SISTEM HIMPUNAN DAN UKURAN LEBESGUE

SKRIPSI

Diajukan untuk Memenuhi Salah Satu Syarat

Memperoleh Gelar Sarjana Pendidikan

Program Studi Pendidikan Matematika

Oleh

Victoria Istiningsih

NIM : 89 414 026

NIRM : 890052010501120017

JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN

UNIVERSITAS SANATA DHARMA

YOGYAKARTA

1994

SKRIPSI

SISTEM HIMPUNAN DAN UKURAN LEBESGUE

Oleh

Victoria Istiningsih

NIM : 89 414 026

NIRM : 890052010501120017

telah disetujui oleh :

Pembimbing I

Drs. R. Soemantri. tanggal 16 Agustus.1994

Pembimbing II

St. Susento, S.Pd. M.Si. tanggal 16 Agustus 1994

SKRIPSI

SISTEM HIMPUNAN DAN UKURAN LEBESGUE

Dipersiapkan dan disusun oleh

Victoria Istiningsih

NIM : 89 414 026

NIRM : 890052010501120017

telah dipertahankan di depan Panitia Penguji

dan dinyatakan lulus pada tanggal 24 September 1994.

Panitia Penguji

Nama lengkap	Tanda tangan
Drs. R. Soemantri.	....
St. Susento, S.Pd. M.Si.	....
Dr. F. Susilo SJ.	....

Yogyakarta, ...1994

Fakultas Keguruan Dan Ilmu Pendidikan

Universitas Sanata Dharma

Dekan FKIP

DR. A. Priyono Marwan SJ

KATA PENGANTAR

Setelah berusaha hampir satu tahun, akhirnya karya tulis ini selesai. Segenap kemampuan telah penulis curahkan agar karya tulis ini menjadi lebih baik, namun karena keterbatasan kemampunan yang ada, masih terdapat banyak kekurangan dalam karya tulis ini.

Secara khusus penulis mengucapkan banyak terima kasih kepada Bp. Drs. R. Soemantri selaku pembimbing atas segala petunjuk yang diberikan selama penyusunan karya tulis ini, juga kepada Bp. St. Susento, S.Pd. M.Si, atas koreksi yang diberikan dalam karya tulis ini. Ucapan terima kasih juga penulis tujukan kepada segenap staf perpustakaan Sanata Dharma yang telah banyak membantu dalam penyediaan literatur. Ungkapan terima kasih tak terhingga penulis berikan kepada orang tua dan saudara-saudara penulis atas segala dukungan dan cinta kasih yang diberikan selama ini.

Syukur kepada Tuhan atas segalanya dan semoga Tuhan membalas semua kebaikannya.

Yogyakarta Mei 1994

Penulis

DAFTAR ISI

INTISARI

Dari sebarang himpunan tak kosong, dibangun sistem himpunan $\mathscr{S}$ yang terdiri atas himpunan dari himpunan yang diberikan . Sistem himpunan yang tertutup terhadap operasi Δ dan $\cap$ adalah ring himpunan. Untuk setiap sistem himpunan $\mathscr{S}$ terdapat ring himpunan $\mathscr{R}$ sedemikian hingga $\mathscr{S} \subseteq \mathscr{R}$. Pada umumnya pembentukan ring dari sistem himpunan $\mathscr{S}$ secara teknis tidak mudah, akan lebih mudah bila sistem himpunan yang diberikan adalah semiring. Ring himpunan yang memuat elemen satuan disebut aljabar himpunan.

Dalam teori ukuran, semiring merupakan sistem himpunan yang paling sederhana dimana dapat dibangun ukuran. Ukuran Lebesgue pada garis real merupakan perluasan dari konsep panjang interval. Abstraksi ukuran pada sebarang sistem himpunan memberikan definisi ukuran sebagai suatu fungsi himpunan μ bernilai tak negatif yang didefinisikan pada aljabar-σ yang dibangun dari himpunan tak kosong dan memenuhi :

1. $\mu(\ \phi\ ) = 0$.
2. μ bersifat terjumlah terbilang.

Suatu himpunan terukur dapat didekati oleh himpunan terbuka. Sedangkan fungsi terukur dapat didekati oleh fungsi tangga atau fungsi kontinu. Sementara itu, barisan fungsi terukur $\langle f_n \rangle$ yang konvergen hampir dimana-mana ke fungsi bernilai real f pada himpunan terukur E dengan ukuran berhingga adalah konvergen seragam ke f di E - A dimana A adalah himpunan dengan ukuran nol.

Dengan membentuk partisi berdasar himpunan terukur, H. Lebesgue memberikan suatu cara pengintegralan yang kemudian dikenal sebagai integral Lebesgue.

BAB I

PENDAHULUAN

Himpunan merupakan salah satu konsep mendasar dalam matematika yang sudah sangat dikenal. Secara sadar maupun tidak, konsep himpunan hampir selalu dipakai dalam kehidupan sehari-hari.

Suatu himpunan A didefinisikan sebagai kumpulan obyek yang diinginkan. Masimg-masing obyek ini disebut elemen atau anggota dari A. Jadi elemen suatu himpunan adalah sebarang sesuai dengan keinginan pembuat himpunan.

Bila pada himpunan tersebut disyaratkan adanya relasi antar anggotanya, maka himpunan tersebut akan menjadi suatu sistem. Sistem yang anggota-anggotanya berupa himpunan disebut sebagai sistem himpunan.

Konsep-konsep mendasar dalam sistem himpunan akan diperlihatkan pada bab II karya tulis ini. Antara lain dibicarakan pembentukan sistem matematika himpunan, relasi dan fungsi dalam sistem himpunan. Relasi yang dibicarakan disinibukanlah antar sistem himpunan, melainkan antar anggota suatu sistem himpunan.

Bab III dari karya tulis ini akan diawali dengan pembicaraan tentang ring himpunan. Selain itu dibahas pula semiring himpunan dan pembentukan ring himpunan dari semiring himpunan. Teorema-teorema yang dibicarakan disini hanya sejauh berkaitan langsung dengan ring himpunan. Sementara teorema-teorema yang berlaku untuk ring pada umumnya tidak dibicarakan lagi kecuali beberapa teorema yang diperlukan untuk mendukung teorema-teorema lain dalam karya tulis ini.

Selanjutnya disajikan pula formulasi aljabar Boole yang akan mengawali pembicaran tentang aljabar himpunan. Aljabar himpunan disini selain dipandang sebagai ring himpunan yang memuat elemen satuan juga dapat dipandang sebagai aljabar Boole yang anggota-anggotanya berupa himpunan. Dengan demikian aksioma-aksioma yang berlaku pada aljabar Boole berlaku pula pada aljabar himpunan bila operasi-operasi pada alajabar Boole tersebut merupakan operasi-operasi pada aljabar himpunan.

Pada bab IV dibicarakan tentang ukuran Lebesgue. Konsep ukuran Lebesgue ini merupakan perluasan dari konsep panjang interval pada garis real. Selain keterukuran suatu himpunan pada bab ini disinggung pula mengenai eksistensi himpunan yang tak terukur. Pembahasan tentang fungsi terukur akan mengakhiri bab ini. Di sini akan dibicarakan tentang keterukuran suatu fungsi dan kesamaan " hampir dimana-mana " dari dua fungsi terukur.

Pembahasan integral Lebesgue pada bab V akan melengkapi pembicaraan tentang ukuran Lebesgue. Pembahasan dibatasi pada integral fungsi terukur dan terbatas pada himpunan dengan ukuran berhingga. Bab ini akan diakhiri dengan melihat kembali definisi integral menurut Riemann.

Bab VI berisi tentang kesimpulan dari pembahasan pada bab-bab sebelumnya.

Secara keseluruhan, karya tulis ini bersifat analisis dan merupakan tinjauan pustaka yang dapat dijumpai dalam berbagai buku acuan. Beberapa bagian di dalamnya memang akan memunculkan permasalahan yang harus diselesaikan secara numerik. Bagian-bagian tersebut tidak dibahas secara mendalam tetapi bukan berarti dihilangkan begitu saja.

BAB II

KONSEP DASAR SISTEM HIMPUNAN

II.1 Sistem Matematika

Jika kita berbicara tentang sistem dalam matematika, maka kita akan dihadapkan pada suatu himpunan tidak kosong dimana terdapat relasi antar anggotanya. Pada himpunan tersebut didefinisikan satu operasi atau lebih serta disusun aturan-aturan atau aksioma-aksioma yang berlaku bagi anggota-anggota himpunan dan operasi-operasi yang didefinisikan dalam himpunan tersebut. Dengan kata lain, suatu sistem matematika tersusun atas :

1. Himpunan yang tidak kosong.
2. Satu operasi atau lebih yang merelasikan pasangan elemen (a,b) dalam himpunan tersebut dengan suatu elemen c yang juga anggota himpunan itu.
3. Sifat-sifat yang kemudian disebut aksioma yang berlaku bagi elemen dan operasi dalam himpunan tersebut.

Dalam teori himpunan telah dikenal operasi irisan "$\cap$", gabungan "$\cup$" dan komplemen " ' " yang didefinisikan sebagai berikut:

Definisi II.1.1 : Jika A dan B adalah sebarang dua himpunan, maka :

1. $A \cap B = \{ x \mid x \in A \text{ dan } x \in B \}$
2. $A \cup B = \{ x \mid x \in A \text{ atau } x \in B \}$

3. a. Komplemen absolut.

$A' = \{ x \mid x \notin A \}$.

b. Komplemen relatif A terhadap B.

$A' = \{ x \mid x \notin A \text{ dan } x \in B \}$.

Beberapa operasi lain dapat didefinisikan menggunakan ketiga operasi tersebut.

Definisi II.1.2 : Jika A dan B sebarang dua himpunan, maka : 1. $A - B = A \cap B'$.

2. $A \nabla B = (A \cup B) \cap (A \cap B)'$.

Selanjutnya kita akan bekerja dengan sistem matematika yang elemen-elemennya berupa himpunan, dan tertutup terhadap operasi ∇ dan $\cap$. Karena elemen-elemennya berupa himpunan, sistem matematika ini disebut **sistem himpunan.**

Untuk sebarang A, B anggota sistem himpunan $\mathscr{S}$, $A \cup B$ dapat dinyatakan sebagai $(A \nabla B) \nabla (A \cap B)$, sedangkan $A - B$ dapat dinyatakan sebagai $A \nabla (A \cap B)$. Dengan demikian sistem himpunan juga tertutup terhadap operasi $\cup$ dan $-$. Selain itu ketertutupan terhadap operasi $\cup$ dan $\cap$ membawa akibat bahwa $\mathscr{S}$ juga tertutup terhadap operasi $'$.

Sifat tertutup terhadap operasi $-$ mengakibatkan bahwa setiap sistem himpunan pasti memuat ϕ.

II.2. Operasi

Operasi yang dibicarakan di sini bukanlah antar sistem himpunan melainkan dalam suatu sistem himpunan. Dengan kata lain, operasi dikenakan pada elemen suatu sistem himpunan atau antara dua himpunan sebagaimana dinyatakan pada definisi II.1.1 dan definisi II.1.2.

Sifat-sifat pokok yang berlaku pada operasi-operasi tersebut sudah sangat dikenal, antara lain:

1. $A \cup B = B \cup A$ dan $A \cap B = B \cap A$.

   (sifat komutatif)

2. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$, dan

   $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

   (sifat asosiatif)

3. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$, dan

   $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

   (sifat distributif $\cup$ terhadap $\cap$ dan $\cap$ terhadap $\cup$)

4. $A \cup \phi = A$ dan $A \cap \phi = \phi$.

5. $A \cap X = A$ dan $A \cup X = X$, di mana X adalah semesta pembicaraan dan A, B, C masing-masing adalah himpunan bagian dari X.

II.3. Relasi

Dalam matematika, kata "**relasi** " digunakan untuk menunjuk suatu bentuk hubungan seperti lebih besar, lebih kecil, sama dengan, kongruen, anggota dan lain-lain. Relasi yang melibatkan suatu pasangan terurut disebut relasi biner. Tentu saja suatu relasi tidak dibatasi hanya pada pasangan terurut saja melainkan bisa lebih dari itu (n-tuple). Jika θ adalah suatu relasi biner pada sistem himpunan $\mathscr{S}$, maka untuk sebarang A dan B dalam $\mathscr{S}$, notasi $\langle A,B \rangle \in \theta$ atau $A\ \theta\ B$ dimaksudkan sebagai A berelasi θ dengan B.

Suatu relasi θ dalam sistem himpunan $\mathscr{S}$ disebut **refleksif** bila untuk sebarang $A \in \mathscr{S}$, berlaku $A\ \theta\ A$. Relasi ini disebut **simetrik** jika untuk sebarang A, B di $\mathscr{S}$ berlaku bila $A\ \theta\ B$ maka $B\ \theta\ A$. Relasi θ ini disebut **transitif** bila untuk setiap A, B, C di $\mathscr{S}$, dengan $A\ \theta\ B$ dan $B\ \theta\ C$ mengakibatkan $A\ \theta\ C$. Suatu relasi yang sekaligus memenuhi ketiga sifat diatas disebut **relasi ekuivalensi**.

Relasi ekuivalensi θ dalam sistem himpunan $\mathscr{S}$ akan membangkitkan klas-klas ekuivalen-θ. Misalkan A adalah sebarang anggota $\mathscr{S}$. Klas ekuivalen-θ yang berkaitan dengan A adalah keluarga semua himpunan B di $\mathscr{S}$ yang memenuhi $A\ \theta\ B$. Klas ekuivalen ini biasa diberi notasi $\bar{A}$. Notasi lain yang juga sering digunakan untuk $\bar{A}$ adalah $\underline{A}$ atau [A].

Pada setiap klas ekuivalen $\bar{A}$ dipenuhi dua sifat berikut ini:

1. $A \in \bar{A}$.
2. Untuk sebarang $B \in \mathscr{S}$, jika $B\ \theta\ A$ maka $\bar{B} = \bar{A}$.

Sifat pertama merupakan akibat langsung dari sifat refleksif relasi ekuivalensi θ. Sifat ini membawa akibat bahwa untuk setiap anggota $\mathscr{S}$ pasti terdapat suatu klas ekuivalen yang memuatnya.

Untuk menunjukkan berlakunya sifat yang kedua, misalkan $B \in \mathscr{S}$ dengan $B\ \theta\ A$. Jika $C \in \bar{B}$, yang berarti $B\ \theta\ C$ maka menurut sifat simetrik dan transitif dari θ diperoleh bahwa $A\ \theta\ C$ atau $C \in \bar{A}$, jadi $\bar{B} \subseteq \bar{A}$. Sebaliknya , jika C adalah sebarang anggota $\bar{A}$, berarti $A\ \theta\ C$. Karena θ bersifat transitif diperoleh $B\ \theta\ C$ atau $C \in \bar{B}$. Jadi $\bar{A} \subseteq \bar{B}$. Dengan demikian dipenuhi $\bar{B} = \bar{A}$.

Sifat yang kedua tersebut membawa konsekuensi bahwa masing-masing kelas ekuivalen adalah saling asing. Hal ini mengingat bahwa jika terdapat $C \in \bar{A}$ dan $C \in \bar{B}$, maka $\bar{A} = \bar{B} = \bar{C}$. Jadi, jika θ adalah relasi ekuivalensi dalam sistem himpunan $\mathscr{S}$, maka keluarga semua klas ekuivalen yang terbentuk merupakan partisi dari $\mathscr{S}$. Keluarga klas ekuivalen ini biasanya diberi notasi $\mathscr{S}/\theta$.

Contoh : Diberikan sistem himpunan $\mathscr{S}$ yang terdiri atas semua himpunan bagian dari himpunan $X \neq \phi$ dengan $n(X)$ berhingga, di mana $n(X)$ menyatakan banyaknya elemen X. Pada $\mathscr{S}$ diberikan relasi $\div$ yang didefinisikan sebagai berikut, untuk sebarang A, B di $\mathscr{S}$, $A \div B$ bila dan hanya bila $n(A) = n(B)$. Relasi $\div$ ini adalah suatu relasi ekuivalensi. Bahwa relasi $\div$ bersifat refleksif dan transitif dapat dilihat dengan jelas. Bila A, B, C adalah sebarang anggota $\mathscr{S}$ yang memenuhi $A \div B$ dan $B \div C$, ini berarti $n(A) = n(B)$ dan $n(B) = n(C)$ sehingga berlaku $n(A) = n(C)$ atau $A \div C$. Jadi relasi $\div$ bersifat transitif. Dengan demikian $\div$ adalah suatu relasi ekuivalensi.

II.4 Fungsi Himpunan.

Suatu fungsi ditentukan oleh daerah asal dan daerah hasil serta aturan untuk merelasikan setiap anggota daerah asal dengan tepat satu anggota daerah hasil. Fungsi himpunan didefinisikan sebagai fungsi dengan daerah asal berupa sistem himpunan. Secara khusus fungsi himpunan di sini dimaksudkan sebagai fungsi dengan daerah asal berupa sistem himpunan dan daerah hasil berupa himpunan semua bilangan real $\mathbb{R}$. Dengan kata lain, fungsi himpunan tersebut bernilai real.

Definisi II.4.1 : Fungsi himpunan f pada sistem himpunan $\mathcal{S}$ disebut **terjumlah berhingga** (*finitely additive*) jika untuk setiap $A \in \mathcal{S}$, $B \in \mathcal{S}$ dengan $A \cap B = \phi$ dipenuhi

$$f(A \cup B) = f(A) + f(B).$$

Definisi II.4.2 : Fungsi himpunan f pada sistem himpunan $\mathcal{S}$ disebut **monoton** jika untuk setiap $A, B \in \mathcal{S}$ dengan $A \subseteq B$, berlaku $f(A) \leq f(B)$.

Definisi tersebut membawa kepada kita bahwa fungsi himpunan f adalah monoton apabila untuk sebarang A $\in \mathscr{S}$, $f(A) \geq 0$.

BAB III

ALJABAR HIMPUNAN

III.1 Ring Himpunan

Pembicaraan mengenai ring secara umum diawali dengan suatu himpunan $R \neq \phi$ serta dua operasi biner " perjumlahan " dan " perkalian " yang didefinisikan pada R. Untuk kedua operasi tersebut digunakan notasi umum berturut-turut " + " dan " . ". R dikatakan tertutup terhadap operasi-operasi " + " dan " . " bila untuk sebarang a dan b dalam R, a + b dan a . b masing-masing menunjuk suatu elemen dalam R.

Selanjutnya, untuk sebarang himpunan R yang dilengkapi dengan dua operasi biner, kita berikan definisi ring sebagai berikut.

Definisi III.1.1 : Suatu himpunan $R \neq \phi$ yang tertutup terhadap operasi "+" dan "." disebut ring bila dipenuhi aksioma-aksioma sebagai berikut :

1. $(\forall a,b \in R)$, $a + b = b + a$.
2. $(\forall a,b,c \in R)$, $(a + b) + c = a + (b + c)$.
3. $(\exists \emptyset \in R)(\forall a \in R)$, $a + \emptyset = a$.
4. $(\forall a \in R)(\exists x \in R)$, $a + x = \emptyset$.
5. $(\forall a,b,c \in R)$, $(a . b) . c = a . (b . c)$.
6. $(\forall a,b,c \in R)$, $a . (b + c) = (a . b) + (a . c)$ dan $(b + c) . a = (b . c) + (c . a)$.

Dari definisi ring secara umum ini diturunkan teorema tentang **ring himpunan** sebagai berikut.

Teorema III.1.1 : Suatu sistem himpunan $\mathscr{S}$ yang tidak kosong dan tertutup terhadap operasi " ∇ " dan " $\cap$ " adalah ring.

Bukti :

1. Ambil sebarang A dan B dalam $\mathscr{S}$, maka :

$$
\begin{aligned}
A \nabla B &= (A \cup B) \cap (A \cap B)'. \\
&= (B \cup A) \cap (B \cap A)'. \\
&= B \nabla A.
\end{aligned}
$$

2. Ambil sebarang $A, B, C \in \mathscr{S}$, maka :

$$
\begin{aligned}
(A \nabla B) \nabla C &= [(A\cup B)\cap(A\cap B)'] \nabla C. \\
&= [(A\cup B)\cap(A'\cup B')] \nabla C. \\
&= \{[(A\cup B)\cap(A'\cup B')]\cup C\}\cap\{[(A\cup B)\cap(A'\cup B')\cap C\}'. \\
&= \{[(A\cup B)\cap(A'\cup B')]\cup C\}\cap\{[(A'\cap B')\cup(A\cap B)\cup C'\}. \\
&= [(A\cup B\cup C)\cap(A'\cup B'\cup C)]\cap\{[(A'\cup B)\cap(A\cup B')]\cup C'\}. \\
&= [(A\cup B\cup C)\cap(A'\cup B'\cup C)]\cap[(A'\cup B\cup C')\cap(A\cup B'\cup C')\}. \\
&= (A\cup B\cup C)\cap(A'\cup B'\cup C)\cap(A'\cup B\cup C')\cap(A\cup B'\cup C'). \\
&= [(A\cup B\cup C)\cap(A\cup B'\cup C')]\cap[(A'\cup B\cup C')\cap(A'\cup B'\cup C)]. \\
&= \{A\cup[(B\cup C)\cap(B'\cup C')]\}\cap\{A'\cup[(B\cup C')\cap(B'\cup C)]\}. \\
&= \{A\cup[(B\cup C)\cap(B\cup C')]\}\cap\{A'\cup[(B'\cup C)\cap(C'\cup B)]\}. \\
&= \{A\cup[(B\cup C)\cap(B\cup C')]\}\cap\{A'\cup[(B\cap C)\cup(C'\cap B')]\}. \\
&= \{A\cup[(B\cup C)\cap(B'\cup C')]\}\cap\{A\cap[(B'\cup C')\cap(C\cup B)]\}'. \\
&= \{A\cup[(B\cup C)\cap(B'\cup C')]\}\cap\{A\cap[(B\cup C)\cap(B'\cup C')]\}. \\
&= A \nabla \{(B\cup C)\cap(B'\cup C')].
\end{aligned}
$$

$= A \triangledown [(B \cup C) \cap (B \cap C)']$.

$= A \triangledown (B \triangledown C)$.

3. Ambil sebarang $A \in \mathscr{S}$, maka terdapat $\phi \in \mathscr{S}$,sdh :

$A \triangledown \phi = (A \cup \phi) - (A \cap \phi)$.

$= A - \phi$.

$= A$.

ϕ disebut elemen identitas terhadap operasi $\triangledown$.

4. $(\forall A \in \mathscr{S})$ maka $A \triangledown A = (A \cup A) \cap (A \cap A)'$.

$= A \cap A'$.

$= \phi$.

A disebut invers dari A terhadap operasi $\triangledown$.

5. Dari teori himpunan telah kita ketahui bahwa $\cap$ bersifat asosiatif.

6. Ambil sebarang A,B,C dalam $\mathscr{S}$, maka:

$A \cap (B \triangledown C) = A \cap [(B \cup C) \cap (B \cap C)']$.

$= A \cap [(B \cup C) \cap (B' \cup C')]$.

$= A \cap [(B \cap C') \cup (B' \cap C)]$.

$= A \cap [(B \cup C) \cap (B' \cup C')]$.

$= A \cap (B \cup C) \cap (B' \cup C')$.

$= A \cap (B \cup C) \cap (A' \cup B' \cup C')$.

$= [A \cap (B \cup C)] \cap [(A' \cup B') \cup (A' \cup C')]$.

$= \{ (A \cap B) \cup (A \cap C)] \cap [(A' \cup B') \cup (A' \cup C')]$.

$= [(A \cap B) \cup (A \cap C)] \cap [(A \cap B) \cap (A \cap C)']$.

$= (A \cap B) \triangledown (A \cap C)$.

Sementara itu,

$(B \triangledown C) \cap A = [(B \cup C) \cap (B \cap C)'] \cap A$.

$= [\ (B \cup C) \cap (B' \cup C')\ ] \cap A.$

$= [\ (B \cap C') \cup (B' \cap C)\ ] \cap A.$

$= [\ (B \cup C) \cap (B' \cup C')\ ] \cap A.$

$= (\ B \cup C\ ) \cap [\ (A' \cup B' \cup C') \cap A\ ].$

$= [\ (B \cup C) \cap A\ ] \cap [\ (B' \cup A') \cup (C' \cup A')\ ].$

$= [\ (B \cap A) \cup (C \cap A)\ ] \cap [\ (B \cap A) \cap (C \cap A)\ ]'.$

$= (B \cap A\ ) \nabla (\ C \cap A\ ).$

Terbukti sistem himpunan $\mathcal{S}$ yang tertutup terhadap operasi " ∇ " dan " $\cap$ " adalah ring. ∎

Karena elemen-elemen dari ring $\mathcal{S}$ ini berupa himpunan, maka ring ini disebut **ring himpunan**. Dengan demikian ring himpunan dapat didefinisikan sebagai berikut :

Definisi III.1.2 : Suatu sistem himpunan $\mathcal{S} \neq \phi$ disebut ring himpunan bila $\mathcal{S}$ tertutup terhadap operasi ∇ dan $\cap$.

Definisi III.1.3 : Suatu elemen $E \in \mathcal{S}$ disebut elemen satuan bila untuk semua $A \in \mathcal{S}$ berlaku $E \cap A = A$.

Teorema III.1.2 : Jika suatu ring himpunan $\mathcal{R}$ memuat elemen satuan, maka elemen satuan itu tunggal.

Bukti : Misalkan E_1 dan E_2 adalah elemen satuan dalam $\mathcal{R}$. Maka berlaku $E_1 \cap E_2 = E_1$ dan $E_2 \cap E_1 = E_2$. Tetapi, karena $\cap$ bersifat komutatif, maka diperoleh

$E_1 \cap E_2 = E_2 \cap E_1$, dan $E_1 = E_2$. ∎

contoh 1 : Sistem himpunan $\mathscr{S} = \{ \phi, A \}$ dengan $A \neq \phi$ adalah ring dengan elemen satuan $E = A$.

Ketertutupan $\mathscr{S}$ terhadap operasi $\triangledown$ dan $\cap$ dapat dilihat pada tabel berikut.

$\triangledown$	ϕ	A
ϕ	ϕ	A
A	A	ϕ

tabel-1

$\cap$	ϕ	A
ϕ	ϕ	ϕ
A	ϕ	A

tabel-2

Dari tabel-2 nampak bahwa A merupakan elemen satuan di $\mathscr{S}$.

contoh 2 : Sistem himpunan $\mathscr{S}$ yang terdiri atas semua himpunan bagian garis real yang terbatas adalah ring yang tidak memuat elemen satuan. Hal ini dapat ditunjukkan sebagai berikut.

Jika $A \in \mathscr{S}$, maka $\exists\, x \in \mathbb{R}$ sedemikian hingga $\forall\, a \in A$, berlaku $|x| \geq |a|$. Jika $B \in \mathscr{S}$, maka $\exists\, y \in \mathbb{R}$ sedemikian hingga $\forall\, b \in B$ berlaku $|y| \geq |b|$.

$A \cup B = \{ c \mid c \in A$ atau $c \in B \}$, sehingga untuk sebarang $c \in (A \cup B)$ berlaku $c \leq$ maks $\{ |x|, |y| \}$.

Karena $(A \triangledown B) \subset (A \cup B)$, maka $A \triangledown B$ terbatas sehingga $A \triangledown B$ anggota $\mathscr{S}$. Sedangkan $A \cap B$ adalah himpunan bagian dari A, maka $A \cap B$ terbatas, jadi $(A \cap B) \in \mathscr{S}$.

selanjutnya, misalkan E adalah sebarang anggota $\mathscr{S}$. Maka $\exists\, z \in \mathbb{R}$ sedemikian hingga $\forall\, e \in E$ dipenuhi $|z| \geq |e|$. Pandang himpunan $A = \{ |z| + 1 \}$. Nampak bahwa $E \cap A = \phi$. Jadi untuk sebarang $E \in \mathscr{S}$ pasti terdapat $A \in \mathscr{S}$ sedemikian hingga $E \cap A \neq A$. Dengan demikian setiap anggota $\mathscr{S}$ tidak mungkin menjadi elemen satuan.

Teorema III.1.3 : Jika A adalah suatu himpunan indeks dan $\mathcal{R}_\alpha$ dengan $\alpha \in A$ adalah ring himpunan, maka $\mathcal{R} = \bigcap_{\alpha\in A} \mathcal{R}_\alpha$ juga merupakan ring himpunan.

Bukti : Misalkan $\mathcal{P} = \bigcap_{\alpha\in A} \mathcal{R}_\alpha$.

Untuk setiap $\alpha \in A$, $\phi \in \mathcal{R}_\alpha$, sehingga $\mathcal{P} \neq \phi$. Kemudian ambil sebarang $B, C \in \mathcal{P}$, maka :

$$(\forall \alpha \in A),\ B \in \mathcal{R}_\alpha \text{ dan } C \in \mathcal{R}_\alpha$$

Karena $\mathcal{R}_\alpha$ ring , maka : $C \triangledown B \in \mathcal{R}_\alpha$ dan $C \cap B \in \mathcal{R}_\alpha$ sehingga $C \triangledown B \in P$ dan $C \cap B \in \mathcal{P}$. $\mathcal{P} = \bigcap_{\alpha\in A} \mathcal{R}_\alpha$ adalah ring.∎

Dari suatu sistem himpunan $\mathcal{S}$ dapat dibangun suatu ring terkecil yang memuat $\mathcal{S}$, sebagaimana ditunjukkan dalam teorema berikut ini.

Teorema III.1.4 : Jika $\mathcal{S}$ adalah sistem himpunan yang tak kosong, maka terdapat ring $\mathcal{R}(\mathcal{S})$ yang memuat $\mathcal{S}$ dan termuat dalam setiap ring yang memuat $\mathcal{S}$. Ring $\mathcal{R}(\mathcal{S})$ yang demikian adalah tunggal.

Bukti : Bentuk himpunan $X = \bigcup_{A\in\mathcal{S}} A$, kemudian bangun $\mathcal{M}(X)$ yang anggotanya semua himpunan bagian dari X. Kemudian Kumpulkan semua ring yang termuat dalam $\mathcal{M}(X)$ dan memuat $\mathcal{S}$. Misalkan,

$$\Sigma = \{ \mathcal{R} \mid \mathcal{R} \text{ ring }, \mathcal{R} \subseteq \mathcal{M}(X) \text{ dan } \mathcal{S} \subseteq \mathcal{R} \}$$

Menurut teorema III.1.3, $\mathcal{R}(\mathcal{S}) = \bigcap_{\mathcal{R}\in\Sigma} \mathcal{R}$, adalah ring. Jika $\mathcal{R}^*$ adalah sebarang ring yang memuat $\mathcal{S}$, maka untuk setiap $\mathcal{R} \in \Sigma$ berlaku $\mathcal{R}(\mathcal{S}) \subset \mathcal{R} \subset \mathcal{R}^*$, dengan demikian $\mathcal{R}(\mathcal{S})$ adalah ring terkecil yang memuat $\mathcal{S}$.

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa ring terkecil yang memuat $\mathcal{S}$ adalah tunggal.

Misalkan $\mathcal{R}_1(\mathcal{S})$ dan $\mathcal{R}_2(\mathcal{S})$ adalah ring terkecil yang memuat $\mathcal{S}$. Karena $\mathcal{R}_1(\mathcal{S})$ ring yang memuat $\mathcal{S}$, maka $\mathcal{R}_2(\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{R}_1(\mathcal{S})$. Dengan argumen serupa kita akan memperoleh $\mathcal{R}_1(\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{R}_2(\mathcal{S})$. Jadi $\mathcal{R}_1(\mathcal{S}) = \mathcal{R}_2(\mathcal{S})$, ring terkecil yang memuat $\mathcal{S}$ adalah tunggal.∎

Pembicaraan mengenai ring akan kita akhiri dengan memperkenalkan pengertian ring-σ dan ring-δ.

Definisi III.1.3 : Bila $\{ A_1, A_2, \ldots \}$ adalah keluarga terbilang anggota-anggoata ring himpunan $\mathcal{R}$, maka $\mathcal{R}$ disebut ring-σ bila dipenuhi

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{R}.$$

Definisi III.1.4 : Jika $\{ A_1, A_2, \ldots \}$ adalah keluarga terbilang anggota-anggota ring himpunan $\mathcal{R}$, maka $\mathcal{R}$ disebut ring-δ bila dipenuhi

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{R}.$$

Contoh 2 di atas merupakan salah satu ring yang bukan merupakan ring-δ atau ring-σ.

III.2 Semiring Himpunan

Definisi III.2.1 : Suatu sistem himpunan $\mathcal{S} \neq \phi$ disebut **semiring** bila dipenuhi

1. $\phi \in \mathcal{S}$.
2. $(\forall\ A,B \in \mathcal{S}),\ (A \cap B) \in \mathcal{S}$.
3. Jika $A \in \mathcal{S}$, $A_1 \in \mathcal{S}$ dan $A_1 \subseteq A$, maka

   $(\exists\ A_2, A_3, \ldots, A_n \in \mathcal{S})$, $A_i \cap A_j = \phi$ untuk $i \neq j$ dan $1 \leq i,j \leq n$ sedemikian hingga

$$A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$$

Jika untuk suatu himpunan A terdapat himpunan A_1, A_2, ..., A_n sedemikian hingga $A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots. \cup A_n$, maka $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ disebut ekspansi berhingga dari himpunan A.

Contoh 3: Setiap ring adalah semiring, sebab jika $\mathcal{R}$ adalah ring maka $\mathcal{R} \neq \phi$ dan $\phi \in \mathcal{R}$. Untuk sebarang A dan B anggota $\mathcal{R}$, karena $\mathcal{R}$ ring jelas berlaku $A \cap B \in \mathcal{R}$. Kemudian ambil sebarang $A \in \mathcal{R}$.

Jika $A_1 \in \mathcal{R}$ dan $A_1 \subseteq A$, maka $A = A_1 \cup (A - A_1)$.

$$= A_1 \cup A_2.$$

dimana $A_2 = (A - A_1) \in \mathcal{R}$, sebab $\mathcal{R}$ ring.

Teorema III.2.1 : Jika A, $A_1, A_2, \ldots, A_n$ adalah anggota semiring $\mathscr{S}$ dan $A_i \cap A_j = \phi$ untuk $i \neq j$, maka terdapat ekspansi berhingga dari A dengan $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sebagai pangkal.

$$A = \bigcup_{k=1}^{s} A_k, \text{ di mana } A_k \in \mathscr{S}, \quad A_k \cap A_l = \phi \text{ untuk } k \neq l$$
$$k, l = 1, 2, \ldots, s; \quad s \geq n.$$

Bukti : Dibuktikan dengan induksi matematis. Pertama, perhatikan bahwa jika diambil $A_1 = A$ maka berlaku $A = \bigcup_{k=1}^{s} A_k$, di mana $A_k = A$ untuk $1 \leq k \leq s$, $s > 1$. Kemudian andaikan teorema benar untuk $n = m > 1$, akan ditunjukkan teorema berlaku pula untuk $n = m + 1$.

Misalkan, $A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m \cup B_1 \cup \ldots \cup B_p$, dengan $A_i, B_q \in \mathscr{S}$; A_i, B_q himpunan bagian saling asing dari A untuk $1 \leq i \leq m$ dan $1 \leq q \leq p$. Untuk setiap q tersebut, misalkan $B_{q1} = A_{m+1} \cap B_q$. Dari definisi semiring, B_q dapat diekspansikan secara berhingga sebagai

$B_q = B_{q1} \cup B_{q2} \cup \ldots \cup B_{qr}$ dengan $B_{qj} \in \mathscr{S}$, $B_{qj} \subseteq B_q$ dan $B_{qi} \cap B_{qj} = \phi$ untuk $i \neq j$, $1 \leq i,j \leq r_q$. Dengan demikian ekspansi berhingga dari A dapat dituliskan sebagai berikut

$$A = A_1 \cup \ldots \cup A_m \cup B_{11} \cup \ldots \cup B_{1r} \cup \ldots \cup B_{p1} \cup \ldots \cup B_{pr_p}$$

$$= A_1 \cup \ldots \cup A_m \cup (A_{m+1} \cap B_1) \cup B_{12} \cup \ldots \cup B_{1r_1} \cup \ldots \cup$$
$$(A_{m+1} \cap B_{p1}) \cup \ldots \cup B_{p2} \cup \ldots \cup B_{pr_p}.$$

$$= A_1 \cup \ldots \cup A_m \cup A_{m+1} \cup \bigcup_{q=1}^{p} \Big(\bigcup_{j=2}^{r_q} B \Big).$$

Hal ini memperlihatkan bahwa teorema benar untuk $n = m + 1$ Karena m sebarang maka teorema berlaku untuk n manapun.∎

Teorema III.2.2 : Jika A_1 , A_2 , ... , A_n sistem berhingga yang termuat dalam semiring $\mathscr{S}$, maka terdapat sistem berhingga $B_1, \dots, B_t$ di mana $B_i \cap B_t = \phi$ untuk $i \neq t$ yang juga anggota $\mathscr{S}$ sehingga setiap A_k dapat diekspansikan secara berhingga terhadap B_s, yaitu :

$$A_k = \bigcup_{s \in M_k} B_s \text{ dengan } M_k \subseteq \{ 1, 2, \dots, t \}$$

Bukti : Dibuktikan dengan induksi matematis.

Untuk $n = 1$, dapat diambil $A_1 = B_1$, jadi teorema berlaku untuk $n = 1$. Andaikan teorema benar untuk $n = m$, akan ditunjukkan bahwa teotema berlaku untuk $n = m + 1$.

Jika $B_1, B_2, \dots, B_t$ adalah anggota $\mathscr{S}$ yang memenuhi teorema terhadap $A_1, A_2, \dots, A_t$, dan $B_{s1} = A_{m+1} \cap B_s$, maka dari teorema III.2.1 diperoleh :

$$A = \left(\bigcup_{s=1}^{t} B_{s1} \right) \cup \left(\bigcup_{p=1}^{q} B_{p'} \right), \text{ di mana } B_{p'} \in \mathscr{S}$$

$B_{p'}$ diambil sedemikian hingga $B_{p'} \cap \left(\bigcup_{s=1}^{t} B_s \right) = \phi$ untuk $p = 1, 2, \dots, q$.

Selain itu, untuk setiap $s = 1, 2, \dots, t$, B_s dapat diekspansikan secara berhingga menjadi

$$B_s = B_{s1} \cup B_{s2} \cup \dots \cup B_{sr_s}$$

sehingga, jika $M_k \subseteq \{ 1, 2, \dots, t \}$ untuk $k = 1, 2, \dots, m$ berlaku $A_k = \bigcup_{s \in M_k} \left(\bigcup_{j=1}^{r_s} B_{sj} \right)$.

Kita bangun himpunan indeks $M = \{ 1.1, \dots, 1.t, 1',$

..., q', 1.2, ..., $1.r_1$, 2.2, 2.3, ..., $2r_2$, ..., t_2, ..., t_{r_t}}. Dari ekspansi A_k, k = 1, 2, 3,..., m + 1 tampak bahwa $A_k = \bigcup_{i \in M_{k'}} B_i$ dengan $M_{k'} \subseteq M$. Jadi teorema berlaku untuk n = m + 1. Karena m sebarang, maka teorema berlaku untuk n yang manapun.∎

Definisi III.2.2 : Jika $\mathscr{S}$ adalah semiring atas semua himpunan bagian $X \neq \phi$ maka $A \subseteq X$ disebut himpunan-σ di $\mathscr{S}$ bila terdapat barisan himpunan saling asing $\langle A_n \rangle$ dalam $\mathscr{S}$ sedemikian hingga $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

III.3 Aljabar Boole.

III.3.1 Definisi Aljabar Boole.

Aljabar Boole adalah 6-tuple (B,∪,∩,',Ø,1) di mana B adalah suatu himpunan tidak kosong yang tertutup terhadap operasi biner ∪ dan ∩ pada B yang masing-masing disebut " gabungan " dan " irisan " , serta tertutup terhadap operasi uner ' yang disebut komplemen. Ø dan 1 adalah elemen-elemen dalam B yang masing-masing disebut elemen identitas dan elemen satuan di B.

Operasi-operasi pada himpunan B tersebut memenuhi aksioma-aksioma berikut :

1. $(\forall a,b,c \in B)$, $a \cup (b \cup c) = (a \cup b) \cup c$.
   $a \cap (b \cap c) = (a \cap b) \cap c$.
2. $(\forall a,b \in B)$, $a \cup b = b \cup a$ dan $a \cap b = b \cap a$.

3. $(\forall a,b,c \in B)$, $a \cup (b \cap c) = (a \cup b)\cap(a \cup c)$

   $(\forall a,b,c \in B)$, $a \cap (b \cup c) = (a \cap b)\cup(a \cap c)$

4. $(\forall a \in B)$, $a \cup \emptyset = a$ dan $a \cap 1 = a$.

5. $(\forall a \in B)(\exists a' \in B)$, $a \cup a' = 1$ dan $a \cap a' = \emptyset$.

III.3.1 Beberapa sifat dasar pada Aljabar Boole.

Pembicaraan tentang sifat-sifat aljabar Boole akan dimulai dengan membicarakan prinsip dualitas pada aljabar Boole. Sifat-sifat yang ada pada aljabar Boole merupakan pasangan sifat yang saling dual, yaitu antara sifat yang melibatkan operasi $\cap$ dengan sifat yang melibatkan operasi $\cup$, dan antara elemen $\emptyset$ dan elemen 1. Dari pernyataan yang diberikan akan diperoleh pernyataan lain dengan mengganti $\cup$ dengan $\cap$, $\cap$ dengan $\cup$, 1 dengan $\emptyset$, dan $\emptyset$ dengan 1, sehingga didapat pasangan pernyataan yang saling dual.

Teorema III.3.1.1 : Bila $\langle B,\cup,\cap,',\emptyset,1 \rangle$ adalah suatu aljabar Boole, maka berlaku :

a. Elemen identitas dan elemen satuan dalam B masing-masing adalah tunggal;

b. Komplemen dari setiap anggota B adalah tunggal;

c. $(\forall a \in B)$, $(a')' = a$;

d. $\emptyset' = 1$ dan $1' = \emptyset$;

e. $(\forall a \in B)$, $a \cup a = a$ dan $a \cap a = a$;

f. $(\forall a \in B)$, $a \cup 1 = 1$ dan $a \cap \emptyset = \emptyset$;

g. $(\forall a,b \in B)$, $a \cup (a \cap b) = a$, dan

$$a \cap (a \cup b) = a;$$

h. $(\forall a,b \in B)$, $(a \cup b)' = a' \cap b'$, dan

$$(a \cap b)' = a' \cup b'.$$

Bukti :

a. i. Andaikan $\emptyset_1$ dan $\emptyset_2$ adalah elemen identitas dalam B. Menurut aksioma 4 berlaku $\emptyset_1 \cup \emptyset_2 = \emptyset_1$ dan $\emptyset_2 \cup \emptyset_1 = \emptyset_1$ sehingga menggunakan aksioma 2 diperoleh $\emptyset_1 = \emptyset_2$. Jadi elemen identitas adalah tunggal.

ii. Andaikan 1_1 dan 1_2 adalah elemen satuan dalam B. Menurut aksioma 4 berlaku $1_1 \cap 1_2 = 1_1$ dan $1_2 \cap 1_1 = 1_2$ sehingga menggunakan aksioma 2 diperoleh $1_1 = 1_2$. Jadi elemen satuan dalam B adalah tunggal.

b. Andaikan a_1' dan a_2' adalah komplemen dari $a \in B$. Akan ditunjukkan bahwa $a_1' = a_2'$.

$a_1' = a_1' \cup \emptyset$. aksioma 4

$= a_1' \cup (a \cap a_2')$. aksioma 5

$= (a_1' \cup a) \cap (a_1' \cup a_2')$. aksioma 3

$= (a \cup a_1') \cap (a_1' \cup a_2')$. aksioma 2

$= 1 \cap (a_1' \cup a_2')$. aksioma 5

$= (a_1' \cup a_2') \cap 1$. aksioma 5

$= a_1' \cup a_2'$. aksioma 4

$a_2' = a_2' \cup \emptyset$. aksioma 4

$= a_2' \cup (a \cap a_1')$. aksioma 5

$= (a_2' \cup a) \cap (a_2' \cup a_1')$. aksioma 3

$= (a \cup a_2') \cap (a_2' \cup a_1')$. aksioma 2

$= 1 \cap (a_2' \cup a_1').$ aksioma 5

$= (a_2' \cup a_1') \cap 1.$ aksioma 2

$= a_2' \cup a_1'.$ aksioma 4

Mengingat aksioma 2 akan diperoleh $a_1' = a_2'$. Dengan demikian komplemen dari setiap anggota B adalah tunggal.

c. Aksioma 5 mengatakan bahwa $(\forall a \in B)$, $a \cup a' = 1$. Karena $a' \in B$, maka $a' \cup (a')' = 1$. Menggunakan aksioma 2 dan hasil b kita peroleh $a = (a')'$.

d. Menurut aksioma 5, $a \cup a' = 1$. $a \cup a'$ dapat kita nyatakan sebagai $(a' \cap a'')'$, sehingga dengan menggunakan hasil c dan aksioma 5 akan kita peroleh hasil $\emptyset' = 1$.

Dengan penalaran serupa untuk $a \cap a' = \emptyset$ akan kita peroleh bahwa $1' = \emptyset$.

e. Untuk sebarang $a \in B$ kita mempunyai hubungan :

i. $a \cup a = (a \cup a) \cap 1.$ aksioma 4

$= (a \cup a) \cap (a \cup a').$ aksioma 5

$= a \cup (a \cap a').$ aksioma 3

$= a \cup \emptyset.$ aksioma 5

$= a.$ aksioma 4

ii. $a \cap a = (a \cap a) \cup \emptyset.$ aksioma 4

$= (a \cap a) \cup (a \cap a').$ aksioma 5

$= a \cap (a \cup a').$ aksioma 3

$= a \cap 1.$ aksioma 5

$= a.$ aksioma 4

f. Untuk setiap $a \in B$ kita mempunyai hubungan,

i. $a \cup 1 = (a \cup 1) \cap 1.$ aksioma 4

$= (a \cup 1) \cap (a \cup a').$ aksioma 5

$= a \cup (1 \cap a').$ aksioma 3

$= a \cup (a' \cap 1).$ aksioma 2

$= a \cup a'.$ aksioma 4

$= 1.$ aksioma 5

ii. $a \cap \emptyset = (a \cap \emptyset) \cup \emptyset.$ aksioma 4

$= (a \cap \emptyset) \cup (a \cap a').$ aksioma 5

$= a \cap (\emptyset \cup a').$ aksioma 3

$= a \cap (a' \cup \emptyset)$ aksioma 2

$= a \cap a'.$ aksioma 4

$= \emptyset.$ aksioma 5

g.i. $a \cup (a \cap b) = (a \cap 1) \cup (a \cap b).$ aksioma 4

$= a \cap (1 \cup b).$ aksioma 3

$= a \cap 1.$ teor. III.3.1.1(f)

$= a.$ aksioma 4

ii. $a \cap (a \cup b) = (a \cup \emptyset) \cap (a \cup b).$ aksioma 4

$= a \cup (\emptyset \cap b).$ aksioma 3

$= a \cup (b \cap \emptyset).$ aksioma 2

$= a \cup \emptyset.$ teor. III.2.1.1(f)

$= a.$ aksioma 4

h. Untuk setiap a dan b anggota B kita mempunyai hubungan

i. $(a \cup b) \cup (a' \cap b') = (a \cup b \cup a') \cap (a \cup b \cup b')$. aksioma 3

$= (a \cup a' \cup b) \cap (a \cup 1)$. aksioma 2

$= (1 \cup b) \cap (a \cup 1)$. aksioma 5

$= 1 \cap 1$. teor.III.3.1.1(f)

$= 1$. aksioma 4

maka menurut aksioma 5, $(a' \cap b')$ adalah komplemem dari $(a \cup b)$. Tetapi komplemen dari $(a \cup b)$ adalah $(a \cup b)'$. Karena komplemen adalah tunggal, maka

$$(\forall a,b \in B),\ (a \cup b)' = (a' \cap b').$$

ii. $(a \cap b) \cap (a' \cup b') = (a \cap b \cap a') \cup (a \cap b \cap b')$. aksioma 3

$= (a \cap a' \cap b) \cup (a \cap b \cap b')$. aksioma 2

$= (\emptyset \cap b) \cup (a \cap \emptyset)$. aksioma 5

$= \emptyset \cup \emptyset$. teor.III.2.1.1(f)

$= \emptyset$. aksioma 4

Maka menurut aksioma 5, $(a' \cup b')$ adalah komplemen dari $(a \cap b)$. Tetapi komplemen dari $(a \cap b)$ adalah $a \cap b)'$. Karena komplemen adalah tunggal maka:

$$(\forall a,b \in B),\ (a \cap b)' = a' \cup b'. \blacksquare$$

Sebarang aljabar Boole $(B, \cup, \cap, ', \emptyset, 1)$ memuat paling sedikit dua elemen, yaitu $\emptyset$ dan 1, sementara hukum-hukum yang melibatkan operasi $\cup$ dapat dinyatakan dengan $\cap$ dan $'$. Teorema berikut akan menunjukkan formulasi yang lebih sederhana dari aljabar Boole.

Teorema III.3.1.2 : Misalkan B adalah himpunan dengan paling sedikit dua elemen, B tertutup terhadap operasi $\cap$ dan $'$. (B, $\cap$, $'$) adalah aljabar Boole bila dipenuhi :

1. ($\forall$ a,b $\in$ B), a $\cap$ b = b $\cap$ a.
2. ($\forall$ a,b,c $\in$ B), a $\cap$ (b $\cap$ c) = (a $\cap$ b) $\cap$ c.
3. ($\forall$ a,b $\in$ B) bila ($\exists$ c $\in$ B) sedemikian hingga a $\cap$ b$'$ = c $\cap$ c$'$ maka a $\cap$ b = a.
4. ($\forall$ a,b $\in$ B) bila a $\cap$ b = a maka ($\forall$ c $\in$ B) a $\cap$ b$'$ = c $\cap$ c$'$.

Bukti teorema ini memerlukan ketelitian dan tidak disajikan di sini.

III.3.3 Relasi Kongruensi Pada Aljabar Boole.

Definisi III.3.3.1 : Relasi kongruensi θ pada aljabar Boole B adalah relasi ekuivalensi pada B sedemikian hingga untuk sebarang a,b $\in$ B berlaku

1. Jika a θ b maka ($\forall$c $\in$ B), a $\cap$ c θ b $\cap$ c.
2. Jika a θ b maka a$'$ θ b$'$.

Dari definisi ini dapat diturunkan sifat yang ketiga dari relasi kongruensi pada B sebagai berikut :

3a. Untuk sebarang a, b, c, d anggota B, jika a θ c dan b θ d maka (a $\cap$ b) θ (c $\cap$ d).

b. Untuk sebarang a, b, c, d anggota B, jika a θ c dan b θ d maka (a $\cup$ b) θ (c $\cup$ d).

Berlakunya sifat ketiga ditunjukkan sebagai berikut, misalkan a,b,c,d $\in$ B dengan a θ c dan b θ d. Dari sifat 1 diperoleh $(a \cap b)\ \theta\ (c \cap b)$ dan $(b \cap c)\ \theta\ (d \cap c)$. Dengan menggunakan sifat komutatif operasi "$\cap$" dan sifat transitif relasi ekuivalensi θ, maka diperoleh $(a \cap b)\ \theta\ (c \cap d)$. Sifat 3a terbukti berlaku.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa untuk a, b, c, d tersebut berlaku pula hubungan $(a \cup b)\ \theta\ (c \cup d)$. Dari sifat 2 kita tahu bahwa $a'\ \theta\ c'$ dan $b'\ \theta\ d'$, sehingga mengingat sifat refleksif relasi ekuivalensi θ maka berlaku

$$(a' \cap b')\ \theta\ (c' \cap b') \text{ dan } (b' \cap c')\ \theta\ (d' \cap c').$$

Dengan menggunakan sifat 2 sekali lagi akan diperoleh

$$(a \cup b)\ \theta\ (c \cup b) \text{ dan } (b \cup c)\ \theta\ (d \cup c).$$

mengingat sifat komutatif operasi "$\cup$" dan sifat transitif relasi ekuivalensi θ maka akan diperoleh $(a \cup b)\ \theta\ (c \cup d)$.

Relasi kongruensi θ pada aljabar Boole B menimbulkan partisi- partisi pada B. Bila B/θ adalah keluarga semua klas ekuivalen-θ dan $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, $\bar{d}$ adalah klas-klas ekuivalen-θ di B/θ dengan $\bar{a} = \bar{c}$ dan $\bar{b} = \bar{d}$, maka sifat 3a mengakibatkan $\overline{a \cap b} = \overline{c \cap d}$. Dengan demikian relasi $\{ \langle (\bar{a}, \bar{b}), \overline{a \cap b} \rangle \} \mid \bar{a}, \bar{b} \in B/\theta \}$ adalah suatu fungsi dari $B/\theta \times B/\theta$ ke B/θ. Operasi pada B/θ yang didefinisikan oleh fungsi tersebut diberi notasi "$\cap$" pula. Dengan demikian, jika $\bar{a}$, $\bar{b} \in B/\theta$ maka $\bar{a} \cap \bar{b} = \overline{a \cap b}$.

Selain itu, jika a, b $\in B/\theta$ dengan $\bar{a} = \bar{b}$ maka sifat 2 mengakibatkan $\overline{a'} = \overline{b'}$. Jadi, relasi $\{ \langle \bar{a}, \overline{a'} \rangle \mid a \in B/\theta \}$ adalah suatu fungsi dari B/θ ke B/θ. Operasi yang didefinisikan oleh fungsi ini kita beri notasi "′". Dengan demikian, bila $\bar{a} \in B/\theta$, maka berlaku $\bar{a}' = \overline{a'}$.

Teorema III.3.3.1 : Bila θ adalah relasi kongruensi pada aljabar Boole (B, $\cap$, ′) maka (B/θ, $\cap$, ′) adalah aljabar Boole.

Bukti : Ambil sebarang $\bar{a}$, $\bar{b} \in B/\theta$. Mengingat sifat simetrik θ dan sifat 3a, akan diperoleh hubungan berikut, $(a \cap b)\ \theta\ (b \cap a)$, sehingga $\overline{a \cap b} = \overline{b \cap a}$, dan $\bar{a} \cap \bar{b} = \bar{b} \cap \bar{a}$. Terbukti, $(\forall\ \bar{a}, \bar{b} \in B/\theta)$, $\bar{a} \cap \bar{b} = \bar{b} \cap \bar{a}$.

Ambil sebarang $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c} \in B/\theta$. Karena θ bersifat refleksif dan operasi $\cap$ bersifat asosiatif di B, maka berlaku $[\ a \cap (b \cap c)]\ \theta\ [(a \cap b) \cap c\ ]$, berarti $a \cap (b \cap c) = (a \cap b) \cap c$. Sehingga dari definisi operasi "$\cap$" di B/θ kita peroleh $\bar{a} \cap (\bar{b} \cap \bar{c}) = (\bar{a} \cap \bar{b}) \cap \bar{c}$. Terbukti, $(\forall\ \bar{a}, \bar{b} \in B/\theta)$, $\bar{a} \cap (\bar{b} \cap \bar{c}) = (\bar{a} \cap \bar{b}) \cap \bar{c}$.

Ambil sebarang $\bar{a}$, $\bar{b} \in B/\theta$, dan andaikan $\bar{c} \in B/\theta$ sedemikian hingga $\bar{a} \cap \bar{b}' = \bar{c} \cap \bar{c}'$, akan diperlihatkan bahwa $\bar{a} \cap \bar{b} = \bar{a}$. Dari definisi operasi "$\cap$" dan "′" di B/θ, kita mempunyai hubungan $\overline{a \cap b'} = \overline{c \cap c'}$, yaitu $(a \cap b')\ \theta\ (c \cap c')$. Sehingga menurut sifat 2 relasi kongruensi θ diperoleh $(a \cap b')'\ \theta\ (c \cap c')'$, yaitu $(a' \cup b)\ \theta\ 1$. Selanjutnya menggunakan sifat 1 akan kita peroleh hasil $[(a' \cup b) \cap a]\ \theta\ (1 \cap a)$, yaitu $(a \cap b)\ \theta\ a$ yang berarti $a \cap b = a$. Terbukti,untuk sebarang $\bar{a}$, $\bar{b}$ di B/θ, jika $(\exists\ \bar{c} \in B/\theta)$, $\bar{a} \cap \bar{b}' = \bar{c} \cap \bar{c}'$ maka $\bar{a} \cap \bar{b} = \bar{a}$.

Misalkan $\bar{a}$, $\bar{b} \in B/\theta$ yang memenuhi $\bar{a} \cap \bar{b} = \bar{a}$. Akan ditunjukkan bahwa $(\forall\ \bar{c} \in B/\theta)$berlaku $\bar{a} \cap \bar{b}' = \bar{c} \cap \bar{c}'$. Untuk $\bar{a}$ dan $\bar{b}$ tersebut, berlaku $(a \cap b)\ \theta\ a$. Dari sifat 1 akan diperoleh $[(a \cap b) \cap \phi]\ \theta\ (a \cap \phi)$, yaitu $[(a \cap b) \cap (b \cap b')]\ \theta\ (c \cap c')$ atau $[(a \cap b) \cap b']\ \theta\ (c \cap c')$ untuk sebarang $c \in B$. Jadi kita memperoleh hubungan $[(a \cap b) \cap b']\ \theta\ (c \cap c')$. Karena $\bar{a} \cap \bar{b} = \bar{a}$, maka berlaku $\bar{a} \cap \bar{b}' = \bar{c} \cap \bar{c}'$. Dengan demikian terbukti $(B/\theta, \cap, ')$ adalah suatu aljabar Boole.∎

III.4 Aljabar Himpunan

Definisi III.4.1 : Sistem himpunan $\mathscr{S}$ yang terdiri atas himpunan-himpunan bagian dari himpunan $X \neq \phi$ disebut **aljabar himpunan** bila $\mathscr{S}$ tertutup terhadap operasi irisan "$\cap$" dan komplemen relatif "$'$" terhadap X.

Dari definisi di atas tampak bahwa setiap aljabar himpunan yang dibangun dari himpunan X pasti memuat ϕ dan X. Hal ini mengingat bahwa untuk sebarang $A \in \mathscr{S}$ maka $A' \in \mathscr{S}$, sehingga dari sifat tertutup terhadap operasi $\cap$ berlaku $A \cap A' = \phi \in \mathscr{S}$. Dengan menggunakan sifat tertutup terhadap operasi $'$ di $\mathscr{S}$ akan kita peroleh $\phi' = X \in \mathscr{S}$. ϕ ini biasa dinotasikan dengan Ø dan disebut elemen identitas dalam $\mathscr{S}$, sedangkan X biasa diberi notasi 1 dan disebut elemen satuan dalam $\mathscr{S}$.

Jika kita melihat kembali definisi ring himpunan, tampak bahwa aljabar himpunan adalah suatu ring himpunan yang memuat elemen satuan. Selain itu dapat pula ditunjukkan bahwa aljabar himpunan $\mathscr{A} \neq \phi$ memenuhi aksioma-aksioma aljabar Boole. Jika diambil "$\cup$" dan "$\cap$" masing-masing adalah operasi biner gabungan dan irisan himpunan, " ' " adalah operasi uner komplemen relatif terhadap himpunan semestanya, Ø dan 1 masing-masing adalah ϕ dan X, maka pada aljabar himpunan $\mathscr{A}$ yang terdiri atas himpunan-himpunan bagian dari himpunan $X \neq \phi$ dipenuhi :

1. $(\forall A,B,C \in \mathscr{A})$, $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$, dan
   $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$;
2. $(\forall A,B \in \mathscr{A})$, $A \cup B = B \cup A$ dan $A \cap B = B \cap A$;
3. $(\forall A,B,C \in \mathscr{A})$, $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$,
   dan $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;
4. $(\forall A \in \mathscr{A})$, $A \cup \phi = A$ dan $A \cap X = A$;
5. $(\forall A \in \mathscr{S})(\exists A' \in \mathscr{A})$, $A \cup A' = X$ dan $A \cap A' = \phi$.

Dengan demikian aljabar himpunan $\mathscr{A}$ tidak lain adalah aljabar Boole sistem himpunan, sehingga sifat-sifat dan relasi-relasi yang berlaku pada aljabar Boole berlaku pula pada aljabar himpunan. Selanjutnya untuk lebih menyederhanakan digunakan aljabar saja untuk menyebut aljabar himpunan atau aljabar Boole sistem himpunan.

Teorema III.4.1 : Jika $\mathscr{S}$ adalah sistem himpunan yang terdiri dari himpunan-himpunan bagian dari himpunan $X \neq \phi$, maka terdapat aljabar terkecil $\mathscr{A}$ yang memuat $\mathscr{S}$ dan termuat dalam setiap aljabar yang memuat $\mathscr{S}$.

Bukti : Misalkan $\mathscr{P}$ adalah sebarang aljabar yang memuat $\mathscr{S}$ dan Σ adalah keluarga semua aljabar yang memuat $\mathscr{S}$. Bila $\mathscr{A} = \bigcap_{\mathscr{P}\in\Sigma} \mathscr{P}$ maka $\mathscr{A} \neq \phi$ sebab $\mathscr{S} \subseteq \mathscr{P}$ untuk setiap $\mathscr{P} \in \Sigma$

Bila A dan B adalah sebarang anggota $\mathscr{A}$, maka $A \in \mathscr{P}$ dan $B \in \mathscr{P}$ untuk setiap $\mathscr{P} \in \Sigma$. $\mathscr{P}$ suatu aljabar, maka $A \cap B$ pasti merupakan angoota $\bigcap_{\mathscr{P}\in\Sigma} \mathscr{P} = \mathscr{A}$.

Selanjutnya, bila $A \in \mathscr{A}$, maka $A' \in \mathscr{P}$ untuk sebarang $\mathscr{P} \in \Sigma$.

Jadi $A' \in \bigcap_{\mathscr{P}\in\Sigma} \mathscr{P} = \mathscr{A}$. Dengan demikian $\mathscr{A}$ suatu aljabar.

Dari definisi $\mathscr{A}$ tampak bahwa $\mathscr{A}$ adalah aljabar terkecil yang memuat $\mathscr{S}$.

Dengan mudah dapat ditunjukkan bahwa aljabar terkecil yang memuat $\mathscr{S}$ tersebut adalah tunggal. Bila $\mathscr{A}_1$ dan $\mathscr{A}_2$ adalah aljabar terkecil yang memuat $\mathscr{S}$, maka akan kita peroleh $\mathscr{A}_1 \subseteq \mathscr{A}_2$ dan $\mathscr{A}_2 \subseteq \mathscr{A}_1$, atau $\mathscr{A}_1 = \mathscr{A}_2$.∎

Mengingat bahwa aljabar tertutup terhadap operasi irisan "∩", maka aljabar bersifat tertutup terhadap operasi irisan berhingga. Teorema berikut akan memperlihatkan bahwa aljabar $\mathscr{A}$ juga bersifat tertutup terhadap operasi gabumgan "∪" berhingga.

Teorema III.4.2 : Aljabar $\mathcal{A}$ tertutup terhadap operasi gabungan berhingga.

Bukti : Dengan induksi matematis akan ditunjukkan bahwa $\mathcal{A}$ tertutup terhadap operasi gabungan berhingga. Untuk n = 1, berlaku $A_1 \cup A_1 = A_1 \in \mathcal{A}$. Andaikan teorema benar untuk n = m, yaitu $\bigcup_{n=1}^{m} A_n \in \mathcal{A}$ untuk $m \geq 2$, akan ditunjukkan teorema berlaku pula untuk n = m + 1.

Perhatikan bahwa
$$\bigcup_{n=1}^{m+1} A_n = \left(\bigcup_{n=1}^{m} A_n \right) \cup A_{m+1}.$$
$$= \left[\left(\bigcap_{n=1}^{m} A'_n \right)' \cap A'_{m+1} \right]'.$$
$$= \left[\bigcap_{n=1}^{m+1} A_n' \right]' \in \mathcal{A}.$$

Dari ketertutupan $\mathcal{A}$ terhadap operasi $\cap$ dan $'$ dapat disimpulkan bahwa $\bigcup_{n=1}^{m+1} A_n \in \mathcal{A}$. Karena m diambil sebarang, maka teorema berlaku untuk semua nilai n.■

Teorema III.4.3 : Jika $\langle A_n \rangle$ adalah barisan himpunan anggota aljabar $\mathcal{A}$, maka terdapat barisan himpunan saling asing $\langle B_n \rangle$ dalam $\mathcal{A}$ sedemikian hingga
$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n.$$

Bukti : Ambil $A_1 = B_1$ dan untuk $n > 1$, didefinisikan B_n sebagai berikut, $B_n = A_n - (A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{n-1})$.
$$= A_n \cap A_1' \cap A_2' \cap \ldots \cap A_{n-1}'.$$

Jika $m < n$, tampak bahwa

$B_m \cap B_n \subseteq A_m \cap B_n = A_m \cap A_n \cap A_1' \cap \ldots \cap A_m' \cap \ldots \cap A_{n-1}'$

$$= A_m \cap A_m' \cap \ldots \cap A_{n-1}.$$

$$= \phi.$$

Jadi $\langle B_i \rangle$ adalah barisan himpunan yang saling asing.

Karena untuk setiap n, $B_n \subseteq A_n$, maka $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

Sebaliknya, jika $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, maka kita dapat mencari nilai n terbesar, misalkan k, sedemikian hingga $x \in A_k$ tetapi $x \notin \bigcup_{n=1}^{k-1} A_n$ yang berarti $x \in B_k \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$. Dengan demikian $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$. Jadi $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$. ∎

III.4.1 Aljabar Borel

Definisi III.4.1.1 : Suatu aljabar $\mathcal{A}$ disebut aljabar-σ bila $\mathcal{A}$ tertutup terhadap operasi gabungan terbilang, yaitu

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A} \text{ untuk setiap barisan himpunan } \langle A_n \rangle \in \mathcal{A}.$$

Definisi III.4.1.2 : Suatu aljabar $\mathcal{A}$ disebut aljabar-δ jika $\mathcal{A}$ tertutup terhadap operasi irisan terbilang, yaitu :

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A} \text{ untuk setiap barisan himpunan } \langle A_n \rangle \in \mathcal{A}.$$

Teorema III.4.1.1: Suatu aljabar $\mathcal{A}$ adalah aljabar-σ bila dan hanya bila $\mathcal{A}$ adalah aljabar-δ.

Bukti : ($\Longrightarrow$) Andaikan $\mathcal{A}$ σ-aljabar maka $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

Dari sifat tertutup terhadap operasi "$'$" kita akan memperoleh

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right)' \in \mathcal{A} \text{ dan } \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n' \right)' = \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \right) \in \mathcal{A}.$$

($\Longleftarrow$) Andaikan $\mathscr{A}$ aljabar-δ, maka $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{A}$. Dengan mengingat ketertutupan $\mathscr{A}$ terhadap operasi "'" maka $(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) \in \mathscr{A}$ dan $(\bigcap_{n=1}^{\infty} A'_n)' = (\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \in \mathscr{A}$. Dengan demikian $\mathscr{A}$ adalah aljabar-σ.█

Aljabar-σ atau aljabar-δ sering kali disebut **aljabar Borel (aljabar-B)**. Jika diberikan suatu sistem himpunan $\mathscr{S}$, maka pasti ada aljabar-B yang memuat $\mathscr{S}$. Jika $X = \bigcup_{A \in \mathscr{S}} A$ maka sistem himpunan $\mathscr{B}$ yang dibangun dari semua himpunan bagian X merupakan aljabar-B yang memuat $\mathscr{S}$. Jika E adalah elemen satuan dalam $\mathscr{B}$, maka untuk sebarang $A \in \mathscr{B}$ berlaku $A \subseteq E$. Sehingga $\bigcup_{A \in \mathscr{S}} A = X \subseteq E$.

Definisi III.4.1.3: Suatu aljabar-B disebut **iredusibel** terhadap sistem himpunan $\mathscr{S}$ yang dibangun atas himpunan-himpunan bagian dari himpunan X, jika X = E di mana E adalah elemen satuan.

Untuk selanjutnya jika kita bicara tentang aljabar-B, maka yang dimaksudkan adalah aljabar-B yang iredusibel.

Teorema III.4.1.2: Jika $\mathscr{S}$ adalah sitem himpunan tidak kosong, maka terdapat aljabar-B yang memuat $\mathscr{S}$ dan termuat dalam setiap aljabar-B yang memuat $\mathscr{S}$.

Bukti : Misalkan $X = \bigcup_{A \in \mathscr{S}} A$, maka dapat dibangun aljabar-B, namakan $\mathscr{B}(X)$ yang terdiri dari semua himpunan bagian X. Kumpulkan semua aljabar-B yang termuat dalam $\mathscr{B}(X)$ dan memuat $\mathscr{S}$. Misalkan Σ adalah keluarga semua aljabar-B yang memuat $\mathscr{S}$. Jika $\mathscr{V}$ adalah sebarang aljabar-B yang memuat $\mathscr{S}$, maka $\mathscr{V} \cap \mathscr{B}(X) = \mathscr{B}$ anggota Σ. Dengan demikian $\bigcap_{\mathscr{B} \in \Sigma} \mathscr{B}$ merupakan aljabar-B terkecil yang memuat $\mathscr{S}$ dan termuat dalam setiap aljabar-B yang memuat $\mathscr{S}$.∎

BAB IV

UKURAN LEBESGUE PADA GARIS REAL

IV.I Ukuran Lebesgue Pada $\mathbb{R}$

Pembicaraan tentang ukuran Lebesgue akan kita awali dengan pengertian panjang, luas dan volume pada ruang Euclides. Ruang Euclides berdimensi k yang dilambangkan dengan $\mathbb{R}^k$ didefinisikan sebagai himpunan semua titik $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k)$ di mana $\xi_i \in \mathbb{R}$, $1 \le i \le k$. Untuk sebarang $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k)$ dan $y = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_k)$ di $\mathbb{R}^k$ dan $\alpha \in \mathbb{R}$ didefinisikan :

$$x + y = (\xi_1 + \eta_1, \xi_2 + \eta_2, \xi_3 + \eta_3, \ldots, \xi_k + \eta_k) \text{ dan}$$

$$\alpha.x = (\alpha\xi_1, \alpha\xi_2, \alpha\xi_3, \ldots, \alpha\xi_k)$$

Dengan memandang $\mathbb{R}^k$ sebagai ruang vektor, maka :

$$x \circ y = \sum_{i=1}^{k} \xi_i \eta_i \quad \text{dan} \quad |x| = (x \circ x)^{1/2}.$$

Jika $E \subset \mathbb{R}^k$ dan $y \in \mathbb{R}^k$, translasi E oleh y didefinisikan sebagai $E + y = \{ x + y \mid x \in E \}$.

Himpunan $W = \{ (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k) \mid \alpha_i \le \xi_i \le \beta_i, 1 \le i \le k \}$ dengan $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$, $1 \le i \le k$ disebut sel-k dan volume W didefinisikan sebagai

$$\text{vol}(W) = \prod_{i=1}^{k} (\beta_i - \alpha_i).$$

Kita telah mengenal fungsi himpunan yang didefinisikan dari himpunan semua interval pada garis bilangan real ke himpunan bilangan real diperluas. Fungsi ini dikenal sebagai panjang interval. Panjang suatu interval I berbentuk [a,b], [a,b), (a,b] atau (a,b) yang biasanya dinotasikan dengan $\ell(I)$ didefinisikan sebagai selisih positif nilai kedua titik ujung interval, yaitu $\ell(I) = | b - a |$.

Pengertian ukuran Lebesgue merupakan perluasan dari konsep panjang interval pada $\mathbb{R}$. " Panjang " suatu himpunan terbuka $E \subseteq \mathbb{R}$ didefinisikan sebagai jumlah panjang interval-interval yang menyusunnya. Kemudian dibangun suatu fungsi himpunan m bernilai real tak negatif atau ∞ yang didefinisikan pada himpunan-himpunan bagian dari $\mathbb{R}$. Nilai fungsi untuk setiap himpunan $E \subseteq \mathbb{R}$ disebut ukuran dari E. Pada m diharapkan dipenuhi sifat-sifat berikut :

1. $m(E)$ terdefinisikan untuk setiap $E \subseteq \mathbb{R}$;
2. $m(I) = \ell(I)$ untuk setiap interval I;
3. Jika $< E_n >$ adalah barisan himpunan saling asing di mana m didefinisikan, maka dipenuhi
$$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} m(E_n);$$
4. m invarian terhadap translasi, yaitu bila E adalah himpunan dimana m didefinisikan maka
$$(\forall y \in \mathbb{R}),\ m(E + y) = m (E)$$

Bila sifat 3 dipenuhi, maka dikatakan bahwa m memiliki sifat **terjumlah terbilang** *(countably additive)*, sedangkan bila $m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m(E_n)$ maka dikatakan bahwa m bersifat **sub-terjumlah terbilang** *(countably subadditive)*.

Kita ingin mengkonstruksikan suatu fungsi himpunan m sedemikian hingga untuk setiap himpunan E dalam suatu keluarga himpunan $\mathcal{M}$ dari himpunan-himpunan bagian $\mathbb{R}$ berkawankan dengan suatu bilangan real tak negatif diperluas m(E) yang kemudian disebut ukuran dari E.

Sayangnya, apa bila kita menerima **aksioma pilih** (*axiom of choice*) sifat 1 tidak dapat dipenuhi. Kita menginginkan agar sifat 2, 3 dan 4 dimiliki oleh m, sehingga kita cukup puas apa bila m terdefinisikan pada suatu aljabar-σ dari himpunan-himpunan bagian $\mathbb{R}$.

IV.1.1 Ukuran luar.

Pada setiap himpunan $A \subseteq \mathbb{R}$, dapat dipandang suatu keluarga berhingga atau terbilang interval terbuka $\{I_n\}$ yang menyelimuti A dengan $I_n = (a_n , b_n)$, n = 1, 2, ..., yaitu keluarga interval terbuka sedemikian hingga $A \subseteq \cup I_n$.

Definisi IV.1.1.1 : Untuk sebarang himpunan $A \subseteq \mathbb{R}$, ukuran luar Lebesgue dari A yang dinotasikan dengan $m^*(A)$ didefinisikan sebagai

$$m^*(A) = \inf_{A \subseteq \cup I_n} \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n),$$

di mana infimum diambil meliputi semua selimut terbuka himpunan A oleh keluarga interval terbuka $\{ I_n | A \subseteq \cup I_n \}$.

Untuk setiap $\varepsilon > 0$ yang diberikan, terdapat suatu interval terbuka I sedemikian hingga $\phi \subset I$ dan $\ell(I) < \varepsilon$. Dengan demikian, himpunan kosong ϕ mempunyai ukuran luar nol, yaitu $m^*(\phi) = 0$. Demikian pula himpunan yang hanya memuat satu titik saja mempunyai ukuran luar 0. Selain itu, dapat dibuktikan bahwa bila $A \subseteq B$ maka berlaku $m^*(A) \leq m^*(B)$, dan dikatakan bahwa m^* bersifat **monoton.**

Panjang suatu interval bernilai real tak negatif atau ∞. Jadi $\{ \Sigma\, l(I_n) \mid A \subseteq \cup I_n \}$ akan terbatas ke bawah. Karena sistem bilangan real $\mathbb{R}$ mempunyai sifat batas bawah terbesar, maka untuk setiap himpunan $A \subseteq \mathbb{R}$, $m^*(A)$ terdefinisikan.

Teorema IV.1.1.1 : Ukuran luar dari suatu interval I adalah panjang interval itu sendiri, yaitu :

$$m^*(I) = \ell(I).$$

Bukti : Bila I interval tertutup dan terbatas katakanlah $I = [a,b]$, maka untuk sebarang $\varepsilon > 0$, interval terbuka $J = (a-\varepsilon, b+\varepsilon)$ memuat $[a,b]$. Dengan demikian interval $(a-\varepsilon, b+\varepsilon)$ adalah interval terbuka yang menyelimuti $[a, b]$, sehingga akan dipenuhi

$$\begin{aligned} m^*[a,b] &= \inf \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n). \\ &\leq \ell(a-\varepsilon, b+\varepsilon). \\ &= b - a + 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Karena $\varepsilon > 0$ sebarang maka berlaku

$$m^*[a,b] \leq b - a. \qquad (1)$$

Menurut teorema Heine-Borel keluarga interval terbuka yang menyelimuti $[a,b]$ memuat keluarga sub-selimut berhingga

$\left\{ J_{n_j} \right\}_{n=1}^{j}$ yang juga menyelimuti [a,b].

Misalkan $\left(a_{1_j}, b_{1_j} \right) \in \left\{ J_{n_j} \right\}_{n=1}^{j}$ dengan $a_{1_j} < a < b_{1_j} < b$.

Karena $b_{1_j} \in [\ a,\ b\ ]$, maka terdapat interval $\left(a_{2_j}, b_{2_j} \right)$ sedemikian hingga $b_1 \in \left(a_{2_j}, b_{2_j} \right)$. Demikian seterusnya sehingga akan diperoleh keluarga interval terbuka $\left\{ \left(a_{n_j}, b_{n_j} \right) \right\}_{n=1}^{j}$ dengan $\left(a_{n_j}, b_{n_j} \right) \in \left\{ J_{n_j} \right\}_{n=1}^{j}$ dan memenuhi $b_{n-1_j} \in \left(a_{n_j}, b_{n_j} \right)$ untuk n = 1, 2, ..., j-1.

Pembentukan interval terbuka ini berakhir pada $\left(a_{j_j}, b_{j_j} \right)$ karena $\left\{ J_{n_j} \right\}$ berhingga. Dengan demikian berlaku

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{j} \ell\left(J_{n_j} \right) &\geq \sum_{n=1}^{k} \ell\left[\left(a_{n_k}, b_{n_k} \right) \right] \\
&= \left(b_{k_k} - a_{k_k} \right) + \left(b_{k-1_k} - a_{k-1_k} \right) + \ldots \\
&\quad + \left(b_{1_k} - a_{1_k} \right). \\
&= b_{k_k} - \left(a_{k_k} - b_{k-1_k} \right) - \left(a_{k-1_k} - b_{k-2_k} \right) - \\
&\quad \ldots\ldots - \left(a_{2_k} - b_{1_k} \right) - a_{1_k}. \\
&> b_{k_k} - a_{1_k},\ \text{karena } a_{n_j} < b_{n-1_j}.
\end{aligned}
$$

Mengingat $b_{k_k} > b$ dan $a_{1_k} < a$, maka $b_{k_k} - a_{1_k} > b - a$.

Jadi, $m^*[\ a,\ b\ ] \geq \sum_{n=1}^{j} \ell\left(J_{n_j} \right) \geq b - a$. (2)

Dari (1) dan (2) diperoleh

$$m^*[\ a,b\ ] = b - a.$$

Bila I adalah sebarang interval yang terbatas, maka untuk sebarang $\varepsilon > 0$ terdapat interval tertutup $J \subseteq I$ sedemikian hingga $\ell(J) > \ell(I) - \varepsilon$. Oleh karena itu,

$$\ell(I) - \varepsilon < \ell(J) = m^*(J).$$
$$\leq m^*(I) = \ell(I).$$

Jadi untuk sebarang $\varepsilon > 0$, $\ell(I) - \varepsilon < m^*(I) \leq \ell(I)$. Dengan demikian $m^*(I) = \ell(I)$.

Misalkan I adalah interval tak terbatas. Bila diberikan sebarang bilangan real positif δ maka terdapat interval tertutup $F \subset I$ dengan $\ell(F) = \delta$. Karena m^* monoton, maka $m^*(I) > m^*(F) = \ell(F) = \delta$. Karena δ sebarang bilangan real, maka $m^*(I) = \infty = \ell(I)$.∎

Teorema IV.1.1.2 : Ukuran luar m^* invarian terhadap translasi.

Bukti : Misalkan $A \subseteq \mathbb{R}$ dan $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ dengan I_n interval terbuka berbentuk (a_n, b_n), $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Jika $x \in \mathbb{R}$, maka $A + x \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ dengan $A_n = (a_n + x, b_n + x)$ sehingga $\{I_n + x\} \subseteq \{A_n\}$. Sementara itu, untuk setiap n, $A_n = (a_n + x, b_n + x) \subseteq I_n + x$, sehingga akan kita peroleh $\{A_n\} \subseteq \{I_n + x\}$.

Akhirnya kita dapatkan bahwa,

$$m^*(A + x) = \inf \sum_{n=1}^{\infty} \ell(A_n).$$
$$= \inf \sum_{n=1}^{\infty} |(b_n + x) - (a_n + x)|.$$
$$= \inf \sum_{n=1}^{\infty} |b_n - a_n|.$$

$$= \inf \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n).$$

$$= m^*(A).$$

Dengan demikian untuk setiap $x \in \mathbb{R}$ berlaku

$$m^*(A + x) = m^*(A). \blacksquare$$

Teorema IV.1.1.3 : Jika $\{A_n\}$ adalah keluarga terbilang himpunan-himpunan bagian $\mathbb{R}$, maka

$$m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \le \sum_{n=1}^{\infty} m^*(A_n).$$

Bukti : Jika terdapat himpunan $A_n \subset \mathbb{R}$ sedemikian hingga $m^*(A_n) = \infty$, maka teorema jelas berlaku. Akan kita lihat bila $m^*(A_n) < \infty$ untuk $n = 1, 2, \ldots$. Untuk $\varepsilon > 0$ sebarang dapat dicari keluarga terbilang interval terbuka $\{I_{n,i}\}_{n,i=1}^{\infty}$ sedemikian hingga untuk setiap n berlaku $A_n \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} I_{n,i}$ dan $\sum_{i=1}^{\infty} \ell(I_{n,i}) < \sum_{n=1}^{\infty} [\, m^*(A_n) + 2^{-n}\varepsilon \,]$.

Untuk $\{I_{n,i}\}_{n,i=1}^{\infty}$ berlaku

$$m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \le \sum_{n,i=1}^{\infty} \ell(I_{n,i}) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \ell(I_{n,i})$$

$$< \sum_{n=1}^{\infty} (\, m^*(A_n) + 2^{-n}\varepsilon \,).$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} m^*(A_n) + \varepsilon .$$

Karena ε adalah bilangan positif sebarang, maka

$$m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \le \sum_{n=1}^{\infty} m^*(A_n). \blacksquare$$

Teorema di atas memperlihatkan bahwa ukuran luar Lebesgue m^* bersifat **sub-terjumlah terbilang.** Selanjutnya, bila $A_n = \phi$ untuk semua $n > m$ maka berlaku $m^*(A_n) = \emptyset$, untuk semua $n > m$ sehingga $m^*(\bigcup_{n=1}^{m} A_n) \leq \sum_{n=1}^{m} m^*(A_n)$ dan dikatakan bahwa m^* memenuhi sifat **sub-terjumlah berhingga** (*finitely subadditive*).

IV.1.2 Himpunan Terukur Dan Ukuran Lebesgue Pada $\mathbb{R}$

Ukuran luar sebagaimana didefinisikan di atas adalah fungsi himpunan yang hanya memenuhi sifat 1, 2 dan 4. Pada hal sifat terjumlah terbilang dipenuhi oleh panjang interval $I \subseteq \mathbb{R}$. Oleh karena itu akan dibangun ukuran yang memenuhi sifat 3 meskipun itu harus mengorbankan sifat yang pertama. Pembicaraan akan kita awali dengan melihat konsep keterukuran dari himpunan $E \subseteq \mathbb{R}$.

Definisi IV.1.2.1 : Suatu himpunan $E \subseteq \mathbb{R}$ disebut terukur jika untuk setiap himpunan $A \subseteq \mathbb{R}$ berlaku,

$$m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E')$$

Dari definisi tersebut nampak bahwa keterukuran E dan E' adalah simetrik, yaitu E terukur bila dan hanya bila E' terukur. Selain itu karena m^* bersifat sub-terjumlah berhingga maka untuk menunjukkan keterukuran himpunan E cukup ditunjukkan bahwa untuk setiap himpunan $A \subseteq \mathbb{R}$,

$$m^*(A) \geq m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E').$$

Contoh 1 : contoh yang sangat mudah dari himpunan terukur adalah himpunan kosong ϕ yang mempunyai ukuran nol.

Berbicara tentang keterukuran suatu himpunan, wajar bila kemudian timbul pertanyaan tentang himpunan yang tak terukur. Eksistensi dari himpunan tak terukur akan dibicarakan secara terpisah pada sub-bab IV.1.3.

Teorema IV.1.2.1 : Jika $E \subseteq \mathbb{R}$ dengan $m^*(E) = \emptyset$ maka E terukur.

Bukti : Andaikan $E \subseteq \mathbb{R}$ dengan $m^*(E) = \emptyset$. Akan ditunjukkan bahwa E terukur. Ambil sebarang $A \subseteq R$. Karena m^* bersifat monoton dan tak negatif maka $m^*(A \cap E) = \emptyset$, sehingga, $m^*(A) \geq m^*(A \cap E')$.

$$\geq m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E').\blacksquare$$

Teorema IV.1.2.2 : Jika E_1, $E_2 \subseteq \mathbb{R}$ dan keduanya terukur, maka $E_1 \cup E_2$ juga terukur.

Bukti : Misalkan E_1, $E_2 \subseteq \mathbb{R}$ dan andaikan keduanya terukur. Kemudian ambil sebarang $A \subseteq \mathbb{R}$.

Karena $A \cap (E_1 \cup E_2) = (A \cap E_1) \cup (A \cap E_2 \cap E_1')$,

maka dari sifat sub-terjumlah berhingga m^* akan diperoleh

$m^*[A \cap (E_1 \cup E_2)] \leq m^*(A \cap E_1) + m^*(A \cap E_2 \cap E_1')$.

Sehingga mengingat keterukuran E_1 dan E_2 akan didapat hubungan sebagai berikut,

$m^*[A \cap (E_1 \cup E_2)] + m^*[A \cap (E_1 \cup E_2)']$

$\leq m^*(A \cap E_1) + m^*(A \cap E_2 \cap E_1') + m^*(A \cap E_1' \cap E_2')$.

$= m^*(A \cap E_1) + m^*(A \cap E_1')$.

$= m^*(A)$. Dengan demikian $E_1 \cup E_2$ terukur.∎

Teorema IV.1.2.2 bersama dengan sifat terukur E yang simetrik dengan keterukuran E′ memberikan akibat bahwa keluarga semua himpunan terukur adalah suatu aljabar himpunan, sehingga irisan dari dua himpunan terukur juga terukur.

Teorema IV.1.2.3 : Interval (a, ∞) adalah terukur.

Bukti : Diberikan sebarang himpunan $A \subseteq \mathbb{R}$. Kita tuliskan $A_1 = A \cap (a, \infty)$ dan $A_2 = A \cap (-\infty, a]$. Harus ditunjukkan bahwa $m^*(A_1) + m^*(A_2) \leq m^*(A)$.
Bila $m^*(A) = \infty$, jelas teorema berlaku. Misalkan $m^*(A) < \infty$
Jika diberikan sebarang $\varepsilon > 0$, maka dapat dipilih keluarga terbilang interval terbuka $\{I_n\}$ yang menyelimuti A sedemikian hingga berlaku $\sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) \leq m^*(A) + \varepsilon$. Untuk setiap n kita tuliskan $I_n' = I_n \cap (a, \infty)$ sementara itu $I_n'' = I_n \cap (-\infty, a]$. Dengan demikian I_n' dan I_n'' adalah interval-interval yang saling asing dan memenuhi

$$\ell(I_n) = \ell(I_n') + \ell(I_n'').$$

$$= m^*(I_n') + m^*(I_n'').$$

Karena $A_1 \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_{n'}$,

maka $m^*(A_1) \leq m^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} I_{n'}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(I_{n'})$. Dan karena $A_2 \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_{n''}$, maka $m^*(A_2) \leq m^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} I_{n''}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(I_{n''})$.

Jadi, $m^*(A_1) + m^*(A_2) \leq \sum_{n=1}^{\infty}[m^*(I_{n'}) + m^*(I_{n''})]$.

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) \leq m^*(A) + \varepsilon.$$

Karena ε bilangan positif sebarang, maka berlaku

$$m^*(A_1) + m^*(A_2) \leq m^*(A).\blacksquare$$

Teorema IV.1.2.4 : Jika E_1, E_2, E_3, ..., E_n adalah himpunan-himpunan terukur yang saling asing dan A adalah suatu himpunan bagian $\mathbb{R}$, maka

$$m^*(A \cap [\bigcup_{i=1}^{n} E_i]) = \sum_{i=1}^{n} m^*(A \cap E_i).$$

Bukti : Dibuktikan dengan induksi matematis.

Jelas bahwa teorema benar untuk n = 1. Andaikan teorema berlaku untuk n = k - 1. Karena E_i saling asing untuk $1 \leq i \leq n$, maka: $A \cap [\bigcup_{i=1}^{k} E_i] \cap E_k = A \cap E_k$, dan $A \cap [\bigcup_{i=1}^{k} E_i] \cap E_k' = A \cap [\bigcup_{i=1}^{k-1} E_i]$. Karena E_i terukur maka berlaku

$$m^*(A \cap [\bigcup_{i=1}^{k} E_i]) = m^*(A \cap E_k) + m^*(A \cap [\bigcup_{i=1}^{k-1} E_i]).$$

$$= m^*(A \cap E_k) + \sum_{i=1}^{k-1} m^*(A \cap E_i).$$

$$= \sum_{i=1}^{k} m^*(A \cap E_i)$$

Dengan demikian terbukti teorema benar untuk semua n.$\blacksquare$

Teorema IV.1.2.5 : Sistem himpunan $\mathscr{A}$ yang terdiri atas semua himpunan terukur adalah aljabar-σ.

Bukti : Teorema IV.1.2.2 membawa akibat bahwa $\mathscr{A}$ adalah aljabar, jadi tinggal ditunjukkan bahwa gabungan terbilang himpunan-himpunan terukur adalah anggota $\mathscr{A}$.

Misalkan $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$, dengan $E_i \in \mathscr{A}$. Jika untuk setiap n dituliskan $F_n = \bigcup_{i=1}^{n} E_i$, maka F_n terukur dan $F_n' \supset E'$, sehingga untuk sebarang himpunan $A \in \mathbb{R}$ berlaku

$$m^*(A) = m^*(A \cap F_n) + m^*(A \cap F_n').$$

$$\geq m^*(A \cap F_n) + m^*(A \cap E').$$

Dari teorema IV.1.2.4, $m^*(A \cap F_n) = \sum_{i=1}^{n} m^*(A \cap E_i)$, sehingga $m^*(A) \geq \sum_{i=1}^{n} m^*(A \cap E_i) + m^*(A \cap E)$.

Ruas kiri ketaksamaan terakhir tidak tergantung pada pengambilan n, sehingga

$$m^*(A) \geq \sum_{i=1}^{\infty} m^*(A \cap E_i) + m^*(A \cap E').$$

$$\geq m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E').$$

Jadi $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ terukur, $E \in \mathscr{A}$. Terbukti $\mathscr{A}$ adalah aljabar-σ.∎

Berbicara tentang himpunan-himpunan bagian $\mathbb{R}$, kita mengenal himpunan bagian $\mathbb{R}$ yang disebut **himpunan Borel**, yaitu anggota aljabar-σ yang dibangun dari himpunan-himpunan terbuka. Teorema berikut menunjukkan bahwa setiap himpunan Borel pada $\mathbb{R}$ adalah terukur.

Teorema IV.1.2.6 : Setiap himpunan Borel pada $\mathbb{R}$ adalah terukur.

Bukti: $(-\infty, a] = (a, \infty)'$, jadi $(-\infty, a]$ terukur. $(-\infty, b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (-\infty, b - \frac{1}{n}]$, jadi $(-\infty, b)$ juga terukur. Untuk $a < b$, interval $(a, b) = (-\infty, b) \cap (a, \infty)$ jadi (a, b) terukur pula. Setiap himpunan terbuka dapat dinyatakan sebagai gabungan dari paling banyak terbilang interval-interval terbuka yang saling asing. Dengan demikian himpunan terbuka juga terukur. Sistem himpunan $\mathcal{S}$ dari semua himpunan terukur adalah aljabar-σ, jadi $\mathcal{S}$ memuat himpunan terbuka. Keluarga himpunan Borel $\mathcal{B}$ adalah aljabar-σ terkecil yang dibangun dari himpunan terbuka. Dengan demikian $\mathcal{B} \subset \mathcal{S}$, sehingga setiap himpunan Borel adalah anggota $\mathcal{S}$. Jadi setiap himpunan Borel adalah terukur. ∎

Ukuran luar m^* sebagaimana didefinisikan di depan, terdefinisikan untuk setiap himpunan bagian $\mathbb{R}$. Restriksi dari m^* pada aljabar-σ $\mathcal{A}$ dari semua himpunan bagian terukur dari $\mathbb{R}$ disebut **ukuran Lebesgue m.** Jadi, m terdefinisikan untuk setiap himpunan $A \subseteq \mathbb{R}$ dan $A \in \mathcal{A}$. Akan ditunjukkan bahwa di $\mathcal{A}$, m memenuhi sifat terjumlah terbilang.

Teorema IV.I.2.7 : Jika $\langle E_i \rangle$ adalah barisan himpunan terukur, maka $m(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) \le \sum_{i=1}^{\infty} m(E_i)$ (1)

Jika $\langle E_i \rangle$ adalah barisan himpunan terukur yang saling asing, maka $m(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} m(E_i)$ (2)

Bukti : Pertidaksamaan (1) tidak lain adalah sifat sub-terjumlah terbilang dari ukuran luar m^*. Jika E_1, E_2, ..., E_n adalah himpunan-himpunan terukur yang saling asing, maka menurut teorema IV.1.2.4 bila diambil $A = \mathbb{R}$, akan diperoleh $m(\bigcup_{i=1}^{n} E_i) = \sum_{i=1}^{n} m(E_i)$. Selanjutnya, jika $\langle E_i \rangle$ adalah barisan himpunan terukur yang saling asing, maka untuk semua $n \in \mathbb{N}$, $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \supset \bigcup_{i=1}^{n} E_i$ sehingga :

$$m(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) \geq m(\bigcup_{i=1}^{n} E_i) = \sum_{i=1}^{n} m(E_i).$$

Karena ruas kiri ketaksamaan tidak tergantung pada pengambilan n maka : $m(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) \geq \sum_{i=1}^{\infty} m(E_i)$.

Tetapi m bersifat sub-terjumlah terbilang, yaitu

$$m(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m(E_i).$$

Dengan demikian $m(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} m(E_i)$ dan terbukti m bersifat terjumlah terbilang. ∎

Teorema IV.1.2.8 : Jika E_i adalah anggota aljabar-σ $\mathcal{A}$ dengan $m^*(E_1) < \infty$ dan $E_i \supset E_{i+1}$, i = 1, 2, ..., maka :

$$m^*(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i) = \lim_{i \to \infty} m^*(E_i).$$

Bukti : Misalkan $E = \bigcap_{i=1}^{\infty} E_i$.

Bila $E_1 = E \cup [\bigcup_{i=1}^{\infty} (E_i - E_{i+1})]$, maka

$$m^*(E_1) = m^*(E) + \sum_{i=1}^{\infty} m^*(E_i - E_{i+1}).$$

Karena $E_i = E_{i+1} \cup (E_i - E_{i+1})$, maka

$$m^*(E_i - E_{i+1}) = m^*(E_i) - m^*(E_{i+1})$$

sehingga $m^*(E_1) = m^*(E) + \sum_{i=1}^{\infty} [m^*(E_i) - m^*(E_{i+1})]$.

$$= m^*(E) + \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n-1} [m^*(E_i) - m^*(E_{i+1})].$$

$$= m^*(E) + m^*(E_1) - \lim_{n \to \infty} m^*(E_n).$$

Maka, $m^*(E_1) - m^*(E) = m^*(E_1) - \lim_{n \to \infty} m^*(E_n)$. Karena $m^*(E_1) < \infty$, maka berlaku $m^*(E) = \lim_{n \to \infty} m^*(E_n)$. ∎

Teorema IV.1.2.9 : Bila diberikan suatu himpunan $E \subseteq \mathbb{R}$, pernyataan-pernyataan berikut adalah ekuivalen.

i. E terukur.

ii. Untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat himpunan terbuka B_ε dengan $E \subseteq B_\varepsilon$, sedemikian hingga $m^*(B_\varepsilon - E) \leq \varepsilon$.

iii. Terdapat himpunan $B \in \mathcal{B}_\delta$, dengan $E \subseteq B$ sedemikian hingga $m^*(B - E) = 0$.

(B adalah anggota $\mathcal{B}_\delta$ bila B merupakan irisan terbilang dari himpunan-himpunan terbuka).

iv. Untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat himpunan tertutup T_ε dengan $T_\varepsilon \subseteq E$ sedemikian hingga berlaku $m^*(E - T) \leq \varepsilon$.

v. Terdapat himpunan $F \in \mathcal{T}_\sigma$, dengan $F \subseteq E$ sedemikian hingga $m^*(E - F) = 0$.

(F adalah anggota $\mathcal{T}_\sigma$ bila F merupakan gabungan terbilang himpunan-himpunan tertutup).

Bila $m^*(E) < \infty$, maka pernyataan-pernyataan di atas ekuivalen dengan :

vi. Untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat himpunan U_ε yang merupakan gabungan berhingga interval-interval terbuka sedemikian hingga $m^*(U_\varepsilon \nabla E) < \varepsilon$.

Bukti :(i $\Longrightarrow$ ii). Andaikan E terukur.

Untuk $m^*(E) < \infty$, jika diberikan $\varepsilon > 0$ maka akan dapat dipilih himpunan terbuka $B_\varepsilon \supseteq E$ sedemikian hingga $m^*(B_\varepsilon) - \varepsilon \le m^*(E)$, sehingga $m^*(B_\varepsilon - E) = m^*(B_\varepsilon) - m^*(E)$

$\le \varepsilon$.

Sekarang misalkan $m^*(E) = \infty$ dan $E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$ di mana I_i interval yang saling asing, n = 1, 2, ... Didefinisikan $E_n = E \cap I_n$, sehingga $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Karena E dan I_n terukur, maka untuk setiap n, E_n terukur. Selanjutnya, karena untuk setiap n berlaku $E_n \subseteq I_n$ dan $m^*(I_n) < \infty$, maka $m^*(E_n) < \infty$. Menurut hasil di atas, untuk sebarang $\varepsilon > 0$ terdapat himpunan terbuka B_{ε_n} dengan $E_n \subseteq B_{\varepsilon_n}$ dan $m^*(B_{\varepsilon_n} - E_n) \le 2^{-n}\varepsilon$, n = 1, 2, ... Jika B_ε kita tulis sebagai $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$, maka B_ε adalah himpunan terbuka dan memenuhi, $B_\varepsilon - E = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_{\varepsilon_n} - \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} (B_{\varepsilon_n} - E_n)$, sehingga, $m^*(B_\varepsilon - E) \le m^*[\bigcup_{n=1}^{\infty} (B_{\varepsilon_n} - E_n)]$.

$$\le \sum_{n=1}^{\infty} m^*(B_{\varepsilon_n} - E_n) \le \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}\varepsilon = \varepsilon.$$

(ii $\Longrightarrow$ iii). Untuk setiap bilangan asli n kita pilih himpunan terbuka B_n dengan $E \subseteq B_n$ sedemikian hingga $m^*(B_n - E) < {}^1/n$. Jika didefinisikan $G = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$ maka untuk setiap n berlaku $E \subseteq B_n$ sehingga, $m^*(G - E) \leq m^*(B_n - E) < {}^1/n$. Jadi $G \in \mathcal{B}_\delta$, dan memenuhi $m^*(G - E) = 0$.

(iii $\Longrightarrow$ i). Misalkan $G \in \mathcal{B}_\delta$ dan $E \subseteq G$ sedemikian hingga $m^*(G - E) = 0$. Karena G dan G − E keduanya terukur, maka $E = G - (G - E)$ juga terukur.

(i $\Longrightarrow$ iv). Andaikan E terukur. Diberikan $\varepsilon > 0$ sebarang. Karena E′ juga terukur, maka menurut ii terdapat himpunan terbuka B_ε sedemikian hingga $E' \subseteq B_\varepsilon$ dan $m^*(B_\varepsilon - E') < \varepsilon$. Misalkan $T_\varepsilon = B_\varepsilon'$, maka T_ε adalah himpunan tertutup yang memenuhi $T_\varepsilon \subseteq E$ dan $m^*(E - T_\varepsilon) = m^*(B_\varepsilon - E') < \varepsilon$.

(iv $\Longrightarrow$ v). Untuk setiap bilangan asli n dapat kita pilih suatu himpunan tertutup T_n dengan $T_n \subseteq E$ dan memenuhi $m^*(E - T_n) < {}^1/n$. Misalkan $T = \bigcup_{n=1}^{\infty} T_n$. Karena $T_n \subseteq T$, maka untuk setiap n berlaku $m^*(E - T) \leq m^*(E - T_n) < {}^1/n$. Jadi $T \in \mathcal{T}_\sigma$ yang memenuhi $m^*(E - T) = 0$.

(v $\Longrightarrow$ i). Misalkan $F \in \mathcal{T}_\sigma$ sedemikian hingga $F \subseteq E$ dan $m^*(E - F) = 0$. Karena F dan E − F keduanya terukur, maka $E = (E - F) - F$ juga terukur.

(i $\Longrightarrow$ vi). Andaikan E terukur dan $m^*(E) < \infty$. Diberikan $\varepsilon > 0$ sebarang. Menurut ii, terdapat himpunan terbuka B_ε dengan $E \subseteq B_\varepsilon$ sedemikian hingga dipenuhi $m^*(B_\varepsilon - E) < \varepsilon/2$. Karena $m^*(E) < \infty$ maka $m^*(B_\varepsilon) < \infty$. Jika B_ε dipandang sebagai gabungan terbilang interval-interval terbuka yang saling asing, katakanlah $B_\varepsilon = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$, sehingga $m^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n) \le \sum_{n=1}^{\infty} m^*(I_n) < \infty$ maka terdapat bilangan asli N sedemikian hingga $\sum_{n=N+1}^{\infty} m^*(I_n) < \varepsilon/2$. Menurut prinsip konvergensi barisan Cauchy, akan kita peroleh $m^*(B_\varepsilon - \bigcup_{n=1}^{N} I_n) < \varepsilon/2$. Misalkan $U_\varepsilon = \bigcup_{i=1}^{n} I_n$. Perhatikan bahwa

$$E \nabla U_\varepsilon = [(E - \bigcup_{n=1}^{N} I_n) \cup (\bigcup_{n=1}^{N} I_n - E)] \subseteq [(B_\varepsilon - \bigcup_{n=1}^{N} I_n) \cup (B_\varepsilon - E)].$$

Jadi U_ε merupakan gabungan berhingga interval-interval terbuka yang memenuhi

$$m^*(E \nabla U_\varepsilon) \le m^*[(B_\varepsilon - \bigcup_{n=1}^{N} I_n) \cup (B_\varepsilon - E)].$$

$$\le m^*(B_\varepsilon - \bigcup_{n=1}^{N} I_n) + m^*(B_\varepsilon - E) < \varepsilon.$$

(vi $\longrightarrow$ ii). Misalkan B adalah himpunan terbuka yang memuat E dan $U = \bigcup_{i=1}^{n} (I_i \cap B)$, dengan I_i interval terbuka. Nampak bahwa $U \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} I_i$, dengan demikian akan berlaku $U \nabla E \subseteq [(E - U) \cup (\bigcup_{i=1}^{n} I_i - E)]$. Tetapi,

$$E - U = E - [(\bigcup_{i=1}^{n} I_i) \cap B] = E \cap B' \cup E \cap (\bigcup_{i=1}^{n} I_i)'.$$

$$= E - \bigcup_{i=1}^{n} I_i, \text{ karena } E \subseteq B.$$

$(U \nabla E) \subseteq (E - \bigcup_{i=1}^{n} I_i) \cup (\bigcup_{i=1}^{n} I_i - E) = E \nabla (\bigcup_{i=1}^{n} I_i)$

sehingga $m^*(U \nabla E) \le m^*(E \nabla \bigcup_{i=1}^{n} I_i) < \varepsilon/3$ ....(1)

$E \subseteq (U \cup (U \nabla E))$, maka menggunakan (1) diperoleh bahwa

$m^*(E) \le m^*(U) + m^*(U \nabla E) < m^*(U) + \varepsilon/3$ ....(2)

$(B - E) \subseteq (B - U) \cup (U \nabla E)$, maka:

$m^*(B - E) \le m^*(B - U) + m^*(U \nabla E)$.

$< m^*(B - U) + \varepsilon/3 < m^*(B) - m^*(U) + \varepsilon/3$.(3)

Akhirnya, $m^*(B - E) < m^*(E) - m^*(U) + 2\varepsilon/3 = \varepsilon$.

Dengan demikian terbukti bahwa terdapat himpunan terbuka B yang memuat E sedemikian hingga $m^*(B - E) < \varepsilon$, dan ii dipenuhi yang berarti E terukur. ∎

Contoh 2 : Himpunan bagian terbilang dari $\mathbb{R}$ mempunyai ukuran nol.

Misalkan A himpunan bagian terbilang dari $\mathbb{R}$. A dapat dinyatakan sebagai $\{ x_1, x_2, ... \}$, sehingga dapat kita cari keluarga interval terbuka $\{ I_n \}$ sedemikian hingga untuk sebarang $\varepsilon > 0$ dan $n \in \mathbb{N}$, $\ell(I_n) < \frac{\varepsilon}{2^n}$ dan $x_1 \in I_1$, $x_2 \in I_2$, ..., $x_n \in I_n$, ...

Dari sifat terjumlah terbilang m diperoleh :

$$m (A) = \inf \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon$$

Karena $\varepsilon > 0$ sebarang, maka $m (A) = 0$.

IV.1.3 Eksistensi Himpunan Tak Terukur.

Berikut ini akan ditunjukkan eksistensi dari suatu himpunan yang tidak terukur. Pada pembicaraan himpunan tak terukur ini, semesta pembicaraan kita dibatasi pada interval $[\ 0,\ 1\ )$.

Jika x dan y adalah sebarang dua bilangan real pada interval $[0,1)$, didefinisikan *jumlahan modulo* 1 untuk x dan y sebagai berikut:

$$x \overset{\circ}{+} y = \begin{cases} x + y & ,\ \text{jika } x + y < 1 \\ x + y - 1 & ,\ \text{jika } x + y \geq 1 \end{cases}$$

Jika E adalah himpunan bagian dari $[0,1)$, maka **translasi modulo** 1 dari E adalah himpunan $E \overset{\circ}{+} y = \{\ z |\ z = x \overset{\circ}{+} y$ untuk $x \in E\ \}$. Teorema berikut akan menunjukkan bahwa ukuran Lebesgue bersifat invarian terhadap translasi modulo 1.

Teorema IV.1.3.1 : Jika $E \subset [0,1)$ adalah himpunan terukur, maka untuk setiap $y \in [0,1)$, himpunan $E \overset{\circ}{+} y$ adalah terukur dan $m(\ E \overset{\circ}{+} y\ ) = m(\ E\ )$.

Bukti : Misalkan $E_1 = E \cap [\ 0,\ 1-y\ )$ dan $E_2 = E \cap [\ 1-y,\ 1\ )$. Jadi E_1 dan E_2 adalah himpunan terukur yang saling asing dimana $E_1 \cup E_2 = E$ dan $m(E) = m(\ E_1) + m(\ E_2)$.

Maka $E_1 \overset{\circ}{+} y = E_1 + y$ dan $E_1 + y$ adalah terukur dan karena m invarian diperoleh $m(\ E_1 + y\ ) = m(\ E_1)$.

Sedangkan $E_2 + y = E_2 + (\ y - 1\ )$ dan $E_2 \overset{\circ}{+} y$ juga terukur dan dari sifat invarian m diperoleh $m(\ E_2 + y\ ) = m(\ E_2)$.

Tetapi, $E \dotplus y = (E_1 + y) \cup (E_2 + y)$, dan $(E_1 + y)$ dan $(E_2 + y)$ adalah himpunan terukur yang saling asing. oleh karena itu, $E \dotplus y$ terukur, dan

$$m(E \dotplus y) = m(E_1 \dotplus y) + m(E_2 \dotplus Y).$$
$$= m(E_1) + m(E_2).$$
$$= m(E). \blacksquare$$

Selanjutnya, pada $[0,1)$ dibangun suatu relasi " $\sim$ " sebagai berikut: untuk sebarang $x, y \in [0,1)$,

$$x \sim y \text{ bila dan hanya bila } x-y \text{ rasional.}$$

Relasi ini merupakan suatu relasi ekuivalensi, sehingga membangkitkan klas-klas ekuivalen pada $[0,1)$. Dua elemen x dan y anggota $[0,1)$ akan berada pada satu klas ekuivalen jika $x - y$ rasional, x dan y akan berada pada klas ekuivalen yang berbeda bila $x - y$ irasional.

Menurut " *axiom of choice* " dapat dibangun himpunan P yang memuat tepat satu elemen dari masing-masing klas ekuivalen. Misalkan $\{ r_i \}_{i=0}^{\infty}$ adalah himpunan semua bilangan rasional di $[0, 1)$ dengan $r_0 = 0$. Untuk $i \geq 0$, didefinisikan $P_i = P + r_i$. Jadi $P_0 = P$.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa untuk semuaa i, P_i saling asing. Andaikan $x \in P_i \cap P_j$, maka terdapat $a \in P$ sedemikian hingga $x = a \dotplus r_i$ dan terdapat $b \in P$ sedemikian hingga $x = b \dotplus r_j$. Sehingga $a - b + r_i - r_j$ adalah suatu bilangan rasional. Jadi $a \sim b$ yang berarti a dan b berada pada klas ekuivalen yang sama, dengan kata lain $r_i = r_j$.

jadi $i = j$. Dengan demikian jika terdapat $x \in P_i \cap P_j$ maka $i = j$. Jadi, P_i adalah himpunan-himpunan yang saling asing.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $[0,1) = \bigcup_{i=1}^{\infty} P_i$. Setiap anggota P_i jelas merupakan anggota $[0, 1)$.

Ambil sebarang $x \in [0,1)$. Dapat kita temukan suatu klas ekuivalen yang memuat x, sehingga terdapat y anggota P sedemikian hingga $x \sim y$. Jadi terdapat $r_k \in \{r_i\}$ sehingga $x = y + r_k$. Dengan demikian $x \in P_k$, yang berarti $x \in \bigcup_{i=1}^{\infty} P_i$, dan terbukti $[0,1) = \bigcup_{i=1}^{\infty} P_i$.

P_i adalah translasi modulo 1 dari P, maka P_i terukur bila P terukur dan $m(P_i) = m(P)$. Akan ditunjukkan bahwa ternyata P tidak terukur. Karena $[0, 1) = \bigcup_{i=1}^{\infty} P_i$ dan P_i saling asing untuk semua i, jika P terukur maka :

$$m\,[[0,1)] = \sum_{i=1}^{\infty} m(P_i) = \sum_{i=1}^{\infty} m(P).$$

Karena $\ell\,[[0,1)] = 1$, jika $m(P) = 0$ maka timbul kontradiksi, sedangkan jika $m(P) \neq 0$ maka $\sum m(P) = \infty$ yang juga menimbulkan kontradiksi. Dengan demikian P tidak terukur.

Dari kenyataan di atas tampak bahwa tidak mungkin untuk membangun fungsi himpunan yang sekaligus memenuhi keempat syarat sebagaimana disebut pada awal pembicaraan tentang ukuran. Oleh karena itu terpaksa syarat-syarat tersebut diperlemah.

Contoh 3 : Berikut akan diberikan contoh himpunan yang memenuhi $m^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) < \sum_{i=1}^{\infty} m^*(P_i)$.
Jika E = P di mana P adalah himpunan yang memuat tepat satu dari masing-masing klas ekuivalen sebagaimana didefinisikan di atas dan $E_i = P + r_i$ dengan r_i adalah bilangan rasional pada [0,1). Telah ditunjukkan bahwa P_i saling asing dan P adalah himpunan yang tidak terukur, tetapi untuk semua himpunan bagian $\mathbb{R}$, m^* pasti ada dan bernilai tak negatif atau ∞. Maka $m^*(P) > 0$ dan karena m^* invarian terhadap translasi maka $m^*(P_i) = m^*(P) > 0$.
Sehingga $\sum_{i=1}^{\infty} m^*(P_i) = \infty$. Sementara $\bigcup_{i=1}^{\infty} P_i \subseteq [\ 0,1\ )$, karena m^* bersifat monoton, maka $m^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} P_i) \leq 1 < \infty$.
Sehingga, $m^*(\bigcup P_i) < \sum_{i=1}^{\infty} m^*(P)$.

Contoh ini menunjukkan pada kita bahwa sifat terjumlah terbilang tidak dipenuhi pada m^*.

IV.2 Ukuran umum.

Pada sub bab ini kita akan melihat abstraksi dari ukuran Lebesgue yang telah kita bahas sebelumnya. Dari sebarang himpunan $X \neq \phi$, kita bangun aljabar-σ $\mathcal{A}$ yang terdiri atas himpunan bagian X. Pada $\mathcal{A}$ kita bangun **ukuran** yaitu fungsi himpunan μ bernilai real tak negatif diperluas yang didefinisikan untuk setiap anggota $\mathcal{A}$ sedemikian hingga dipenuhi :

1. $\mu(\phi) = 0$.

2. μ bersifat **terjumlah terbilang**, yaitu bila $\langle E_i \rangle$ adalah barisan himpunan saling asing dalam $\mathscr{A}$, maka:

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i).$$

$(X, \mathscr{A}, \mu)$ disebut **ruang terukur** (*measurable space*) terhadap ukuran μ dan setiap himpunan $E \in \mathscr{A}$ disebut himpunan terukur.

Dari sifat terjumlah terbilang dapat diturunkan sifat **terjumlah berhingga** yaitu : $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{N} E_i \right) = \sum_{i=1}^{N} \mu(E_i)$ yang berlaku bila $E_i = \phi$ untuk semua $i > N$.

Sifat lain yang juga berlaku adalah sifat **monoton,** yaitu jika A dan B adalah sebarang anggota $\mathscr{A}$ dan $A \subseteq B$, maka berlaku $\mu(A) \leq \mu(B)$.

IV.3 Fungsi Terukur.

Di sini kita berpegang bahwa fungsi yang akan kita bahas di sini didefinisikan pada suatu himpunan terukur.

Teorema IV.3.1 : Jika f adalah fungsi bernilai real diperluas dengan daerah asal D, maka pernyataan-pernyataan berikut adalah ekuivalen.

i. $(\forall\alpha\in\mathbb{R}), \{ x \in D | f(x) > \alpha \}$ terukur.

ii. $(\forall\alpha\in\mathbb{R}), \{ x \in D | f(x) \geq \alpha \}$ terukur.

iii. $(\forall\alpha\in\mathbb{R}), \{ x \in D | f(x) < \alpha \}$ terukur.

iv. $(\forall\alpha\in\mathbb{R}), \{ x \in D | f(x) \leq \alpha \}$ terukur.

Bukti : Daerah asal fungsi f adalah himpunan terukur D. Karena $\{ x |\ f(x) \le \alpha \} = D - \{ x |\ f(x) > \alpha \}$ maka,

$$\{ x |\ f(x) \le \alpha \} \text{ terukur.}$$

$\alpha \in \mathbb{R}$, maka $\{ x |\ f(x) > \alpha - \frac{1}{n} \}$ dengan $n = 1, 2, 3, \ldots$ terukur dan $\{ x |\ f(x) \ge \alpha \} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{ x |\ f(x) > \alpha - \frac{1}{n} \}$.

Jadi, $\{ x |\ f(x) \ge \alpha \}$ terukur.

$\{ x |\ f(x) < \alpha \}$ adalah komplemen dari himpunan terukur $\{ x |\ f(x) \ge \alpha \}$ maka $\{ x |\ f(x) < \alpha \}$ terukur. $\{ x |\ f(x) \le \alpha \} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{ x | f(x) < \alpha - \frac{1}{n} \}$. Dengan demikian $\{ x |\ f(x) \le \alpha \}$ terukur.

Definisi IV.3.1 : Suatu fungsi himpunan f disebut terukur Lebesgue bila daerah asal f terukur dan salah satu dari keempat pernyataan di atas dipenuhi.

Teorema IV.3.2 : Jika f dan g adalah dua fungsi terukur yang didefinisikan pada daerah asal yang sama dan $k \in \mathbb{R}$, maka $f + k$, kf, $f - g$ dan fg juga terukur.

Bukti : Untuk sebarang $\alpha \in \mathbb{R}$,

a. $\{ x |\ f(x) + k < \alpha \} = \{ x |\ f(x) < \alpha + k \}$, $(\alpha + k) \in \mathbb{R}$.

Jadi $f + k$ terukur.

b. Untuk $k \ne 0$, $\{ x |\ kf(x) < \alpha \} = \{ x |\ f(x) < {}^{\alpha}/_{k} \}$, $({}^{\alpha}/_{k}) \in \mathbb{R}$. Dengan demikian kf terukur.

c. Jika $f(x) + g(x) < \alpha$, maka $f(x) < \alpha - g(x)$. Terdapat bilangan rasional r yang memenuhi $f(x) < r < \alpha - g(x)$, sehingga $\{ x |\ f(x) + g(x) < \alpha \}$ =

$\bigcup_r [\{ x |\ f(x) < r \} \cap \{ x |\ g(x) < \alpha - r \}]$ terukur.

d. $-g = (-1)\ g$. Jika g terukur maka $-g$ terukur sehingga $f - g = f + (-g)$ juga terukur.

e. $\{ x |\ f^2(x) > \alpha \} = \{ x |\ f(x) > \sqrt{\alpha} \} \cup \{ x |\ f(x) < -\sqrt{\alpha} \}$ untuk $\alpha \geq 0$. Untuk $\alpha < 0$, $\{ x |\ f^2(x) > \alpha \}$ = D. Jadi f^2 terukur. $fg = {}^1\!/_2\ [(f + g)^2 - f^2 - g^2]$. ■

Teorema IV.3.3 : Bila $\langle f_n \rangle$ adalah barisan fungsi terukur yang didefinisikan pada daerah asal yang sama, maka fungsi-fungsi $\sup \{ f_1, f_2, \ldots, f_n \}$, $\inf \{ f_1, f_2, \ldots, f_n \}$, $\sup_n f_n$, $\inf_n f_n$, $\overline{\lim}\, f_n$, $\underline{\lim}\, f_n$ juga terukur.

Bukti : Misalkan E adalah daerah asal fungsi f_n.

a. Bila h adalah fungsi yang didefinisikan dengan $h(x)$ = $\sup \{ f_1(x), f_2(x), \ldots, f_i(x) \}$, maka :

$\{ x \in E |\ h(x) > \alpha \} = \bigcup_{i=1}^{k} \{ x \in E |\ f_i(x) > \alpha \}$. Karena $\{ x \in E\ f_i(x) > \alpha \}$ terukur untuk $1 \leq i \leq n$, sehingga,

$\bigcup_{i=1}^{k} \{ x \in E |\ f_i(x) \} = \{ x \in E |\ h(x) > \alpha \}$ terukur.

Jadi h *terukur*.

b. Misalkan g fungsi yang didefinisikan pada E dengan $g(x)$ = $\inf \{ f_1(x), f_2(x), \ldots, f_k(x) \}$, maka :

$\{ x \in E |\ g(x) < \alpha \} = \bigcup_{i=1}^{k} \{ x \in E |\ f_i(x) < \alpha \}$. Karena $\{ x \in E |\ f_i(x) < \alpha \}$ terukur untuk $1 \leq i \leq k$ dan gabungan himpunan-himpunan terukur adalah terukur, maka $\{ x \in E |\ g(x) < \alpha \}$ terukur. Dengan demikian g terukur.

c. Bila h adalah fungsi yang didefinisikan pada E dengan $h(x) = \sup_n f_n(x)$, maka $\{ x \in E |\ h(x) > \alpha \} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{ x \in E |\ f_n(x) > \alpha \}$. Karena f_n terukur maka $\{ x \in E |\ h(x) > \alpha \}$ terukur.

d. Bila g adalah fungsi yang didefinisikan pada E dengan $g(x) = \inf_n f_n(x)$, maka $\{ x \in E |\ g(x) < \alpha \} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{ x \in E |\ f_n(x) < \alpha \}$. Karena f_n terukur, maka $\{ x \in E |\ g(x) < \alpha \}$ terukur.

e. $\overline{\lim}\ f_n = \inf_n \sup_{k \geq n} f_k$.

Menurut (c), sup f_k terukur dan menurut (d) infimum fungsi-fungsi terukur juga terukur, jadi $\overline{\lim}\ f_n$ terukur.

f. $\underline{\lim}\ f_n = \sup_n \inf_{k \leq n} f_k$.

Menurut (d), inf f_k terukur dan menurut (c) supremum fungsi-fungsi terukur juga terukur. Dengan demikian $\underline{\lim}\ f_k$ terukur. ∎

Teorema IV.3.4 : Jika f adalah fungsi terukur, maka $|f|$ terukur.

Bukti : Andaikan f adalah fungsi terukur.

$\{ x |\ |f(x)| < \alpha \} = \{ x |\ f(x) > -\alpha \} \cap \{ x |\ f(x) < \alpha \}$.

Kedua suku ruas kanan terukur, dan irisan dua himpunan terukur juga terukur. Jadi $\{ x |\ |f(x)| > \alpha \}$ terukur. ∎

Definisi IV.3.2 : Fungsi himpunan φ bernilai real diperluas disebut **fungsi sederhana** (*simple function*) bila φ terukur dan hanya ada berhingga nilai untuk φ.

Definisi IV.3.3 : Suatu fungsi g bernilai real yang didefinisikan pada interval [a, b] disebut **fungsi tangga** (*step function*) bila $g(x) = k_i$ untuk setiap interval $(x_i, x_{i+1}) \subset [a, b]$ dimana $a = x_1 < x_2 < \ldots . < x_n = b$.

Teorema IV.3.5 : Jika f adalah fungsi terukur yang didefinisikan pada interval [a, b] dan f bernilai $\pm\infty$ hanya pada himpunan yang berukuran nol, maka untuk sebarang $\varepsilon > 0$ terdapat fungsi tangga g dan fungsi kontinu h sedemikian hingga

$$| f - g | < \varepsilon \text{ dan } | f - h | < \varepsilon$$

kecuali pada himpunan dengan ukuran nol, dengan kata lain

$$m(\{ x | \ | f(x) - g(x) | \geq \varepsilon \}) < \varepsilon, \text{ dan}$$

$$m(\{ x | \ | f(x) - h(x) | \geq \varepsilon \}) < \varepsilon.$$

Teorema IV.3.5 dapat dibuktikan dengan mengikuti langkah-langkah pembuktian sebagai berikut :

a. Jika f adalah fungsi terukur yang didefinisikan pada interval [a, b] dan f bernilai $\pm\infty$ hanya pada himpunan dengan ukuran nol, maka untuk sebarang $\varepsilon > 0$ terdapat M sedemikian hingga $| f | \leq M$ kecuali pada himpunan dengan ukuran kurang dari $\frac{\varepsilon}{3}$.

b. f fungsi terukur pada interval [a, b]. Diberi $\varepsilon > 0$ dan M, terdapat fungsi sederhana φ pada [a, b] sehingga $| f(x) - \varphi(x) | < \varepsilon$ kecuali pada x dimana $| f(x) | \geq M$.

c. Bila φ fungsi sederhana pada interval [a, b] maka terdapat fungsi tangga g pada [a,b] sedemikian hingga $g(x) = \varphi(x)$ kecuali pada himpunan dengan ukuran kurang dari $\frac{\varepsilon}{3}$.

d. Jika g fungsi tangga pada interval [a, b] maka terdapat fungsi kontinu h pada [a, b] sedemikian hingga $h(x) = g(x)$ kecuali pada himpunan dengan ukuran kurang dari $\frac{\varepsilon}{3}$.

Dengan menggabungkan langkah a, b ,c akan kita dapatkan fungsi tangga g sebagaimana dimaksud dan dengan menambahkan langkah d akan diperoleh fungsi kontinu h sebagaimana diinginkan.

Definisi IV.3.4 : Suatu sifat disebut berlaku **hampir dimana-mana** (*almost everywhere*) disingkat h.d bila sifat tersebut tidak berlaku hanya pada himpunan yang berukuran nol.

Sejalan dengan definisi di atas, suatu fungsi f disebut sama dengan g hampir dimana-mana ($f = g$ h.d) bila f dan g didefinisikan pada daerah asal yang sama dan $m \{ x | f(x) \neq g(x) \} = 0$. Sedangkan barisan fungsi $\langle f_n \rangle$

disebut konvergen ke fungsi g hampir dimana-mana ($f_n \longrightarrow g$ h.d) bila untuk semua x dimana f didefinisikan berlaku $f_n(x) \longrightarrow g(x)$, kecuali pada $x \in E$ dimana $m(E) = 0$.

Teorema IV.3.6 : Jika f adalah suatu fungsi terukur dan $f = g$ h.d, maka g juga terukur.

Bukti : Misalkan $E = \{ x |\ f(x) \neq g(x) \}$. Perhatikan bahwa $\{ x |\ g(x) > \alpha \} = \{ x |\ f(x) > \alpha \} - [\{ x \in E |\ g(x) \leq \alpha \} \cup \{ x \in E |\ g(x) > \alpha \}]$. Suku pertama ruas kanan terukur sebab f terukur, sedangkan $\{ x \in E |\ g(x) \leq \alpha \} \cup \{ x \in E |\ g(x) > \alpha \} \subset E$ juga terukur. Maka $\{ x |\ g(x) > \alpha \}$ terukur. ∎

Teorema IV.3.7 : Jika E himpunan terukur dengan $m(E)$ berhingga dan $\langle f_n \rangle$ barisan fungsi terukur yang didefinisikan di E, dan f fungsi bernilai real yang terukur sedemikian hingga untuk semua $x \in E$, $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ maka untuk sebarang $\varepsilon > 0$ dan $\delta > 0$ terdapat himpunan terukur $A \subset E$ dengan $m(A) < \delta$ dan $N \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga untuk semua $x \in E - A$ dan $n \geq N$,

$$| f_n(x) - f(x) | < \varepsilon.$$

Bukti : Diberikan $\varepsilon > 0$ dan $\delta > 0$.

Misalkan $G_n = \{ x \in E : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon \}$, dan

$$E_N = \bigcup_{n=N}^{\infty} G_n.$$

$$= \{ x \in E : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon \text{ untuk suatu } n \geq N \}.$$

Jadi untuk semua $N \in \mathbb{N}$, $E_{N+1} \subset E_N$. Untuk sebarang $x \in E$ diketahui $f_n(x) \longrightarrow f(x)$, maka $| f_n(x) - f(x) | < \varepsilon$. Dengan demikian jika $x \in E$ maka terdapat E_n sedemikian rupa sehingga $x \notin E_N$, jadi $\bigcap E_N = \phi$ dan menurut teorema IV.1.2.8, $\lim\limits_{N \to \infty} m (E_N) = 0$.

Maka untuk $\delta > 0$ yang diberikan, terdapat $N \in \mathbb{N}$ sedemikian rupa sehingga $m (E_N) < \delta$. Jadi,

$m [\{ x \in E : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon$, untuk suatu $n \geq N \}] < \delta$.

Sehingga, bila $A = E_N$, maka $m (A) < \delta$. Dengan demikian $A' = \{ x \in E : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, untuk semua $n \geq N \}$.

Terbukti untuk semua $x \in E - A$, terdapat $N \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga untuk semua $n \geq N$, $| f_n(x) - f(x) | < \varepsilon$.∎

Definisi IV.4.5 : Barisan fungsi terukur $\langle f_n \rangle$ yang didefinisikan pada himpunan terukur E disebut **konvergen titik demi titik** (*pointwise*) ke fungsi f bila untuk sebarang $\varepsilon > 0$ dan setiap $x \in E$, terdapat $N \in \mathbb{N}$ sedenikian hingga untuk semua $n \geq N$ berlaku $| f_n(x) - f(x) | < \varepsilon$. Fungsi f_n ini disebut **konvergen seragam** ke f bila untuk sebarang $\varepsilon > 0$ terdapat $N \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga untuk semua $n \geq N$ dan semua $x \in E$, $| f_n(x) - f(x) | < \varepsilon$.

Jelas bahwa teorema IV.3.7 akan tetap berlaku bila f_n konvergen ke f titik demi titik h.d pada himpunan terukur E.

Teorema IV.3.8 (Egoroff) : Bila $\langle f_n \rangle$ barisan fungsi terukur yang konvergen dimana-mana ke fungsi f bernilai real pada himpunan terukur E dan $m(E) < \infty$, maka untuk sebarang $\eta > 0$, terdapat himpunan terukur $A \subset E$ dengan $m(A) < \eta$ sedemikian hingga f_n konvergen seragam ke f di $E - A$.

Bukti : Menurut teorema IV.3.7, untuk sebarang $\varepsilon > 0$ dan $\delta > 0$ terdapat himpunan terukur $A \subset E$ dengan $m(A) < \infty$ dan $N \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga untuk semua $x \notin A$ dan $n \geq N$,

$$| f_n(x) - f(x) | < \varepsilon.$$

Misalkan diberi $\varepsilon_n = {}^1/n$ dan $\delta_n = 2^{-n}\eta$. Dapat kita cari himpunan A_n dengan $m(A_n) < 2^{-n}\eta$ dan $N_n \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga untuk semua $x \notin A_n$ dan $k \geq N_n$ berlaku

$$| f_k(x) - f(x) | < {}^1/n.$$

Bila $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, maka dari sifat terjumlah terbilang pada m diperoleh , $m(A) = \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n) < \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}\eta < \eta$.

Untuk ε_n yang diberikan dapat dicari w sedemikian hingga ${}^1/w < \varepsilon$. Bila $x \notin A_m$ untuk $k \geq N_m$ maka dipenuhi

$$| f_k(x) - f(x) | < {}^1/m < \varepsilon.$$

Bila $x \notin A$ maka untuk semua $n \in \mathbb{N}$, $x \notin A_n$, jadi $x \notin A_m$, sehingga terdapat N_m sedemikian hingga berlaku:

$$(\forall k \geq N_m), \; | f_k(x) - f(x) | < \varepsilon,$$

yang berarti f_n konvergen seragam ke f. ∎

BAB V

INTEGRAL LEBESGUE

Untuk melengkapi pembicaraan teori ukuran pada bab sebelumnya, berikut ini akan dibahas dasar-dasar pengintegralan menurut H. Lebesgue yang kemudian dikenal sebagai **Integral Lebesgue.** Pembicaraan mengenai integral Lebesgue ini akan kita batasi hanya pada fungsi terbatas yang didefinisikan pada himpunan terbatas dengan ukuran berhingga. Selanjutnya kita akan melihat kembali definisi integral menurut Riemann.

V.1. Integral Lebesgue Fungsi Terbatas pada Himpunan dengan Ukuran Berhingga.

V.1.1. Fungsi Karakteristik.

Fungsi χ pada himpunan E yang dinotasikan dengan χ_E dan didefinisikan sebagai berikut,

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & , \text{ jika } x \in E. \\ \emptyset & , \text{ jika } x \notin E. \end{cases}$$

disebut **fungsi karakteristik** (*characteristic function*) dari himpunan E. Bila E_i adalah himpunan bagian dari E sedemikian hingga $E = \bigcup_{i=1}^{n} E_i$, jelas bagi kita bahwa kombinasi linear

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \chi_{E_i}(x)$$

merupakan suatu **fungsi sederhana**.

Bila φ adalah fungsi sederhana, $\{ a_1, a_2, \ldots, a_n \}$ adalah himpunan nilai fungsi φ yang tidak sama dengan nol, dan $A_i = \{ x : \varphi(x) = a_i \}$, maka

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \chi_{A_i}$$

disebut **bentuk kanonik** dari φ.

V.1.2. Integral Fungsi Sederhana.

Bila $\varphi = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \chi_{A_i}$ adalah bentuk kanonik dari fungsi sederhana dan terbatas φ yang didefinisikan pada $\mathbb{R}$, maka integral Lebesgue φ pada $\mathbb{R}$ didefinisikan sebagai berikut,

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi\,(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot m(\,A_i).$$

Karena $m(A_i)$ fungsi bernilai real tak negatif, maka $\int_{\mathbb{R}} \varphi\,(x)\,dx$ juga bernilai tak negatif bila $\varphi \geq 0$ h.d. Selanjutnya, $\int_{\mathbb{R}} \varphi\,(x)\,dx$ ditulis dengan $\int \varphi$ saja. Bila E adalah suatu himpunan terukur di mana φ didefinisikan, maka integral φ pada himpunan E didefinisikan sebagai,

$$\int_{E} \varphi = \int_{E} \varphi \cdot \chi_E .$$

Bentuk ini digunakan pula untuk menyajikan bentuk non kanonik.

Teorema V.1.2.1 : Bila $\varphi = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \chi_{E_i}$, dimana E_i adalah himpunan-himpunan terukur yang saling asing dengan ukuran berhingga, di mana φ didefinisikan, maka

$$\int \varphi = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot m\,(E_i).$$

Bukti : Misalkan $A_a = \{ x : \varphi(x) = a \} = \bigcup_{a_i = a} E_i$.

Dari sifat terjumlah berhingga m akan kita peroleh :

$$a \cdot m(A_a) = \sum_{a_i = a} a_i \cdot m(E_i).$$

Sehingga,

$$\int \varphi = \sum a \cdot m(A_a).$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot m(E_i). \blacksquare$$

Teorema V.1.2.2 : Bila φ dan ψ adalah dua fungsi sederhana dan terbatas, maka $\int (a\varphi + b\psi) = a\int \varphi + b\int \psi$. Bila $\varphi \geq \psi$ h.d, maka $\int \varphi \geq \int \psi$.

Bukti : Misalkan $\{A_i\}$ dan $\{B_i\}$ adalah himpunan yang terbentuk dari bentuk kanonik φ dan ψ, dengan a_o dan B_o masing-masing adalah himpunan dimana φ dan ψ bernilai nol. Dengan mengambil $A_i \cap B_j = E_k$ untuk semua i,j akan kita peroleh himpunan terukur $\{E_k\}_{k=1}^{N}$ yang saling asing, sehingga φ dan ψ masing-masing dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$\varphi = \sum_{k=1}^{N} a_k \cdot \chi_{E_k}.$$

$$\psi = \sum_{k=1}^{N} b_k \cdot \chi_{E_k}.$$

Maka, $a\varphi + b\psi = a \sum_{k=1}^{N} a_k \cdot \chi_{E_k} + b \sum_{k=1}^{N} b_k \cdot \chi_{E_k}$.

$$= \sum_{k=1}^{N} (a.a_k + b.b_k)\, \chi_{E_k}.$$

Sehingga, $\int a\varphi + b\psi = \sum_{k=1}^{N} (a.a_k + b.b_k)\, m(E_k)$.

$$= a \sum_{k=1}^{N} a_k . m(E_k) + b \sum_{k=1}^{N} b_k . m(E_k).$$

$$= a\int \varphi + b\int \psi.$$

Selanjutnya, bila $\varphi > \psi$ h.d dengan φ dan ψ adalah fungsi tak negatif, maka, $\int \varphi - \int \psi = \int (\varphi - \psi) \geq 0$. Dengan demikian $\int \varphi \geq \int \psi$.∎

Teorema V.1.2.3 : Bila f adalah fungsi terbatas yang didefinisikan pada himpunan terukur E dengan $m(E) < \infty$, maka $\inf\limits_{f\leq \psi} \int \psi = \sup\limits_{f \geq \varphi} \int \varphi$,

untuk fungsi-fungsi sederhana ψ dan φ, adalah syarat perlu dan cukup agar f terukur.

Bukti : Andaikan f fungsi terukur dengan $|f| \leq M$ dan $E_k = \left\{ x : \frac{k.M}{n} \geq f(x) > \frac{(k-1).M}{n} \right\}$, untuk bilangan bulat k dengan $-n \leq k \leq n$. Tampak bahwa E_k terukur dan $E_i \cap E_j = \phi$ untuk $i \neq j$. Bila $E = \bigcup_{k=-n}^{n} E_k$, maka menurut sifat terjumlah berhingga dari m diperoleh :

$$\sum_{k=-n}^{n} m (E_k) = m (E).$$

Fungsi sederhana ψ_n dan φ_n yang didefinisikan dengan

$$\psi_n (x) = \frac{M}{n} \sum_{k=-n}^{n} k.\chi_{E_k}(x) \text{ dan}$$

$$\varphi_n (x) = \frac{M}{n} \sum_{k=-n}^{n} (k-1).\chi_{E_k}(x)$$

memenuhi $\varphi_n(x) \leq f(x) \leq \psi_n(x)$. Jadi,

$$\inf_{f\leq\psi} \int_E \psi \leq \int_E \psi_n = \frac{M}{n} \sum_{k=-n}^{n} k.m(E_k).$$

sementara $\sup_{f \geq \varphi} \int_E \varphi \leq \int_E \varphi_n = \frac{M}{n} \sum_{k=-n}^{n} (k-1).m(E_k)$.

Sehingga :

$$\emptyset \leq \inf_{f \leq \psi} \int \psi - \sup_{f \geq \varphi} \int \varphi \leq \frac{M}{n} \sum_{k=-n}^{n} (k - k + 1).m(E_k).$$

$$= \frac{M}{n} . m(E).$$

Karena n sebarang, maka :

$$\emptyset \leq \inf_{f \leq \psi} \int_E \psi - \sup_{f \geq \varphi} \int_E \varphi \leq \emptyset$$

Dengan demikian, $\inf_{f \leq \psi} \int_E \psi = \sup_{f \geq \varphi} \int_E \varphi$.

Misalkan $\inf_{\psi \geq f} \int_E \psi = \sup_{\varphi \leq f} \int_E \varphi = A$.

Maka dapat dicari fungsi sederhana ψ_n dan φ_n sedemikian hingga $\varphi_n(x) \leq f(x) \leq \psi_n(x)$. Diberikan $\varepsilon = \frac{1}{n}$, maka terdapat ψ dan φ sedemikian hingga $\inf_{f \leq \psi_n} \int \psi_n < A + \frac{\varepsilon}{2}$, dan $\sup \int \varphi_n > A - \frac{\varepsilon}{2}$. Sehingga,

$$\int \psi_n - \int \varphi_n < A + \frac{\varepsilon}{2} - A + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon = \frac{1}{n}.$$

Bila $\Delta_\nu = \{ x \in E |\ \varphi^*(x) < \psi^*(x) - \frac{1}{\nu} \}$, dimana ψ^* adalah $\inf_{f \leq \psi_n} \psi_n$ dan $\varphi^* = \sup_{f \geq \varphi_n} \varphi_n$, maka $\Delta = \bigcup_\nu \Delta_\nu = \{x | \varphi^*(x) < \psi^*(x)\}$ dan $\Delta_\nu \in \{ x \in E |\ \varphi_n(x) < \psi_n(x) - \frac{1}{\nu} \}$. Kita dapatkan hubungan,

$$\frac{1}{\nu}. m(\Delta_\nu) < m (\Delta_\nu) = \int_{\Delta_\nu} \psi_n - \varphi_n < \int \psi_n - \varphi_n < \frac{1}{n},$$

jadi, $m (\Delta_\nu) < \frac{\nu}{n}$. Untuk semua n, berlaku $\varphi_n \leq \varphi^* \leq \psi^* \leq \psi_n$, maka pada Δ_ν berlaku $\psi_n - \varphi_n > \psi^* - \varphi^* > \frac{1}{\nu}$, sebab $\Delta = \bigcup_\nu \Delta_\nu$. Sehingga menurut sifat sub-terjumlah terbilang m diperoleh : $m(\Delta) \le \sum_{\nu} m(\Delta_{\nu}) = \emptyset$, jadi $m(\Delta) = \emptyset$. Jadi $\varphi^{*} = \psi^{*}$ kecuali pada Δ, dengan demikian $\varphi^{*} = f = \psi^{*}$ kecuali pada himpunan dengan ukuran nol. Karena $\langle \varphi_n \rangle$ dan $\langle \psi_n \rangle$ adalah barisan fungsi terukur, maka menurut teorema V.1.2.3, φ^{*} dan ψ^{*} terukur, jadi f terukur.

Definisi V.1.2.1 : Jika f fungsi terbatas dan terukur yang didefinisikan pada himpunan terukur E dengan m(E) berhingga maka integral Lebesgue dari fungsi f pada E didefinisikan sebagai berikut,

$$\int_E f(x)\,dx = \inf_{f \le \psi} \int_E \psi(x)\,dx,$$

untuk fungsi-fungsi sederhana ψ.

Untuk selanjutnya $\int_E f(x)\,dx$ ditulis dengan $\int_E f$ saja, dan bila $E = [a, b]$, maka $\int_{[a,b]} f$ dituliskan sebagai $\int_a^b f$.

V.1.3. Sifat-sifat Integral Fungsi Terbatas

Berikut ini akan kita lihat sifat-sifat penting yang berlaku pada integral fungsi terbatas. Bila f dan g adalah dua fungsi terbatas dan terukur yang didefinisikan pada himpunan terukur E dengan $m(E) < \infty$, maka mudah dimengerti berlakunya sifat-sifat berikut :

1. $\int_E (af + bg) = a\int_E f + b\int_E g$.

2. Jika $f \le g$ h.d, maka $\int_E f \le \int_E g$.

3. Jika $K \le f \le L$, maka $K.m(E) \le \int_E f \le L.m(E)$.

4. Jika A dan B adalah dua himpunan terukur yang saling asing dengan ukuran berhingga, maka

$$\int_{A \cup B} f = \int_A f + \int_B f.$$

Teorema V.1.3.1 (Teorema Konvergensi Terbatas) :

$\langle f_n \rangle$ barisan fungsi terukur yang didefinisikan pada himpunan terukur E dengan $m(E) < \infty$, dan terdapat $M \in \mathbb{R}$ sedemikian hingga $(\forall n \in \mathbb{N})(\forall x \in E)$, $|f_n(x)| \le M$. Jika $(\forall x \in E)$, $f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$, maka :

$$\int_E f = \lim_{n \to \infty} \int_E f_n$$

Bukti : Menggunakan teorema IV.4.7, jika diberi $\varepsilon > 0$ dan $\delta = \frac{\varepsilon}{4M}$, maka terdapat $N \in \mathbb{N}$ dan himpunan terukur $A \subset E$ dengan $m(A) < \delta$ sedemikian hingga untuk semua $n \ge N$ dan $x \in E - A$ berlaku

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Dengan demikian, $\left| \int_E f_n - \int_E f \right| = \left| \int_E (f_n - f) \right|$.

$$\le \int_E |f_n - f|.$$

$$= \int_{E-A} |f_n - f| + \int_A |f_n - f|.$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Karena $\varepsilon > 0$ sebarang, maka $\left| \int_E f_n - \int_E f \right| = 0$, yang berarti $\int f = \lim \int f_n$. ∎

V.2. Integral Riemann

Fungsi f yang terbatas dan bernilai real didefinisikaan pada interval [a, b]. Partisi P pada interval [a, b], yaitu { $a = x_o, x_1, x_2, \ldots, x_n = b$ } sedemikian hingga $a = x_o < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$, membagi [a, b] dalam n sub interval. Bila $M_i = \sup_{x_{i-1} < x < x_i} f(x)$ dan $m_i = \inf_{x_{i-1} < x < x_i} f(x)$, maka

$$S = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}).M_i \quad \text{dan} \quad s = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}).m_i$$

masing-masing disebut jumlah atas dan jumlah bawah Riemann. Sedangkan bilangan-bilangan

$$R\overline{\int_a^b} f(x)\, dx = \inf S, \text{ dan}$$

$$R\underline{\int_a^b} f(x)\, dx = \sup s$$

dimana supremum dan infimum diambil atas semua sub interval dari [a, b], masing-masing disebut integral atas dan integral bawah Riemann dari fungsi f pada interval [a, b].

Definisi V.2.1 : Fungsi terbatas f bernilai real yang didefinisikan pada interval [a, b] disebut **terintegral Rieman** (*Riemann integrable*), bila

$$R\overline{\int_a^b} f(x)\, dx = R\underline{\int_a^b} f(x)\, dx,$$

dan nilai integral Riemann dari f pada [a, b] adalah sama dengan nilai integral atas atau integral bawah Riemann yang kemudian kita tuliskan sebagai $R\int_a^b f(x)\, dx$.

Bila ψ adalah suatu fungsi tangga, yaitu $\psi(x) = k_i$ untuk $x_{i-1} < x < x_i$, maka $\sup_{x_{i-1}<x<x_i} f(x) = \inf_{x_{i-1}<x<x_i} f(x)$ sehingga, $R\int_a^b \psi(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} k_i.(x_i - x_{i-1})$. Jadi, bila ψ fungsi tangga pada [a, b] dimana $\psi(x) \geq f(x)$ untuk semua $x \in [\ a,\ b\ ]$, maka berlaku :

$$R\int_a^b f(x)\,dx = \inf_{f\leq\psi} R\int_a^b \psi(x)\,dx.$$

Sedangkan bila φ fungsi tangga pada [a, b] dan $\varphi(x) \leq f(x)$ untuk setiap $x \in [\ a,\ b\ ]$, maka :

$$R\int_a^b f(x)\,dx = \sup_{f\geq\varphi} R\int_a^b \varphi(x).$$

Teorema V.2.1 : Misalkan f fungsi terbatas yang didefinisikan pada [a, b]. Bila f terintegral Riemann pada [a, b], maka f terukur dan

$$R\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Bukti : Misalkan φ dan ψ adalah dua fungsi tangga dimana $\varphi \leq f$ dan $\psi \geq f$, maka berlaku

$$\overline{R\int_a^b} f(x)\,dx \leq \sup_{\varphi\leq f} \int_a^b \varphi(x)\,dx \leq \inf_{\psi\geq f} \int_a^b \psi(x)\,dx \leq \underline{R\int_a^b} f(x)\,dx.$$

Karena f terintegral Riemann, maka,

$$\overline{R\int_a^b} f(x)\,dx = \underline{R\int_a^b} f(x)\,dx,$$

Jadi $R\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$, dan menurut teorema V.1.2.3 fungsi f terukur.■

Contoh 1 : Diberikan fungsi f dengan daerah asal [a, b], dan untuk semua $x \in [\ a,\ b\ ]$, $f(x)$ didefinisikan sebagai berikut,

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{, jika } x \text{ rasional.} \\ \emptyset & \text{, jika } x \text{ irrasional.} \end{cases}$$

Integral atas Riemann fungsi f adalah :

$$R\overline{\int} f(x)\,dx = \inf \sum_{i=1}^{n} (\ x_i - x_{i-1}\ )\ M_i .$$

$$= \inf \sum_{i=1}^{n} \Delta\ x_i .$$

$$= b - a.$$

Sedangkan integral bawah Riemann fungsi f adalah :

$$R\underline{\int} f(x)\,dx = \sup \sum_{i=1}^{n} (\ x_i - x_{i-1})m_i .$$

$$= \emptyset.$$

Karena $R\overline{\int} f(x)\,dx \neq R\underline{\int} f(x)\,dx$, maka fungsi f ini tidak terintegral Riemann.

Contoh 2 : Jika $\mathbb{Q}$ adalah himpunan semua bilangan rasional pada interval [Ø, 1], maka fungsi f di atas tidak lain adalah fungsi karakteristik dari $\mathbb{Q}$, yaitu $\chi_{\mathbb{Q}}$. Karena $\mathbb{Q}$ adalah himpunan terbilang, menurut contoh IV.2, $m(\mathbb{Q}) = \emptyset$. Sehingga, $\int f = \int \chi_{\mathbb{Q}} = m\,(\ \mathbb{Q}\ ) = \emptyset$. Jadi f terintegral Lebesgue dengan $\int f = \emptyset$.

Contoh 3 : Misalkan $\mathbb{Q}$ himpunan semua bilangan rasional pada interval [Ø, 1], maka $\mathbb{Q}$ dapat dituliskan sebagai $\{\ r_1,\ r_2,\ r_3,\ \ldots .\ \}$. Bila $\langle f_n \rangle$ suatu barisan fungsi dimana untuk untuk semua $n \in \mathbb{N}$, f_n didefinisikan sebagai berikut :

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{, untuk } x = r_1, r_2, \ldots, r_n. \\ \emptyset & \text{, untuk } x \text{ yang lain.} \end{cases}$$

Bila f adalah fungsi pada $\mathbb{R}$ yang didefinisikan dengan

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{, untuk } x \text{ rasional.} \\ \emptyset & \text{, untuk } x \text{ irrasional.} \end{cases},$$

maka $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$.

Pada contoh V.2 di atas telah ditunjukkan bahwa $\int f = \emptyset$.

Sedangkan $\int f_n = 1.m(\{ r_1, r_2, \ldots, r_n \})$.

$$= \emptyset.$$

Jadi, $\lim\limits_{n\to\infty} \int f_n = \int f$.

Sekarang diberikan $\varepsilon > \emptyset$ sebarang. Untuk semua $r_n \in \mathbb{Q}$ dapat dicari interval (ξ_{i-1}, ξ_i) yang memuat r_i dengan $\xi_i - \xi_{i-1} < \frac{\varepsilon}{2i}$, sehingga $S = \sum_{i=1}^{n} (\xi_i - \xi_{i-1}).M_i$.

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon}{2i} \cdot 1 .$$

$$= \varepsilon.$$

Karena $\varepsilon > \emptyset$ sebarang, maka $S = \emptyset$, sehingga

$$R\overline{\int} f_n(x)\,dx = \inf S = \emptyset.$$

Sedangkan $\inf f_n(x) = \emptyset$, sehingga $R\underline{\int} f_n(x)\,dx = \emptyset$.

Dengan demikian f_n terintegral Rieman dengan $R\int f_n = \emptyset$, sehingga

$$\lim_{n\to\infty} R\int f_n(x)\,dx = \emptyset.$$

BAB VI

KESIMPULAN

Sistem himpunan dalam kaitannya dengan teori ukuran membawa kita pada semiring sebagai suatu sistem himpunan paling sederhana di mana dapat dibangun ukuran.

Berbicara tentang ukuran Lebesgue yang merupakan perluasan konsep panjang interval pada $\mathbb{R}$, kita akan dihadapkan pula pada fungsi himpunan yang disebut ukuran luar Lebesgue. Perbedaan antara kedua fungsi himpunan ini terletak pada sifat yang dimiliki. Pada ukuran luar Lebesgue, fungsi himpunan dapat terdefinisikan untuk semua himpunan bagian $\mathbb{R}$, tetapi fungsi himpunan ini tidak memenuhi sifat terjumlah terbilang sebagaimana ada pada ukuran Lebesgue. Pada hal sifat ini dipenuhi oleh panjang interval untuk himpunan-himpunan bagian $\mathbb{R}$ yang saling asing. Tetapi, ukuran luar tersebut akan memenuhi sifat terjumlah terbilang apabila daerah definisinya dibatasi pada suatu keluarga himpunan bagian dari keluarga semua himpunan bagian $\mathbb{R}$, yang memiliki struktur matematis aljabar-σ.

Suatu himpunan terukur dapat dihampiri oleh suatu himpunan terbuka atau tertutup, dan suatu fungsi terukur dapat dihampiri oleh suatu fungsi tangga atau fungsi kontinu. Kenyataan ini membawa kita pada suatu cara pengintegralan menurut H. Lebesgue yang kemudian dikenal sebagai integral Lebesgue.

Integral Lebesgue mempunyai sifat yang penting, yaitu jika $\langle f_n \rangle$ adalah barisan fungsi-fungsi terukur yang konvergen ke fungsi f, maka $\lim\limits_{n \to \infty} \int f_n$ ada dan sama dengan $\int f$. Sementara itu, pada pengintegralan menurut Riemann, $\lim\limits_{n \to \infty} \int f_n$ belum tentu ada.

DAFTAR PUSTAKA

Aliprantis, Charalambos D & Burkinshaw, Owen.
1990 . *Principles of Real Analysis*. Ed. ke-2. San Diego : Academic Press, Inc.

Kolmogorov, A.N. & Fomin, S.V.
1970 . *Introductory Real Analysis*. Translated & edited by Richard A. Silverman. New York : Dover Publication Inc.

MC. Coy, NH
1987 . *Introduction to Modern Algebra*. Boston : Allyn and Bacon Inc.

Malik, SC
1984 . *Mathematical Analysis*. New Delhi : Wiley Eastern Limited

Royden, H.L.
1968 . *Real Analysis*. New York : Macmillan Publishing Company Inc.

Stoll, Robert R.
1976 . *Set Theory And Logic*. New Delhi : Eurasia Publishing House (PVT) LTD.