ORTOGONALITAS DALAM RUANG VEKTOR

S K R I P S I

O l e h :

M. ANDY RUDHITO

NIM: 90 414 018

NIRM: 900052010501120016

PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA

JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN

UNIVERSITAS SANATA DHARMA

1995

ORTOGONALITAS DALAM RUANG VEKTOR

S K R I P S I

Diajukan Untuk Memenuhi Salah Salah Syarat Memperoleh
Gelar Sarjana Pendidikan Program Studi Pendidikan
Matematika

O l e h :

M. ANDY RUDHITO

NIM: 90 414 018

NIRM: 900052010501120016

PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA
JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
UNIVERSITAS SANATA DHARMA

1995

S K R I P S I

ORTOGONALITAS DALAM RUANG VEKTOR

O l e h :

M. ANDY RUDHITO

NIM: 90 414 018

NIRM: 900052010501120016

Telah disetujui oleh:

Pembimbing I

Dr. F. Susilo, S.J. Tanggal: 20 - 10 - 1995

Pembimbing II

Drs. St. Susento, MS. Tanggal: 27 - 10 - 1995

S K R I P S I

ORTOGONALITAS DALAM RUANG VEKTOR

Yang dipersiapkan dan disusun oleh:

M. ANDY RUDHITO

NIM: 90 414 018

NIRM: 900052010501120016

Telah Dipertahankan di depan Panitia Penguji pada tanggal 20 Oktober 1995 dan dinyatakan telah memenuhi syarat.

Susunan Panitia Penguji

	Nama lengkap	Tanda tangan
Ketua	: Dr. F. Susilo, S.J.	
Sekretaris	: Dr. St. Suwarsono	
Anggota	: Drs. A. Tutoyo, M.Sc.	
Anggota	: Drs. St. Susento, M.S.	

Yogyakarta, 28 Oktober 1995

Fakultas Keguruan Dan Ilmu Pendidikan

Universitas Sanata Dharma

Dekan

Priyono Marwan

Dr. Priyono Marwan, S.J.

KATA PENGANTAR

Puji syukur penulis haturkan kepada Tuhan yang telah memberikan Karunia dan KasihNya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.

Skripsi ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat memperoleh gelar Sarjana Pendidikan. Dalam penyusunan skripsi ini penulis tidak terlepas dari bantuan serta bimbingan dari dari berbagai pihak. Untuk itu penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Dr. F. Susilo, S.J. selaku dosen pembimbing I yang telah membimbing dan mengkoreksi tulisan dalam penyusunan skripsi ini.
2. Drs. St. Susento, MS. selaku dosen pembimbing II yang telah membaca dan memberikan saran-saran dalam penyusunan skripsi ini.
3. Dr. St. Suwarsono selaku Ketua Jurusan PMIPA yang telah memberikan dukungan atas penyusunan skripsi ini.
4. Semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu, yang telah ikut membantu dalam penyusunan skripsi ini sejak persiapan sampai selesai.

Penulis menyadari bahwa dalam skripsi ini masih ada kekurangannya. Karena itu penulis sangat mengharapkan kritik dan saran dari para pembaca skripsi ini.

Akhirnya penulis berharap semoga skripsi ini berguna bagi para pembacanya.

Yogyakarta, September 1995

Penulis

DAFTAR ISI

ABSTRAK

Vektor dalam ruang berdimensi-2 (bidang) dan dalam ruang berdimensi-3 (ruang) secara aljabar dapat diperluas menjadi vektor dalam ruang berdimensi-n, yang kita sebut ruang euklides berdimensi-n ($\mathbb{R}^n$). Dengan operasi penjumlahan dan perkalian dengan skalar yang didefinisikan, vektor-vektor dalam $\mathbb{R}^n$ ini mempunyai sifat-sifat seperti bilangan real. Dengan mengambil sifat-sifat penting dari vektor dalam $\mathbb{R}^n$, dapat didefinisikan suatu sistem aljabar yang disebut ruang vektor, yaitu suatu himpunan tidak kosong bersama dengan operasi penjumlahan dan perkalian dengan skalar yang didefinisikan pada himpunan tersebut, dan memenuhi aksioma-aksioma tertentu. Konsep-konsep yang penting dalam ruang vektor meliputi: subruang, kombinasi linear, rentang, himpunan perentang, dependen linear, independen linear, basis dan dimensi.

Pengertian-pengertian panjang, jarak, sudut dan ketegaklurusan antara dua vektor pada bidang ($\mathbb{R}^2$) dan pada ruang ($\mathbb{R}^3$) dapat digeneralisasi ke dalam $\mathbb{R}^n$. Pengertian-pengertian tersebut secara aljabar dapat didefinisikan dengan perkalian-skalar. Untuk itu perkalian-skalar pada $\mathbb{R}^2$ dan $\mathbb{R}^3$ digeneralisasi menjadi perkalian-skalar pada $\mathbb{R}^n$. Perkalian-skalar pada $\mathbb{R}^n$ diabstraksikan menjadi perkalian-dalam pada sebarang ruang vektor, yaitu suatu operasi yang mengawankan setiap pasang vektor dalam suatu ruang vektor dengan suatu bilangan real, dan memenuhi syarat-syarat tertentu. Dengan perkalian-dalam pada suatu ruang vektor ini, pengertian-pengertian norma, jarak, sudut dan ortogonalitas pada suatu ruang vektor dapat didefinisikan. Ortogonalitas dapat dipandang sebagai suatu abstraksi dari konsep ketegaklurusan pada suatu ruang vektor dengan perkalian-dalam. Pembahasan tentang ortogonalitas dalam ruang vektor ini meliputi: subruang-subruang yang saling ortogonal dalam $\mathbb{R}^n$, himpunan ortonormal, basis ortonormal, proyeksi suatu vektor pada suatu subruang dan proses Gram-Schmidt. Konsep ortogonalitas ini dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah kuadrat terkecil.

BAB I

PENDAHULUAN

Secara geometris setiap vektor dalam ruang berdimensi-2 (bidang) dengan menggunakan sistem koordinat kartesian dapat dinyatakan sebagai ruas garis berarah dengan titik pangkal (0, 0) dan titik ujung (x_1, x_2). Vektor ini dapat dinyatakan dengan matriks berordo 2 x 1, yaitu $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, dengan x_1 dan x_2 bilangan-bilangan real. Penjumlahan vektor dengan hukum jajaran genjang dapat dikaitkan dengan penjumlahan matriks, dan perkalian dengan skalar pada vektor dapat dikaitkan dengan perkalian skalar dengan matriks. Himpunan semua vektor dalam bidang ini secara aljabar mempunyai sifat-sifat seperti pada himpunan semua matriks berordo 2 x 1.

Gagasan-gagasan dalam ruang berdimensi-2 tersebut juga berlaku untuk ruang berdimensi-3. Walaupun visualisasi geometrik tidak melebihi dimensi-3, tetapi kita dapat memperluas banyak gagasan yang sudah kita kenal hingga melebihi dimensi-3 dengan membahasnya secara aljabar. Ruang berdimensi-n akan didefinisikan sebagai himpunan semua matriks berordo n x 1, yang selanjutnya akan disebut ruang euklides berdimensi-n ($\mathbb{R}^n$). Operasi penjumlahan dan perkalian dengan skalar dalam $\mathbb{R}^n$ akan didefinisikan sebagai operasi penjumlahan matriks dan perkalian skalar dengan matriks.

Vektor-vektor tersebut akan diabstraksikan menjadi vektor abstrak, yang didefinisikan berdasarkan sifat-sifat penting vektor-vektor itu. Untuk itu akan didefinisikan secara aksiomatis suatu sistem aljabar yang disebut ruang vektor. Aksioma-aksioma sistem tersebut dipilih dengan mengabstraksikan sifat-sifat penting dari vektor-vektor pada $\mathbb{R}^n$. Elemen-elemen dari ruang vektor ini akan disebut vektor, yang bisa berupa matriks, fungsi, polinomial dan sebagainya.

Dalam ruang berdimensi-2 secara geometris didefinisikan perkalian-skalar antara dua buah vektor **u** dan **v** sebagai berikut: $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \|\mathbf{u}\|\ \|\mathbf{v}\| \cos\theta$, dengan $\|\mathbf{u}\|$ dan $\|\mathbf{v}\|$ adalah panjang vektor-vektor **u** dan **v**, dan θ adalah sudut lancip antara **u** dan **v**. Perkalian-skalar ini banyak digunakan untuk masalah-masalah yang melibatkan sudut antara dua vektor dan panjang suatu vektor.

Dengan menggunakan hukum kosinus dapat ditunjukkan bahwa perkalian-skalar yang didefinisikan di atas dapat juga ditentukan dengan menggunakan representasi vektor secara aljabar, yaitu jika $\mathbf{u} = (u_1, u_2)^T$ dan $\mathbf{v} = (v_1, v_2)^T$, maka $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2$. Hasil di atas juga berlaku ruang berdimensi-3. Hal ini memungkinkan kita untuk memperluas pengertian-pengertian panjang, jarak, sudut dan ketegaklurusan dari vektor-vektor dalam ruang berdimensi-2 ke dalam $\mathbb{R}^n$. Perkalian-skalar pada ruang berdimensi-2 kemudian akan digeneralisasi menjadi perkalian-skalar pada $\mathbb{R}^n$ yang akan digunakan untuk mendefinisikan pengertian panjang, jarak, sudut dan ortogonalitas (ketegaklurusan) dalam $\mathbb{R}^n$.

Perkalian-skalar pada $\mathbb{R}^n$ kemudian diabstraksikan menjadi perkalian-dalam pada ruang vektor, yaitu suatu operasi yang mengawankan setiap pasang vektor dalam suatu ruang vektor dengan suatu bilangan real, dan memenuhi syarat-syarat tertentu. Syarat-syarat ini diambil dari sifat-sifat penting perkalian-skalar pada $\mathbb{R}^n$. Dengan perkalian-dalam yang didefinisikan pada suatu ruang vektor akan kita definisikan pengertian norma, jarak, sudut dan ortogonalitas dalam suatu ruang vektor.

Tulisan ini akan diawali dengan membahas suatu topik yang akan banyak kita bicarakan dalam tulisan ini, yaitu sistem persamaan linear dan metode eliminasi untuk menyelesaikannya. Aljabar matriks selanjutnya akan dikembangkan dan dikaitkan dengan metode eliminasi melalui ekuivalensi baris. Kita perhatikan juga sistem persamaan linear homogen dan beberapa sifat-sifatnya. Sifat-sifat dari matriks yang berhubungan dengan masalah sistem persamaan linear juga akan kita bahas.

Selanjutnya akan dibahas definisi dan konsep-konsep penting dalam ruang vektor. Kita awali dengan membahas ruang euklides berdimensi-n ($\mathbb{R}^n$) yang meliputi: sifat-sifat vektor dalam $\mathbb{R}^n$ dan perkalian-skalar dalam $\mathbb{R}^n$ beserta sifat-sifatnya. Kemudian didefinisikan ruang vektor dan dibahas juga tiga sifat mendasar dari ruang vektor. Konsep-konsep penting dalam ruang vektor yang akan kita bicarakan meliputi: subruang, kombinasi linear, rentang, himpunan perentang, dependen linear, independen linear, basis dan dimensi. Akan kita perhatikan secara khusus dua subruang yang diperoleh dari baris dan kolom dari suatu matriks, yang dapat digunakan untuk mempelajari suatu sistem persamaan linear.

Mengawali pembahasan tentang ortogonalitas, akan didefinisikan pengertian panjang, jarak, sudut dan ortogonalitas dalam $\mathbb{R}^n$. Akan kita perhatikan dua buah ketaksamaan, pengertian vektor satuan dan hukum Pythagoras. Pengertian saling ortogonal dua buah vektor dalam $\mathbb{R}^n$ selanjutnya akan digunakan untuk mendefinisikan dua buah subruang yang saling ortogonal dalam $\mathbb{R}^n$. Dalam pembahasannya juga akan dibicarakan tentang komplemen ortogonal dari suatu subruang dalam $\mathbb{R}^n$.

Perkalian-skalar dalam $\mathbb{R}^n$ selanjutnya akan diabstraksikan dengan mendefinisikan perkalian-dalam pada suatu ruang vektor. Hal-hal yang dibahas dalam $\mathbb{R}^n$ dengan perkalian-skalar kemudian akan diabstraksikan dalam ruang vektor dengan perkalian-dalam. Konsep ortogonalitas dalam $\mathbb{R}^n$ akan digunakan untuk menyelesaikan masalah kuadrat terkecil dalam $\mathbb{R}^n$, yaitu menentukan pendekatan terbaik penyelesaian sistem persamaan linear dengan lebih banyak persamaan dari pada variabel, yang pada umumnya tidak mempunyai penyelesaian. Dalam suatu ruang vektor dengan perkalian-dalam selanjutnya akan dibahas tentang basis ortonormal dan proyeksi suatu vektor pada suatu subruang. Konsep ortogonalitas dalam ruang vektor dengan perkalian-dalam akan digunakan untuk menyelesaikan masalah kuadrat terkecil dalam ruang vektor dengan perkalian-dalam, yaitu mencari suatu vektor dalam suatu subruang, yang "paling dekat" dengan suatu vektor yang telah ditentukan.

Kemudian akan ditunjukkan bagaimana basis ortonormal dapat dibangun melalui suatu proses. Dengan proses tersebut akan kita lihat bahwa suatu matriks dapat difaktorkan menjadi suatu hasil kali matriks dengan kolom-kolom ortonormal terhadap perkalian-skalar dalam $\mathbb{R}^n$ dan suatu matriks segitiga atas yang invertible. Faktorisasi ini akan sangat membantu dalam penyelesaian masalah kuadrat terkecil dalam $\mathbb{R}^n$. Tulisan ini akan diakhiri dengan memberikan suatu modifikasi dari proses tersebut, yang dapat memberikan hasil yang lebih akurat dengan menggunakan perhitungan numeris dengan ketelitian berhingga.

BAB II

MATRIKS DAN SISTEM PERSAMAAN LINEAR

1. Sistem Persamaan Linear

Sebuah garis dalam bidang-xy secara aljabar dapat dinyatakan dengan persamaan yang berbentuk:

$$a_1 x + a_2 y = b$$

di mana a_1, a_2 dan b adalah konstanta-konstanta real, dengan a_1 dan a_2 tidak bersama-sama sama dengan nol. Persamaan semacam ini kita namakan persamaan linear dalam variabel x dan y. Secara lebih umum, akan kita definisikan persamaan linear dalam n variabel x_1, x_2, ..., x_n, dan akan kita bahas juga sebuah metode untuk menyelesaikan sistem m persamaan linear dengan n variabel.

Definisi 2.1.1.

Persamaan linear dalam n variabel x_1, x_2, ... , x_n adalah persamaan yang dapat dinyatakan dalam bentuk:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = b$$

dimana a_1, a_2, ... , a_n dan b adalah konstanta-konstanta real, dengan a_1 a_2, ..., a_n tidak bersama-sama sama dengan nol.

Definisi 2.1.2.

Suatu sistem persamaan linear m x n adalah himpunan m persamaan linear dengan n variabel, yang dapat dinyatakan dalam bentuk:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \qquad (1)$$

di mana a_{i1}, a_{i2}, ... , a_{in} dan b_i adalah konstanta-konstanta real, dengan a_{i1} a_{i2}, ..., a_{in} tidak bersama-sama sama dengan nol untuk i = 1, 2, ..., m.

Dalam sistem persamaan linear m x n, dapat terjadi m = n , m > n atau m < n. Apabila $x_1 = t_1$, $x_2 = t_2$, ..., $x_n = t_n$. di mana t_1, t_2, ..., t_n adalah konstanta konstanta real yang memenuhi semua persamaan linear dalam sistem tersebut, maka pasangan berurutan (t_1, t_2, ..., t_n) disebut *penyelesaian* dari sistem persamaan linear tersebut. Apabila sistem persamaan linear mempunyai penyelesaian, maka sistem persamaan linear tersebut dikatakan *konsisten*. Sedang apabila tidak mempunyai penyelesaian sistem persamaan linear tersebut dikatakan *tidak konsisten*. Sistem yang konsisten dapat mempunyai tepat satu penyelesaian atau mempunyai banyak penyelesaian.

Sistem persamaan linear (1) di atas dapat ditulis dengan notasi matriks sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Atau lebih singkat ditulis A X = B , dimana A = (a_{ij}) yaitu *matriks koefisien*, X = $(x_1, x_2, ..., x_n)^T$ dan B = $(b_1, b_2, ..., b_m)^T$.

Kita ingat bahwa *transpose* dari matriks A = (a_{ij}) berordo m x n adalah matriks B = (b_{ji}) berordo n x m yang didefinisikan dengan $b_{ji} = a_{ij}$ untuk j = 1, ..., n dan i = 1, ..., m. Transpose dari A dilambangkan dengan A^T dan dibaca "A transpose".

Jika pada matriks koefisien A kita tambahkan satu kolom tambahan yaitu matriks $B = (b_1, b_2, \ldots, b_m)^T$ sebagai kolom terakhir, maka kita dapatkan matriks sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}.$$

Matriks ini kita sebut *matriks yang diperbesar*.

Dua sistem persamaan linear yang banyaknya variabel sama, dikatakan *ekuivalen* apabila setiap penyelesaian sistem persamaan linear yang satu merupakan penyelesaian sistem persamaan linear lainnya, dan sebaliknya. Dengan mengerjakan satu atau lebih operasi berikut pada suatu sistem persamaan linear, akan diperoleh sistem persamaan linear yang ekuivalen:

1. Menukar tempat dua persamaan dalam sistem tersebut.
2. Mengalikan suatu persamaan dengan konstanta real tak nol.
3. Menambahkan kelipatan dari satu persamaan pada persamaan yang lain.

Karena baris dalam matriks yang diperbesar bersesuaian dengan persamaan dalam suatu sistem persamaan linear, maka ketiga operasi di atas bersesuaian dengan operasi berikut pada matriks yang diperbesar:

1. Menukar tempat dua baris dalam matriks tersebut.
2. Mengalikan suatu baris dengan konstanta real tak nol.
3. Menambahkan kelipatan dari satu baris pada baris lain.

Operasi-operasi ini dinamakan *Operasi-operasi Baris Elementer*.

Suatu matriks yang didapatkan dari matriks identitas I dengan melakukan sebuah operasi baris elementer disebut *matriks elementer*. Suatu matriks B dikatakan *ekuivalen baris* dengan matriks A jika ada suatu barisan berhingga E_1, E_2, ..., E_k dari matriks-matriks elementer, sedemikian hingga

$$B = E_k \, E_{k-1} \, \ldots \, E_1 \, A.$$

2. Bentuk Eselon Baris

Untuk menyelesaikan suatu sistem persamaan linear m x n, kita mengerjakan operasi-operasi baris elementer pada matriks yang diperbesar dari sistem tersebut. Dengan demikian matriks yang diperbesar itu disederhanakan, sehingga sistem persamaan linear yang bersesuaian dapat dengan mudah diselesaikan.

Definisi 2.2.1.

Sebuah matriks dikatakan berada dalam *Bentuk Eselon Baris*, jika mempunyai sifat-sifat berikut:

1. Bilangan tak nol pertama dalam setiap baris tersebut adalah 1 (yang kita namakan "1 terdepan").
2. Elemen 1 terdepan dalam baris yang lebih rendah terletak lebih jauh ke kanan dari 1 terdepan dalam baris yang lebih tinggi.
3. Baris-baris yang seluruhnya terdiri dari nol, berada di baris terbawah.

Jika pada ketiga sifat di atas kita tambahkan satu sifat lagi, yaitu:

4. Dalam tiap kolom yang memuat 1 terdepan, elemen-elemen lainnya adalah nol semua.

maka matriks yang memenuhi ke-4 sifat di atas dikatakan berada dalam *Bentuk Eselon Baris Tereduksi*.

Contoh 2.2.1.

Matriks-matriks berikut berada dalam bentuk eselon baris.

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriks-matriks berikut berada dalam bentuk eselon baris tereduksi.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Suatu matriks A berordo n x n disebut *matriks segitiga atas* jika $a_{ij} = 0$, untuk $i > j$, dan disebut *matriks segitiga bawah* jika $a_{ij} = 0$, untuk $i < j$. Suatu matriks A berordo n x n disebut *matriks segitiga* jika matriks tersebut merupakan matriks segitiga atas atau matriks segitiga bawah.

Definisi 2.2.2.

Proses yang mentransformasikan suatu matriks ke bentuk eselon baris dengan menggunakan operasi baris elementer disebut *Eliminasi Gauss*.

Sedangkan jika proses tersebut mentransformasikan suatu matriks ke bentuk eselon baris tereduksi, maka proses itu disebut *Eliminasi Gauss-Jordan.*

Contoh 2.2.2.

Selesaikan sistem persamaan linear berikut dengan menggunakan eliminasi Gauss-Jordan!

$$
\begin{aligned}
x_1 + 3x_2 - 2x_3 \qquad\qquad + 2x_5 \qquad\qquad &= 0 \\
2x_1 + 6x_2 - 5x_3 - 2x_4 + 4x_5 - 3x_6 &= -1 \\
5x_3 + 10x_4 \qquad\qquad + 15x_6 &= 5 \\
2x_1 + 6x_2 \qquad\quad + 8x_4 + 4x_5 + 18x_6 &= 6.
\end{aligned}
$$

Penyelesaian:

Matriks yang diperbesar untuk sistem tersebut adalah:

$$
\begin{bmatrix}
1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\
2 & 6 & -5 & -2 & 4 & -3 & -1 \\
0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 & 5 \\
2 & 6 & 0 & 8 & 4 & 18 & 6
\end{bmatrix}.
$$

Dengan menambahkan -2 kali baris pertama pada baris kedua dan baris keempat kita dapatkan matriks:

$$
\begin{bmatrix}
1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & -2 & 0 & -3 & -1 \\
0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 & 5 \\
0 & 0 & 4 & 8 & 0 & 18 & 6
\end{bmatrix}.
$$

Dengan mengalikan baris kedua dengan -1 dan kemudian menambahkan -5 kali baris kedua pada baris ketiga dan -4 kali baris kedua pada baris keempat maka didapat matriks:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 2 \end{bmatrix}.$$

Dengan mempertukarkan baris ketiga dan baris keempat dan kemudian mengalikan baris ketiga dari matriks yang dihasilkan dengan 1/6 maka akan diperoleh bentuk eselon baris:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dengan menambahkan -3 kali baris ketiga pada baris kedua dan kemudian menambahkan 2 kali baris kedua dari matriks yang dihasilkan pada baris pertama, maka akan diperoleh bentuk eselon baris tereduksi:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Sistem persamaan yang bersesuaian adalah:

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 \qquad + 4x_4 + 2x_5 \qquad &= 0 \\ x_3 + 2x_4 \qquad &= 0 \\ x_6 &= 1/3. \end{aligned}$$

Variabel-variabel x_1, x_2 dan x_6 yang bersesuaian dengan 1 terdepan dalam bentuk eselon baris tereduksi tersebut kita namakan *variabel terdepan*. Sedangkan variabel lainnya adalah *variabel bebas*.

Dengan menyelesaikan untuk variabel terdepan, kita dapatkan: $x_1 = -3x_2 - 4x_4 - 2x_5$

$x_3 = -2x_4$, $x_6 = 1/3$.

Jika kita andaikan $x_2 = r$, $x_4 = s$ dan $x_5 = t$, maka:

$x_1 = -3r - 4s - 2t$ dan $x_3 = -2s$.

Jadi (-3r -4s -2t, r, -2s, s, t, 1/3) adalah penyelesaian untuk sistem tersebut.

Sistem persamaan linear dapat diselesaikan dengan eliminasi Gauss, dengan mengubah matriks yang diperbesar ke dalam bentuk eselon baris tanpa meneruskan ke bentuk eselon baris tereduksi. Sistem persamaan linear yang bersesuaian diselesaikan dengan cara *Substitusi Balik*.

Contoh 2.2.3.

Dari contoh 2.2.2 bentuk eselon baris dari matriks yang diperbesar tersebut adalah:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Sistem persamaan yang bersesuaian adalah:

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 2x_3 \qquad + 2x_5 \qquad &= 0 \\ x_3 + 2x_4 \qquad + 3x_6 &= 1 \\ x_6 &= 1/3. \end{aligned}$$

Dengan mensubstitusikan $x_6 = 1/3$ ke dalam persamaan kedua akan diperoleh: $x_1 = -3x_2 + 2x_3 - 2x_5$

$x_3 = -2x_4$, $x_6 = 1/3$.

Dengan mensubstitusikan $x_3 = -2x_4$ ke dalam persamaan pertama akan diperoleh: $x_1 = -3x_2 - 4x_4 - 2x_5$

$x_3 = -2x_4$, $x_6 = 1/3$.

Pengerjaan selanjutnya akan menghasilkan penyelesaian yang sama seperti pada contoh 2.2.2.

3. Sistem Persamaan Linear Homogen

Definisi 2.3.1.

Suatu sistem persamaan linear dikatakan *homogen* jika konstanta pada ruas kanan semuanya sama dengan nol.

Sistem persamaan linear homogen mempunyai bentuk umum:

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= 0 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= 0 \\
&\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= 0.
\end{aligned}
$$

Sistem persamaan linear homogen selalu konsisten karena $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, ..., $x_n = 0$ selalu merupakan penyelesaian. Penyelesaian ini disebut *penyelesaian trivial*. Jika ada penyelesaian lain maka penyelesaian itu disebut *penyelesaian non trivial*.

Teorema 2.3.1.

Suatu sistem persamaan linear homogen m x n mempunyai penyelesaian non trivial jika m < n.

Bukti:

Bentuk eselon baris dari matriks yang diperbesar paling banyak mempunyai m baris tak nol. Jadi paling banyak ada m variabel terdepan. Karena ada n variabel dan $m < n$, maka pasti ada beberapa variabel bebas. Untuk variabel-variabel bebas ini dapat ditetapkan nilai sebarang yang akan memberikan penyelesaian non trivial pada sistem tersebut. ∎

Suatu matriks bujursangkar dikatakan *non singular* atau *invertible* jika matriks tersebut mempunyai invers terhadap operasi perkalian matriks. Invers dari matriks A dilambangkan dengan A^{-1}. Sedangkan matriks bujursangkar yang tidak mempunyai invers perkalian disebut matriks *singular*.

Kita tunjukkan bahwa invers suatu matriks bujursangkar adalah tunggal. Andaikan invers matriks A tidak tunggal. Berarti selain A^{-1} ada matriks $B \neq A^{-1}$ yang juga merupakan invers dari matriks A. Maka

$$A^{-1} A = I$$
$$(A^{-1} A)\, B = I\, B$$
$$A^{-1}(A\, B) = B \qquad \text{(B invers dari A)}$$
$$A^{-1} I = B$$
$$A^{-1} = B \qquad \text{(Kontradiksi).}$$

Jadi invers dari suatu matriks adalah tunggal.

Teorema 2.3.2.

Jika E adalah sebarang matriks elementer, maka E invertible.

Bukti:

1. Jika E adalah matriks elementer yang dibentuk dari I dengan menukar tempat baris ke-i dan ke-j, maka E dapat ditransformasikan kembali ke I dengan menukar kembali baris-baris tersebut. Jadi E E = I yaitu E adalah invers dirinya sendiri.
2. Jika E adalah matriks elementer yang dibentuk dengan mengalikan baris ke-i dari I dengan konstanta real $\alpha \neq 0$, maka E dapat ditransformasikan kembali ke I dengan mengalikan baris ke-i dari E dengan $1/\alpha$. Jadi E^{-1} diperoleh dari I dengan mengalikan baris ke-i dengan $1/\alpha$.
3. Jika E adalah matriks elementer yang dibentuk dari I dengan menambahkan kelipatan baris ke-i pada baris ke-j, maka E dapat ditransformasikan kembali ke I dengan mengurangkan kelipatan baris ke-i dari baris ke-j. Jadi E^{-1} diperoleh dari I dengan mengurangkan kelipatan baris ke-i dari baris ke-j. ■

Jika A dan B adalah 2 buah matriks n x n yang non singular, maka A B juga non singular dan

$$(B^{-1}\ A^{-1})\ A\ B = B^{-1}\ (A^{-1}A)\ B = B^{-1}\ B = I$$

$$(A\ B)(B^{-1}\ A^{-1}) = A\ (B\ B^{-1})\ A^{-1} = A\ A^{-1} = I$$

sehingga $(A\ B)^{-1} = B^{-1}\ A^{-1}$, karena invers dari suatu matriks adalah tunggal. Jika E_1, E_2, ... , E_k semuanya matriks non singular, maka dengan induksi matematis dapat dibuktikan bahwa $E_1\ E_2\ \dots\ E_k$ juga non singular dan $(E_1\ E_2\ \dots\ E_k)^{-1} = E_k^{-1}\ \dots\ E_2^{-1}\ E_1^{-1}$.

Teorema 2.3.3.

Jika A matriks n x n maka pernyataan-pernyataan berikut adalah ekuivalen

(a) A non singular.

(b) Sistem persamaan linear homogen $A X = 0$ hanya mempunyai penyelesaian trivial.

(c) A ekuivalen baris dengan I.

Bukti:

(a) $\Rightarrow$ (b)

Jika A non singular dan $\hat{X}$ penyelesaian untuk $A X = 0$, maka: $\hat{X} = I \hat{X} = (A^{-1}A) \hat{X} = A^{-1}(A \hat{X}) = A^{-1} 0 = 0$.

Jadi $A X = 0$ hanya mempunyai penyelesaian trivial.

(b) $\Rightarrow$ (c)

Dengan operasi baris elementer, sistem dapat ditransformasikan ke bentuk $U X = 0$, di mana U adalah bentuk eselon baris. Jika salah satu elemen diagonal U adalah 0, maka elemen 1 terdepan pada baris yang memuat elemen nol tersebut terletak di sebelah kanan dari elemen nol tersebut. Untuk baris-baris di bawahnya elemen-elemen 1 terdepan terletak lebih ke kanan dari baris di atasnya, sehingga untuk baris yang paling bawah tidak ada elemen 1 terdepan. Jadi elemen-elemen baris yang paling bawah nol semua. Sehingga sistem $A X = 0$ akan ekuivalen dengan sistem dengan lebih banyak variabel dari pada persamaan, dan karena itu menurut teorema 2.3.1 akan mempunyai penyelesaian non trivial. Jadi U harus merupakan matriks segitiga dengan elemen diagonal semua sama dengan 1. Sehingga eselon baris tereduksi dari A adalah matriks identitas I. Jadi A ekuivalen baris dengan I.

(c) ⇒ (a)

Jika A ekuivalen baris dengan I, maka ada matriks elementer E_1, E_2, ..., E_k sedemikian hingga

$$A = E_k \, E_{k-1} \, \ldots \, E_1 \, I \; = \; E_k \, E_{k-1} \, \ldots \, E_1 .$$

Tetapi karena masing-masing E_i invertible, maka hasil kali $E_k \, E_{k-1} \, \ldots \, E_1$ juga invertible. Jadi A non singular dan $A^{-1} = (E_k \, E_{k-1} \, \ldots \, E_1)^{-1} = E_1^{-1} \, E_2^{-1} \, \ldots \, E_k^{-1}$. ∎

Corrollary 2.3.4.

Sistem persamaan linear A X = B mempunyai penyelesaian tunggal bhb A non singular.

Bukti:

(⇐)

Jika A non singular dengan invers A^{-1}, maka $A\,(A^{-1}\,B) = (A\,A^{-1})\,B = I\,B = B$. Sehingga $X = A^{-1}\,B$ merupakan penyelesaian untuk A X = B. Andaikan Y ≠ X juga merupakan penyelesaian, maka A Y = B, sehingga

$$A^{-1}\,A\,Y = A^{-1}\,B$$

$$Y = A^{-1}\,B = X \quad \text{(Kontradiksi).}$$

Jadi $X = A^{-1}\,B$ merupakan penyelesaian tunggal untuk A X = B.

(⇒)

Andaikan A X = B mempunyai penyelesaian tunggal $\bar{X}_1$.

Andaikan A singular. Maka menurut teorema 2.3.3:

A X = 0 mempunyai suatu penyelesaian Z ≠ 0.

Andaikan $Y = \bar{X}_1 + Z$. Jelas bahwa $Y \neq \bar{X}_1$ dan

$$A\,Y = A\,(\overline{X}_1 + Z) = A\,\overline{X}_1 + A\,Z = B + 0 = B.$$

Jadi Y juga suatu penyelesaian untuk $A\,X = B$ (Kontradiksi). Jadi haruslah A non singular. ■

Berkaitan dengan determinan suatu matriks, kita ingat teorema berikut, yang membantu kita untuk menentukan bahwa suatu matriks berordo n x n singular atau non singular.

Teorema 2.3.5.

Suatu matriks A berordo n x n adalah non singular bhb $\det(A) \neq 0$.

Bukti:

(⇒)

Jika A non singular dengan invers A^{-1}, maka $I = A\;A^{-1}$.

Sehingga $1 = \det(I) = \det(A)\,\det(A^{-1})$.

Jadi $\det(A) \neq 0$.

(⇐)

Andaikan $\det(A) \neq 0$. Misalkan U adalah bentuk eselon baris tereduksi dari A, maka kita dapat mencari matriks-matriks elementer $E_1, E_2, \ldots, E_k$ sehingga

$E_k\,E_{k-1}\,\ldots\,E_1\,A = U$, atau $A = E_1^{-1}\,E_2^{-1}\,\ldots\,E_k^{-1}\,U$.

Jadi $\det(A) = \det(E_1^{-1}).\det(E_2^{-1})\ldots\det(E_k^{-1}).\det(U) \neq 0$.

Jadi haruslah $\det(U) \neq 0$. Maka U tidak mempunyai suatu baris yang terdiri dari nol semua, sehingga $U = I$. Oleh karena itu A ekuivalen baris dengan I, dan menurut teorema 2.3.3: A non singular. ■

BAB III
RUANG VEKTOR

1. Ruang Euklides berdimensi-n

Vektor dalam ruang berdimensi-2 dapat dinyatakan dengan matriks berordo 2 x 1, yaitu: $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, dan dalam ruang berdimensi-3 dapat dinyatakan dengan matriks berordo 3 x 1, yaitu: $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$, dengan x_1, x_2, x_3 adalah bilangan-bilangan real. Walaupun visualisasi geometrik tidak melebihi dimensi 3, tetapi kita dapat memperluas banyak gagasan yang sudah dikenal hingga melebihi dimensi 3 dengan membahasnya secara aljabar.

Definisi 3.1.1.

Himpunan semua matriks berordo n x 1 dengan elemen-elemen bilangan real, disebut *ruang euklides berdimensi-n*, dan dilambangkan dengan $\mathbb{R}^n$.

Setiap elemen dari $\mathbb{R}^n$ kita sebut *vektor*. Vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ yang berupa matriks berordo n x 1 untuk selanjutnya akan kita tulis sebagai transpose dari matriks berordo 1 x n, yaitu $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$. Bilangan real x_i disebut *komponen ke-i* dari vektor $\mathbf{x}$. Elemen-elemen dalam $\mathbb{R}$ kita sebut *skalar*.

Definisi 3.1.2.

Dua buah vektor $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ dan $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)^T$ dalam $\mathbb{R}^n$ dikatakan sama, yaitu $\mathbf{x} = \mathbf{y}$, jika $x_i = y_i$ untuk setiap i = 1, 2, ..., n.

Definisi 3.1.3.

Operasi penjumlahan dan perkalian dengan skalar dalam $\mathbb{R}^n$ didefinisikan sebagai berikut:

Jika $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ dan $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)^T$ adalah vektor-vektor dalam $\mathbb{R}^n$ dan α dalam $\mathbb{R}$, maka

$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)^T$ dan

$\alpha\mathbf{x} = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n)^T$.

Definisi 3.1.4.

Suatu vektor dalam $\mathbb{R}^n$ yang semua komponennya sama dengan nol disebut *vektor nol* dan dilambangkan dengan $\mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0)^T$. Jika $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ sebarang vektor dalam $\mathbb{R}^n$, maka vektor $(-x_1, -x_2, \ldots, -x_n)^T$ disebut *negatif* (atau invers terhadap operasi penjumlahan) dari $\mathbf{x}$, dan dilambangkan dengan $-\mathbf{x}$.

Operasi pengurangan dalam $\mathbb{R}^n$ didefinisikan sebagai berikut: $\mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{x} + (-\mathbf{y})$

$$= (x_1 - y_1, x_2 - y_2, \ldots, x_n - y_n)^T$$

untuk setiap $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ dan

$\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)^T$ dalam $\mathbb{R}^n$.

Teorema 3.1.1.

Untuk tiap $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ dan $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, berlaku:

a. $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ dan $\alpha\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

b. $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$.

c. $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$.

d. $\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x}$.

e. $\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{0}$.

f. $\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}$.

g. $(\alpha + \beta)\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{x}$.

h. $(\alpha\beta)\mathbf{x} = \alpha(\beta\mathbf{x})$.

i. $1\mathbf{x} = \mathbf{x}$.

Bukti:

Ambil tiga elemen sebarang $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ dan sebarang skalar $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, maka $x_i, y_i, z_i \in \mathbb{R}$ untuk i = 1, 2, ..., n. Maka

a. $\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)^T$

di mana $x_i + y_i \in \mathbb{R}$, sebab $x_i, y_i \in \mathbb{R}$ untuk i = 1, 2, ..., n.

Jadi $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Kemudian

$\alpha\mathbf{x} = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n)^T$ di mana $\alpha x_i \in \mathbb{R}$, sebab $\alpha, x_i \in \mathbb{R}$ untuk i = 1, 2, ..., n.

Jadi $\alpha\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

b.
$$\begin{aligned}\mathbf{x} + \mathbf{y} &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)^T \\ &= (y_1 + x_1, y_2 + x_2, \ldots, y_n + x_n)^T \\ &= \mathbf{y} + \mathbf{x}.\end{aligned}$$

c.
$$\begin{aligned}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)^T \\ &\quad + (z_1, z_2, \ldots, z_n)^T \\ &= ((x_1 + y_1) + z_1, (x_2 + y_2) + z_2, \\ &\quad \ldots, (x_n + y_n) + z_n)^T \\ &= (x_1 + (y_1 + z_1), x_2 + (y_2 + z_2), \\ &\quad \ldots, x_n + (y_n + z_n))^T\end{aligned}$$

$$= (x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1 + z_1, y_2 + z_2, \ldots, y_n + z_n)^T$$
$$= \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}).$$

d. $\mathbf{x} + \mathbf{0} = (x_1 + 0, x_2 + 0, \ldots, x_n + 0)^T$
$$= (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T = \mathbf{x}.$$

e. $\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = (x_1 + (-x_1), x_2 + (-x_2), \ldots, x_n + (-x_n))^T$
$$= (0, 0, \ldots, 0)^T = \mathbf{0}.$$

f. $\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)^T$
$$= (\alpha(x_1 + y_1), \alpha(x_2 + y_2), \ldots, \alpha(x_n + y_n))^T$$
$$= (\alpha x_1 + \alpha y_1, \alpha x_2 + \alpha y_2, \ldots, \alpha x_n + \alpha y_n)^T$$
$$= (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n) + (\alpha y_1, \alpha y_2, \ldots, \alpha y_n)^T = \alpha\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}.$$

g. $(\alpha + \beta)\mathbf{x} = ((\alpha + \beta)x_1, (\alpha + \beta)x_2, \ldots, (\alpha + \beta)x_n)^T$
$$= (\alpha x_1 + \beta x_1, \alpha x_2 + \beta x_2, \ldots, \alpha x_n + \beta x_n)^T$$
$$= (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n) + (\beta x_1, \beta x_2, \ldots, \beta x_n)^T = \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{x}.$$

h. $(\alpha\beta)\mathbf{x} = ((\alpha\beta)x_1, (\alpha\beta)x_2, \ldots, (\alpha\beta)x_n)^T$
$$= (\alpha(\beta x_1), \alpha(\beta x_2), \ldots, \alpha(\beta x_n))^T$$
$$= \alpha(\beta x_1, \beta x_2, \ldots, \beta x_n)^T = \alpha(\beta\mathbf{x}).$$

i. $1\mathbf{x} = (1x_1, 1x_2, \ldots, 1x_n)^T$
$$= (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T = \mathbf{x}.$$ ∎

Perkalian-skalar yang didefinisikan pada bidang ($\mathbb{R}^2$) atau pada ruang ($\mathbb{R}^3$) dapat diperluas menjadi perkalian-skalar pada $\mathbb{R}^n$.

Definisi 3.1.5.

Andaikan $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ dan $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots,$

$y_n)^T$ adalah sebarang vektor dalam $\mathbb{R}^n$. *Perkalian skalar* dari $\mathbf{x}$ dan $\mathbf{y}$ dalam $\mathbb{R}^n$ kita definisikan sebagai berikut:

$$\mathbf{x}.\mathbf{y} = \mathbf{x}^T\mathbf{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n.$$

Teorema 3.1.2.

Untuk tiap $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ dan sebarang skalar α, $\beta \in \mathbb{R}$, berlaku:

a. $\mathbf{x}.\mathbf{x} \geq 0$; dan $\mathbf{x}.\mathbf{x} = 0$ bhb $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

b. $\mathbf{x}.\mathbf{y} = \mathbf{y}.\mathbf{x}$.

c. $(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}).\mathbf{z} = \alpha(\mathbf{x}.\mathbf{z}) + \beta(\mathbf{y}.\mathbf{z})$.

Bukti:

Ambil tiga elemen sebarang $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ dan sebarang α, $\beta \in \mathbb{R}$, maka x_i, y_i, $z_i \in \mathbb{R}$ untuk i = 1, 2, ...,n.

Maka

a. $\mathbf{x}.\mathbf{x} = x_1x_1 + x_2x_2 + \dots + x_nx_n$

$= x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \geq 0$

dan

$\mathbf{x}.\mathbf{x} = 0$ bhb $x_1^2 = x_2^2 = \dots = x_n^2 = 0$

bhb $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$

bhb $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

b. $\mathbf{x}.\mathbf{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n$

$= y_1x_1 + y_2x_2 + \dots + y_nx_n = \mathbf{y}.\mathbf{x}$.

c. $(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}).\mathbf{z} = (\alpha x_1 + \beta y_1)z_1 + (\alpha x_2 + \beta y_2)z_2 + \dots$

$+ (\alpha x_n + \beta y_n)z_n$

$= \alpha x_1z_1 + \beta y_1z_1 + \alpha x_2z_2 + \beta y_2z_2 + \dots$

$+ \alpha x_nz_n + \beta y_nz_n$

$= \alpha x_1z_1 + \alpha x_2z_2 + \dots + \alpha x_nz_n +$

$\beta x_1z_1 + \beta y_1z_2 + \dots + \beta x_nz_n$

$$= \alpha(x_1 z_1 + x_2 z_2 + \ldots + x_n z_n) +$$
$$\beta(x_1 z_1 + x_2 z_2 + \ldots + x_n z_n)$$
$$= \alpha(\mathbf{x}\cdot\mathbf{z}) + \beta(\mathbf{y}\cdot\mathbf{z}). \qquad \blacksquare$$

2. Ruang vektor

Pada bagian ini kita akan mengabstraksikan konsep vektor yang telah kita pelajari. Akan kita tetapkan sejumlah aksioma-aksioma yang harus dipenuhi oleh anggota-anggota suatu himpunan tidak kosong. Aksioma-aksioma ini dipilih dengan mengabstraksikan sifat-sifat yang penting dari vektor-vektor pada $\mathbb{R}^n$, seperti yang tercantum pada teorema 3.1.1.

Definisi 3.2.1.

Andaikan V adalah suatu himpunan tidak kosong dan pada V didefinisikan operasi penjumlahan dan perkalian dengan skalar, yaitu aturan yang mengawankan setiap pasang elemen $\mathbf{x}$ dan $\mathbf{y} \in V$ dan setiap skalar $\alpha \in \mathbb{R}$ dengan tepat satu elemen $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in V$ dan tepat satu elemen $\alpha\mathbf{x} \in V$. Himpunan V bersama dengan operasi penjumlahan dan perkalian dengan skalar itu disebut *ruang vektor* jika memenuhi aksioma-aksioma berikut:

A.1. $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$ untuk semua $\mathbf{x}$ dan $\mathbf{y} \in V$.

A.2. $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$ untuk semua $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}, \in V$.

A.3. Ada elemen $\mathbf{0} \in V$ sedemikian hingga $\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x}$ untuk semua $\mathbf{x} \in V$.

A.4. Untuk setiap $\mathbf{x} \in V$, ada elemen $-\mathbf{x} \in V$ sedemikian hingga $\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{0}$.

A.5. $\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}$ untuk sebarang skalar $\alpha \in \mathbb{R}$ dan semua $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$.

A.6. $(\alpha + \beta)\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{x}$ untuk sebarang skalar $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ dan untuk semua $\mathbf{x} \in V$.

A.7. $(\alpha\beta)\mathbf{x} = \alpha(\beta\mathbf{x})$ untuk sebarang skalar $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ dan untuk semua $\mathbf{x} \in V$.

A.8. $1\mathbf{x} = \mathbf{x}$ untuk semua $x \in V$.

Elemen-elemen dalam V disebut *vektor*. Ruang vektor yang didefinisikan di atas sering juga disebut *ruang vektor real*, karena skalar yang digunakan adalah bilangan-bilangan real.

Karena aksioma-aksioma dari ruang vektor merupakan abstraksi dari sifat-sifat vektor pada $\mathbb{R}^n$, maka $\mathbb{R}^n$ merupakan salah satu contoh dari ruang vektor.

Contoh 3.2.1.

Andaikan $\mathbb{R}^{m\times n}$ adalah himpunan semua matriks berordo m x n dengan elemen-elemen bilangan real. Jika $A = (a_{ij})$ dan $B = (b_{ij})$, jumlahan A + B didefinisikan sebagai matriks $C = (c_{ij})$ berordo m x n , di mana $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$. Untuk sebarang skalar real α didefinisikan αA sebagai suatu matriks $D = (d_{ij})$ berordo m x n, di mana elemen $d_{ij} = \alpha a_{ij}$. Sudah kita ketahui dari Aljabar Matriks bahwa kedua operasi tersebut memenuhi aksioma-aksioma ruang vektor tersebut di atas. Vektor $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ adalah matriks O berordo m x n , di mana elemen-elemennya adalah semua sama dengan nol dan $A + O = A$, untuk semua $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Invers jumlahan dari vektor $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ adalah matriks $-A = (-1)A$ sebab $A + (-1)\,A = O$.

Contoh 3.2.2.

Andaikan $C[a,b]$ melambangkan himpunan semua fungsi bernilai real yang didefinisikan dan kontinu pada interval tertutup $[a,b]$. Jumlahan $f + g$ dari dua fungsi dalam $C[a,b]$ didefinisikan sebagai berikut:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

untuk semua x dalam $[a,b]$. Fungsi $f + g \in C[a,b]$, karena jumlahan dua fungsi kontinu adalah fungsi kontinu juga. Andaikan f adalah suatu fungsi dalam $C[a,b]$ dan α adalah sebarang skalar $\in \mathbb{R}$. Perkalian dengan skalar αf didefinisikan sebagai berikut:

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$$

untuk semua x dalam $[a,b]$. Jelas bahwa $\alpha f \in C[a,b]$ karena suatu konstan kali fungsi kontinu selalu merupakan fungsi kontinu. Kita buktikan bahwa $C[a,b]$ dengan kedua operasi yang didefinisikan di atas merupakan ruang vektor.

1) Ambil sebarang f dan $g \in C[a,b]$. Maka

   $$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = g(x) + f(x) = (g + f)(x)$$

   untuk semua $x \in [a,b]$.

   $\therefore\ f + g = g + f$, untuk semua f dan $g \in C[a,b]$.

2) Ambil sebarang $f, g, h \in C\,[a,b]$. Maka

   $$\begin{aligned}((f + g) + h)(x) &= (f + g)(x) + h(x)\\ &= (f(x) + g(x)) + h(x)\\ &= f(x) + (g(x) + h(x))\end{aligned}$$

$= f(x) + (g + h)(x)$

$= (f + (g + h))(x)$

untuk semua $x \in [a,b]$.

$\therefore (f + g) + h = f + (g + h)$

untuk semua $f, g, h \in C[a,b]$.

3) $C\,[a,b]$ memuat fungsi f_o, di mana $f_o(x) = 0$

untuk semua $x \in [a,b]$, dan

$(f + f_o)(x) = f(x) + f_o(x) = f(x) + 0 = f(x)$

untuk semua $x \in [a,b]$.

$\therefore f + f_o = f$ untuk semua $f \in C[a,b]$.

4) Ambil sebarang $f \in C[a,b]$.

Ada $-f \in C[a,b]$,

di mana $(-f)(x) = -f(x)$ untuk semua $x \in [a,b]$, dan

$(f + (-f))(x) = f(x) + (-f)(x) = f(x) + (-f(x)) = 0$

$= f_o(x)$ untuk semua $x \in [a,b]$.

$\therefore f + (-f) = f_o$ untuk setiap $f \in C\,[a,b]$.

5) Ambil sebarang f dan $g \in C[a,b]$ dan sebarang skalar α. Maka untuk setiap $x \in [a,b]$:

$(\alpha(f + g))(x) = \alpha(f + g)(x) = \alpha(f(x) + g(x))$

$= \alpha f(x) + \alpha g(x) = (\alpha f + \alpha g)(x)$.

$\therefore \alpha(f + g) = \alpha f + \alpha g$ untuk semua f dan $g \in C[a,b]$ dan sebarang skalar α.

6) Ambil sebarang $f \in C[a,b]$ dan sebarang skalar α dan β. Maka untuk setiap $x \in [a,b]$:

$((\alpha + \beta)f)(x) = (\alpha + \beta)f(x) = \alpha f(x) + \beta f(x))$

$= (\alpha f + \beta f)(x)$.

$\therefore (\alpha + \beta)f = \alpha f + \beta f$ untuk sebarang $f \in C[a,b]$ dan sebarang skalar α dan β.

7) Ambil sebarang $f \in C[a,b]$ dan sebarang skalar α

dan β. Maka untuk setiap $x \in [a,b]$:

$((\alpha\beta)f)(x) = (\alpha\beta)f(x) = \alpha(\beta f)(x)$.

$\therefore$ $(\alpha\beta)f = \alpha(\beta f)$ untuk sebarang $f \in C[a,b]$ dan sebarang skalar α dan β.

8) Ambil sebarang $f \in C[a,b]$.

Maka untuk setiap $x \in [a,b]$:

$(1f)(x) = 1f(x) = f(x)$.

$\therefore$ $1f = f$ untuk semua $f \in C[a,b]$.

Terbukti $C[a,b]$ bersama operasi penjumlahan dan perkalian dengan skalar yang didefinisikan di atas merupakan ruang vektor.

Contoh 3.2.3.

Andaikan P_n adalah himpunan semua fungsi polinomial p berderajat $\leq$ n, yaitu himpunan fungsi yang didefinisikan dengan

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \text{ untuk semua } x \in \mathbb{R},$$

di mana $a_1, a_2, \ldots, a_n$ adalah bilangan-bilangan real dan n bilangan bulat positif. Andaikan p dan q adalah fungsi-fungsi polinomial dalam P_n yang didefinisikan berturut-turut dengan

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$$

dan $$q(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n$$

untuk semua $x \in \mathbb{R}$, dan $\alpha \in \mathbb{R}$.

Jumlahan $p + q$ dari dua fungsi polinomial dalam P_n dan perkalian dengan skalar αp didefinisikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}(p + q)(x) &= p(x) + q(x) \\ &= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \ldots + (a_n + b_n)x^n\end{aligned}$$

dan $(\alpha p)(x) = \alpha p(x) = \alpha a_0 + (\alpha a_1)x + \ldots + (\alpha a_n)x^n$ untuk semua $x \in \mathbb{R}$, yang juga merupakan polinomial dalam P_n. Dengan cara yang analog seperti dalam contoh 3.1.2 dapat dibuktikan bahwa P_n bersama operasi penjumlahan dan perkalian dengan skalar yang didefinisikan tersebut di atas, merupakan ruang vektor.

Teorema 3.2.1.

Jika V adalah ruang vektor dan $\mathbf{x}$ dan $\mathbf{y}$ sebarang vektor dalam V, maka:

(i) $0\mathbf{x} = \mathbf{0}$

(ii) Jika $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{0}$, maka $\mathbf{y} = -\mathbf{x}$ (*yaitu invers jumlahan dari* $\mathbf{x}$ *adalah tunggal*)

(iii) $(-1)\mathbf{x} = -\mathbf{x}$.

Bukti:

(i) Menurut aksioma A.6 dan A.8 :

$\mathbf{x} = 1\,\mathbf{x} = (1 + 0)\,\mathbf{x} = 1\,\mathbf{x} + 0\,\mathbf{x} = \mathbf{x} + 0\,\mathbf{x}$. Jadi

$-\mathbf{x} + \mathbf{x} = -\mathbf{x} + (\mathbf{x} + 0\mathbf{x}) = (-\mathbf{x} + \mathbf{x}) + 0\mathbf{x}$ (A.2)

$\mathbf{0} = \mathbf{0} + 0\,\mathbf{x}$ (A.3) (A.4).

Terbukti $0\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

(ii) Andaikan $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{0}$.

Maka $-\mathbf{x} = -\mathbf{x} + \mathbf{0} = -\mathbf{x} + (\mathbf{x} + \mathbf{y}) = (-\mathbf{x} + \mathbf{x}) + \mathbf{y}$

$= \mathbf{0} + \mathbf{y} = \mathbf{y}$.

Terbukti $\mathbf{y} = -\mathbf{x}$.

(iii) Menurut (i) dan A.6:

$\mathbf{0} = 0\,\mathbf{x} = (1 + (-1))\mathbf{x} = 1\,\mathbf{x} + (-1)\mathbf{x}$.

Jadi $\mathbf{x} + (-1)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ (A.8).

Menurut (ii) : $(-1)\mathbf{x} = -\mathbf{x}$. ∎

Operasi pengurangan pada ruang vektor V kita definisikan sebagai berikut: $\mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{x} + (-\mathbf{y})$ untuk setiap $\mathbf{x}$ dan $\mathbf{y} \in$ V.

3. Subruang

Definisi 3.3.1.

Jika S adalah himpunan bagian tak kosong dari ruang vektor V dan S memenuhi syarat-syarat berikut:

(i) $\alpha\mathbf{x} \in S$ untuk semua $\mathbf{x} \in S$ dan sebarang skalar α

(ii) $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in S$ untuk semua $\mathbf{x}$ dan $\mathbf{y} \in S$

maka S disebut *subruang* dari V.

Definisi subruang di atas mengatakan bahwa subruang dari V adalah suatu himpunan bagian tak kosong dari V yang tertutup terhadap operasi penjumlahan dan perkalian dengan skalar yang didefinisikan pada V. Jika S adalah subruang dari V maka dapat kita tunjukkan bahwa S sendiri sebenarnya merupakan ruang vektor dengan operasi penjumlahan dan perkalian dengan skalar dari V. Aksioma A.3 dipenuhi sebab menurut syarat (i) untuk semua $\mathbf{x} \in S$ dan sebarang $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha\mathbf{x} \in S$. Jika kita ambil $\alpha = 0$ maka $0\mathbf{x} \in S$. Menurut teorema 3.2.1 (i) $0\mathbf{x} = \mathbf{0}$, sehingga $\mathbf{0} \in S$.Jika kita ambil $\alpha = -1$ dan $\mathbf{x} \in S$, maka $(-1)\mathbf{x} \in S$. Menurut teorema 3.2.1 (iii) $(-1)\mathbf{x} = -\mathbf{x}$ sehingga $-\mathbf{x} \in S$ untuk setiap $\mathbf{x} \in S$. Jadi aksioma A.4 juga dipenuhi. Aksioma-aksioma lainnya pasti dipenuhi oleh S, karena S adalah himpunan bagian dari V.

Contoh 3.3.1.

Andaikan S adalah himpunan semua fungsi polinomial p berderajat $\leq n$, dengan sifat $p(0) = 0$. S merupakan subruang dari P_n.

Bukti:

(i) Ambil sebarang p dalam S, dan $\alpha \in \mathbb{R}$,

maka $p(0) = 0$, sehingga $(\alpha p)(0) = \alpha p(0) = \alpha 0 = 0$.

$\therefore \alpha p \in S$ untuk semua $p \in S$.

(ii) Ambil sebarang p dan $q \in S$,

maka $p(0) = 0$ dan $q(0) = 0$, sehingga

$(p + q)(0) = p(0) + q(0) = 0 + 0 = 0$.

$\therefore p + q \in S$ untuk semua p dan $q \in S$.

Terbukti S subruang dari P_n. ■

Contoh 3.3.2.

Andaikan $S = \{(x, 1)^T \mid x$ adalah bilangan real$\}$.

S bukan subruang dari $\mathbb{R}^2$. S tidak tertutup terhadap perkalian dengan skalar karena:

$$\alpha (x, 1)^T \notin S, \text{ kecuali } \alpha = 1.$$

S tidak tertutup terhadap penjumlahan karena:

$$(x, 1)^T + (y, 1)^T = (x + y, 2)^T \notin S.$$

Definisi 3.3.2.

Andaikan A sebarang matriks m x n berelemen skalar. *Ruang null* dari A adalah himpunan semua penyelesaian untuk sistem $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, dengan $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ dan dilambangkan dengan N(A). Jadi

$$N(A) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}.$$

N(A) merupakan subruang dari $\mathbb{R}^n$, sebab:

(i) Jika $\mathbf{x}$ sebarang elemen dalam N(A) dan α sebarang skalar, maka: $A\ (\alpha\mathbf{x}) = \alpha(A\ \mathbf{x}) = \alpha\mathbf{0} = \mathbf{0}$.
Karena itu $\alpha\mathbf{x} \in N(A)$.

(ii) Jika $\mathbf{x}$ dan $\mathbf{y}$ sebarang elemen dalam N(A), maka:
$A\ (\mathbf{x} + \mathbf{y}) = A\ \mathbf{x} + A\ \mathbf{y} = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$.
Sehingga $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in N(A)$.

Contoh 3.3.3

Tentukan N(A) jika $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$!

Jawaban:

Dengan eliminasi Gauss-Jordan kita selesaikan sistem $A\ \mathbf{x} = \mathbf{0}$. Kita tentukan bentuk eselon baris tereduksi dari matriks A tersebut sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Dari bentuk eselon baris tereduksi ini, didapatkan dua variabel bebas, yaitu x_3 dan x_4 sehingga

$$x_1 = x_3 - x_4$$
$$x_2 = -2x_3 + x_4.$$

Jika $x_3 = \alpha$ dan $x_4 = \beta$ maka:

$\mathbf{x} = (\alpha - \beta,\ -2\alpha + \beta,\ \alpha,\ \beta)^T$

$= \alpha(1,\ -2,\ 1,\ 0)^T + \beta(-1,\ 1,\ 0,\ 1)^T$ adalah penyelesaian untuk $A\ \mathbf{x} = \mathbf{0}$. Jadi N(A) adalah himpunan semua vektor dengan bentuk $\alpha(1,\ -2,\ 1,\ 0)^T + \beta(-1,\ 1,\ 0,\ 1)^T$ di mana α dan β adalah skalar. ■

Definisi 3.3.3

Andaikan $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, ..., $\mathbf{v}_n$ adalah vektor-vektor dalam ruang vektor V. Suatu jumlahan dengan bentuk:

$$\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \ldots + \alpha_n\mathbf{v}_n$$

di mana α_1, α_2, ... α_n adalah skalar, disebut suatu *kombinasi linear* dari $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, ..., $\mathbf{v}_n$.

Himpunan semua kombinasi linear dari $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, ..., $\mathbf{v}_n$ disebut *rentang* dari $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, ..., $\mathbf{v}_n$, dan dilambangkan dengan $S(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$.

Dalam contoh 3.3.3 kita lihat bahwa ruang null dari A adalah rentang dari vektor-vektor $(1, -2, 1, 0)^T$ dan $(-1, 1, 0, 1)^T$.

Teorema 3.3.1.

Jika $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, ..., $\mathbf{v}_n$ adalah vektor-vektor dalam ruang vektor V, maka $S(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ adalah subruang dari V.

Bukti:

Andaikan β sebarang skalar dan andaikan

$$\mathbf{v} = \alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \ldots + \alpha_n\mathbf{v}_n$$

sebarang elemen dari $S(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$.

Maka: $\beta\mathbf{v} = (\beta\alpha_1)\mathbf{v}_1 + (\beta\alpha_2)\mathbf{v}_2 + \ldots + (\beta\alpha_n)\mathbf{v}_n$,

Jadi $\beta\mathbf{v} \in S(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$.

Andaikan $\mathbf{v} = \alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \ldots + \alpha_n\mathbf{v}_n$ dan

$\mathbf{w} = \beta_1\mathbf{v}_1 + \beta_2\mathbf{v}_2 + \ldots + \beta_n\mathbf{v}_n$.

Maka $\mathbf{v} + \mathbf{w} = (\alpha_1 + \beta_1)\mathbf{v}_1 + (\alpha_2 + \beta_2)\mathbf{v}_2 + \ldots + (\alpha_n + \beta_n)\mathbf{v}_n$.

Sehingga $\mathbf{v} + \mathbf{w} \in S(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$.

Jadi terbukti $S(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ subruang dari V. ∎

Definisi 3.3.4.

Himpunan $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ disebut *himpunan perentang* untuk ruang vektor V bhb $V = S(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$.

Contoh 3.3.4.

Andaikan $\mathbf{e}_i$ adalah vektor dalam $\mathbb{R}^n$ yang komponen ke-i-nya adalah 1 dan komponen yang lainnya semua sama dengan nol, untuk i = 1, 2, ..., n. Jadi

$\mathbf{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0)^T$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)^T$, ...,

$\mathbf{e}_n = (0, 0, \ldots, 1)^T$.

Setiap vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari vektor-vektor $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ tersebut, yaitu jika $\mathbf{x} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)^T$ adalah sebarang vektor dalam $\mathbb{R}^n$, maka $\mathbf{x} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + \ldots + a_n\mathbf{e}_n$. Oleh karena itu $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ adalah himpunan perentang untuk $\mathbb{R}^n$.

Definisi 3.3.5.

Andaikan S dan T adalah himpunan bagian dari ruang vektor V. *Jumlahan* dari S dan T yang kita lambangkan dengan S + T adalah himpunan semua vektor $\mathbf{s} + \mathbf{t}$, di mana $\mathbf{s} \in S$ dan $\mathbf{t} \in T$, yaitu

$$S + T = \{ \mathbf{x} \in V \mid \mathbf{x} = \mathbf{s} + \mathbf{t},\ \ \mathbf{s} \in S \text{ dan } \mathbf{t} \in T \}.$$

Teorema 3.3.2.

Jika S dan T adalah subruang dari V, maka

(i) $S + T$ dan

(ii) $S \cap T$

adalah subruang dari V.

Bukti:

(i) Ambil dua elemen sebarang $x_1, x_2 \in S + T$ dan sebarang skalar $\alpha \in \mathbb{R}$, maka

$x_1 = s_1 + t_1$, $x_2 = s_2 + t_2$,

di mana $s_1, s_2 \in S$ dan $t_1, t_2 \in T$. Jadi

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= (s_1 + t_1) + (s_2 + t_2) \\ &= s_1 + (t_1 + s_2) + t_2 && (s_2, t_1 \in V) \\ &= s_1 + (s_2 + t_1) + t_2 \\ &= (s_1 + s_2) + (t_1 + t_2) \\ &= s_3 + t_3, \text{ di mana } s_3 = s_1 + s_2 \in S \\ & \qquad\qquad\qquad\quad\ t_3 = t_1 + t_2 \in T. \end{aligned}$$

Jadi $x_1 + x_2 \in S + T$. Demikian pula

$$\begin{aligned} \alpha x_1 &= \alpha(s_1 + t_1) \\ &= \alpha s_1 + \alpha t_1 && (s_1, t_1 \in V) \\ &= s_4 + t_4, \text{ di mana } s_4 = \alpha s_1 \in S \\ & \qquad\qquad\qquad\quad\ t_4 = \alpha t_1 \in T. \end{aligned}$$

Jadi $\alpha x_1 \in S + T$.

Terbukti $S + T$ adalah subruang dari V.

(ii) Ambil dua elemen sebarang $y_1, y_2 \in S \cap T$ dan sebarang $\beta \in \mathbb{R}$, maka $y_1, y_2 \in S$ dan $y_1, y_2 \in T$, sehingga

$y_1 + y_2 \in S$ dan $\beta y_1 \in S$ (S subruang)

$y_1 + y_2 \in T$ dan $\beta y_1 \in T$ (T subruang).

Jadi $y_1 + y_2 \in S \cap T$ dan $\beta y_1 \in S \cap T$.

Terbukti $S \cap T$ adalah subruang dari V. ∎

4. Independensi Linear

Andaikan $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ adalah himpunan perentang untuk ruang vektor V. Akan diselidiki apakah terdapat himpunan $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$, di mana $m < n$, sedemikian sehingga himpunan ini juga merentang V. Kemudian akan kita tentukan himpunan perentang minimal untuk ruang vektor V. Untuk itu pada bagian ini akan dibahas pengertian dependen linear dan independen linear. Sebelumnya kita perhatikan terlebih dahulu dua teorema berikut.

Teorema 3.4.1.

Jika $v_1, v_2, \ldots, v_n$ merentang ruang vektor V dan salah satu dari vektor ini dapat ditulis sebagai kombinasi linear dari $n - 1$ vektor yang lain, maka $n - 1$ vektor itu juga merentang V.

Bukti:

Andaikan bahwa v_n dapat ditulis sebagai kombinasi linear dari $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}$, yaitu

$$v_n = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \ldots + \beta_{n-1} v_{n-1}.$$

Andaikan v sebarang elemen dalam V. Karena $v_1, v_2, \ldots, v_n$ merentang V, maka terdapat skalar-skalar $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sedemikian hingga

$$\begin{aligned} v &= \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_{n-1} v_{n-1} + \alpha_n v_n \\ &= \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_{n-1} v_{n-1} + \alpha_n(\beta_1 v_1 + \\ &\quad \beta_2 v_2 + \ldots + \beta_{n-1} v_{n-1}) \\ &= (\alpha_1 + \alpha_n\beta_1)v_1 + (\alpha_2 + \alpha_n\beta_2)v_2 + \ldots + (\alpha_{n-1} + \\ &\quad \alpha_n\beta_{n-1})v_{n-1}. \end{aligned}$$

Jadi semua v dalam V merupakan kombinasi linear dari

$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{n-1}$, yang berarti vektor-vektor ini merentang V. ∎

Teorema 3.4.2.

Diberikan n vektor $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$. Salah satu dari vektor-vektor tersebut merupakan kombinasi linear dari n - 1 vektor yang lain bhb ada skalar-skalar c_1, c_2, ..., c_n yang tidak semuanya sama dengan nol sedemikian hingga $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots + c_n\mathbf{v}_n = 0$.

Bukti:

(⇒)

Andaikan bahwa salah satu dari vektor-vektor $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, ..., $\mathbf{v}_n$, katakanlah $\mathbf{v}_n$, dapat ditulis sebagai kombinasi linear dari vektor-vektor yang lainnya, yaitu:

$$\mathbf{v}_n = \alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \ldots + \alpha_{n-1}\mathbf{v}_{n-1}.$$

Jika kita menetapkan $c_i = \alpha_i$ untuk i = 1, ..., n - 1 dan $c_n = -1$, maka

$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots + c_{n-1}\mathbf{v}_{n-1} + c_n\mathbf{v}_n$

$= c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots + c_{n-1}\mathbf{v}_{n-1} - \mathbf{v}_n = 0.$

(⇐)

Jika $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots + c_n\mathbf{v}_n = 0$ dengan paling sedikit satu dari c_i, katakanlah c_n, yang tidak sama dengan nol, maka:

$\mathbf{v}_n = (-c_1/c_n)\mathbf{v}_1 + (-c_2/c_n)\mathbf{v}_2 + \ldots + (-c_{n-1}/c_n)\mathbf{v}_{n-1}$. ∎

Definisi 3.4.1.

Vektor-vektor $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, ..., $\mathbf{v}_n$ dalam ruang vektor V dikatakan *dependen linear* jika ada skalar-skalar c_1, c_2,

..., c_n yang tidak semuanya sama dengan nol, sedemikian hingga $c_1v_1 + c_2v_2 + \ldots + c_nv_n = 0$.

Definisi 3.4.2.

Vektor-vektor v_1, v_2, ..., v_n dalam ruang vektor V dikatakan *independen linear* bhb

$$c_1v_1 + c_2v_2 + \ldots + c_nv_n = 0$$

hanya bila semua skalar c_1, c_2, ..., c_n semuanya sama dengan nol.

Suatu himpunan perentang untuk ruang vektor V disebut himpunan perentang *minimal* jika setiap himpunan bagian sejatinya tidak dapat merentang V.

Andaikan $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ adalah himpunan perentang minimal untuk ruang vektor V, berarti setiap himpunan bagian sejatinya tidak dapat merentang V, sehingga menurut teorema 3.4.1 tiap-tiap vektor v_1, v_2, ..., v_n tersebut tidak dapat ditulis sebagai kombinasi linear dari n - 1 vektor yang lain. Karena tiap-tiap vektor tersebut tidak dapat ditulis sebagai kombinasi linear dari n - 1 vektor yang lain, maka menurut teorema 3.4.2 $c_1v_1 + c_2v_2 + \ldots + c_nv_n = 0$ hanya bila skalar c_1, c_2, ..., c_n semuanya sama dengan nol, yang berarti v_1, v_2, ..., v_n independen linear.

Sebaliknya, jika v_1, v_2, ..., v_n independen linear dan merentang V, maka $c_1v_1 + c_2v_2 + \ldots + c_nv_n = 0$ hanya bila semua skalar c_1, c_2, ..., c_n semuanya sama dengan nol, sehingga menurut teorema 3.4.2 tidak ada di antara vektor-vektor $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, ..., $\mathbf{v}_n$ yang dapat ditulis sebagai kombinasi linear dari n − 1 vektor yang lain, yang berarti himpunan dengan n − 1 vektor-vektor tersebut tidak dapat merentang V. Dengan demikian setiap himpunan bagian sejati yang lain dari $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ juga tidak dapat merentang V. Jadi $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ adalah himpunan perentang minimal untuk V.

Teorema 3.4.3.

Andaikan $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, ..., $\mathbf{x}_n$ adalah n buah vektor dalam $\mathbb{R}^n$ dengan $\mathbf{x}_i = (x_{1i}, x_{2i}, \ldots, x_{ni})^T$ untuk i = 1, 2, ..., n. Andaikan $X = (x_{ij})$, yaitu vektor-vektor $\mathbf{x}_i$ merupakan vektor-vektor kolom dari matriks X. Vektor-vektor $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, ..., $\mathbf{x}_n$ dependen linear bhb X singular.

Bukti:

Persamaan: $c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + \ldots + c_n\mathbf{x}_n = \mathbf{0}$

ekuivalen dengan sistem persamaan linear:

$$\begin{aligned} c_1x_{11} + c_2x_{12} + \ldots + c_nx_{1n} &= 0 \\ c_1x_{21} + c_2x_{22} + \ldots + c_nx_{2n} &= 0 \\ &\vdots \\ c_1x_{n1} + c_2x_{n2} + \ldots + c_nx_{nn} &= 0 \end{aligned}$$

Jika kita andaikan $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_n)^T$, sistem tersebut dapat ditulis sebagai persamaan matriks $X\,\mathbf{c} = \mathbf{0}$. Menurut teorema 2.3.3: persamaan ini mempunyai penyelesaian non trivial untuk $\mathbf{c}$ bhb X singular. Jadi $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, ..., $\mathbf{x}_n$ dependen linear bhb X singular. ■

Kita dapat menggunakan teorema 3.4.3. untuk menguji apakah n vektor dalam $\mathbb{R}^n$ independen linear. Kita bentuk matriks X, dengan vektor-vektor yang akan diuji sebagai kolom-kolomnya. Untuk menentukan apakah X singular atau non singular, kita hitung determinan X (det(X)). Jika det(X) = 0, maka vektor-vektor tersebut dependen linear. Jika det(X) $\neq$ 0, maka vektor-vektor tersebut independen linear.

Contoh 3.4.1.

Tentukan apakah vektor-vektor $(4, 2, 3)^T$, $(2, 3, 1)^T$ dan $(2, -5, 3)^T$ dependen linear atau independen linear!

Jawaban:

Karena: $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -5 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0,$

maka vektor-vektor tersebut dependen linear.

Determinan dapat juga digunakan untuk membantu menentukan apakah suatu himpunan vektor-vektor independen linear dalam $C^{(n-1)}[a,b]$, yaitu ruang vektor semua fungsi f yang kontinu pada [a,b] dan mempunyai derivatif ke-(n − 1).

Definisi 3.4.3.

Andaikan f_1, f_2, ..., f_n adalah fungsi-fungsi dalam $C^{(n-1)}[a,b]$. Fungsi $W\,[f_1, f_2, \ldots, f_n]$ pada [a,b] yang didefinisikan sebagai berikut:

$$W[f_1, f_2, \ldots, f_n](x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \ldots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \ldots & f_n'(x) \\ \vdots & & & \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \ldots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

disebut *Wronskian* dari $f_1, f_2, \ldots, f_n$.

✓ *Teorema 3.4.4.*

Andaikan $f_1, f_2, \ldots, f_n$ adalah vektor-vektor dari $C^{(n-1)}[a,b]$. Jika ada titik x_0 dalam $[a,b]$ sedemikian hingga $W[f_1, f_2, \ldots, f_n](x_0) \neq 0$, maka $f_1, f_2, \ldots, f_n$ independen linear.

Bukti:

Jika vektor-vektor $f_1, f_2, \ldots, f_n$ dependen linear, maka ada skalar-skalar $c_1, c_2, \ldots, c_n$ yang tidak semuanya sama dengan 0, sedemikian hingga

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \ldots + c_n f_n(x) = 0$$

untuk setiap $x \in [a,b]$. Jika kedua ruas persamaan di atas diturunkan terhadap x, maka akan diperoleh

$$c_1 f_1'(x) + c_2 f_2'(x) + \ldots + c_n f_n'(x) = 0.$$

Jika penurunan itu diteruskan sampai turunan ke-(n - 1), maka akan diperoleh

$$\begin{aligned} c_1 f_1(x) &+ c_2 f_2(x) &+ \ldots + c_n f_n(x) &= 0 \\ c_1 f_1'(x) &+ c_2 f_2'(x) &+ \ldots + c_n f_n'(x) &= 0 \\ &\vdots && \\ c_1 f_1^{(n-1)}(x) &+ c_2 f_2^{(n-1)}(x) &+ \ldots + c_n f_n^{(n-1)}(x) &= 0. \end{aligned}$$

Jadi untuk setiap $x \in [a,b]$, persamaan matriks:

$$\begin{bmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_n'(x) \\ \vdots & & & \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

mempunyai penyelesaian non trivial $(c_1, c_2, \ldots, c_n)^T$, sehingga matriks koefisien dari sistem di atas singular, yaitu $W[f_1, f_2, \ldots, f_n](x) = 0$ untuk setiap $x \in [a,b]$. ■

Contoh 3.4.2.

Tunjukkan bahwa fungsi f dan g yang didefinisikan berturut-turut dengan $f(x) = e^x$ dan $g(x) = e^{-x}$ untuk semua $x \in (-\infty, \infty)$, independen linear dalam $C(-\infty, \infty)$!

Jawaban:

Perhatikan bahwa $W[f, g](x) = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix} = -2.$

Karena $W[f, g](x) \neq 0$ untuk setiap $x \in \mathbb{R}$, maka f dan g independen linear.

Contoh 3.4.3.

Fungsi-fungsi f dan g yang didefinisikan berturut-turut dengan $f(x) = x^2$ dan $g(x) = x|x|$ untuk semua $x \in [-1, 1]$, independen linear dalam $C[-1,1]$, karena jika $c_1 x^2 + c_2 x|x| = 0$ untuk semua $x \in [-1, 1]$, maka untuk $x = 1$: $c_1 + c_2 = 0$ dan

untuk $x = -1$: $c_1 - c_2 = 0$, sehingga $c_1 = c_2 = 0$.

Tetapi $W[f, g](x) = \begin{vmatrix} x^2 & x|x| \\ 2x & 2|x| \end{vmatrix} = 0$ untuk setiap $x \in [-1, 1]$.

Contoh di atas menunjukkan bahwa konvers dari teorema 3.4.4 tidak benar.

5. Basis dan Dimensi

Suatu himpunan perentang untuk suatu ruang vektor adalah minimal jika vektor-vektornya independen linear. Pada bagian ini akan dibahas lebih jauh tentang himpunan perentang minimal dari suatu ruang vektor. Kemudian berkaitan dengan banyaknya vektor dari himpunan perentang minimal untuk suatu ruang vektor, akan dibahas dimensi suatu ruang vektor.

Definisi 3.5.1.

Vektor-vektor $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ dalam ruang vektor V disebut *basis* untuk V bhb

(i) $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ independen linear

(ii) $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ merentang V.

Contoh 3.5.1.

Dalam contoh 3.3.4 telah kita tunjukkan bahwa $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ merentang $\mathbb{R}^n$. Bila $c_1\mathbf{e}_1 + c_2\mathbf{e}_2 + \ldots, c_n\mathbf{e}_n = 0$ maka $(c_1, c_2, \ldots, c_n)^T = (0, 0, \ldots, 0)^T$, sehingga $c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0$. Jadi $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ independen linear. Maka $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ merupakan basis untuk $\mathbb{R}^n$.

Basis tersebut disebut *basis standar untuk* $\mathbb{R}^n$.

Contoh 3.5.2.

Andaikan P_n adalah ruang vektor dari semua fungsi polinomial berderajat $\leq$ n. Vektor-vektor p_0, p_1, p_2, ..., p_n yang didefinisikan berturut-turut dengan

$$p_0(x) = 1,\ p_1(x) = x,\ p_2(x) = x^2,\ \ldots,\ p_n(x) = x^n$$

untuk semua $x \in \mathbb{R}$, merentang P_n, sebab sebarang fungsi polinomial p dalam P_n yang didefinisikan dengan $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ untuk semua $x \in \mathbb{R}$, merupakan kombinasi linear dari vektor-vektor p_0, p_1, p_2, ..., p_n. Perhatikan bahwa

$$W\,[p_0, p_1, p_2, \ldots, p_n](x) = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \ldots & x^n \\ 0 & 1 & 2x & \ldots & n\,x^{n-1} \\ 0 & 0 & 2 & \ldots & (n-1)x^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & n! \end{vmatrix}$$

$$= 1.\ 2!.\ 3!.\ \ldots\ n! \neq 0 \quad \text{untuk semua } x \in \mathbb{R}.$$

Jadi vektor-vektor p_0, p_1, p_2, ..., p_n independen linear, sehingga merupakan basis untuk P_n.

Basis tersebut disebut *basis standar untuk* P_n.

Dalam contoh 3.3.3 kita lihat bahwa N(A) adalah subruang dari $\mathbb{R}^4$ yang direntang oleh vektor-vektor $(1, -2, 1, 0)^T$ dan $(-1, 1, 0, 1)^T$. Dan

$\alpha(1,-2, 1, 0)^T + \beta(-1, 1, 0, 1)^T = (0, 0, 0, 0)^T$,

yaitu $(\alpha - \beta, -2\alpha + \beta, \alpha, \beta)^T = (0, 0, 0, 0)^T$

dipenuhi hanya bila $\alpha = \beta = 0$, yang berarti vektor-vektor $(1, -2, 1, 0)^T$ dan $(-1, 1, 0, 1)^T$ independen linear. Jadi kedua vektor tersebut merupakan basis untuk N(A).

Teorema 3.5.1.

Jika $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ merupakan basis untuk ruang vektor V, maka sebarang himpunan m vektor dalam V, di mana m > n, adalah dependen linear.

Bukti:

Andaikan $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_m$ adalah m vektor dalam V, di mana m > n. Karena $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ merentang V, maka:
$\mathbf{u}_i = a_{i1}\mathbf{v}_1 + a_{i2}\mathbf{v}_2 + \ldots + a_{in}\mathbf{v}_n$ untuk i = 1, ..., m.
Kombinasi linear $c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + \ldots + c_m\mathbf{u}_m$ dapat ditulis dalam bentuk:

$$c_1\sum_{j=1}^{n} a_{1j}\mathbf{v}_j + c_2\sum_{j=1}^{n} a_{2j}\mathbf{v}_j + \ldots + c_m\sum_{j=1}^{n} a_{mj}\mathbf{v}_j$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}c_i\right)\mathbf{v}_j.$$

Perhatikan sistem persamaan linear berikut:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}c_i = 0 \quad \text{untuk } j = 1, \ldots, n.$$

Ini adalah sistem persamaan linear homogen dengan lebih banyak variabel dari pada persamaan. Menurut teorema 2.3.1 sistem tersebut mempunyai penyelesaian non trivial, misalkan $(\bar{c}_1, \bar{c}_2, \ldots, \bar{c}_m)$. Maka

$$\bar{c}_1\mathbf{u}_1 + \bar{c}_2\mathbf{u}_2 + \ldots + \bar{c}_m\mathbf{u}_m = \sum_{j=1}^{n} 0\mathbf{v}_j = \mathbf{0}.$$

Jadi $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ dependen linear. ∎

Corollary 3.5.2.

Jika $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ dan $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_m$ keduanya basis untuk ruang vektor V, maka n = m.

Bukti:

Andaikan $v_1, v_2, \ldots, v_n$ dan $u_1, u_2, \ldots, u_m$ keduanya basis untuk V. Karena $u_1, u_2, \ldots, u_m$ independen linear, maka menurut teorema 3.5.1 $m \leq n$. Demikian pula karena $v_1, v_2, \ldots, v_n$ independen linear, maka $n \leq m$. Jadi $m = n$. ∎

Definisi 3.5.2.

Jika ruang vektor V mempunyai suatu basis yang terdiri dari n vektor, maka dikatakan bahwa V mempunyai *dimensi*-n. Subruang { **0** } dari V dikatakan mempunyai dimensi 0. Ruang vektor V dikatakan *berdimensi-berhingga* jika ada himpunan berhingga vektor-vektor yang merentang V; jika himpunan vektor-vektor itu tidak ada, maka dikatakan bahwa V *berdimensi-tak hingga* .

Contoh 3.5.3.

Andaikan P adalah ruang vektor dari semua fungsi polinomal. Kita tunjukkan bahwa P berdimensi-tak hingga. Jika P berdimensi-berhingga katakanlah berdimensi n, maka menurut teorema 3.5.1 sebarang himpunan n + 1 vektor-vektor akan dependen linear. Tetapi menurut contoh 3.5.2, ada n + 1 vektor-vektor indepeden linear. Sehingga P tidak dapat berdimensi n. Karena n sebarang, maka P berdimensi-tak hingga.

Teorema 3.5.3.

Jika V adalah ruang vektor berdimensi-n > 0 , maka

(a) Tiap himpunan n vektor yang independen linear pasti merentang V.

(b) Tiap n vektor yang merentang V, pasti independen linear.

Bukti

(a) Andaikan $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ independen linear dan $\mathbf{v}$ sebarang vektor dalam V. Menurut teorema 3.5.1 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n, \mathbf{v}$ dependen linear. Jadi ada skalar $c_1, c_2, \ldots, c_n, c_{n+1}$ yang tidak semuanya sama dengan nol sedemikian hingga:

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots + c_n\mathbf{v}_n + c_{n+1}\mathbf{v} = 0.$$

Skalar c_{n+1} pasti $\neq 0$, sebab jika $c_{n+1} = 0$ maka dari persamaan di atas dapat disimpulkan bahwa $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ dependen linear. Jadi persamaan di atas dapat diselesaikan untuk $\mathbf{v}$, yaitu:

$$\mathbf{v} = \alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \ldots + \alpha_n\mathbf{v}_n$$

di mana $\alpha_i = -c_i/c_{n+1}$ untuk $i = 1, 2, \ldots, n$. Karena $\mathbf{v}$ sebarang vektor dalam V, maka terbukti bahwa $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ merentang V.

(b) Andaikan $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ merentang V. Jika $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ dependen linear, maka salah satu dari $\mathbf{v}_i$ tersebut, katakanlah $\mathbf{v}_n$, dapat ditulis sebagai kombinasi linear dari vektor-vektor lainnya. Sehingga $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{n-1}$ tetap merentang V. Jika $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{n-1}$ dependen linear, kita dapat menghilangkan salah satu vektor lagi dan vektor-vektor sisanya tetap merentang V. Kita dapat melanjutkan penghilangan vektor dengan cara yang sama sampai kita memperoleh himpunan perentang yang independen linear dengan k elemen di mana $k < n$. Kontradiksi, karena dimensi V adalah n. Oleh karena itu $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ haruslah independen linear. ∎

Teorema 3.5.4.

Jika V adalah ruang vektor berdimensi-n , maka:

(a) Tidak ada himpunan bagian dari V dengan anggota kurang dari pada n vektor dapat merentang V.

(b) Sebarang himpunan bagian dari V dengan anggota kurang dari n vektor independen linear dapat diperluas untuk membentuk basis dari V.

Bukti:

(a) Andaikan ada himpunan W dengan anggota k vektor dapat merentang V, di mana $k < n$. Maka anggota himpunan W dapat kita tambah dengan m vektor sedemikian hingga $k + m = n$. Karena W merentang V, maka m vektor-vektor yang kita tambahkan pada W tersebut pasti merupakan kombinasi linear dari vektor-vektor di dalam W. Sehingga himpunan dengan n vektor tersebut dependen linear. Kontradiksi, sebab dimensi V adalah n. Jadi tidak ada himpunan bagian dari V dengan anggota kurang dari n vektor dapat merentang V.

(b) Andaikan $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ independen linear dan $k < n$. Menurut (a) $S(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k)$ adalah himpunan bagian sejati dari V dan karena itu ada vektor $\mathbf{v}_{k+1}$ dalam V tetapi tidak di dalam $S(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2,$

$\ldots, v_k)$. Sehingga vektor-vektor $v_1, v_2, \ldots, v_k, v_{k+1}$ independen linear, sebab jika $v_1, v_2, \ldots, v_k, v_{k+1}$ dependen linear, maka v_{k+1} dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari vektor-vektor $v_1, v_2, \ldots, v_k$, yaitu v_{k+1} di dalam $S(v_1, v_2, \ldots, v_k)$. Jika $k + 1 < n$, maka dengan cara yang sama $\{v_1, v_2, \ldots, v_k, v_{k+1}\}$ dapat diperluas lagi menjadi himpunan $k + 2$ vektor-vektor independen linear. Proses ini dapat dilanjutkan terus sampai diperoleh himpunan $\{v_1, v_2, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_n\}$ dari n vektor-vektor independen linear. ■

6. Ruang Baris dan Ruang Kolom

Andaikan A adalah suatu matriks m x n berelemen skalar:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Vektor-vektor dalam $\mathbb{R}^{1xn}$, yaitu:

$$r_1 = (a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n})$$
$$r_2 = (a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n})$$
$$\vdots$$
$$r_m = (a_{m1}, a_{m2}, \ldots, a_{mn})$$

yang dibentuk dari baris-baris matriks A kita namakan *vektor-vektor baris* dari A, dan vektor-vektor dalam $\mathbb{R}^m$, yaitu:

$$k_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \; k_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \; \ldots, \; k_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

yang dibentuk dari kolom-kolom matriks A kita namakan *vektor-vektor kolom* dari A.

Definisi 3.6.1.

Andaikan A adalah matriks m x n berelemen skalar. Subruang dari $\mathbb{R}^{1 \times n}$ yang direntang oleh vektor-vektor baris dari A disebut *ruang baris* dari A. Subruang dari $\mathbb{R}^m$ yang direntang oleh vektor-vektor kolom dari A disebut *ruang kolom* dari A.

Contoh 3.6.1.

Andaikan $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Ruang baris dari A adalah himpunan semua vektor-vektor baris dengan bentuk:

$$\alpha(2,\ 1,\ 0) + \beta(3,\ 0,\ 1) = (2\alpha + 3\beta,\ \alpha,\ \beta).$$

Ruang kolom dari A adalah himpunan semua vektor-vektor kolom dengan bentuk:

$$\alpha\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \beta\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \gamma\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\alpha + \beta \\ 3\alpha + \gamma \end{bmatrix}.$$

Teorema 3.6.1.

Dua matriks ekuivalen baris mempunyai ruang baris yang sama.

Bukti:

Jika matriks B ekuivalen baris dengan matriks A, maka B dapat dibentuk dari A dengan barisan berhingga operasi-operasi baris. Jadi vektor-vektor baris dari B merupakan kombinasi linear dari vektor-vektor baris dari A. Akibatnya ruang baris dari B merupakan subruang dari ruang baris A. Karena A adalah ekuivalen baris pada B, dengan alasan yang sama, ruang baris A adalah subruang dari ruang baris B.

Jadi, ruang baris B = ruang baris A. ∎

Definisi 3.6.2.

Rank dari suatu matriks adalah dimensi dari ruang baris matriks itu.

Untuk membantu menentukan rank suatu matriks, dapat kita lakukan dengan mereduksi matriks tersebut ke dalam bentuk eselon baris.

Teorema 3.6.2.

Vektor-vektor baris tak nol dari suatu matriks yang berada dalam bentuk eselon baris merupakan basis untuk ruang baris matriks itu.

Bukti:

Andaikan U adalah suatu matriks yang berada dalam bentuk eselon baris dan $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_r$ adalah vektor-vektor baris tak nol dari U.

Persamaan $c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + \ldots + c_r\mathbf{u}_r = 0$

dipenuhi hanya bila $c_1 = c_2 = \ldots = c_r = 0$.
Jadi $u_1, u_2, \ldots, u_r$ merupakan basis untuk ruang baris dari U. ■

Contoh 3.6.2.

Kita tentukan rank dari matriks

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -5 & 1 \\ 1 & -4 & -7 \end{bmatrix}.$$

Bentuk eselon baris dari matriks tersebut adalah:

$$U = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Sehingga (1, -2, 3) dan (0, 1, 5) membentuk basis untuk ruang baris dari U. Karena ruang baris dari U = ruang baris dari A, maka kedua vektor itu juga merupakan basis untuk ruang baris dari A. Jadi rank dari A adalah 2.

Ruang kolom suatu matriks A dapat diselidiki dengan menyelidiki ruang baris matriks A^T. Kita dapat menentukan basis untuk ruang kolom matriks A dengan menentukan basis untuk ruang baris matriks A^T.

Contoh 3.6.3.

Akan kita tentukan basis untuk ruang kolom matriks

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & -4 \end{bmatrix}.$$

Transpose dari matriks A ialah

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & -4 \end{bmatrix}.$$

Bentuk eselon baris dari matriks A^T tersebut adalah

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Jadi vektor (1, 3, 0) dan vektor (0, 1, 2) merupakan basis untuk ruang baris matriks A^T. Maka vektor-vektor

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ dan } \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

merupakan basis untuk ruang kolom dari matriks A.

Konsep ruang baris dan ruang kolom digunakan dalam mempelajari sistem persamaan linear.

Sistem A **x** = **b**, dapat ditulis dalam bentuk

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \quad \text{atau}$$

$$\begin{matrix} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{matrix} \quad \text{atau}$$

$$x_1\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \dots + x_n\begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Karena ruas kiri persamaan ini adalah kombinasi linear dari vektor-vektor kolom A dengan x_1, x_2, ..., x_n sebagai skalar-skalar, maka sistem A $\mathbf{x}$ = $\mathbf{b}$ konsisten bhb vektor $\mathbf{b}$ adalah kombinasi linear dari vektor-vektor kolom A. Jadi A $\mathbf{x}$ = $\mathbf{b}$ konsisten bhb vektor $\mathbf{b}$ berada di dalam ruang kolom dari A. Sistem persamaan linear homogen A $\mathbf{x}$ = $\mathbf{0}$ hanya mempunyai penyelesaian trivial $\mathbf{x}$ = $\mathbf{0}$ bhb matriks A non singular bhb vektor-vektor kolom dari A independen linear.

Teorema 3.6.3.

Andaikan A adalah matriks m x n berelemen skalar.

(a) Sistem persamaan linear A $\mathbf{x}$ = $\mathbf{b}$ konsisten untuk setiap $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ bhb vektor-vektor kolom A merentang $\mathbb{R}^m$.

(b) Sistem persamaan linear A $\mathbf{x}$ = $\mathbf{b}$ mempunyai paling banyak satu penyelesaian untuk setiap $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ bhb vektor-vektor kolom A independen linear.

Bukti:

(a) Sistem persamaan linear A $\mathbf{x}$ = $\mathbf{b}$ konsisten bhb vektor $\mathbf{b}$ berada di dalam ruang kolom A. Jadi A $\mathbf{x}$ = $\mathbf{b}$ konsisten untuk setiap $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ bhb vektor-vektor kolom A merentang $\mathbb{R}^m$.

(b) ($\Rightarrow$) :

Andaikan $A\,x = b$ mempunyai paling banyak satu penyelesaian untuk setiap $b \in \mathbb{R}^m$. Maka untuk $b = 0$, sistem $A\,x = 0$ hanya mempunyai penyelesaian trivial. Jadi vektor-vektor kolom A independen linear.

($\Leftarrow$) :

Andaikan vektor-vektor kolom A independen linear. Maka $A\,x = 0$ hanya mempunyai penyelesaian trivial $x = 0$. Jika x_1 dan x_2 keduanya merupakan penyelesaian $A\,x = b$, maka $A\,(x_1 - x_2) = A\,x_1 - A\,x_2$

$$= b - b = 0,$$

sehingga $x_1 - x_2 = 0$ dan karena itu $x_1 = x_2$. ■

Andaikan A adalah matriks m x n berlemen skalar. Jika vektor-vektor kolom A merentang $\mathbb{R}^m$, maka $n \geq m$, karena tidak ada himpunan yang anggotanya kurang dari m vektor-vektor dapat merentang $\mathbb{R}^m$. Jika vektor-vektor kolom A independen linear, maka $n \leq m$, karena setiap himpunan yang memuat lebih banyak dari m vektor-vektor dalam $\mathbb{R}^m$ pasti dependen linear. Jadi, jika vektor-vektor kolom A membentuk basis untuk $\mathbb{R}^m$, maka $n = m$.

Corollary 3.6.4.

Suatu matriks A berordo n x n yang berelemen skalar adalah non singular bhb vektor-vektor kolom A merupakan suatu basis untuk $\mathbb{R}^n$.

Bukti:

Andaikan A adalah matriks n x n yang berelemen skalar.

Menurut corollary 2.3.4: matriks A non singular bhb sistem persamaan A $\mathbf{x}$ = $\mathbf{b}$ mempunyai penyelesaian tunggal untuk setiap $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, sehingga dengan Teorema 3.6.3(a) diperoleh: matriks A non singular bhb vektor-vektor kolom merentang $\mathbb{R}^n$. Dari Teorema 3.4.3: matriks A non singular bhb vektor-vektor kolom dari A independen linear. Jadi terbukti: matriks A non singular bhb vektor-vektor kolom A merupakan basis untuk $\mathbb{R}^n$. ■

Matriks A dan U pada contoh 3.6.2 mempunyai ruang kolom yang berbeda, tetapi vektor-vektor kolomnya memenuhi relasi dependensi yang sama. Untuk matriks U, vektor-vektor kolom $\mathbf{u}_1$ dan $\mathbf{u}_2$ independen linear, dan $\mathbf{u}_3 = 13\mathbf{u}_1 + 5\mathbf{u}_2$. Relasi yang sama juga dipenuhi untuk vektor-vektor kolom dari matriks A. Vektor-vektor kolom $\mathbf{a}_1$ dan $\mathbf{a}_2$ independen linear, sementara $\mathbf{a}_3 = 13\mathbf{a}_1 + 5\mathbf{a}_2$.

Secara umum, jika A adalah suatu matriks m x n dan U adalah bentuk eselon baris dari A, maka vektor-vektor kolom dari A dan U memenuhi relasi dependensi yang sama, karena A $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ bila dan hanya bila U $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Kita akan menggunakan pernyataan ini untuk membuktikan bahwa dimensi ruang kolom suatu matriks adalah sama dengan dimensi ruang barisnya.

Teorema 3.6.5.

Jika A adalah matriks m x n, maka dimensi ruang baris dari A sama dengan dimensi ruang kolom dari A.

Bukti:

Jika A matriks m x n dengan rank r, maka bentuk eselon baris U dari A akan mempunyai r elemen 1 terdepan. Kolom-kolom U yang bersesuaian dengan elemen-elemen 1 terdepan itu independen linear. Tetapi kolom-kolom ini tidak merupakan basis untuk ruang kolom dari A, karena pada umumya A dan U akan mempunyai ruang kolom yang berbeda. Andaikan U_L adalah matriks yang didapat dengan menghapus semua kolom dari U yang bersesuaian dengan variabel-variabel bebas. Kolom-kolom dari A yang bersesuaian dengan kolom-kolom yang dihapus pada U juga kita hapus dan kita nyatakan matriks baru ini dengan A_L. Matriks A_L dan U_L ekuivalen baris. Jadi, jika x adalah penyelesaian dari $A_L\ x = 0$, maka x juga penyelesaian dari $U_L\ x = 0$. Karena kolom-kolom dari U_L independen linear, maka $x = 0$. Jadi kolom-kolom dari A_L juga independen linear. Karena A_L mempunyai r kolom, maka dimensi ruang kolom A sekurang-kurangnya adalah r. Jadi untuk sebarang matriks A berlaku:

$$\dim(\text{ruang kolom } A) \geq \dim(\text{ruang baris } A).$$

Maka
$$\begin{aligned}\dim(\text{ruang baris } A) &= \dim(\text{ruang kolom } A^T)\\ &\geq \dim(\text{ruang baris } A^T)\\ &= \dim(\text{ruang kolom } A)\end{aligned}$$

Jadi $\dim(\text{ruang baris } A) = \dim(\text{ruang kolom } A)$. ■

Kita dapat menggunakan bentuk eselon baris U dari matriks A untuk mencari basis untuk ruang kolom dari A, yaitu dengan menentukan kolom-kolom U yang bersesuaian dengan elemen 1 terdepan. Kolom-kolom yang bersesuaian pada A akan independen linear dan membentuk basis untuk ruang kolom dari A.

Contoh 3.6.3.

Kita tentukan basis dari ruang kolom matriks

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Bentuk eselon baris dari matriks tersebut adalah

$$U = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Elemen 1 terdepan dari U ini berada di kolom pertama dan kedua. Jadi vektor-vektor kolom pertama dan kedua dari A, yaitu

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

merupakan basis untuk ruang kolom dari A.

Dimensi ruang null dari suatu matriks A, yaitu N(A) kita sebut *nullity* dari A.

Teorema 3.6.6.

Jika A adalah matriks m x n, maka

$$\text{rank } A + \text{nullity } A = n.$$

Bukti:

Andaikan $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ $(k < n)$ adalah basis untuk $N(A)$, yang merupakan himpunan bagian dari $\mathbb{R}^n$. Maka basis untuk $N(A)$ tersebut dapat diperluas untuk membentuk basis dari $\mathbb{R}^n$, yaitu: $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_{k+1}, \ldots, \mathbf{u}_n$. Andaikan vektor $\mathbf{b}$ adalah sebarang vektor dalam ruang kolom dari matriks A, maka $\mathbf{b} = A\,\mathbf{x}$ untuk suatu $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Karena $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_{k+1}, \ldots, \mathbf{u}_n$ adalah basis untuk $\mathbb{R}^n$, maka vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ tersebut dapat ditulis dalam bentuk: $\mathbf{x} = \alpha_1\mathbf{u}_1 + \ldots + \alpha_k\mathbf{u}_k + \alpha_{k+1}\mathbf{u}_{k+1} + \ldots + \alpha_n\mathbf{u}_n$,

sehingga

$$\begin{aligned} A\,\mathbf{x} &= A\,(\alpha_1\mathbf{u}_1 + \ldots + \alpha_k\mathbf{u}_k + \alpha_{k+1}\mathbf{u}_{k+1} + \ldots + \alpha_n\mathbf{u}_n) \\ &= \alpha_1 A\,\mathbf{u}_1 + \ldots + \alpha_k A\,\mathbf{u}_k + \alpha_{k+1} A\,\mathbf{u}_{k+1} + \ldots + \alpha_n A\,\mathbf{u}_n \\ &= \alpha_1 \mathbf{0} + \ldots + \alpha_k \mathbf{0} + \alpha_{k+1} A\,\mathbf{u}_{k+1} + \ldots + \alpha_n A\,\mathbf{u}_n \\ &\qquad (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k \text{ adalah basis untuk } N(A)) \end{aligned}$$

$\therefore\ \mathbf{b} = \alpha_{k+1} A\,\mathbf{u}_{k+1} + \ldots + \alpha_n A\,\mathbf{u}_n$.

Jadi $A\,\mathbf{u}_{k+1}, \ldots, A\,\mathbf{u}_n$ merentang ruang kolom dari A.

Kita tunjukkan bahwa $A\,\mathbf{u}_{k+1}, \ldots, A\,\mathbf{u}_n$ independen linear. Perhatikan persamaan:

$$a_1 A\,\mathbf{u}_{k+1} + \ldots + a_{n-k} A\,\mathbf{u}_n = \mathbf{0}$$

$$A\,(a_1\mathbf{u}_{k+1} + \ldots + a_{n-k}\mathbf{u}_n) = \mathbf{0}$$

$$\therefore\ a_1\mathbf{u}_{k+1} + \ldots + a_{n-k}\mathbf{u}_n \in N(A).$$

Karena $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ adalah basis untuk $N(A)$, maka dapat kita tuliskan:

$$a_1\mathbf{u}_{k+1} + \ldots + a_{n-k}\mathbf{u}_n = b_1\mathbf{u}_1 + \ldots + b_k\mathbf{u}_k$$

$$b_1\mathbf{u}_1 + \ldots + b_k\mathbf{u}_k - a_1\mathbf{u}_{k+1} \ldots - a_{n-k}\mathbf{u}_n = \mathbf{0}.$$

Karena $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_{k+1}, \ldots, \mathbf{u}_n$ independen linear, maka $b_1 = \ldots = b_k = a_1 = \ldots = a_{n-k} = 0$. Jadi $A\,\mathbf{u}_{k+1}, \ldots, A\,\mathbf{u}_n$ independen linear, sehingga merupakan basis untuk ruang kolom dari A. Dari hasil di atas kita peroleh hubungan: rank A + nullity A = dimensi ruang kolom dari A + dimensi N(A) = (n - k) + k = n. ∎

BAB IV
ORTOGONALITAS

1. Perkalian-Skalar dalam $\mathbb{R}^n$

Ruang Euklides berdimensi-n ($\mathbb{R}^n$) merupakan perluasan dari $\mathbb{R}^2$ dan $\mathbb{R}^3$, yang sudah sangat kita kenal dan mempunyai tafsiran geometrik. Dalam $\mathbb{R}^2$ dan $\mathbb{R}^3$ telah kita kenal pengertian panjang suatu vektor, jarak antara dua vektor, sudut antara dua vektor dan ketegaklurusan antara dua vektor. Pengertian-pengertian tersebut dapat kita perluas untuk vektor-vektor dalam $\mathbb{R}^n$.

Dalam bab III telah kita bicarakan tentang perkalian-skalar pada $\mathbb{R}^n$ beserta sifat-sifatnya. Dengan perkalian-skalar tersebut akan kita definisikan pengertian panjang suatu vektor, jarak antara dua vektor, sudut antara dua vektor dan ortogonalitas (ketegaklurusan) antara dua vektor dalam $\mathbb{R}^n$.

Definisi 4.1.1.

Andaikan $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ adalah sebarang vektor dalam $\mathbb{R}^n$. *Panjang* dari $\mathbf{x}$, yang dilambangkan dengan $\|\mathbf{x}\|$ didefinisikan sebagai berikut:

$$\|\mathbf{x}\| = (\mathbf{x}\cdot\mathbf{x})^{1/2} = (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)^{1/2}.$$

Definisi 4.1.2.

Andaikan $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ dan $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)^T$ sebarang vektor dalam $\mathbb{R}^n$. *Jarak* antara $\mathbf{x}$ dan $\mathbf{y}$, yang dilambangkan dengan $d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ didefinisikan sebagai berikut: $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$

$$= ((x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2)^{1/2}.$$

Teorema 4.1.1.

Untuk tiap $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ dan sebarang $\alpha \in \mathbb{R}$, berlaku

$$\|\alpha\mathbf{x}\| = |\alpha|\,\|\mathbf{x}\|.$$

Bukti:

Ambil sebarang $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ dan sebarang $\alpha \in \mathbb{R}$. Maka

$$\begin{aligned}\|\alpha\mathbf{x}\| &= ((\alpha x_1)^2 + (\alpha x_2)^2 + \ldots + (\alpha x_n)^2)^{1/2}\\ &= (\alpha^2 x_1^{\,2} + \alpha^2 x_2^{\,2} + \ldots + \alpha^2 x_n^{\,2})^{1/2}\\ &= (\alpha^2 (x_1^{\,2} + x_2^{\,2} + \ldots + x_n^{\,2}))^{1/2}\\ &= |\alpha|\,\|\mathbf{x}\|.\end{aligned}$$ ∎

Definisi 4.1.3

Suatu vektor $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ disebut *vektor satuan,* jika $\|\mathbf{u}\| = (\mathbf{u}.\mathbf{u})^{1/2} = 1$.

Andaikan $\mathbf{x}$ sebarang vektor yang tidak sama dengan nol $\in \mathbb{R}^n$, maka vektor $\mathbf{u} = (1/\|\mathbf{x}\|)\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ adalah suatu vektor satuan, sebab

$$\|\mathbf{u}\| = \|(1/\|\mathbf{x}\|)\mathbf{x}\| = (1/\|\mathbf{x}\|)\|\mathbf{x}\| = 1.$$

Untuk selanjutnya vektor satuan $(1/\|\mathbf{x}\|)\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ akan kita tulis dengan notasi $\mathbf{x}/\|\mathbf{x}\|$.

Teorema 4.1.2 (Ketaksamaan Cauchy-Schwarz).

Untuk tiap $\mathbf{x}$ dan $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, berlaku

$$|\mathbf{x}.\mathbf{y}| \le \|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\|.$$

Bukti:

Jika salah satu atau kedua-duanya dari vektor $\mathbf{x}$ dan $\mathbf{y}$ adalah vektor nol, maka ketaksamaan di atas jelas berlaku. Andaikan $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$ adalah vektor satuan, maka $\|\mathbf{u}\| = 1$ dan $\|\mathbf{v}\| = 1$. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} 0 \leq \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 &= (\mathbf{u} - \mathbf{v}).(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \\ &= \mathbf{u}.\mathbf{u} - 2(\mathbf{u}.\mathbf{v}) + \mathbf{v}.\mathbf{v} \\ &= \|\mathbf{u}\|^2 - 2(\mathbf{u}.\mathbf{v}) + \|\mathbf{v}\|^2 \\ &= 1 - 2(\mathbf{u}.\mathbf{v}) + 1 \\ &= 2 - 2(\mathbf{u}.\mathbf{v}), \end{aligned}$$

sehingga $\qquad \mathbf{u}.\mathbf{v} \leq 1. \qquad (1)$

Kemudian

$$\begin{aligned} 0 \leq \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 &= (\mathbf{u} + \mathbf{v}).(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \\ &= \mathbf{u}.\mathbf{u} + 2(\mathbf{u}.\mathbf{v}) + \mathbf{v}.\mathbf{v} \\ &= \|\mathbf{u}\|^2 + 2(\mathbf{u}.\mathbf{v}) + \|\mathbf{v}\|^2 \\ &= 1 + 2(\mathbf{u}.\mathbf{v}) + 1 \\ &= 2 + 2(\mathbf{u}.\mathbf{v}), \end{aligned}$$

sehingga $\qquad -1 \leq \mathbf{u}.\mathbf{v}. \qquad (2)$

Dari (1) dan (2) diperoleh $|\mathbf{u}.\mathbf{v}| \leq 1. \qquad (3)$

Jika $\mathbf{x}$ dan $\mathbf{y}$ keduanya vektor tak nol, maka $\mathbf{x}/\|\mathbf{x}\|$ dan $\mathbf{y}/\|\mathbf{y}\|$ adalah vektor-vektor satuan, sehingga menurut (3): $|(\mathbf{x}/\|\mathbf{x}\|).(\mathbf{y}/\|\mathbf{y}\|)| = |(\mathbf{x}.\mathbf{y})/(\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|)| \leq 1.$

Jadi $|\mathbf{x}.\mathbf{y}| \leq \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|$. ■

Definisi 4.1.4.

Sudut θ antara sebarang vektor $\mathbf{x}$ dan $\mathbf{y}$ yang keduanya tidak nol dalam $\mathbb{R}^n$ didefinisikan sebagai berikut:

$$\cos\theta = (\mathbf{x}.\mathbf{y})/(\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|), \qquad 0 \leq \theta \leq \pi.$$

Contoh 4.1.1.

Kita tentukan cosinus sudut θ antara vektor $\mathbf{v} = (0, -2, 0, 4, 4)^T$ dan vektor $\mathbf{w} = (1, 0, 4, 2, 2)^T$ dalam $\mathbb{R}^5$.

Penyelesaian:

Kita lihat bahwa

$\mathbf{v}.\mathbf{w} = 0 + 0 + 0 + 8 + 8 = 16$

$\|\mathbf{v}\| = (0 + 4 + 0 + 16 + 16)^{1/2} = 6$

$\|\mathbf{w}\| = (1 + 0 + 16 + 4 + 4)^{1/2} = 5.$

Jadi $\cos\theta = (\mathbf{v}.\mathbf{w})/(\|\mathbf{v}\|\|\mathbf{w}\|) = 16/30.$

Teorema 4.1.3 (Ketaksamaan segitiga).

Untuk tiap $\mathbf{x}$ dan $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, berlaku

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \le \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|.$$

Bukti:

Ambil sebarang $\mathbf{x}$ dan $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, maka

$$\begin{aligned}\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 &= (\mathbf{x} + \mathbf{y}).(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \\ &= \mathbf{x}.\mathbf{x} + 2(\mathbf{x}.\mathbf{y}) + \mathbf{y}.\mathbf{y} \\ &= \|\mathbf{x}\|^2 + 2(\mathbf{x}.\mathbf{y}) + \|\mathbf{y}\|^2.\end{aligned}$$

Menurut teorema 4.1.2: $|\mathbf{x}.\mathbf{y}| \le \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|$,

sehingga $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 \le \|\mathbf{x}\|^2 + 2\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\| + \|\mathbf{y}\|^2$

$$= (\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|)^2.$$

Jadi $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \le \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|.$ ∎

Untuk jarak antara $\mathbf{x}$ dan $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, berlaku ketaksamaan segitiga dalam bentuk:

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \le d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + d(\mathbf{z}, \mathbf{y}),$$

sebab $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \|(\mathbf{x} - \mathbf{z}) + (\mathbf{z} - \mathbf{y})\|$

$$\leq \|\mathbf{x} - \mathbf{z}\| + \|\mathbf{z} - \mathbf{y}\| = d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + d(\mathbf{z}, \mathbf{y}).$$

Definisi 4.1.5.

Dua vektor $\mathbf{x}$ dan $\mathbf{y}$ dalam $\mathbb{R}^n$ dikatakan *saling ortogonal* jika $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = 0$, dan dilambangkan dengan $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$.

Contoh 4.1.2.

Dalam $\mathbb{R}^4$ vektor-vektor $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 1, 2)^T$, $\mathbf{v}_2 = (0, 1, -1, 0)^T$ dan $\mathbf{v}_3 = (-2, 1, 1, 0)^T$ adalah saling ortogonal sebab

$$\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2 = 0 + 1 - 1 + 0 = 0$$
$$\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_3 = -2 + 1 + 1 + 0 = 0$$
$$\mathbf{v}_2\cdot\mathbf{v}_3 = 0 + 1 - 1 + 0 = 0.$$

Jika vektor-vektor $\mathbf{x}$ dan $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ saling ortogonal maka $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = 0$, sehingga berlaku:

$$\begin{aligned}\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 &= (\mathbf{x} + \mathbf{y})\cdot(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \\ &= \|\mathbf{x}\|^2 + 2(\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}) + \|\mathbf{y}\|^2 \\ &= \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2,\end{aligned}$$

yang kita kenal sebagai hukum Phytagoras.

2. Subruang-subruang Yang Saling Ortogonal dalam $\mathbb{R}^n$

Andaikan A sebuah matriks m x n dan $\mathbf{x} \in N(A)$. Karena $\mathbf{x} \in N(A)$ maka $A\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$ dan

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = 0$$

untuk $i = 1, 2, \ldots, m$.

Sistem persamaan di atas menyatakan bahwa $\mathbf{x}$ ortogonal dengan tiap vektor kolom dari A^T. Jadi $\mathbf{x}$ juga ortogonal dengan setiap kombinasi linear dari vektor-vektor kolom dari A^T. Jadi jika $\mathbf{y}$ adalah sebarang vektor dalam ruang kolom A^T, maka $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0$. Maka setiap vektor dalam N(A) ortogonal dengan setiap vektor dalam ruang kolom A^T. Dua subruang dalam $\mathbb{R}^n$ yang mempunyai sifat semacam itu dikatakan saling ortogonal.

Definisi 4.2.1.

Dua subruang X dan Y dalam $\mathbb{R}^n$ dikatakan *saling ortogonal* (dilambangkan dengan $X \perp Y$) jika $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0$ untuk setiap $\mathbf{x} \in X$ dan $\mathbf{y} \in Y$.

Contoh 4.2.1.

Andaikan X adalah subruang dalam $\mathbb{R}^3$ yang direntang oleh $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)^T$ dan andaikan Y adalah subruang yang direntang oleh $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)^T$. Jika $\mathbf{x} \in X$ dan $\mathbf{y} \in Y$, maka vektor-vektor itu berbentuk

$$\mathbf{x} = (x_1, 0, 0)^T \text{ dan } \mathbf{y} = (0, y_2, 0)^T,$$

sehingga $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1 .0 + 0.y_2 + 0.0 = 0$ untuk setiap $\mathbf{x} \in X$ dan $\mathbf{y} \in Y$. Jadi $X \perp Y$.

Konsep tentang subruang-subruang yang saling ortogonal tidak selalu sesuai dengan pengetahuan intuitif kita tentang ketegaklurusan. Sebagai contoh: dalam $\mathbb{R}^3$ bidang-*xz* dan bidang-*xy* kelihatannya ortogonal, tetapi sebenarnya kedua bidang tersebut tidak saling ortogonal, karena vektor $\mathbf{x}_1 = (1, 1, 0)^T$ dan vektor $\mathbf{x}_2 = (1, 0, 1)^T$ berturut-turut terletak di bidang-

xy dan bidang-*xz*, tetapi

$$\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2 = 1.1 + 1.0 + 0.1 = 1 \neq 0.$$

Definisi 4.2.2.

Andaikan Y subruang dalam $\mathbb{R}^n$. Himpunan semua vektor dalam $\mathbb{R}^n$ yang ortogonal pada setiap vektor dalam Y disebut *komplemen ortogonal* dari Y dan dilambangkan dengan $Y^\perp$. Jadi

$$Y^\perp = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0 \text{ untuk setiap } \mathbf{y} \in Y\}.$$

Teorema 4.2.1.

Jika X dan Y adalah subruang-subruang yang saling ortogonal dalam $\mathbb{R}^n$, maka $X \cap Y = \{\mathbf{0}\}$.

Bukti:

Himpunan $X \cap Y$ pasti tidak kosong, sebab $\mathbf{0} \in X \cap Y$.
Ambil sebarang $\mathbf{x} \in X \cap Y$, maka $\mathbf{x} \in X$ dan $\mathbf{x} \in Y$. Karena $X \perp Y$, maka $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = 0$. Padahal $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = \|\mathbf{x}\|^2$, sehingga $\|\mathbf{x}\|^2 = x_1x_1 + x_2x_2 + \ldots + x_nx_n = 0$. Maka haruslah $x_i = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$, yaitu $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
Jadi $X \cap Y = \{\mathbf{0}\}$. ■

Teorema 4.2.2.

Jika Y adalah subruang dalam $\mathbb{R}^n$, maka $Y^\perp$ juga subruang dalam $\mathbb{R}^n$.

Bukti:

Ambil sebarang $\mathbf{x} \in Y^\perp$ dan sebarang skalar $\alpha \in \mathbb{R}$, maka untuk setiap $\mathbf{y} \in Y$ berlaku:

$$(\alpha x)\cdot y = \alpha(x\cdot y) = \alpha.0 = 0,$$

sehingga $\alpha x \in Y^{\perp}$.

Ambil sebarang x_1, $x_2 \in Y^{\perp}$, maka untuk setiap $y \in Y$ berlaku: $(x_1 + x_2)\cdot y = = x_1\cdot y + x_2\cdot y = 0 + 0 = 0$,

sehingga $x_1 + x_2 \in Y^{\perp}$.

Jadi $Y^{\perp}$ adalah subruang dalam $\mathbb{R}^n$. ■

Andaikan A adalah matriks m x n berelemen skalar. Telah kita lihat bahwa vektor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ berada dalam ruang kolom dari A bhb $\mathbf{b} = A\,\mathbf{x}$ untuk suatu $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Jika ruang kolom dari A kita lambangkan dengan R(A), maka dapat kita tuliskan

$R(A) = \{\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m \mid \mathbf{b} = A\,\mathbf{x}$ untuk suatu $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\}$ dan

$R(A^T) = \{\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{c} = A^T\,\mathbf{x}$ untuk suatu $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m\}$.

Karena $R(A^T)$ pada dasarnya sama dengan ruang baris dari A, maka vektor $\mathbf{c}$ berada dalam $R(A^T)$ bhb $\mathbf{c}^T$ dalam ruang baris dari A.

Teorema 4.2.3.

Jika A adalah matriks m x n berelemen skalar, maka $N(A) = R(A^T)^{\perp}$ dan $N(A^T) = R(A)^{\perp}$.

Bukti:

Ambil sebarang elemen $\mathbf{y} \in R(A^T)$ dan $\mathbf{z} \in N(A)$, maka $\mathbf{y} = A^T\,\mathbf{x}$ untuk suatu $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ dan $A\,\mathbf{z} = \mathbf{0}$, sehingga

$$\mathbf{y}\cdot\mathbf{z} = \mathbf{y}^T\,\mathbf{z} = (A^T\,\mathbf{x})^T\,\mathbf{z}$$
$$= (\mathbf{x}^T\,A)\,\mathbf{z} = \mathbf{x}^T\,(A\,\mathbf{z}) = \mathbf{x}^T\,\mathbf{0} = 0.$$

Karena $\mathbf{y}\cdot\mathbf{z} = 0$ untuk setiap $\mathbf{y} \in R(A^T)$ dan $\mathbf{z} \in N(A)$, maka $R(A^T) \perp N(A)$. Akibatnya adalah $N(A) \subset R(A^T)^{\perp}$.

Di lain pihak, jika **z** sebarang vektor dalam $R(A^T)^\perp$ maka **z** ortogonal pada setiap vektor kolom dari A^T. Karena vektor-vektor kolom dari A^T merupakan vektor-vektor baris dari A, maka $A\,\mathbf{z} = \mathbf{0}$. Jadi **z** merupakan suatu elemen dari N(A), sehingga $R(A^T)^\perp \subset N(A)$.

Karena $N(A) \subset R(A^T)^\perp$ dan $R(A^T)^\perp \subset N(A)$ maka

$$N(A) = R(A^T)^\perp.$$

Dan $N(A^T) = R((A^T)^T)^\perp = R(A\,)^\perp$. ■

Contoh 4.2.2.

Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$.

Ruang kolom A terdiri dari semua vektor yang berbentuk: $(\alpha,\ 2\alpha)^T = \alpha(1,\ 2)^T$.

Jika $\mathbf{x} = (x_1,\ x_2)^T$ sebarang vektor dalam $\mathbb{R}^2$ dan $\mathbf{b} = A\,\mathbf{x}$, maka:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 2x_1 \end{bmatrix} = x_1\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Dari persamaan $A^T\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$, yaitu

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

diperoleh $x_1 + 2x_2 = 0$

$$x_1 = -2x_2.$$

Jika $x_2 = \beta$, maka $x_1 = -2\beta$. Sehingga ruang null dari A^T terdiri dari semua vektor yang berbentuk $\beta(-2,\ 1)^T$. Karena $(1,\ 2)^T$ dan $(-2,\ 1)^T$ saling ortogonal, maka setiap vektor dalam R(A) akan ortogonal pada setiap vektor dalam $N(A^T)$. Hubungan yang sama juga berlaku antara $R(A^T)$ dan N(A). $R(A^T)$ terdiri dari atas vektor-

vektor berbentuk αe_1, dan N(A) terdiri atas semua vektor berbentuk βe_2, di mana $e_1 = (1, 0)^T$ dan $e_2 = (0, 1)^T$. Karena e_1 dan e_2 saling ortogonal, maka setiap vektor dalam $R(A^T)$ saling ortogonal pada setiap vektor dalam N(A).

Teorema 4.2.4.

Jika S adalah subruang dalam $\mathbb{R}^n$, maka

$$\dim S + \dim S^\perp = n.$$

Selanjutnya jika $\{x_1, x_2, \ldots, x_r\}$ basis dari S dan $\{x_{r+1}, \ldots, x_n\}$ basis dari $S^\perp$, maka $\{x_1, \ldots, x_r, x_{r+1}, \ldots, x_n\}$ adalah basis dari $\mathbb{R}^n$.

Bukti:

Jika $S = \{0\}$, maka $S^\perp = \mathbb{R}^n$. Dalam contoh 3.5.1 kita lihat bahwa basis untuk $\mathbb{R}^n$ terdiri dari n vektor, sehingga dimensi $\mathbb{R}^n = n$. Jadi $\dim S + \dim S^\perp = \dim \{0\} + \dim \mathbb{R}^n = 0 + n = n$. Jika $S \neq \{0\}$, andaikan $\{x_1, \ldots, x_r\}$ basis dari S dan X adalah matriks r x n, dengan baris ke-inya adalah x_i^T untuk setiap $i = 1, \ldots, r$. Dengan bentuk tersebut, matriks X mempunyai rank r dan $R(X^T) = S$. Dengan teorema 4.2.1: $S^\perp = R(X^T)^\perp = N(X)$, dan dengan teorema 3.6.6: $\dim S^\perp = \dim N(X) = n - r$. Jadi $\dim S + \dim S^\perp = r + (n - r) = n$.

Untuk menunjukkan bahwa $\{x_1, \ldots, x_r, x_{r+1}, \ldots, x_n\}$ adalah basis untuk $\mathbb{R}^n$, cukup ditunjukkan bahwa n vektor tersebut independen linear. Andaikan bahwa $c_1x_1 + \ldots + c_rx_r + c_{r+1}x_{r+1} + \ldots + c_nx_n = 0$.

Andaikan $y = c_1x_1 + \ldots + c_rx_r$ dan $z = c_{r+1}x_{r+1} + \ldots +$

$c_n x_n$, sehingga $y + z = 0$. Jadi $y = -z$.

Karena $y \in S$ maka $-z \in S$, sehingga $z \in S$.

Karena $z \in S^\perp$ maka $-z \in S^\perp$, sehingga $y \in S^\perp$.

Jadi y dan z elemen dari $S \cap S^\perp$. Tetapi $S \cap S^\perp = \{0\}$.

Oleh karena itu $c_1 x_1 + \ldots + c_r x_r = 0$ dan $c_{r+1} x_{r+1} + \ldots + c_n x_n = 0$.

Karena $x_1, \ldots, x_r$ independen linear, maka $c_1 = c_2 = \ldots = c_r = 0$, dan karena $x_{r+1}, \ldots, x_n$ juga independen linear, maka $c_{r+1} = \ldots = c_n = 0$, sehingga $\{x_1, \ldots, x_r, x_{r+1}, \ldots, x_n\}$ independen linear.

Jadi $\{x_1, \ldots, x_r, x_{r+1}, \ldots, x_n\}$ merupakan basis untuk $\mathbb{R}^n$. ■

Definisi 4.2.3.

Andaikan U dan V adalah subruang-subruang dari ruang vektor W. *Jumlahan langsung* dari U dan V, yang kita lambangkan dengan $U \oplus V$, adalah himpunan semua elemen dalam W yang dapat ditulis secara tunggal sebagai jumlahan $u + v$, di mana $u \in U$ dan $v \in V$.

Teorema 4.2.5.

Jika S adalah subruang dari $\mathbb{R}^n$, maka $\mathbb{R}^n = S \oplus S^\perp$.

Bukti:

Jika $S = \{0\}$, maka $S^\perp = \mathbb{R}^n$, sehingga

$$S \oplus S^\perp = \{0\} \oplus \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n.$$

Demikian juga jika $S = \mathbb{R}^n$, maka $S^\perp = \{0\}$

$$\text{dan } S \oplus S^\perp = \mathbb{R}^n.$$

Andaikan S subruang yang berdimensi r, di mana

$0 < r < n$. Jelas bahwa $S \oplus S^{\perp} \subseteq \mathbb{R}^n$. Di lain pihak menurut teorema 4.2.4 setiap vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ dapat ditulis dalam bentuk

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{x}_1 + \ldots + c_r\mathbf{x}_r + c_{r+1}\mathbf{x}_{r+1} + \ldots + c_n\mathbf{x}_n,$$

di mana $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_r\}$ basis untuk S dan

$\{\mathbf{x}_{r+1}, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ basis untuk $S^{\perp}$.

Andaikan $\mathbf{u} = c_1\mathbf{x}_1 + \ldots + c_r\mathbf{x}_r$ dan $\mathbf{v} = c_{r+1}\mathbf{x}_{r+1} + \ldots + c_n\mathbf{x}_n$, maka $\mathbf{u} \in S$, $\mathbf{v} \in S^{\perp}$ dan $\mathbf{x} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$.

Kita tunjukkan bahwa jumlahan $\mathbf{x} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$ adalah tunggal. Andaikan bahwa $\mathbf{x}$ juga dapat ditulis sebagai jumlahan $\mathbf{y} + \mathbf{z}$, di mana $\mathbf{y} \neq \mathbf{u}$, $\mathbf{y} \in S$ dan $\mathbf{z} \neq \mathbf{v}$, $\mathbf{z} \in S^{\perp}$.

Jadi $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{z}$

$$\mathbf{u} - \mathbf{y} = \mathbf{z} - \mathbf{v}.$$

Tetapi $\mathbf{u} - \mathbf{y} \in S$ dan $\mathbf{z} - \mathbf{v} \in S^{\perp}$, sebab $\mathbf{u}, \mathbf{y} \in S$ dan $\mathbf{z}, \mathbf{v} \in S^{\perp}$.

Karena $\mathbf{u} - \mathbf{y} \in S$ dan $\mathbf{u} - \mathbf{y} = \mathbf{z} - \mathbf{v}$, maka $\mathbf{z} - \mathbf{v} \in S$.

Karena $\mathbf{z} - \mathbf{v} \in S^{\perp}$ dan $\mathbf{u} - \mathbf{y} = \mathbf{z} - \mathbf{v}$, maka $\mathbf{u} - \mathbf{y} \in S^{\perp}$.

Jadi $\mathbf{u} - \mathbf{y}$ dan $\mathbf{z} - \mathbf{v} \in S \cap S^{\perp}$.

Karena $S \cap S^{\perp} = \{0\}$, maka $\mathbf{u} - \mathbf{y} = 0$ dan $\mathbf{v} - \mathbf{z} = 0$, sehingga $\mathbf{u} = \mathbf{y}$ dan $\mathbf{v} = \mathbf{z}$. Kontradiksi dengan pengandaian di atas. Jadi jumlahan $\mathbf{x} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$ tunggal,

dan $\mathbb{R}^n \subseteq S \oplus S^{\perp}$. Terbukti $\mathbb{R}^n = S \oplus S^{\perp}$. ∎

Teorema 4.2.6.

Jika S adalah subruang dalam $\mathbb{R}^n$, maka $(S^{\perp})^{\perp} = S$.

Bukti:

Ambil sebarang $\mathbf{x} \in S$, maka $\mathbf{x}$ ortogonal pada setiap $\mathbf{y} \in S^{\perp}$. Oleh karena itu $\mathbf{x} \in (S^{\perp})^{\perp}$, sehingga $S \subset (S^{\perp})^{\perp}$. Ambil sebarang $\mathbf{z} \in (S^{\perp})^{\perp}$. Dengan menggunakan teorema

4.2.5 dapat kita tuliskan **z** sebagai jumlahan **u** + **v**, di mana **u** $\in$ S dan **v** $\in S^{\perp}$. Karena **v** $\in S^{\perp}$, maka **v** ortogonal pada **u** dan **z**, sehingga:

$$0 = \mathbf{v}.\mathbf{z} = \mathbf{v}.(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \mathbf{v}.\mathbf{u} + \mathbf{v}.\mathbf{v} = \mathbf{v}.\mathbf{v},$$

yang berakibat **v** = **0**.

Jadi **z** = **u** $\in$ S, sehingga $(S^{\perp})^{\perp} \subset S$.

Terbukti $S = (S^{\perp})^{\perp}$. ■

Teorema 4.2.6 mengatakan bahwa, bila T adalah komplemen ortogonal dari subruang S, maka S adalah komplemen ortogonal dari T, sehingga dapat dikatakan bahwa S dan T adalah komplemen ortogonal satu sama lain. Jadi menurut teorema 4.2.3 N(A) dan $R(A^T)$ adalah komplemen ortogonal satu terhadap yang lain, dan demikian juga dengan $N(A^T)$ dan R(A). Maka

$$N(A)^{\perp} = R(A^T) \quad \text{dan} \quad N(A^T)^{\perp} = R(A).$$

Contoh 4.2.3.

Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$.

Tentukan basis untuk N(A), $R(A^T)$, $N(A^T)$ dan R(A)!

Jawaban:

Kita dapat menentukan basis untuk N(A) dan $R(A^T)$ dengan mengubah A ke dalam bentuk eselon baris tereduksi sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Karena (1, 0, 1) dan (0, 1, 1) merupakan basis untuk ruang baris A, maka $(1, 0, 1)^T$ dan $(0, 1, 1)^T$ merupakan basis untuk $R(A^T)$. Jika $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T \in N(A)$, dari hasil di atas diperoleh

$$x_1 + x_3 = 0 \text{ dan } x_2 + x_3 = 0.$$

Jadi $x_1 = x_2 = -x_3$.

Dengan mengambil $x_3 = \alpha$, maka N(A) terdiri atas semua vektor yang berbentuk $\alpha(-1, -1, 1)^T$. Perhatikan bahwa $(-1, -1, 1)^T$ ortogonal pada $(1, 0, 1)^T$ dan $(0, 1, 1)^T$. Sehingga $N(A) \perp R(A^T)$ dan $N(A)^\perp = R(A^T)$.

Untuk menentukan basis dari R(A) dan $N(A^T)$, kita ubah A^T ke dalam bentuk eselon baris tereduksi, yaitu:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Jadi $(1, 0, 1)^T$ dan $(0, 1, 2)^T$ merupakan basis untuk R(A). Jika $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T \in N(A^T)$, maka $x_1 = -x_3$, $x_2 = -2x_3$. Jadi $N(A^T)$ adalah subruang dalam $\mathbb{R}^3$ yang direntang oleh $(-1, -2, 1)^T$. Perhatikan bahwa $(-1, -2, 1)^T$ ortogonal pada $(1, 0, 1)^T$ dan $(0, 1, 2)^T$, sehingga $N(A^T) \perp R(A)$ dan $N(A^T)^\perp = R(A)$.

3. Ruang Perkalian-Dalam

Dalam bab III dan awal bab IV telah kita bahas tentang perkalian skalar pada $\mathbb{R}^n$. Pada bagian ini, akan kita bahas perkalian-dalam (perkalian-skalar) pada sebarang ruang vektor. Akan dibahas juga pengertian norma (panjang), jarak, sudut dan ortogonalitas pada sebarang ruang vektor. Dalam teorema 3.1.2 dapat kita lihat sifat-sifat penting dari perkalian-skalar pada $\mathbb{R}^n$. Pada sebarang ruang vektor, perkalian-dalam didefinisikan dengan menggunakan sifat-sifat penting dari perkalian-skalar pada $\mathbb{R}^n$ itu.

Definisi 4.3.1.

Suatu *perkalian-dalam* pada ruang vektor V adalah suatu operasi yang mengawankan setiap pasang vektor $\mathbf{x}$ dan $\mathbf{y}$ dalam V dengan suatu bilangan real $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ sedemikian hingga syarat-syarat berikut dipenuhi:

(i) $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0$, dan $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0$ bhb $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

(ii) $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle$ untuk semua $\mathbf{x}$ dan $\mathbf{y}$ dalam V.

(iii) $\langle \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = \alpha\langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle + \beta\langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle$ untuk semua $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$ dalam V dan sebarang skalar α dan β.

Ruang vektor yang dilengkapi dengan suatu perkalian-dalam disebut *ruang perkalian-dalam*.

Contoh 4.3.1.

Perkalian-skalar pada $\mathbb{R}^n$ adalah salah satu contoh dari perkalian-dalam pada ruang vektor $\mathbb{R}^n$, di mana

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \quad \text{untuk tiap } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n.$$

Contoh 4.3.2.

Dalam $C[a, b]$ dapat didefinisikan perkalian-dalam sebagai berikut:

(1) $$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx.$$

Kita lihat bahwa ke-3 syarat perkalian-dalam dipenuhi:

(i) Jika f adalah sebarang fungsi dalam $C[a, b]$, maka $f^2(x) \geq 0$ untuk semua x dalam $[a,b]$, sehingga $\langle f, f\rangle = \int_a^b f^2(x)dx \geq 0$.

Karena $f^2(x) \geq 0$ dan f adalah fungsi kontinu, maka: $\int_a^b f^2(x)dx = 0$ bhb $f(x) = 0$ untuk semua $x \in [a, b]$.

(ii) $\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx = \int_a^b g(x)f(x)dx = \langle g, f\rangle$.

untuk semua f dan g dalam $C[a, b]$.

(iii)
$$\begin{aligned}\langle \alpha f + \beta g, h\rangle &= \int_a^b (\alpha f + \beta g)(x)h(x)dx \\ &= \int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))h(x)dx \\ &= \alpha\int_a^b f(x)h(x)dx + \beta\int_a^b g(x)h(x)dx \\ &= \alpha\langle f, h\rangle + \beta\langle g, h\rangle\end{aligned}$$

untuk semua fungsi f, g, h dalam $C[a, b]$ dan sebarang skalar α dan β.

Contoh 4.3.3.

Jika w adalah suatu fungsi kontinu yang bernilai real positif dalam $C[a, b]$, maka:

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)(g)(x)w(x)dx$$

mendefinisikan suatu perkalian-dalam pada $C[a, b]$. Fungsi w ini disebut *fungsi berat*. Jadi kita dapat mendefinisikan beberapa perkalian-dalam yang berbeda pada $C[a, b]$.

Perkalian-skalar digunakan untuk mendefinisikan panjang suatu vektor dalam $\mathbb{R}^n$. Dengan cara yang sama, norma (panjang) suatu vektor dalam ruang perkalian-dalam dapat didefinisikan dengan menggunakan perkalian-dalam.

Definisi 4.3.2.

Jika V adalah suatu ruang perkalian-dalam, maka *norma* dari suatu vektor $\mathbf{v} \in V$ adalah $\|\mathbf{v}\| = (\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle)^{1/2}$.

Contoh 4.3.4.

Dalam $C[-\pi, \pi]$ dengan perkalian-dalam yang didefinisikan pada (1),

$$\begin{aligned} \|\sin\| &= \left(\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x \, dx \right)^{1/2} \\ &= \left(\int_{-\pi}^{\pi} 1/2(1 - \cos 2x) \, dx \right)^{1/2} \\ &= \left(\left[\tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{4}\sin 2x \right]_{-\pi}^{\pi} \right)^{1/2} \\ &= \left((\tfrac{1}{2}\pi - 0) - (-\tfrac{1}{2}\pi - 0) \right)^{1/2} \\ &= (\pi)^{1/2}. \end{aligned}$$

Jarak antara dua vektor dalam suatu ruang perkalian-dalam dapat didefinisikan dengan menggunakan konsep norma yang didefinisikan dalam ruang tersebut.

Definisi 4.3.3.

Andaikan $\mathbf{x}$ dan $\mathbf{y}$ dua vektor dalam suatu ruang perkalian dalam. *Jarak* antara vektor $\mathbf{x}$ dan $\mathbf{y}$ didefinisikan sebagai berikut: $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$.

Teorema 4.3.1.

Jika V adalah ruang perkalian-dalam, maka untuk setiap vektor $\mathbf{v} \in V$ dan sebarang skalar $\alpha \in \mathbb{R}$, berlaku

$$\|\alpha\mathbf{v}\| = |\alpha|\,\|\mathbf{v}\|.$$

Bukti:

Ambil sebarang vektor $\mathbf{v} \in V$ dan sebarang skalar $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\text{Maka } \|\alpha\mathbf{v}\| &= (\langle\alpha\mathbf{v},\ \alpha\mathbf{v}\rangle)^{1/2} \\
&= (\alpha\langle\mathbf{v},\ \alpha\mathbf{v}\rangle)^{1/2} \\
&= (\alpha\langle\alpha\mathbf{v},\ \mathbf{v}\rangle)^{1/2} \\
&= (\alpha^2\langle\mathbf{v},\ \mathbf{v}\rangle)^{1/2} \\
&= |\alpha|(\langle\mathbf{v},\ \mathbf{v}\rangle)^{1/2} \\
&= |\alpha|\,\|\mathbf{v}\|.
\end{aligned}$$

■

Definisi 4.3.4.

Suatu vektor $\mathbf{u}$ dalam ruang perkalian-dalam V disebut *vektor satuan*, jika $\|\mathbf{u}\| = (\langle\mathbf{u},\ \mathbf{u}\rangle)^{1/2} = 1$.

Jika $\mathbf{v}$ adalah sebarang vektor tak nol dalam ruang perkalian-dalam V, maka $\mathbf{u} = (1/\|\mathbf{v}\|)\mathbf{v}$ merupakan suatu vektor satuan, sebab

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{u}\| &= \|(1/\|\mathbf{v}\|)\mathbf{v}\| \\
&= |(1/\|\mathbf{v}\|)|\,\|\mathbf{v}\| = 1.
\end{aligned}$$

Untuk selanjutnya vektor satuan $(1/\|\mathbf{v}\|)\,\mathbf{v}$ dalam ruang perkalian-dalam juga akan ditulis dengan notasi $\mathbf{v}/\|\mathbf{v}\|$.

Teorema 4.3.2 (Ketaksamaan Cauchy-Schwarz).

Jika $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$ adalah sebarang dua vektor dalam ruang perkalian-dalam V, maka

$$|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle| \le \|\mathbf{u}\|\ \|\mathbf{v}\|,$$

dan $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle| = \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|$ bhb **u** dan **v** dependen linear.

Bukti:

Andaikan λ sebarang skalar. Maka

$$\begin{aligned} 0 &\le \langle \mathbf{u} - \lambda\mathbf{v}, \mathbf{u} - \lambda\mathbf{v}\rangle \qquad \text{(def 4.3.1(i))} \\ &= \langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle - 2\lambda\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle + \lambda^2\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle \\ &= \|\mathbf{u}\|^2 - 2\lambda\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle + \lambda^2\|\mathbf{v}\|^2. \end{aligned}$$

Ketaksamaan kuadrat dalam λ ini akan dipenuhi bila diskriminannya ≤ 0, yaitu

$$4\ \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle^2 - 4\ \|\mathbf{u}\|^2\ \|\mathbf{v}\|^2 \le 0,$$

sehingga $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle| \le \|\mathbf{u}\|\ \|\mathbf{v}\|$.

Dari bukti di atas juga dapat dilihat bahwa

$|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle| = \|\mathbf{u}\|\ \|\mathbf{v}\|$ bhb $\langle \mathbf{u} - \lambda\mathbf{v}, \mathbf{u} - \lambda\mathbf{v}\rangle = 0$

bhb $\mathbf{u} - \lambda\mathbf{v} = \mathbf{0}$

bhb **u** dan **v** dependen linear. ∎

Kita juga dapat mendefinisikan sudut θ antara vektor **u** dan vektor **v** yang keduanya tak nol dalam ruang perkalian-dalam V.

<u>*Definisi 4.3.5.*</u>

Sudut θ antara sebarang vektor **u** dan **v** dalam ruang perkalian-dalam V didefinisikan sebagai berikut:

$$\cos \theta = (\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle)/(\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|), \qquad 0 \le \theta \le \pi.$$

<u>Teorema 4.3.3</u> (Ketaksamaan segitiga).

Jika V adalah ruang perkalian-dalam, maka untuk setiap vektor $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v} \in V$, berlaku

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \le \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|.$$

Bukti:

Ambil sebarang $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v} \in V$, maka

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 &= \langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} + \mathbf{v}\rangle \\ &= \langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle + 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle \\ &\le \|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{v}\|^2 \\ &\qquad\qquad \text{(Cauchy - Schwarz)} \\ &= (\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|)^2.\end{aligned}$$

Jadi $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \le \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$. ■

Untuk jarak antara dua vektor dalam suatu ruang perkalian-dalam, berlaku ketaksamaan segitiga dalam bentuk sebagai berikut:

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \le d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + d(\mathbf{z}, \mathbf{y}),$$

sebab

$$\begin{aligned} d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \|(\mathbf{x} - \mathbf{z}) + (\mathbf{z} - \mathbf{y})\| \\ &\le \|\mathbf{x} - \mathbf{z}\| + \|\mathbf{z} - \mathbf{y}\| \\ &= d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + d(\mathbf{z}, \mathbf{y}).\end{aligned}$$

Definisi 4.3.6.

Dua buah vektor $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$ dalam suatu ruang perkalian-dalam V dikatakan *saling ortogonal* jika $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = 0$, dan dilambangkan $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$.

Contoh 4.3.5.

Fungsi cos dan sin saling ortogonal dalam $C[-\pi, \pi]$ dengan perkalian-dalam yang didefinisikan pada (1), karena: $\langle \cos, \sin \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \cos x \sin x \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin x \, d(\sin x)$

$$= \frac{1}{2} \sin^2 x \Big]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2}((0)^2 - (0)^2) = 0.$$

Contoh 4.3.6.

Didefinisikan perkalian-dalam pada $C\,[-1, 1]$ sebagai berikut: $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)e^{-x} dx$.

Maka fungsi f dan g yang didefinisikan berturut-turut dengan $f(x) = x$ dan $g(x) = e^{x}$ adalah saling ortogonal, karena: $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} xe^{x}e^{-x} dx = \int_{-1}^{1} x dx$

$$= \frac{1}{2}x^2 \Big]_{-1}^{1} = 1/2 - 1/2 = 0.$$

Jika $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$ saling ortogonal, maka $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$, sehingga berlaku $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} + \mathbf{v} \rangle$

$$= \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle + 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle$$

$$= \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2,$$

yang merupakan generalisasi hukum Pythagoras.

4. Masalah Kuadrat Terkecil

Sistem persamaaan linear $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dengan matriks koefisien A yang terdiri dari m baris dan n kolom dengan m > n, pada umumnya tidak konsisten. Kita tidak dapat mengharapkan dapat memperoleh suatu vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ yang memenuhi $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Pada bagian ini kita akan mencari suatu vektor $\mathbf{x}$, sedemikian hingga $A\,\mathbf{x}$ "paling dekat" dengan $\mathbf{b}$.

Andaikan A sebuah matriks m x n, dengan m > n. Untuk setiap $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, didefinisikan:

$$\|\mathbf{b}\| = (\langle \mathbf{b}, \mathbf{b}\rangle)^{1/2} = (\mathbf{b}.\mathbf{b})^{1/2}.$$

Perhatikan sistem persamaan linear $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Untuk setiap $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, kita dapat membentuk *residual*

$$r(\mathbf{x}) = \mathbf{b} - A\,\mathbf{x}.$$

Jarak antara $\mathbf{b}$ dan $A\,\mathbf{x}$, diberikan oleh

$$\|\mathbf{b} - A\,\mathbf{x}\| = \|r(\mathbf{x})\|.$$

Akan kita cari suatu vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, dengan $\|r(\mathbf{x})\|$ minimum. Meminimumkan $\|r(\mathbf{x})\|$ sama saja dengan meminimumkan $\|r(\mathbf{x})\|^2$. Suatu vektor $\hat{\mathbf{x}}$ yang menyelesaikan masalah ini disebut *penyelesaian kuadrat terkecil* dari sistem $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Jika $\mathbf{p} = A\,\hat{\mathbf{x}}$, maka $\mathbf{p}$ adalah suatu vektor dalam ruang kolom A yang paling dekat dengan $\mathbf{b}$.

Teorema 4.4.1.

Andaikan S adalah subruang dari $\mathbb{R}^m$. Untuk setiap $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, ada suatu vektor tunggal $\mathbf{p}$ dalam S paling dekat dengan $\mathbf{b}$, yaitu $\|\mathbf{b} - \mathbf{y}\| > \|\mathbf{b} - \mathbf{p}\|$ untuk setiap $\mathbf{y} \neq \mathbf{p}$ dalam S. Selanjutnya, vektor $\mathbf{p}$ dalam S paling dekat dengan vektor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ bhb $\mathbf{b} - \mathbf{p} \in S^{\perp}$.

Bukti:

Karena $\mathbb{R}^m = S \oplus S^{\perp}$, maka setiap vektor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ dapat dinyatakan dengan tunggal sebagai jumlahan: $\mathbf{b} = \mathbf{p} + \mathbf{z}$ di mana $\mathbf{p} \in S$ dan $\mathbf{z} \in S^{\perp}$. Jika $\mathbf{y}$ sebarang vektor yang lain dalam S, maka $\|\mathbf{b} - \mathbf{y}\|^2 = \|(\mathbf{b} - \mathbf{p}) + (\mathbf{p} - \mathbf{y})\|^2$. Karena $\mathbf{p} - \mathbf{y} \in S$ dan $\mathbf{b} - \mathbf{p} = \mathbf{z} \in S^{\perp}$, maka menurut generalisai hukum Pythagoras: $\|\mathbf{b} - \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{b} - \mathbf{p}\|^2 + \|\mathbf{p} - \mathbf{y}\|^2$.

Oleh karena itu $\|\mathbf{b} - \mathbf{y}\| > \|\mathbf{b} - \mathbf{p}\|$.

Jadi ada tunggal vektor $\mathbf{p} \in S$ yang paling dekat dengan $\mathbf{b}$. Dari bukti di atas juga dapat disimpulkan bahwa jika $\mathbf{p} \in S$ dan $(\mathbf{b} - \mathbf{p}) \in S^{\perp}$, maka $\mathbf{p}$ adalah vektor yang paling dekat dengan $\mathbf{b}$.

Sebaliknya, jika $\mathbf{q} \in S$ dan $\mathbf{b} - \mathbf{q} \notin S^{\perp}$, maka $\mathbf{q} \neq \mathbf{p}$ dan dengan bukti di atas (untuk $\mathbf{y} = \mathbf{q}$): $\|\mathbf{b} - \mathbf{q}\| > \|\mathbf{b} - \mathbf{p}\|$ yaitu $\mathbf{q}$ bukan yang terdekat dengan vektor $\mathbf{b}$. ■

Bila $\mathbf{b} \in S$, maka $\mathbf{b} = \mathbf{p} + \mathbf{z}$, $\mathbf{p} \in S$, $\mathbf{z} \in S^{\perp}$. Padahal $\mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{0}$. Dengan sifat ketunggalan dari representasi jumlahan langsung, didapatkan $\mathbf{p} = \mathbf{b}$ dan $\mathbf{z} = \mathbf{0}$.

Vektor $\hat{\mathbf{x}}$ merupakan penyelesaian masalah kuadrat terkecil $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ bhb $\mathbf{p} = A\,\hat{\mathbf{x}}$ adalah vektor dalam $R(A)$ yang paling dekat dengan $\mathbf{b}$. Vektor $\mathbf{p}$ ini disebut <u>*proyeksi* $\mathbf{b}$ *pada* $R(A)$</u>. Menurut teorema 4.4.1:

$$\mathbf{b} - \mathbf{p} = \mathbf{b} - A\,\hat{\mathbf{x}} = r(\hat{\mathbf{x}})$$

harus merupakan elemen dari $R(A)^{\perp}$. Jadi $\hat{\mathbf{x}}$ merupakan penyelesaian masalah kudrat terkecil $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ bhb $r(\hat{\mathbf{x}}) \in R(A)^{\perp}$. Menurut teorema 4.2.3: $R(A)^{\perp} = N(A^{T})$, sehingga $\hat{\mathbf{x}}$ merupakan penyelesaian masalah kudrat terkecil

$A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ bhb $r(\hat{\mathbf{x}}) \in N(A^{T})$

bhb $\mathbf{0} = A^{T}\, r(\hat{\mathbf{x}}) = A^{T}\,(\mathbf{b} - A\,\hat{\mathbf{x}})$

bhb $A^{T} A\,\hat{\mathbf{x}} = A^{T}\,\mathbf{b}$.

Jadi untuk menyelesaikan masalah kuadrat terkecil $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$, kita harus menyelesaikan persamaan

$$A^{T} A\,\mathbf{x} = A^{T}\,\mathbf{b}.$$

Persamaan ini menyajikan suatu sistem persamaan linear n x n. Persamaan-persamaan linear ini disebut *persamaan normal*.

Teorema 4.4.2.

Jika A adalah matriks m x n dengan rank n, maka persamaan normal $A^T A \mathbf{x} = A^T \mathbf{b}$ mempunyai penyelesaian tunggal $\hat{\mathbf{x}} = (A^T A)^{-1} A^T \mathbf{b}$, yang merupakan penyelesaian tunggal untuk masalah kuadrat terkecil $A \mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Bukti:

Andaikan $\mathbf{z}$ adalah penyelesaian untuk $A^T A \mathbf{x} = \mathbf{0}$, maka $A \mathbf{z} \in N(A^T)$. Jelas bahwa $A \mathbf{z} \in R(A) = N(A^T)^{\perp}$. Karena $N(A^T) \cap N(A^T)^{\perp} = \{\mathbf{0}\}$, maka $A \mathbf{z} = \mathbf{0}$. Karena A mempunyai rank n, maka vektor-vektor kolom dari A independen linear, sehingga $A \mathbf{x} = \mathbf{0}$ hanya mempunyai penyelesaian trivial. Jadi $\mathbf{z} = \mathbf{0}$, yaitu persamaan $A^T A \mathbf{x} = \mathbf{0}$ hanya mempunyai penyelesaian trivial. Menurut teorema 2.3.3: $A^T A$ non singular. Jadi $\hat{\mathbf{x}} = (A^T A)^{-1} A^T \mathbf{b}$ adalah penyelesaian tunggal untuk persamaan normal di atas dan sekaligus merupakan penyelesaian kuadrat terkecil yang tunggal untuk sistem $A \mathbf{x} = \mathbf{b}$. ■

Vektor proyeksi $\mathbf{p} = A \hat{\mathbf{x}} = A (A^T A)^{-1} A^T \mathbf{b}$ adalah elemen dari R(A) yang paling dekat dengan $\mathbf{b}$ dalam pengertian kuadrat terkecil. Matriks $P = A (A^T A)^{-1} A^T$ disebut *matriks proyeksi*.

Contoh 4.4.1.

Carilah penyelesaian kuadrat terkecil untuk sistem:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 3 \\ -2x_1 + 3x_2 &= 1 \\ 2x_1 - x_2 &= 2. \end{aligned}$$

Jawaban:

Persamaan normal untuk sistem ini adalah:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 9 & -7 \\ -7 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Penyelesaian kuadrat terkecil untuk sistem ini adalah: $(83/50,\ 71/50)^T$.

5. Himpunan Ortonormal

Elemen-elemen dari basis standar dalam $\mathbb{R}^n$, yaitu: $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$, adalah vektor-vektor satuan yang saling ortogonal, sebab $\|\mathbf{e}_j\| = 1$ dan $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = 0$, jika $i \neq j$ untuk $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Dalam pembahasan lebih lanjut tentang ruang perkalian-dalam akan disusun suatu basis dengan anggota vektor-vektor satuan yang saling ortogonal. Basis seperti ini dapat membantu kita dalam menyelesaikan masalah kuadrat terkecil.

Definisi 4.5.1.

Andaikan $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ adalah vektor-vektor dalam ruang perkalian-dalam V. Jika $\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle = 0$ untuk $i \neq j$, maka $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ disebut *himpunan ortogonal*.

Contoh 4.5.1.

Himpunan $\{(1, 1, 1)^T, (2, 1, -3)^T, (4, -5, 1)^T\}$ adalah suatu himpunan ortogonal dalam $\mathbb{R}^3$ terhadap perkalian-skalar pada $\mathbb{R}^n$, karena

$$(1, 1, 1)(2, 1, -3)^T = 0$$

$$(1, 1, 1)(4, -5, 1)^T = 0$$

$$(2, 1, -3)(4, -5, 1)^T = 0.$$

Teorema 4.5.1.

Jika $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ adalah himpunan ortogonal vektor-vektor tak nol dalam ruang perkalian-dalam V, maka $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ adalah independen linear.

Bukti:

Andaikan $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ vektor-vektor tak nol yang saling ortogonal dan dependen linear. Maka ada skalar-skalar $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ yang tidak semuanya sama dengan nol sedemikian hingga

$$\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \ldots + \alpha_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}.$$

Andaikan $\alpha_1 \neq 0$, maka

$$\mathbf{v}_1 = \sum_{i=2}^{n} \beta_i\mathbf{v}_i, \quad \text{di mana } \beta_i = -\alpha_i/\alpha_1.$$

Maka $\|\mathbf{v}_1\|^2 = \langle\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1\rangle = \langle\mathbf{v}_1, \sum_{i=2}^{n} \beta_i \mathbf{v}_i\rangle$

$$= \sum_{i=2}^{n} \beta_i\langle\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_i\rangle = 0.$$

sehingga $\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$. Kontradiksi.

Jadi $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ adalah independen linear. ∎

Definisi 4.5.2.

Himpunan ortonormal adalah himpunan ortogonal dari vektor-vektor satuan.

Jadi $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ adalah himpunan ortonormal bhb $\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j \rangle = \delta_{ij}$, di mana $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{jika } i = j \\ 0, & \text{jika } i \neq j. \end{cases}$

Dari suatu himpunan ortogonal vektor-vektor tak nol $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$, kita dapat membentuk himpunan ortonormal $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ di mana

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{v}_i / \|\mathbf{v}_i\| \quad \text{untuk } i = 1, 2, \ldots, n.$$

Contoh 4.5.2.

Dari himpunan ortogonal pada contoh 4.5.1, kita dapat membentuk himpunan ortonormal $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$, di mana

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1/\|\mathbf{v}_1\| = 1/\sqrt{3}(1, 1, 1)^T$$

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2/\|\mathbf{v}_2\| = 1/\sqrt{14}(2, 1, -3)^T$$

$$\mathbf{u}_3 = \mathbf{v}_3/\|\mathbf{v}_3\| = 1/\sqrt{42}(4, -5, 1)^T.$$

Contoh 4.5.3.

Dalam $C[-\pi, \pi]$ dengan perkalian dalam:

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$$

himpunan $\{t, \cos, \sin\}$ di mana $t(x) = 1$ untuk setiap $x \in [-\pi, \pi]$, adalah himpunan ortogonal, karena:

$$\langle t, \cos \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \cos x \, dx = \sin x \,\Big]_{-\pi}^{\pi} = 0 - 0 = 0$$

$$\langle t, \sin \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \sin x \, dx = -\cos x \,\Big]_{-\pi}^{\pi} = 1 - 1 = 0$$

$$\langle \cos, \sin \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \cos x \sin x \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin x \, d(\sin x)$$

$$= \tfrac{1}{2}\sin^2 x \,\Big]_{-\pi}^{\pi} = \tfrac{1}{2}(0 - 0) = 0.$$

Untuk membentuk himpunan ortonormal, kita hitung norma dari ketiga vektor tersebut.

$$\|t\|^2 = \langle t, t\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} 1.dx = x\,\Big]_{-\pi}^{\pi} = \pi - (-\pi) = 2\pi$$

$$\|\cos\|^2 = \langle\cos, \cos\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x\, dx$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} (\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cos 2x)\, dx$$

$$= \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{4}\sin 2x\,\Big]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \tfrac{1}{2}\pi + \tfrac{1}{2}\pi = \pi$$

$$\|\sin\|^2 = \langle\sin, \sin\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x\, dx$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} (\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\cos 2x)\, dx = \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{2}\sin 2x\,\Big]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \tfrac{1}{2}\pi + \tfrac{1}{2}\pi = \pi.$$

Jadi $\{t/\sqrt{2\pi},\ \cos/\sqrt{\pi},\ \sin/\sqrt{\pi}\}$ adalah himpunan ortonormal.

Definisi 4.5.3.

Andaikan V adalah suatu ruang perkalian-dalam. Suatu himpunan ortonormal dalam V yang juga merupakan basis untuk V kita sebut *basis ortonormal*.

Teorema 4.5.2.

Andaikan $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ adalah basis ortonormal untuk ruang perkalian dalam V. Jika $x = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$, maka $c_i = \langle x_i, x\rangle$ dan $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} c_i^2$. *(Rumus Parseval)*

Bukti:

Andaikan $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} c_i \mathbf{x}_i$. Maka

$$\langle \mathbf{x}_i , \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{x}_i , \sum_{j=1}^{n} c_j \mathbf{x}_j \rangle = \sum_{j=1}^{n} c_j \langle \mathbf{x}_i , \mathbf{x}_j \rangle$$

$$= \sum_{j=1}^{n} c_j \delta_{ij} = c_i, \text{ dan}$$

$$0 = \| \mathbf{x} - \sum_{i=1}^{n} c_i \mathbf{x}_i \|^2 = \langle \mathbf{x} - \sum_{i=1}^{n} c_i \mathbf{x}_i , \mathbf{x} - \sum_{i=1}^{n} c_i \mathbf{x}_i \rangle$$

$$= \|\mathbf{x}\|^2 - 2 \sum_{i=1}^{n} c_i \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}_i \rangle + \|\mathbf{x}\|^2 = 2\|\mathbf{x}\|^2 - 2 \sum_{i=1}^{n} c_i^2,$$

sehingga $\|\mathbf{x}\|^2 = \sum_{i=1}^{n} c_i^2$. ■

Contoh 4.5.4.

Diberikan himpunan ortonormal $\{f, g\}$ dalam $C[-\pi, \pi]$, di mana $f(x) = 1/\sqrt{2\pi}$ dan $g(x) = (1/\sqrt{\pi}) \cos 2x$ untuk setiap $x \in [-\pi, \pi]$, dengan perkalian dalam yang didefinisikan seperti pada contoh 4.5.3. Kita tentukan nilai dari $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^4 x \, dx$, tanpa menghitung anti derivatifnya.

Karena $\sin^2 x = (1 - \cos 2x)/2$

$$= (\sqrt{2\pi}/2)\ 1/\sqrt{2\pi} + (-\sqrt{\pi}/2)\ 1/\sqrt{\pi} \cos 2x$$

$$= (\sqrt{2\pi}/2) f(x) + (-\sqrt{\pi}/2) g(x),$$

untuk semua $x \in [-\pi, \pi]$

maka $\sin^2 = (\sqrt{2\pi}/2) f + (-\sqrt{\pi}/2) g$

dan menurut rumus Parseval:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^4 x \, dx = \|\sin^2\|^2 = (\sqrt{2\pi}/2)^2 + (-\sqrt{\pi}/2)^2 = 3\pi/4.$$

Definisi 4.5.4.

Suatu matriks n x n berelemen skalar dikatakan *matriks ortogonal* jika kolom-kolomnya merupakan suatu himpunan ortonormal dalam $\mathbb{R}^n$ terhadap perkalian-skalar pada $\mathbb{R}^n$.

Teorema 4.5.3.

Jika A adalah matriks n x n berelemen skalar, maka peryataan-pernyataan berikut adalah ekuivalen:

a) A adalah suatu matriks ortogonal.

b) $A^T A = A A^T = I$.

c) $A\mathbf{x} \cdot A\mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ untuk semua vektor $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$.

d) $\|A\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|$ untuk semua vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Bukti:

a) $\Rightarrow$ b)

Andaikan A adalah matriks ortogonal. Elemen baris ke-i kolom ke-j dari matriks $A^T A$ adalah hasil kali skalar baris ke-i dari A^T dan kolom ke-j dari A. Karena kolom-kolom dari A merupakan himpunan ortonormal, maka hasil kali skalar tersebut sama dengan 1, jika $i = j$ dan sama dengan 0, jika $i \neq j$. Jadi $A^T A = I$. Vektor-vektor kolom dari A adalah independen linear, jadi merupakan suatu basis untuk $\mathbb{R}^n$. Maka menurut Corollary 3.6.4 matriks A non singular. Jadi A punya invers, yaitu A^{-1} sedemikian sehingga $A^{-1}A = A A^{-1} = I$.

Maka $A^T = A^T I = A^T(A A^{-1}) = (A^T A) A^{-1} = I A^{-1} = A^{-1}$.

Jadi $A^T A = A A^T = I$.

b) $\Rightarrow$ c)

Ambil sebarang vektor $\mathbf{x}$ dan $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Maka

$$A\mathbf{x} \cdot A\mathbf{y} = (A\mathbf{x})^T A\mathbf{y} = (\mathbf{x}^T A^T) A\mathbf{y} = \mathbf{x}^T (A^T A)\mathbf{y}$$

$$= \mathbf{x}^T I \mathbf{y} = \mathbf{x}^T \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}.$$

c) $\Rightarrow$ d)

Ambil sebarang vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Maka

$$\|A\mathbf{x}\| = (A\mathbf{x} \cdot A\mathbf{x})^{1/2} = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{x})^{1/2} = \|\mathbf{x}\|.$$

d) $\Rightarrow$ a)

Ambil sebarang $\mathbf{x}$ dan $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Maka

$$\|A(\mathbf{x}+\mathbf{y})\|^2 = \|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2$$

$$\|A\mathbf{x}\|^2 + 2(A\mathbf{x}\cdot A\mathbf{y}) + \|A\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + 2(\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}) + \|\mathbf{y}\|^2.$$

Karena $\|A\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|$ dan $\|A\mathbf{y}\| = \|\mathbf{y}\|$, maka

$$A\mathbf{x}\cdot A\mathbf{y} = \mathbf{x}\cdot\mathbf{y}$$

$$\mathbf{x}^T(A^T A)\mathbf{y} = \mathbf{x}^T\mathbf{y}$$

$$\mathbf{x}^T(A^T A)\mathbf{y} - \mathbf{x}^T\mathbf{y} = 0$$

$$\mathbf{x}^T(A^T A - I)\mathbf{y} = 0.$$

Karena $\mathbf{x}$ adalah vektor sebarang, maka $(A^T A - I)\mathbf{y} = \mathbf{0}$. Karena $\mathbf{y}$ adalah vektor sebarang, maka $A^T A - I = O$ atau $A^T A = I$. Persamaan tersebut dipenuhi hanya bila vektor-vektor kolom dari matriks A merupakan himpunan ortonormal. Jadi A adalah suatu matriks ortogonal. ■

Teorema 4.5.4.

Andaikan A adalah matriks m x n berelemen skalar. Jika vektor-vektor kolom dari A merupakan suatu himpunan ortonormal vektor-vektor dalam $\mathbb{R}^m$ terhadap perkalian-skalar pada $\mathbb{R}^n$, maka $A^T A = I$ dan penyelesaian untuk masalah kuadrat terkecil adalah $\hat{\mathbf{x}} = A^T\mathbf{b}$.

Bukti:

Elemen baris ke-i dan kolom ke-j dari matriks $A^T A$ merupakan perkalian skalar dari vektor baris ke-i dari matriks A^T dengan vektor kolom ke-j dari matriks A, yaitu perkalian skalar dari vektor kolom ke-i dan ke-j dari matriks A. Karena vektor-vektor kolom dari A membentuk himpunan ortonormal, maka $A^T A = (\delta_{ij}) = I$.

Akibatnya, persamaan normal $A^T A x = A^T b$, menjadi

$$x = A^T b. \qquad \blacksquare$$

Teorema 4.5.5.

Andaikan S adalah subruang dari ruang perkalian-dalam V dan **x** adalah sebarang vektor $\in$ V. Andaikan { x_1, x_2, ..., x_n} adalah suatu basis ortonormal untuk S. Jika

$$p = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

di mana $c_i = \langle x, x_i \rangle$ untuk setiap i, maka $p - x \in S^{\perp}$.

Bukti:

Untuk tiap i berlaku:

$$\langle x_i, p - x \rangle = \langle x_i, p \rangle - \langle x_i, x \rangle = \langle x_i, \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \rangle - c_i$$

$$= \sum_{j=1}^{n} c_j \langle x_i, x_j \rangle - c_i = 0.$$

Jadi $p - x$ ortogonal pada semua x_i. Jika $y \in S$, maka

$$y = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i,$$

sehingga $\langle p - x, y \rangle = \langle p - x, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \rangle$

$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \langle p - x, x_i \rangle = 0. \qquad \blacksquare$$

Definisi 4.5.5.

Andaikan S adalah suatu subruang dalam ruang perkalian dalam V. Vektor **p** seperti didefinisikan pada teorema 4.5.5 disebut *proyeksi dari* **x** *pada* S.

Jika $x \in S$, hasil di atas trivial, sebab dengan teorema 4.5.2, $p - x = 0$. Jika $x \notin S$, maka **p** adalah vektor dalam S yang paling dekat dengan **x**, seperti dibuktikan dalam teorema di bawah ini.

Teorema 4.5.6.

Dengan pengandaian seperti pada teorema 4.5.5, vektor **p** adalah elemen dari S yang paling dekat dengan **x**, yaitu

$$\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| > \|\mathbf{p} - \mathbf{x}\|$$

untuk sebarang vektor $\mathbf{y} \neq \mathbf{p}$ dalam S.

Bukti:

Jika $\mathbf{y} \in S$ dan $\mathbf{y} \neq \mathbf{p}$, maka:

$$\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|^2 = \|(\mathbf{y} - \mathbf{p}) + (\mathbf{p} - \mathbf{x})\|^2.$$

Karena $\mathbf{y} - \mathbf{p} \in S$, maka dengan teorema 4.5.5 dan generalisasi hukum Pythagoras diperoleh

$$\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|^2 = \|\mathbf{y} - \mathbf{p}\|^2 + \|\mathbf{p} - \mathbf{x}\|^2 > \|\mathbf{p} - \mathbf{x}\|^2.$$

Jadi $\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| > \|\mathbf{p} - \mathbf{x}\|$ ∎

Contoh 4.5.5.

Andaikan S adalah himpunan semua vektor dalam $\mathbb{R}^3$ dengan bentuk $(x, y, 0)^T$ dan perkalian-dalam pada S adalah perkalian skalar pada $\mathbb{R}^n$. Carilah vektor **p** dalam S yang paling dekat dengan $\mathbf{w} = (5, 3, 4)^T$.

Jawaban:

Andaikan $\mathbf{u}_1 = (1, 0, 0)^T$ dan $\mathbf{u}_2 = (0, 1, 0)^T$. Jelas $\mathbf{u}_1$ dan $\mathbf{u}_2$ membentuk basis ortonormal untuk S. Maka

$$c_1 = \mathbf{w}^T \mathbf{u}_1 = 5$$

$$c_2 = \mathbf{w}^T \mathbf{u}_2 = 3.$$

Jadi $\mathbf{p} = 5\mathbf{u}_1 + 3\mathbf{u}_2 = (5, 3, 0)^T$.

Contoh 4.5.6.

Tentukan pendekatan kuadrat terkecil terbaik untuk fungsi f yang didefinisikan dengan $f(x) = e^x$ pada interval [0, 1] oleh suatu fungsi linear, dengan perkalian-dalam yang didefinisikan sebagai berikut:

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx.$$

Jawaban:

Andaikan S adalah subruang yang terdiri dari semua fungsi linear dalam $C[0, 1]$. Fungsi f dan g yang didefinisikan berturut-turut dengan $f(x) = 1$ dan $k(x) = x$ untuk semua $x \in [0, 1]$, merentang S. Tetapi mereka tidak saling ortogonal, karena

$$\langle f, k\rangle = \int_0^1 x\, dx = \tfrac{1}{2} x^2 \Big]_0^1 = 1/2 \neq 0.$$

Kita cari suatu fungsi g yang didefinisikan dengan $g(x) = x - a$ untuk semua $x \in [0, 1]$ dan ortogonal pada f. Perhatikan:

$$0 = \langle f, g\rangle = \int_0^1 (x - a)\, dx = \tfrac{1}{2}x^2 - ax \Big]_0^1 = \tfrac{1}{2} - a.$$

Jadi $a = \frac{1}{2}$, sehingga $g(x) = x - \frac{1}{2}$.

Karena $\|g\|^2 = \int_0^1 (x - \frac{1}{2})^2 dx = 1/3(x - \frac{1}{2})^3 \Big]_0^1 = 1/12$,

maka fungsi u_1 dan u_2 yang didefinisikan berturut-turut dengan $u_1(x) = 1$ dan $u_2(x) = \sqrt{12}\,(x - \frac{1}{2})$ untuk semua $x \in [0, 1]$, merupakan suatu basis ortonormal untuk S. Maka

$$c_1 = \int_0^1 u_1(x)e^x\, dx = e^x \Big]_0^1 = e - 1$$

$$c_2 = \int_0^1 u_2(x)\, e^x\, dx = \int_0^1 \sqrt{12}(x - \tfrac{1}{2})e^x\, dx$$

$$= \sqrt{12}\int_0^1 (e^x x - \tfrac{1}{2}e^x)\, dx = \sqrt{12}(e^x(x - 1) - \tfrac{1}{2} e^x \,]_0^1)$$

$$= \sqrt{12}\ (-1/2\ e - (-1 - 1/2)) = \sqrt{12}\ (3/2 - 1/2\ e)$$

$$= \sqrt{3}\ (3 - e).$$

Jadi fungsi p dimana $p(x) = c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x)$

$$= (e - 1) + \sqrt{3}(3 - e)(\sqrt{12}\ (x - \tfrac{1}{2}))$$

$$= (4e - 10) + 6(3 - e)x$$ untuk semua $x \in [0, 1]$,

adalah fungsi linear yang kita cari.

6. Proses Ortogonalisasi Gram-Schmidt

Pada bagian ini akan kita bahas suatu proses untuk membangun suatu basis ortonormal untuk suatu ruang perkalian dalam berdimensi-n.

Andaikan $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ adalah suatu basis untuk ruang perkalian dalam V berdimensi n. Dengan basis tersebut, akan kita bangun suatu basis ortonormal $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$.

Kita akan membangun $\mathbf{u}_i$ sedemikian hingga $S(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k) = S(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k)$ untuk k = 1, ..., n.

Andaikan:

(1) $$\mathbf{u}_1 = \mathbf{x}_1/\|\mathbf{x}_1\|$$

$S(\mathbf{u}_1) = S(\mathbf{x}_1)$, karena $\mathbf{u}_1$ adalah vektor satuan yang dibentuk dari vektor $\mathbf{x}_1$. Andaikan $\mathbf{p}_1$ adalah proyeksi dari $\mathbf{x}_2$ pada $S(\mathbf{u}_1) = S(\mathbf{x}_1)$, yaitu: $\mathbf{p}_1 = \langle\mathbf{x}_2, \mathbf{u}_1\rangle\mathbf{u}_1$.

Menurut teorema 4.5.5 $(\mathbf{x}_2 - \mathbf{p}_1) \perp \mathbf{u}_1$.

Perhatikan bahwa $\mathbf{x}_2 - \mathbf{p}_1 \neq 0$, karena

(2) $$\mathbf{x}_2 - \mathbf{p}_1 = (-\langle\mathbf{x}_2, \mathbf{u}_1\rangle/\|\mathbf{x}_1\|)\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$$

dan $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ independen linear. Jika kita bentuk:

(3) $u_2 = (x_2 - p_1)/\|x_2 - p_1\|$

maka u_2 adalah vektor satuan yang ortogonal pada u_1. Menurut (1), (2) dan (3) di atas, maka $S(u_1, u_2) \subset S(x_1, x_2)$. Karena u_1 dan u_2 independen linear, maka $\{u_1, u_2\}$ merupakan basis ortonormal untuk $S(x_1, x_2)$. Jadi $S(x_1, x_2) = S(u_1, u_2)$.

Untuk membangun u_3, proses dilanjutkan dengan cara yang sama. Andaikan p_2 proyeksi dari x_3 pada $S(x_1, x_2) = S(u_1, u_2)$, maka $p_2 = \langle x_3, u_1\rangle u_1 + \langle x_3, u_2\rangle u_2$, dan kita bentuk: $u_3 = (x_3 - p_2)/\|x_3 - p_2\|$.
Demikian seterusnya untuk u_4, u_5, ..., u_n, sehingga terbentuk $\{u_1, u_2, ..., u_n\}$.

Teorema 4.6.1 (Proses Gram-Schmidt).

Andaikan $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ adalah basis untuk ruang perkalian dalam V. Andaikan $u_1 = x_1/\|x_1\|$, dan didefinisikan u_2, ..., u_n dengan

$$u_{k+1} = (x_{k+1} - p_k)/\|x_{k+1} - p_k\|$$

untuk $k = 1, ..., n - 1$.

di mana $$p_k = \langle x_{k+1}, u_1\rangle u_1 + \langle x_{k+1}, u_2\rangle u_2 + \dots + \langle x_{k+1}, u_k\rangle u_k$$

adalah proyeksi dari x_{k+1} pada $S(u_1, u_2, ..., u_k)$. Maka himpunan $\{u_1, u_2, ..., u_k\}$ adalah basis ortonormal untuk V.

Bukti:

Kita buktikan dengan induksi matematis.

Telah kita lihat di depan bahwa $S(u_1) = S(x_1)$.

Andaikan u_1, u_2, ..., u_k telah dibangun sedemikian hingga $\{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ adalah suatu himpunan ortonormal dan $S(u_1, u_2, \ldots, u_k) = S(x_1, x_2, \ldots, x_k)$.

Karena p_k kombinasi linear dari u_i, $(1 \le i \le k)$ maka $p_k \in S(x_1, \ldots, x_k)$ dan $x_{k+1} - p_k \in S(x_1, \ldots, x_{k+1})$, di mana $x_{k+1} - p_k = x_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} c_i x_i$.

Karena $x_1, \ldots, x_{k+1}$ independen linear, maka $x_{k+1} - p_k \neq 0$, dan (dengan teorema 4.5.5) ortogonal pada setiap u_i, $(1 \le i \le k)$. Jadi $\{u_1, u_2, \ldots, u_{k+1}\}$ suatu himpunan ortonormal dalam $S(x_1, \ldots, x_{k+1})$.

Karena $u_1, \ldots, u_{k+1}$ independen linear, maka mereka membentuk suatu basis untuk $S(x_1, \ldots, x_{k+1})$, dan akibatnya $S(u_1, \ldots, u_{k+1}) = S(x_1, \ldots, x_{k+1})$.

Jadi terbukti bahwa $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ suatu basis ortonormal untuk V. ■

Contoh 4.6.1.

Andaikan $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 6 \end{bmatrix}$.

Kita cari suatu basis ortonormal untuk ruang kolom A terhadap perkalian-skalar pada $\mathbb{R}^n$.

Jawaban:

Andaikan x_1, x_2 dan x_3 masing-masing menyatakan vektor-vektor kolom A.

Bentuk eselon baris dari matriks A adalah:

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ketiga vektor kolom U bersesuaian dengan elemen 1 terdepan, sehingga vektor-vektor kolom A tersebut merupakan basis untuk ruang kolom A.

Proses Gram-Schmidt kita gunakan untuk membentuk suatu basis ortonormal, yaitu

(4) $u_1 = x_1/\|x_1\| = \frac{1}{2}x_1 = (1/2,\ 1/2,\ 1/2,\ 1/2)^T.$

$p_1 = (x_2 \cdot u_1)u_1 = 3u_1.$

(5) $x_2 - p_1 = x_2 - 3u_1 = (-1/2,\ 1/2,\ 1/2,\ -1/2)^T.$

(6) $u_2 = (x_2 - p_1)/\|x_2 - p_1\|$

$= (-1/2,\ 1/2,\ 1/2,\ -1/2)^T.$

$p_2 = (x_3 \cdot u_1)u_1 + (x_3 \cdot u_2)u_2 = 6u_1 - 2u_2.$

(7) $x_3 - p_2 = x_3 - 6u_1 + 2u_2 = (-2,\ 1,\ -1,\ 2)^T.$

(8) $u_3 = (x_3 - p_2)/\|x_3 - p_2\|$

$= (1/\sqrt{10})(-2,\ 1,\ -1,\ 2)^T.$

Teorema 4.6.2 (Faktorisasi Q R*).*

Jika A adalah suatu matriks m x n dengan rank n, maka A dapat difaktorkan menjadi suatu hasil kali Q R, di mana Q adalah suatu mariks m x n dengan kolom-kolom ortonormal (dengan perkalian-skalar sebagai perkalian-dalamnya) dan R suatu matriks segitiga atas n x n yang invertible (mempunyai invers).

Bukti:

Andaikan x_1, x_2, ..., x_n adalah vektor-vektor kolom dari A. Andaikan $\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_{n-1}$ didefinisikan seperti pada teorema 4.6.1 dan andaikan $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ adalah basis ortonormal dari R(A) yang didapatkan dari proses Gram-Schmidt. Didefinisikan:

$$\alpha_{11} = \|\mathbf{x}_1\|$$

$$\alpha_{kk} = \|\mathbf{x}_k - \mathbf{p}_{k-1}\| \quad \text{untuk } k = 2, \ldots, n.$$

dan $$\alpha_{ik} = \mathbf{x}_k \cdot \mathbf{u}_i \quad \text{untuk } i = 1, \ldots, k-1 \text{ dan } k = 2, \ldots, n.$$

Dengan proses Gram-Schmidt di dapatkan:

$$\alpha_{11}\mathbf{u}_1 = \mathbf{x}_1$$

$$\alpha_{kk}\mathbf{u}_k = \mathbf{x}_k - \alpha_{1k}\mathbf{u}_1 - \alpha_{2k}\mathbf{u}_2 - \ldots - \alpha_{k-1,k}\mathbf{u}_{k-1} \quad \text{untuk } k = 2, \ldots, n.$$

atau dapat kita tuliskan dalam bentuk:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1 &= \alpha_{11}\mathbf{u}_1 \\ \mathbf{x}_2 &= \alpha_{12}\mathbf{u}_2 + \alpha_{22}\mathbf{u}_2 \\ &\vdots \\ \mathbf{x}_n &= \alpha_{1n}\mathbf{u}_1 + \ldots + \alpha_{nn}\mathbf{u}_n. \end{aligned}$$

Jika kedua ruas pada setiap persamaan di atas kita transpos dan sistem yang dihasilkan kita tulis dalam persamaan matriks, maka

$$A^T = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1^T \\ \mathbf{x}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \ldots & 0 \\ \vdots & & & \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \ldots & \alpha_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^T \\ \mathbf{u}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{u}_n^T \end{bmatrix}.$$

Jika kedua ruas persamaan matriks tersebut kita transpos lagi, maka kita dapatkan

$$A = (u_1, u_2, \ldots, u_n)\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ 0 & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \ldots & \alpha_{nn} \end{bmatrix} = Q\ R.$$

Kolom-kolom dari Q adalah vektor-vektor ortonormal u_1, u_2, ..., u_n, dan R adalah suatu matriks segitiga atas n x n dengan elemen-elemen diagonal utama $\alpha_{kk} \neq 0$ untuk k = 1, 2, ..., n. Maka $\det(R) = \alpha_{11}.\alpha_{22}\ldots\alpha_{nn} \neq 0$. Menurut teorema 2.3.5: matriks R adalah non singular (invertibel). ■

Contoh 4.6.2.

Faktorkan matriks A pada contoh 4.6.1 menjadi suatu hasil kali Q R!

Jawaban:

Menurut (4): $2u_1 = x_1$,

menurut (5) dan (6): $1u_2 = x_2 - 3u_1$,

menurut (7) dan (8): $\sqrt{10}u_3 = x_3 - 6u_1 + 2u_2$.

Penyelesaian sistem persamaan di atas untuk x_1, x_2 dan x_3 adalah: $x_1 = 2u_1$

$x_2 = 3u_1 + u_2$

$x_3 = 6u_1 - 2u_2 + \sqrt{10}u_3$,

sehingga di dapatkan

$$Q = (u_1, u_2, u_3) = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & -2/\sqrt{10} \\ 1/2 & 1/2 & 1/\sqrt{10} \\ 1/2 & 1/2 & -1/\sqrt{10} \\ 1/2 & -1/2 & 2/\sqrt{10} \end{bmatrix}$$

dan

$$R = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & \sqrt{10} \end{bmatrix}.$$

Teorema 4.6.3.

Jika A adalah matriks m x n dengan rank n, maka penyelesaian untuk masalah kuadrat terkecil $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ adalah $\hat{\mathbf{x}} = R^{-1} Q^T \mathbf{b}$, di mana Q dan R adalah matriks-matriks faktor dari matriks A (teorema 4.6.2). Penyelesaian $\hat{\mathbf{x}}$ dapat diperoleh dengan menggunakan substistusi balik untuk menyelesaikan $R\mathbf{x} = Q^T \mathbf{b}$.

Bukti:

Menurut teorema 4.4.2 penyelesaian untuk masalah kuadrat terkecil $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, adalah $\hat{\mathbf{x}}$ yang merupakan penyelesaian untuk persamaan normal $A^T A\mathbf{x} = A^T \mathbf{b}$. Jika A difaktorkan menjadi hasil kali Q R, maka persamaan di atas menjadi $(Q R)^T Q R \mathbf{x} = (Q R)^T \mathbf{b}$ atau

$$R^T (Q^T Q) R \mathbf{x} = R^T Q^T \mathbf{b}.$$

Karena Q mempunyai kolom-kolom ortonormal, maka $Q^T Q = I$, sehingga persamaan di atas menjadi $R^T R\mathbf{x} = R^T Q^T \mathbf{b}$. Karena R^T invertible, maka $R\mathbf{x} = Q^T \mathbf{b}$, atau $\mathbf{x} = R^{-1} Q^T \mathbf{b}$. Karena matriks R adalah suatu matriks segitiga atas, maka persamaan $R\mathbf{x} = Q^T \mathbf{b}$ dapat diselesaikan untuk $\mathbf{x}$ dengan cara substitusi balik. ■

Contoh 4.6.3.

Carilah penyelesaian kuadrat terkecil untuk

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Jawaban:

Matriks koefisien dari sistem ini telah difaktorkan menjadi hasil kali Q R dalam contoh 4.6.2

$$Q^T \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -2/\sqrt{10} & 1/\sqrt{10} & -1/\sqrt{10} & 2/\sqrt{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -\sqrt{10} \end{bmatrix}.$$

Penyelesaian kuadrat terkecil dari sistem persamaan di atas adalah penyelesaian dari persamaan $R\mathbf{x} = Q^T\mathbf{b}$, yaitu persamaan

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & \sqrt{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -\sqrt{10} \end{bmatrix}$$

Sistem persamaan ini dapat diselesaikan dengan substitusi balik, sehingga diperoleh

$$(x_1,\ x_2,\ x_3) = (11,\ -5,\ -1).$$

Proses Gram-Schmidt di atas seringkali tidak memberikan hasil yang tepat, terutama apabila dalam pengerjaannya digunakan perhitungan numeris dengan ketelitian berhingga. Hal ini disebabkan adanya pembulatan dalam penghitungan $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, ..., $\mathbf{u}_n$ tersebut. Hasil yang lebih akurat dapat diperoleh dengan menggunakan *Proses Gram-Schmidt yang dimodifikasikan*. Dalam proses ini, vektor u_1 dibangun sama seperti pada proses Gram-Schmidt sebelumnya, yaitu:

$$u_1 = x_1/\|x_1\|.$$

Vektor-vektor x_2, x_3, ..., x_n kemudian kita modifikasi sedemikian hingga ortogonal pada u_1, yaitu dengan mengurangi setiap vektor x_k dengan proyeksi dari x_k pada u_1, yang menghasilkan

$$x_k^{(1)} = x_k - \langle u_1, x_k \rangle u_1, \qquad k = 2, 3, \ldots, n.$$

Vektor u_2 kita dapatkan dengan:

$$u_2 = x_2^{(1)}/\|x_2^{(1)}\|.$$

Vektor u_2 sudah ortogonal pada u_1.

Kemudian vektor-vektor $x_3^{(1)}$, $x_4^{(1)}$, ..., $x_n^{(1)}$ kita modifikasi sedemikian hingga ortogonal pada u_2, yaitu:

$$x_k^{(2)} = x_k^{(1)} - \langle u_2, x_k^{(1)} \rangle u_2, \qquad k = 3, 4, \ldots, n.$$

Demikian seterusnya dengan cara yang sama proses dilanjutkan untuk u_3, ..., u_n. Pada langkah terakhir cukup kita tetapkan:

$$u_n = x_n^{(n-1)}/\|x_n^{(n-1)}\|.$$

Proses di atas dapat diringkas dalam algoritma berikut.

Algoritma 4.6.4 (Proses Gram-Schmidt yang dimodifikasikan).

Untuk k = 1, 2, ..., n ditetapkan

$\alpha_{kk} = \|x_{kk}\|$ dan

$u_{kk} = x_k/\alpha_{kk}$

Untuk j = k + 1, k + 2, ..., n ditetapkan

$\alpha_{kj} = \langle u_k, x_j \rangle$ dan

$x_j = x_j - \alpha_{kj} u_k$.

Jika proses ini diterapkan pada vektor-vektor kolom dari suatu matriks A dengan ordo m x n dan mempunyai rank n, maka kita dapat memperoleh suatu faktorisasi Q R dari matriks A. Jika $r_{ij} = \begin{cases} \alpha_{ij} & \text{jika } i \le j \\ 0 & \text{jika } i > j \end{cases}$ dan $Q = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$, $R = (r_{ij})$ maka $A = Q\,R$.

Contoh 4.6.4.

Kita tentukan suatu basis ortonormal untuk subruang dari $\mathbb{R}^4$ yang direntang oleh vektor-vektor $\mathbf{x}_1 = (1, 1, 0, 1)^T$, $\mathbf{x}_2 = (1, -2, 0, 0)^T$ dan $\mathbf{x}_3 = (1, 0, -1, 2)^T$, di mana perkalian-dalamnya adalah perkalian skalar, dengan ketelitian sampai dengan 9 tempat desimal.

Dengan menggunakan proses Gram-Schmidt kita dapatkan:

$\mathbf{u}_1 = \mathbf{x}_1/\|\mathbf{x}_1\|$

$\quad = (0.577350269, 0.577350269, 0, 0.577350269)^T$

$\mathbf{p}_1 = (\mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 = -0.577350269\mathbf{u}_1$

$\quad = (0.333333333, 0.333333333, 0, 0.333333333)^T$

$\mathbf{x}_2 - \mathbf{p}_1 = (1.333333333, -1,666666667, 0, 0.333333333)^T$

$\mathbf{u}_2 = (\mathbf{x}_2 - \mathbf{p}_1)/\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{p}_1\|$

$\quad = (0.6172134, -0.77151675, 0, 0.15430335)^T$

$\mathbf{p}_2 = (\mathbf{x}_3 \cdot \mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 + (\mathbf{x}_3 \cdot \mathbf{u}_2)\mathbf{u}_2$

$\quad = 1.732050807\mathbf{u}_1 + 0.9258201\mathbf{u}_2$

$\quad = (1.57142857, 0.285714284, 0, 1.141857142)^T$

$\mathbf{x}_3 - \mathbf{p}_2 = (-0.571428571, 0.285714284, -1, 0.858142858)^T$

$\mathbf{u}_3 = (\mathbf{x}_3 - \mathbf{p}_2)/\|\mathbf{x}_3 - \mathbf{p}_2\|$

$\quad = (-0.390223316, -0.195101657, -0.682855804,$

$\qquad 0.585987831)^T$.

Jika kita gunakan proses Gram-Schmidt yang dimodifikasi maka kita dapatkan:

$u_1 = (0.577350269,\ 0.577350269,\ 0,\ 0.577350269)^T$

$x_2^{(1)} = x_2 - (u_1 \cdot x_2)u_1 = x_2 - p_1$, sehingga

$u_2 = x_2^{(1)}/\|x_2^{(1)}\| = (x_2 - p_1)/\|x_2 - p_1\|$

$= (0.6172134,\ -0.77151675,\ 0,\ -0.15430335)^T$

$x_3^{(1)} = x_3 - (u_1 \cdot x_3)u_1 = x_3 - 0.999999999u_1$

$= (1 \times 10^{-9},\ -0.999999999,\ -1,\ 1.000000001)^T$

$x_3^{(2)} = x_3^{(1)} - (u_3 \cdot x_3^{(1)})u_1 = x_3^{(1)} - 0,9258201u_2$

$= (-0.57142857,\ -0.285714284,\ -1,\ 0.857142858)^T$

$u_3 = x_3^{(2)}/\|x_3^{(2)}\|$

$= (-0.390360028,\ -0.195180013,\ -0.683130051,$

$0.585540044)^T$.

Dari hasil di atas dapat kita lihat bahwa:

dengan proses Gram-Schmidt: $u_1 \cdot u_3 = 0.000394249$

$u_2 \cdot u_3 = 0.000010536$

sedangkan dengan proses Gram-Schmidt yang dimodifikasikan: $u_1 \cdot u_3 = 2 \times 10^{-9}$

$u_2 \cdot u_3 = -6.52 \times 10^{-10}$.

Jadi dengan proses Gram-Schmidt yang dimodifikasikan kita dapat memperoleh hasil yang lebih akurat.

BAB V

KESIMPULAN

Suatu himpunan tak kosong V bersama dengan operasi penjumlahan dan perkalian dengan skalar yang didefinisikan pada V, dan memenuhi aksioma-aksioma tertentu, disebut ruang vektor. Setiap elemen dalam ruang vektor disebut vektor. Subruang dari suatu ruang vektor V adalah suatu himpunan bagian tak kosong dari V yang tertutup terhadap operasi penjumlahan dan perkalian dengan skalar yang didefinisikan pada V. Subruang sendiri merupakan ruang vektor dengan operasi penjumlahan dan perkalian dengan skalar pada V. Jika A adalah matriks m x n berelemen skalar, maka himpunan semua penyelesaian untuk sistem $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, yang disebut dengan ruang null dari A (dilambangkan dengan N(A)), merupakan subruang dari $\mathbb{R}^n$.

Kombinasi linear dari vektor-vektor $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ dalam ruang vektor V adalah suatu jumlahan dengan bentuk $\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \ldots + \alpha_n\mathbf{v}_n$, di mana $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ adalah skalar. Himpunan semua kombinasi linear dari $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$, yang disebut rentang dari $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$, merupakan subruang dari V. Apabila rentang dari $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ berimpit dengan V, maka $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ disebut himpunan perentang untuk V. Vektor-vektor $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ dalam ruang vektor V dikatakan dependen linear jika ada skalar-skalar $c_1, c_2, \ldots, c_n$ yang tidak semuanya sama dengan nol sedemikian hingga $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots, c_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$. Apabila persamaan tersebut dipenuhi hanya bila skalar-skalar $c_1, c_2, \ldots, c_n$ semuanya sama dengan nol, maka $\mathbf{v}_1$,

v_2, ..., v_n dikatakan independen linear. Jika v_1, v_2, ..., v_n independen linear dan merentang V, maka {v_1, v_2, ..., v_n} adalah himpunan perentang minimal untuk V. Sebaliknya jika {v_1, v_2, ..., v_n} adalah himpunan perentang minimal untuk V, maka v_1, v_2, ..., v_n independen linear. Himpunan vektor-vektor {v_1, v_2, ..., v_n} dalam ruang vektor V disebut basis untuk V bhb vektor-vektor tersebut independen linear dan merentang V. Banyaknya vektor dalam basis untuk suatu ruang vektor adalah sama, dan banyaknya vektor dalam basis ini disebut dimensi dari ruang vektor tersebut.

Subruang dari $\mathbb{R}^{1xn}$ yang direntang oleh vektor-vektor baris dari suatu matriks A yang berordo m x n dan berelemen skalar, disebut ruang baris dari A sedangkan subruang dari $\mathbb{R}^m$ yang direntang oleh vektor-vektor kolom dari A disebut ruang kolom dari A (dilambangkan dengan R(A)). Dimensi dari ruang baris dari suatu matriks disebut rank matriks itu. Sistem persamaan A $\mathbf{x}$ = $\mathbf{b}$, dimana A adalah matriks m x n, konsisten untuk setiap $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ bhb vektor-vektor kolom A merentang $\mathbb{R}^m$. Dimensi ruang baris dari suatu matriks adalah sama dengan dimensi ruang kolomnya. Jika A adalah suatu matriks m x n, maka rank A + dimensi N(A) = n.

Dua buah vektor dalam $\mathbb{R}^n$ dikatakan saling ortogonal jika perkalian-skalar kedua vektor tersebut sama dengan nol. Dua subruang X dan Y dalam $\mathbb{R}^n$ dikatakan saling ortogonal jika $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0$ untuk setiap $\mathbf{x} \in$ X dan $\mathbf{y} \in$ Y. Himpunan semua vektor dalam $\mathbb{R}^n$ yang ortogonal pada setiap vektor dalam subruang Y dalam $\mathbb{R}^n$ disebut komplemen ortogonal dari Y (dilambangkan dengan $Y^{\perp}$) dan merupakan subruang dalam $\mathbb{R}^n$. Jika S adalah subruang dalam $\mathbb{R}^n$, maka dimensi S + dimensi $S^{\perp}$ = n, $\mathbb{R}^n$ merupakan jumlahan langsung dari S dan $S^{\perp}$, dan $(S^{\perp})^{\perp} = S$. N(A) dan R(A^T) adalah komplemen ortogonal satu sama lain, demikian juga N(A^T) dan R(A).

Vektor $\hat{\mathbf{x}}$ merupakan penyelesaian masalah kuadrat terkecil A $\mathbf{x}$ = $\mathbf{b}$ bhb $\mathbf{p}$ = A $\hat{\mathbf{x}}$ adalah vektor dalam R(A) yang paling dekat dengan $\mathbf{b}$ bhb $\mathbf{b} - \mathbf{p} \in R(A)^{\perp}$. Vektor $\mathbf{p}$ ini disebut proyeksi $\mathbf{b}$ pada R(A). Penyelesaian masalah kuadrat terkecil A $\mathbf{x}$ = $\mathbf{b}$ dapat dilakukan dengan menyelesaikan persamaan $A^T A \mathbf{x} = A^T \mathbf{b}$. Jika A adalah matriks m x n dengan rank n, maka persamaan $A^T A \mathbf{x} = A^T \mathbf{b}$ mempunyai penyelesaian tunggal $\hat{\mathbf{x}} = (A^T A)^{-1} A^T \mathbf{b}$, yang merupakan penyelesaian tunggal untuk masalah kuadrat terkecil A $\mathbf{x}$ = $\mathbf{b}$.

Ruang vektor yang dilengkapi dengan suatu perkalian-dalam disebut ruang perkalian-dalam. Dua buah vektor dalam suatu ruang perkalian-dalam dikatakan saling ortogonal jika perkalian-dalam kedua vektor tersebut sama dengan nol. Himpunan ortogonal adalah himpunan vektor-vektor dalam suatu ruang perkalian-dalam yang sepasang-sepasang saling ortogonal. Himpunan ortogonal dari vektor-vektor satuan disebut himpunan ortonormal. Himpunan ortonormal yang juga merupakan basis disebut basis ortonormal. Jika vektor-vektor kolom dari matriks A yang berordo m x n merupakan suatu himpunan ortonormal terhadap perkalian-skalar pada $\mathbb{R}^n$, maka $A^T A = I$ dan penyelesaian untuk masalah kuadrat terkecil adalah $\hat{\mathbf{x}} = A^T \mathbf{b}$. Jika $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ adalah suatu basis ortonormal untuk suatu subruang S dalam ruang perkalian-dalam V dan vektor

$p = \sum_{i=1}^{n} \langle x, x_i \rangle x$ untuk setiap i, maka $p - x \in S^{\perp}$, di mana x adalah sebarang vektor dalam V. Vektor p ini disebut proyeksi dari x pada S. Jika $x \notin S$, maka p adalah vektor dalam S yang paling dekat dengan x.

Proses Gram-Schmidt yang didasarkan atas konsep proyeksi suatu vektor pada suatu subruang, digunakan untuk membangun suatu basis ortonormal untuk suatu ruang perkalian-dalam jika diberikan suatu basis untuk ruang perkalian-dalam tersebut. Dengan menggunakan proses ini, suatu matriks A yang berordo m x n dan berelemen skalar dapat difaktorkan menjadi suatu hasil kali Q R, di mana Q adalah suatu matriks m x n dengan kolom-kolom ortonormal terhadap perkalianskalar pada $\mathbb{R}^n$ dan R suatu matriks segitiga atas n x n yang invertible. Jika A adalah matriks m x n dengan rank n, maka penyelesaian untuk masalah kuadrat terkecil $A x = b$ adalah $\hat{x} = R^{-1} Q^T b$, di mana Q dan R adalah matriks-matriks faktor dari matriks A di atas. Penyelesaian $\hat{x}$ dapat diperoleh dengan menggunakan substitusi balik untuk menyelesaikan $R x = Q^T b$. Dengan menggunakan proses Gram-Schmidt yang dimodifikasikan akan didapat hasil yang lebih akurat, dimana dalam pengerjaannya digunakan perhitungan numeris dengan ketelitian berhingga.

DAFTAR PUSTAKA

1. Anton, Howard, *Aljabar Linear Elementer*, edisi kelima, Jakarta: Penerbit Erlangga, 1988.
2. Birkhoff, and McLane, *A Survey of Modern Algebra*, third edition, New York: The Macmillan Company, 1965.
3. Cullen, Carles G., *Aljabar Linear dengan Penerapannya*, Jakarta: Gramedia Pustaka Utama, 1993.
4. Friedberg, Stephen H., and Insel Arnold J., *Introduction to Linear Algebra with Applications*, New Jersey: Prentice-Hall, 1986.
5. Lang, Serge, *Linear Algebra*, second edition, New York: Addision-Wesley Publishing Company, 1970.
6. Leon, Steven J., *Linear Algebra with Applications*, second edition, New York: Macmillan Publishing Company, 1986.
7. Moore, Hal G., and Yaqub Adil, *A First Course in Linear Algebra*, second edition, New York: HarperCollins Publishers Inc, 1992.