RUANG TOPOLOGI YANG TERHUBUNG

SKRIPSI

Diajukan untuk memenuhi salah satu syarat
memperoleh gelar Sarjana Pendidikan
Program Studi Pendidikan Matematika

Oleh :

NATALINA SALIM

NIM : S1 / 90414017 / P.Mat
NIRM : 900052010501120015

PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA
JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA DAN
ILMU PENGETAHUAN ALAM
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
UNIVERSITAS SANATA DHARMA
YOGYAKARTA

1996

RUANG TOPOLOGI YANG TERHUBUNG

SKRIPSI

Diajukan untuk memenuhi salah satu syarat
memperoleh gelar Sarjana Pendidikan
Program Studi Pendidikan Matematika

Oleh

NATALINA SALIM

NIM : S1 / 90414017 / P. Mat
NIRM : 900052010501120015

PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA
JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
UNIVERSITAS SANATA DHARMA
YOGYAKARTA
1996

SKRIPSI

RUANG TOPOLOGI YANG TERHUBUNG

Oleh

NATALINA SALIM

NIM : S1 / 90414017 / P. Mat
NIRM : 900052010501120015

Telah disetujui oleh

Pembimbing I tanggal 17 - 5 - 1996

Dr. F. Susilo, SJ

Pembimbing II tanggal 17 - 5 - 1996

Drs. St. Susento, M.Si.

SKRIPSI

RUANG TOPOLOGI YANG TERHUBUNG

Yang dipersiapkan dan disusun oleh

NATALINA SALIM

NIM : S1 / 90414017 / P. Mat
NIRM : 900052010501120015

Telah dipertahankan di depan Dewan Penguji
pada tanggal 30 April 1996
dan dinyatakan telah memenuhi syarat

Susunan Dewan Penguji

	Nama lengkap	Tanda tangan
Ketua	: Dr. St. Suwarsono	....
Sekretaris	: Dr. Y. Marpaung	....
Anggota	: Dr. F. Susilo, SJ	....
Anggota	: Drs. St. Susento, M.Si.	....

Yogyakarta, ...17 Mei...... 1996
Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan
Universitas Sanata Dharma
Dekan

Dr. A. Priyono Marwan, SJ

KATA PENGANTAR

Terpujilah Allah Bapa dan Tuhan Yesus Kristus, karena kasih karunia dan rahmatNya yang melimpah, sehingga skripsi ini dapat selesai sesuai rencanaNya. Adapun skripsi dengan judul "Ruang Topologi yang Terhubung" ini disusun untuk memenuhi salah satu persyaratan untuk mencapai gelar Sarjana Pendidikan pada Program Studi Pendidikan Matematika di Universitas Sanata Dharma Yogyakarta.

Segala suka dan duka yang penulis alami selama proses berlangsungnya pembuatan skripsi ini sampai selesainya, tidaklah terlepas dari keterlibatan berbagai pihak. Untuk itu dengan penuh rasa syukur, penulis mengucapkan terima kasih atas segala perhatian, dorongan, dukungan baik moril maupun spiritual kepada semua pihak, antara lain :

1. Dr. St. Suwarsono selaku ketua Jurusan PMIPA Universitas Sanata Dharma Yogyakarta.
2. Dr. Frans Susilo, SJ selaku dosen pembimbing I dan Drs. St. Susento, M.Si. selaku dosen pembimbing II yang telah memberikan dorongan dan bimbingan selama proses penyusunan skripsi ini dengan tekun, sabar dan bijaksana.
3. Dra. A. Linda Yuliastuti dan P. Heruningsih Prima Rosa, S.Si. selaku dosen wali yang telah memberi saran, membantu dan membimbing selama pelaksanaan studi.

4. Pihak staf Perpustakaan USD, UGM dan UI yang telah membantu dalam proses pencarian dan peminjaman buku-buku penunjang untuk skripsi ini.
5. Pihak staf UPT Komputer dan karyawan-karyawati Universitas Sanata Dharma Yogyakarta.
6. Para sahabat yang terkasih Asfar Afiati N, Lusia Alice, A. Prasetyadi dan St. Agung Sulistyanto yang telah memberi semangat dan bantuan dalam menyelesaikan skripsi ini.
7. Kedua orang tua dan kakak-kakak terkasih yang telah mendoakan, memahami dan menganjurkan penulis untuk menyelesaikan skripsi ini.
8. Rekan-rekan Asrama Syantikara, Tuple ′90 dan saudara-saudari yang terlibat langsung maupun tidak langsung selama proses pembuatan skripsi ini dan tidak dapat penulis sebutkan satu persatu.

Penulis yakin dan percaya bahwa semua kebaikan, bantuan dan pengorbanan yang diberikan untuk penyelesaian skripsi ini dalam bentuk apapun, tidaklah sia-sia dan akan mendapatkan balasan dan penghargaan setimpal dari Yang Maha Kuasa.

Akhirnya seluruh tanggung jawab skripsi ini ada pada penulis. Oleh karena itu penulis sangat mengharapkan saran dan kritik yang membangun dari para pembaca demi perbaikan dan perkembangan dari skripsi ini selanjutnya.

Penulis

DAFTAR ISI

ABSTRAK

Ruang terhubung adalah ruang topologi yang tidak dapat dinyatakan sebagai gabungan dua himpunan terbuka yang tidak kosong dan saling asing. Pada suatu ruang terhubung X hanya ada dua himpunan bagian yang sekaligus terbuka dan tertutup yaitu himpunan X dan himpunan kosong. Sifat keterhubungan pada ruang topologi diawetkan oleh fungsi kontinyu. Perkalian dua ruang topologi yang terhubung merupakan ruang topologi yang juga terhubung. Dan selanjutnya perkalian n ruang topologi yang terhubung juga terhubung.

Komponen dari suatu ruang topologi ialah ruang bagian terhubung maksimal yang tidak termuat dalam ruang bagian terhubung lainnya yang lebih besar. Ruang terhubung hanya terdiri dari satu komponen saja. Setiap komponen dari ruang topologi adalah tertutup.

Ruang topologi terhubung lokal pada suatu titik adalah ruang topologi dengan sifat bahwa setiap kitar dari titik tersebut memuat suatu kitar terhubung dari titik itu. Keterhubungan lokal ini tidak merupakan akibat maupun sebab dari keterhubungan. Setiap komponen dari ruang terhubung lokal adalah terbuka.

Jenis lain dari keterhubungan adalah keterhubungan lintasan. Dalam ruang terhubung lintasan, untuk setiap pasang titik terdapat suatu fungsi kontinyu yang menghubungkan kedua titik tersebut.

Salah satu penerapan ruang topologi yang terhubung yaitu dalam membuktikan teorema nilai tengah. Juga dibuktikan bahwa sifat titik tetap adalah sifat topologis, yaitu diawetkan oleh pemetaan homeomorfisma.

ABSTRACT

A connected space is a topological space which cannot be represented as the union of two nonempty disjoint open sets. In a connected space X there are only two subsets of X that are simultaneously open and closed, i.e X itself and the empty set. The property of connectedness is preserved by continuous mappings. The product of two connected spaces is a connected space. Furthermore, the product of n connected spaces is connected.

Component of a topological space is a maximal connected subspace which is not properly contained in any larger connected subspace. A connected space has only one component. Each component of topological space is closed.

A locally connected space at a point is a topological space with the property that each neighborhood of the point contains a connected neighborhood of that point. Local connectedness, however, neither implies nor is implied by connectedness. Each component of a local connected space is open.

Another type of connectedness is arcwise connectedness. In an arcwise connected space, for each pair of points, there is a continuous function connecting the points.

One application of connected space is to prove the intermediate value theorem. We also prove that the fixed-point property is a topological property, i.e preserved by a homeomorphism.

BAB I

PENDAHULUAN

Ketika orang mulai mengenal dunia sekolah dan tahu tentang matematika, ada yang merasa bahwa matematika itu sulit, menakutkan. Kali ini penulis mencoba menampilkan sebagian matematika yang sulit, menakutkan tetapi juga menyenangkan itu, dalam topik " Ruang Topologi Yang Terhubung ".

Ruang topologi terhubung merupakan topik lanjutan dari mata kuliah Topologi pada program studi Pendidikan Matematika. Dalam skripsi ini Ruang Topologi beserta sifat-sifatnya digunakan sebagai pengetahuan dasar yang perlu diketahui, dimengerti dan dipahami. Tentang ruang topologi itu sendiri tidak dibahas secara rinci dan mendalam.

Pembahasan dimulai dengan uraian tentang ruang metrik. Suatu metrik pada himpunan yang tidak kosong adalah suatu fungsi bernilai real d dari pasangan terurut elemen-elemen himpunan itu dengan memenuhi syarat untuk sebarang elemen x,y,z dalam himpunan itu berlaku : $d(x,y) \geq 0$ dan $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$, $d(x,y) = d(y,x)$, $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$. Dan untuk selanjutnya bilangan $d(x,y)$ yang tidak negatif dan yang tidak bergantung pada urutan elemennya itu disebut jarak antara x dan y. Pada garis bilangan real $\mathbb{R}$ dapat didefinisikan suatu metrik yaitu $d(x,y) = |x-y|$ yang disebut metrik biasa pada $\mathbb{R}$.

Dalam ruang metrik dapat didefinisikan bola terbuka dan himpunan terbuka. Pengertian himpunan terbuka nanti akan digunakan dalam ruang topologi.

Selanjutnya dibicarakan tentang ruang topologi. Teorema pada ruang metrik tentang himpunan terbuka menjadi dasar dari definisi ruang topologi pada suatu himpunan X, yaitu gabungan anggota-anggota topologi adalah anggota topologi dan irisan berhingga banyak anggota topologi adalah anggota topologi. Kemudian melalui contoh-contoh diperlihatkan adanya macam-macam ruang topologi dengan kekhususannya masing-masing.

Pembahasan berikutnya tentang fungsi kontinyu dan fungsi terbuka pada ruang topologi. Selain itu dijelaskan pula tentang homeomorfisma pada ruang topologi yaitu fungsi yang bijektif, kontinyu, dan terbuka.

Dalam skripsi ini dibahas pula beberapa konsep dasar dalam ruang topologi yang diperlukan untuk pembahasan selanjutnya. Adapun konsep-konsep dasar itu adalah kitar, titik limit, titik sendiri, titik dalam, penutup dan batas.

Suatu ruang topologi dapat mempunyai basis yaitu suatu klas himpunan-himpunan terbuka dengan sifat bahwa setiap himpunan terbuka dalam ruang topologi tersebut merupakan gabungan dari himpunan-himpunan dalam klas tersebut. Sedangkan subbasis adalah klas himpunan-himpunan terbuka yang irisan berhingga anggota-anggotanya membentuk suatu basis dari ruang topologinya.

Dari dua ruang topologi dapat dibentuk ruang topologi produk yang basisnya adalah klas dari semua perkalian kartesius himpunan-himpunan terbuka dari kedua topologi tersebut.

Pembahasan selanjutnya adalah tentang topologi terurut. Dalam hal ini perlu dipahami terlebih dahulu tentang konsep relasi. Suatu relasi pada suatu himpunan disebut relasi urutan sederhana bila memiliki sifat dapat dibandingkan, nonrefleksif dan transitif. Topologi terurut adalah topologi yang didefinisikan pada suatu himpunan yang dilengkapi relasi urutan sederhana dan mempunyai basis yang terdiri dari himpunan-himpunan berbentuk interval.

Pokok bahasan utama skripsi ini ialah Ruang Topologi Yang Terhubung. Ruang topologi terhubung didefinisikan melalui ruang topologi yang tak terhubung. Ruang topologi X dikatakan tak terhubung bila dapat dinyatakan dalam bentuk $X = A \cup B$, di mana A dan B adalah himpunan-himpunan terbuka yang tidak kosong dan saling asing. Ruang topologi adalah terhubung bila ruang itu tidak tak terhubung.

Suatu ruang topologi yang tidak terhubung dapat dipecah menjadi ruang-ruang bagian terhubung maksimal yang saling asing. Ruang bagian terhubung maksimal dari suatu ruang topologi disebut komponen ruang topologi itu. Setiap titik dalam ruang topologi termuat dalam tepat satu komponen dari ruang topologi itu. Beberapa sifat lain diberikan dalam teorema tentang komponen ruang topologi.

Selanjutnya dibicarakan tentang ruang topologi yang terhubung lokal. Keterhubungan lokal ini tidak merupakan akibat maupun sebab dari keterhubungan. Hal tersebut diperlihatkan dengan contoh. Pada ruang terhubung lokal komponen-komponennya adalah terbuka.

Jenis keterhubungan lain yang dibahas dalam skripsi ini adalah keterhubungan lintasan. Pada suatu ruang terhubung lintasan X, untuk tiap pasang titiknya terdapat suatu fungsi kontinyu $f : [0,1] \longrightarrow X$ yang menghubungkan pasangan titik itu. Sifat keterhubungan lintasan ini lebih kuat daripada keterhubungan, dalam arti bahwa suatu ruang topologi terhubung lintasan pasti terhubung.

Akhirnya diberikan suatu penerapan keterhubungan pada ruang topologi terurut dalam membuktikan teorema nilai tengah.

BAB II

RUANG TOPOLOGI

1. Ruang Metrik

Ruang metrik seringkali diperkenalkan sebelum orang mempelajari secara lebih mendalam ruang topologi. Hal-hal mendasar dalam ruang topologi berasal dari ruang metrik. Berikut ini diuraikan terlebih dahulu definisi metrik.

Definisi 2. 1. : Andaikan X himpunan tidak kosong. Suatu *metrik* pada X adalah suatu fungsi bernilai real d dari pasangan terurut elemen-elemen X yang memenuhi syarat sebagai berikut : untuk sebarang elemen x,y,z di dalam X berlaku :

1. $d(x,y) \geq 0$, dan $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. $d(x,y) = d(y,x)$
3. $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$.

Untuk setiap pasangan (x,y) dari elemen-elemen X fungsi d menentukan suatu bilangan real tidak negatif d(x,y), yang menurut syarat 2 tidak bergantung pada urutan elemen-elemennya. Bilangan d(x,y) itu disebut *jarak* antara x dan y.

Suatu himpunan X yang tidak kosong dan dilengkapi dengan suatu metrik d pada X disebut *ruang metrik*. Elemen-elemen dari X disebut *titik* dari ruang metrik (X,d).

Contoh :

Andaikan $\mathbb{R}$ garis bilangan real dan fungsi real $|x|$ didefinisikan pada $\mathbb{R}$. Fungsi nilai mutlak tersebut memenuhi tiga sifat sebagai berikut :

1. $|x| \geq 0$, dan $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2. $|-x| = |x|$
3. $|x+y| \leq |x| + |y|$.

Didefinisikan suatu metrik pada $\mathbb{R}$ yaitu $d(x,y) = |x-y|$ yang disebut *metrik biasa* pada $\mathbb{R}$. Maka garis bilangan real $\mathbb{R}$ tersebut merupakan ruang metrik dengan metrik d, karena ketiga sifat di atas dipenuhi :

1. $d(x,y) = |x-y| \geq 0$, dan $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x-y = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. $d(x,y) = |x-y| = |-(y-x)| = |y-x| = d(y,x)$
3. $d(x,y) = |x-y| = |(x-z) + (z-y)| \leq |x-z| + |z-y| =$
   $d(x,z) + d(z,y)$.

Berdasarkan contoh di atas dapat disimpulkan :

1. Terlebih dahulu didefinisikan ukuran dari suatu elemen x, yaitu suatu bilangan real yang dinotasikan dengan $\|x\|$ dan disebut *norma*. Di sini digunakan dua garis ver-

tikal dengan maksud untuk menunjukkan bahwa norma merupakan generalisasi dari nilai mutlak pada contoh di atas, yang juga memenuhi sifat-sifat yaitu :

(1). $\|x\| \geq 0$, dan $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(2). $\|-x\| = \|x\|$

(3). $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

2. Suatu metrik dapat didefinisikan dari norma, yaitu norma dari selisih antara dua elemen : $d(x,y) = \|x-y\|$. Dalam contoh di atas telah diperlihatkan bahwa d adalah suatu metrik, dengan mempergunakan sifat-sifat dari norma tersebut di atas. Metrik semacam ini disebut *metrik yang dihasilkan oleh norma.*

Definisi 2. 2. : Andaikan X suatu ruang metrik yang dilengkapi dengan metrik d. Jika x adalah titik dari X dan r adalah bilangan real positif, maka *bola terbuka* $B_r(x)$ dengan pusat x dan jari-jari r adalah himpunan bagian dari X yang didefinisikan sebagai berikut $B_r(x) = \{ y \in X \mid d(x,y) < r \}$.

Suatu bola terbuka selalu tidak kosong, karena selalu memuat titik pusatnya. $B_r(x)$ sering disebut *bola terbuka dengan jari-jari r berpusat pada x.* Secara intuitif $B_r(x)$ adalah himpunan semua titik dalam X yang " dekat " dengan x, dengan derajat kedekatan yang diberikan oleh r.

Jika d adalah metrik biasa pada $\mathbb{R}$, $r > 0$ dan $x \in \mathbb{R}$, maka $B_r(x)$ adalah *interval terbuka* (x-r , x+r) dengan titik tengah x dan panjang total 2r.

Definisi 2. 3. : Himpunan bagian G dari ruang metrik X disebut *himpunan terbuka* jika untuk semua titik $x \in G$, maka ada bilangan real positif r sedemikian sehingga $B_r(x) \subseteq G$.

Teorema 2. 1. : Andaikan X adalah suatu ruang metrik. Maka
(1). gabungan dari himpunan-himpunan terbuka dalam X adalah terbuka
(2). irisan berhingga dari himpunan-himpunan terbuka dalam X adalah terbuka.

Bukti :

(1). Andaikan $\{G_i\}$ adalah suatu klas dari himpunan-himpunan terbuka dalam X dan $x \in \bigcup G_i$. Maka x berada dalam salah satu G_i, misalnya $x \in G_x$. Karena G_x adalah terbuka, maka ada bola terbuka $B_r(x)$ sedemikian sehingga $B_r(x) \subseteq G_x$. Karena $G_x \subseteq \bigcup G_i$, maka $B_r(x) \subseteq \bigcup G_i$. Jadi $\bigcup G_i$ adalah terbuka.

(2). Andaikan $\{G_1, G_2, \ldots, G_n\}$ adalah suatu klas berhingga dari himpunan-himpunan terbuka dalam X dan $x \in$

$\bigcap_{i=1}^{n} G_i$. Maka $x \in G_i$ untuk setiap $i = 1, 2, \ldots, n$. Oleh karena itu untuk setiap $i = 1, 2, \ldots, n$, ada bilangan real positif r_i sedemikian sehingga $B_{r_i}(x) \subseteq G_i$. Andaikan r bilangan terkecil di antara r_1, r_2, ..., r_n. Maka r adalah bilangan real positif sedemikian sehingga $B_r(x) \subseteq B_{r_i}(x)$ untuk setiap $i = 1, 2, \ldots, n$. Sehingga $B_r(x) \subseteq G_i$ untuk setiap $i = 1, 2, \ldots, n$. Maka $B_r(x) \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} G_i$. Karena $B_r(x)$ adalah bola terbuka dengan pusat x dan termuat dalam $\bigcap_{i=1}^{n} G_i$, maka $\bigcap_{i=1}^{n} G_i$ adalah terbuka. ■

2. Ruang Topologi

Sebelum mempelajari ruang topologi yang terhubung terlebih dahulu kita perlu memahami konsep ruang topologi. Ruang topologi adalah suatu ruang abstrak dengan sifat-sifat tertentu, seperti dapat dilihat dari definisi di bawah ini.

Definisi 2. 4. : Andaikan X suatu himpunan yang tidak kosong. Suatu klas τ yang terdiri dari himpunan-himpunan bagian dari X disebut *topologi pada X* bila dan hanya bila memenuhi :

1. Gabungan anggota-anggota τ adalah anggota τ.
2. Irisan berhingga banyak anggota τ adalah anggota τ.

Pasangan (X,τ), yang terdiri dari himpunan X yang tidak kosong dan topologi τ pada X, disebut *ruang topologi*. Ruang topologi (X,τ) sering hanya ditulis dengan notasi X saja. Himpunan-himpunan dalam topologi τ disebut *himpunan terbuka* dari ruang topologi (X,τ) dan elemen-elemen X disebut *titik*. Pada setiap ruang topologi (X,τ) himpunan kosong $\emptyset$ dan himpunan X sendiri selalu merupakan himpunan terbuka, karena himpunan kosong dan himpunan X itu berturut-turut merupakan gabungan dan irisan dari klas kosong himpunan-himpunan terbuka dalam X.

Contoh 1 :

Jika X = { a,b,c,d,e }, maka dapat dibentuk topologi pada X, antara lain :

$$\tau_1 = \{ X, \emptyset, \{a\}, \{c,d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d,e\} \}$$

$$\tau_2 = \{ X, \emptyset, \{a,b\}, \{c,d,e\} \}$$

$$\tau_3 = \{ X, \emptyset, \{e\} \}$$

Contoh 2 :

Andaikan τ adalah himpunan kuasa dari X, yaitu $\tau = 2^X$. Maka τ adalah topologi pada X. Topologi τ semacam ini di sebut *topologi diskrit* pada X. Ruang topologi yang topologinya diskrit disebut *ruang diskrit*.

Contoh 3 :

Suatu topologi pada X yang hanya memuat himpunan X sendiri dan $\emptyset$ disebut *topologi indiskrit*. Ruang topologi yang topologinya indiskrit disebut *ruang indiskrit*.

Contoh 4 :

Andaikan X adalah suatu ruang metrik. Klas dari semua himpunan bagian dari X yang terbuka seperti didefinisikan pada definisi 2.3 merupakan suatu topologi. Topologi yang demikian disebut *topologi biasa* pada ruang metrik dan himpunan terbukanya disebut *himpunan terbuka yang dihasilkan oleh metrik* pada ruang itu.

Definisi 2. 5. : Andaikan X suatu ruang topologi dan $Y \subset X$ dengan $Y \neq \emptyset$. *Topologi relatif pada Y* adalah klas dari semua irisan himpunan terbuka pada X dengan Y. Bila Y dilengkapi dengan topologi relatif, maka Y disebut *subruang topologi* dari X.

Contoh 5 :

Andaikan X = { a,b,c,d,e } dengan τ = { X, Ø, {a}, {c,d}, {a,c,d}, {b,c,d,e} }.

Andaikan Y = { a,c,e } maka topologi relatif pada Y adalah { Y, Ø, {a}, {c}, {a,c}, {c,e} }.

Definisi 2. 6. : Suatu Himpunan bagian F dari ruang topologi X disebut *tertutup* bila dan hanya bila terdapat himpunan terbuka G dari X sedemikian sehingga F = G^c.

Contoh 6 :

Andaikan X = { a,b,c,d,e } dengan τ = { X, Ø, {a}, {c,d}, {a,c,d}, {b,c,d,e} }. Himpunan-himpunan tertutup dari X adalah Ø, X, {b,c,d,e}, {a,b,e}, {b,e}, dan {a}, yang merupakan komplemen-komplemen dari himpunan-himpunan terbuka pada X.

Dari contoh ini tampak bahwa X dan Ø merupakan himpunan terbuka sekaligus tertutup. Itu berlaku untuk setiap topologi, sebab X = $Ø^c$ dan Ø = X^c.

Teorema 2. 2. : Jika fungsi $f : X \longrightarrow Y$ dan fungsi $g : Y \longrightarrow Z$ adalah fungsi-fungsi kontinyu, maka komposisi fungsi $g \circ f : X \longrightarrow Z$ juga kontinyu.

Bukti :

Andaikan G suatu himpunan terbuka dalam Z. Maka $(g \circ f)^{-1}(G) = f^{-1}(g^{-1}(G))$. Tetapi $g^{-1}(G)$ merupakan himpunan terbuka dalam Y, karena g kontinyu. Sehingga $f^{-1}(g^{-1}(G))$ merupakan himpunan terbuka dalam X, karena f kontinyu. Jadi fungsi $g \circ f$ adalah fungsi kontinyu. ∎

Dua ruang topologi X dan Y dikatakan *homeomorfik* jika ada suatu homeomorfisma dari X onto Y. Dalam hal ini, Y disebut *bayangan homeomorfis* dari X. Jika X dan Y homeomorfik, maka titik-titiknya dapat dikorespondensikan secara satu-satu, sedemikian sehingga himpunan-himpunan terbukanya juga berkorespondensi satu-satu.

Contoh :

Andaikan $X = \{ a,b,c \}$ dengan $\tau_1 = \{ \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}, X \}$ dan $Y = \{ x,y,z \}$ dengan $\tau_2 = \{ \emptyset, \{y\}, \{z\}, \{y,z\}, Y \}$. Didefinisikan fungsi $f : X \longrightarrow Y$ sebagai berikut : $f(a) = z$, $f(b) = y$, $f(c) = x$.

Dari definisi jelas bahwa fungsi f adalah fungsi bijektif, karena setiap anggota X mempunyai tepat satu kawan di Y dan setiap anggota Y mempunyai tepat satu kawan di X.

Fungsi f adalah kontinyu, sebab

$$f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \tau_1,$$

$$f^{-1}(\{y\}) = \{b\} \in \tau_1,$$

$$f^{-1}(\{z\}) = \{a\} \in \tau_1,$$

$$f^{-1}(\{y,z\}) = \{a,b\} \in \tau_1,$$

$$f^{-1}(Y) = X \in \tau_1,$$

yaitu bayangan invers dari setiap himpunan terbuka dalam Y adalah himpunan terbuka dalam X.

Fungsi f adalah terbuka, sebab

$$f(\emptyset) = \emptyset \in \tau_2,$$

$$f(\{a\}) = \{z\} \in \tau_2,$$

$$f(\{b\}) = \{y\} \in \tau_2,$$

$$f(\{a,b\}) = \{y,z\} \in \tau_2,$$

$$f(X) = Y \in \tau_2,$$

yaitu bayangan dari setiap himpunan terbuka dalam X adalah himpunan terbuka dalam Y.

Dengan demikian fungsi f adalah homeomorfisma dan ruang-ruang topologi X dan Y adalah homeomorfik.

4. Konsep-konsep Dasar

Beberapa konsep dasar yang digunakan dalam ruang topologi dijelaskan pada definisi-definisi di bawah ini.

3. Homeomorfisma

Setelah memahami konsep ruang topologi, selanjutnya dibahas tentang homeomorfisma. Ruang-ruang topologi yang homeomorfik amat penting dalam mempelajari keterhubungan ruang topologi. Andaikan X dan Y adalah ruang-ruang topologi.

Definisi 2. 7. : Suatu fungsi $f : X \longrightarrow Y$ disebut *kontinyu* bila dan hanya bila bayangan invers dari setiap himpunan terbuka dalam Y adalah himpunan terbuka dalam X.

Definisi 2. 8. : Suatu fungsi $f : X \longrightarrow Y$ disebut *terbuka* jika bayangan dari setiap himpunan terbuka dalam X adalah himpunan terbuka dalam Y.

Definisi 2. 9. : Pemetaan $f : X \longrightarrow Y$ yang bijektif, kontinyu dan terbuka disebut *homeomorfisma* dari X onto Y.

Hasil komposisi dua fungsi kontinyu f dan g adalah kontinyu. Hal ini diperlihatkan oleh teorema berikut :

Definisi 2.10. : Andaikan X suatu ruang topologi. Yang disebut *kitar* dari suatu titik $x \in X$ adalah himpunan terbuka yang memuat x.

Definisi 2.11. : Jika A adalah suatu himpunan bagian dari ruang topologi X, maka *penutup (closure)* dari A, dinotasikan dengan $\bar{A}$, adalah irisan semua himpunan tertutup yang memuat A.

Dengan kata lain, bila B adalah klas dari semua himpunan bagian tertutup dari X yang memuat A, maka $\bar{A} = \bigcap_{B_i \in B} B_i$.

Jelas bahwa $\bar{A}$ adalah himpunan tertutup karena merupakan irisan dari himpunan-himpunan tertutup. Selanjutnya $\bar{A}$ juga merupakan himpunan tertutup terkecil yang memuat A, dalam arti bila B adalah himpunan tertutup yang memuat A, maka $A \subset \bar{A} \subset B$.

Teorema 2. 3. : A tertutup bila dan hanya bila $A = \bar{A}$.

Bukti :

($\Leftarrow$) Kita tahu bahwa $\bar{A}$ adalah tertutup. Karena $\bar{A} = A$, maka A tertutup.

($\Rightarrow$) Diketahui A tertutup. Maka A sendiri adalah himpunan tertutup yang memuat A, sehingga $\bar{A} \subset A$. Di lain pihak

$A \subset \bar{A}$, sebab $\bar{A}$ adalah irisan semua himpunan tertutup yang memuat A. Jadi $\dot{A} = \bar{A}$. ∎

Contoh 1 :

Andaikan X = { a,b,c,d,e } dan τ = { X, Ø, {a}, {c,d}, {a,c,d}, {b,c,d,e} }. Himpunan-himpunan tertutup dari X adalah Ø, X, {b,c,d,e}, {a,b,e}, {b,e}, {a}.

A = {b} $\subset$ X

$\bar{A} = X \cap \{b,c,d,e\} \cap \{a,b,e\} \cap \{b,e\} = \{b,e\}$

Operasi "penutup" yang menghubungkan tiap-tiap himpunan bagian A dari X dengan $\bar{A} \subset X$ memenuhi sifat-sifat sebagai berikut :

1. $\bar{\emptyset} = \emptyset$
2. $A \subseteq \bar{A}$
3. $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$
4. $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

Andaikan X suatu ruang topologi dan A himpunan bagian dari X.

Definisi 2.12. : Suatu titik di dalam A disebut *titik sendiri* dari A, jika titik itu mempunyai suatu kitar yang tidak memuat titik lain dari A.

Titik $a \in X$ bukan titik limit dari A, karena himpunan terbuka $\{a\}$ tidak memuat titik dari A yang berbeda dengan a. Titik $b \in X$ merupakan titik limit dari A, karena himpunan-himpunan terbuka yang memuat b, yaitu X dan $\{b,c,d,e\}$ masing-masing memuat titik dari A yang berbeda dengan b. Dengan cara yang sama dapat diperlihatkan bahwa d dan e merupakan titik limit dari A, sedangkan c bukan titik limit dari A. Jadi $T(A) = \{b,d,e\}$.

Contoh 3 :

Andaikan $X = \{ a,b,c,d,e \}$ dengan $\tau = \{ X, \emptyset, \{a\}, \{c,d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d,e\} \}$. Diberikan $A = \{b,c,d\} \subset X$.
Titik $c \in X$ merupakan titik dalam dari A, karena himpunan terbuka $\{c,d\} \subset A$. Demikian pula dengan titik d merupakan titik dalam dari A, sedangkan titik b bukan titik dalam dari A. Jadi $\text{int}(A) = \{c,d\}$.

Contoh 4 :

Andaikan $X = \{ a,b,c,d,e \}$ dengan $\tau = \{ X, \emptyset, \{a\}, \{c,d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d,e\} \}$. Diberikan $A = \{b,c,d\} \subset X$. Himpunan-himpunan tertutup dari X adalah $\emptyset$, X, $\{b,c,d,e\}$, $\{a,b,e\}$, $\{b,e\}$ dan $\{a\}$.

$\bar{A} = X \cap \{b,c,d,e\} = \{b,c,d,e\}$

$A^c = \{a,e\}$ sehingga $\overline{A^c} = X \cap \{a,b,e\} = \{a,b,e\}$.

Jadi $b(A) = \bar{A} \cap \overline{A^c} = \{b,c,d,e\} \cap \{a,b,e\} = \{b,e\}$.

Contoh 5 :

Andaikan $\mathbb{R}$ dilengkapi dengan topologi biasa dan diketahui $A = \{0 < x \leq 1\} \cup \{2\}$. Titik $0 \notin A$, tetapi 0 merupakan titik limit dari A, karena setiap interval terbuka yang memuat 0, memuat titik lain dari A yang berbeda dengan 0. Semua titik dari A kecuali 2 merupakan titik limit dari A. Jadi $T(A) = \{0 \leq x \leq 1\}$. Sedangkan $\mathrm{int}(A) = \{0 < x < 1\}$ dan $b(A) = \{0,1,2\}$.

Dari contoh 5 di atas, tampak bahwa titik limit dan titik batas dari suatu himpunan A, bisa anggota A, bisa pula bukan anggota A.

Contoh 6 :

Andaikan $E = \{ x \mid 0 < x < 1,\ \ x = 2,$ atau $3 < x < 4 \} \subset \mathbb{R}$ yang dilengkapi dengan topologi biasa. Maka titik 2 merupakan titik sendiri dari himpunan E.

5. Basis

Definisi 2.16. : Andaikan X suatu ruang topologi. Suatu *basis terbuka* (disingkat *basis*) dari X adalah suatu klas himpunan-himpunan terbuka yang mempunyai sifat bahwa setiap himpunan terbuka di X adalah gabungan dari himpunan-himpunan dalam klas itu.

Definisi 2.16 ini ekuivalen dengan definisi sebagai berikut : Klas $\mathbb{B} \subset \tau$ adalah basis terbuka dari X bila dan hanya bila untuk setiap himpunan terbuka G dan suatu titik $x \in G$, ada himpunan terbuka $B \in \mathbb{B}$ sedemikian sehingga $x \in B \subseteq G$.

Bukti :

($\Rightarrow$) Jika Definisi 2.16 dipenuhi, maka setiap himpunan terbuka G dapat dinyatakan sehingga sebagai gabungan dari himpunan-himpunan dalam klas $\mathbb{B}$. Sehingga untuk setiap $x \in G$ pasti terdapat himpunan terbuka $B \in \mathbb{B}$ sedemikian sehingga $x \in B \subseteq G$.

($\Leftarrow$) Andaikan untuk setiap $x \in G$ dapat ditemukan $B_x \in \mathbb{B}$ sedemikian sehingga $x \in B_x \subseteq G$, maka $G = \bigcup \{\{x\} \mid x \in G\} \subseteq \bigcup_{x \in G} B_x \subseteq G$. Jadi G merupakan gabungan dari himpunan-himpunan dalam klas $\mathbb{B}$. ■

Contoh 1 :

Andaikan $X = \{ a,b,c,d \}$ dan topologi $\tau = \{ X, \emptyset, \{b\}, \{c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}, \{b,c,d\} \}$. Klas $\mathbb{B} = \{ \{b\}, \{c\}, \{a,b,c\}, \{b,c,d\}, \emptyset \}$ merupakan basis untuk topologi τ tersebut.

Hal ini dapat diperlihatkan sebagai berikut : $\mathbb{B} \subset \tau$, $\{b\} \cup \{c\} = \{b,c\} \in \tau$ dan $\{a,b,c\} \cup \{b,c,d\} = X \in \tau$.

Contoh 2 :

Andaikan $X = \{ a,b,c \}$ dan topologi $\tau = \{ \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \emptyset, X \}$. Klas $\mathbb{B} = \{ \{a\}, \{b\}, \{c\} \}$ merupakan basis untuk topologi τ tersebut.

Secara umum dapat dikatakan bahwa bila X adalah suatu ruang diskrit, maka $\mathbb{B} = \{ \{x\} \mid x \in X \}$ merupakan basis untuk ruang diskrit tersebut.

Definisi 2.17. : Andaikan X suatu ruang topologi. Klas S yang memuat himpunan-himpunan terbuka dari X, disebut *subbasis terbuka* dari X bila dan hanya bila irisan-irisan berhingga dari anggota-anggota S membentuk basis terbuka dari X.

Contoh 3 :

Dalam $\mathbb{R}$ yang dilengkapi dengan topologi biasa, klas S yang terdiri dari semua interval yang berbentuk (a,∞) dan $(-\infty,b)$ merupakan subbasis terbuka dari $\mathbb{R}$, sebab irisan-irisan berhingga dari anggota-anggota S tersebut adalah interval-interval terbuka yang terbatas, yang merupakan basis terbuka dari $\mathbb{R}$.

Teorema 2. 4. : Andaikan X adalah suatu himpunan yang tidak kosong dan S suatu klas yang terdiri dari himpunan-himpunan bagian dari X. Maka S dapat menjadi subbasis terbuka untuk suatu topologi pada X, dalam arti bahwa klas dari semua gabungan dari irisan-irisan berhingga dari anggota-anggota S adalah suatu topologi pada X.

Bukti :

Jika S kosong, maka klas dari semua irisan-irisan berhingga dari anggota-anggota S adalah klas dengan satu anggota yaitu {X}, dan klas dari semua gabungan dari anggota-anggota dalam klas ini adalah klas dengan dua anggota yaitu {Ø, X}, yang merupakan suatu topologi pada X.

Jika S tidak kosong, andaikan $\mathbb{B}$ adalah klas dari semua irisan-irisan berhingga dari anggota-anggota S, dan T adalah klas dari semua gabungan anggota-anggota dalam $\mathbb{B}$. Harus diperlihatkan bahwa T adalah suatu topologi pada X. Pertama-tama akan diperlihatkan bahwa jika $\{G_1, G_2, \ldots, G_n\}$ adalah klas berhingga yang tidak kosong dari anggota-anggota T, maka $G = \bigcap_{i=1}^{n} G_i$ juga anggota T.

disebut *basis lokal* di x bila dan hanya bila untuk tiap himpunan terbuka G yang memuat x terdapat $G_x \in \mathbb{B}_x$ sedemikian sehingga $x \in G_x \subset G$.

Contoh 5 :

Dalam $\mathbb{R}$ yang dilengkapi dengan topologi biasa, klas $\mathbb{B}_n = \{ (-\frac{1}{n},\frac{1}{n}) \mid n \in \mathbb{N} \}$ merupakan basis lokal di 0.

Hubungan antara basis untuk topologi dan basis lokal di suatu titik adalah sebagai berikut : Bila $\mathbb{B}$ adalah basis untuk topologi τ pada X dan $x \in X$, maka anggota-anggota dari basis $\mathbb{B}$ yang memuat x membentuk basis lokal di x.

Teorema 2. 5. : Titik x di dalam ruang topologi X adalah titik limit dari $A \subset X$ bila dan hanya bila tiap anggota dari suatu basis lokal $\mathbb{B}_x$ di x memuat suatu titik dari A yang berbeda dengan x.

Bukti :

($\Rightarrow$) Jika x titik limit dari A, maka setiap kitarnya memuat suatu titik dari A yang berbeda dengan x. Basis lokal $\mathbb{B}_x$ terdiri dari himpunan-himpunan terbuka G yang memuat x. Jadi setiap $G_x \in \mathbb{B}_x$ memuat suatu titik dari A yang berbeda dengan x.

Andaikan $x \in G$. Maka x dalam setiap G_i dan menurut definisi dari T, untuk setiap i ada $B_i \in \mathbb{B}$ sedemikian sehingga $x \in B_i \subseteq G_i$. Karena setiap B_i adalah irisan berhingga dari anggota-anggota S, maka irisan semua anggota S yang terlibat dalam irisan tersebut merupakan anggota $\mathbb{B}$ yang memuat x dan termuat dalam G. Jadi G merupakan gabungan dari anggota-anggota $\mathbb{B}$, sehingga G adalah himpunan dalam T. Selanjutnya akan diperlihatkan juga bahwa gabungan dari anggota-anggota T adalah anggota T. Jika $G_i \in T$, maka G_i adalah gabungan dari anggota-anggota $\mathbb{B}$. Jadi $\bigcup_i G_i$ juga merupakan gabungan dari anggota-anggota $\mathbb{B}$, sehingga $\bigcup_i G_i$ adalah himpunan dalam T. ∎

Contoh 4 :

Andaikan X = { a,b,c,d,e } dan S = { {a,b,c}, {c,d}, {d,e}, {c} }. Dibentuk $\mathbb{B}$ = { X, {a,b,c}, {c,d}, {d,e} {c}, {d}, ∅ } yaitu klas dari semua irisan berhingga dari anggota-anggota S. Kemudian dibentuk T = { X, {a,b,c}, {c,d}, {d,e}, {c}, {d}, ∅, {a,b,c,d}, {c,d,e} } yaitu klas dari semua gabungan anggota-anggota $\mathbb{B}$. Maka T adalah topologi pada X yang dihasilkan oleh S.

Definisi 2.18. : Andaikan X suatu ruang topologi dan x sebarang titik dalam X. Klas $\mathbb{B}_x$ dari himpunan-himpunan terbuka yang memuat x disebut *basis lokal* di x bila dan hanya bila untuk tiap himpunan terbuka G yang memuat x terdapat $G_x \in \mathbb{B}_x$ sedemikian sehingga $x \in G_x \subset G$.

Contoh 5 :

Dalam $\mathbb{R}$ yang dilengkapi dengan topologi biasa, klas $\mathbb{B}_n$ = $\{ (-\frac{1}{n},\frac{1}{n}) \mid n \in \mathbb{N} \}$ merupakan basis lokal di 0.

Hubungan antara basis untuk topologi dan basis lokal di suatu titik adalah sebagai berikut : Bila $\mathbb{B}$ adalah basis untuk topologi τ pada X dan $x \in X$, maka anggota-anggota dari basis $\mathbb{B}$ yang memuat x membentuk basis lokal di x.

Teorema 2. 5. : Titik x di dalam ruang topologi X adalah titik limit dari $A \subset X$ bila dan hanya bila tiap anggota dari suatu basis lokal $\mathbb{B}_x$ di x memuat suatu titik dari A yang berbeda dengan x.

Bukti :

($\Rightarrow$) Jika x titik limit dari A, maka setiap kitarnya memuat suatu titik dari A yang berbeda dengan x. Basis lokal $\mathbb{B}_x$ terdiri dari himpunan-himpunan terbuka G yang memuat x. Jadi setiap $G_x \in \mathbb{B}_x$ memuat suatu titik dari A yang berbeda dengan x.

($\Leftarrow$) Andaikan setiap G_x dalam basis lokal $\mathbb{B}_x$ di titik x memuat suatu titik dari A yang berbeda dengan x. Untuk sebarang himpunan terbuka G yang memuat x terdapat $G_x \in \mathbb{B}_x$ sedemikian sehingga $x \in G_x \subset G$. Karena G_x memuat suatu titik dari A yang berbeda dengan x, maka G juga memuat titik tersebut. Jadi x adalah titik limit dari A. ∎

6. Topologi Produk

Jika X dan Y adalah ruang-ruang topologi, maka dapat didefinisikan suatu topologi pada hasil kali kartesius $X \times Y$. Berikut ini akan dipelajari topologi tersebut beserta sifat-sifatnya.

Definisi 2.19. : Andaikan X dan Y adalah ruang-ruang topologi. *Topologi produk* pada $X \times Y$ adalah topologi yang mempunyai sebagai basis klas $\mathbb{B}$ dari semua himpunan berbentuk $G \times H$, di mana G adalah himpunan terbuka dari X dan H adalah himpunan terbuka dari Y.

Teorema 2. 6. : Jika $\mathbb{B}$ adalah basis untuk topologi pada X dan $\mathbb{C}$ adalah basis untuk topologi pada Y, maka klas $\mathbb{D} = \{ B \times C \mid B \in \mathbb{B} \text{ dan } C \in \mathbb{C} \}$ adalah basis untuk topologi produk pada $X \times Y$.

Bukti :

Diberikan himpunan terbuka $K \subset X \times Y$ dan titik $x \times y \in K$. Dari definisi topologi produk, terdapat anggota basis $G \times H$ sedemikian sehingga $x \times y \in G \times H \subset K$. Karena $\mathbb{B}$ dan $\mathbb{C}$ berturut-turut adalah basis dari X dan Y, maka dapat ditemukan anggota $B \in \mathbb{B}$ sedemikian sehingga $x \in B \subset G$, dan anggota $C \in \mathbb{C}$ sedemikian sehingga $y \in C \subset H$. Maka $x \times y \in B \times C \subset G \times H \subset K$. Jadi $\mathbb{D}$ merupakan basis untuk topologi produk pada $X \times Y$. ∎

Contoh :

Andaikan $X = \{ 1,2,3 \}$ dengan $\tau_1 = \{ \emptyset, \{1\}, \{1,2\}, X \}$ dan $\mathbb{B}_1 = \{ \{1\}, \{1,2\} \}$. Andaikan $Y = \{ 4,5 \}$ dengan $\tau_2 = \{ \emptyset, \{4\}, Y \}$ dan $\mathbb{B}_2 = \{ \{4\} \}$.

Maka $\mathbb{D} = \{ \{1\}\times\{4\}, \{1,2\}\times\{4\} \}$ merupakan basis untuk topologi produk pada $X \times Y$.

7. Topologi Terurut

Suatu konsep yang perlu dipahami dalam mempelajari topologi terurut yaitu konsep relasi.

Definisi 2.20. : Andaikan X merupakan suatu himpunan yang tidak kosong. Suatu *relasi* R pada X adalah himpunan bagian dari hasil kali kartesius $X \times X$.

Jika R suatu relasi pada X dan $(x,y) \in R$, maka biasanya dikatakan bahwa x berelasi dengan y dan dinotasikan dengan lambang xRy. Jika R suatu relasi pada X dan $A \subseteq X$, maka didefinisikan $R[A] = \{y \in X \mid xRy \text{ untuk suatu } x \in A\}$.

Suatu relasi R pada himpunan X disebut *relasi urutan sederhana* jika memenuhi sifat-sifat sebagai berikut :

1. Untuk setiap x dan y dalam X di mana $x \neq y$, maka berlakulah xRy atau yRx. Sifat ini disebut *sifat dapat dibandingkan*.
2. Untuk setiap $x \in X$ tidak berlaku xRx. Sifat ini disebut *sifat nonrefleksif*.
3. Untuk setiap $x,y,z \in X$ berlakulah bahwa jika xRy dan yRz, maka xRz. Sifat ini disebut *sifat transitif*.

Himpunan X yang dilengkapi dengan suatu relasi urutan sederhana disebut *himpunan terurut sederhana*.

Simbol $<$ seringkali digunakan untuk melambangkan relasi urutan sederhana. Dengan notasi tersebut sifat-sifat relasi urutan sederhana di atas dapat ditulis sebagai berikut :

1. $(\forall\ x,y \in X)\ x \neq y \Rightarrow x < y \vee y < x$.

2. $(\forall\ x,y \in X)\ x < y \Rightarrow x \neq y$.

3. $(\forall\ x,y,z \in X)\ x < y \wedge y < z \Rightarrow x < z$.

Lambang $\leq$ dalam pernyataan $x \leq y$ biasanya digunakan untuk menyatakan $x < y$ atau $x = y$. Lambang $>$ dalam pernyataan $y > x$ digunakan untuk menyatakan $x < y$. Selain itu ada pula bentuk penulisan lainnya yaitu $x < y < z$ yang berarti $x < y$ dan $y < z$.

Andaikan X suatu himpunan yang dilengkapi dengan relasi urutan sederhana $<$. Diberikan a dan b anggota-anggota dari X sedemikian sehingga $a < b$. Maka ada himpunan-himpunan bagian dari X yang disebut *interval* yang ditentukan oleh a dan b. Macam-macam interval dan notasinya adalah sebagai berikut :

1. $(a,b) = \{\ x \in X \mid a < x < b\ \}$, disebut *interval terbuka* dalam X.

2. $(a,b] = \{\ x \in X \mid a < x \leq b\ \}$, disebut *interval setengah terbuka* dalam X.

3. $[a,b) = \{\ x \in X \mid a \leq x < b\ \}$, disebut *interval setengah terbuka* dalam X.

4. $[a,b] = \{\ x \in X \mid a \leq x \leq b\ \}$, disebut *interval tertutup* dalam X.

Andaikan X suatu himpunan terurut dengan relasi urutan sederhana < dan $A \subseteq X$. Elemen a disebut *elemen terkecil* dari A, jika $a \in A$ dan $a \leq x$ untuk setiap $x \in A$. Demikian pula elemen b disebut *elemen terbesar* dari A, jika $b \in A$ dan $x \leq b$ untuk setiap $x \in A$.

Jika X suatu himpunan terurut sederhana, maka pada X dapat didefinisikan suatu topologi, yang disebut *topologi terurut*.

Definisi 2.21. : Andaikan X adalah suatu himpunan terurut sederhana yang mempunyai lebih dari satu elemen. Klas $\mathbb{B}$ terdiri dari semua himpunan sebagai berikut :

1. Semua interval terbuka (a,b) dalam X.
2. Semua interval berbentuk $[a_o,b)$, di mana a_o adalah elemen terkecil dari X (jika ada).
3. Semua interval berbentuk $(a,b_o]$, di mana b_o adalah elemen terbesar dari X (jika ada).

Topologi pada X yang mempunyai klas $\mathbb{B}$ sebagai basis disebut *topologi terurut*.

Jika X adalah himpunan terurut sederhana dan $a \in X$, maka ada himpunan-himpunan bagian dari X yang disebut *sinar* yang ditentukan oleh a. Macam-macam sinar dan notasinya adalah sebagai berikut :

1. $(a,+\infty) = \{ x \in X \mid x > a \}$, disebut *sinar terbuka kiri.*
2. $(-\infty,a) = \{ x \in X \mid x < a \}$, disebut *sinar terbuka kanan.*
3. $[a,+\infty) = \{ x \in X \mid x \geq a \}$, disebut *sinar tertutup kiri.*
4. $(-\infty,a] = \{ x \in X \mid x \leq a \}$, disebut *sinar tertutup kanan.*

Contoh 1 :

Diberikan himpunan terurut sederhana $\mathbb{Z}_+$ yaitu himpunan bilangan bulat positif dengan relasi "lebih kecil" (<) antara bilangan-bilangan. Topologi terurut pada $\mathbb{Z}_+$ adalah topologi diskrit, sebab setiap himpunan bagian $\mathbb{Z}_+$ dengan satu elemen adalah terbuka : Jika $n > 1$, maka $\{n\} = (n-1, n+1)$ adalah elemen dari basis. Dan jika $n = 1$, maka $\{1\} = [1,2)$, juga elemen dari basis.

Andaikan A himpunan bagian yang tidak kosong dari himpunan terurut X . Suatu elemen $a \in X$ disebut *batas bawah* dari A, jika $a \leq x$ untuk setiap $x \in A$. Dan batas bawah a dari A dikatakan *batas bawah terbesar* jika $a \geq x$ untuk setiap batas bawah x dari A. Batas bawah terbesar dari A disebut juga *infimum* dan dinotasikan dengan lambang inf A. Batas bawah terbesar dari A bisa anggota A, bisa pula bukan anggota A. Jika batas bawah terbesar dari A adalah anggota A, maka ia merupakan elemen terkecil dari A.

Suatu elemen $b \in X$ disebut *batas atas* dari A, jika $x \leq b$ untuk setiap $x \in A$. Dan batas atas b dari A disebut *batas atas terkecil* jika $b \leq x$ untuk setiap batas atas x dari A. Batas atas terkecil dari A disebut juga *suprimum* dan dinotasikan dengan lambang sup A.
Seperti halnya dengan batas bawah terbesar dari A, batas atas terkecil dari A juga bisa anggota A, bisa pula bukan anggota A. Jika batas atas terkecil dari A adalah anggota A, maka ia merupakan elemen terbesar dari A.

Contoh 2 :

Andaikan himpunan bilangan asli $\mathbb{N}$ merupakan himpunan bagian dari himpunan semua bilangan rasional $\mathbb{Q}$. Maka 1 merupakan batas bawah terbesar dari $\mathbb{N}$, karena 1 lebih besar dari batas bawah lainnya dari $\mathbb{N}$. Selain itu tidak ada bilangan rasional r sedemikian sehingga $n \leq r$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Jadi $\mathbb{N}$ tidak mempunyai batas atas, sehingga $\mathbb{N}$ tidak terbatas ke atas.

Jadi disimpulkan bahwa $\mathbb{N}$ merupakan himpunan bagian dari $\mathbb{Q}$ yang terbatas ke bawah, tetapi tidak terbatas ke atas.

Contoh 3 :

Himpunan semua bilangan bulat $\mathbb{Z}$ adalah suatu himpunan bagian dari $\mathbb{Q}$ yang tidak terbatas ke atas maupun ke bawah. Demikian juga $\mathbb{Q}$ merupakan himpunan yang tidak terbatas ke atas maupun ke bawah.

Bab III

RUANG TOPOLOGI YANG TERHUBUNG

1. Ruang Terhubung

Konsep ruang terhubung dipahami berdasarkan konsep ruang tak terhubung. Suatu ruang topologi X disebut *tak terhubung* bila X dapat dinyatakan dalam bentuk $X = A \cup B$, di mana A dan B adalah himpunan-himpunan terbuka yang tidak kosong dan saling asing. Suatu bentuk representasi dari X seperti di atas disebut *suatu ketakterhubungan* dari X.

Definisi 3. 1. : Ruang topologi X dikatakan *terhubung* bila X tidak dapat dinyatakan sebagai gabungan dua himpunan terbuka yang tidak kosong dan saling asing.

Apabila $X = A \cup B$, di mana A dan B terbuka, tidak kosong dan saling asing, maka A^c tertutup dan $A^c = B$, jadi B tertutup. Juga B^c tertutup dan $B^c = A$, maka A tertutup Jadi A dan B adalah himpunan-himpunan yang terbuka dan sekaligus tertutup. Juga dapat disimpulkan bahwa ruang topologi X adalah *terhubung* bila dan hanya bila X tidak dapat dinyatakan sebagai gabungan dua himpunan tertutup yang tidak kosong dan saling asing.

Teorema 3. 1. : Suatu ruang topologi X adalah terhubung bila dan hanya bila hanya ada dua himpunan bagian dari X yang sekaligus terbuka dan tertutup, yaitu X dan $\emptyset$.

Bukti :

($\Leftarrow$) Andaikan X tidak terhubung. Maka ada dua himpunan terbuka yang tidak kosong dan saling asing yaitu A dan B sedemikian sehingga $X = A \cup B$. Jadi $A = B^c$, di mana B^c tertutup, sehingga A tertutup. Demikian pula, $B = A^c$, di mana A^c tertutup, sehingga B tertutup. Maka A dan B adalah himpunan-himpunan yang tidak kosong, tidak sama dengan X, dan keduanya terbuka sekaligus tertutup dalam X.

($\Rightarrow$) Andaikan A adalah himpunan bagian sejati yang tidak kosong dari X, dan A terbuka sekaligus tertutup dalam X. Maka A dan A^c adalah himpunan-himpunan terbuka yang tidak kosong dan saling asing dan yang gabungannya adalah X. Jadi X tidak terhubung. ∎

Contoh 1 :

Andaikan $X = \{ a,b,c,d,e \}$ dengan $\tau = \{ X, \emptyset, \{a\}, \{c,d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d,e\} \}$. Maka $X = \{a\} \cup \{b,c,d,e\}$ merupakan suatu ketakterhubungan dari X. Jadi X tak terhubung.

Contoh 2 :

Andaikan X suatu himpunan dan $p \notin X$. Andaikan $Y = X \cup \{p\}$ dilengkapi dengan topologi $\tau = \{G \subset Y \mid G = \emptyset$ atau $p \in G\}$. Maka Y tidak dapat dinyatakan sebagai gabungan dua himpunan terbuka yang tidak kosong dan saling asing. Jadi Y dengan topologi τ adalah terhubung.

Berikut ini diberikan beberapa teorema ruang terhubung berdasarkan konsep-konsep dasar yang telah dipelajari pada bab terdahulu.

Teorema 3. 2. : Andaikan X suatu ruang topologi yang tak terhubung dengan ketakterhubungan $X = A \cup B$. Jika Y subruang terhubung dari X, maka $Y \subseteq A$ atau $Y \subseteq B$.

Bukti :

Karena A dan B merupakan himpunan-himpunan terbuka yang tidak kosong dan saling asing dalam X, maka $Y \cap A$ dan $Y \cap B$ merupakan himpunan-himpunan terbuka dalam Y yang saling asing. Karena $(Y \cap A) \cup (Y \cap B) = Y \cap (A \cup B) = Y \cap X = Y$, padahal Y terhubung, maka salah satu dari himpunan-himpunan terbuka tersebut, yaitu $Y \cap A$ atau $Y \cap B$, adalah himpunan kosong. Jika $Y \cap A = \emptyset$, maka $Y = Y \cap B$, yaitu $Y \subseteq B$. Dan jika $Y \cap B = \emptyset$, maka $Y = Y \cap A$, yaitu $Y \subseteq A$. ∎

Teorema 3. 3. : Andaikan X ruang topologi dan Y subruang terhubung dari X. Jika Z adalah subruang dari X sedemikian sehingga $Y \subseteq Z \subseteq \bar{Y}$, maka Z terhubung.

Bukti :

Andaikan Z tidak terhubung, maka terdapat dua himpunan terbuka C dan D dalam X yang gabungannya memuat Z dan irisannya dengan Z adalah saling asing dan tidak kosong. Karena Y terhubung, maka menurut Teorema 3.2, Y termuat dalam C atau dalam D. Misalkan $Y \subseteq C$. Maka Y saling asing dengan D, sehingga $\bar{Y}$ juga saling asing dengan D. Karena $Z \subseteq \bar{Y}$, maka Z juga saling asing dengan D. Kontradiksi, jadi Z terhubung. ■

Teorema 3. 4. : Penutup dari subruang terhubung adalah terhubung.

Bukti :

Andaikan X suatu ruang topologi, dan Y adalah subruang terhubung dari X. Andaikan $\bar{Y}$ tidak terhubung dengan ketakterhubungan $\bar{Y} = A \cup B$, di mana A dan B adalah terbuka sekaligus tertutup dalam $\bar{Y}$. Karena Y terhubung, maka menurut Teorema 3.2, $Y \subseteq A$ atau $Y \subseteq B$. Andaikan $Y \subseteq A$. Maka $\bar{Y} = A$, sebab A tertutup dalam $\bar{Y}$, sehingga $B = \emptyset$. Kontradiksi, jadi $\bar{Y}$ adalah terhubung. ■

Teorema 3. 5. : X suatu ruang topologi. Jika Y subruang terhubung dari X dan beririsan dengan Z maupun Z^c, maka Y beririsan dengan batas dari Z.

Bukti :

Andaikan $Y \cap b(Z) = \emptyset$. Dari $Y = Y \cap X = Y \cap (Z \cup Z^c) = (Y \cap Z) \cup (Y \cap Z^c)$, tampak bahwa Y merupakan gabungan dua himpunan yang tidak kosong. Dan lagi $(Y \cap Z) \cap (Y \cap Z^c) \subseteq (Y \cap \bar{Z}) \cap (Y \cap \overline{Z^c}) = Y \cap (\bar{Z} \cap \overline{Z^c}) = Y \cap b(z) = \emptyset$. Jadi Y tak terhubung. Kontradiksi. Jadi $Y \cap b(Z) \neq \emptyset$. ■

Teorema berikut ini menjelaskan tentang keterhubungan pada garis bilangan real.

Teorema 3. 6. : Suatu subruang dari garis bilangan real $\mathbb{R}$ adalah terhubung bila dan hanya bila subruang itu merupakan suatu interval. Khususnya, $\mathbb{R}$ sendiri adalah terhubung.

Bukti :

Andaikan X adalah subruang dari $\mathbb{R}$.

(⇒) Andaikan X bukan interval, maka ada bilangan-bilangan real x,y,z sedemikian sehingga $x < y < z$ dengan $x,z \in X$ dan $y \notin X$. Maka $X = [X \cap (-\infty,y)] \cup [X \cap (y,+\infty)]$, yaitu suatu ketakterhubungan dari X. Jadi X tak terhubung.

($\Leftarrow$) Andaikan X adalah interval dan $X = A \cup B$ adalah suatu ketakterhubungan dari X. Karena A dan B tidak kosong, maka dapat dipilih suatu titik $x \in A$ dan $z \in B$. Dan karena A dan B saling asing, maka $x \neq z$. Dengan menukar notasi bila diperlukan, dapat diandaikan bahwa $x < z$. Karena X interval, maka $[x,z] \subseteq X$, sehingga setiap titik dari $[x,z]$ ada di dalam A atau B. Didefinisikan $y = \sup ([x,z] \cap A)$, sehingga $x \leq y \leq z$, jadi $y \in X$. Karena A tertutup dalam X, maka $y \in A$. Jadi haruslah $y < z$. Untuk setiap $\varepsilon > 0$ sedemikian sehingga $y + \varepsilon \leq z$, pastilah $y + \varepsilon \in B$. Karena B tertutup dalam X, maka $y \in B$. Jadi y berada dalam A dan sekaligus dalam B. Kontradiksi dengan pengandaian bahwa A dan B adalah saling asing. ∎

Teorema berikut ini menegaskan bahwa sifat keterhubungan diawetkan oleh fungsi kontinyu.

Teorema 3. 7. : Suatu bayangan kontinyu dari suatu ruang terhubung adalah terhubung.

Bukti :

Andaikan $f : X \longrightarrow Y$ adalah fungsi kontinyu dari ruang terhubung X ke suatu ruang topologi Y. Akan diperlihatkan bahwa f(X) terhubung sebagai subruang dari Y. Andaikan f(X) tak terhubung. Maka ada dua himpunan terbuka A dan B dari Y yang gabungannya memuat f(X) dan yang irisannya dengan f(X) adalah saling asing dan tidak kosong. Sehingga $X = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$ adalah suatu ketakterhubungan dari X. Kontradiksi dengan pengandaian bahwa X terhubung. ■

Dua ruang diskrit berhingga dengan jumlah titik yang sama adalah homeomorfis, karena setiap pemetaan bijektif dari ruang yang satu ke ruang yang lainnya merupakan suatu homeomorfisma. Dalam hal ini kedua ruang itu hanya berbeda dalam simbol-simbol yang digunakan untuk menunjukkan titik-titiknya. Dalam arti inilah dapat dikatakan bahwa hanya ada satu ruang diskrit untuk jumlah titik tertentu. Ruang diskrit dua titik adalah tidak terhubung. Ruang diskrit ini banyak digunakan dalam teori keterhubungan. Kedua titik tersebut akan dinyatakan dengan simbol 0 dan 1.

Lemma 3. 1. : Andaikan $Y = \{0,1\}$ dilengkapi dengan topologi diskrit. Suatu ruang topologi X adalah terhubung bila dan hanya bila fungsi kontinyu $f : X \longrightarrow Y$ hanyalah fungsi konstan.

Bukti :

($\Rightarrow$) Andaikan $f : X \longrightarrow Y$ fungsi kontinyu tidak konstan. Maka $A = f^{-1}(\{0\})$ dan $B = f^{-1}(\{1\})$ keduanya tidak kosong. Himpunan-himpunan $\{0\}$ dan $\{1\}$ adalah terbuka dalam Y dan f kontinyu, sehingga A dan B terbuka dalam X. Tapi $A = B^c$, sehingga $X = A \cup B$ adalah suatu ketakterhubungan dari X. Jadi X tak terhubung.

($\Leftarrow$) Andaikan X tidak terhubung, maka ada himpunan-himpunan terbuka A dan B yang tidak kosong dalam X sedemikian sehingga $A \cap B = \emptyset$ dan $A \cup B = X$. Didefinisikan fungsi $f : X \longrightarrow Y$, dengan aturan : jika $x \in A$, maka $f(x) = 0$, dan jika $x \in B$, maka $f(x) = 1$. Fungsi f kontinyu, sebab $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$, $f^{-1}(\{0\}) = A$, $f^{-1}(\{1\}) = B$ dan $f^{-1}(Y) = X$, yaitu bayangan invers dari himpunan terbuka di Y adalah terbuka. Jadi ada fungsi $f : X \longrightarrow Y$ yang kontinyu tetapi bukan fungsi konstan. ■

Definisi 3. 2. : Fungsi $p_1 : X \times Y \longrightarrow X$ dengan $p_1(x,y) = x$ dan fungsi $p_2 : X \times Y \longrightarrow Y$ dengan $p_2(x,y) = y$ untuk tiap $x \in X$ dan $y \in Y$, berturut-turut disebut *proyeksi pertama* dari $X \times Y$ ke X dan *proyeksi kedua* dari $X \times Y$ ke Y.

Proyeksi-proyeksi pada Definisi 3.2 di atas adalah kontinyu. Hal itu diperlihatkan sebagai berikut :

Andaikan X dan Y merupakan ruang topologi dengan topologi τ_1 pada X dan topologi τ_2 pada Y. Maka ruang topologi produk $X \times Y$ dilengkapi dengan topologi produk yang mempunyai klas basis $\{ C \times D \mid C \in \tau_1 \text{ dan } D \in \tau_2 \}$. Diketahui dua proyeksi $p_1 : X \times Y \longrightarrow X$, dan $p_2 : X \times Y \longrightarrow Y$ di mana $p_1(x,y) = x$ dan $p_2(x,y) = y$. Jika $C \in \tau_1$, maka $p_1^{-1}(C) = C$

$\times$ Y adalah elemen basis dari topologi produk. Jadi proyeksi p_1 kontinyu. Demikian pula, jika $D \in \tau_2$, maka $p_2^{-1}(D) = X \times D$ adalah elemen basis dari topologi produk. Jadi proyeksi p_2 kontinyu.

Lemma 3. 2. : Andaikan X, Y dan Z adalah ruang-ruang topologi. Diberikan fungsi-fungsi $f_1 : Z \longrightarrow X$ dan $f_2 : Z \longrightarrow Y$ dan $f : Z \longrightarrow X \times Y$ dengan aturan $f(z) = (f_1(z), f_2(z))$. (Fungsi-fungsi f_1 dan f_2 disebut *fungsi-fungsi koordinat* dari f.) Maka fungsi f kontinyu bila dan hanya bila fungsi-fungsi f_1 dan f_2 kedua-duanya kontinyu.

Bukti :

($\Rightarrow$) Andaikan fungsi f kontinyu. Fungsi-fungsi proyeksi $p_1 : X \times Y \longrightarrow X$ dan $p_2 : X \times Y \longrightarrow Y$ adalah kontinyu. Karena $f_1(z) = p_1(f(z))$ dan $f_2(z) = p_2(f(z))$ untuk setiap $z \in Z$, maka f_1 dan f_2 juga kontinyu.

($\Leftarrow$) Andaikan fungsi-fungsi f_1 dan f_2 kontinyu. Diperlihatkan bahwa $f^{-1}(G \times H)$ terbuka dalam Z untuk setiap elemen basis terbuka $G \times H$ dari $X \times Y$. Sebarang titik $z \in f^{-1}(G \times H)$, $\Leftrightarrow f(z) \in G \times H$. $\Leftrightarrow f_1(z) \in G$ dan $f_2(z) \in H$ $\Leftrightarrow z \in f_1^{-1}(G)$ dan $z \in f_2^{-1}(H)$. Jadi $f^{-1}(G \times H) = f_1^{-1}(G) \cap f_2^{-1}(H)$. Karena f_1 dan f_2 kontinyu, maka kedua himpunan $f_1^{-1}(G)$ dan $f_2^{-1}(H)$ terbuka dalam Z.

Jadi $f^{-1}(G \times H)$ juga terbuka dalam Z. ■

Teorema 3. 8. : Bila X dan Y adalah ruang topologi yang terhubung, maka $X \times Y$ adalah terhubung.

Bukti :

Diperlihatkan bahwa fungsi kontinyu $f : X \times Y \longrightarrow \{0,1\}$ hanyalah fungsi konstan. Andaikan ada fungsi kontinyu $f : X \times Y \longrightarrow \{0,1\}$ yang bukan fungsi konstan. Maka ada titik (x_0, y_0) dan $(x_1, y_1) \in X \times Y$, sedemikian sehingga $f(x_0, y_0) = 0$ dan $f(x_1, y_1) = 1$. Andaikan $f(x_1, y_0) = 0$. Didefinisikan $i_{x_1} : Y \longrightarrow X \times Y$ dengan $i_{x_1}(y) = (x_1, y)$. Fungsi i_{x_1} kontinyu menurut Lemma 3.2 , sehingga komposisi fungsi $f \circ i_{x_1} : Y \longrightarrow \{0,1\}$ adalah kontinyu. Tapi $(f \circ i_{x_1})(y_0) = f(x_1, y_0) = 0$ dan $(f \circ i_{x_1})(y_1) = f(x_1, y_1) = 1$. Jadi ada fungsi kontinyu yang tidak konstan dari Y ke $\{0,1\}$. Kontradiksi dengan keterhubungan dari Y. ■

Corollary 3. 9. : Jika X_1, X_2, ... , X_n adalah ruang-ruang topologi yang terhubung, maka $\prod_{i=1}^{n} X_i$ juga ruang topologi yang terhubung.

Bukti :

Telah diperlihatkan pada Teorema 3.8 bahwa Corollary tersebut benar untuk n = 2. Diandaikan Corollary tersebut benar untuk $n = k$, yaitu jika $X_1, X_2, \ldots, X_k$ merupakan ruang-ruang topologi yang terhubung, maka $\prod_{i=1}^{k} X_i$ juga ruang topologi yang terhubung.

Untuk $n = k+1$: Andaikan $X_1, X_2, \ldots, X_k, X_{k+1}$ adalah ruang-ruang topologi yang terhubung. Maka

$$\prod_{i=1}^{k+1} X_i = \left[\prod_{i=1}^{k} X_i\right] \times X_{k+1}$$

adalah terhubung karena merupakan perkalian dua ruang topologi yang terhubung. Jadi menurut prinsip induksi matematis terbukti bahwa jika $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ruang-ruang topologi yang terhubung, maka $\prod_{i=1}^{n} X_i$ juga ruang topologi yang terhubung. ■

Teorema 3.10. : Ruang $\mathbb{C}$ adalah terhubung.

Bukti :

Andaikan z adalah sebarang elemen dalam $\mathbb{C}$. Elemen z dapat dituliskan dalam bentuk $z = a + ib$, di mana a dan b dalam $\mathbb{R}$. Didefinisikan pemetaan $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dengan $f(z) = (a,b)$. Ambil sebarang elemen $y \in \mathbb{R}^2$, maka y dapat dituliskan sebagai (a,b). Andaikan $z = a + ib$. Maka $z \in \mathbb{C}$ dan $f(z) = y$. Jadi f surjektif.

Ambil sebarang elemen z dan $w \in \mathbb{C}$. Akan diperlihatkan bahwa jika $f(z) = f(w)$, maka $z = w$. Andaikan $z = a + ib$ dan $w = c + id$. Maka $f(z) = (a,b)$ dan $f(w) = (c,d)$. Karena $f(z) = f(w)$, maka $(a,b) = (c,d)$ sehingga $a = c$ dan $b = d$. Jadi

$z = w$. Maka fungsi f adalah injektif. Jadi f adalah fungsi bijektif dari $\mathbb{C}$ ke $\mathbb{R}^2$.

Selanjutnya, ambil sebarang himpunan terbuka G dalam $\mathbb{C}$, akan diperlihatkan bahwa f(G) adalah terbuka dalam $\mathbb{R}^2$.

Ambil sebarang titik $(a_o, b_o) \in f(G)$, maka ada $z_o \in G$ sedemikian sehingga $(a_o, b_o) = f(z_o)$. Karena G terbuka dan $z_o \in G$, maka ada bilangan real positif r sedemikian sehingga $B_r(z_o) \subseteq G$, sehingga $f(B_r(z_o)) \subseteq f(G)$. Selanjutnya

$$\begin{aligned} f(B_r(z_o)) &= \{ f(z) \in \mathbb{R}^2 \mid z \in B_r(z_o) \} \\ &= \{ f(z) \in \mathbb{R}^2 \mid d(z_o, z) < r \} \\ &= \{ f(z) \in \mathbb{R}^2 \mid |z_o - z| < r \} \\ &= \{ (a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{(a_o - a)^2 + (b_o - b)^2} < r \} \\ &= \{ (a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid d((a_o, b_o), (a,b)) < r \} \\ &= B_r(a_o, b_o) \end{aligned}$$

Maka ada r sedemikian sehingga $B_r(a_o, b_o) \subseteq f(G)$, sehingga f(G) terbuka dalam $\mathbb{R}^2$. Jadi fungsi f adalah terbuka.

Ambil sebarang himpunan terbuka H dalam $\mathbb{R}^2$, akan diperlihatkan bahwa $f^{-1}(H)$ merupakan himpunan terbuka dalam $\mathbb{C}$.

Ambil sebarang titik $z_o \in f^{-1}(H)$, maka ada $(a_o, b_o) \in H$ sedemikian sehingga $f(z_o) = (a_o, b_o)$. Karena H terbuka dan $(a_o, b_o) \in H$, maka ada bilangan real positif r sedemikian sehingga $B_r(a_o, b_o) \subseteq H$, sehingga $f^{-1}(B_r(a_o, b_o)) \subseteq f^{-1}(H)$.

$$\begin{aligned} f^{-1}(B_r(a_o, b_o)) &= \{ z \in \mathbb{C} \mid f(z) \in B_r(a_o, b_o) \} \\ &= \{ z \in \mathbb{C} \mid (a,b) \in B_r(a_o, b_o) \} \\ &= \{ z \in \mathbb{C} \mid d((a_o, b_o), (a,b)) < r \} \end{aligned}$$

$$= \{ z \in \mathbb{C} \mid \sqrt{(a_0 - a)^2 + (b_0 - b)^2} < r \}$$
$$= \{ z \in \mathbb{C} \mid |z_0 - z| < r \}$$
$$= \{ z \in \mathbb{C} \mid d(z_0, z) < r \}$$
$$= B_r(z_0)$$

Maka ada r sedemikian sehingga $B_r(z_0) \subseteq f^{-1}(H)$, sehingga $f^{-1}(H)$ terbuka dalam $\mathbb{C}$. Jadi fungsi f adalah kontinyu.

Jadi f adalah homeomorfisma. Karena menurut Teorema 3.6 $\mathbb{R}$ adalah terhubung dan menurut Corollary 3.9 $\mathbb{R}^2$ juga terhubung, maka $\mathbb{C}$ terhubung. ∎

Corollary 3.11 : Ruang $\mathbb{C}^n$ terhubung.

Bukti :

Pada Teorema 3.10 telah diperlihatkan bahwa $\mathbb{C}$ adalah terhubung. Jadi $\mathbb{C}^n$ terhubung menurut Corollary 3.9. ∎

2. Komponen Ruang Terhubung

Jika suatu ruang topologi tidak terhubung, maka ruang itu dapat dipecah menjadi ruang-ruang bagian terhubung maksimal yang saling asing. Suatu ruang bagian terhubung maksimal dari suatu ruang topologi, yaitu ruang bagian terhubung yang tidak termuat dalam suatu ruang bagian terhubung yang lebih besar, disebut *komponen* ruang topologi itu. Ruang topologi yang terhubung hanya mempunyai satu komponen, yaitu ruang itu sendiri. Dalam ruang diskrit setiap singleton merupakan komponen.

Teorema 3.12. : Andaikan X suatu ruang topologi. Jika $\{A_i\}$ adalah klas tidak kosong dari ruang-ruang bagian terhubung dari X sedemikian sehingga $\cap_i A_i$ tidak kosong, maka $A = \cup_i A_i$ juga merupakan ruang bagian terhubung dari X.

Bukti :

Andaikan A tidak terhubung. Maka terdapat dua himpunan terbuka G dan H dari X yang gabungannya memuat A dan irisannya dengan A adalah saling asing dan tidak kosong. Setiap A_i adalah terhubung dan termuat dalam $G \cup H$. Maka setiap A_i termuat seluruhnya dalam G atau seluruhnya dalam H dan saling asing dengan lainnya.

Karena $\cap_i A_i$ tidak kosong, maka semua A_i ada dalam G dan saling asing dengan H, atau semua A_i ada dalam H dan saling asing dengan G. Itu berarti bahwa A saling asing dengan G atau H. Dari kontradiksi ini disimpulkan bahwa pengandaian A tidak terhubung adalah salah. Jadi A terhubung. ■

Teorema berikut menyatakan dan membuktikan tentang komponen ruang terhubung.

Teorema 3.13. : Jika X adalah suatu ruang topologi, maka

1. Setiap titik dalam X termuat dalam tepat satu komponen dari X.
2. Setiap ruang bagian terhubung dari X termuat dalam suatu komponen dari X.
3. Suatu ruang bagian terhubung dari X yang sekaligus terbuka dan tertutup adalah suatu komponen dari X.
4. Setiap komponen dari X adalah tertutup.

Bukti :

1. Ambil sebarang titik $x \in X$. Andaikan klas $\{C_i\}$ terdiri dari semua ruang bagian terhubung dari X yang memuat x. Klas ini tidak kosong, sebab $\{x\}$ sendiri adalah terhubung. Menurut Teorema 3.12, $C = \bigcup_i C_i$ adalah ruang bagian terhubung dari X yang memuat x. Ruang terhubung C adalah maksimal, sebab setiap ruang bagian terhubung dari X yang memuat C pasti adalah salah satu dari C_i, jadi termuat dalam C. Dengan demikian C merupakan komponen dari X. Selanjutnya C adalah satu-satunya komponen dari X yang memuat x. Sebab andaikan C^* adalah juga komponen dari X yang memuat x, maka C^* adalah salah satu dari C_i dan oleh karenanya termuat dalam C. Padahal C^* adalah ruang bagian terhubung maksimal dari X, maka haruslah $C^* = C$.

2. Akibat langsung dari konstruksi pada nomor 1 di atas. Dengan konstruksi itu suatu ruang bagian terhubung dari X termuat dalam komponen yang memuat semua titik-titik dari ruang bagian itu.
3. Andaikan A suatu ruang bagian terhubung dari X yang sekaligus terbuka dan tertutup. Dari pernyataan (2), A termuat dalam suatu komponen C. Andaikan $A \neq C$, maka $C = (C \cap A) \cup (C \cap A^c)$ adalah suatu ketakterhubungan dari C. Kontradiksi dengan kenyataan bahwa C suatu komponen, yaitu terhubung. Maka disimpulkan $A = C$.
4. Andaikan suatu komponen C tidak tertutup. Menurut Teorema 3.4, penutupnya yaitu $\bar{C}$ adalah suatu ruang bagian terhubung dari X yang memuat C. Kontradiksi, karena C merupakan ruang bagian terhubung maksimal dari X. ■

Andaikan $\mathbb{Q}$ adalah ruang bagian dari $\mathbb{R}$ yang memuat semua bilangan rasional. Ada dua kenyataan tentang $\mathbb{Q}$:

1. Jika x dan z adalah dua bilangan rasional yang berlainan, dan $x < z$, maka ada bilangan irasional y sedemikian sehingga $x < y < z$. Diperoleh $\mathbb{Q} = [\,\mathbb{Q} \cap (-\infty, y)] \cup [\,\mathbb{Q} \cap (y, +\infty)]$, yang merupakan suatu ketakterhubungan dari $\mathbb{Q}$, yang memisahkan x dan z. Jadi setiap ruang bagian dari $\mathbb{Q}$ yang memuat lebih dari satu titik adalah tidak terhubung. Jadi komponen-komponen dari $\mathbb{Q}$ adalah singleton-singleton.

2. Singleton-singleton dari $\mathbb{Q}$ tidak terbuka, sebab setiap himpunan terbuka dari $\mathbb{R}$ yang memuat suatu bilangan rasional pasti juga memuat bilangan rasional lainnya.

Contoh ini memperlihatkan bahwa ada ruang topologi yang komponen-komponennya adalah singleton-singleton dan yang singleton-singletonnya tidak terbuka.
Contoh ini juga memperlihatkan bahwa suatu ruang tidak perlu diskrit agar setiap singleton merupakan komponen.

3. Ruang Terhubung Lokal

Ruang terhubung lokal pada suatu titik x adalah ruang topologi dengan sifat bahwa setiap kitar dari x memuat suatu kitar yang terhubung dari x. Ruang topologi X dikatakan *terhubung lokal* bila X terhubung lokal di setiap titiknya.

Keterhubungan lokal bukan merupakan akibat maupun sebab dari keterhubungan. Gabungan dua interval terbuka yang saling asing pada garis bilangan real adalah suatu contoh dari ruang topologi yang terhubung lokal tetapi tidak terhubung. Suatu ruang topologi dapat juga terhubung tetapi tidak terhubung lokal, seperti diperlihatkan oleh contoh berikut.

Andaikan X suatu ruang bagian dari bidang Euklides, yang didefinisikan dengan $X = A \cup B$, di mana $A = \{(x,y) \mid x = 0$ dan $-1 \leq y \leq 1\}$ dan $B = \{(x,y) \mid 0 < x \leq 1$ dan $y = \sin (1/x) \}$. B adalah bayangan dari interval $(0,1]$ oleh fungsi kontinyu f yang didefinisikan dengan $f(x) = (x, \sin(1/x))$. Jadi B terhubung menurut Teorema 3.7, dan karena $X = \bar{B}$, maka X terhubung menurut Teorema 3.3. Tetapi X tidak terhubung lokal, sebab setiap titik $x \in A$ mempunyai suatu kitar yang tidak memuat kitar terhubung dari x.

Keterhubungan lokal ternyata berkaitan dengan basis lokal seperti terlihat dari Teorema berikut ini.

Teorema 3.14. : Ruang topologi X adalah terhubung lokal pada suatu titik $x \in X$ bila dan hanya bila ada suatu basis lokal pada titik x yang terdiri dari kitar-kitar terhubung dari X.

Bukti :

($\Rightarrow$) Andaikan ruang topologi X terhubung lokal pada x, dan U_x adalah klas dari semua kitar-kitar terhubung dari x. Karena setiap kitar N dari x memuat suatu anggota dari U_x, maka U_x adalah basis lokal pada x.

($\Leftarrow$) Jika ada basis lokal U_x pada titik x yang terdiri dari kitar-kitar terhubung dari x, maka setiap kitar N dari x pasti memuat anggota dari U_x, dan oleh karena itu X adalah terhubung lokal pada x. ∎

Menurut Teorema 3.13, komponen-komponen dari suatu ruang topologi X selalu tertutup. Maka komponen-komponen dari suatu ruang bagian tertutup dari X juga tertutup dalam X. Komponen-komponen dari suatu ruang topologi yang terhubung lokal adalah terbuka, seperti dibuktikan dalam Teorema berikut ini.

Teorema 3.15. : Andaikan X adalah ruang terhubung lokal. Jika Y adalah ruang bagian terbuka dari X, maka setiap komponen dari Y adalah terbuka dalam X. Khususnya, setiap komponen dari X adalah terbuka.

Bukti :

Andaikan C adalah suatu komponen dari Y, dan $x \in C$. Karena X terhubung lokal dan Y terbuka dalam X, maka Y memuat kitar terhubung N dari x. Kitar N ini juga terhubung sebagai ruang bagian dari Y.

Menurut Teorema 3.13 nomor 1, C adalah satu-satunya komponen dari Y yang memuat x. Jadi haruslah $N \subset C$. Oleh karena itu C adalah terbuka. ∎

Bab IV

JENIS KETERHUBUNGAN YANG LAIN

Jenis keterhubungan lainnya dari ruang topologi yang akan dibahas yaitu ruang terhubung lintasan.

Definisi 4. 1. : Andaikan X suatu ruang topologi. Suatu fungsi kontinyu $f : [0,1] \longrightarrow X$ disebut *lintasan (arc)* dalam X. Lintasan f ini dikatakan menghubungkan titik f(0) dengan titik f(1). Titik f(0) disebut *titik awal* dan titik f(1) disebut *titik akhir* dari lintasan itu. Jika f suatu lintasan dalam X, maka f([0,1]) disebut *kurva* dalam X.

Definisi 4. 2. : Ruang topologi X dikatakan *terhubung lintasan*, jika untuk setiap pasang titik x, $y \in X$, maka ada suatu lintasan f yang menghubungkan x ke y.

Contoh :

Andaikan $X = \{0,1\}$ dan $\tau = \{ X, \emptyset, \{0\} \}$. Maka (X,τ) merupakan ruang terhubung lintasan karena ada fungsi kontinyu $f : [0,1] \longrightarrow X$ dengan $f(x) = 0$ jika $x \in [0,1)$, dan $f(x) =$

1 jika $x = 1$. Jadi ada suatu lintasan yang menghubungkan 0 dan 1.

Suatu lintasan f dalam ruang topologi X yang titik awalnya berimpit dengan titik akhirnya disebut *lintasan tertutup (loop)* dalam X.

Suatu lintasan $\bar{f} : [0,1] \longrightarrow X$ didefinisikan dengan $\bar{f}(x) = f(1-x)$ untuk setiap $x \in [0,1]$ dikatakan *lintasan kebalikan dari f*.

Jika f suatu lintasan dalam ruang topologi X dan g suatu fungsi kontinyu dari X ke ruang topologi Y, maka fungsi komposit $gf : [0,1] \longrightarrow Y$ merupakan lintasan dalam Y, sebab komposisi fungsi-fungsi kontinyu adalah kontinyu.

Teorema 4. 1. : Andaikan Y adalah suatu ruang topologi. Jika ada suatu ruang terhubung lintasan X dan fungsi kontinyu $g : X \longrightarrow Y$ yang surjektif, maka Y adalah ruang terhubung lintasan.

Bukti :

Ambil sebarang titik $a,b \in Y$. Karena fungsi $g: X \longrightarrow Y$ surjektif, maka ada titik-titik c dan $d \in X$ sedemikian sehingga $g(c) = a$ dan $g(d) = b$. Karena X adalah ruang terhubung lintasan, maka ada suatu lintasan f dalam X yang menghubungkan c ke d. Fungsi gf adalah lintasan yang menghubungkan a ke b. ■

Keterhubungan lintasan lebih kuat daripada keterhubungan, seperti diperlihatkan oleh teorema berikut ini.

Teorema 4. 2. : Jika X adalah ruang topologi terhubung lintasan, maka X terhubung.

Bukti :

Andaikan X tidak terhubung dengan suatu ketakterhubungan $X = A \cup B$. Ambil sebarang titik $a \in A$ dan $b \in B$. Karena X terhubung lintasan, maka ada fungsi $f : [0,1] \longrightarrow X$ yang merupakan lintasan dari a ke b. Karena f kontinyu, maka $f^{-1}(A)$ dan $f^{-1}(B)$ adalah terbuka dalam [0,1]. Lagi pula $f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) = f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(X) = [0,1]$, yang merupakan suatu ketakterhubungan dari [0,1]. Kontradiksi, sebab [0,1] terhubung. Jadi X adalah terhubung. ■

Bab V

SUATU PENERAPAN KETERHUBUNGAN

Salah satu penerapan keterhubungan pada ruang topologi terurut adalah untuk membuktikan *Teorema Nilai Tengah*.

Teorema 5. 1. : Andaikan $f : X \rightarrow Y$ adalah fungsi kontinyu dari ruang terhubung X ke ruang topologi terurut Y. Jika $a, b \in X$ dan $r \in Y$, dengan $f(a) < r < f(b)$, maka ada $c \in X$ sedemikian sehingga $f(c) = r$.

Bukti :

Himpunan-himpunan $A = f(X) \cap (-\infty, r)$ dan $B = f(X) \cap (r, +\infty)$ adalah saling asing, dan masing-masing tidak kosong, sebab A memuat $f(a)$ dan B memuat $f(b)$. Masing-masing himpunan A dan B itu adalah terbuka dalam $f(X)$, karena merupakan irisan dari suatu sinar terbuka dalam Y dengan $f(X)$. Jika tidak ada titik $c \in X$ sedemikian sehingga $f(c) = r$, maka $f(X) = A \cup B$, yang merupakan suatu ketakterhubungan dari $f(X)$. Kontradiksi, karena $f(X)$ terhubung sebab merupakan bayangan kontinyu dari suatu ruang terhubung. ∎

Definisi 5. 1. : Suatu ruang topologi X dikatakan mempunyai *sifat titik tetap* jika untuk setiap fungsi kontinyu $f : X \longrightarrow X$ ada $x \in X$ sedemikian sehingga $f(x) = x$.

Teorema 5. 2. : Interval tertutup $I = [0,1]$ mempunyai *sifat titik tetap*.

Bukti :

Andaikan $f : I \longrightarrow I$ adalah fungsi kontinyu. Diperlihatkan ada $a \in I$ sedemikian sehingga $f(a) = a$. Jika $f(0) = 0$ atau $f(1) = 1$, maka bukti selesai. Maka diandaikan bahwa $0 < f(0)$ dan $f(1) < 1$. Didefinisikan fungsi $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dengan $g(x) = x - f(x)$. Maka g adalah fungsi kontinyu, $g(0) = - f(0) < 0$ dan $g(1) = 1 - f(1) > 0$. Menurut Teorema 5.1, ada $a \in I$ sedemikian sehingga $g(a) = 0$. Jadi $a - f(a) = 0$, sehingga $f(a) = a$. ∎

Secara geometris Teorema 5.2 di atas dapat digambarkan sebagai berikut : Grafik fungsi kontinyu $f : I \longrightarrow I$ terletak di dalam bujursangkar satuan $I^2 = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 1 \text{ dan } 0 \le y \le 1 \}$. Teorema tersebut mengatakan bahwa grafik fungsi f tersebut pasti memotong diagonal (yang menghubungkan titik $(0,0)$ dengan titik $(1,1)$) bujursangkar satuan itu.

Teorema berikut memperlihatkan bahwa mempunyai sifat titik tetap adalah suatu sifat topologi, yaitu diawetkan oleh pemetaan homeomorfisma.

Teorema 5. 3. : Andaikan X dan Y adalah ruang-ruang topologi yang homeomorfik, dan X mempunyai sifat titik tetap. Maka Y juga mempunyai sifat titik tetap.

Bukti :

Andaikan X suatu ruang topologi dengan sifat titik tetap dan Y ruang topologi yang homeomorfik dengan X. Maka ada homeomorfisma $h : X \longrightarrow Y$. Diperlihatkan bahwa Y mempunyai sifat titik tetap. Andaikan $f : Y \longrightarrow Y$ kontinyu. Karena h homeomorfisma, maka fungsi komposit $h^{-1} \circ f \circ h : X \longrightarrow X$ adalah kontinyu. Karena X mempunyai sifat titik tetap, maka ada $a \in X$ sedemikian sehingga $(h^{-1} \circ f \circ h)(a) = a$.

Perhatikan bahwa $f \circ h = h \circ h^{-1} \circ f \circ h$, sehingga $f(h(a)) = (h \circ h^{-1} \circ f \circ h)(a) = h((h^{-1} \circ f \circ h)(a)) = h(a)$. Jadi Y mempunyai sifat titik tetap. ∎

Definisi 5. 2. : Suatu titik p dalam ruang terhubung X disebut *titik potong* dari X, jika $X - \{p\}$ adalah tidak terhubung.

Teorema 5. 4. : Andaikan X dan Y adalah ruang-ruang terhubung, titik p adalah titik potong dari X, dan $h : X \longrightarrow Y$ adalah suatu homeomorfisma. Maka $h(p)$ adalah titik potong dari Y.

Bukti :

Karena $X - \{p\}$ adalah tidak terhubung, maka ada himpunan-himpunan terbuka yang tidak kosong dan saling asing yaitu A dan B sedemikian sehingga $X - \{p\} = A \cup B$.

Karena h adalah homeomorfisma, maka $h(A)$ dan $h(B)$ adalah himpunan-himpunan terbuka dari Y yang tidak kosong dan saling asing sedemikian sehingga $Y - \{h(p)\} = h(A) \cup h(B)$. Jadi $h(p)$ adalah titik potong dari Y. ∎

BAB VI

KESIMPULAN

Ruang topologi yang terhubung dipahami melalui suatu ketak-terhubungan. Ruang topologi dikatakan tak terhubung bila dapat dinyatakan sebagai gabungan dua himpunan terbuka yang tidak kosong dan saling asing. Salah satu sifat penting yang terdapat pada ruang topologi terhubung adalah sifat keterhubungannya diawetkan oleh fungsi kontinyu.

Suatu ruang topologi tak terhubung dapat dipecah menjadi ruang-ruang bagian terhubung maksimal yang saling asing. Ruang bagian terhubung maksimal dari suatu ruang topologi disebut komponen dari ruang topologi itu. Setiap titik dalam ruang topologi termuat dalam tepat satu komponen dari ruang topologi itu. Dan setiap komponen dari ruang topologi adalah tertutup. Ruang topologi yang terhubung hanya mempunyai satu komponen yaitu ruang topologi itu sendiri.

Ruang terhubung lokal merupakan salah satu jenis keterhubungan pada ruang topologi. Ruang topologi terhubung lokal pada suatu titik merupakan ruang topologi dengan sifat bahwa setiap kitar dari titik tersebut memuat suatu kitar terhubung dari titik itu. Jenis keterhubungan lokal tidak merupakan akibat maupun sebab dari keterhubungan. Karena ada ruang topologi yang terhubung lokal tapi tidak terhubung, dan ada ruang topologi yang terhubung tapi tidak terhubung lokal.

Ruang terhubung lintasan X adalah ruang topologi di mana untuk setiap pasang titiknya terdapat suatu fungsi kontinyu f dari [0,1] ke X yang menghubungkan kedua titik tersebut. Keterhubungan lintasan ini lebih kuat daripada keterhubungan, yaitu ruang topologi yang terhubung lintasan pasti terhubung.

Suatu penerapan ruang topologi yang terhubung terdapat pembuktian teorema nilai tengah dan pembuktian bahwa sifat mempunyai titik tetap merupakan sifat topologis, yaitu diawetkan oleh pemetaan homeomorfisma.

DAFTAR PUSTAKA

1. Kartono dan Nurwiyati, F.W . *"Pengantar Topologi"*. Andi Offset, Yokyakarta, 1995.

2. Kelley, John L . *"General Topology"*. Van Nostrand Company, Princeton, New Jersey, 1955.

3. Lipscutz, S . *"Theory and Problems of General Topology"*. Schaum's Outline Series, McGraw Hill, New york, 1965.

4. MC Carty, George . *"Topology : an Introduction with Application to Topological Groups"*. McGraw Hill, San Francisco, 1967.

5. Mendelson, B . *"Introduction to Topology"*. College Mathematics Series, Allyn and Bacon,Boston, Massachusetts, 1962.

6. Munkres, J.R . *"Topology : A First Course"*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1975.

7. Patty, C. Wayne . *"Foundations of Topology"*. PWS Publishing Company, Boston, 1993.

8. Pervin, William J . *"Foundations of General Topology"*. Academic Press, New York, 1964.

9. Simmons, George F . *"Introduction to Topology and Modern Analysis"*. McGraw Hill, New York, 1963.

10. Soehakso, RMJT . *"Topologi"*. Diktat Kuliah, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Gadjah Mada, Yogyakarta.

11. Wahyudin, Drs. , M.Pd. . *"Dasar-dasar Topologi"*. Tarsito, Bandung, 1987.