NILAI EIGEN DAN VEKTOR EIGEN SERTA BEBERAPA PENERAPANNYA

SKRIPSI

Diajukan untuk memenuhi salah satu syarat
memperoleh gelar Sarjana Pendidikan
Program Studi Pendidikan Matematika

Disusun Oleh :

PENI KURNIATI

NIM : 91414013
NIRM : 911052010501120011

PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA
JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
UNIVERSITAS SANATA DHARMA
YOGYAKARTA

1997

SKRIPSI

NILAI EIGEN DAN VEKTOR EIGEN SERTA BEBERAPA PENERAPANNYA

Disusun Oleh :

PENI KURNIATI

NIM : 91414013

NIRM : 911052010501120011

Telah disetujui oleh :

Pembimbing

Dr. F. Susilo, S.J.

Tanggal 11 - 9 - 1997

SKRIPSI

NILAI EIGEN DAN VEKTOR EIGEN SERTA BEBERAPA PENERAPANNYA

Yang dipersiapkan dan disusun oleh :

PENNI KURNIATI

NIM : 91414013
NIRM : 911052010501120011

Telah dipertahankan di depan Dewan Penguji
Pada tanggal 28 Agustus 1997
dan dinyatakan telah memenuhi syarat

SUSUNAN DEWAN PENGUJI

		Nama Lengkap	Tanda Tangan
Ketua	:	Drs. Fr. Y. Kartika Budi, M.Pd.	....
Sekretaris	:	Dr. St. Suwarsono	....
Anggota	:	Dr. F. Susilo, S.J.	....
		Drs. St. Susento, M.Si.	....
		Dra. Maria Agustiani, M.Si.	....

Yogyakarta, ... 1997
Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan
Universitas Sanata Dharma
Dekan

Dr. Paulus Suparno, S.J., M.S.T.

KATA PENGANTAR

Puji dan syukur penulis panjatkan kepada Tuhan Yang Maha Pengasih, karena atas berkatNyalah skripsi ini dapat penulis selesaikan. Adapun skripsi ini disusun untuk memenuhi salah satu persyaratan memperoleh gelar sarjana pendidikan pada Program Studi Pendidikan Matematika di Universitas Sanata Dharma.

Penyusunan skripsi ini tentu tidak akan terwujud tanpa petunjuk, bimbingan dan bantuan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, pada kesempatan ini penulis ingin mengucapkan terima kasih kepada

1. Drs. Fr. Y. Kartika Budi, M. Pd. selaku Ketua Jurusan PMIPA Universitas Sanata Dharma.
2. Drs. St. Susento, M. Si. selaku Ketua Program Studi Pendidikan Matematika.
3. Dr. F. Susilo, S.J. selaku dosen pembimbing yang telah memberikan dorongan dan bimbingan selama proses penyusunan skripsi ini dengan tekun, sabar dan bijaksana.
4. Kedua orang tua dan adik-adik terkasih yang telah memberikan dukungan, semangat dan doa, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.
5. Dra. Sr. Surani, CB dan Yayasan Tarakanita / PKB yang telah memberikan kesempatan pada penulis untuk belajar di Universitas Sanata Dharma.

6. Para sahabat dan semua pihak yang telah membantu dalam penyusunan skripsi ini.

Akhirnya penulis menyadari bahwa skripsi masih jauh dari sempurna. Oleh karena itu, penulis sangat mengharapkan saran dan kritik yang membangun dari para pembaca demi perbaikan skripsi ini.

Penulis

DAFTAR ISI

ABSTRAK

Suatu vektor **x** dalam $\mathbb{R}^n$ adalah vektor eigen dari matriks bujursangkar A berordo n yang bersesuaian dengan nilai eigen λ bila dan hanya bila **x** merupakan penyelesaian non-trivial dari sistem persamaan linear $(\lambda I-A)\mathbf{x} = 0$, di mana I adalah matriks identitas yang berordo n. Himpunan penyelesaian sistem persamaan $(\lambda I-A)\mathbf{x} = 0$ ini merupakan subruang dari $\mathbb{R}^n$. Subruang ini dinamakan ruang eigen matriks A yang bersesuaian dengan nilai eigen λ. Vektor-vektor eigen suatu matriks yang bersesuaian dengan nilai eigen berbeda membentuk himpunan vektor-vektor yang bebas linear.

Suatu matriks bujursangkar A berordo n dapat didiagonalkan bila dan hanya bila A mempunyai n vektor eigen yang bebas linear. Selanjutnya, suatu matriks bujursangkar dapat didiagonalkan secara ortogonal bila dan hanya bila matriks tersebut adalah matriks simetri.

Penerapan nilai eigen dan vektor eigen antara lain terdapat pada penyelesaian sistem persamaan diferensial, dalam pembahasan mengenai bentuk kuadrat serta persamaan kuadrat dalam dua variabel.

ABSTRACT

A vector **x** in $\mathbb{R}^n$ is an eigenvector of a square matrix A_n corresponding to the eigenvalue λ if and only if **x** is a non-trivial solution of the system of linear equation $(\lambda I-A)\mathbf{x} = 0$, where I is the identity matrix. The set of all solutions of this equation system $(\lambda I-A)\mathbf{x} = 0$ is a subspace of $\mathbb{R}^n$. This subspace is called the eigenspace of A corresponding to the eigenvalue λ. The eigenvectors of a matrix corresponding to distinct eigenvalues form a set of linearly independent vectors.

A square matrix A_n is diagonalizable if and only if A has n linearly independent eigenvectors. Furthermore, the square matrix is orthogonally diagonalizable if and only if it is a symmetric matrix.

The applications of eigenvalues and eigenvectors are found in the solution of a system of differential equations, in quadratic forms and quadratic equations in two variables.

BAB I

PENDAHULUAN

1. Latar Belakang Masalah

Masalah nilai eigen dan vektor eigen merupakan salah satu topik penting dalam Aljabar Linear. Masalah ini menarik untuk dipelajari mengingat penerapannya yang cukup luas, seperti dalam Persamaan Diferensial, Geometri Analitik dan Teori Probabilitas.

Dalam Persamaan Diferensial, nilai eigen dan vektor eigen dapat digunakan untuk menyelesaikan suatu sistem persamaan diferensial. Sedang dalam Geometri Analitik nilai eigen dan vektor eigen dapat digunakan untuk mengenali grafik suatu persamaan kuadrat dengan dua variabel. Penggunaan ini dapat diperluas untuk persamaan dengan tiga variabel. Dalam mempelajari bentuk kuadrat, nilai eigen dan vektor eigen dapat membantu untuk menentukan nilai maksimum dan nilai minimum suatu bentuk kuadrat.

Dalam skripsi ini penulis mencoba membahas nilai eigen dan vektor eigen yang berkaitan dengan suatu matriks bujursangkar berikut beberapa penerapannya.

2. Perumusan Masalah

Pokok permasalahan yang akan dibahas dalam skripsi ini dapat dirumuskan sebagai berikut:

a. Apakah yang dimaksud dengan nilai eigen dan vektor eigen suatu matriks bujursangkar serta bagaimana cara menentukannya?

b. Apakah yang dimaksud dengan pendiagonalan matriks?

c. Bagaimanakah ciri-ciri matriks yang dapat didiagonalkan?

d. Bagaimanakah penerapan nilai eigen dan vektor eigen dalam penyelesaian sistem persamaan diferensial, bentuk kuadrat dan juga dalam Geometri Analitik?

3. Tujuan Penulisan

Tujuan dari penulisan ini adalah memahami pengertian nilai eigen dan vektor eigen suatu matriks bujursangkar, memahami masalah pendiagonalan matriks dan dapat mengenali sifat-sifat matriks yang dapat didiagonalkan. Tujuan lainnya adalah dapat menerapkan nilai eigen dan vektor eigen dalam penyelesaian sistem persamaan diferensial, dalam menentukan grafik persamaan kuadrat dengan dua variabel dan dalam menentukan nilai maksimum dan nilai minimum suatu bentuk kuadrat.

4. Metode Penulisan

Metode yang digunakan penulis dalam penyusunan skripsi ini adalah metode studi pustaka.

5. Pembatasan Masalah

Dalam skripsi ini penulis hanya akan membahas nilai eigen dan vektor eigen dari suatu matriks bujursangkar yang elemen-elemennya bilangan real. Tentang nilai eigen dan vektor eigen suatu transformasi linear tidak akan penulis bahas.

Ada dua cara menghitung nilai eigen dan vektor eigen, yaitu secara aljabar dan numerik. Dalam skripsi ini penulis hanya akan membahas cara aljabar saja. Sedangkan mengenai penerapannya, penulis memilih beberapa dari penerapan yang ada, yaitu dalam penyelesaian sistem persamaan diferensial linear homogen orde satu dengan koefisien konstan, dalam menentukan nilai maksimum dan minimum suatu bentuk kuadrat, serta dalam menentukan grafik persamaan kuadrat dengan dua variabel.

BAB II
MATRIKS DAN SISTEM PERSAMAAN LINEAR

1. Matriks dan Operasi Matriks

Dalam bagian ini kita akan mengingat kembali pengertian tentang matriks, operasi-operasi pada matriks dan jenis-jenis matriks. Hal-hal tersebut harus kita pahami terlebih dahulu sebelum kita membahas nilai eigen dan vektor eigen.

Definisi 2.1.1.

Suatu susunan bilangan-bilangan berbentuk persegi panjang yang diatur dalam baris-baris dan kolom-kolom dinamakan *matriks*. Bilangan-bilangan dalam susunan tersebut dinamakan *elemen-elemen* dari matriks.

Contoh 2.1.1.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 4 \\ 4 & 7 & 6 \end{bmatrix}$$

Ordo suatu matriks dinyatakan dengan menyebutkan banyaknya baris dan banyaknya kolom yang terdapat dalam matriks tersebut. Jadi, jika suatu matriks terdiri atas m baris dan n kolom, maka matriks tersebut dikatakan berordo $m \times n$. Jika $m = n$, maka matriks itu dinamakan *matriks bujursangkar* berordo n.

Selanjutnya kita akan menggunakan huruf besar untuk menyatakan matriks dan huruf kecil untuk menyatakan elemen-elemen dari matriks. Dengan demikian, matriks dalam contoh 2.1.1 dapat kita tulis sebagai berikut :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 4 \\ 4 & 7 & 6 \end{bmatrix}$$

Sedangkan elemen baris ke-i kolom ke-j dari matriks A, kita nyatakan dengan lambang a_{ij}. Jadi secara umum jika A suatu matriks berordo $m \times n$, maka A dapat ditulis sebagai

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ atau } A = (a_{ij})_{m \times n}$$

Jika A matriks bujursangkar berordo n, maka elemen-elemen a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn} dikatakan berada pada diagonal utama. Suatu matriks bujursangkar dinamakan *matriks diagonal*, jika semua elemen di luar diagonal utama adalah nol, tetapi tidak semua elemen pada diagonal utamanya sama dengan nol. Matriks diagonal yang semua elemen diagonal utamanya sama dengan 1 dinamakan *matriks identitas* dan diberi lambang I. Jika kita ingin menekankan ordonya, maka kita tuliskan I_n untuk matriks identitas berordo n.

Suatu matriks yang semua elemennya sama dengan 0 dinamakan *matriks nol*. Matriks ini diberi lambang 0.

Dua buah matriks A dan B dikatakan sama, ditulis A = B, jika A dan B berordo sama dan setiap elemen yang seletak dalam kedua matriks tersebut sama.

Definisi 2.1.2.

Andaikan A dan B dua buah matriks yang ordonya sama, yaitu m × n, maka jumlahan matriks A dan B, ditulis A + B, adalah matriks C berordo m × n yang setiap elemennya merupakan jumlahan dari elemen A dan B yang seletak.

Jadi bila $A = (a_{ij})_{m\times n}$ dan $B = (b_{ij})_{m\times n}$, maka $A + B = C = (c_{ij})_{m\times n}$ di mana $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ untuk setiap i = 1, 2, ..., m dan j = 1, 2, ..., n.

Contoh 2.1.2.

Diberikan matriks-matriks sebagai berikut :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 7 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 9 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 7 \\ 4 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

Maka
$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 7 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 9 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+4 & 4+3 \\ 7+9 & 0+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 16 & 1 \end{bmatrix}$$

Sedangkan A + C dan B + C tidak didefinisikan.

Definisi 2.1.3.

Andaikan A suatu matriks dan c suatu skalar, maka cA adalah matriks yang diperoleh dengan mengalikan setiap elemen A dengan c.

Jadi bila $A = (a_{ij})_{mxn}$ dan c suatu skalar, maka $cA = c(a_{ij})_{mxn} = (ca_{ij})_{mxn}$ di mana i = 1, 2, ..., m dan j = 1, 2, ..., n.

Contoh 2.1.3.

Andaikan c = 2 dan $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

$$\text{maka } cA = 2\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2)(3) & (2)(2) & (2)(4) \\ (2)(1) & (2)(0) & (2)(2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6 & 4 & 8 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Andaikan B adalah suatu matriks, maka -B = (-1)B. Jika A dan B dua buah matriks yang ordonya sama, maka A - B didefinisikan sebagai A + (-B) = A + (-1)B. Namun, sebenarnya A - B dapat diperoleh secara langsung, yaitu dengan mengurangi setiap elemen A dari elemen B yang seletak.

Definisi 2.1.4.

Jika A matriks berordo m × r dan B matriks berordo r × n, maka hasil kali AB adalah matriks berordo m × n yang elemen-elemennya ditentukan sebagai berikut: untuk menentukan elemen baris i dan kolom j dari AB, pilihlah baris i dari matriks A dan kolom j dari matriks B. Kalikanlah elemen-elemen yang bersesuaian dari baris dan kolom tersebut dan kemudian jumlahkan hasil kali yang dihasilkan.

Jadi bila $A = (a_{ik})_{mxr}$ dan $B = (b_{kj})_{rxn}$, maka $AB = C = (c_{ij})_{mxn}$ di mana $c_{ij} = \sum_{k=1}^{r} a_{ik}\ b_{kj}$ untuk setiap $i = 1, 2, \ldots, m$ dan $j = 1, 2, \ldots, n$.

Contoh 2.1.4.

Diberikan matriks-matriks sebagai berikut :

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix}$. Maka $AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} (1)(1)+(2)(2) & (1)(2)+(2)(6) & (1)(4)+(2)(0) \\ (3)(1)+(4)(2) & (3)(2)+(4)(6) & (3)(4)+(4)(0) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 14 & 4 \\ 11 & 30 & 12 \end{bmatrix}$$

Sedangkan BA tidak didefinisikan, sebab banyaknya kolom dari matriks A tidak sama dengan banyaknya baris dari matriks B.

Contoh 2.1.5.

Diberikan matriks-matriks $C = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$ dan $D = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$.

Maka $CD = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1)(2)+(5)(3) & (1)(5)+(5)(6) \\ (0)(2)+(7)(3) & (0)(5)+(7)(6) \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 17 & 35 \\ 21 & 42 \end{bmatrix}$$

dan $DC = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 45 \\ 3 & 57 \end{bmatrix}$.

Contoh 2.1.5 menunjukkan bahwa perkalian matriks tidak bersifat komutatif.

Dalam hubungannya dengan perkalian matriks, matriks identitas mempunyai sifat yang istimewa. Andaikan A suatu matriks berordo m × n, maka $AI_n = A$ dan $I_mA = A$.

Contoh 2.1.6.

Jika diketahui $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$

maka $A\ I_3 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} a_{11}1+a_{12}0+a_{13}0 & a_{11}0+a_{12}1+a_{13}0 & a_{11}0+a_{12}0+a_{13}1 \\ a_{21}1+a_{22}0+a_{23}0 & a_{21}0+a_{22}1+a_{23}0 & a_{21}0+a_{22}0+a_{23}1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = A$

$I_2A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 1a_{11}+0a_{21} & 1a_{12}+0a_{22} & 1a_{13}+0a_{23} \\ 0a_{11}+1a_{21} & 0a_{12}+1a_{22} & 0a_{13}+1a_{23} \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = A$

Jadi $AI_3 = A$ dan $I_2A = A$.

Definisi 2.1.5.

Andaikan A adalah sebarang matriks berordo m × n, maka *transpos* A, ditulis A^t, adalah matriks berordo n × m yang kolom ke-i-nya merupakan baris ke-i dari A (i = 1, 2, ..., m).

Contoh 2.1.7.

Andaikan $A = \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 17 & -11 \end{bmatrix}$ maka $A^t = \begin{bmatrix} 3 & 17 \\ 9 & -11 \end{bmatrix}$

2. Sistem Persamaan Linear

Sebelum mempelajari sistem persamaan linear homogen, kita perlu memahami sistem persamaan linear berikut cara mencari penyelesaiannya. Salah satu cara untuk menyelesaikan sistem persamaan linear adalah dengan mereduksi matriks lengkapnya menjadi bentuk eselon baris atau eselon baris tereduksi. Dalam bagian ini kita akan mengingat kembali pengertian sistem persamaan linear berikut cara mereduksi matriks lengkap sistem tersebut menjadi bentuk eselon baris atau eselon baris tereduksi.

Definisi 2.2.1.

Suatu sistem m persamaan linear dengan n variabel x_1, x_2, ..., x_n adalah himpunan persamaan-persamaan yang dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \qquad (2.1) \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

di mana a_{ij} dan b_i merupakan konstanta-konstanta real untuk i = 1 ,2 , ..., m dan j = 1, 2,..., n dan

a_{ij} tidak semuanya sama dengan nol. Bilangan a_{ij} dinamakan *koefisien* dari sistem.

Sistem persamaan linear (2.1) dapat dinyatakan dalam bentuk perkalian matriks, yaitu

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_m \end{bmatrix}$$

atau disingkat AX = B, di mana A = $(a_{ij})_{mxn}$, X = $(x_1,x_2,\dots,x_n)^t$ dan B = $(b_1,b_2,\dots,b_m)^t$. Dalam hal ini, matriks A dinamakan *matriks koefisien* dari sistem. Jika pada matriks A ditambahkan satu kolom lagi sehingga menjadi

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ . & . & & . & . \\ . & . & & . & . \\ . & . & & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

maka matriks tersebut dinamakan *matriks lengkap* untuk sistem persamaan linear (2.1).

Suatu urutan bilangan $(c_1, c_2, \dots, c_n)$ dinamakan *penyelesaian* dari sistem persamaan linear, jika substitusi c_i untuk setiap x_i $(i = 1, 2, \dots, n)$ memenuhi semua persamaan linear dalam sistem. Himpunan semua penyelesaian sistem persamaan linear dinamakan *himpunan penyelesaian* dari sistem itu.

Tidak semua sistem persamaan linear mempunyai penyelesaian. Suatu sistem persamaan linear yang tidak mempunyai penyelesaian dikatakan *inkonsisten*. Sedangkan jika ada sekurang-kurangnya satu penyelesaian, maka sistem itu dikatakan *konsisten*. Akan ditunjukkan bahwa suatu sistem yang konsisten hanya dapat mempunyai tepat satu penyelesaian atau tak hingga banyak penyelesaian. Andaikan $AX = B$ adalah sistem persamaan linear yang mempunyai penyelesaian lebih dari satu, misalkan X_p dan X_q dengan $X_p \neq X_q$. Maka $AX_p = B$ dan $AX_q = B$, sehingga $AX_p - AX_q = 0$. Atau $A(X_p - X_q) = 0$. Misalkan $X_r = X_p - X_q$ dan c sebarang skalar, maka

$$\begin{aligned} A(X_p + cX_r) &= AX_p + A(cX_r) \\ &= AX_p + c(AX_r) \\ &= B + cA(X_p - X_q) \\ &= B + c0 = B + 0 = B \end{aligned}$$

Ini berarti bahwa $X_p + cX_r$ merupakan penyelesaian dari sistem persamaan linear $AX = B$. Karena c sebarang skalar, maka ada tak hingga banyak pilihan untuk c. Jadi sistem persamaan linear $AX = B$ mempunyai tak hingga banyak penyelesaian. Dengan demikian sistem persamaan linear yang mempunyai lebih dari satu penyelesaian pasti mempunyai tak hingga banyak penyelesaian. Atau dengan kata lain suatu sistem persamaan linear yang konsisten hanya dapat mempunyai tepat satu penyelesaian atau tak hingga banyak penyelesaian.

Dua buah sistem persamaan linear dikatakan *ekuivalen*, jika mempunyai himpunan penyelesaian yang sama. Suatu cara untuk menyelesaikan sistem persamaan linear adalah dengan mengubah sistem yang diberikan menjadi sistem lain yang ekuivalen dengan sistem semula tetapi yang lebih mudah diselesaikan. Untuk mendapatkan sistem lain yang ekuivalen dapat diterapkan operasi-operasi berikut ini :

1. Mengalikan suatu persamaan dengan konstanta tak nol.
2. Menukar tempat dua persamaan dalam sistem tersebut.
3. Mengganti suatu persamaan dengan hasil penjumlahan persamaan tersebut dan kelipatan persamaan lain.

Operasi-operasi di atas bersesuaian dengan operasi-operasi berikut yang dilakukan pada baris-baris matriks lengkap sistem, yaitu:

1. Mengalikan sebuah baris dengan konstanta tak nol.
2. Menukar tempat dua baris.
3. Mengganti suatu baris dengan hasil penjumlahan baris tersebut dan kelipatan baris lain.

Ketiga operasi ini dinamakan *operasi baris elementer.* Dengan menggunakan operasi baris elementer ini, kita dapat menyelesaikan suatu sistem persamaan linear, yaitu dengan mereduksi matriks lengkap sistem tersebut ke bentuk eselon baris atau bentuk eselon baris tereduksi. Prosedur untuk mereduksi suatu matriks ke bentuk eselon baris dinamakan *eliminasi Gauss.* Sedang prosedur untuk mereduksi matriks menjadi bentuk eselon baris tereduksi dinamakan *eliminasi Gauss-Jordan*.

Definisi 2.2.2.

Suatu matriks dikatakan berada dalam *bentuk eselon baris tereduksi*, jika memenuhi sifat-sifat berikut ini.

1. Setiap baris yang hanya terdiri dari bilangan nol terletak sesudah baris yang memuat elemen tak nol.
2. Pada baris yang memuat elemen tak nol, elemen tak nol pertama dalam baris tersebut adalah 1. Elemen 1 ini dinamakan 1 utama.
3. Pada setiap baris yang memuat elemen tak nol, elemen 1 utama pada baris tersebut terletak di kolom sebelah kanan kolom elemen 1 utama dari baris di atasnya.
4. Setiap elemen 1 utama merupakan satu-satunya elemen tak nol pada kolom tersebut.

Jika suatu matriks hanya memenuhi sifat 1, 2, dan 3, maka matriks tersebut dikatakan berada dalam *bentuk eselon baris*.

Contoh 2.2.1.

Diberikan matriks-matriks berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Matriks A dan B dikatakan berada dalam bentuk eselon baris tereduksi. Matriks C dikatakan berada dalam bentuk eselon baris.

Contoh 2.2.2.

Selesaikan sistem persamaan linear berikut ini dengan menggunakan eliminasi Gauss-Jordan!

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 8 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 3x_1 - 7x_2 + 4x_3 &= 10 \end{aligned} \qquad (2.2)$$

Jawab:

Matriks lengkap dari sistem (2.2) di atas adalah

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 8 \\ -1 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & -7 & 4 & 10 \end{bmatrix}$$

Kemudian matriks lengkap tersebut kita reduksi menjadi bentuk eselon baris tereduksi dengan menggunakan operasi-operasi baris elementer berikut:

1. Mengganti baris kedua dari matriks lengkap sistem dengan hasil penjumlahan baris tersebut dan baris pertama. Didapat matriks

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & -1 & 5 & 9 \\ 3 & -7 & 4 & 10 \end{bmatrix}$$

2. Mengganti baris ketiga dengan hasil penjumlahan baris tersebut dan -3 kali baris pertama. Didapat matriks

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & -1 & 5 & 9 \\ 0 & -10 & -2 & -14 \end{bmatrix}$$

3. Mengalikan baris kedua dengan -1. Didapat matriks

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & -5 & -9 \\ 0 & -10 & -2 & -14 \end{bmatrix}$$

4. Mengganti baris ketiga dengan hasil penjumlahan baris tersebut dan 10 kali baris kedua. Didapat matriks

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & -52 & -104 \end{bmatrix}$$

5. Mengalikan baris ketiga dengan -1/52. Didapat matriks

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

6. Mengganti baris pertama dengan hasil penjumlahan baris tersebut dan -1 kali baris kedua. Didapat matriks

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 & 17 \\ 0 & 1 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

7. Mengganti baris kedua dengan hasil penjumlahan baris tersebut dan 5 kali baris ketiga. Didapat matriks

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 & 17 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

8. Mengganti baris pertama dengan hasil penjumlahan baris tersebut dan -7 kali baris ketiga. Didapat matriks

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Matriks di atas berada dalam bentuk eselon baris tereduksi. Matriks tersebut bersesuaian dengan sistem persamaan linear berikut:

$$x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 3$$
$$0x_1 + x_2 + 0x_3 = 1$$
$$0x_1 + 0x_2 + x_3 = 2$$

yang ekuivalen dengan $x_1 = 3$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$.
Jadi (3, 1, 2) merupakan penyelesaian sistem persamaan linear (2.2).

Sistem persamaan linear dapat juga diselesaikan dengan menggunakan eliminasi Gauss, yaitu dengan mereduksi matriks lengkap sistem menjadi bentuk eselon baris. Selanjutnya, sistem persamaan linear yang bersesuaian dengan matriks eselon baris tersebut diselesaikan dengan cara yang dinamakan *substitusi balik.*

Contoh 2.2.3.

Selesaikan sistem persamaan linear dalam contoh 2.2.2 dengan menggunakan eliminasi Gauss!

Jawab:

Dari perhitungan dalam contoh 2.2.2, bentuk eselon baris matriks lengkap sistem yang didapat adalah

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Sistem persamaan linear yang bersesuaian dengan matriks di atas adalah

$$x_1 + x_2 + 2x_3 = 8 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2.3)$$

$$x_2 - 5x_3 = -9 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2.4)$$

$$x_3 = 2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2.5)$$

Kemudian digunakan substitusi balik dengan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Substitusikan persamaan (2.5) ke dalam persamaan (2.4). Didapat $x_2 - (5)(2) = -9$.

   atau $x_2 = 1$ .... (2.6)

2. Substitusikan persamaan (2.5) dan (2.6) ke dalam persamaan (2.3). Didapat $x_1 + 1 + (2)(2) = 8$ atau $x_1 = 3$

Jadi (3, 1, 2) merupakan penyelesaian dari sistem yang diberikan.

3. Sistem Persamaan Linear Homogen

Suatu sistem persamaan linear dikatakan *homogen*, jika setiap konstanta di ruas kanannya sama dengan nol. Bentuk umum sistem persamaan linear homogen yang terdiri atas m persamaan linear dengan n variabel adalah

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= 0 \qquad (2.7) \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= 0 \end{aligned}$$

dengan a_{ij} konstanta-konstanta real, untuk $i = 1, 2, \ldots, m$ dan $j = 1, 2, \ldots, n$ dan a_{ij} tidak semuanya sama dengan nol. Dengan notasi matriks, sistem persamaan linear homogen (2.7) dapat ditulis sebagai $AX = 0$ dengan $A = (a_{ij})_{m\times n}$, $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^t$ dan $0 = (0, 0, \ldots, 0)^t$.

Sistem persamaan linear homogen selalu merupakan sistem yang konsisten, sebab (0, 0, ..., 0) selalu merupakan penyelesaian sistem tersebut. Penyelesaian yang demikian dinamakan *penyelesaian trivial*. Jika sistem masih mempunyai penyelesaian lain, maka penyelesaian tersebut dinamakan *penyelesaian non-trivial*. Himpunan penyelesaian dari sistem persamaan linear homogen dinamakan *ruang penyelesaian*.

Suatu sistem persamaan linear homogen dapat mempunyai tak hingga banyak penyelesaian non-trivial atau satu penyelesaian saja, yaitu penyelesaian trivial.

Contoh 2.3.1.

Selesaikan sistem persamaan linear homogen di bawah ini!

$$\begin{aligned} x + 6y - 2z &= 0 \\ 2x - 4y + z &= 0 \end{aligned} \qquad (2.8)$$

Jawab:

Matriks lengkap dari sistem (2.8) adalah

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 & -2 & 0 \\ 2 & -4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Kita akan mereduksi matriks lengkap sistem (2.8) menjadi bentuk eselon baris tereduksi, dengan langkah-

langkah sebagai berikut:

1. Mengganti baris kedua dari matriks lengkap sistem dengan hasil penjumlahan baris tersebut dan -2 kali baris pertama. Diperoleh matriks

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 & -2 & 0 \\ 0 & -16 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

2. Mengalikan baris kedua dengan -1/16. Diperoleh matriks

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -5/16 & 0 \end{bmatrix}$$

3. Mengganti baris pertama dengan hasil penjumlahan baris tersebut dan -6 kali baris kedua. Diperoleh matriks

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/8 & 0 \\ 0 & 1 & -5/16 & 0 \end{bmatrix}$$

Bentuk eselon baris tereduksi di atas bersesuaian dengan sistem persamaan linear berikut:

$$x - z/8 = 0$$

$$y - 5z/16 = 0$$

yang ekuivalen dengan sistem persamaan linear

$$x = z/8$$

$$y = 5z/16$$

Jika kita ambil $z = s$, dengan s sebarang konstanta real maka kita peroleh $x = s/8$ dan $y = 5s/16$. Jadi $(s/8, 5s/16, s)$, dengan s sebarang konstanta real merupakan penyelesaian dari sistem persamaan linear (2.8). Dengan demikian sistem persamaan linear homogen dalam contoh di atas mempunyai tak hingga banyak penyelesaian.

Suatu variabel dalam sistem persamaan linear dinamakan *variabel utama*, jika variabel tersebut bersesuaian dengan elemen 1 utama dalam bentuk eselon baris matriks lengkapnya. Sedangkan variabel yang lainnya dinamakan *variabel bebas*. Dalam contoh 2.3.1. variabel x dan y merupakan variabel utama, sedangkan z variabel bebas.

Teorema 2.3.1.

Suatu sistem persamaan linear homogen dengan m persamaan dan n variabel mempunyai penyelesaian non-trivial bila $n > m$.

Bukti:

Sistem persamaan linear homogen dengan m persamaan dan n variabel dapat ditulis dalam bentuk persamaan matriks $AX = 0$, di mana $A = (a_{ij})_{mxn}$, $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^t$ dan $0 = (0,0,\ldots,0)^t$. Bentuk eselon baris dari matriks A mempunyai paling banyak m baris tak nol. Jadi paling banyak hanya ada m variabel utama. Karena ada n variabel dan $n > m$, maka pasti ada variabel bebas. Tiap variabel bebas dapat diberi sebarang nilai konstanta real. Karena setiap pemberian nilai pada variabel bebas menghasilkan penyelesaian untuk sistem $AX = 0$, maka jelas bahwa sistem tersebut mempunyai penyelesaian non-trivial. ∎

4. Invers Matriks

Dalam bagian ini kita akan membahas pengertian invers dari suatu matriks dan cara menentukannya dengan menggunakan matriks elementer.

Definisi 2.4.1.

Suatu matriks bujursangkar A dikatakan *invertibel* atau *non-singular,* jika dapat ditemukan matriks B sedemikian hingga AB = BA = I. Matriks B ini dinamakan *invers* dari matriks A.

Contoh 2.4.1.

Diberikan matriks

$A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\ 6 - 5\ ) & (\ 10 - 10\ ) \\ (-3 + 3\ ) & (\ -5 + 6\ ) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\ 6 - 5\ ) & (-15 + 15\ ) \\ (\ 2 - 2\ ) & (\ -5 + 6\ ) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Karena AB = BA = I, maka B merupakan invers dari A.

Tidak semua matriks bujursangkar mempunyai invers. Suatu matriks yang tidak mempunyai invers dinamakan *matriks singular.* Akan ditunjukkan bahwa invers suatu matriks adalah tunggal. Andaikan B dan C kedua-duanya merupakan invers dari matriks A. Maka AB = BA = I dan AC = CA = I, sehingga B = BI = B(AC) = (BA)C = IC = C. Jadi B = C. Dengan demikian invers suatu matriks adalah tunggal. Selanjutnya, invers dari matriks A dilambangkan dengan A^{-1}.

Teorema 2.4.1.

Jika A dan B matriks-matriks non-singular yang berordo sama, maka

a. A^{-1} non-singular dan $(A^{-1})^{-1} = A$

b. AB non-singular dan $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Bukti:

a. Karena A^{-1} merupakan invers dari matriks A, maka $A^{-1}A = AA^{-1} = I$. Jadi A merupakan invers dari A^{-1}, sehingga $(A^{-1})^{-1} = A$.

b. Perhatikan bahwa

$(AB)\ (B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$

$(B^{-1}A^{-1})\ (AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I$

Terbukti bahwa $(AB)\ (B^{-1}A^{-1}) = (B^{-1}A^{-1})\ (AB) = I$

Jadi AB non-singular dan $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. ■

Definisi 2.4.2.

Suatu matriks bujursangkar E berordo n dinamakan *matriks elementer*, jika matriks tersebut dapat diperoleh dari matriks identitas I_n dengan melakukan suatu operasi baris elementer.

Terdapat hubungan antara matriks elementer dan operasi baris elementer. Jika kita melakukan suatu operasi baris elementer pada matriks A berordo m × n, maka hasilnya yaitu matriks A_1 akan sama dengan matriks yang kita peroleh dengan mengalikan matriks A dengan suatu matriks elementer E yang diperoleh dari I_m dengan melakukan operasi baris elementer yang sama dengan yang dilakukan pada A, yaitu EA = A_1.

Ada 3 jenis matriks elementer yaitu :

1. Matriks elementer yang diperoleh dari I dengan mengalikan baris ke-i dengan konstanta c yang tidak nol, dilambangkan dengan E_1.
2. Matriks elementer yang diperoleh dari I dengan menukar baris ke-i dengan baris ke-j, dilambangkan dengan E_2.
3. Matriks elementer yang diperoleh dari I dengan mengganti baris ke-i dengan hasil penjumlahan baris tersebut dan c kali baris ke-j, dilambangkan dengan E_3.

Teorema 2.4.2.

Setiap matriks elementer merupakan matriks non-singular.

Bukti :

1. Jika E_1 matriks elementer jenis pertama, maka kita dapat memperoleh kembali I dari E_1 dengan mengalikan baris ke-i dengan 1/c ($c \neq 0$). Andaikan E_p matriks yang dihasilkan dari I dengan mengalikan baris ke-i dengan 1/c, $c \neq 0$. Kita dapat memperoleh I kembali dari E_p dengan mengalikan baris ke-i dengan c, $c \neq 0$. Maka $E_p E_1$ =

I dan $E_1 E_p = I$. Jadi E_p merupakan invers dari E_1.

2. Jika E_2 matriks elementer jenis kedua, maka kita dapat memperoleh I kembali dari E_2 dengan menukarkan kembali baris ke-i dengan baris ke-j. Jadi $E_2 E_2 = I$. Ini berarti bahwa E_2 merupakan invers dari dirinya sendiri.
3. Jika E_3 matriks elementer jenis ketiga, maka kita dapat memperoleh I kembali dari E_3 dengan mengganti baris ke-i dengan hasil penjumlahan baris tersebut dan -c kali baris ke-j. Andaikan E_q matriks yang diperoleh dari I dengan mengganti baris ke-i dengan hasil penjumlahan baris tersebut dan -c kali baris ke-j. Kita dapat memperoleh I kembali dari E_q dengan mengganti baris ke-i dengan hasil penjumlahan baris tersebut dan c kali baris ke-j. Maka $E_q E_3 = I$ dan $E_3 E_q = I$. Jadi E_q invers dari E_3. ∎

Dari ketiga bukti di atas kita dapat juga menyimpulkan bahwa invers dari matriks elementer adalah matriks elementer dari jenis yang sama.

Definisi 2.4.3.

Dua buah matriks dikatakan *ekuivalen baris*, jika matriks yang satu dapat diperoleh dari matriks yang lain dengan melakukan sejumlah berhingga operasi baris elementer.

Jadi jika matriks A ekuivalen baris dengan matriks B, maka A dapat direduksi menjadi B dengan melakukan sejumlah berhingga operasi baris elementer pada A. Hal ini dapat dilakukan dengan mengalikan matriks-matriks elementer yang sesuai dari sebelah kiri. Dengan demikian jika A ekuivalen baris dengan B, maka terdapat matriks-matriks elementer E_1, E_2, ..., E_k sedemikian hingga $E_k \ldots E_2 E_1 A = B$.

Berikut ini adalah teorema yang menggambarkan hubungan antara matriks bujursangkar berordo n dengan sistem persamaan linear homogen dengan n persamaan dan n variabel. Hasil dari teorema ini akan kita gunakan untuk menentukan invers matriks bujursangkar.

Teorema 2.4.3.

Jika A matriks bujursangkar berordo n, maka pernyataan-pernyataan berikut ini ekuivalen.

a. A non-singular

b. $AX = 0$ hanya mempunyai penyelesaian trivial

c. A ekuivalen baris dengan I_n

Bukti:

Akan dibuktikan $a \Rightarrow b \Rightarrow c \Rightarrow a$

1. $(a \Rightarrow b)$

   Andaikan A non-singular dan A^{-1} invers dari A. Andaikan X_0 penyelesaian dari $AX = 0$. Jadi $AX_0 = 0$. Maka

$$A^{-1}(AX_o) = A^{-1}0$$
$$\Leftrightarrow (A^{-1}A)X_o = A^{-1}0$$
$$\Leftrightarrow IX_o = 0$$
$$\Leftrightarrow X_o = 0$$

Jadi $AX = 0$ hanya mempunyai penyelesaian trivial.

2. (b $\Rightarrow$ c)

Andaikan bentuk umum sistem persamaan linear $AX = 0$ adalah sebagai berikut :

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= 0 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= 0 \end{aligned} \qquad (2.9)$$

Andaikan sistem persamaan linear tersebut hanya mempunyai penyelesaian trivial. Matriks lengkap sistem (2.9) adalah

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} & 0 \end{bmatrix} \qquad (2.10)$$

Jika sistem kita selesaikan dengan menggunakan eliminasi Gauss-Jordan maka yang kita lakukan ada lah mereduksi matriks (4.2) menjadi bentuk eselon baris tereduksi dengan menggunakan operasi baris elementer. Karena sistem hanya mempunyai penyele saian trivial, maka bentuk eselon baris tereduksi dari matriks lengkapnya bersesuaian dengan sistem persamaan linear berikut:

$$x_1 = 0$$
$$x_2 = 0$$
$$\vdots$$
$$x_n = 0$$

Matriks eselon baris tereduksi yang bersesuaian dengan sistem persamaan linear di atas adalah

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad (2.11)$$

Jadi matriks (2.11) merupakan bentuk eselon baris tereduksi dari matriks (2.10). Jika kita mengabaikan kolom terakhir dari matriks (2.10) dan matriks (2.11), maka kita dapat menyimpulkan bahwa A dapat direduksi menjadi I_n dengan sejumlah operasi baris elementer. Jadi, A ekuivalen baris dengan I_n.

3. (c ⇒ a)

Andaikan A ekuivalen baris dengan I_n, maka A dapat direduksi menjadi I_n dengan sejumlah berhingga operasi baris elementer. Jadi terdapat matriks-matriks elementer E_1, E_2, ... , E_k sedemikian hingga

$$E_k \ldots E_2 E_1 A = I_n \qquad (2.12)$$

Karena matriks-matriks elementer adalah non-singular, maka $A = (E_1)^{-1}(E_2)^{-1} \ldots (E_k)^{-1} I_n$

$$A = (E_1)^{-1}(E_2)^{-1} \ldots (E_k)^{-1} \qquad (2.13)$$

Karenapersamaan (2.13) menyatakan A sebagai hasil kali matriks-matriks non-singular, maka kita dapat menyimpulkan bahwa A non-singular. ■

Bukti dari teorema di atas juga memberikan cara untuk menentukan invers suatu matriks. Berdasarkan persamaan (2.13) kita memperoleh $A^{-1} = E_k \ldots E_2 E_1 I_n$. Dengan demikian A^{-1} dapat diperoleh dengan melakukan operasi-operasi baris elementer pada I_n dengan menggunakan operasi-operasi baris elementer yang telah digunakan untuk mereduksi A menjadi I_n.

Contoh 2.4.2.

Tentukan invers dari matriks

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Jawab:

Kita tuliskan matriks A berdampingan dengan I_3.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Kalikan baris pertama dari matriks di atas dengan -1.

Diperoleh
$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Gantilah baris kedua dengan hasil penjumlahan baris tersebut dan -1 kali baris pertama. Diperoleh

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Kalikan baris kedua dengan 1/2. Diperoleh

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Gantilah baris pertama dengan hasil penjumlahan baris tersebut dan baris kedua. Diperoleh

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Jadi invers matriks A adalah

$$\begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

BAB III
DETERMINAN

1. Definisi

Pada bagian ini kita akan mengingat kembali definisi determinan suatu matriks bujursangkar berikut pengertian-pengertian yang mendasarinya.

Definisi 3.1.1.

Permutasi himpunan bilangan-bilangan bulat $\{1,2,...,n\}$ adalah susunan bilangan-bilangan bulat tersebut dengan urutan tertentu, tanpa menghilangkan atau mengulangi bilangan-bilangan tersebut.

Contoh 3.1.1.

Ada enam permutasi yang berbeda dari himpunan bilangan bulat $\{1,2,3\}$, yaitu $(1,2,3)$, $(1,3,2)$, $(2,1,3)$, $(2,3,1)$, $(3,1,2)$ dan $(3,2,1)$.

Pada contoh di atas, tempat pertama dapat diisi dengan 3 cara, tempat kedua dapat diisi dengan 2 cara, sedang tempat ketiga hanya dapat diisi dengan 1 cara, sehingga ada $3 \times 2 \times 1 = 6$ permutasi yang berbeda dari himpunan $\{1,2,3\}$. Secara umum, jika kita mempunyai himpunan $\{1,2,...,n\}$, maka akan terdapat $n \times (n-1) \times ... \times 2 \times 1 = n!$ permutasi yang berbeda dari himpunan tersebut.

Suatu permutasi dari himpunan $\{1,2,...,n\}$ dilambangkan dengan $(j_1,j_2,...,j_n)$. Sebuah *inversi* dikatakan terjadi dalam permutasi $(j_1,j_2,...,j_n)$, jika sebuah bilangan bulat yang lebih besar mendahului bilangan bulat yang lebih kecil. Banyaknya inversi yang terjadi pada suatu permutasi dilambangkan dengan $S(j_1,j_2,...,j_n)$.

Contoh 3.1.2.

Diketahui suatu permutasi yang terdiri atas 4 bilangan yaitu (2,4,1,3). Banyaknya inversi yang terjadi pada permutasi tersebut adalah 3, sebab terdapat 3 kejadian bilangan bulat yang lebih besar mendahului bilangan bulat yang lebih kecil, yaitu 2 mendahului 1, 4 mendahului 1 dan 4 mendahului 3.

Jika A matriks bujursangkar berordo n, maka hasil kali elementer A adalah setiap hasil kali n elemen A yang dipilih sedemikian hingga tidak ada elemen-elemen yang berasal dari baris atau kolom yang sama. Jadi jika A = $(a_{ij})_{nxn}$, maka hasil kali elementer A adalah a_{1j_1} a_{2j_2} ... a_{nj_n}, di mana $(j_1,j_2,...,j_n)$ adalah salah satu dari n! permutasi bilangan bulat $\{1,2,...,n\}$.

Hasil kali elementer bertanda dari A ialah hasil kali elementer dari A yang diberi tanda + atau − tergantung dari banyaknya inversi yang terjadi pada permutasi $(j_1,j_2,...,j_n)$. Jika $S(j_1,j_2,...,j_n)$ genap atau jika tidak terdapat inversi, maka hasil kali elementer

$a_{1j_1}\ a_{2j_2}\ \ldots\ a_{nj_n}$ bertanda +, sedangkan jika tidak demikian, maka hasil kali elementer itu akan bertanda −.

Definisi 3.1.2.

Jika A matriks bujursangkar berordo n, maka *determinan* A dilambangkan dengan $|A|$ adalah jumlahan semua hasil kali elementer bertanda dari A.

Jadi, bila $A = (a_{ij})_{n\times n}$ maka $|A| = \sum_{n!} (\pm) a_{1j_1} a_{2j_2} \ldots a_{nj_n}$, di mana $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ permutasi dari himpunan bilangan bulat $\{1,2,\ldots,n\}$.

Contoh 3.1.3.

Jika diketahui matriks $A = (a_{ij})_{3\times 3}$, maka menurut definisi $|A| = \sum_{3!} (\pm)\ a_{1j_1}\ a_{2j_2}\ a_{3j_3}$ dengan (j_1, j_2, j_3) permutasi himpunan $\{1,2,3\}$. Ada enam permutasi berbeda dari himpunan $\{1,2,3\}$ seperti yang telah disebutkan dalam contoh 3.1.1. Banyaknya inversi yang terjadi pada tiap-tiap permutasi adalah $S(1,2,3) = 0$ (tidak terdapat inversi), $S(1,3,2) = 1$, $S(2,1,3) = 1$, $S(2,3,1) = 2$, $S(3,1,2) = 2$ dan $S(3,2,1) = 3$.

Sehingga $|A| = a_{11}\ a_{22}\ a_{33} - a_{11}\ a_{23}\ a_{32} - a_{12}\ a_{21}\ a_{33} + a_{12}\ a_{23}\ a_{31} + a_{13}\ a_{21}\ a_{32} - a_{13}\ a_{22}\ a_{31}$, atau

$|A| = a_{11}\ a_{22}\ a_{33} + a_{12}\ a_{23}\ a_{31} + a_{13}\ a_{21}\ a_{32} - a_{11}\ a_{23}\ a_{32} - a_{12}\ a_{21}\ a_{33} - a_{13}\ a_{22}\ a_{31}$.

Contoh 3.1.4.

Diketahui $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 0 \end{bmatrix}$

Maka $|A| = (2)(1) - (3)(4) = 2 - 12 = -10$

$$\begin{aligned} |B| &= (1)(0)(0) + (3)(1)(4) + (5)(2)(5) - (1)(1)(5) \\ &\quad - (3)(2)(0) - (5)(0)(4) \\ &= 0 + 12 + 50 - 5 - 0 - 0 \\ &= 12 + 50 - 5 \\ &= 57 \end{aligned}$$

2. Sifat - sifat Determinan

Berikut ini adalah sifat-sifat dari determinan suatu matriks bujursangkar.

Sifat 3.2.1.

Jika A matriks bujursangkar berordo n dan B matriks yang diperoleh dari A dengan mengalikan suatu barisnya dengan konstanta tak nol k, maka $|B| = k|A|$.

Bukti:

Andaikan $A = (a_{ij})_{n\times n}$ dan B matriks yang diperoleh dengan cara mengalikan baris ke-r dari A dengan konstanta tak nol k. Maka $B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{r1} & ka_{r2} & \cdots & ka_{rn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$, sehingga

$$
\begin{aligned}
|B| &= \sum_{n!} (\pm)\, a_{1j_1}\, a_{2j_2} \ldots k a_{rj_r} \ldots a_{nj_n} \\
&= \sum_{n!} (\pm)\, k\, (a_{1j_1}\, a_{2j_2} \ldots a_{rj_r} \ldots a_{nj_n}) \\
&= k \sum_{n!} (\pm)\, a_{1j_1}\, a_{2j_2} \ldots a_{rj_r} \ldots a_{nj_n} \\
&= k|A|
\end{aligned}
$$

Jadi $|B| = k|A|$. ■

Sifat 3.2.2.

Jika A matriks berordo n dan B matriks yang diperoleh dari A dengan menukar dua baris yang berdekatan, maka $|B| = -|A|$.

Bukti:

Andaikan $A = (a_{ij})_{nxn}$ dan B matriks yang diperoleh dari A dengan menukar baris ke-i dengan baris ke-(i+1). Maka

$$|A| = \sum_{n!} (\pm)\, a_{1j_1}\, a_{2j_2} \ldots a_{ij_i}\, a_{(i+1)j_{(i+1)}} \ldots a_{nj_n}$$

$$|B| = \sum_{n!} (\pm)\, a_{1j_1}\, a_{2j_2} \ldots a_{(i+1)j_{(i+1)}}\, a_{ij_i} \ldots a_{nj_n}$$

Karena setiap suku dari $|A|$ dan $|B|$ memuat tepat satu elemen dari setiap baris dan kolom, maka setiap suku pada $|A|$ sama dengan setiap suku pada $|B|$ kecuali tandanya. Tetapi perhatikan bahwa suku pada $|B|$ indeks ke-(i+1) mendahului indeks ke-i. Akibatnya jumlah inversi pada masing-masing suku bertambah atau berkurang satu, sehingga setiap suku pada $|B|$ berlawanan tanda dengan setiap suku pada $|A|$. Jadi diperoleh $|B| = -|A|$. ■

Sifat 3.2.3.

Jika A matriks berordo n dan B matriks yang diperoleh dari A dengan menukar letak dua baris sebarang, maka $|B| = -|A|$.

Bukti:

Andaikan $A = (a_{ij})_{nxn}$ dan B matriks yang diperoleh dari A dengan menukar baris ke-i dengan baris ke-(i+k). Untuk membawa setiap elemen baris ke-i ke baris (i+k) diperlukan k kali pertukaran dua baris yang berdekatan. Sedangkan untuk mambawa baris ke-(i+k) ke baris i diperlukan (k-1) kali pertukaran dua baris yang berdekatan, sehingga untuk menukar baris ke-i dengan baris ke-(i+k) diperlukan k+(k-1) = 2k-1 kali pertukaran dua baris yang berdekatan. Maka $|B| = (-1)^{2k-1}|A|$. Jadi $|B| = -|A|$. ■

Sifat 3.2.4.

Jika A matriks bujursangkar berordo n yang semua elemen dari suatu barisnya adalah nol, maka $|A| = 0$.

Bukti:

Andaikan semua elemen baris ke-i dari matriks A adalah nol, maka $a_{i1} = a_{i2} = \dots = a_{in} = 0$.

$$
\begin{aligned}
|A| &= \sum_{n!} (\pm)\, a_{1j_1}\, a_{2j_2} \dots a_{ij_i} \dots a_{nj_n} \\
&= \sum_{n!} (\pm)\, a_{1j_1}\, a_{2j_2} \dots 0 \dots a_{nj_n} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Jadi $|A| = 0$. ■

Sifat 3.2.5.

Jika A matriks bujursangkar berordo n yang mempunyai dua baris yang semua elemennya sama, maka $|A| = 0$.

Bukti:

Andaikan elemen baris ke-i dan baris ke-(i+p) dari matriks A sama, maka $a_{ij} = a_{(i+p)j}$ untuk setiap $j = 1, 2, \ldots, n$. Andaikan B matriks yang diperoleh dari A dengan menukar baris ke-i dengan baris ke-(i+p), maka menurut sifat 3.2.3 $|B| = -|A|$. Akan tetapi setiap elemen pada baris-baris yang ditukar adalah sama, sehingga A = B dan $|A| = |B|$. Jadi $|A| = -|A|$, sehingga $2\,|A| = 0$. Terbukti bahwa $|A| = 0$. ■

Sifat 3.2.6.

Jika A matriks bujursangkar berordo n dan B matriks yang diperoleh dari A dengan mengganti suatu barisnya dengan hasil penjumlahan baris tersebut dan kelipatan baris lain, maka

$|A| = |B|$.

Bukti:

Andaikan $A = (a_{ij})_{nxn}$. Andaikan elemen baris ke-r dari A diganti dengan hasil penjumlahan baris tersebut dan c kali baris ke-s ($c \neq 0$). Namakan matriks baru ini B.

$$\text{Maka } B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r1}+ca_{s1} & a_{r2}+ca_{s2} & \cdots & a_{rn}+ca_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} |B| &= \sum_{n!} (\pm)\, a_{1j_1}\, a_{2j_2} \cdots (a_{rj_r} + ca_{sj_r}) \cdots a_{sj_s} \cdots a_{nj_n} \\ &= \sum_{n!} (\pm)\, a_{1j_1}\, a_{2j_2} \cdots a_{rj_r} \cdots a_{sj_s} \cdots a_{nj_n} + \sum_{n!} (\pm)\, a_{1j_1}\, a_{2j_2} \cdots ca_{sj_r} \cdots a_{sj_s} \cdots a_{nj_n} \\ &= |A| + c \sum_{n!} (\pm)\, a_{1j_1}\, a_{2j_2} \cdots a_{sj_r} \cdots a_{sj_s} \cdots a_{nj_n} \\ &= |A| + c(0) \\ &= |A| + 0 \\ &= |A| \end{aligned}$$

Jadi $|B| = |A|$. ■

Sifat 3.2.7.

Jika A matriks bujursangkar berordo n, maka $|A| = |A^t|$.

Bukti:

Andaikan $A = (a_{ij})_{nxn}$, maka $A^t = (a_{ji})_{nxn}$ untuk setiap i dan j. $|A| = \sum_{n!} (\pm)\, a_{1j_1}\, a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$. Karena setiap suku dari $|A|$ dan $|A^t|$ hanya memuat tepat satu elemen dari setiap baris dan kolom, maka jika $a_{1j_1}\, a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$ suku-suku dari $|A|$ pastilah $a_{j_1 1}\, a_{j_2 2} \cdots a_{j_n n}$ merupakan suku-suku dari $|A^t|$. Jadi $|A^t| = \sum_{n!} (\pm)\, a_{j_1 1}\, a_{j_2 2} \cdots a_{j_n n}$. Karena elemen-elemen dari A dan A^t pada dasarnya adalah sama, hanya berbeda letaknya saja maka pada suku-suku pada $|A|$ juga sama dengan suku-suku pada $|A^t|$. Jadi $|A| = |A^t|$. ∎

Akibat dari sifat 3.2.7. adalah bahwa semua sifat-sifat determinan yang menyangkut "baris" juga berlaku pada "kolom".

Contoh 3.2.1

Sifat 3.2.3. mengatakan bahwa jika A matriks bujursangkar berordo n yang mempunyai dua baris yang elemennya sama, maka $|A| = 0$. Pernyataan tersebut juga berlaku bila kata "baris" diganti dengan "kolom", yaitu jika A matriks bujursangkar berordo n yang mempunyai dua kolom yang elemennya sama, maka $|A| = 0$.

Selanjutnya akan kita buktikan teorema yang mengatakan bahwa suatu matriks bujursangkar adalah non-singular bila dan hanya bila determinannya tidak sama dengan nol. Untuk membuktikan teorema tersebut kita memerlukan lemma berikut.

Lemma 3.2.1.

Jika A matriks bujursangkar berordo n dan E matriks elementer berordo n, maka $|EA| = |E||A|$.

Bukti:

1. Andaikan E_1 matriks elementer yang diperoleh dari I_n dengan mengalikan baris ke-i dengan konstanta tak nol c, maka menurut sifat 3.2.1 $|E_1| = c|I|. = c$. Andaikan A_1 matriks yang diperoleh dari A dengan mengalikan baris ke-i dengan konstanta tak nol c, maka terdapat matriks elementer, yaitu E_1 sedemikian hingga $E_1A = A_1$. Menurut sifat 3.2.1 $|A_1| = c|A|$. Karena $E_1A = A_1$, maka $|E_1A| = |A_1| = c|A|$. Padahal $|E_1| = c$. Jadi $|E_1A| = |E_1||A|$.
2. Andaikan E_2 matriks elementer yang diperoleh dari I_n dengan menukar baris ke-i dengan baris ke-j, maka menurut sifat 3.2.3 $|E_2| = -|I| = -1$. Andaikan A_2 matriks yang diperoleh dari A dengan menukar baris ke-i dengan baris ke-j, maka terdapat matriks elementer E_2 sedemikian hingga $E_2A = A_2$. Menurut sifat 3.2.3 $|A_2| = -|A|$. Karena $E_2A = A_2$, maka $|E_2A| = |A_2| = -|A|$. Padahal $|E_2| = -1$. Jadi $|E_2A| = |E_2||A|$.
3. Andaikan E_3 matriks elementer yang diperoleh dari A dengan mengganti baris ke-i dengan hasil penjumlahan baris tersebut dan c kali baris ke-j ($c \neq 0$). Maka menurut sifat 3.2.6 $|E_3| = |I| = 1$. Andaikan A_3 matriks yang diperoleh dari A dengan mengganti baris ke-i dengan hasil penjumlahan dan c kali baris ke-j ($c \neq 0$). Maka terdapat matriks elementer E_3 sedemikian hingga $E_3A = A_3$. Menurut sifat 3.2.6 $|A_3| = |A|$.

Karena $E_3A = A_3$, maka $|E_3A| = |A_3| = |A|$. Padahal $|E_3|$ $= 1$. Jadi $|E_3A| = |E_3||A|$. ■

Teorema 3.2.2.

Suatu matriks bujursangkar A adalah non-singular bila dan hanya bila $|A| \neq 0$.

Bukti:

1. $(\Rightarrow)$

   Andaikan A matriks bujursangkar berordo n. Karena A non-singular, maka menurut teorema 2.4.3 A ekuivalen baris dengan I_n. Ini berarti bahwa A dapat direduksi menjadi I_n dengan sejumlah berhingga operasi baris elementer. Jadi terdapat matriks-matriks elementer E_1, E_2, ..., E_k sedemikian hingga $E_k \ldots E_2E_1A = I_n$. Maka $|E_k \ldots E_2E_1A| = |I_n|$, sehingga menurut Lemma 3.2.1:

   $|E_k||E_{k-1} \ldots E_2E_1A| = 1$

   $|E_k||E_{k-1}||E_{k-2} \ldots E_2E_1A| = 1$

   $\vdots$

   $|E_k||E_{k-1}| \ldots |E_2||E_1||A| = 1$

   Jadi $|A| \neq 0$.

2. $(\Leftarrow)$

   Andaikan $|A| \neq 0$ dan U bentuk eselon baris tereduksi dari A. Maka terdapat matriks-matriks elementer E_1, E_2, ..., E_k sedemikian hingga $E_k \ldots E_2E_1A = U$, sehingga

   $|E_k \ldots E_2E_1A| = |U|$

   $|E_k| \ldots |E_2||E_1||A| = |U|$.

Karena determinan matriks-matriks elementer tidak sama dengan nol dan $|A| \neq 0$, maka $|U| \neq 0$. Ini berarti U tidak mempunyai suatu baris yang terdiri dari bilangan nol. Karena U berbentuk eselon baris tereduksi, maka haruslah $U = I_n$. Jadi A non-singular. ■

Telah dibuktikan bahwa jika A matriks bujursangkar berordo n dan E matriks elementer berordo n, maka $|EA| = |E||A|$. Hal ini merupakan kejadian khusus dari teorema berikut.

Teorema 3.2.3.

Jika A dan B matriks-matriks bujursangkar berordo n, maka $|AB| = |A||B|$.

Bukti:

Andaikan R adalah matriks eselon baris tereduksi dari A. Maka terdapat matriks-matriks elementer E_1, E_2, ..., E_k sedemikian hingga $E_k \ldots E_2 E_1 A = R$ ....(3.1)

Karena matriks-matriks elementer adalah non-singular, maka kita dapat menuliskan persamaan (3.1) menjadi $A = F_1 F_2 \ldots F_k R$ dengan $F_i = (E_i)^{-1}$ untuk i = 1, 2, ..., k. Maka $AB = F_1 F_2 \ldots F_k RB$, sehingga

$$|AB| = |F_1 F_2 \ldots F_k RB|$$

Matriks-matriks F_1, F_2, ..., F_k adalah matriks-matriks elementer, karena merupakan invers dari matriks elementer, sehingga menurut Lemma 3.2.1:

$|F_1 F_2 \ldots F_k RB| = |F_1||F_2 \ldots F_k RB|$

$$= |F_1||F_2||F_3 \ldots F_k RB|$$
$$\vdots$$
$$= |F_1||F_2| \ldots |F_k||RB|$$
$$= |F_1 F_2 \ldots F_k||RB| .$$

Jadi $|AB| = |F_1 F_2 \ldots F_k||RB|$.

Selanjutnya kita lihat apakah A matriks singular atau non-singular. Jika A matriks non-singular, maka R = I di mana I adalah matriks identitas. Jadi $A = F_1F_2 \ldots F_K$ dan RB = B. Sehingga $|AB| = |F_1 F_2 \ldots F_K||B|$.

$$= |A||B| .$$

Jika A matriks singular, maka menurut Teorema 3.2.2: $|A| = 0$. Karena R adalah matriks eselon baris tereduksi dari A dan A matriks singular, maka R pasti mempunyai baris yang semua elemennya terdiri dari bilangan nol. Demikian juga RB, sehingga menurut sifat 3.2.4: $|RB| = 0$.

Jadi $|AB| = |F_1 F_2 \ldots F_K|\ 0$

$= 0$

Karena $|A| = 0$ dan $|AB| = 0$, maka terbukti $|AB| = |A||B|$. ■

3. Minor dan Kofaktor

Pada bagian ini kita akan membahas suatu metode untuk menentukan determinan matriks bujursangkar, yaitu dengan ekspansi kofaktor sepanjang baris atau kolom. Namun sebelumnya akan diuraikan terlebih dahulu definisi minor dan kofaktor.

Definisi 3.3.1.

Andaikan A matriks bujursangkar berordo n. *Minor* dari elemen a_{ij} yang dilambangkan dengan M_{ij} adalah determinan matriks bujursangkar berordo (n-1) yang diperoleh dari A dengan menghapus baris ke-i dan kolom ke-j. Sedangkan *kofaktor* dari a_{ij} yang diberi lambang K_{ij} adalah $(-1)^{i+j}\ M_{ij}$.

Contoh 3.3.1.

Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Minor dari a_{11} adalah $M_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 - 2 = -2$.

Kofaktor dari a_{11} adalah $K_{11} = (-1)^{1+1}M_{11} = (-1)^2(-2) = -2$.

Berikut ini diberikan sebuah teorema yang memberikan kepada kita cara untuk menentukan determinan suatu matriks bujursangkar.

Teorema 3.3.1.

Andaikan A matriks bujursangkar berordo n. Determinan A dapat dihitung dengan mengalikan elemen-elemen dalam suatu baris atau kolom dengan kofaktor-kofaktornya dan kemudian menambahkan hasil kali yang dihasilkan. Dengan kata lain, untuk setiap $i = 1, 2, \ldots, n$ dan $j = 1, 2, \ldots, n$

$$|A| = a_{i1}K_{i1} + a_{i2}K_{i2} + \dots + a_{in}K_{in} \quad \dots\dots\dots\dots (3.2)$$

$$|A| = a_{1j}K_{1j} + a_{2j}K_{2j} + \dots + a_{nj}K_{nj} \quad \dots\dots\dots\dots (3.3)$$

Metode menghitung determinan dengan menggunakan rumus (3.2) dinamakan *ekspansi kofaktor sepanjang baris i*, sedang jika menggunakan rumus (3.3) dinamakan *ekspansi kofaktor sepanjang kolom j*.

Bukti:

Menurut definisi $|A| = \sum_{n!} (\pm)\, a_{1j_1}\, a_{2j_2} \dots a_{ij_i} \dots a_{nj_n}$.

Dari jumlahan tersebut, kita pilih suku-suku yang memuat a_{i1}, yaitu

$$a_{i1} \sum_{(n-1)!} (\pm)\, a_{1j_2}\, a_{2j_3} \dots a_{(i-1)j_i}\, a_{(i+1)j_{(i+1)}} \dots a_{nj_n},$$

di mana $(j_2, j_3, \dots, j_n)$ merupakan permutasi himpunan bilangan bulat $\{2,3,\dots,n\}$. Suku-suku ini dapat ditulis sebagai

$$a_{i1} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{(i-1)2} & a_{(i-1)3} & \dots & a_{(i-1)n} \\ a_{(i+1)2} & a_{(i+1)3} & \dots & a_{(i+1)n} \\ \vdots & & & \\ a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}K_{i1}$$

Selanjutnya suku-suku sisa dipilih yang memuat a_{i2} dan diperoleh $a_{i2}K_{i2}$. Demikian seterusnya sampai suku-suku yang memuat a_{in} dan diperoleh $a_{in}K_{in}$. Sehingga

$|A| = a_{i1}K_{i1} + a_{i2}K_{i2} + \dots + a_{in}K_{in}$. ■

Contoh 3.3.2.

Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{bmatrix}$. Hitunglah $|A|$ dengan ekspansi kofaktor sepanjang baris pertama!

Jawab:

$$|A| = 0 \begin{vmatrix} -6 & 9 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} - (1) \begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 3 & -6 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= 0\ ((-6) - 54) - (1)\ (3 - 18) + 5\ (18 + 12)$$

$$= 0 + 15 + 150$$

$$= 165$$

Jadi $|A| = 165$.

Untuk mempermudah menghitung determinan suatu matriks bujursangkar, kadang-kadang ekspansi kofaktor ini digunakan bersama-sama dengan operasi baris (operasi kolom) elementer.

Contoh 3.3.3.

Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 0 & -8 \\ -1 & -3 & 4 \end{bmatrix}$

Dengan mengganti baris ketiga dari matriks A dengan hasil penjumlahan baris tersebut dan baris pertama diperoleh matriks $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 11 \end{bmatrix}$

Menurut sifat 3.2.6: $|A| = |A_1| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 11 \end{vmatrix}$

Dihitung determinan A dengan menggunakan ekspansi kofaktor sepanjang baris ketiga:

$$|A| = |A_1| = 0 \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 0 & -8 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ -2 & -8 \end{vmatrix} + 11 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 11 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 11\ (0 - 6)$$

$$= -66$$

Jadi $|A| = -66$.

BAB IV
RUANG VEKTOR

1. Ruang Vektor

Ruang euklides berdimensi-n sering kali diperkenalkan sebelum orang mempelajari ruang vektor, sebab banyak hal-hal mendasar dari ruang vektor berasal dari ruang euklides berdimensi-n tersebut. Aksioma-aksioma dalam ruang vektor dipilih dengan mengabstraksikan sifat-sifat vektor dalam ruang euklides berdimensi-n. Berikut diuraikan terlebih dahulu definisi ruang euklides berdimensi-n.

Definisi 4.1.1.

Himpunan semua kumpulan terurut $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dengan x_1, x_2, ..., x_n bilangan-bilangan real dinamakan *ruang euklides berdimensi-n*, dilambangkan dengan $\mathbb{R}^n$.

Kumpulan terurut $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dapat juga dinyatakan sebagai matriks berordo $n \times 1$. Dengan demikian $\mathbb{R}^n$ dapat didefinisikan sebagai himpunan semua matriks berordo $n \times 1$ dengan elemen-elemen bilangan real.

Setiap elemen dari $\mathbb{R}^n$ kita namakan *vektor*. Bilangan real x_i dengan $i = 1, 2, \ldots, n$ dinamakan *komponen ke-i* dari vektor. Elemen-elemen dari $\mathbb{R}$ kita namakan *skalar*. Selanjutnya kita akan menyatakan vektor-vektor dalam $\mathbb{R}^n$

sebagai matriks berordo $n \times 1$ dan ditulis $(x_1, x_2, \ldots, x_n)^t$.

Definisi 4.1.2.

Andaikan $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)^t$ dan $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)^t$ dua buah vektor pada $\mathbb{R}^n$ dan k suatu skalar. Vektor-vektor **u** dan **v** dikatakan *sama* jika $u_i = v_i$ untuk setiap i = 1, 2, ..., n. Jumlahan vektor **u** dan **v** didefinisikan sebagai $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1+v_1, u_2+v_2, \ldots, u_n+v_n)^t$. Perkalian skalar k dan **u** didefinisikan sebagai $k\mathbf{u} = (ku_1, ku_2, \ldots, ku_n)^t$.

Jelaslah bahwa operasi penjumlahan dan perkalian dengan skalar pada $\mathbb{R}^n$ bersifat tertutup, artinya jika **u** dan **v** dua buah vektor sebarang pada $\mathbb{R}^n$ dan k suatu skalar, maka $k\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ dan $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$.

Definisi 4.1.3.

Vektor $0 = (0,0,\ldots,0)^t$ kita sebut *vektor nol* dalam $\mathbb{R}^n$. Selanjutnya andaikan $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)^t$ dan $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)^t$ dua buah vektor pada $\mathbb{R}^n$. Maka $-\mathbf{u} = (-u_1, -u_2, \ldots, -u_n)^t$ kita sebut *invers aditif* dari **u**. Sedangkan $\mathbf{v} - \mathbf{u} = \mathbf{v} + (-\mathbf{u}) = (v_1-u_1, v_2-u_2, \ldots, v_n-u_n)^t$.

Teorema 4.1.1.

Jika **u**, **v** dan **w** vektor-vektor pada $\mathbb{R}^n$ dan k dan l adalah skalar-skalar, maka

1. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$

2. $\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$

3. $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$

4. $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$

5. $k(l\mathbf{u}) = (kl)\mathbf{u}$

6. $k(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = k\mathbf{u} + k\mathbf{v}$

7. $(k + l)\mathbf{u} = k\mathbf{u} + l\mathbf{u}$

8. $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$

Bukti:

Andaikan $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)^t$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)^t$ dan $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_n)^t$ vektor-vektor pada $\mathbb{R}^n$ dan k dan l skalar-skalar, maka

1. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1+v_1, u_2+v_2, \ldots, u_n+v_n)^t$
$= (v_1+u_1, v_2+u_2, \ldots, v_n+u_n)^t$
$= \mathbf{v} + \mathbf{u}$

2. $\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (u_1, u_2, \ldots, u_n)^t + (v_1+w_1, v_2+w_2, \ldots, v_n+w_n)^t$
$= ((u_1+(v_1+w_1), u_2+(v_2+w_2), \ldots, u_n+(v_n+w_n))^t$
$= ((u_1+v_1)+w_1, (u_2+v_2)+w_2, \ldots, (u_n+v_n)+w_n)^t$
$= (u_1+v_1, u_2+v_2, \ldots, u_n+v_n)^t + (w_1, w_2, \ldots, w_n)^t$
$= (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$

3. $\mathbf{u} + \mathbf{0} = (u_1+0, u_2+0, \ldots, u_n+0)^t = (u_1, u_2, \ldots, u_n)^t = \mathbf{u}$

4. $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = (u_1+(-u_1), u_2+(-u_2), \ldots, u_n+(-u_n))^t$
$= (0, 0, \ldots, 0)^t = \mathbf{0}$

5. $k(l\mathbf{u}) = k(lu_1, lu_2, \ldots, lu_n)^t$
$= (k(lu_1), k(lu_2), \ldots, k(lu_n))^t$
$= ((kl)u_1, (kl)u_2, \ldots, (kl)u_n)^t$
$= (kl)(u_1, u_2, \ldots, u_n)^t = (kl)\mathbf{u}$

6. $k(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = k(u_1+v_1, u_2+v_2, \ldots, u_n+v_n)^t$

$$= (k(u_1+v_1), k(u_2+v_2), \ldots, k(u_n+v_n))^t$$
$$= (ku_1+kv_1, ku_2+kv_2, \ldots, ku_n+kv_n)^t$$
$$= (ku_1, ku_2, \ldots, ku_n)^t + (kv_1, kv_2, \ldots, kv_n)^t$$
$$= k\mathbf{u} + k\mathbf{v}$$

7. $(k + l)\mathbf{u} = ((k + l)u_1, (k + l)u_2, \ldots, (k + l)u_n)^t$
$$= (ku_1 + lu_1, ku_2 + lu_2, \ldots, ku_n + lu_n)^t$$
$$= (ku_1, ku_2, \ldots, ku_n)^t + (lu_1, lu_2, \ldots, lu_n)^t$$
$$= k\mathbf{u} + l\mathbf{u}$$

8. $1\mathbf{u} = (1u_1, 1u_2, \ldots, 1u_n)^t = (u_1, u_2, \ldots, u_n)^t = \mathbf{u}$. ■

Dalam ruang euklides berdimensi-n kita telah menyatakan vektor sebagai matriks berordo $n \times 1$. Mulai sekarang kita akan menyatakan matriks berordo $n \times 1$ dengan huruf tebal kecil. Dengan demikian suatu sistem persamaan linear $AX = B$ akan kita tuliskan sebagai $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Berikut ini diberikan definisi ruang vektor secara umum. Aksioma-aksioma dalam ruang vektor ini dipilih dengan mengabstraksikan sifat-sifat vektor dalam ruang euklides berdimensi-n.

Definisi 4.1.4.

Andaikan V adalah himpunan yang tidak kosong yang padanya didefinisikan operasi penjumlahan dan perkalian dengan skalar, sehingga untuk setiap elemen $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$ dalam V dan setiap skalar k dalam $\mathbb{R}$ terdapat tepat satu elemen $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ dalam V dan tepat satu elemen $k\mathbf{u}$ dalam V. Himpunan V bersama dengan kedua operasi tersebut dinamakan *ruang vektor* jika memenuhi aksioma-aksioma berikut:

1. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$,untuk setiap $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$ dalam V.
2. $\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$, untuk setiap $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ dan $\mathbf{w}$ dalam V.
3. Ada elemen $\mathbf{0} \in V$ sedemikian sehingga $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$, untuk setiap $\mathbf{u} \in V$.
4. Untuk setiap $\mathbf{u} \in V$ terdapat $-\mathbf{u} \in V$ sedemikian sehingga $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$. Vektor $-\mathbf{u}$ ini dinamakan *invers aditif* dari $\mathbf{u}$.
5. $k(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = k\mathbf{u} + k\mathbf{v}$, untuk setiap $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$ dalam V dan $k \in \mathbb{R}$.
6. $(k + l)\mathbf{u} = k\mathbf{u} + l\mathbf{u}$, untuk setiap k dan l dalam $\mathbb{R}$ dan $\mathbf{u} \in V$.
7. $(kl)\mathbf{u} = k(l\mathbf{u})$, untuk setiap k dan l dalam $\mathbb{R}$ dan $\mathbf{u} \in V$.
8. $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$, untuk setiap $\mathbf{u} \in V$.

Elemen-elemen dari V ini kita namakan *vektor*. Ruang vektor yang kita definisikan di atas sering juga disebut *ruang vektor real* oleh karena skalar-skalar yang digunakan merupakan bilangan real.

Ruang euklides berdimensi-n merupakan salah satu contoh ruang vektor.

Teorema 4.1.2.

Andaikan V adalah suatu ruang vektor. Jika $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$ sebarang vektor pada V, maka

a. $0\mathbf{u} = \mathbf{0}$

b. Jika $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{0}$, maka $\mathbf{v} = -\mathbf{u}$

c. $(-1)\mathbf{u} = -\mathbf{u}$

Bukti:

a. Menurut aksioma 6 dan 8, $\mathbf{u} = 1\mathbf{u} = (1 + 0)\mathbf{u} = \mathbf{u} + 0\mathbf{u}$. Sehingga $-\mathbf{u} + \mathbf{u} = -\mathbf{u} + (\mathbf{u} + 0\mathbf{u}) = (-\mathbf{u} + \mathbf{u}) + 0\mathbf{u}$ (aksioma 2). Karena $-\mathbf{u} + \mathbf{u} = \mathbf{0}$, maka diperoleh $\mathbf{0} = \mathbf{0} + 0\mathbf{u} = 0\mathbf{u}$.

   Jadi $0\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

b. Andaikan $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{0}$, maka
$$\begin{aligned}-\mathbf{u} &= -\mathbf{u} + \mathbf{0} = -\mathbf{u} + (\mathbf{u} + \mathbf{v})\\ &= (\mathbf{u} + -\mathbf{u}) + \mathbf{v}\\ &= \mathbf{0} + \mathbf{v} = \mathbf{v}.\end{aligned}$$

   Jadi $\mathbf{v} = -\mathbf{u}$. Selain itu, dari bukti di atas kita juga dapat menyimpulkan bahwa untuk setiap $\mathbf{u} \in V$ terdapat tepat satu invers aditif dari $\mathbf{u}$, yaitu $-\mathbf{u}$.

c. Menurut Teorema 4.1.2 (a),
$$\begin{aligned}\mathbf{0} = 0\mathbf{u} &= (1 + (-1))\mathbf{u}\\ &= 1\mathbf{u} + (-1)\mathbf{u}\\ &= \mathbf{u} + (-1)\mathbf{u}\end{aligned}$$

   Jadi $\mathbf{u} + (-1)\mathbf{u} = \mathbf{0}$, sehingga menurut Teorema 4.1.2 (b) $(-1)\mathbf{u} = -\mathbf{u}$. ■

2. Subruang

Andaikan V adalah suatu himpunan. Dalam bagian ini kita akan membahas himpunan bagian dari V yang bersama dengan operasi penjumlahan dan perkalian dengan skalar yang didefinisikan pada V juga membentuk ruang vektor.

Definisi 4.2.1.

Andaikan S adalah himpunan bagian yang tidak kosong dari suatu ruang vektor V. S dinamakan *subruang* dari V, jika S bersama dengan operasi penjumlahan dan perkalian dengan skalar yang didefinisikan pada V juga merupakan ruang vektor.

Untuk membuktikan bahwa S merupakan subruang dari V, kita tidak perlu memperlihatkan bahwa S bersama dengan operasi penjumlahan dan perkalian dengan skalar yang didefinisikan pada V memenuhi semua aksioma ruang vektor. Ada beberapa aksioma yang secara otomatis dipenuhi oleh S karena S merupakan himpunan bagian dari V. Untuk membuktikan bahwa S subruang dari V kita cukup memperlihatkan terpenuhinya dua syarat saja, seperti diungkapkan dalam teorema berikut.

Teorema 4.2.1.

Andaikan S adalah himpunan bagian yang tidak kosong dari suatu ruang vektor V. Himpunan S adalah subruang dari V bila dan hanya bila

1. $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \in S$ untuk setiap $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in S$.
2. $k\mathbf{u} \in S$ untuk setiap $\mathbf{u} \in S$ dan setiap skalar k.

Bukti:

1. $(\Rightarrow)$

Karena S subruang dari ruang vektor V, maka S bersama dengan operasi penjumlahan dan perkalian dengan skalar yang didefinisikan pada V juga merupakan ruang vektor. Dengan demikian jelas bahwa syarat 1 dan 2 dipenuhi oleh S.

2. (⇐)

Andaikan S adalah himpunan yang tidak kosong dari ruang vektor V yang memenuhi syarat 1 dan 2. Karena S himpunan bagian dari V, maka jelas bahwa aksioma 1, 2, 5, 6, 7 dan 8 dari ruang vektor dipenuhi oleh S. Sekarang akan kita buktikan bahwa aksioma 3 dan 4 pun dipenuhi oleh S. Ambil sebarang vektor $\mathbf{u} \in S$, maka untuk setiap skalar k berlaku $k\mathbf{u} \in S$. Jika kita pilih $k = 0$, maka $k\mathbf{u} = 0\mathbf{u} = \mathbf{0}$. Jadi $\mathbf{0} \in S$. Jika kita pilih $k = -1$, maka $k\mathbf{u} = (-1)\mathbf{u} = -\mathbf{u}$. Jadi $-\mathbf{u} \in S$. Dengan demikian aksioma 3 dan 4 dipenuhi oleh S. Jadi S merupakan ruang vektor. Ini berarti bahwa S subruang dari ruang vektor V. ■

Contoh 4.2.1.

Diberikan sistem persamaan linear homogen dengan m persamaan dan n variabel, yaitu $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ dengan $A = (a_{ij})_{m\times n}$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^t$ dan $\mathbf{0} = (0,0,\ldots,0)^t$. Akan ditunjukkan bahwa himpunan penyelesaian dari sistem $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ merupakan subruang dari $\mathbb{R}^n$. Andaikan W adalah himpunan semua penyelesaian sistem $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Ambil sebarang elemen $\mathbf{s}, \mathbf{t} \in W$, di mana $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \ldots, s_n)^t$ dan $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \ldots, t_n)^t$. Maka $A\mathbf{s} = \mathbf{0}$ dan $A\mathbf{t} = \mathbf{0}$, sehingga $A(\mathbf{s}+\mathbf{t}) = A\mathbf{s} + A\mathbf{t} = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$. Dan untuk sebarang skalar k, $A(k\mathbf{s})$

$= k(As) = k0 = 0$. Jadi $(s + t) \in W$ dan $ks \in W$. Dengan demikian terbukti bahwa W subruang dari $\mathbb{R}^n$.

Definisi 4.2.2.

Suatu vektor $\mathbf{w}$ dinamakan *kombinasi linear* dari vektor-vektor $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$, jika terdapat skalar-skalar $c_1, c_2, \ldots, c_r$ sedemikian hingga $\mathbf{w} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots + c_r\mathbf{v}_r$. Himpunan semua kombinasi linear dari vektor-vektor $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ dinamakan *rentang dari* $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$, ditulis $S(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r)$.

Teorema 4.2.2.

Andaikan $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ adalah vektor-vektor pada ruang vektor V. Maka $S(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r)$ merupakan subruang dari V.

Bukti:

Andaikan $\mathbf{v}$ dan $\mathbf{w}$ adalah vektor-vektor dalam $S(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r)$. Maka ada skalar-skalar $b_1, b_2, \ldots, b_r$ dan $c_1, c_2, \ldots, c_r$ sedemikian hingga $\mathbf{v} = b_1\mathbf{v}_1 + b_2\mathbf{v}_2 + \ldots + b_r\mathbf{v}_r$ dan $\mathbf{w} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots + c_r\mathbf{v}_r$. Jika k suatu skalar, maka

$$k\mathbf{v} = (kb_1)\mathbf{v}_1 + (kb_2)\mathbf{v}_2 + \ldots + (kb_r)\mathbf{v}_r$$

Jadi $k\mathbf{v} \in S(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r)$.

$$\begin{aligned}\mathbf{v} + \mathbf{w} &= (b_1\mathbf{v}_1+b_2\mathbf{v}_2+\ldots+b_r\mathbf{v}_r) + (c_1\mathbf{v}_1+c_2\mathbf{v}_2+\ldots+c_r\mathbf{v}_r)\\ &= (b_1+c_1)\mathbf{v}_1 + (b_2+c_2)\mathbf{v}_2 + \ldots + (b_r+c_r)\mathbf{v}_r.\end{aligned}$$

Jadi $\mathbf{v} + \mathbf{w} \in S(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r)$. Dengan demikian terbukti bahwa $S(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r)$ adalah subruang dari V. ∎

Selanjutnya kita akan menyebut $S(v_1, v_2, \ldots, v_r)$ *subruang yang direntang* oleh $v_1, v_2, \ldots, v_r$. Jika $S(v_1, v_2, \ldots, v_r) = V$, maka himpunan $\{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ dikatakan *merentang* V.

Contoh 4.2.2.

Jika $i = (1,0,0)^t$, $j = (0,1,0)^t$ dan $k = (0,0,1)^t$ adalah vektor-vektor dalam $\mathbb{R}^3$, maka himpunan $S = \{i, j, k\}$ merentang $\mathbb{R}^3$, sebab setiap vektor $(a,b,c)^t$ dalam $\mathbb{R}^3$ dapat dituliskan sebagai

$$\begin{aligned}(a,b,c)^t &= a(1,0,0)^t + b(0,1,0)^t + c(0,0,1)^t \\ &= ai + bj + ck,\end{aligned}$$

yang berarti bahwa setiap vektor dalam $\mathbb{R}^3$ dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari i, j dan k.

3. Kebebasan Linear

Bagian ini akan kita mulai dengan memberikan definisi tentang "bebas linear" dan "tak bebas linear".

Definisi 4.3.1.

Andaikan V adalah ruang vektor dan $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ himpunan vektor-vektor dalam V. Himpunan S dikatakan *bebas linear* jika $c_1v_1 + c_2v_2 + \ldots + c_nv_n = 0$ hanya bila $c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0$.

Definisi 4.3.2.

Andaikan V adalah ruang vektor dan $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ himpunan vektor-vektor dalam V. Himpunan S dikatakan *tak bebas linear*, jika terdapat skalar-skalar $c_1, c_2, \ldots, c_n$ yang tidak semuanya sama dengan nol sedemikian hingga $c_1v_1 + c_2v_2 + \ldots + c_nv_n = 0$.

Contoh 4.3.1.

Tentukan apakah himpunan vektor-vektor berikut bebas linear atau tak bebas linear :

a. $\{(1,1,1)^t, (1,1,0)^t, (1,0,0)^t\}$

b. $\{(1,0,1)^t, (0,1,0)^t\}$

c. $\{(1,2,4)^t, (2,1,3)^t, (4,-1,1)^t\}$

Jawab:

a. Andaikan c_1, c_2 dan c_3 adalah skalar-skalar sedemikian hingga $c_1(1,1,1)^t + c_2(1,1,0)^t + c_3(1,0,0)^t = (0,0,0)^t$

$\Leftrightarrow (c_1,c_1,c_1)^t + (c_2,c_2,0)^t + (c_3,0,0)^t = (0,0,0)^t$

$\Leftrightarrow (c_1 + c_2 + c_3, c_1 + c_2, c_1)^t = (0,0,0)^t$

Sehingga
$$\begin{aligned} c_1 + c_2 + c_3 &= 0 \\ c_1 + c_2 \phantom{{}+c_3} &= 0 \\ c_1 \phantom{{}+c_2+c_3} &= 0 \end{aligned}$$

Dengan substitusi balik diperoleh $c_1 = 0$, $c_2 = 0$ dan $c_3 = 0$. Jadi himpunan vektor-vektor $\{(1,1,1)^t, (1,1,0)^t, (1,0,0)^t\}$ dalam $\mathbb{R}^3$ adalah bebas linear.

b. Andaikan k_1 dan k_2 adalah skalar-skalar sedemikian hingga $k_1(1,0,1)^t + k_2(0,1,0)^t = (0,0,0)^t$

$\Leftrightarrow (k_1,0,k_1)^t + (0,k_2,0)^t = (0,0,0)^t$

$\Leftrightarrow (k_1, k_2, k_1)^t = (0,0,0)^t$

Diperoleh $k_1 = 0$ dan $k_2 = 0$. Jadi himpunan vektor-vektor $\{(1,0,1)^t, (0,1,0)^t\}$ adalah bebas linear.

c. Andaikan c_1, c_2 dan c_3 adalah skalar-skalar sedemikian hingga

$$c_1(1,2,4)^t + c_2(2,1,3)^t + c_3(4,-1,1)^t = (0,0,0)^t$$

$$\Leftrightarrow (c_1, 2c_1, 4c_1)^t + (2c_2, c_2, 3c_2)^t + (4c_3, -c_3, c_3)^t = (0,0,0)^t$$

$$\Leftrightarrow (c_1+2c_2+4c_3,\ 2c_1+c_2-c_3,\ 4c_1+3c_2+c_3) = (0,0,0)^t$$

Sehingga

$$\begin{aligned} c_1 + 2c_2 + 4c_3 &= 0 \\ 2c_1 + c_2 - c_3 &= 0 \\ 4c_1 + 3c_2 + c_3 &= 0 \end{aligned} \qquad (4.1)$$

Matriks lengkap dari sistem persamaan linear (4.1) adalah

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya matriks di atas direduksi menjadi bentuk eselon baris tereduksi dan diperoleh:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriks eselon baris tereduksi di atas bersesuaian dengan sistem persamaan linear berikut:

$$\begin{aligned} c_1 - 2c_3 &= 0 \\ c_2 + 3c_3 &= 0 \end{aligned}$$

yang ekuivalen dengan

$$c_1 = 2c_3$$

$$c_2 = -3c_3$$

Jika kita pilih $c_3 = s$, s sebarang konstanta real, maka $c_1 = 2s$ dan $c_2 = -3s$. Jadi sistem persamaan linear (4.1) mempunyai tak hingga banyak penyelesaian non-trivial. Dengan demikian himpunan vektor-vektor $\{(1,2,4)^t,(2,1,3)^t,(4,-1,1)^t\}$ adalah tak bebas linear.

Teorema 4.3.1.

Andaikan $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ adalah himpunan vektor-vektor dalam ruang vektor V. Himpunan S adalah tak bebas linear bila dan hanya bila ada paling sedikit satu dari vektor-vektor dalam S yang dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari n-1 vektor-vektor lainnya.

Bukti:

1. (⇒)

Andaikan $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ adalah himpunan tak bebas linear. Maka ada skalar-skalar $c_1, c_2, \ldots, c_n$ yang tidak semuanya sama dengan nol sedemikian hingga

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots + c_n\mathbf{v}_n = 0$$

Andaikan $c_1 \neq 0$, maka diperoleh

$$\mathbf{v}_1 = (-c_2/c_1)\mathbf{v}_2 + \ldots + (-c_n/c_1)\mathbf{v}_n \; .$$

Jadi $\mathbf{v}_1$ dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari vektor-vektor $\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \ldots, \mathbf{v}_n$. Demikian juga, jika $c_j \neq 0$, untuk $j = 2, 3, \ldots, n$, maka $\mathbf{v}_j$ dapat dinyatakan sebagai kombinasi dari n-1 vektor lainnya.

2. (⇐)

Andaikan $\mathbf{v}_1$ dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari n-1 vektor lainnya dalam S. Maka ada skalar-

skalar c_2, c_3, ..., c_n sedemikian sehingga

$$\mathbf{v}_1 = c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3 + \ldots + c_n\mathbf{v}_n$$

Persamaan di atas ekuivalen dengan persamaan berikut:

$$\mathbf{v}_1 - c_2\mathbf{v}_2 - c_3\mathbf{v}_3 - \ldots - c_n\mathbf{v}_n = 0$$

Jadi S adalah himpunan tak bebas linear, sebab ada skalar $k_1 = 1 \neq 0$, $k_2 = -c_2$, $k_3 = -c_3$, ..., $k_n = -c_n$ sedemikian sehingga

$$k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + k_3\mathbf{v}_3 + \ldots + k_n\mathbf{v}_n = 0. \quad \blacksquare$$

Teorema 4.3.2.

Andaikan $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, ..., $\mathbf{x}_n$ adalah vektor-vektor dalam $\mathbb{R}^n$ dengan $\mathbf{x}_i = (x_{1i}, x_{2i}, \ldots, x_{ni})^t$ untuk $i = 1, 2, \ldots, n$. Andaikan $X = (x_{ij})_{n\times n}$ adalah matriks yang dibentuk dengan $\mathbf{x}_i$ sebagai kolom-kolomnya. Himpunan vektor-vektor $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ adalah tak bebas linear bila dan hanya bila X singular.

Bukti:

Andaikan c_1, c_2, ..., c_n adalah skalar-skalar sedemikian hingga $c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + \ldots + c_n\mathbf{x}_n = 0$.

Persamaan di atas ekuivalen dengan sistem persamaan linear berikut :

$$\begin{aligned} c_1x_{11} + c_2x_{12} + \ldots + c_nx_{1n} &= 0 \\ c_1x_{21} + c_2x_{22} + \ldots + c_nx_{2n} &= 0 \\ &\vdots \\ c_1x_{n1} + c_2x_{n2} + \ldots + c_nx_{nn} &= 0 \end{aligned} \qquad (4.2)$$

Andaikan $c = (c_1, c_2, \ldots, c_n)^t$, maka sistem persamaan linear (4.2) dapat ditulis dalam bentuk persamaan matriks, yaitu $Xc = 0$. Menurut Teorema 2.4.3, persamaan $Xc = 0$ hanya mempunyai penyelesaian trivial bila dan hanya bila X adalah non-singular. Pernyataan ini ekuivalen dengan "persamaan $Xc = 0$ mempunyai penyelesaian non-trivial bila dan hanya bila X singular". Berarti ada $c = (c_1, c_2, \ldots, c_n)^t$ dengan c_1, c_2, ..., c_n tidak semuanya sama dengan nol sedemikian sehingga $Xc = 0$ bila dan hanya bila X singular. Karena persamaan $Xc = 0$ ekuivalen dengan persamaan $c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n = 0$, maka keduanya mempunyai himpunan penyelesaian yang sama. Jadi terdapat skalar-skalar c_1, c_2, ..., c_n yang tidak semuanya sama dengan nol sedemikian hingga $c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n = 0$ bila dan hanya bila X singular. Dengan demikian x_1, x_2, ..., x_n adalah tak bebas linear bila dan hanya bila X singular. ■

Dengan Teorema 4.3.2 kita dapat menyelidiki apakah himpunan n buah vektor dalam $\mathbb{R}^n$ bebas linear atau tak bebas linear. Kita bentuk matriks bujursangkar X yang kolom-kolomnya terdiri atas vektor-vektor yang akan diselidiki. Kemudian untuk menentukan apakah X singular atau non-singular, kita hitung $|X|$. Menurut Teorema 3.2.2, X non-singular bila dan hanya bila $|X| \neq 0$. Dengan demikian jika $|X| = 0$, maka himpunan vektor-vektor yang diselidiki adalah tak bebas linear, sedang jika $|X| \neq 0$, maka himpunan vektor-vektor yang diselidiki adalah bebas linear.

Contoh 4.3.2.

Andaikan $X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

Karena $|X| = 0$, maka himpunan vektor-vektor $\{(1,2,4)^t, (2,1,3)^t, (4,-1,1)^t\}$ dalam $\mathbb{R}^3$ adalah tak bebas linear.

4. Basis dan Dimensi

Setelah kita memahami konsep kebebasan linear, berikut akan kita bahas basis dan dimensi dari suatu ruang vektor. Suatu himpunan berhingga vektor-vektor pada suatu ruang vektor dinamakan *basis*, jika himpunan tersebut memenuhi sifat-sifat tertentu, seperti dapat dilihat pada definisi berikut ini.

Definisi 4.4.1.

Suatu himpunan vektor-vektor $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ dinamakan *basis* untuk ruang vektor V bila dan hanya bila

1. S bebas linear
2. S merentang V

Contoh 4.4.1.

Andaikan $e_1 = (1,0,0)^t$, $e_2 = (0,1,0)^t$ dan $e_3 = (0,0,1)^t$ adalah vektor-vektor dalam $\mathbb{R}^3$. Dalam contoh 4.2.2 kita telah menunjukkan bahwa himpunan $\{e_1, e_2, e_3\}$ merentang $\mathbb{R}^3$. Sekarang akan ditunjukkan bahwa himpunan $\{e_1, e_2, e_3\}$

adalah bebas linear. Dibentuk matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ dan kemudian dihitung $|A|$. Karena A adalah matriks identitas, maka $|A| = 1 \neq 0$, sehingga himpunan $\{e_1, e_2, e_3\}$ bebas linear. Karena himpunan $\{e_1, e_2, e_3\}$ bebas linear dan merentang $\mathbb{R}^3$, maka $\{e_1, e_2, e_3\}$ adalah basis untuk $\mathbb{R}^3$. Basis yang seperti ini dinamakan *basis baku* untuk $\mathbb{R}^3$. Selain himpunan vektor-vektor $\{e_1, e_2, e_3\}$ masih terdapat basis lain untuk $\mathbb{R}^3$, misalnya himpunan vektor-vektor $\{(1,1,1)^t, (1,1,0)^t, (1,0,1)^t\}$.

Dari contoh di atas tampak bahwa basis untuk suatu ruang vektor tidaklah tunggal. Selanjutnya akan diberikan teorema-teorema yang harus kita buktikan terlebih dahulu sebelum kita mendefinisikan dimensi suatu ruang vektor.

Teorema 4.4.1.

Andaikan $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ adalah basis untuk ruang vektor V. Setiap himpunan m vektor dalam V, dengan $m > n$, adalah tak bebas linear.

Bukti:

Andaikan $T = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ adalah sebarang himpunan m vektor dalam V, dengan $m > n$. Karena S adalah basis, maka S merentang V. Sehingga setiap vektor dalam T dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari vektor-vektor dalam S. Jadi terdapat skalar-skalar a_{ij}, $i = 1, 2, \ldots, n$ dan $j = 1, 2, \ldots, m$ sedemikian hingga

$$u_1 = a_{11}v_1 + a_{21}v_2 + \ldots + a_{n1}v_n$$
$$u_2 = a_{12}v_1 + a_{22}v_2 + \ldots + a_{n2}v_n \qquad (4.3)$$
$$\vdots$$
$$u_m = a_{1m}v_1 + a_{2m}v_2 + \ldots + a_{nm}v_n$$

Andaikan $c_1, c_2, \ldots, c_m$ adalah skalar-skalar sedemikian hingga $c_1u_1 + c_2u_2 + \ldots + c_mu_m = c_1(a_{11}v_1 + a_{21}v_2 + \ldots + a_{n1}v_n) + c_2(a_{12}v_1 + a_{22}v_2 + \ldots + a_{n2}v_n) + \ldots + c_m(a_{1m}v_1 + a_{2m}v_2 + \ldots + a_{nm}v_n) = (c_1a_{11} + c_2a_{12} + \ldots + c_ma_{1m})v_1 + (c_1a_{21} + c_2a_{22} + \ldots + c_ma_{2m})v_2 + \ldots + (c_1a_{n1} + c_2a_{n2} + \ldots + c_ma_{nm})v_n$

Perhatikan sistem persamaan linear homogen:

$$a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + \ldots + a_{1m}c_m = 0$$
$$a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + \ldots + a_{2m}c_m = 0 \qquad (4.4)$$
$$\vdots$$
$$a_{n1}c_1 + a_{n2}c_2 + \ldots + a_{nm}c_m = 0$$

Sistem persamaan linear (4.4) merupakan sistem persamaan linear homogen dengan n persamaan dan m variabel, di mana m > n. Menurut Teorema 2.3.1, sistem persamaan linear homogen yang seperti ini pasti mempunyai penyelesaian non-trivial. Jadi terdapat skalar-skalar $c_1, c_2, \ldots, c_m$ yang tidak semuanya sama dengan nol yang memenuhi sistem (4.4), sehingga $c_1u_1 + c_2u_2 + \ldots + c_mu_m = 0v_1 + 0v_2 + \ldots + 0v_n = 0$. Dengan demikian $T = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ adalah tak bebas linear. ∎

Teorema 4.4.2.

Jika $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ dan $T = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ adalah dua basis untuk ruang vektor V, maka $n = m$.

Bukti:

Diketahui S dan T adalah basis untuk V. Maka T pasti bebas linear. Karena S basis dan T bebas linear, maka menurut Teorema 4.4.1 haruslah $m \le n$. Tetapi T juga basis dan S bebas linear, sehingga menurut Teorema 4.4.1 haruslah $n \le m$. Karena $m \le n$ dan $n \le m$, maka $m = n$. ■

Definisi 4.4.2.

Andaikan V adalah suatu ruang vektor. Jika V mempunyai suatu basis yang terdiri atas n vektor, maka kita katakan V *berdimensi* n. Subruang {0} dari V didefinisikan berdimensi 0. Ruang vektor V dikatakan *berdimensi berhingga*, jika ada himpunan berhingga vektor-vektor yang membentuk basis untuk V. Jika tidak demikian, maka V dikatakan *berdimensi tak hingga*.

Telah ditunjukkan dalam contoh 4.2.1 bahwa ruang penyelesaian dari sistem persamaan linear homogen membentuk subruang dari $\mathbb{R}^n$. Dalam contoh berikut kita akan mencari basis dan dimensi ruang penyelesaian dari sistem persamaan linear homogen yang diberikan.

Contoh 4.4.2.

Diberikan sistem persamaan linear berikut:

$$
\begin{aligned}
2x_1 + 2x_2 - x_3 \qquad\qquad + x_5 &= 0 \\
-x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 + x_5 &= 0 \\
x_1 + x_2 - 2x_3 \qquad\qquad - x_5 &= 0 \\
x_3 + x_4 - x_5 &= 0
\end{aligned}
\tag{4.5}
$$

Matriks lengkap untuk sistem (4.5) di atas adalah

$$
\begin{bmatrix}
2 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\
-1 & -1 & 2 & -3 & 1 & 0 \\
1 & 1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0
\end{bmatrix}
\tag{4.6}
$$

Dengan mereduksi matriks (4.6) menjadi bentuk eselon baris tereduksi akan diperoleh

$$
\begin{bmatrix}
1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\tag{4.7}
$$

Matriks (4.7) di atas bersesuaian dengan sistem persamaan linear berikut:

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 \qquad + x_5 &= 0 \\
x_3 + x_5 &= 0 \\
x_4 &= 0
\end{aligned}
$$

yang ekuivalen dengan

$$
\begin{aligned}
x_1 &= -x_2 - x_5 \\
x_3 &= -x_5 \\
x_4 &= 0
\end{aligned}
$$

Jika $x_5 = t$ dan $x_2 = s$, s dan t sebarang konstanta real, maka $x_3 = -t$ dan $x_1 = -s - t$. Jadi penyelesaian sistem persamaan linear (4.5) adalah $(-s - t, s, -t, 0, t)$, dengan t sebarang konstanta real. Jika penyelesaian itu kita tulis dalam bentuk vektor, maka kita peroleh $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^t = (-s-t, s, -t, 0, t)^t$. Vektor $\mathbf{x}$ di atas dapat juga ditulis sebagai

$$(-s-t,s,-t,0,t)^t = (-s,s,0,0,0)^t + (-t,0,-t,0,t)^t$$
$$= s(-1,1,0,0,0)^t + t(-1,0,-1,0,1)^t$$

Ini berarti bahwa $\mathbf{x}$ dapat ditulis sebagai kombinasi linear dari $(-1,1,0,0,0)^t$ dan $(-1,0,-1,0,1)^t$. Jadi $\{(-1,1,0,0,0)^t,(-1,0,-1,0,1)^t\}$ merentang ruang penyelesaian dari sistem (4.5). Akan ditunjukkan bahwa $\{(-1,1,0,0,0)^t,(-1,0,-1,0,1)^t\}$ adalah bebas linear. Andaikan c_1 dan c_2 adalah skalar-skalar sedemikian hingga $c_1(-1,1,0,0,0)^t + c_2(-1,0,-1,0,1)^t = (0,0,0,0,0)^t$.

$$\Leftrightarrow (-c_1,c_1,0,0,0)^t + (-c_2,0,-c_2,0,c_2)^t = (0,0,0,0,0)^t$$

$$\Leftrightarrow (-c_1-c_2,c_1,-c_2,0,c_2)^t = (0,0,0,0,0)^t$$

Sehingga
$$\begin{aligned} -c_1 - c_2 &= 0 \\ c_1 &= 0 \\ -c_2 &= 0 \\ c_2 &= 0 \end{aligned}$$

Diperoleh $c_1 = c_2 = 0$.

Jadi $\{(-1,1,0,0,0)^t,(-1,0,-1,0,1)^t\}$ adalah bebas linear.

Dengan demikian $\{(-1,1,0,0,0)^t,(-1,0,-1,0,1)^t\}$ adalah basis untuk ruang penyelesaian dari sistem persamaan linear (4.5). Jadi dimensi dari ruang penyelesaian tersebut adalah dua.

Teorema 4.4.3.

Andaikan V adalah ruang vektor berdimensi $n>0$. Maka

a. Tiap himpunan n vektor yang bebas linear merentang V.

b. Tiap himpunan n vektor yang merentang V pasti bebas linear.

Bukti:

a. Andaikan $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ adalah himpunan bebas linear dan v sebarang vektor dalam V. Menurut Teorema 4.4.1, himpunan $\{v, v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ adalah tak bebas linear. Jadi ada skalar-skalar c_0, c_1, ..., c_n yang tidak semuanya sama dengan nol sedemikian sehingga

$$c_0 v + c_1 v_1 + \ldots + c_n v_n = 0$$

Skalar $c_0 \neq 0$, sebab jika $c_0 = 0$, maka dari persamaan di atas dapat disimpulkan bahwa $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ tak bebas linear. Jadi v dapat ditulis sebagai

$$v = k_1 v_1 + k_2 v_2 + \ldots + k_n v_n$$

di mana $k_i = -c_i / c_0$, untuk $i = 1, 2, \ldots, n$. Karena v sebarang vektor dalam V, maka S merentang V.

b. Andaikan himpunan $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ merentang V dan S tak bebas linear. Maka menurut Teorema 4.3.1 salah satu dari vektor-vektor dalam S, misalkan v_n, dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari n-1 vektor lainnya. Sehingga himpunan $R = \{v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}\}$ masih merentang V. Jika himpunan R tak bebas linear, maka salah satu dari vektor-vektor dalam R , misalkan v_{n-1}, dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari n-2 vektor lainnya. Sehingga $T = \{v_1, v_2, \ldots, v_{n-2}\}$ juga masih merentang V. Demikian seterusnya, sampai kita mendapatkan himpunan k vektor (dengan k<n) yang bebas linear dan merentang V. Kontradiksi, sebab dimensi V adalah n. Jadi S bebas linear. ■

Teorema 4.4.4.

Andaikan V adalah ruang vektor berdimensi n, maka

a. Tidak ada himpunan bagian dari V, yang jumlah anggotanya kurang dari n , yang dapat merentang V.

b. Tiap himpunan bagian dari V, yang jumlah anggotanya kurang dari n dan bebas linear, dapat diperluas sehingga menjadi basis untuk V.

Bukti:

a. Andaikan ada himpunan S yang terdiri dari k vektor ($k < n$) yang dapat merentang V. Kalau S bebas linear, maka V berdimensi k dengan $k < n$. Kontradiksi, sebab dimensi V adalah n. Kalau S tak bebas linear, dengan cara seperti dalam bukti Teorema 4.4.3 (b), kita dapat memperoleh himpunan m vektor (dengan $m < k$) yang bebas linear dan merentang V. Jadi V berdimensi m (dengan $m < n$). Kontradiksi, sebab dimensi V adalah n. Jadi tidak ada himpunan bagian dari V, yang jumlah anggotanya kurang dari n, yang dapat merentang V.

b. Andaikan $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ adalah himpunan bebas linear, di mana $k < n$. Menurut Teorema 4.4.4 (a) di atas, B tidak dapat merentang V. Maka $S(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k)$ adalah subruang sejati dari V. Jadi ada vektor $\mathbf{v}_{k+1} \in V$, tetapi $\mathbf{v}_{k+1} \notin S(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k)$. Jadi himpunan $C = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_{k+1}\}$ adalah bebas linear. Jika $k+1 < n$, maka dengan cara yang sama himpunan C dapat diperluas menjadi himpunan $k+2$ vektor-vektor bebas linear. Demikian seterusnya sampai kita dapatkan himpunan $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2,$

..., v_k, v_{k+1}, ..., v_n} yang bebas linear. Dengan Teorema 4.4.3 (a), kita simpulkan bahwa himpunan n vektor ini merentang V. Jadi {v_1, v_2, ..., v_k, v_{k+1}, ..., v_n} adalah basis untuk V. ∎

5. Ruang Perkalian Dalam

Dalam bagian ini akan dibahas pengertian ruang perkalian dalam. Ruang perkalian dalam adalah sebuah ruang vektor yang dilengkapi dengan operasi yang mengawankan setiap pasang vektor dalam ruang vektor tersebut dengan suatu bilangan real yang memenuhi sifat-sifat tertentu, seperti diuraikan dalam definisi berikut.

Definisi 4.5.1

Andaikan V adalah ruang vektor. Suatu *perkalian dalam* pada V adalah operasi yang mengawankan setiap pasang vektor **x** dan **y** dalam V dengan bilangan real $\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle$ yang memenuhi syarat-syarat berikut:

i. $\langle \mathbf{x},\mathbf{x}\rangle \geq 0$ dan $\langle \mathbf{x},\mathbf{x}\rangle = 0$ bila dan hanya bila $\mathbf{x} = 0$

ii. $\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle = \langle \mathbf{y},\mathbf{x}\rangle$ untuk setiap $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in V$

iii. $\langle \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y},\mathbf{z}\rangle = \alpha\langle \mathbf{x},\mathbf{z}\rangle + \beta\langle \mathbf{y},\mathbf{z}\rangle$, untuk setiap $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$ $\in V$ dan setiap skalar α dan β.

Ruang vektor yang dilengkapi dengan suatu perkalian dalam dinamakan *ruang perkalian dalam.*

Contoh 4.5.1.

Andaikan $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^t$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)^t$ dan $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \ldots, z_n)^t$ adalah vektor-vektor pada $\mathbb{R}^n$. Didefinisikan

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n$$

Operasi yang didefinisikan di atas adalah suatu perkalian dalam pada $\mathbb{R}^n$, sebab

i. $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = x_1 x_1 + x_2 x_2 + \ldots + x_n x_n$

$= x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \geq 0$

$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 0$ bila dan hanya bila $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, ..., $x_n = 0$ yang berarti $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

ii. $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n$

$= y_1 x_1 + y_2 x_2 + \ldots + y_n x_n = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle$

iii. $\langle \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = (\alpha x_1 + \beta y_1) z_1 + \ldots + (\alpha x_n + \beta y_n) z_n$

$= (\alpha x_1 z_1 + \beta y_1 z_1) + \ldots + (\alpha x_n z_n + \beta y_n z_n)$

$= (\alpha x_1 z_1 + \ldots + \alpha x_n z_n) + (\beta y_1 z_1 + \ldots + \beta y_n z_n)$

$= \alpha \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle + \beta \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle$

Ruang vektor $\mathbb{R}^n$ bersama dengan perkalian dalam ini adalah ruang perkalian dalam.

Teorema 4.5.1.

Jika $\mathbf{u}$ adalah vektor pada ruang perkalian dalam V, maka $\langle 0, \mathbf{u} \rangle = 0$.

Bukti:

$\langle 0, \mathbf{u} \rangle = \langle 0+0, \mathbf{u} \rangle$

$= \langle 0, \mathbf{u} \rangle + \langle 0, \mathbf{u} \rangle$

$= 2\langle 0, \mathbf{u} \rangle$

Sehingga diperoleh $2\langle 0,u\rangle - \langle 0,u\rangle = 0$. Jadi $\langle 0,u\rangle = 0$. ■

Definisi 4.5.2.

Andaikan V adalah ruang perkalian dalam. Jika $u \in V$, maka *panjang (norma)* u, ditulis $\|u\|$, didefinisikan sebagai:

$$\|u\| = \sqrt{\langle u,u\rangle} = \langle u,u\rangle^{1/2}.$$

Jika $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)^t$ adalah vektor pada $\mathbb{R}^n$ yang dilengkapi dengan perkalian dalam yang didefinisikan pada Contoh 4.5.1, maka norma u adalah

$$\|u\| = (u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_n^2)^{1/2}.$$

Teorema 4.5.2.

Jika u dan v adalah vektor-vektor pada ruang perkalian dalam V, maka $|\langle u,v\rangle| \leq \|u\|\|v\|$.

Bukti:

Jika $u = 0$, maka menurut Teorema 4.5.1, $\langle u,v\rangle = 0$. Selanjutnya $\|u\|\|v\| = \langle u,u\rangle^{1/2}\langle v,v\rangle^{1/2} = 0\ \langle v,v\rangle^{1/2} = 0$. Jadi $|\langle u,v\rangle| = \|u\|\|v\| = 0$.

Jika $u \neq 0$, maka $\langle u,u\rangle > 0$ dan untuk sebarang skalar k berlaku

$$\langle ku+v, ku+v\rangle \geq 0$$

$$\Leftrightarrow k\langle u, ku+v\rangle + \langle v, ku+v\rangle \geq 0$$

$$\Leftrightarrow k^2\langle u,u\rangle + k\langle u,v\rangle + k\langle v,u\rangle + \langle v,v\rangle \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \langle u,u\rangle k^2 + 2\langle u,v\rangle k + \langle v,v\rangle \geq 0$$

yang berlaku hanya bila $4\langle u,v\rangle^2 - 4\langle u,u\rangle\langle v,v\rangle \leq 0 \Leftrightarrow \langle u,v\rangle^2 \leq \langle u,u\rangle\langle v,v\rangle$. Karena $\|u\|^2 = \langle u,u\rangle$ dan $\|v\|^2 = \langle v,v\rangle$, maka diperoleh $\langle u,v\rangle^2 \le \|u\|^2\|v\|^2$. Sehingga $|\langle u,v\rangle| \le \|u\|\|v\|$. ■

Dengan menggunakan Teorema 4.5.2, berikut kita definisikan sudut antara dua vektor dalam ruang perkalian dalam.

Definisi 4.5.3.

Andaikan **u** dan **v** adalah vektor-vektor tak nol pada ruang perkalian dalam V. Besar sudut antara vektor **u** dan **v** adalah θ yang memenuhi $\cos\theta = \langle u,v\rangle/\|u\|\|v\|$, $(0 \le \theta \le \pi)$.

Teorema 4.5.3.

Andaikan u dan v adalah vektor-vektor pada ruang perkalian dalam V. Maka

a. $\|u\| \ge 0$ dan $\|u\| = 0$ bila dan hanya bila $u = 0$.

b. $\|ku\| = |k|\,\|u\|$, untuk setiap skalar k.

c. $\|u+v\| \le \|u\| + \|v\|$.

Bukti:

a. Karena $\|u\| = \langle u,u\rangle^{1/2}$ dan u vektor pada ruang hasil kali dalam V, maka jelas bahwa sifat a) dipenuhi.

b. $\|ku\|^2 = \langle ku,ku\rangle = k^2 \langle u,u\rangle = k^2\|u\|^2$. Sehingga diperoleh $\|ku\| = |k|\,\|u\|$.

c. $\|u+v\|^2 = \langle u+v,u+v\rangle$

$$= \langle u,u\rangle + 2\langle u,v\rangle + \langle v,v\rangle$$

$$= \|u\|^2 + 2\langle u,v\rangle + \|v\|^2$$

$$\le \|u\|^2 + 2|\langle u,v\rangle| + \|v\|^2.$$

Menurut Teorema 4.5.2, $|\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle| \leq \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|$, sehingga $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 \leq \|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{v}\|^2 = (\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|)^2$. Jadi $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$. ∎

Definisi 4.5.4.

Suatu vektor **u** dalam ruang perkalian dalam V dinamakan *vektor satuan*, jika $\|\mathbf{u}\| = 1$.

Jika **u** adalah vektor tak nol pada ruang hasil kali dalam V, maka vektor $\mathbf{u}/\|\mathbf{u}\|$ adalah vektor satuan, sebab

$$\left\|\mathbf{u}/\|\mathbf{u}\|\right\| = \left\|(1/\|\mathbf{u}\|)\mathbf{u}\right\| = (1/\|\mathbf{u}\|)\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{u}\|/\|\mathbf{u}\| = 1.$$

Definisi 4.5.5.

Vektor **u** dikatakan *ortogonal* terhadap vektor **v** dalam ruang perkalian dalam V, jika $\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle = 0$. Jika **u** ortogonal terhadap setiap vektor pada himpunan W, maka **u** dikatakan ortogonal terhadap W.

Jika vektor **u** ortogonal terhadap **v**, maka **v** ortogonal terhadap **u**, sehingga dapat dikatakan bahwa **u** dan **v** (saling) ortogonal.

Teorema 4.5.4.

Jika **u** dan **v** adalah vektor-vektor ortogonal pada ruang perkalian dalam V, maka $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{u}\|^2$.

Bukti:

$\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 = \langle \mathbf{u}+\mathbf{v},\mathbf{u}+\mathbf{v}\rangle$

$$= \langle u,u\rangle + 2\langle u,v\rangle + \langle v,v\rangle$$

$$= \langle u,u\rangle + \langle v,v\rangle$$

$$= \|u\|^2 + \|v\|^2. \quad \blacksquare$$

6. Himpunan Ortonormal

Andaikan S adalah himpunan yang anggotanya adalah vektor-vektor $e_1 = (1,0,\ldots,0)^t$, $e_2 = (0,1,0,\ldots,0)^t$, $\ldots$, $e_n = (0,0,\ldots,1)^t$. S adalah basis baku pada ruang vektor $\mathbb{R}^n$. Perhatikan bahwa vektor-vektor dalam S ini mempunyai sifat khusus, yaitu untuk setiap $i,j = 1, 2, \ldots, n$ dan $i \neq j$, $\langle e_i, e_j\rangle = e_i^t e_j = 0$ dan $\|e_i\| = 1$. Sehingga untuk $i \neq j$, e_i dan e_j adalah ortogonal. Himpunan dengan sifat seperti ini adalah himpunan ortogonal dalam $\mathbb{R}^n$. Berikut didefinisikan himpunan ortogonal untuk sebarang ruang perkalian dalam.

Definisi 4.6.1.

Andaikan $v_1, v_2, \ldots, v_n$ adalah vektor-vektor pada ruang perkalian dalam V. Himpunan $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ dinamakan *himpunan ortogonal*, jika $\langle v_i, v_j\rangle = 0$, untuk setiap $i,j = 1, 2, \ldots, n$ dan $i \neq j$. Himpunan ortogonal yang anggotanya adalah vektor-vektor satuan dinamakan *himpunan ortonormal*.

Diberikan himpunan ortogonal $S = \{ v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, di mana $v_1, v_2, \ldots, v_n$ adalah vektor-vektor tak nol pada ruang perkalian dalam V. Didefinisikan $\mathbf{u}_i = (1/\|\mathbf{v}_i\|)\mathbf{v}_i$, untuk i = 1, 2, ..., n. Maka himpunan yang anggotanya $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, ..., $\mathbf{u}_n$ adalah himpunan ortonormal.

Teorema 4.6.1.

Bila S = $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ adalah himpunan ortogonal vektor-vektor tak nol dalam ruang perkalian dalam V, maka himpunan S bebas linear.

Bukti:

Andaikan c_1, c_2, ..., c_n adalah skalar-skalar sedemikian hingga $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots + c_n\mathbf{v}_n = 0$. Maka untuk setiap $\mathbf{v}_i$ dalam S berlaku $\langle c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots + c_n\mathbf{v}_n, \mathbf{v}_i\rangle = \langle 0, \mathbf{v}_i\rangle = 0$ (Teorema 4.5.1). Sehingga untuk setiap i = 1, 2, ..., n

$$c_1\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_i\rangle + c_2\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_i\rangle + \ldots + c_n\langle \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_i\rangle = 0$$

Karena S himpunan ortogonal, yaitu untuk $j \neq i$, $\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j\rangle = 0$, maka persamaan di atas dapat direduksi menjadi

$$c_i\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i\rangle = 0, \text{ untuk } i = 1, 2, \ldots, n$$

Karena $\mathbf{v}_i$ vektor tak nol, maka $\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i\rangle \neq 0$, sehingga $c_i = 0$ untuk setiap i = 1, 2, ..., n. Jadi himpunan S adalah bebas linear. ■

Definisi 4.6.2.

Suatu himpunan ortonormal S = $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ dinamakan *basis ortonormal* untuk ruang perkalian dalam V, jika S basis untuk V.

Teorema 4.6.2.

Jika $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ adalah basis ortonormal untuk ruang perkalian dalam V dan u sebarang vektor dalam V, maka $u = \langle u,v_1\rangle v_1 + \langle u,v_2\rangle v_2 + \ldots + \langle u,v_n\rangle v_n$.

Bukti:

Karena S basis untuk V dan u vektor dalam V, maka u dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari vektor-vektor dalam S, yaitu ada skalar-skalar $c_1, c_2, \ldots, c_n$ sedemikian hingga

$$u = c_1v_1 + c_2v_2 + \ldots + c_nv_n$$

Untuk setiap v_i dalam S, $i = 1, 2, \ldots, n$

$$\begin{aligned}\langle u,v_i\rangle &= \langle c_1v_1 + c_2v_2 + \ldots + c_nv_n, v_i\rangle \\ &= c_1\langle v_1,v_i\rangle + c_2\langle v_2,v_i\rangle + \ldots + c_n\langle v_n,v_i\rangle\end{aligned}$$

Karena S himpunan ortonormal, maka $\langle v_i,v_i\rangle = \|v_i\|^2 = 1$ dan $\langle v_i,v_j\rangle = 0$, untuk $i \neq j$, sehingga diperoleh $\langle u,v_i\rangle = c_i$, untuk $i = 1, 2, \ldots, n$. Jadi $u = \langle u,v_1\rangle v_1 + \langle u,v_2\rangle v_2 + \ldots + \langle u,v_n\rangle v_n$. ■

Teorema 4.6.3.

Andaikan S adalah subruang dari ruang perkalian dalam V dan x sebarang vektor dalam V. Andaikan $B = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ adalah basis ortonormal untuk S. Jika $p = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$, di mana $c_i = \langle x,x_i\rangle$ untuk $i = 1, 2, \ldots, n$, maka $p - x$ ortogonal pada S.

Bukti:

Untuk setiap $i = 1, 2, \ldots, n$ berlaku

$$\langle p-x,x_i\rangle = \langle p,x_i\rangle - \langle x,x_i\rangle$$

$$= (c_1\langle \mathbf{x}_1,\mathbf{x}_i\rangle + \ldots + c_n\langle \mathbf{x}_n,\mathbf{x}_i\rangle) - \langle \mathbf{x},\mathbf{x}_i\rangle$$

$$= c_i - c_i = 0.$$

Jadi $\mathbf{p} - \mathbf{x}$ ortogonal pada setiap $\mathbf{x}_i$. Andaikan $\mathbf{y}$ sebarang vektor dalam S. Maka ada skalar-skalar $b_1, \ldots, b_n$ sedemikian hingga

$$\mathbf{y} = b_1\mathbf{x}_1 + \ldots + b_n\mathbf{x}_n$$

Sehingga $\langle \mathbf{p}-\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle = \langle \mathbf{p}-\mathbf{x}, b_1\mathbf{x}_1+\ldots+b_n\mathbf{x}_n\rangle$

$$= b_1\langle \mathbf{p}-\mathbf{x},\mathbf{x}_1\rangle + \ldots + b_n\langle \mathbf{p}-\mathbf{x},\mathbf{x}_n\rangle = 0.$$

Jadi $\mathbf{p} - \mathbf{x}$ ortogonal pada setiap $\mathbf{y}$ dalam S, yaitu $\mathbf{p} - \mathbf{x}$ ortogonal pada S. ■

Vektor $\mathbf{p}$ yang didefinisikan pada Teorema 4.6.3 dinamakan *proyeksi ortogonal vektor* $\mathbf{x}$ *pada* S.

Teorema 4.6.4. *(Proses Gram-Schmidt)*

Andaikan B = $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ adalah basis untuk ruang perkalian dalam V. Didefinisikan $\mathbf{u}_1 = (1/\|\mathbf{x}_1\|)\mathbf{x}_1$ dan $\mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ didefinisikan sebagai $\mathbf{u}_{k+1} = (1/\|\mathbf{x}_{k+1}-\mathbf{p}_k\|)(\mathbf{x}_{k+1}-\mathbf{p}_k)$, untuk k = 1, 2, ..., n-1, di mana $\mathbf{p}_k = \langle \mathbf{x}_{k+1},\mathbf{u}_1\rangle\mathbf{u}_1 + \langle \mathbf{x}_{k+1},\mathbf{u}_2\rangle\mathbf{u}_2 + \ldots + \langle \mathbf{x}_{k+1},\mathbf{u}_k\rangle\mathbf{u}_k$ adalah proyeksi ortogonal $\mathbf{x}_{k+1}$ pada $S(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\ldots,\mathbf{u}_k)$. Himpunan R = $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ adalah basis ortonormal untuk V.

Bukti:

Dibuktikan dengan induksi matematika.

Jelas bahwa $S(\mathbf{x}_1) = S(\mathbf{u}_1)$, sebab $\mathbf{u}_1$ adalah vektor satuan yang dibentuk dari $\mathbf{x}_1$. Andaikan $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k$ dibangun sedemikian hingga $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ adalah himpunan ortonormal dan $S(u_1, u_2, \ldots, u_k) = S(x_1, x_2, \ldots, x_k)$. Karena p_k merupakan kombinasi linear dari u_1, u_2, ..., u_k, maka $p_k \in S(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ dan $x_{k+1} - p_k \in S(x_1, x_2, \ldots, x_{k+1})$, sebab $x_{k+1} - p_k = x_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} c_i x_i$. Karena himpunan $\{x_1, x_2, \ldots, x_{k+1}\}$ bebas linear, maka $x_{k+1} - p_k \neq 0$. Dan menurut Teorema 4.6.3, $x_{k+1} - p_k$ ortogonal pada setiap u_i, $i = 1, 2, \ldots, k$. Jadi $\{u_1, u_2, \ldots, u_{k+1}\}$ adalah himpunan ortonormal dalam $S(x_1, x_2, \ldots, x_{k+1})$. Karena $\{u_1, u_2, \ldots, u_{k+1}\}$ bebas linear, maka $\{u_1, u_2, \ldots, u_{k+1}\}$ adalah basis untuk $S(x_1, x_2, \ldots, x_{k+1})$. Akibatnya $S(x_1, x_2, \ldots, x_{k+1}) = S(u_1, u_2, \ldots, u_{k+1})$. Jadi terbukti bahwa $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ adalah basis ortonormal untuk V.■

Contoh 4.6.1.

Diberikan vektor-vektor $v_1 = (1,0)^t$ dan $v_2 = (3,-5)^t$. Himpunan $S = \{v_1, v_2\}$ adalah basis untuk $\mathbb{R}^2$. Didefinisikan $u_1 = (1/\|v_1\|)v_1 = (1,0)^t$. Dihitung $v_2 - \langle v_2, u_1\rangle u_1 = (0,-5)^t = x$. Sehingga $(1/\|x\|)x = (0,-1)^t = u_2$. Jadi $\{u_1, u_2\}$ adalah basis ortonormal untuk $\mathbb{R}^2$.

Definisi 4.6.3.

Suatu matriks bujursangkar A yang berordo n disebut *matriks ortogonal*, jika vektor-vektor kolom dari A membentuk himpunan ortonormal dalam $\mathbb{R}^n$.

Teorema 4.6.5.

Matriks bujursangkar A yang berordo n adalah matriks ortogonal bila dan hanya bila $A^tA = I$.

Bukti:

Andaikan v_1, v_2, ..., v_n adalah vektor-vektor kolom dari A. Menurut Definisi 4.6.3, matriks A ortogonal bila dan hanya bila $\langle v_i, v_j \rangle = v_i{}^t v_j = 0$, untuk $i \neq j$ dan $\langle v_i, v_j \rangle = v_i{}^t v_j = 1$ untuk $i = j$. Padahal $v_i{}^t v_j$ adalah elemen baris ke-i kolom ke-j dari A^tA. Jadi A adalah matriks ortogonal bila dan hanya bila $A^tA = I$. ∎

Dari Teorema 4.6.5 kita juga dapat menyimpulkan bahwa suatu matriks bujursangkar A adalah ortogonal bila dan hanya bila $A^{-1} = A^t$.

7. **Koordinat; Perubahan Basis**

Dalam bagian ini kita akan membahas vektor koordinat relatif terhadap suatu basis dalam sebarang ruang vektor. Basis yang dimaksud di sini adalah basis yang diurutkan dengan urutan tertentu dan akan disebut *basis terurut*. Namun terlebih dahulu dibuktikan teorema berikut.

Teorema 4.7.1.

Andaikan $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ adalah basis untuk ruang vektor V. Maka untuk sebarang vektor v dalam V, terdapat tunggal n-tupple skalar-skalar c_1, c_2, ..., c_n sedemikian sehingga $\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots + c_n\mathbf{v}_n$

Bukti:

Andaikan ada skalar-skalar c_1, c_2, ..., c_n dan b_1, b_2, ..., b_n sedemikian sehingga

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots + c_n\mathbf{v}_n \text{ dan}$$

$$\mathbf{v} = b_1\mathbf{v}_1 + b_2\mathbf{v}_2 + \ldots + b_n\mathbf{v}_n$$

Maka $(c_1-b_1)\mathbf{v}_1 + (c_2-b_2)\mathbf{v}_2 + \ldots + (c_n-b_n)\mathbf{v}_n = 0$

Karena S bebas linear, maka diperoleh $c_1 = b_1$, $c_2 = b_2$, ..., $c_n = b_n$. ∎

Definisi 4.7.1.

Andaikan $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ adalah basis terurut untuk ruang vektor V. Jika $\mathbf{v}$ adalah vektor dalam V, maka ada skalar-skalar c_1, c_2, ..., c_n sedemikian sehingga $\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots + c_n\mathbf{v}_n$. Vektor $(c_1, c_2, \ldots, c_n)^t$ dinamakan *vektor koordinat* $\mathbf{v}$ *relatif terhadap basis* S dan ditulis $(\mathbf{v})_S$.

Contoh 4.7.1.

Diberikan vektor-vektor $\mathbf{v}_1 = (1,2,1)^t$, $\mathbf{v}_2 = (2,9,0)^t$ dan $\mathbf{v}_3 = (3,3,4)^t$. Himpunan $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ adalah basis untuk $\mathbb{R}^3$. Jika $\mathbf{v} = (5,-1,9)^t$ adalah vektor dalam $\mathbb{R}^3$, maka ada skalar-skalar c_1, c_2 dan c_3 sedemikan sehingga

$$(5,-1,9)^t = c_1(1,2,1)^t + c_2(2,9,0)^t + c_3(3,3,4)^t$$

Persamaan di atas ekuivalen dengan sistem persamaan linear berikut:

$$\begin{aligned} c_1 + 2c_2 + 3c_3 &= 5 \\ 2c_1 + 9c_2 + 3c_3 &= -1 \\ c_1 + 4c_3 &= 9 \end{aligned}$$

Penyelesaian sistem persamaan di atas adalah (1, -1, 2). Jadi vektor koordinat **v** relatif terhadap basis S, yaitu $(\mathbf{v})_S = (1,-1,2)^t$.

Teorema 4.7.2.

Andaikan $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ adalah basis ortonormal untuk ruang perkalian dalam V. Jika $(\mathbf{u})_S = (u_1, u_2, \ldots, u_n)^t$ dan $(\mathbf{v})_S = (v_1, v_2, \ldots, v_n)^t$, maka

a. $\|\mathbf{u}\| = (u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_n^2)^{1/2}$

b. $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \ldots + u_n v_n$

Bukti:

a. $\|\mathbf{u}\| = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle^{1/2}$

$$= \langle \sum_{i=1}^{n} u_i x_i , \sum_{i=1}^{n} u_i x_i \rangle^{1/2}$$

$$= (u_1 \langle x_1 , \sum_{i=1}^{n} u_i x_i \rangle + \ldots + u_n \langle x_n , \sum_{i=1}^{n} u_i x_i \rangle)^{1/2}$$

$$= [(u_1^2 \langle x_1, x_1 \rangle + u_1 u_2 \langle x_1, x_2 \rangle + \ldots + u_1 u_n \langle x_1, x_n \rangle) + \ldots + (u_n u_1 \langle x_n, x_1 \rangle + u_n u_2 \langle x_n, x_2 \rangle + \ldots + u_n^2 \langle x_n, x_n \rangle)]^{1/2}$$

$$= (u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_n^2)^{1/2}$$

b. $$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} u_i x_i , \sum_{i=1}^{n} v_i x_i \rangle$$

$$= u_1 v_1 + u_2 v_2 + \ldots + u_n v_n . \qquad \blacksquare$$

Teorema 4.7.3.

Andaikan $B = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ adalah basis terurut untuk ruang vektor V. Jika $B' = \{u_1', u_2', \ldots, u_n'\}$ juga basis terurut untuk ruang vektor yang sama, maka untuk sebarang vektor $\mathbf{v} \in V$, $(\mathbf{v})_B = P(\mathbf{v})_{B'}$, di mana P adalah matriks yang kolom ke-i-nya adalah $(u_i')_B$, untuk $i = 1, 2, \ldots, n$.

Bukti:

Andaikan $(u_i')_B = (\alpha_{1i}, \alpha_{2i}, \ldots, \alpha_{ni})^t$, untuk $i = 1, 2, \ldots, n$. Maka

$$u_1' = \alpha_{11}u_1 + \alpha_{21}u_2 + \ldots + \alpha_{n1}u_n$$

$$u_2' = \alpha_{12}u_1 + \alpha_{22}u_2 + \ldots + \alpha_{n2}u_n$$

$$\vdots$$

$$u_n' = \alpha_{1n}u_1 + \alpha_{2n}u_2 + \ldots + \alpha_{nn}u_n$$

Andaikan $\mathbf{v} \in V$ dan $(\mathbf{v})_{B'} = (c_1, c_2, \ldots, c_n)^t$. Maka

$$\begin{aligned}
\mathbf{v} &= c_1u_1' + c_2u_2' + \ldots + c_nu_n' \\
&= c_1(\alpha_{11}u_1 + \alpha_{21}u_2 + \ldots + \alpha_{n1}u_n) + c_2(\alpha_{12}u_1 + \alpha_{22}u_2 + \\
&\quad \ldots + \alpha_{n2}u_n) + \ldots + c_n(\alpha_{1n}u_1 + \alpha_{2n}u_2 + \ldots + \alpha_{nn}u_n) \\
&= (c_1\alpha_{11}u_1 + c_2\alpha_{12}u_1 + \ldots + c_n\alpha_{1n}u_1) + (c_1\alpha_{21}u_2 + \\
&\quad c_2\alpha_{22}u_2 + \ldots + c_n\alpha_{2n}u_2) + \ldots + (c_1\alpha_{n1}u_n + c_2\alpha_{n2}u_n + \\
&\quad \ldots + c_n\alpha_{nn}u_n) \\
&= (c_1\alpha_{11} + c_2\alpha_{12} + \ldots + c_n\alpha_{1n})u_1 + (c_1\alpha_{21} + c_2\alpha_{22} + \\
&\quad \ldots + c_n\alpha_{2n})u_2 + \ldots + (c_1\alpha_{n1} + c_2\alpha_{n2} + \ldots + \\
&\quad c_n\alpha_{nn})u_n
\end{aligned}$$

Jadi $(\mathbf{v})_B = (c_1\alpha_{11} + c_2\alpha_{12} + \ldots + c_n\alpha_{1n},\ c_1\alpha_{21} + c_2\alpha_{22} + \ldots + c_n\alpha_{2n},\ \ldots,\ c_1\alpha_{n1} + c_2\alpha_{n2} + \ldots + c_n\alpha_{nn})^t =$

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & & & \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}. \text{ Jika } P = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & & & \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{bmatrix},$$

maka diperoleh $(v)_B = P(v)_{B'}$. ∎

Matriks P dalam Teorema 4.7.3 dinamakan *matriks transisi* dari B' ke B.

Contoh 4.7.2.

Jika $B = \{u_1, u_2\}$ dan $B' = \{u_1', u_2'\}$, di mana $u_1 = (1,0)^t$, $u_2 = (0,1)^t$, $u_1' = (1,1)^t$ dan $u_2' = (2,1)^t$ adalah basis untuk $\mathbb{R}^2$. Maka $u_1' = u_1 + u_2$ dan $u_2' = 2u_1 + u_2$. Sehingga $(u_1')_B = (1,1)^t$ dan $(u_2')_B = (2,1)^t$. Jadi matriks transisi dari B' ke B, yaitu $P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Teorema 4.7.4.

Jika P adalah matriks transisi dari basis terurut B' ke B, maka P non-singular dan P^{-1} matriks transisi dari B ke B'.

Bukti:

Andaikan $B = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ dan $B' = \{u_1', u_2', \ldots, u_n'\}$ adalah basis terurut untuk ruang vektor V. Andaikan Q adalah matriks transisi dari B ke B' dan PQ =

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & & & \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}$$

Untuk setiap $x \in V$, berlaku $(x)_B = P(x)_{B'}$ dan $(x)_{B'} = Q(x)_B$. Sehingga $(x)_B = PQ(x)_B$. Untuk $x = u_1$, diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & & & \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ \vdots \\ c_{n1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$ Demikian juga

untuk $x = u_2, u_3, \ldots, u_n$ diperoleh $\begin{bmatrix} c_{12} \\ c_{22} \\ \vdots \\ c_{n2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots,$

$\begin{bmatrix} c_{1n} \\ c_{2n} \\ \vdots \\ c_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$. Jadi $PQ = I$, di mana I matriks identitas berordo n. Ini berarti bahwa P non-singular dan $Q = P^{-1}$.■

BAB V

NILAI EIGEN DAN VEKTOR EIGEN

1. Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Pada bagian ini kita akan membahas nilai eigen dan vektor eigen suatu matriks bujursangkar. Pembahasan ini meliputi pengertian dan cara menentukan nilai eigen dan vektor eigen suatu matriks bujursangkar. Berikut diuraikan definisi nilai eigen dan vektor eigen.

Definisi 5.1.1.

Andaikan A matriks bujursangkar berordo n. Suatu skalar λ dinamakan *nilai eigen* dari A, jika ada vektor tak nol $\mathbf{x}$ dalam $\mathbb{R}^n$ sedemikian hingga $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$. Vektor $\mathbf{x}$ yang demikian itu dinamakan *vektor eigen* yang bersesuaian dengan nilai eigen λ.

Contoh 5.1.1.

Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$

Vektor $\mathbf{x} = (2,1)^t$ dinamakan vektor eigen dari A yang bersesuaian dengan nilai eigen 2, sebab

$$\begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Berikut ini adalah sebuah teorema yang membantu kita dalam menentukan nilai eigen matriks bujursangkar.

Teorema 5.1.1.

Andaikan A matriks bujursangkar berordo n dan I matriks identitas berordo n. Suatu skalar λ adalah nilai eigen dari A bila dan hanya bila $|\lambda I-A| = 0$.

Bukti:

Menurut Definisi 5.1.1, λ adalah nilai eigen dari A bila dan hanya bila terdapat vektor tak nol $\mathbf{x}$ dalam $\mathbb{R}^n$ sedemikian hingga

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \tag{5.1}$$

Persamaan (5.1) ini ekuivalen dengan persamaan berikut :

$$A\mathbf{x} = \lambda I\mathbf{x}$$

$$\Leftrightarrow \lambda I\mathbf{x}-A\mathbf{x} = 0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda I-A)\mathbf{x} = 0 \tag{5.2}$$

Menurut Teorema 2.4.3, persamaan (5.2) mempunyai penyelesaian non-trivial bila dan hanya bila $(\lambda I-A)$ adalah matriks singular. Dan menurut Teorema 3.2.2 matriks $(\lambda I-A)$ adalah singular bila dan hanya bila $|\lambda I-A| = 0$. Jadi λ adalah nilai eigen dari A bila dan hanya bila $|\lambda I-A| = 0$.■

Andaikan $A = (a_{ij})_{nxn}$ dan I matriks identitas berordo n, maka matriks $(\lambda I-A)$ dapat ditulis sebagai

$$\begin{bmatrix} \lambda-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda-a_{nn} \end{bmatrix}$$

Karena determinan suatu matriks merupakan jumlahan semua hasil kali elementer bertanda dari matriks tersebut, maka pangkat tertinggi yang mungkin untuk λ dalam $|\lambda I-A|$ adalah n, yaitu diperoleh dari perkalian elemen-elemen pada diagonal utama matriks di atas. Sehingga $|\lambda I-A| = \lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + c_2\lambda^{n-2} + \ldots + c_n$, di mana c_1, c_2, ..., c_n konstanta-konstanta real. Polinom $|\lambda I-A|$ ini dinamakan *polinom karakteristik* dari matriks A. Sedang persamaan $|\lambda I-A| = 0$ dinamakan *persamaan karakteristik* dari matriks A.

Contoh 5.1.2.

Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$

Maka $|\lambda I-A| = \begin{vmatrix} \lambda-5 & -7 \\ -2 & \lambda+4 \end{vmatrix}$

$= [(\lambda-5)(\lambda+4)] + 14$

$= \lambda^2 - \lambda - 6$

Persamaan karakteristik dari matriks A adalah $\lambda^2 - \lambda - 6 = 0$ yang ekuivalen dengan $(\lambda-3)(\lambda+2) = 0$, sehingga diperoleh $\lambda = 3$ atau $\lambda = -2$. Jadi matriks A mempunyai dua nilai eigen, yaitu 3 dan -2.

Contoh 5.1.3.

Andaikan $B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Maka $|\lambda I-B| = \begin{vmatrix} \lambda-4 & 0 & -1 \\ 2 & \lambda-1 & 0 \\ 2 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix}$

$$= (\lambda-4)\begin{vmatrix}\lambda-1 & 0\\ 0 & \lambda-1\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}2 & \lambda-1\\ 2 & 0\end{vmatrix}$$

$$= [(\lambda-4)\ (\lambda-1)^2] + 2(\lambda-1)$$

$$= (\lambda-1)\ [((\lambda-4)\ (\lambda-1)) + 2]$$

$$= (\lambda-1)\ (\lambda^2-5\lambda+6)$$

$$= \lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6$$

Persamaan karakteristik dari matriks B adalah $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0$ yang ekuivalen dengan $(\lambda-1)\ (\lambda-2)\ (\lambda-3) = 0$, sehingga diperoleh $\lambda = 1$ atau $\lambda = 2$ atau $\lambda = 3$. Dengan demikian matriks B mempunyai 3 nilai eigen, yaitu 1, 2 dan 3.

Contoh 5.1.4.

Andaikan $A = \begin{bmatrix}2 & -1 & 0\\ -1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$

Maka $|\lambda I-A| = \begin{vmatrix}\lambda-2 & 1 & 0\\ 1 & \lambda-2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda-3\end{vmatrix}$

$$= (\lambda-2)\begin{vmatrix}\lambda-2 & 0\\ 0 & \lambda-3\end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & \lambda-3\end{vmatrix}$$

$$= [(\lambda-2)(\lambda-2)(\lambda-3)] - (\lambda-3)$$

$$= (\lambda-3)\ [(\lambda-2)^2 - 1]$$

$$= (\lambda-3)\ (\lambda^2-4\lambda+3)$$

$$= (\lambda-3)\ (\lambda-1)\ (\lambda-3)$$

$$= (\lambda-3)^2\ (\lambda-1)$$

Persamaan karakteristik dari matriks A adalah $(\lambda-3)^2\ (\lambda-1) = 0$, sehingga diperoleh $\lambda = 3$ atau $\lambda = 1$. Jadi nilai eigen dari matriks A adalah 3 dan 1.

Dari contoh-contoh di atas terlihat bahwa nilai eigen suatu matriks adalah akar-akar dari persamaan karakteristiknya. Jadi, jika A matriks bujursangkar berordo n, maka A mempunyai paling banyak n nilai eigen berbeda.

Selanjutnya kita akan membahas cara untuk menentukan vektor eigen yang bersesuaian dengan suatu nilai eigen. Suatu vektor tak nol **x** dinamakan *vektor eigen* dari matriks A yang bersesuaian dengan nilai eigen λ, jika memenuhi sifat $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$. Atau secara ekuivalen vektor eigen **x** adalah penyelesaian non-trivial dari sistem persamaan $(\lambda I-A)\mathbf{x} = 0$.

Dapat ditunjukkan bahwa himpunan penyelesaian sistem $(\lambda I-A)\mathbf{x} = 0$ merupakan subruang dari $\mathbb{R}^n$, yang disebut *ruang penyelesaian*. Andaikan W adalah himpunan penyelesaian dari sistem $(\lambda I-A)\mathbf{x} = 0$. Ambil sebarang $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in W$. Maka $(\lambda I-A)\mathbf{w}_1 = 0$ dan $(\lambda I-A)\mathbf{w}_2 = 0$, sehingga $(\lambda I-A)(\mathbf{w}_1+\mathbf{w}_2) = (\lambda I-A)\mathbf{w}_1 + (\lambda I-A)\mathbf{w}_2 = 0 + 0 = 0$. Dan untuk sebarang skalar k, $(\lambda I-A)k\mathbf{w}_1 = k(\lambda I-A)\mathbf{w}_1 = k0 = 0$. Jadi untuk sebarang $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in W$, $(\mathbf{w}_1+\mathbf{w}_2) \in W$ dan $k\mathbf{w}_1 \in W$. Dengan demikian terbukti bahwa W adalah subruang dari $\mathbb{R}^n$. Ruang penyelesaian ini juga dinamakan *ruang eigen* dari matriks A yang bersesuaian dengan nilai eigen λ.

Contoh 5.1.5.

Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$

Dari perhitungan dalam Contoh 5.1.2 diperoleh bahwa 3 dan -2 adalah nilai eigen dari matriks A. Selanjutnya kita akan menentukan vektor eigen matriks A yang bersesuaian dengan masing-masing nilai eigen.

1. Andaikan $\mathbf{x} = (x_1,x_2)^t$ adalah vektor eigen matriks A yang bersesuaian dengan nilai eigen 3, maka $\mathbf{x}$ adalah penyelesaian non-trivial dari sistem persamaan $(3I-A)\mathbf{x} = 0$, yaitu $\begin{bmatrix} -2 & -7 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

   Matriks lengkap dari sistem di atas adalah $\begin{bmatrix} -2 & -7 & 0 \\ 2 & 7 & 0 \end{bmatrix}$.

   Bentuk eselon baris tereduksi dari matriks lengkap itu adalah $\begin{bmatrix} 1 & 7/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, yang bersesuaian dengan sistem persamaan linear $x_1 + 7x_2/2 = 0$ atau $x_1 = -7x_2/2$. Jika dipilih $x_2 = s$, s sebarang konstanta real, maka $x_1 = -7s/2$. Jadi, $(-7s/2,s)$ dengan s sebarang konstanta real adalah penyelesaian sistem persamaan $(3I-A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Dengan demikian vektor eigen matriks A yang bersesuaian dengan nilai eigen 3 adalah $\mathbf{x} = (-7s/2,s)^t$ dengan s sebarang konstanta real dan $s \neq 0$. Vektor $\mathbf{x}$ ini dapat ditulis sebagai $\mathbf{x} = s(-7/2,1)^t$. Karena himpunan sebuah vektor tak nol adalah bebas linear, maka $\{(-7/2,1)^t\}$ bebas linear. sehingga $\{(-7/2,1)^t\}$ merupakan basis untuk ruang eigen matriks A yang bersesuaian dengan nilai eigen 3. Jadi dimensi ruang eigen ini adalah 1.

2. Andaikan $\mathbf{x} = (x_1,x_2)^t$ adalah vektor eigen matriks A

yang bersesuaian dengan nilai eigen -2, maka **x** adalah penyelesaian non-trivial dari sistem $(-2I-A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, yaitu $\begin{bmatrix} -7 & -7 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Matriks lengkap dari sistem di atas adalah $\begin{bmatrix} -7 & -7 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$. Bentuk eselon baris tereduksi dari matriks lengkap itu adalah $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, yang bersesuaian dengan sistem persamaan $x_1 + x_2 = 0$ atau $x_1 = -x_2$. Jika $x_2 = u$, u sebarang konstanta real, maka $x_1 = -u$. Jadi $(-u,u)$ dengan u sebarang konstanta real adalah penyelesaian sistem $(-2I-A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Dengan demikian vektor eigen matriks A yang bersesuaian dengan nilai eigen -2 adalah $\mathbf{x} = (-u,u)^t$ dengan u sebarang konstanta real dan $u \neq 0$. Vektor **x** ini dapat ditulis sebagai $\mathbf{x} = u(-1,1)^t$, sehingga $\{(-1,1)^t\}$ adalah basis untuk ruang eigen matriks A yang bersesuaian dengan nilai eigen -2. Dengan demikian dimensi ruang eigen matriks A yang bersesuaian dengan nilai eigen -2 adalah 1.

Andaikan $p(\lambda)$ adalah polinom karakteristik dari matriks A dan $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ adalah semua nilai eigen matriks A, di mana $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \ldots \neq \lambda_k$. Maka $p(\lambda)$ dapat ditulis sebagai $p(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{m_1} (\lambda-\lambda_2)^{m_2} \ldots (\lambda-\lambda_k)^{m_k}$, di mana m_i adalah bilangan asli, $i = 1, 2, \ldots, k$. Jika A matriks bujursangkar berordo n, maka $m_1 + m_2 + \ldots + m_k =$

n. Bilangan asli m_i dinamakan *multiplisitas aljabar* dari nilai eigen λ_i. Sedangkan dimensi dari ruang eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen λ_i dinamakan *multiplisitas geometri* dari nilai eigen λ_i.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa hasil kali n nilai eigen (tidak perlu semuanya berbeda) dari matriks bujursangkar berordo n sama dengan determinan matriks tersebut. Sedangkan jumlahan n nilai eigen tersebut sama dengan jumlahan elemen-elemen pada diagonal utamanya. Andaikan $A = (a_{ij})_{n\times n}$, I matriks identitas berordo n dan λ suatu skalar. Jika $|\lambda I-A|$ kita hitung dengan ekspansi kofaktor sepanjang baris pertama, maka akan diperoleh

$$|\lambda I-A| = (\lambda-a_{11})K_{11} + \sum_{j=2}^{n}(-a_{1j})K_{1j} = P(\lambda), \qquad (5.3)$$

di mana K_{ij} adalah kofaktor dari elemen baris ke-i kolom ke-j matriks $(\lambda I-A)$. Untuk $j = 2, 3, \ldots, n$, K_{1j} hanya memuat (n-2) elemen $(\lambda-a_{jj})$, sebab K_{1j_0} tidak memuat elemen $(\lambda-a_{11})$ dan $(\lambda-a_{j_0j_0})$, sehingga jika K_{1j} kita uraikan, maka pangkat tertinggi untuk λ adalah (n-2). Sehingga (5.3) dapat ditulis sebagai

$$P(\lambda) = (\lambda-a_{11})K_{11} + \text{suku-suku dalam } \lambda \text{ yang berpangkat (n-2) atau kurang.} \qquad (5.4)$$

Selanjutnya jika K_{11} kita uraikan, maka akan kita dapatkan

$$P(\lambda) = (\lambda-a_{11})(\lambda-a_{22})\ldots(\lambda-a_{nn}) + \text{suku-suku dalam } \lambda \text{ yang berpangkat (n-2) atau kurang.}$$

$$= \lambda^n - \lambda^{n-1}\sum_{j=1}^{n} a_{jj} + \text{suku-suku dalam } \lambda \text{ yang berpangkat}$$

(n-2) atau kurang. (5.5)

Padahal, jika λ_1, λ_2, ..., λ_n (tidak perlu semuanya berbeda) nilai eigen dari A, maka $P(\lambda)$ dapat ditulis sebagai

$$P(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)\ (\lambda-\lambda_2)\ \ldots\ (\lambda-\lambda_n)$$

$$= \lambda^n - \lambda^{n-1}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i + \ldots + (-1)^n\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n \qquad (5.6)$$

Dari (5.5) dan (5.6) dapat disimpulkan bahwa

$$\sum_{j=1}^{n} a_{jj} = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i \ .$$

Sedangkan dari (5.6) kita peroleh

$P(0) = (-1)^n\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n$.

Padahal $P(0) = |-A| = (-1)^n|A|$. Sehingga $|A| = \lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n$.

Berikut diberikan definisi matriks similar. Selanjutnya akan dibuktikan bahwa dua buah matriks similar mempunyai nilai eigen sama.

Definisi 5.1.2.

Andaikan A dan B matriks bujursangkar berordo n. Matriks A dikatakan *similar* dengan matriks B, jika terdapat matriks non-singular X sedemikian hingga $B = X^{-1}AX$.

Jika A similar dengan B, maka B similar dengan A, sebab terdapat matriks non-singular $Y = X^{-1}$ sedemikian hingga $A = Y^{-1}BY$.

Teorema 5.1.2.

Andaikan A dan B matriks bujursangkar berordo n. Jika A similar dengan B, maka A dan B mempunyai nilai eigen yang sama.

Bukti:

Karena A similar dengan B, maka terdapat matriks non-singular X sedemikian hingga $B = X^{-1}AX$. Andaikan I matriks identitas berordo n dan λ suatu skalar, maka

$$
\begin{aligned}
\lambda I - B &= \lambda I - X^{-1}AX \\
&= X^{-1}X(\lambda I) - X^{-1}AX \\
&= X^{-1}(\lambda I)X - X^{-1}AX \\
&= X^{-1}(\lambda I - A)X
\end{aligned}
$$

Sehingga
$$
\begin{aligned}
|\lambda I - B| &= |X^{-1}(\lambda I - A)X| \\
&= |X^{-1}|\ |(\lambda I - A)|\ |X| \quad \text{(Teorema 3.2.3)} \\
&= |X^{-1}|\ |X|\ |(\lambda I - A)| \\
&= |X^{-1}X|\ |(\lambda I - A)| \\
&= |I|\ |(\lambda I - A)| \\
&= |(\lambda I - A)|
\end{aligned}
$$

Diperoleh $|\lambda I - B| = |\lambda I - A|$. Jadi A dan B mempunyai polinomial karakteristik yang sama. Akibatnya A dan B juga mempunyai nilai eigen sama. ■

2. Pendiagonalan Matriks

Andaikan A matriks bujursangkar berordo n. Pada bagian ini kita akan membahas cara menentukan matriks non-singular X, sedemikian hingga $X^{-1}AX = D$, di mana D matriks diagonal. Kita mulai dengan definisi berikut.

Definisi 5.2.1.

Suatu matriks bujursangkar A yang berordo n dikatakan *dapat didiagonalkan*, jika terdapat matriks non-singular X sedemikian hingga $X^{-1}AX = D$, di mana D adalah matriks diagonal. Matriks X dikatakan *mendiagonalkan* matriks A.

Dari definisi di atas terlihat bahwa matriks A similar dengan matriks D. Dengan demikian matriks A dapat didiagonalkan jika A similar dengan matriks diagonal D.

Berikut adalah sebuah teorema yang buktinya mengungkapkan cara mendiagonalkan suatu matriks.

Teorema 5.2.1.

Andaikan A matriks bujursangkar berordo n. Matriks A dapat didiagonalkan bila dan hanya bila A mempunyai n vektor eigen yang bebas linear.

Bukti:

1. ($\Rightarrow$)

   Andaikan A dapat didiagonalkan. Maka terdapat matriks non-singular X sedemikian hingga $X^{-1}AX = D$ atau $AX = XD$, di mana D matriks diagonal.

Andaikan $X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & & & \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{bmatrix}$ dan

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Maka
$$XD = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & & & \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x_{11}\lambda_1 & x_{12}\lambda_2 & \cdots & x_{1n}\lambda_n \\ x_{21}\lambda_1 & x_{22}\lambda_2 & \cdots & x_{2n}\lambda_n \\ \vdots & & & \\ x_{n1}\lambda_1 & x_{n2}\lambda_2 & \cdots & x_{nn}\lambda_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda_1 x_{11} & \lambda_2 x_{12} & \cdots & \lambda_n x_{1n} \\ \lambda_1 x_{21} & \lambda_2 x_{22} & \cdots & \lambda_n x_{2n} \\ \vdots & & & \\ \lambda_1 x_{n1} & \lambda_2 x_{n2} & \cdots & \lambda_n x_{nn} \end{bmatrix}$$

Andaikan $\mathbf{x}_i = (x_{1i}, x_{2i}, \ldots, x_{ni})^t (i = 1, 2, \ldots, n)$ adalah vektor-vektor kolom dari matriks X, maka vektor-vektor kolom dari matriks XD adalah $\lambda_1\mathbf{x}_1$, $\lambda_2\mathbf{x}_2$, ..., $\lambda_n\mathbf{x}_n$. Sedangkan vektor-vektor kolom dari matriks AX adalah $A\mathbf{x}_1$, $A\mathbf{x}_2$, ..., $A\mathbf{x}_n$. Karena AX = XD, maka $A\mathbf{x}_i = \lambda_i\mathbf{x}_i$ untuk setiap i = 1, 2, ..., n. Padahal X adalah non-singular, sehingga menurut Teorema 3.2.2 $|X| \neq 0$. Jadi untuk setiap i = 1, 2, ..., n, $\mathbf{x}_i$ adalah vektor tak nol, sehingga $\mathbf{x}_i$ adalah vektor eigen matriks A yang bersesuaian dengan nilai eigen λ_i. Karena X non-singular, maka menurut Teorema 4.3.2 himpunan $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ adalah bebas linear.

2. $(\Leftarrow)$

Andaikan A mempunyai n vektor eigen yang bebas linear, yaitu $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ yang bersesuaian dengan nilai eigen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Andaikan $\mathbf{x}_i = (x_{1i}, x_{2i}, \ldots, x_{ni})^t$, untuk setiap i = 1, 2, ..., n dan

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & & & \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{bmatrix}.$$

Maka kolom-kolom dari hasil kali AX adalah $A\mathbf{x}_1, A\mathbf{x}_2, \ldots, A\mathbf{x}_n$. Tetapi $A\mathbf{x}_1 = \lambda_1\mathbf{x}_1$, $A\mathbf{x}_2 = \lambda_2\mathbf{x}_2, \ldots, A\mathbf{x}_n = \lambda_n\mathbf{x}_n$. Sehingga

$$AX = \begin{bmatrix} \lambda_1 x_{11} & \lambda_2 x_{12} & \cdots & \lambda_n x_{1n} \\ \lambda_1 x_{21} & \lambda_2 x_{22} & \cdots & \lambda_n x_{2n} \\ \vdots & & & \\ \lambda_1 x_{n1} & \lambda_2 x_{n2} & \cdots & \lambda_n x_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & & & \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} = XD,$$

di mana D matriks diagonal yang elemen-elemen pada diagonal utamanya adalah $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Karena himpunan vektor-vektor kolom dari matriks X bebas linear, maka menurut Teorema 4.3.2, X adalah non-singular. Andaikan X^{-1} adalah invers dari X. Karena AX = XD, maka $X^{-1}AX = D$. Jadi A dapat didiagonalkan. ∎

Contoh 5.2.1.

Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$.

Dari perhitungan dalan Contoh 5.1.2 diperoleh bahwa nilai eigen dari A adalah 3 dan -2. $\{(-7/2,1)^t\}$ adalah basis untuk ruang eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen 3 dan $\{(-1,1)^t\}$ adalah basis untuk ruang eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen -2. Dibentuk matriks

$X = \begin{bmatrix} -7/2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. $|X| = -5/2 \neq 0$, sehingga $\{(-7/2,1)^t, (-1,1)^t\}$ adalah bebas linear. $X^{-1} = \begin{bmatrix} -2/5 & -2/5 \\ 2/5 & 7/5 \end{bmatrix}$, sehingga

$$X^{-1}AX = \begin{bmatrix} -2/5 & -2/5 \\ 2/5 & 7/5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -7/2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} -6/5 & -6/5 \\ -4/5 & -14/5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -7/2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = D.$$

Jadi A dapat didiagonalkan, sebab terdapat matriks $X = \begin{bmatrix} -7/2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ sedemikian hingga $X^{-1}AX = D$, di mana D adalah matriks diagonal yang elemen-elemen pada diagonal utamanya merupakan nilai eigen matriks A.

Contoh 5.2.2.

Diberikan matriks $B = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$.

Persamaan karakteristik matriks B adalah

$$|\lambda I-B| = \begin{vmatrix} \lambda+3 & -2 \\ 2 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda+1)^2 = 0$$

Jadi nilai eigen dari B adalah -1. Andaikan $\mathbf{x} = (x_1,x_2)^t$, maka $\mathbf{x}$ adalah penyelesaian sistem persamaan $(-I-A)\mathbf{x} = 0$, yaitu $\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Penyelesaian sistem persamaan di atas adalah (s,s), dengan s sebarang konstanta real. Jadi vektor eigen matriks B yang bersesuaian dengan nilai eigen -1 adalah $\mathbf{x} = (s,s)^t$ atau $\mathbf{x} = s(1,1)^t$, s sebarang konstanta real dan $s \neq 0$. Basis untuk ruang eigen matriks B yang bersesuaian dengan nilai eigen -1 adalah $\{(1,1)^t\}$. Jadi matriks B tidak dapat didiagonalkan, sebab B hanya mempunyai satu vektor eigen yang bebas linear.

Teorema 5.2.2.

Andaikan A matriks bujursangkar berordo n. Jika $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, ..., $\mathbf{v}_k$ adalah vektor-vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen λ_1, λ_2, ..., λ_k, di mana $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \ldots \neq \lambda_k$ dan $k \leq n$, maka $\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_k\}$ bebas linear.

Bukti:

Dibuktikan dengan kontradiksi.

Andaikan $\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_k\}$ tak bebas linear. Karena vektor eigen adalah vektor tak nol, maka $\{\mathbf{v}_1\}$ bebas linear. Andaikan r adalah bilangan bulat terbesar sedemikian hingga $\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_r\}$ bebas linear. Maka $1 \leq r < k$, sehingga $\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_{r+1}\}$ adalah tak bebas linear. Jadi terdapat skalar-skalar c_1, c_2, ..., c_{r+1} yang tidak semuanya sama dengan nol sedemikian hingga

$$c_1v_1 + c_2v_2 + \ldots + c_{r+1}v_{r+1} = 0 \qquad (5.7)$$

Jika persamaan (5.7) kita kalikan dengan A, maka diperoleh $c_1Av_1 + c_2Av_2 + \ldots + c_{r+1}Av_{r+1} = 0$ (5.8)

Padahal $Av_1 = \lambda_1 v_1$, $Av_2 = \lambda_2 v_2$, ..., $Av_{r+1} = \lambda_{r+1} v_{r+1}$, sehingga persamaan (5.8) dapat ditulis sebagai

$$c_1\lambda_1 v_1 + c_2\lambda_2 v_2 + \ldots + c_{r+1}\lambda_{r+1} v_{r+1} = 0 \qquad (5.9)$$

Persamaan (5.7) kita kalikan dengan λ_{r+1} dan diperoleh

$$c_1\lambda_{r+1} v_1 + c_2\lambda_{r+1} v_2 + \ldots + c_{r+1}\lambda_{r+1} v_{r+1} = 0 \quad (5.10)$$

Dari persamaan (5.9) dan (5.10) diperoleh

$$c_1(\lambda_1 - \lambda_{r+1})v_1 + \ldots + c_r(\lambda_r - \lambda_{r+1})v_r = 0 \qquad (5.11)$$

Karena $\{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ bebas linear, maka $c_1(\lambda_1 - \lambda_{r+1}) = c_2(\lambda_2 - \lambda_{r+1}) = \ldots = c_r(\lambda_r - \lambda_{r+1}) = 0$. Dan karena $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \ldots \neq \lambda_{r+1}$, maka $c_1 = c_2 = \ldots = c_r = 0$. (5.12)

Jika (5.12) kita substitusikan ke dalam persamaan (5.7), maka diperoleh $c_{r+1}v_{r+1} = 0$. Karena v_{r+1} vektor tak nol, maka $c_{r+1} = 0$. Jadi $c_1 = c_2 = \ldots = c_r = c_{r+1} = 0$. Kontradiksi dengan c_1, c_2, ..., c_{r+1} adalah skalar-skalar yang tidak semuanya sama dengan nol. Jadi $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ bebas linear. ■

Teorema 5.2.3.

Andaikan A matriks bujursangkar berordo n. Jika A mempunyai n nilai eigen yang berbeda, maka A dapat didiagonalkan.

Bukti:

Andaikan v_1, v_2, ..., v_n adalah vektor-vektor eigen matriks A yang bersesuaian dengan nilai eigen λ_1, λ_2, ...,

λ_n, di mana $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \ldots \neq \lambda_n$. Menurut Teorema 5.2.2, $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ adalah bebas linear. Jadi menurut Teorema 5.2.1, A dapat didiagonalkan. ∎

Tetapi tidak semua matriks bujursangkar berordo n yang dapat didiagonalkan mempunyai n nilai eigen yang berbeda, seperti ditunjukkan dalam contoh berikut ini.

Contoh 5.2.3.

Diberikan matriks $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

Nilai eigen dari matriks B adalah 3 dan 1. Multiplisitas aljabar dari nilai eigen 3 adalah 2, sedang multiplisitas aljabar dari nilai eigen 1 adalah 1. Basis dari ruang eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen 3 adalah $\{(-1,1,0)^t, (0,0,1)^t\}$. Basis dari ruang eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen 1 adalah $\{(1,1,0)^t\}$. Dibentuk matriks

$P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. $|P| = 2 \neq 0$, sehingga $\{(-1,1,0)^t, (0,0,1)^t, (1,1,0)^t\}$ bebas linear. Invers dari P, yaitu

$P^{-1} = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$. Selanjutnya dihitung

$$P^{-1}BP = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Jadi B dapat didiagonalkan.

3. Pendiagonalan Ortogonal; Matriks Simetri

Pada bagian ini kita akan mempelajari jenis matriks yang selalu dapat didiagonalkan, yaitu matriks simetri. Suatu matriks bujursangkar A disebut *matriks simetri*, jika $A^t = A$. Akan diperlihatkan bahwa matriks simetri yang berordo n selalu mempunyai n vektor eigen yang bebas linear. Vektor-vektor eigen ini tidak hanya bersifat bebas linear, tetapi juga ortogonal.

Definisi 5.3.1.

Suatu matriks bujursangkar A dikatakan *dapat didiagonalkan secara ortogonal*, jika terdapat matriks ortogonal P sedemikian hingga $P^{-1}AP = D$, di mana D adalah matriks diagonal. Matriks P dinamakan *matriks yang mendiagonalkan A secara ortogonal*.

Teorema 5.3.1.

Matriks bujursangkar A berordo n dapat didiagonalkan secara ortogonal bila dan hanya bila A mempunyai n vektor eigen yang ortonormal.

Bukti:

1. ($\Rightarrow$)

   Karena A dapat didiagonalkan secara ortogonal, maka terdapat matriks ortogonal P sedemikian hingga $P^{-1}AP = D$, di mana D adalah matriks diagonal. Menurut bukti Teorema 5.2.1, vektor-vektor kolom dari P adalah vektor-vektor eigen matriks A. Karena P matriks ortogonal, maka menurut Definisi 4.6.3 vektor-vektor kolom matriks P membentuk himpunan ortonormal. Jadi A mempunyai n vektor eigen yang ortonormal.

2. ($\Leftarrow$)

Andaikan A mempunyai n vektor eigen yang ortonormal yaitu $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n\}$. Menurut Teorema 4.6.1, $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n\}$ adalah bebas linear. Sehingga A dapat didiagonalkan. Menurut bukti Teorema 5.2.1, matriks yang mendiagonalkan A adalah matriks P yang kolom ke-i-nya adalah $\mathbf{p}_i$, i = 1, 2, ..., n. Karena $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n\}$ adalah himpunan ortonormal, maka P adalah matriks ortogonal. Jadi P adalah matriks yang mendiagonalkan A secara ortogonal. ■

Berikut adalah sebuah teorema yang menjamin bahwa vektor-vektor eigen matriks simetri yang bersesuaian dengan nilai eigen berbeda akan ortogonal.

Teorema 5.3.2.

Andaikan A matriks simetri berordo n. Vektor-vektor eigen matriks A yang bersesuaian dengan nilai eigen berbeda adalah ortogonal.

Bukti:

Andaikan λ_1 dan λ_2 ($\lambda_1 \neq \lambda_2$) adalah nilai eigen matriks A. Andaikan $\mathbf{v}_1$ dan $\mathbf{v}_2$ adalah vektor-vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen λ_1 dan λ_2. Maka

$$A\mathbf{v}_1 = \lambda_1\mathbf{v}_1 \quad (5.13)$$

$$Av_2 = \lambda_2 v_2 \quad (5.14)$$

Dari (5.13) diperoleh $(Av_1)^t = (\lambda_1 v_1)^t$

$$\Leftrightarrow v_1^t A^t = \lambda_1 v_1^t \quad (5.15)$$

Karena A matriks simetri, maka $A^t = A$. Sehingga persamaan (5.15) dapat ditulis sebagai

$$v_1^t A = \lambda_1 v_1^t \quad (5.16)$$

Jadi $v_1^t A v_2 = \lambda_1 v_1^t v_2$ (5.17)

Dari persamaan (5.14) diperoleh

$$v_1^t A v_2 = \lambda_2 v_1^t v_2 \quad (5.18)$$

Dari (5.17) dan (5.18) diperoleh

$$\lambda_1 v_1^t v_2 = \lambda_2 v_1^t v_2$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 v_1^t v_2 - \lambda_2 v_1^t v_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda_1 - \lambda_2) v_1^t v_2 = 0$$

Karena $\lambda_1 \neq \lambda_2$, maka $v_1^t v_2 = 0$. Jika $v_1 = (v_{11}, v_{21}, \ldots, v_{n1})^t$ dan $v_2 = (v_{12}, v_{22}, \ldots, v_{n2})^t$, maka $\langle v_1, v_2 \rangle = v_{11}v_{12} + v_{21}v_{22} + \ldots + v_{n1}v_{n2} = v_1^t v_2 = 0$. Jadi v_1 dan v_2 adalah ortogonal. ■

Selanjutnya kita akan membahas cara menentukan matriks ortogonal P yang mendiagonalkan matriks simetri A yang ditunjukkan dengan contoh berikut.

Contoh 5.3.1.

Diberikan matriks simetri $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

Persamaan karakteristik matriks A adalah $\lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0$. Sehingga nilai eigen matriks A adalah 2 dan 4. Basis dari ruang eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen 2 adalah $\{(-1,1)^t\}$. Basis dari ruang eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen 4 adalah $\{(1,1)^t\}$. Menurut Teorema 5.3.2, $\{(1,1)^t, (-1,1)^t\}$ adalah himpunan ortogonal. Andaikan $(-1,1)^t = \mathbf{u}_1$ dan $(1,1)^t = \mathbf{u}_2$. Maka $\mathbf{u}_1/\|\mathbf{u}_1\| = (-1/\sqrt{2},1/\sqrt{2})^t = \mathbf{v}_1$ dan $\mathbf{u}_2/\|\mathbf{u}_2\| = (1/\sqrt{2},1/\sqrt{2})^t = \mathbf{v}_2$. Himpunan $\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2\}$ adalah ortonormal. Dibentuk matriks P = $\begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$. Invers dari matriks P ini adalah $P^{-1} = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = P^t$. Dihitung

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2/\sqrt{2} & 2/\sqrt{2} \\ 4/\sqrt{2} & 4/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = D$$

Karena $P^{-1} = P^t$ dan $P^{-1}AP = D$, dengan D matriks diagonal, maka matriks P = $\begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$. adalah matriks yang mendiagonalkan A secara ortogonal.

Untuk membuktikan teorema berikut ini kita memerlukan konsep bilangan kompleks. Suatu bilangan z dinamakan *bilangan kompleks*, jika z dapat ditulis sebagai $z = x + iy$, di mana x dan y adalah bilangan-bilangan real dan $i = \sqrt{-1}$. *Konjugat* dari z adalah $\bar{z} = x - iy$.

Andaikan A adalah matriks dengan elemen-elemen bilangan kompleks. Maka $\bar{A}$ didefinisikan sebagai matriks yang elemen-elemennya adalah konjugat dari elemen-elemen yang seletak pada A. Sedangkan A^* didefinisikan sebagai $\bar{A}^t$. Jika A matriks yang elemen-elemen bilangan real, maka $\bar{A} = A$. Jika A matriks simetri , maka $A^t = A$. Sehingga $\bar{A}^t = A^* = A$.

Teorema 5.3.3.

Nilai eigen matriks simetri adalah real.

Bukti:

Andaikan λ adalah nilai eigen dari matriks simetri A yang berordo n. Andaikan $z = (x_1+iy_1,\ x_2+iy_2,\ \ldots,\ x_n+iy_n)^t$ adalah vektor eigen matriks A yang bersesuaian dengan nilai eigen λ. Konjugat z adalah $\bar{z} = (x_1-iy_1,\ x_2-iy_2,\ \ldots,\ x_n-iy_n)^t$, sehingga

$$\bar{z}^t z = (x_1^2+y_1^2) + (x_2^2+y_2^2) + \ldots + (x_n^2+y_n^2) = z^* z.$$

Karena z vektor eigen matriks A yang bersesuaian dengan nilai eigen λ, maka $Az = \lambda z$. Sehingga

$\bar{z}^t Az = \lambda \bar{z}^t z$. Jadi

$$\lambda = (\bar{z}^t Az)/(\bar{z}^t z) = (z^* Az)/(z^* z).$$

Andaikan α adalah suatu skalar sedemikian hingga $\alpha = \bar{z}^t Az = z^* Az$. Maka $\alpha^* = (z^* Az)^* = z^* A^* z$. Karena A matriks simetri yang elemen-elemennya bilangan real, maka $z^* A^* z = z^* Az = \alpha$. Sehingga diperoleh $\alpha = \alpha^*$. Ini berarti bahwa α adalah skalar real. Karena $\lambda = (z^* Az)/(z^* z) = \alpha/(z^* z)$, maka λ juga skalar real. Jadi terbukti bahwa matriks simetri hanya mempunyai nilai eigen real. ■

Teorema berikut ini menggambarkan hubungan antara matriks simetri dan pendiagonalan ortogonal.

Teorema 5.3.4.

Suatu matriks bujursangkar A dapat didiagonalkan secara ortogonal bila dan hanya bila A adalah matriks simetri.

Bukti:

1. ($\Rightarrow$)

   Andaikan A adalah matriks bujursangkar berordo n. Andaikan A dapat didiagonalkan secara ortogonal. Maka terdapat matriks ortogonal P sedemikian hingga $P^{-1}AP = P^tAP = D$, dengan D matriks diagonal. Karena $P^{-1}AP = D$, maka $A = PDP^{-1} = PDP^t$. Sehingga $A^t = (PDP^t)^t = PD^tP^t = PDP^t = A$. Jadi A adalah matriks simetri.

2. ($\Leftarrow$)

   Dibuktikan dengan induksi matematika.

   Jelas bahwa matriks simetri berordo 1 (skalar) dapat didiagonalkan secara ortogonal. Andaikan matriks simetri berordo (n-1) dengan $n \geq 2$ dapat didiagonalkan secara ortogonal. Akan dibuktikan bahwa matriks simetri berordo n dapat didiagonalkan secara ortogonal. Menurut Teorema 5.3.3, matriks simetri selalu mempunyai nilai eigen real. Andaikan λ adalah nilai eigen matriks simetri A yang berordo n dan x_1 adalah vektor eigen matriks A yang bersesuaian dengan λ. Vektor x_1 dipilih sedemikian hingga $\|x_1\| = 1$. Dengan menggunakan algoritma Gram-Schmidt kita dapat menentukan vektor-vektor x_2, x_3, ..., x_n sedemikian sehingga $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ himpunan ortonormal. Dibentuk matriks Q yang kolom ke-i-nya adalah x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Maka menurut Teorema 4.6.5, Q adalah matriks ortogonal. Selanjutnya dihitung AQ. Kolom-kolom matriks AQ adalah Ax_1, Ax_2, ..., Ax_n. Karena $Ax_1 = \lambda x_1$, maka kolom pertama matriks AQ adalah λx_1. Dihitung matriks $B = Q^tAQ$. Maka kolom pertama matriks B adalah $(\lambda,0,0,\ldots,0)^t$. Padahal $B^t = (Q^tAQ)^t = Q^tA^tQ = Q^tAQ = B$. Jadi B matriks simetri. Oleh karena itu elemen baris pertama dari matriks B sama dengan elemen kolom pertama.

Sehingga $B = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & & & & \\ 0 & & & & \\ \vdots & & & C & \\ 0 & & & & \end{bmatrix}$. Dalam hal ini C adalah matriks simetri berordo (n-1). Karena C dapat didiagonalkan secara ortogonal, maka terdapat matriks ortogonal R sedemikian hingga $R^tCR = D_1$, di mana D_1 adalah matriks diagonal. Dibentuk matriks

$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & & & & \\ 0 & & & & \\ \vdots & & & R & \\ 0 & & & & \end{bmatrix}$. S ini juga matriks ortogonal, sebab vektor-vektor kolom dari S membentuk himpunan ortonormal. Dihitung

$$S^tBS = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & & \\ 0 & & & & \\ \vdots & & & R^t & \\ 0 & & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & & \\ 0 & & & & \\ \vdots & & & C & \\ 0 & & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & & \\ 0 & & & & \\ \vdots & & & R & \\ 0 & & & & \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & & \\ 0 & & & & \\ \vdots & & & R^tCR & \\ 0 & & & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & & \\ 0 & & & & \\ \vdots & & & D_1 & \\ 0 & & & & \end{bmatrix} = D.$$

Sehingga diperoleh $S^tBS = D$, dengan D matriks diagonal. Karena $B = Q^tAQ$, maka $D = S^t(Q^tAQ)S = (S^tQ^t)A(QS) = (QS)^tA(QS)$. Karena Q dan S matriks-matriks ortogonal, maka QS juga matriks ortogonal. Jadi QS adalah matriks yang mendiagonalkan A secara ortogonal. Dengan demikian terbukti bahwa setiap matriks simetri dapat didiagonalkan secara ortogonal.■

Dari Teorema 5.3.4 di atas terbukti bahwa setiap matriks simetri dapat didiagonalkan secara ortogonal. Jadi, dengan Teorema 5.2.1, setiap matriks simetri A yang berordo n pasti mempunyai n vektor eigen yang bebas linear.

Selanjutnya berdasarkan teorema-teorema yang telah kita buktikan, kita dapat menentukan langkah-langkah yang diperlukan untuk menemukan matriks ortogonal yang mendiagonalkan matriks simetri A. Langkah-langkah tersebut adalah:

1. Mencari basis untuk masing-masing ruang eigen dari matriks A.
2. Menerapkan proses Gram-Schmidt pada masing-masing basis yang diperoleh pada langkah 1 untuk mendapatkan basis ortonormal untuk setiap ruang eigen.
3. Membentuk matriks P yang kolom-kolomnya adalah vektor-vektor basis yang diperoleh pada langkah 2. Matriks P ini akan mendiagonalkan A secara ortogonal.

Contoh 5.3.2.

Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$.

Nilai eigen matriks A adalah 3 dan -3. Basis dari ruang eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen 3 adalah $\{(1,1,1)^t\}$. Sedang basis dari ruang eigen yang bersesuaian dengan ruang eigen -3 adalah $\{(-1,1,0)^t,(-1,0,1)^t\}$. Andaikan $u_1 = (1,1,1)^t$, $u_2 = (-1,1,0)^t$ dan $u_3 = (-1,0,1)^t$. Menurut Teorema 5.3.2, u_1 ortogonal terhadap u_2 dan u_3. Tetapi u_2 dan u_3 tidak ortogonal, sebab $<u_2,u_3> = 1$. Untuk mendapatkan basis ortonormal pada masing-masing ruang eigen, kita terapkan proses Gram-Schmidt. Kita definisikan $v_1 = u_1/\|u_1\| = (1/\sqrt{3},1/\sqrt{3},1/\sqrt{3})^t$. Kemudian untuk mendapatkan basis ortonormal yang bersesuaian dengan nilai eigen -3 didefinisikan $v_2 = u_2/\|u_2\| = (-1/\sqrt{2},1/\sqrt{2},0)^t$ dan $v_3 = (u_3 - <u_3,v_2>v_2)/\|(u_3 - <u_3,v_2>v_2)\| = (-1/\sqrt{6},-1/\sqrt{6},2/\sqrt{6})^t$

Dibentuk matriks $P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \end{bmatrix}$.

Sehingga $P^t = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} \end{bmatrix}$. Dihitung $P^t AP$ =

$$\begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3/\sqrt{3} & 3/\sqrt{3} & 3/\sqrt{3} \\ 3/\sqrt{2} & -3/\sqrt{2} & 0 \\ 3/\sqrt{6} & 3/\sqrt{6} & -6/\sqrt{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Dengan demikian matriks P adalah matriks yang mendiagonalkan A secara ortogonal.

BAB VI

PENERAPAN NILAI EIGEN DAN VEKTOR EIGEN

1. Sistem Persamaan Diferensial

Suatu persamaan yang memuat derivatif (turunan) dari satu atau lebih fungsi dinamakan *persamaan diferensial.* Salah satu bentuk persamaan diferensial yang sederhana adalah

$$y' = ay \tag{6.1}$$

di mana $y = f(x)$ adalah fungsi (dalam variabel x) yang akan ditentukan, $y' = \dfrac{dy}{dx}$ adalah derivatifnya dan a konstanta real. Penyelesaian dari persamaan diferensial (6.1) adalah fungsi-fungsi yang berbentuk

$$y = ce^{ax} \tag{6.2}$$

di mana c adalah sebarang konstanta real. Penyelesaian (6.2) ini dinamakan *penyelesaian umum* dari persamaan diferensial (6.1), sebab $y' = cae^{ax} = ay$. Jika pada persamaan diferensial (6.1) ditambahkan syarat awal, misal $y(0) = 3$ sehingga diperoleh penyelesaian

$$y = 3e^{ax} \tag{6.3}$$,

maka penyelesaian (6.3) ini dinamakan *penyelesaian khusus.*

Pada bagian ini kita akan membahas cara menyelesaikan sistem persamaan diferensial linear homogen orde satu dengan koefisien konstan dengan menggunakan nilai eigen dan vektor eigen. Bentuk umum sistem persamaan diferensial ini adalah sebagai berikut :

$$
\begin{aligned}
y_1' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n \\
y_2' &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{2n}y_n \\
&\vdots \\
y_n' &= a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \dots + a_{nn}y_n
\end{aligned} \qquad (6.4)
$$

di mana $y_i = f_i(x)$ adalah fungsi-fungsi yang akan ditentukan, $y_i' = \dfrac{dy_i}{dx}$ adalah derivatif-derivatifnya dan a_{ij} adalah konstanta-konstanta real $(i,j = 1, 2, \dots, n)$. Sistem persamaan diferensial (6.4) ini dapat ditulis dalam bentuk perkalian matriks, yaitu

$$
\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{bmatrix}
$$

atau disingkat $Y' = AY$, di mana $Y' = (y_1', y_2', \dots, y_n')^t$, $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^t$ dan $A = (a_{ij})_{nxn}$.

Fungsi-fungsi $y_i = f_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, n$, yang terdefinisi pada suatu selang I dinamakan *penyelesaian* dari sistem persamaan diferensial (6.4), jika f_i adalah fungsi-fungsi yang kontinu dan terdiferensialkan pada selang I tersebut dan jika substitusi $f_i(x)$ untuk setiap y_i menjadikan semua persamaan diferensial dalam (6.4) suatu identitas.

Sistem persamaan diferensial (6.4) akan mudah diselesaikan jika A adalah matriks diagonal. Jika A bukan matriks diagonal, maka kita membuat substitusi untuk Y yang akan menghasilkan sistem persamaan diferensial baru dengan matriks koefisien yang diagonal. Andaikan

$$
\begin{aligned}
y_1 &= p_{11}z_1 + p_{12}z_2 + \dots + p_{1n}z_n \\
y_2 &= p_{21}z_1 + p_{22}z_2 + \dots + p_{2n}z_n \\
&\vdots \\
y_n &= p_{n1}z_1 + p_{n2}z_2 + \dots + p_{nn}z_n
\end{aligned}
$$

yang dapat ditulis dalam bentuk perkalian matriks, yaitu $Y = PZ$, di mana $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^t$, $P = (p_{ij})_{nxn}$ adalah matriks yang non-singular dan $Z = (z_1, z_2, \dots, z_n)^t$. Karena $Y = PZ$, maka $Y' = PZ'$. Sehingga dengan substitusi PZ dan PZ' pada Y dan Y' pada sistem persamaan diferensial (6.4), yaitu $Y' = AY$, akan diperoleh $PZ' = APZ$ atau $Z' = (P^{-1}AP)Z$. Karena kita menginginkan matriks $P^{-1}AP = D$ adalah matriks diagonal, maka kita harus memilih matriks non-singular P yang dapat mendiagonalkan A. Kemudian kita selesaikan sistem persamaan diferensial $Z' = DZ$. Sistem ini mudah diselesaikan, sebab D matriks diagonal.

Penyelesaian dari sistem persamaan diferensial (6.4) adalah $Y = PZ$, di mana Z adalah penyelesaian sistem persamaan diferensial $Z' = DZ$.

Contoh 6.1.1.

Diberikan sistem persamaan diferensial sebagai berikut:

$$
\left.
\begin{aligned}
y_1' &= 4y_1 + y_2 \\
y_2' &= 3y_1 + 2y_2
\end{aligned}
\right\} \qquad (6.5)
$$

Sistem persamaan diferensial (6.5) ini dapat ditulis dalam bentuk perkalian matriks, yaitu $Y' = AY$, di mana Y'

$= (y_1', y_2')^t$, $Y = (y_1, y_2)^t$ dan $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$. Nilai-nilai eigen matriks A adalah 1 dan 5. Basis dari ruang eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen 1 adalah $\{(-1/3, 1)^t\}$. Sedang basis dari ruang eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen 5 adalah $\{(1,1)^t\}$. Dibentuk matriks $P = \begin{bmatrix} -1/3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ yang non-singular, kemudian dihitung matriks

$$D = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -3/4 & 3/4 \\ 3/4 & 1/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Andaikan $Z = (z_1, z_2)^t$ dan $Z' = (z_1', z_2')^t$, maka

$$Z' = DZ = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ 5z_2 \end{bmatrix}$$

Sistem persamaan diferensial yang bersesuaian dengan sistem di atas adalah

$$\begin{aligned} z_1' &= z_1 \\ z_2' &= 5z_2 \end{aligned} \qquad (6.6)$$

Penyelesaian umum dari sistem persamaan diferensial (6.6) ini adalah $z_1 = c_1 e^x$ dam $z_2 = c_2 e^{5x}$, di mana c_1 dan c_2 adalah sebarang konstanta real. Sehingga diperoleh

$$Y = PZ = \begin{bmatrix} -1/3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 e^x \\ c_2 e^{5x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-c_1 e^x)/3 + c_2 e^{5x} \\ c_1 e^x + c_2 e^{5x} \end{bmatrix}$$

Jadi penyelesaian umum dari sistem persamaan diferensial (6.5) adalah $y_1 = (-c_1 e^x)/3 + c_2 e^{5x}$ dan $y_2 = c_1 e^x + c_2 e^{5x}$, dengan c_1 dan c_2 sebarang konstanta real.

Contoh 6.1.2.

Diberikan sistem persamaan diferensial berikut:

$$\left.\begin{aligned} y_1' &= -y_1 + 2y_2 + 2y_3 \\ y_2' &= 2y_1 - y_2 + 2y_3 \\ y_3' &= 2y_1 + 2y_2 - y_3 \end{aligned}\right\} \qquad (6.7)$$

dengan syarat awal $y_1(0) = y_2(0) = 1$ dan $y_3(0) = 0$. Matriks koefisien dari sistem persamaan diferensial (6.7) adalah

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Nilai eigen dari matriks A adalah -3 dan 3. Multiplisitas aljabar dari nilai eigen -3 adalah 2. sedang multiplisitas aljabar dari nilai eigen 3 adalah 1. Basis dari ruang eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen -3 adalah $\{ (-1,1,0)^t, (-1,0\ 1)^t \}$. Basis dari ruang eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen 3 adalah $\{(1,1,1)^t\}$.

Dibentuk matriks $P = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ dan dihitung matriks

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = D.$$

Andaikan $Z = (z_1, z_2, z_3)^t$ dan $Z' = (z_1', z_2', z_3')^t$, maka

$$Z' = DZ = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3z_1 \\ -3z_2 \\ 3z_3 \end{bmatrix},\ \text{sehingga}$$

$$
\begin{aligned}
z_1' &= -3z_1 \\
z_2' &= -3z_2 \\
z_3' &= 3z_3
\end{aligned}
\tag{6.8}
$$

Penyelesaian umum dari sistem persamaan diferensial (6.8) adalah $z_1 = c_1 e^{-3x}$, $z_2 = c_2 e^{-3x}$ dan $z_3 = c_3 e^{3x}$, di mana c_1, c_2 dan c_3 adalah sebarang konstanta real. Maka

$$
Y = PZ = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 e^{-3x} \\ c_2 e^{-3x} \\ c_3 e^{3x} \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} -c_1 e^{-3x} - c_2 e^{-3x} + c_3 e^{3x} \\ c_1 e^{-3x} + c_3 e^{3x} \\ c_2 e^{-3x} + c_3 e^{3x} \end{bmatrix}
$$

Jadi penyelesaian umum dari sistem persamaan diferensial (6.7) adalah $y_1 = -c_1 e^{-3x} - c_2 e^{-3x} + c_3 e^{3x}$, $y_2 = c_1 e^{-3x} + c_3 e^{3x}$ dan $y_3 = c_2 e^{-3x} + c_3 e^{3x}$. Karena diberikan syarat awal $y_1(0) = y_2(0) = 1$ dan $y_3(0) = 0$ maka diperoleh

$$
\left.
\begin{aligned}
-c_1 - c_2 + c_3 &= 1 \\
c_1 + c_3 &= 1 \\
c_2 + c_3 &= 0
\end{aligned}
\right\}
\tag{6.9}
$$

Sistem persamaan (6.9) ekuivalen dengan sistem berikut:

$$
\begin{aligned}
c_1 &= 1/3 \\
c_2 &= -2/3 \\
c_3 &= 2/3
\end{aligned}
$$

Jadi penyelesaian sistem persamaan linear (6.9) adalah (1/3, -2/3, 2/3). Dengan demikian penyelesaian sistem persamaan diferensial yang memenuhi syarat awal yang diberikan adalah $y_1 = (-e_1^{-3x})/3 + (2e^{-3x})/3 + (2e^{3x})/3$, $y_2 = e^{-3x}/3 + (2e^{3x})/3$ dan $y_3 = (-2e^{-3x})/3 + (2e^{3x})/3$.

Sistem persamaan diferensial orde satu kadang-kadang juga dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial linear homogen dengan koefisien konstan yang berorde lebih tinggi. Caranya adalah dengan mengubah persamaan diferensial tersebut menjadi sistem persamaan diferensial orde satu.

Contoh 6.1.3.

Diberikan persamaan diferensial linear homogen orde tiga:

$$y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0 \tag{6.10}$$

Dibuat substitusi $y_1 = y'$ dan $y_2 = y'' = y_1'$. Maka $y_2' = y''' = 6y'' - 11y' + 6y = 6y_2 - 11y_1 + 6y$, sehingga persamaan diferensial (6.10) dapat ditulis sebagai

$$\left.\begin{aligned} y' &= y_1 \\ y_1' &= y_2 \\ y_2' &= 6y - 11y_1 + 6y_2 \end{aligned}\right\} \tag{6.11}$$

Dalam notasi matriks, sistem persamaan diferensial (6.11) dapat ditulis sebagai $Y' = AY$, di mana $Y' = (y', y_1', y_2')^t$, $Y = (y, y_1, y_2)^t$ dan $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & -11 & 6 \end{bmatrix}$. Nilai eigen matriks A adalah 1, 2 dan 3. Basis dari ruang eigen yang bersesuaian dengan nilai 1 adalah $\{(1,1,1)^t\}$. Basis dari ruang eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen 2 adalah $\{(1/4,1/2,1)^t\}$. Sedang basis dari ruang eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen 3 adalah $\{(1/9,1/3,1)^t\}$.

Dibentuk matriks $P = \begin{bmatrix} 1 & 1/4 & 1/9 \\ 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, sehingga $D = P^{-1}AP$

$$= \begin{bmatrix} 3 & -5/2 & 1/2 \\ -12 & 16 & -4 \\ 9 & -27/2 & 9/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & -11 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1/4 & 1/9 \\ 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Andaikan $Z = (z, z_1, z_2)^t$ dan $Z' = (z', z_1', z_2')^t$, maka

$$Z' = DZ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z \\ 2z_1 \\ 3z_2 \end{bmatrix}$$

Sehingga diperoleh sistem persamaan diferensial berikut :

$$\left.\begin{aligned} z' &= z \\ z_1' &= 2z_1 \\ z_2' &= 3z_2 \end{aligned}\right\} \qquad (6.12)$$

Penyelesaian sistem persamaan diferensial (6.12) adalah $z = ce^x$, $z_1 = c_1e^{2x}$ dan $z_2 = c_2e^{3x}$, di mana c, c_1 dan c_2 adalah sebarang konstanta-konstanta real. Jadi penyelesaian sistem persamaan diferensial (6.11) adalah

$$Y = PZ = \begin{bmatrix} 1 & 1/4 & 1/9 \\ 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ce^x \\ c_1e^{2x} \\ c_2e^{3x} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ce^x + (c_1e^{2x})/4 + (c_2e^{3x})/9 \\ ce^x + (c_1e^{2x})/2 + (c_2e^{3x})/3 \\ ce^x + c_1e^{2x} + c_2e^{3x} \end{bmatrix}$$

Sehingga penyelesaian persamaan diferensial (6.10) adalah $y = ce^x + (c_1e^{2x})/4 + (c_2e^{3x})/9$, dengan c, c_1 dan c_2 adalah sebarang konstanta real.

2. Bentuk Kuadrat

Suatu bentuk, misalnya, $ax^2 + 2bxy + cy^2$ dengan a, b, c adalah bilangan-bilangan real yang tidak semuanya sama dengan nol dinamakan *bentuk kuadrat dalam variabel x dan y.* Bentuk kuadrat tersebut dapat kita pandang sebagai fungsi dalam dua variabel, yaitu x dan y. Pada bagian ini kita akan membahas bentuk kuadrat yang tidak hanya terbatas pada dua variabel saja, yaitu bentuk kuadrat umum.

<u>*Definisi 6.2.1.*</u>

Bentuk kuadrat dalam n buah variabel x_1, x_2, ..., x_n adalah

$$x^t Ax \tag{6.13}$$

di mana $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^t$ dan $A = (a_{ij})$ adalah matriks simetri berordo n.

Jika $x^t Ax$ kita uraikan , maka kita peroleh

$$x^t Ax = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \dots + a_{nn}x_n^2 + \sum_{i \neq j} a_{ij} x_i x_j$$

Pada dasarnya untuk sebarang matriks bujursangkar A, $x^t Ax$ adalah bentuk kuadrat. Namun, dalam pembahasan ini kita akan selalu menggunakan matriks A yang simetri, sebab teorema-teorema yang dibuktikan hanya berlaku untuk matriks simetri.

<u>*Contoh 6.2.1.*</u>

Berikut ini adalah bentuk kuadrat dalam variabel x_1, x_2, dan x_3:

$$x_1^2 + 7x_2^2 - 3x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 6x_2x_3 = \mathbf{x}^t A\mathbf{x},$$

di mana $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^t$ dan $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 7 & 3 \\ -1 & 3 & -3 \end{bmatrix}$

Selanjutnya diberikan sebuah teorema yang sangat membantu kita dalam menentukan nilai maksimum dan minimum bentuk kuadrat $\mathbf{x}^t A\mathbf{x}$ yang memenuhi kendala tertentu.

Teorema 6.2.1.

Andaikan A adalah matriks simetri berordo n yang nilai eigennya adalah $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, di mana $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n$. Jika $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^t$ dan $\|\mathbf{x}\| = (x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2)^{1/2} = 1$, maka

a. $\lambda_1 \geq \mathbf{x}^t A\mathbf{x} \geq \lambda_n$

b. $\mathbf{x}^t A\mathbf{x} = \lambda_n$, jika $\mathbf{x}$ adalah vektor eigen A yang bersesuaian dengan nilai eigen λ_n dan $\mathbf{x}^t A\mathbf{x} = \lambda_1$, jika $\mathbf{x}$ adalah vektor eigen A yang bersesuaian dengan nilai eigen λ_1.

Bukti:

a. Andaikan $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ adalah vektor-vektor eigen matriks A yang bersesuaian dengan nilai eigen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Karena A matriks simetri, maka kita dapat memilih $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ sedemikian sehingga $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ adalah himpunan ortonormal. Jadi $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ adalah basis ortonormal untuk $\mathbb{R}^n$. Menurut Teorema 4.6.2, untuk sebarang $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ berlaku

$x = \langle x,v_1\rangle v_1 + \langle x,v_2\rangle v_2 + \ldots + \langle x,v_n\rangle v_n$.

Sehingga

$$\begin{aligned} Ax &= \langle x,v_1\rangle Av_1 + \langle x,v_2\rangle Av_2 + \ldots + \langle x,v_n\rangle Av_n \\ &= \langle x,v_1\rangle \lambda_1 v_1 + \langle x,v_2\rangle \lambda_2 v_2 + \ldots + \langle x,v_n\rangle \lambda_n v_n \\ &= \lambda_1 \langle x,v_1\rangle v_1 + \lambda_2 \langle x,v_2\rangle v_2 + \ldots + \lambda_n \langle x,v_n\rangle v_n \end{aligned}$$

Andaikan $(x)_S$ dan $(Ax)_S$ masing-masing adalah vektor koordinat untuk x dan Ax relatif terhadap basis S, maka

$$(x)_S = (\langle x,v_1\rangle, \langle x,v_2\rangle, \ldots, \langle x,v_n\rangle)$$

$$(Ax)_S = (\lambda_1\langle x,v_1\rangle, \lambda_2\langle x,v_2\rangle \ldots \lambda_n\langle x,v_n\rangle)$$

Karena $\|x\| = 1$, maka menurut Teorema 4.7.2,

$$\|x\|^2 = \langle x,v_1\rangle^2 + \langle x,v_2\rangle^2 + \ldots + \langle x,v_n\rangle^2 = 1$$

$$\langle x,Ax\rangle = \lambda_1\langle x,v_1\rangle^2 + \lambda_2\langle x,v_2\rangle^2 + \ldots + \lambda_n\langle x,v_n\rangle^2$$

Tetapi $x^tAx = x^tA^tx = (Ax)^tx = \langle x,Ax\rangle$. Sehingga $x^tAx =$

$$\begin{aligned} \langle x,Ax\rangle &= \lambda_1\langle x,v_1\rangle^2 + \lambda_2\langle x,v_2\rangle^2 + \ldots + \lambda_n\langle x,v_n\rangle^2 \\ &\le \lambda_1\langle x,v_1\rangle^2 + \lambda_1\langle x,v_2\rangle^2 + \ldots + \lambda_1\langle x,v_n\rangle^2 \\ &= \lambda_1(\langle x,v_1\rangle^2 + \langle x,v_2\rangle^2 + \ldots + \langle x,v_n\rangle^2) = \lambda_1 \end{aligned}$$

Dan
$$\begin{aligned} x^tAx &= \lambda_1\langle x,v_1\rangle^2 + \lambda_2\langle x,v_2\rangle^2 + \ldots + \lambda_n\langle x,v_n\rangle^2 \\ &\ge \lambda_n\langle x,v_1\rangle^2 + \lambda_n\langle x,v_2\rangle^2 + \ldots + \lambda_n\langle x,v_n\rangle^2 \\ &= \lambda_n(\langle x,v_1\rangle^2 + \langle x,v_2\rangle^2 + \ldots + \langle x,v_n\rangle^2) \\ &= \lambda_n \end{aligned}$$

Dengan demikian terbukti $\lambda_1 \ge x^tAx \ge \lambda_n$. ■

b. Andaikan x adalah vektor eigen A yang bersesuaian dengan nilai eigen λ_1 dan $\|x\| = 1$, maka

$$x^tAx = \langle x,Ax\rangle = \langle x,\lambda_1 x\rangle = \lambda_1\langle x,x\rangle = \lambda_1\|x\|^2 = \lambda_1.$$

Demikian juga, jika x vektor eigen A yang bersesuaian dengan nilai eigen λ_n, maka $x^tAx = \lambda_n$. ■

Dari Teorema 6.2.1 terlihat bahwa jika λ_1 nilai eigen terbesar dari A, maka λ_1 adalah nilai maksimum dari bentuk kuadrat $\mathbf{x}^t A\mathbf{x}$ yang memenuhi kendala $\|\mathbf{x}\| = 1$. Sedangkan λ_n, yaitu nilai eigen terkecil dari A adalah nilai minimum bentuk kuadrat $\mathbf{x}^t A\mathbf{x}$ yang memenuhi kendala $\|\mathbf{x}\| = 1$.

Contoh 6.2.2.

Diberikan bentuk kuadrat

$$3x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_1x_2 = \mathbf{x}^t A\mathbf{x} \tag{6.14}$$

di mana $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^t$ dan $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$. Nilai eigen matriks A adalah 2 dan 4. Basis dari ruang eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen 2 adalah $\{(-1,1)^t\}$. Sedang basis dari ruang eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen 4 adalah $\{(1,1)^t\}$. Menurut Teorema 6.2.1, nilai minimum dan maksimum dari bentuk kuadrat (6.14) yang memenuhi kendala $x_1^2 + x_2^2 = 1$ berturut-turut adalah 2 dan 4. Nilai minimum 2 ini terjadi pada $\mathbf{x} = (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})^t$. Sedang nilai maksimum 4 terjadi pada $\mathbf{x} = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})^t$.

Definisi 6.2.2.

Matriks simetri A dan bentuk kuadrat $\mathbf{x}^t A\mathbf{x}$ dikatakan

definit positif, jika $\mathbf{x}^t A\mathbf{x} > 0$ untuk semua $\mathbf{x} \neq 0$,

semi definit positif, jika $\mathbf{x}^t A\mathbf{x} \geq 0$ untuk semua $\mathbf{x} \neq 0$,

semi definit negatif, jika $\mathbf{x}^t A\mathbf{x} \leq 0$ untuk semua $\mathbf{x} \neq 0$,

definit negatif, jika $\mathbf{x}^t A\mathbf{x} < 0$ untuk semua $\mathbf{x} \neq 0$.

Jika nilai $\mathbf{x}^t A\mathbf{x}$ tidak memenuhi semua keadaan di atas, maka bentuk kuadrat $\mathbf{x}^t A\mathbf{x}$ dan matriks simetri A dikatakan *indefinit.*

Teorema 6.2.2.

Matriks simetri A adalah definit positif bila dan hanya bila semua nilai eigen A adalah positif.

Bukti:

1. ($\Rightarrow$)

   Andaikan matriks simetri A adalah matriks definit positif. Andaikan λ adalah sebarang nilai eigen A. Jika $\mathbf{x}$ adalah vektor eigen A yang bersesuaian dengan λ, maka $\mathbf{x}$ adalah vektor tak nol, sehingga $\|\mathbf{x}\| > 0$. Selanjutnya $\mathbf{x}^t A\mathbf{x} = \mathbf{x}^t\lambda\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}^t\mathbf{x} = \lambda\|\mathbf{x}\|^2$. Karena A matriks definit positif, maka $\mathbf{x}^t A\mathbf{x} = \lambda\|\mathbf{x}\|^2 > 0$. Padahal $\|\mathbf{x}\|^2 > 0$, maka haruslah $\lambda > 0$. Jadi semua nilai eigen A adalah positif.

2. ($\Leftarrow$)

   Andaikan semua nilai eigen A adalah positif. Ambil sebarang $\mathbf{x} \neq 0$. Didefinisikan $\mathbf{y} = \mathbf{x}/\|\mathbf{x}\|$. Maka $\|\mathbf{y}\| = 1$. Sehingga menurut Teorema 6.2.1, $\mathbf{y}^t A\mathbf{y} \geq \lambda_n > 0$, di mana λ_n adalah nilai eigen terkecil dari A. Tetapi $\mathbf{y}^t A\mathbf{y} = (\mathbf{x}/\|\mathbf{x}\|)^t A(\mathbf{x}/\|\mathbf{x}\|) = (1/\|\mathbf{x}\|^2)(\mathbf{x}^t A\mathbf{x}) > 0$. Karena $1/\|\mathbf{x}\|^2 > 0$, maka $\mathbf{x}^t A\mathbf{x} > 0$.

   Dengan demikian matriks simetri A adalah definit positif. ■

Dari Teorema 6.2.2, dapat disimpulkan bahwa suatu matriks simetri A adalah definit negatif bila dan hanya bilasemua nilai eigen A adalah negatif. Jika nilai eigen A terdiri atas bilangan positif dan negatif, maka A indefinit.

Sebagai contoh, bentuk kuadrat (6.14) dalam contoh 6.2.2 adalah definit positif, sebab semua nilai eigen dari matriks simetri bentuk kuadrat (6.14) adalah positif.

3. Irisan Kerucut

Dalam bagian ini akan dibahas persamaan kuadrat dalam dua variabel x dan y. Bentuk umum persamaan kuadrat ini adalah

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \qquad (6.15)$$

di mana a, b, c, d, e adalah konstanta-konstanta real dan paling sedikit satu dari konstanta-konstanta a, b dan c tidak sama dengan nol. Bentuk $ax^2 + 2bxy + cy^2$ di namakan *bentuk kuadrat* yang bersesuaian dengan persamaan kuadrat (6.15). Persamaan (6.15) dapat dinyatakan dalam bentuk matriks, yaitu

$$\mathbf{x}^t A\mathbf{x} + K\mathbf{x} + f = 0 \qquad (6.16)$$

di mana $\mathbf{x} = (x,y)^t$, $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$ dan $K = (d\ \ e)$.

Grafik persamaan kuadrat (6.15) dinamakan *irisan kerucut.* Irisan kerucut yang paling penting adalah ellips, lingkaran, hiperbola dan parabola, yang dinamakan irisan kerucut *yang tidak mengalami degenerasi.* Irisan kerucut yang lain berupa titik , garis dan pasangan garis. Irisan kerucut yang seperti ini dikatakan *mengalami degenerasi.*

Irisan kerucut yang tidak mengalami degenerasi dikatakan berada dalam *posisi baku* relatif terhadap sumbu-sumbu koordinat tertentu , jika persamaannya dapat dinyatakan dalam bentuk-bentuk berikut:

i. $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$;a, b > 0

Untuk a < b atau a > b grafik persamaan di atas disebut ellips. Sedangkan untuk a = b grafiknya disebut lingkaran.

ii. $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ atau $y^2/a^2 - x^2/b^2 = 1$;a, b > 0.

Grafik persamaan ini disebut hiperbola.

iii. $y^2 = kx$ atau $x^2 = ky$;$k \neq 0$.

Grafik persamaan ini disebut parabola.

Satu cara untuk mengenali irisan kerucut yang tidak berada dalam posisi baku adalah dengan mengadakan rotasi dan / atau translasi sumbu-sumbu koordinat-xy untuk memperoleh sistem koordinat baru, yaitu sistem koordinat-x'y', sedemikian hingga irisan kerucut berada dalam posisi baku terhadap sistem koordinat baru ini.

Berikut adalah contoh persamaan kuadrat yang grafiknya tidak berada dalam posisi baku, tetapi dengan mengadakan translasi sumbu-sumbu koordinat diperoleh irisan kerucut dalam posisi baku.

Contoh 6.3.1.

Diberikan persamaan kuadrat berikut:

$$9x^2 + 4y^2 - 36x - 24y + 36 = 0. \tag{6.17}$$

Persamaan (6.17) ini dapat ditulis sebagai

$$9x^2 - 36x + 36 + 4y^2 - 24y + 36 + 36 - 36 - 36 = 0$$

$$\Leftrightarrow 9(x^2 - 4x + 4) + 4(y^2 - 6y + 9) - 36 = 0$$

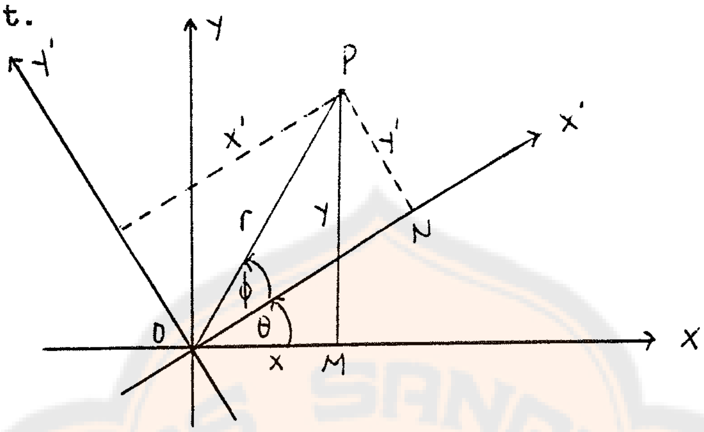
$$\Leftrightarrow 9(x-2)^2 + 4(y-3)^2 = 36. \tag{6.18}$$

Jika $x' = x - 2$ dan $y' = y - 3$, maka persamaan (6.18) dapat ditulis sebagai $9x'^2 + 4y'^2 = 36$, yang ekuivalen dengan $x'^2/4 + y'^2/9 = 1$ dan merupakan persamaan irisan kerucut dalam posisi baku. Grafik persamaan ini berupa ellips (lihat gambar 1).

Selanjutnya perhatikan persamaan kuadrat (6.15). Dengan mengadakan rotasi sumbu-sumbu koordinat, persamaan (6.15) dapat disederhanakan sehingga terhadap sistem koordinat baru persamaan tersebut tidak memuat suku $x'y'$.

Diberikan sistem koordinat-xy siku-siku. Jika sumbu-sumbu koordinat-xy dirotasikan berlawanan arah jarum jam sebesar θ mengelilingi titik asal sedemikian hingga diperoleh sistem koordinat baru, misalkan sistem koordinat-$x'y'$, maka terdapat hubungan antara koordinat yang lama dengan yang baru, yaitu $x = x' \operatorname{Cos}\theta - y' \operatorname{Sin}\theta$ dan $y = x' \operatorname{Sin}\theta + y' \operatorname{Cos}\theta$. Kedua persamaan tersebut dapat dituliskan dalam bentuk persamaan matriks, yaitu $\mathbf{x} = P\mathbf{x}'$, di mana $\mathbf{x} = (x,y)^t$, $\mathbf{x}' = (x',y')^t$ dan $P = \begin{bmatrix} \operatorname{Cos}\theta & -\operatorname{Sin}\theta \\ \operatorname{Sin}\theta & \operatorname{Cos}\theta \end{bmatrix}$.

Untuk memperjelas hal di atas diberikan gambar berikut.



Perhatikan segitiga OPM.

Dalam segitiga OPM, kita lihat bahwa Cos $(\phi + \theta) = x/r$.

Jadi $x = r\ \mathrm{Cos}\ (\phi + \theta) = r\ (\mathrm{Cos}\ \phi\ \mathrm{Cos}\ \theta - \mathrm{Sin}\ \phi\ \mathrm{Sin}\ \theta)$

$= (r\ \mathrm{Cos}\ \phi)\ \mathrm{Cos}\ \theta - (r\ \mathrm{Sin}\ \phi)\ \mathrm{Sin}\ \theta)$

Dalam segitiga OPN berlaku $x' = r\ \mathrm{Cos}\ \phi$ dan $y' = r\ \mathrm{Sin}\ \phi$. Sehingga diperoleh $x = x'\ \mathrm{Cos}\ \theta - y'\ \mathrm{Sin}\ \theta$. Dengan menggunakan cara yang sama, kita peroleh $y = x'\ \mathrm{Sin}\ \theta + y'\ \mathrm{Cos}\ \theta$.

Selanjutnya dengan substitusi $\mathbf{x} = P\mathbf{x}'$ pada persamaan (6.16) diperoleh

$$(\mathbf{x}'^{t})(P^{t}AP)\mathbf{x}' + (KP)\mathbf{x}' + f = 0 \qquad (6.19)$$

Karena A matriks simetri, maka A dapat didiagonalkan secara ortogonal. Jadi A pasti mempunyai himpunan ortonormal yang terdiri dari dua vektor eigen. Dipilih vektor-vektor eigen matriks A sedemikian hingga $\mathbf{v}_1 = (x_1, y_1)^t$ dan $\mathbf{v}_2 = (-y_1, x_1)^t$. Jika Cos $\theta = x_1$ dan Sin $\theta = y_1$, maka $P = \begin{bmatrix} x_1 & -y_1 \\ y_1 & x_1 \end{bmatrix}$ adalah matriks yang mendiagonalkan

A secara ortogonal. Sehingga $P^tAP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$, di mana λ_1 adalah nilai eigen matriks A yang bersesuaian dengan $\mathbf{v}_1$ dan λ_2 adalah nilai eigen matriks A yang bersesuaian dengan $\mathbf{v}_2$. Jadi persamaan (6.19) dapat ditulis sebagai

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + d'x' + e'y' + f = 0 \qquad (6.20)$$

di mana $d' = dx_1 + ey_1$ dan $e' = -dy_1 + ex_1$. Dengan demikian persamaan (6.20) merupakan persamaan irisan kerucut yang tidak memuat suku $x'y'$ dalam sistem koordinat-$x'y'$.

Berikut diberikan contoh-contoh yang menunjukkan bagaimana cara mengenali irisan kerucut yang tidak berada dalam posisi baku.

Contoh 6.3.2.

Diberikan persamaan kuadrat $2x^2 - 4xy - y^2 + 8 = 0$ yang dalam notasi matriks dapat ditulis sebagai

$$\mathbf{x}^tA\mathbf{x} + 8 = 0 \qquad (6.21)$$

di mana $\mathbf{x} = (x,y)^t$ dan $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$. Nilai eigen matriks A adalah -2 dan 3. Basis dari ruang eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen -2 adalah $\{(1/2,1)^t\}$. Sedang basis dari ruang eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen 3 adalah $\{(-2,1)^t\}$. Karena A matriks simetri, maka A dapat didiagonalkan secara ortogonal. Jadi A pasti mempunyai himpunan ortonormal yang terdiri dari dua vektor eigen. Menurut Teorema 5.3.2, himpunan $\{(1/2,1)^t, (-2,1)^t\}$ adalah himpunan ortogonal. Sehingga dapat dibentuk himpunan ortonormal, yakni $\{(1/\sqrt{5},2/\sqrt{5})^t,(-2/\sqrt{5},1/\sqrt{5})^t\}$

Dibentuk matriks $P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{bmatrix}$. Selanjutnya dihitung

$$P^tAP = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Jadi P adalah matriks yang mendiagonalkan A secara ortogonal. Kemudian substitusikan $\mathbf{x} = P\mathbf{x}'$, di mana $\mathbf{x} = (x,y)^t$ dan $\mathbf{x}' = (x',y')^t$, ke dalam persamaan (6.20), maka akan diperoleh

$$-2x'^2 + 3y'^2 + 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x'^2/4 - 3y'^2/8 = 1$$

Grafik persamaan di atas adalah hiperbola yang berada dalam posisi baku relatif terhadap sumbu-sumbu koordinat-$x'y'$. Sumbu-sumbu koordinat ini diperoleh dengan merotasikan sumbu-sumbu koordinat-xy sebesar $\theta = \operatorname{Cos}^{-1}(1/\sqrt{5})$ berlawanan arah jarum jam (lihat gambar 2).

Contoh 6.3.3.

Diberikan persamaan kuadrat $9x^2 - 4xy + 6y^2 - 10x - 20y - 5 = 0$. Dalam notasi matriks, persamaan kuadrat ini dapat dinyatakan sebagai

$$x^tAx + Kx - 5 = 0 \qquad (6.21)$$

di mana $\mathbf{x} = (x,y)^t$, $A = \begin{bmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$ dan $K = (-10 \ -20)$. Nilai eigen matriks A adalah 5 dan 10. Basis dari ruang eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen 5 dan 10 berturut-turut adalah adalah $\{(1/2,1)^t\}$ dan $\{(-2,1)^t\}$. Menurut Teorema 5.3.2, himpunan $\{(1/2,1)^t,(-2,1)^t\}$ adalah himpunan ortogonal. Sehingga dapat dibentuk himpunan ortonormal, yakni $\{(1/\sqrt{5},2/\sqrt{5})^t,(-2/\sqrt{5},1/\sqrt{5})^t\}$. Dibentuk matriks $P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{bmatrix}$. Dihitung

$$P^tAP = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$$

Jadi P adalah matriks yang mendiagonalkan A secara ortogonal. Dengan substitusi $\mathbf{x} = P\mathbf{x}'$, di mana $\mathbf{x}' = (x',y')^t$ pada persamaan (6.21) diperoleh persamaan

$$5x'^2 + 10y'^2 - 50/\sqrt{5}x' - 5 = 0$$

$\Leftrightarrow (x'')^2/6 + (y'')^2/3 = 1$, di mana $x'' = x' - 5/\sqrt{5}$ dan $y'' = y'$. Grafik persamaan ini berupa ellips, yang merupakan irisan kerucut yang berada dalam posisi baku relatif terhadap sistem koordinat-$x''y''$. Sistem koordinat-$x'y'$ diperoleh dengan merotasikan sumbu-sumbu koordinat -xy sebesar $\theta = \mathrm{Cos}^{-1}(1/\sqrt{5})$ berlawanan arah jarum jam. Sedang sistem koordinat-$x''y''$ diperoleh dengan mentranslasikan sumbu-sumbu koordinat-$x'y'$ (lihat gambar 3).

Contoh 6.3.4.

Diberikan persamaan kuadrat $x^2 - 2xy + y^2 = 0$. Dalam notasi matriks persamaan kuadrat ini dapat dinyatakan sebagai $\mathbf{x}^tA\mathbf{x} = 0$, di mana $\mathbf{x} = (x,y)^t$ dan $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

Nilai eigen matriks A adalah 0 dan 2. Basis dari ruang eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen 0 dan 2 berturut-turut adalah $\{(1,1)^t\}$ dan $\{(-1,1)^t\}$. Menurut Teorema 5.3.2, himpunan $\{(1,1)^t,(-1,1)^t\}$ adalah himpunan ortogonal. Sehingga dapat dibentuk himpunan ortonormal, yakni $\{(1/\sqrt{2},1/\sqrt{2})^t,(-1/\sqrt{2},1/\sqrt{2})^t\}$. Jadi dengan Teorema 5.3.1 matriks A dapat didiagonalkan secara ortogonal.

Matriks P = $\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$ adalah matriks yang mendiagonalkan A secara ortogonal. Dihitung P^tAP =

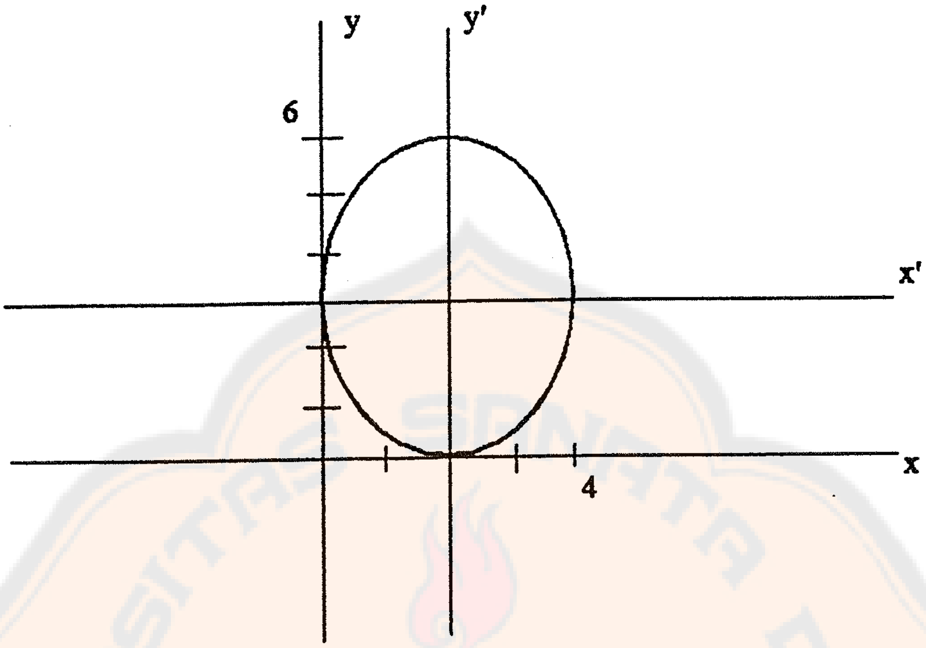
$$\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

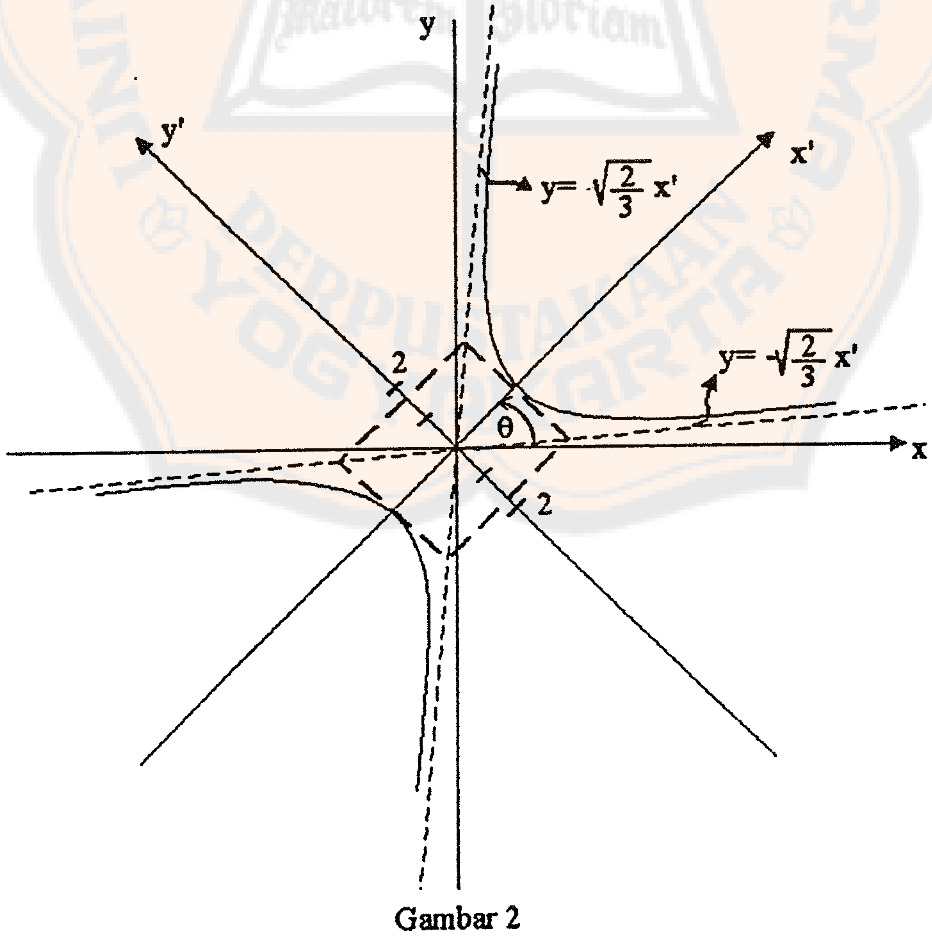
Dengan sustitusi $x = Px'$ pada persamaan $x^tAx = 0$, diperoleh persamaan

$$2y'^2 = 0 \text{ yang ekuivalen dengan } y' = 0.$$

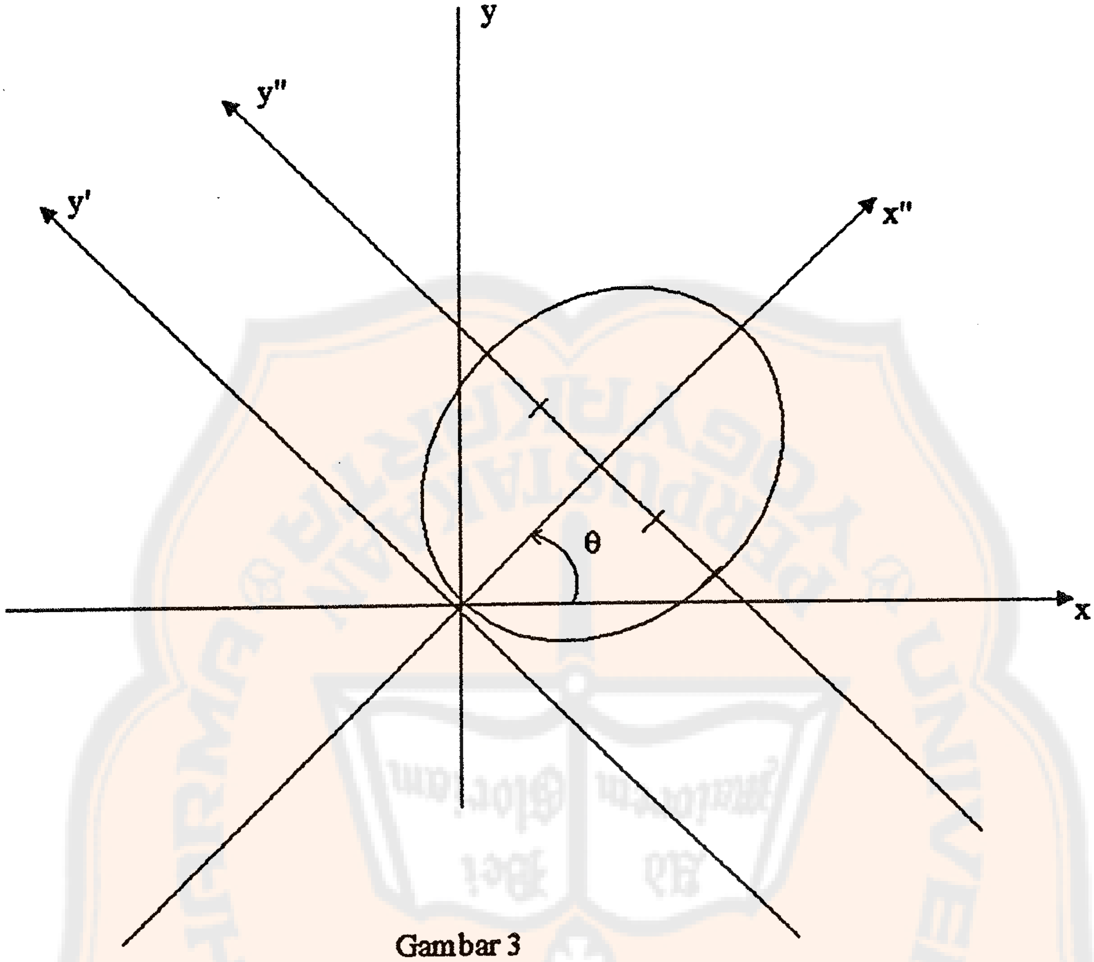
Grafik persamaan di atas berupa garis. Sistem koordinat-$x'y'$ diperoleh dengan merotasikan sumbu-sumbu koordinat-xy sebesar $\theta = \mathrm{Cos}^{-1}(1/\sqrt{2}) = \pi/4$. Dengan demikian dalam sistem koordinat-xy grafik persamaan $x^2 - 2xy + y^2 = 0$ berupa garis $y = x$ (lihat gambar 4).



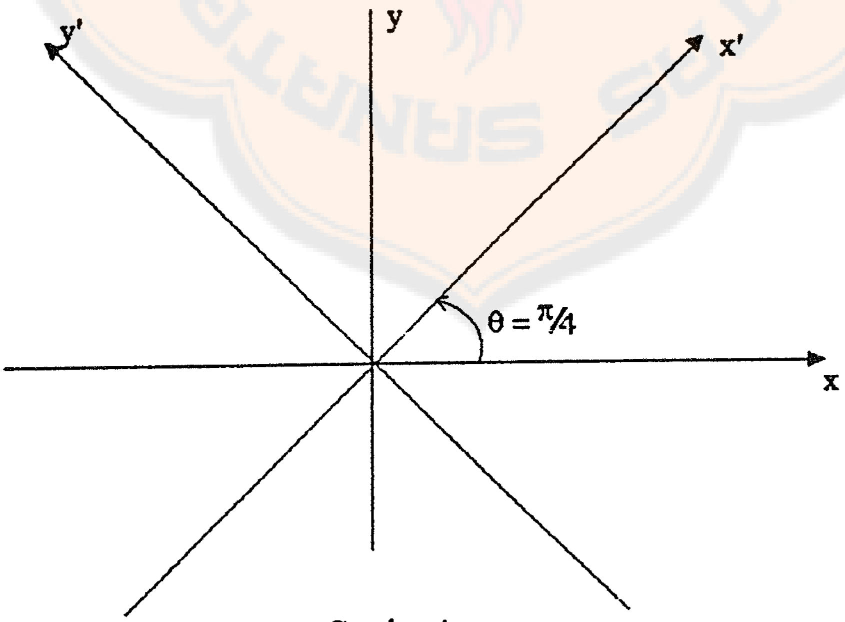
Gambar 1



Gambar 2



Gambar 3



Gambar 4

BAB VII

KESIMPULAN

Nilai eigen suatu matriks bujursangkar A adalah akar-akar dari persamaan karakteristiknya. Untuk suatu matriks bujurangkar A berordo n, hasil kali n nilai eigennya, yang tidak perlu semuanya berbeda, sama dengan determinannya. Sedangkan jumlahan n nilai eigen matriks tersebut sama dengan jumlahan elemen-elemen pada diagonal utamanya.

Suatu vektor **x** dalam $\mathbb{R}^n$ adalah vektor eigen matriks A yang bersesuaian dengan nilai eigen λ bila dan hanya bila **x** merupakan penyelesaian non-trivial sistem persamaan $(\lambda I-A)\mathbf{x} = 0$. Himpunan penyelesaian sistem persamaan $(\lambda I-A)\mathbf{x} = 0$ merupakan subruang dari $\mathbb{R}^n$, yang disebut ruang penyelesaian dari sistem persamaan $(\lambda I-A)\mathbf{x} = 0$. Ruang penyelesaian ini juga dinamakan ruang eigen matriks A yang bersesuaian dengan nilai eigen λ.

Suatu matriks bujursangkar A dikatakan dapat didiagonalkan bila dan hanya bila ada matriks non-singular P sedemikian hingga $P^{-1}AP = D$, dengan D matriks diagonal. Matriks P ini dinamakan matriks yang mendiagonalkan A.

Matriks bujursangkar A berordo n dapat didiagonalkan bila dan hanya bila A mempunyai n vektor eigen yang bebas linear. Matriks yang mendiagonalkan A, misalkan matriks P adalah matriks yang vektor-vektor kolomnya adalah vektor-vektor eigen dari A, sedang hasil kali $P^{-1}AP$ adalah matriks diagonal yang elemen-elemen pada diagonal utamanya adalah nilai-nilai eigen dari A.

Vektor-vektor eigen suatu matriks bujursangkar yang bersesuaian dengan nilai eigen yang berbeda membentuk himpunan vektor-vektor yang bebas linear. Akibatnya suatu matriks bujursangkar A berordo n yang mempunyai n nilai eigen berbeda dapat didiagonalkan. Namun tidak semua matriks yang dapat didiagonalkan mempunyai n nilai eigen berbeda.

Matriks simetri merupakan matriks yang istimewa dalam hal pendiagonalan, sebab untuk setiap matriks simetri A, kita selalu dapat menemukan matriks ortogonal P sedemikian hingga $P^{-1}AP = P^tAP = D$, dengan D matriks diagonal. Pendiagonalan seperti ini dinamakan pendiagonalan ortogonal. Matriks simetri merupakan satu-satunya jenis matriks yang dapat didiagonalkan secara ortogonal.

Penerapan nilai eigen dan vektor eigen terdapat pada penyelesaian sistem persamaan diferensial linear homogen orde satu dengan koefisien konstan. Namun ini hanya bisa dilakukan jika matriks koefisien sistem persamaan diferensial tersebut dapat didiagonalkan. Jika tidak, maka sistem tersebut harus diselesaikan dengan cara yang lain.

Dalam mempelajari bentuk kuadrat, nilai eigen dan vektor eigen dapat membantu kita untuk menentukan nilai maksimum dan nilai minimum yang memenuhi kendala tertentu. Untuk suatu bentuk kuadrat x^tAx, nilai maksimum yang memenuhi kendala $\|x\| = 1$ adalah nilai eigen terbesar dari A. Sedang nilai minimumnya adalah nilai eigen terkecil dari A. Di samping itu, dengan menggunakan nilai eigen dan vektor eigen kita juga dapat mengidentifikasikan grafik suatu persamaan kuadrat dalam dua variabel.

DAFTAR PUSTAKA

1. Anton, Howard., *Aljabar Linear Elementer*. Edisi kelima, Terj. oleh Pantur Silaban, Ph.D. dan Drs. I. Nyoman Susila, M.Sc. Jakarta: Penerbit Erlangga, 1988.
2. Ayres, Frank, J.R., Ph.D., *Matriks*. Terj. oleh Drs. I. Nyoman Susila, M.Sc. Jakarta: Penerbit Erlangga, 1989.
3. Budi, Wono S., *Aljabar Linear*. Jakarta: PT Gramedia Pustaka Utama, 1995.
4. Friedberg, Stephen H. and Insel, Arnold J., *Introduction to Linear Algebra with Applications*. New Jersey: Prentice Hall, 1986.
5. Kaplan, Wilfred., *Ordinary Differential Equations*. Massachusetts: Addison-Wesley Publishing Company Inc., 1960.
6. Kreyszig, Erwin., *Matematika Tehnik Lanjutan (Buku I)*. Terj. oleh Ir bambang Sumantri. Jakarta: Gramedia, 1993.
7. Leon, S.J., *Linear Algebra with Applications*. Fourth Edition. Singapore: Prentice Hall International, Inc., 1995.
8. Moore, Hal. G. and Yaqub, Adil., *A First Course in Linear Algebra*. New York: Hapercollins Publisher Inc., 1992.
9. Suryadi, P. A., Prof., Dr., *Aljabar Linear dan Ilmu ukur Analitik*. Jakarta: Penerbit Djambatan, 1982.