dengan elemen satuan .

Bukti

Andaikan B adalah Aljabar Boole. Ambil sembarang elemen a, b, dan c $\in$ B.

Dari (25) kita dapatkan

(27)
$$\begin{aligned}(a \vee b) \wedge (a \wedge b)' &= (a \vee b) \wedge (a' \vee b') \\ &= \{(a \vee b) \wedge a'\} \vee \{(a \vee b) \wedge b'\} \\ &= \{(a \wedge a') \vee (b \wedge a')\} \vee \{(a \wedge b') \vee (b \wedge b')\} \\ &= (a' \wedge b) \vee (a \wedge b') \\ &= (a \wedge b') \vee (a' \wedge b) \\ &= a + b.\end{aligned}$$

(i) Operasi penjumlahan bersifat komutatif, yaitu

$$\begin{aligned}a + b &= (a \wedge b') \vee (a' \wedge b) \\ &= (b \wedge a') \vee (b' \wedge a) \\ &= b + a.\end{aligned}$$

(ii) Operasi penjumlahan bersifat assosiatif.

Menurut (27)

$$\begin{aligned}(a + b)' &= (a \vee b)' \vee (a \wedge b) \\ &= (a \wedge b) \vee (a' \wedge b')\end{aligned}$$

Sehingga

$$
\begin{aligned}
(a + b) + c &= \{[(a\wedge b') \vee (a'\wedge b)] \wedge c'\} \vee \\
&\qquad \{[(a\wedge b) \vee (a'\wedge b')] \wedge c\} \\
&= \{(a\wedge b'\wedge c') \vee (a'\wedge b\wedge c')\} \vee \\
&\qquad \{(a\wedge b\wedge c) \vee (a'\wedge b'\wedge c)\} \\
&= \{(a\wedge b'\wedge c') \vee (a\wedge b\wedge c)\} \vee \\
&\qquad \{(a'\wedge b\wedge c') \vee (a'\wedge b'\wedge c)\} \\
&= \{a \wedge [(b'\wedge c') \vee (b\wedge c)]\} \vee \\
&\qquad \{a'\wedge [(b\wedge c') \vee (b'\wedge c)]\} \\
&= \{a \wedge (b + c)'\} \vee \{a'\wedge (b + c)\} \\
&= a + (b + c).
\end{aligned}
$$

(iii) Terdapat elemen identitas $0\in B$, sedemikian hingga

$a + 0 = (a\wedge 0') \vee (a'\wedge 0) = (a\wedge 1) \vee (a'\wedge 0) = a\vee 0 = a.$

(iv) Setiap elemen $a\in B$ mempunyai invers terhadap operasi jumlahan, yaitu dirinya sendiri:

$a + a = (a\wedge a') \vee (a'\wedge a) = 0 \vee 0 = 0$

(v) Dari (26) dan definisi Aljabar Boole jelas bahwa operasi perkalian bersifat komutatif dan assosiatif. Dan berlaku $a1 = 1a = a\wedge 1 = a$, yang menunjukkan **B** mempunyai elemen satuan, yaitu 1.

(vi) Hukum distributif dipenuhi, yaitu $(a+b)c = ac + bc$ dan $a(b+c) = ab + ac$.

Akan kita buktikan hukum distributif dari kiri.

$$
\begin{aligned}
ab + ac &= \{(a\wedge b) \wedge (a\wedge c)'\} \vee \{(a\wedge b)' \wedge (a\wedge c)\} \\
&= \{(a\wedge b) \wedge (a'\vee c')\} \vee \{(a'\vee b') \wedge (a\wedge c)\} \\
&= \{(a\wedge b\wedge a') \vee (a\wedge b\wedge c')\} \vee \{a'\wedge a\wedge c) \vee (b'\wedge a\wedge c)\} \\
&= \{a\wedge (b\wedge c')\} \vee \{a\wedge (b'\wedge c)\} \\
&= a\wedge\{(b\wedge c')\vee(b'\wedge c)\} \\
&= a(b+c).
\end{aligned}
$$

Jadi $a(b+c) = ab+ac$.

(vii) Untuk setiap $a \in B$ berlaku

$$a^2 = aa = a \wedge a = a.$$

Terbukti bahwa $(B,+,.)$ merupakan ring Boole dengan elemen satuan 1. ∎

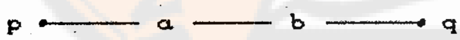
5.4 Aplikasi Aljabar Boole pada Penyederhanaan Sirkuit Listrik

Akhir-akhir ini Aljabar Boole mendapat perhatian yang besar dari para matematikawan dan insinyur karena aplikasinya pada bidang komputer dan penyederhanaan sirkuit.

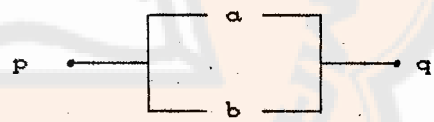
Dua masalah yang muncul dalam jaringan sirkuit adalah (a) masalah penyederhanaan jaringan sirkuit yang rumit, dan (b) masalah perancangan sirkuit bila diketahui sifat-sifatnya. Kita hanya akan membicarakan masalah yang pertama saja. Aplikasi Aljabar Boole pada penyederhanaan sirkuit dapat dimanfaatkan dalam bidang komputer, sistem pengalihan (switching) telepon otomat, dan macam-macam jenis alat kontrol elektronik lainnya.

Pengalih (switch) adalah suatu alat yang dapat dipasang pada sebuah sirkuit listrik, dan dapat bersifat terbuka (open) atau tertutup (closed). Arus listrik akan mengalir bila pengalih tersebut dalam keadaan tertutup, dansebaliknya tidak ada arus listrik yang lewat bila pengalih dalam keadaan terbuka. Pengalih-pengalih dalam suatu sirkuit akan kita lambangkan dengan huruf-huruf a, b, c, x, y, z, . . . Dua pengalih dalam suatu sirkuit yang selalu dalam keadaan terbuka atau tertutup secara bersama-sama, akan dinotasikan dengan huruf yang sama. Pengalih yang selalu terbuka saat a tertutup, dan pengalih yang selalu tertutup saat a terbuka akan kita notasikan dengan a'. Pengalih a' disebut lawan dari a.

Rangkaian dua pengalih a dan b yang dirangkai seperti pada Gambar 5.4.1 disebut *rangkaian seri*, dan akan kita notasikan dengan "$a \wedge b$". Arus dapat lewat dari terminal p ke terminal q pada (Gambar 5.4.1) bila dan hanya bila a dan b keduanya dalam keadaan tertutup. Rangkain dua pengalih a dan b seperti pada Gambar 5.4.2 disebut *rangkaian paralel* dan akan kita notasikan dengan "$a \vee b$". Arus dapat lewat dari terminal p ke terminal q (Gambar 5.4.2) bila dan hanya bila pengalih a atau pengalih b atau kedua-duanya dalam keadaan tertutup.

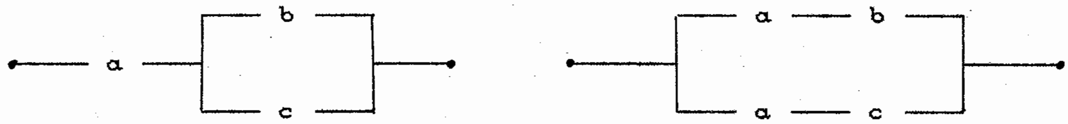


Gambar 5.4.1



Gambar 5.4.2

Kita dapat mengkombinasikan pengalih-pengalih dalam rangkaian *seri-paralel* untuk membangun suatu sirkuit. Sirkuit seri-paralel selalu mempunyai dua terminal, dan sirkuit akan dikatakan terbuka atau tertutup tergantung pada dapat tidaknya arus lewat dari terminal yang satu ke terminal lain . Dua sirkuit dikatakan **ekuivalen** bila posisi pengalih-pengalih yang menutup sirkuit yang satu sama dengan posisi pengalih-pengalih yang menutup sirkuit yang lain.



Gambar 5.4.3

Contoh 5.4.1 Dua sirkuit pada Gambar 5.4.3 adalah ekuivalen. Jika a terbuka maka kedua sirkuit dalam keadaan terbuka. Jika a tertutup, maka kedua sirkuit akan tertutup bila dan hanya bila b dan c salah satu atau keduanya tertutup.

Jika sirkuit-sirkuit yang ekuivalen *dianggap sama*, maka sirkuit-sirkuit seri-paralel akan membentuk Aljabar Boole dengan operasi $\vee$ dan $\wedge$. Jelas hukum komutatif dan assosiatif dipenuhi oleh operasi $\vee$ dan $\wedge$. Dengan menggunakan tabel kebenaran akan kita tunjukkan bahwa hukum distributif berlaku dalam jaringan sirkuit seri-paralel. Pengalih yang tertutup disimbolkan dengan "1" dan pengalih yang terbuka disimbolkan dengan "0".

a	b	c	$b\wedge c$	$a\vee(b\wedge c)$	$a\vee b$	$a\vee c$	$(a\vee b)\wedge(a\vee c)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0

Tabel 3. Hukum Distributif $\vee$ terhadap $\wedge$

Dengan jalan yang analog, dapat ditunjukkan hukum distributif $\wedge$ terhadap $\vee$ juga dipenuhi. Keekuivalenan (kesamaan) dari dua sirkuit pada Gambar 5.4.3 tidak lain daripada hukum distributif : $a\wedge(b\vee c) = (a\wedge b)\vee(a\wedge c)$.

$a \wedge a' = 0$ $\qquad\qquad$ $a \vee a' = 1$

Gambar 5.4.4

Sirkuit yang terletak di sebelah kiri dari Gambar 5.4.4 adalah $a\wedge a'=0$, yaitu elemen nul dari Aljabar Boole : $a\wedge a'$ selalu terbuka; oleh karena itu $b\vee(a\wedge a') = b$ untuk setiap b. Sirkuit yang terletak pada sebelah kanan dari Gambar 5.4.4 adalah $a\vee a'=1$, yaitu elemen satuan dari Aljabar Boole : $a\vee a'$ selalu tertutup; oleh karena itu $b\wedge(a\vee a')=b$ untuk setiap b. Jadi pengalih yang terbuka merupakan elemen nul dan pengalih yang tertutup merupakan elemen satuan untuk sirkuit-sirkuit seri-paralel ini.

Komplemen dari pengalih yang terbuka adalah pengalih yang tertutup, dan sebaliknya komplemen dari pengalih tertutup adalah pengalih yang terbuka. Aljabar Boole sirkuit-sirkuit seri-paralel ini merupakan contoh dari Aljabar Boole $\mathcal{B}(1,0)$.

Masalah penyederhanaan, dalam kasus-kasus khusus sering dikerjakan dengan metode coba-coba (trial and error method) berdasarkan intuisi dan pengalaman yang ada. Akan tetapi di dalam sirkuit yang rumit, seperti dalam komputer digital modern, cara coba-coba sangatlah tidak efektif. Kita memerlukan suatu pendekatan yang lebih sistematik. Salah satu pendekatan yang akan kita pakai adalah penyederhanaan dengan menggunakan hukum-hukum dari Aljabar Boole.

Langkah-langkah penyederhanaan dengan metode ini adalah sebagai berikut. Pertama, terjemahkan sirkuit yang akan disederhanakan ke dalam expresi aljabar Boole dengan menggunakan operasi $\vee$, $\wedge$, dan lawan, kemudian sederhanakan expresi tersebut dengan menggunakan hukum-hukum dari Aljabar Boole, dan terakhir terjemahkan kembali hasil yang diperoleh dalam bentuk gambar sirkuit.

Contoh 5.4.2 Sirkuit seperti yang terlihat pada Gambar 5.4.5 dapat ditulis sebagai

$$(a\vee b\vee c)\wedge(a'\vee b\vee c)\wedge(a'\vee b\vee c').$$

Hukum-hukum dari Aljabar Boole dapat digunakan untuk menyederhanakan expresi ini sebagai berikut:

$(a\vee b\vee c)\wedge(a'\vee b\vee c)\wedge(a'\vee b\vee c')$

$= [a\vee(b\vee c)]\wedge[a'\vee(b\vee c)]\wedge(a'\vee b\vee c')$ (hukum assosiatif)

$= [(a\wedge a')\vee(b\vee c)]\wedge(a'\vee b\vee c')$ (hukum distributif)

$= [0\vee(b\vee c)]\wedge(a'\vee b\vee c')$ (komplemen)

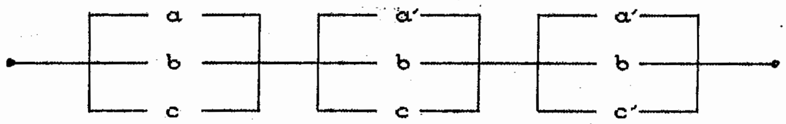
$= (b\vee c)\wedge[b\vee(a'\vee c')]$ (hukum komutatif)

$= b\vee[c\wedge(a'\vee c')]$ (hukum distributif)

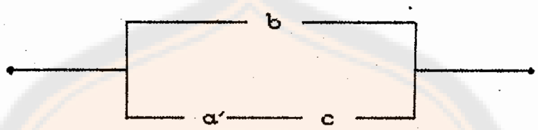
$= b\vee[(c\wedge a')\vee(c\wedge c')]$ (hukum distributif)

$= b\vee(c\wedge a')$ (komplemen).

Oleh karena itu, sirkuit pada Gambar 5.4.6 adalah ekuivalen dengan sirkuit pada Gambar 5.4.5.



Gambar 5.4.5



Gambar 5.4.6

Perlu diingat bahwa metode ini hanya berlaku untuk jaringan sirkuit yang mempunyai dua terminal dan dalam rangkaian seri-paralel saja. Sedangkan untuk jaringan yang mempunyai lebih dari 2 terminalatau rangkaian non-seri-paralel, diperlukan metode lain (Lihat J.E. Whitesitt [9]).

BAB VI

KESIMPULAN

Dari pembicaraan bab-bab sebelumnya dapat disimpulkan hal-hal sebagai berikut :

Latis adalah suatu sistem aljabar yang merupakan generalisasi dari Aljabar Boole. Latis dapat didefinisikan dengan dua cara yang lain . Pertama, sebagai suatu poset yang setiap dua elemennya mempunyai suprimum dan infimum. Dan kedua, sebagai suatu himpunan elemen-elemen dengan operasi $\vee$ dan $\wedge$ yang memenuhi aksioma-aksioma tertentu. Kedua definisi latis di atas adalah dua definisi yang ekuivalen, bila relasi urutan $\leq$ didefinisikan dengan menggunakan operasi $\vee$ atau $\wedge$ sebagai berikut : $a \leq b$ bila dan hanya bila $a \vee b = b$ atau $a \wedge b = a$.

Setiap latis distributif merupakan latis modular, tetapi tidak sebaliknya. Suatu latis adalah latis non-modular bila memuat suatu sublatis yang isomorfis dengan latis N5. Suatu latis adalah latis non-distributif bila latis tersebut memuat sublatis yang isomorfis dengan latis N5 atau M5.

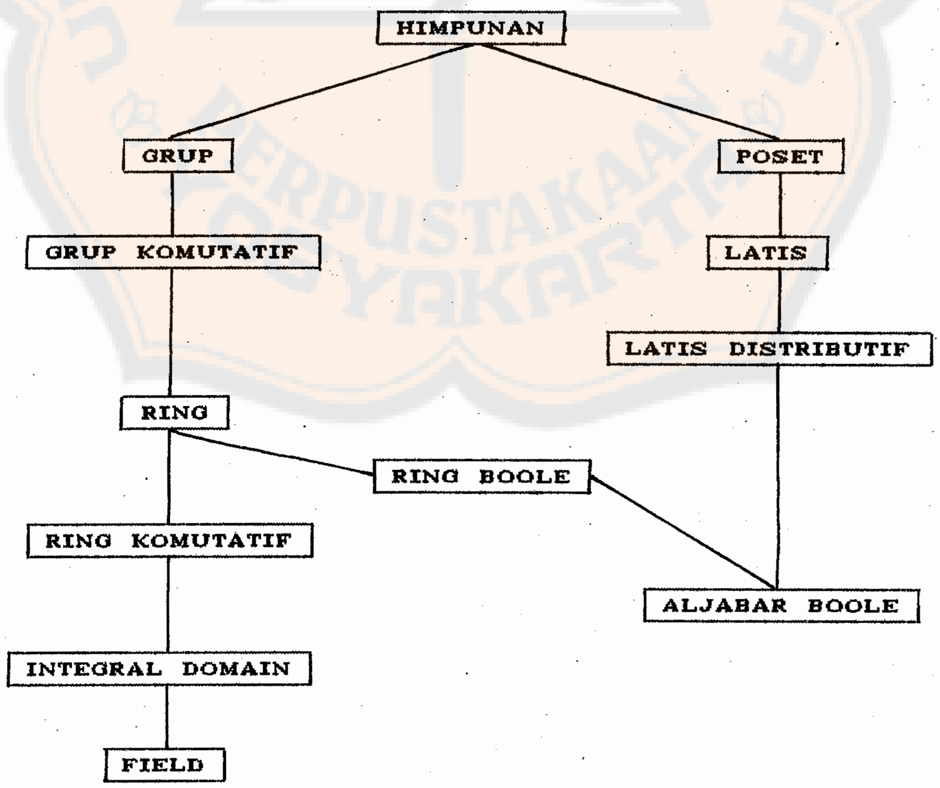
Aljabar Boole merupakan latis yang sangat khusus, yaitu latis komplemen yang distributif dan memuat elemen satuan dan elemen nul. Aljabar Boole juga dapat didefinisikan secara lain , yaitu sebagai suatu himpunan yang dilengkapi dengan dua operasi biner $\vee$ dan $\wedge$, dan satu operasi uner ' (komplemen) yang memenuhi aksioma-aksioma tertentu. Kedua definisi Aljabar Boole juga merupakan dua definisi yang ekuivalen, dengan mendefinisikan relasi urutan dengan menggunakan operasi join atau meet seperti pada latis.

Dua Aljabar Boole adalah isomorfis bila kedua Aljabar Boole isomorfis sebagai latis, dan dua latis adalah isomorfis bila kedua latis isomorfis sebagai poset.

Sembarang Aljabar Boole berhingga isomorfis dengan Aljabar Boole himpunan semua subset dari *suatu* himpunan tidak kosong. Sehingga Aljabar Boole berhingga mempunyai 2^n elemen untuk suatu bilangan bulat positif n.

Aljabar Boole yang dilengkapi dengan operasi jumlahan dan operasi perkalian yang didefinisikan sebagai kombinasi dari operasi join dan meet, merupakan suatu ring dalam Struktur Aljabar.

Hubungan latis dengan Struktur Aljabar dapat kita gambarkan dalam diagram berikut:



DAFTAR PUSTAKA

[1] Birkhoff, G.(1961), *Lattice Theory,* 3rd ed., American Mathematical Society, Providence.

[2] Durbin, John R.(1985), *Modern Algebra. An Introduction,* 2nd ed., John Wiley and Sons, New York.

[3] Gilbert, J.W.(1976), *Modern Algebra with Application,* John Wiley and Sons, New York.

[4] Liu, L.C.(1986), *Elements of Discrete Mathematics,* 2nd ed., McGraw-Hill Book Company, New York.

[5] Lucas, John F.(1986), *Introduction to Abstract Mathematics,* Wadsworth Inc., Belmont, California.

[6] Mendelson, Elliot (1970), *Boolean Algebra and Switching Circuit,* Schaum Outline Series, McGraw-Hill Book Company, New York.

[7] Moore, John T.(1962), *Elements of Abstract Algebra,* The Macmillan Company, New York.

[8] Szasz, Gabor (19630, *Introduction to Lattice Theory,* 3rd Revised and England ed.,Academic Press, London.

[9} Whitesitt, J.Eldon (1962), *Boolean Algebra and Its Application,* Addison-Wesley Publishing Company Inc., Massachusetts.