

PERSAMAAN DIFERENSIAL PARSIAL KUASILINEAR ORDE PERTAMA DENGAN DUA VARIABEL BEBAS

SKRIPSI

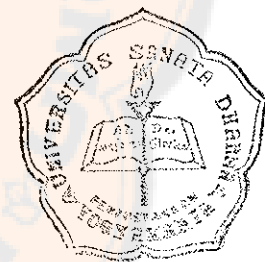


Oleh :

YENNI

NIM : 91 414 043

NIRM : 910052010501120033



**PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA
JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
UNIVERSITAS SANATA DHARMA
YOGYAKARTA
1997**

**PERSAMAAN DIFERENSIAL PARSIAL KUASILINEAR
ORDE PERTAMA DENGAN DUA VARIABEL BEBAS**

SKRIPSI

**Diajukan untuk Memenuhi Salah Satu Syarat
Memperoleh Gelar Sarjana Pendidikan
Program Studi Pendidikan Matematika**

Oleh :

Y E N N I

NIM : 91 414 043

NIRM : 910052010501120033

**PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA
JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
UNIVERSITAS SANATA DHARMA
YOGYAKARTA
1997**

SKRIPSI

PERSAMAAN DIFERENSIAL PARSIAL KUASILINEAR
ORDE PERTAMA DENGAN DUA VARIABEL BEBAS

Oleh :

Y E N N I

NIM : 91 414 043

NIRM : 910052010501120033

Telah disetujui oleh :

Pembimbing I


Drs. A. Tutoyo, M.Sc.

Tanggal, 25-7-1997

Pembimbing II


Dra. Maria Agustiani, M.Si.

Tanggal, 25-7-1997

SKRIPSI
PERSAMAAN DIFERENSIAL PARSIAL KUASILINEAR
ORDE PERTAMA DENGAN DUA VARIABEL BEBAS

Yang telah dipersiapkan dan disusun oleh :

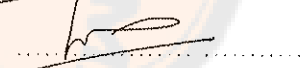
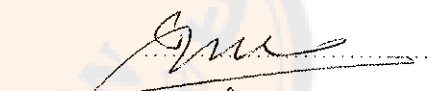
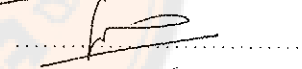
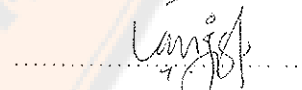
Y E N N I

NIM : 91 414 043

NIRM : 910052010501120033

Telah dipertahankan di depan Panitia Penguji
Pada tanggal : 14 Juli 1997
dan dinyatakan telah memenuhi syarat

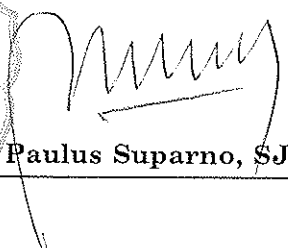
SUSUNAN PANITIA PENGUJI

	Nama Lengkap	Tanda Tangan
Ketua	: Drs. A. Tutoyo, M.Sc.	
Sekretaris	: Dr. St. Suwarsono	
Anggota	: 1. Drs. A. Tutoyo, M.Sc.	
	2. Dr. St. Suwarsono	
	3. Dra. Maria Agustiani, M.Si.	

Yogyakarta, 24 Juli 1997
Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan
Universitas Sanata Dharma

Dekan,




Dr. Paulus Suparno, SJ., MST.

KATA PENGANTAR

Berkat perlindungan Tuhan Yang Maha Esa dan Tiratana, pada akhirnya penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul Persamaan Diferensial Parsial Kuasilinear Orde Pertama dengan Dua Variabel Bebas.

Terselesaikannya skripsi ini tak lepas dari bantuan dan dukungan banyak pihak. Oleh karena itu, penulis ingin menyampaikan penghargaan dan terima kasih kepada :

1. Drs. A. Tutoyo, M.Sc. atas arahan dan bimbingannya dalam penulisan skripsi ini.
2. Dra. Maria Agustiani, M.Si. atas ketekunan dan kesabarannya dalam membimbing penulis.
3. Drs. Susento, M.Si. atas dukungan dan perhatian yang diberikan kepada penulis.
4. Dosen-dosen Universitas Sanata Dharma, khususnya JPMIPA, atas didikan dan bimbingannya selama penulis menjadi mahasiswa.
5. Pegawai dan karyawan JPMIPA atas pelayanan dan bantuannya selama ini.
6. Papa dan Mama atas kasih sayang dan pengertian yang tak terhingga besarnya.
7. Adik-adik penulis, Fenny dan Julia, atas dukungan semangat dan doa yang diberikan.
8. Legianto dan Rosma, sahabat-sahabat yang dengan setia mendampingi penulis pada saat-saat putus asa dan hampir menyerah dalam menyelesaikan skripsi ini.
9. Seluruh rekan mahasiswa dan semua pihak atas dorongan dan bantuannya selama penulis menempuh pendidikan di Universitas Sanata Dharma.

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

Jika seseorang hanya mempunyai sedikit pengetahuan tetapi kuat dalam kebajikan, orang lain hanya akan memuji kebajikannya saja, karena pengetahuannya tidak lengkap.

Jika seseorang mempunyai banyak pengetahuan tetapi lemah dalam kebajikan, orang lain akan menyalahkan kelakuannya, meskipun pengetahuannya lengkap.

Tetapi jika seseorang mempunyai banyak pengetahuan dan kuat dalam kebajikan, ia akan dipuji baik karena pengetahuan maupun kebajikannya.

(Anguttara Nikāya II, 8)

Kupersembahkan untuk :

Papa, Mama, adik-adikku,
dan orang-orang yang kukasihi

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

Semoga jasa baik yang telah diberikan membuahkan kesejahteraan dan kebahagiaan.

Penulis menyadari kekurangan dan keterbatasan skripsi ini, karena itu penulis sangat mengharapkan masukan, saran, dan kritik yang membangun untuk menyempurnakannya.

Semoga skripsi ini bermanfaat untuk perkembangan Matematika pada khususnya dan ilmu pengetahuan pada umumnya.

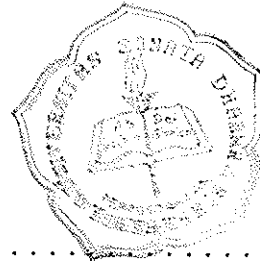
Yogyakarta, 24 Juli 1997

Penulis,

Yenni

C. PERSAMAAN DIFERENSIAL PARSIAL ORDE	
PERTAMA	22
BAB III PENYELESAIAN PERSAMAAN DIFERENSIAL PARSIAL	
KUASILINEAR ORDE PERTAMA DENGAN DUA VARIABEL	
BEBAS	
A. JENIS-JENIS PENYELESAIAN	27
B. INTERPRETASI GEOMETRIS	29
C. EKSISTENSI DAN KETUNG GALAN PENYELESAIAN	37
D. METODE KARAKTERISTIK LAGRANGE	42
E. METODE CHARPIT	55
BAB IV MASALAH NILAI AWAL	62
BAB V PENERAPAN	
A. DALAM BIDANG GEOMETRI	83
1. Permukaan Integral Melalui Suatu	
Kurva Tertentu	83
2. Permukaan yang Ortogonal Terhadap Sistem	
Permukaan Lain Yang Diketahui	90
B. DALAM BIDANG BIOLOGI	94
C. DALAM BIDANG FISIKA	101
D. CONTOH-CONTOH PENERAPAN PERSAMAAN	
DIFERENSIAL PARSIAL ORDE KE DUA	111
1. Konduksi Panas Dalam Medium Berdimensi	
Satu	111

DAFTAR ISI



HALAMAN JUDUL	i
HALAMAN PERSETUJUAN PEMBIMBING	ii
HALAMAN PENGESAHAN	iii
HALAMAN PERSEMBAHAN	iv
KATA PENGANTAR	v
DAFTAR ISI	vii
ABSTRAK	x
ABSTRACT	xi
BAB I PENDAHULUAN	
A. LATAR BELAKANG	1
B. MASALAH	4
C. PEMBATAAN MASALAH	5
D. PERUMUSAN MASALAH	6
E. TUJUAN PEMBAHASAN	7
F. MANFAAT PEMBAHASAN	7
G. METODE PEMBAHASAN	8
BAB II LANDASAN TEORI	
A. PERSAMAAN DIFERENSIAL PARSIAL	9
B. ASAL PERSAMAAN DIFERENSIAL PARSIAL	11
1. Eliminasi Parameter	11
2. Eliminasi Fungsi Sembarang	16

2. Getaran Pada Medium Berdimensi Satu	115
BAB VI PENUTUP	121
DAFTAR PUSTAKA	125



ABSTRAK

Persamaan diferensial parsial kuasilinear orde pertama dengan dua variabel bebas memiliki bentuk umum :

$$P(x,y,z) \frac{\partial z}{\partial x} + Q(x,y,z) \frac{\partial z}{\partial y} = R(x,y,z)$$

dengan P dan Q tidak keduanya bernilai nol.

Persamaan diferensial parsial orde pertama dapat diperoleh dengan mengeliminasi parameter-parameter dari relasi antara variabel tak bebas dengan variabel-variabel bebas dimana banyaknya parameter sama dengan atau kurang dari banyaknya variabel bebas. Selain itu, persamaan diferensial orde pertama juga dapat diperoleh dengan mengeliminasi satu fungsi sembarang F dimana $F(u,v) = 0$ menyatakan relasi antara $u = u(x,y,z)$ dan $v = v(x,y,z)$.

Metode-metode penyelesaian persamaan diferensial parsial kuasilinear orde pertama dengan dua variabel bebas antara lain adalah Metode Lagrange, Metode Charpit, Metode Karakteristik, dan Metode Pemisahan Variabel.

Penerapan persamaan diferensial parsial kuasilinear dalam skripsi ini dibatasi pada bidang Geometri, Biologi, dan Fisika.

ABSTRACT

A quasilinear partial differential equation in two independent variables has the general form :

$$P(x,y,z) \frac{\partial z}{\partial x} + Q(x,y,z) \frac{\partial z}{\partial y} = R(x,y,z)$$

provided that not both of P and Q are zero.

A partial differential equation of the first order can be derived by eliminating the arbitrary constants from a relation between the dependent and independent variables where the number of the arbitrary constants is the same as or fewer than that of the independent variables. Besides, the first order partial differential equation can be derived by eliminating one arbitrary function F where $F(u,v) = 0$ determines a relation between $u = u(x,y,z)$ and $v = v(x,y,z)$.

Some methods for solving a quasilinear first order partial differential equation in two independent variables are Lagrange's Method, Charpit's Method, Characteristic Method, and Method of Separation of Variables.

The application of the quasilinear partial differential equations in this thesis is restricted to the field of Geometry, Biology, and Physics.

BAB I

PENDAHULUAN

A. LATAR BELAKANG

Salah satu manfaat Matematika adalah untuk menggambarkan situasi dan fenomena dalam dunia real dengan bahasa yang lebih sederhana yaitu dalam bentuk model matematika. Di antara berbagai materi dalam Matematika, yang banyak sekali muncul dari penyusunan model untuk masalah-masalah dalam kehidupan nyata tersebut adalah Persamaan Diferensial.

Persamaan Diferensial adalah persamaan yang memuat derivatif atau diferensial dari satu fungsi atau lebih. Persamaan Diferensial dapat diklasifikasikan dengan banyak cara. Jika fungsi yang belum diketahui dalam persamaan tersebut bergantung pada satu variabel bebas saja maka derivatif-derivatif yang ada merupakan derivatif biasa dan persamaan itu disebut persamaan diferensial biasa.

Bentuk umum persamaan diferensial biasa adalah :

$$f \left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n} \right) = 0$$

dengan x menyatakan variabel bebas dan y variabel tak bebas. Jika fungsi yang belum diketahui bergantung pada dua atau lebih variabel bebas maka derivatif-derivatifnya merupakan derivatif parsial dan persamaan itu disebut persamaan diferensial parsial.

Bentuk umum persamaan diferensial parsial adalah :

$$f \left(x_1, x_2, \dots, x_n, z, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial z}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2}, \dots \right) = 0$$

dengan $x_1, x_2, \dots, x_n$ menyatakan variabel-variabel bebas dan z variabel tak bebas.

Persamaan diferensial juga dapat diklasifikasikan berdasarkan ordenya. Yang dimaksud dengan orde persamaan diferensial adalah tingkat derivatif tertinggi yang muncul dalam persamaan tersebut.

Contoh 1.1 :

$$1. \frac{dy}{dx} = x + 5$$

$$2. \frac{d^2 y}{dx^2} + 3 \frac{dy}{dx} + 2y = 0$$

$$3. (y+zx) \frac{\partial z}{\partial x} - (x+yz) \frac{\partial z}{\partial y} = x(z-2y)$$

$$4. x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z^2 + x^2$$

$$5. x^2 y \frac{\partial z}{\partial x} + xy^2 \frac{\partial z}{\partial y} = xyz$$

$$6. \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^2 + y$$

$$7. x^2 \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} + xy \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} + 2 \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = x^2 + y^3$$

Persamaan dalam Contoh 1.1.1 dan 1.1.2 di atas merupakan persamaan diferensial biasa, sedangkan persamaan dalam Contoh 1.1.3 sampai dengan Contoh 1.1.7 merupakan persamaan diferensial parsial dengan dua variabel bebas x dan y .

Persamaan dalam Contoh 1.1.1, 1.1.3, 1.1.4, dan 1.1.5 merupakan persamaan diferensial orde pertama ; Contoh 1.1.2 dan 1.1.6 orde ke dua ; dan Contoh 1.1.7 merupakan persamaan diferensial orde ke tiga.

Studi tentang persamaan diferensial merupakan hal yang sangat menarik dan berkembang dengan pesat, terutama persamaan diferensial parsial karena fenomena-fenomena dalam dunia nyata pada umumnya tidak hanya menyangkut satu variabel saja, melainkan bergantung pada banyak variabel.

Persamaan diferensial parsial orde pertama merupakan bentuk yang paling sederhana dalam pembahasan mengenai persamaan diferensial parsial ini dan menjadi dasar untuk mempelajari persamaan-persamaan diferensial

dengan orde lebih tinggi yang lebih kompleks.

Persamaan diferensial parsial orde pertama memiliki bentuk umum :

$$f \left(x_1, x_2, \dots, x_n, z, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial z}{\partial x_n} \right) = 0$$

Bila derivatif-derivatif parsial dari persamaan diferensial tersebut tidak semuanya berpangkat satu maka persamaan itu dikatakan non-linear. Bila semua derivatif parsial yang muncul berpangkat satu maka persamaan disebut kuasilinear.

Persamaan diferensial parsial orde pertama banyak muncul dalam geometri atau sebagai model untuk proses-proses fisika. Selain itu, persamaan diferensial parsial orde pertama ini juga memegang peranan penting dalam metode-metode pendekatan / aproksimasi untuk persamaan diferensial parsial dengan orde lebih tinggi atau untuk suatu sistem persamaan diferensial.

B. MASALAH

Banyak masalah dalam kehidupan sehari-hari yang model matematisnya berbentuk persamaan diferensial parsial. Oleh karena itu, perlu diketahui metode-metode

penyelesaian persamaan diferensial parsial untuk menyelesaikan masalah-masalah tersebut.

C. PEMBATASAN MASALAH

Penulis membatasi topik ini pada metode-metode penyelesaian persamaan diferensial parsial kuasilinear orde pertama dengan dua variabel bebas, disertai dengan contoh-contoh penerapan metode tersebut. Ada tiga hal utama yang akan dibahas :

1. Metode-metode penyelesaian
 - a. Metode Karakteristik Lagrange
 - b. Metode Charpit
2. Masalah nilai awal untuk persamaan diferensial parsial kuasilinear orde pertama

Masalah nilai awal ini perlu dibahas karena berkaitan erat dengan penerapan persamaan diferensial parsial tersebut dalam dunia nyata.

3. Beberapa contoh penerapan

- a. Dalam bidang Geometri

Akan dibahas mengenai permukaan integral melalui suatu kurva tertentu dan mengenai sistem permukaan yang ortogonal pada sistem permukaan

lain yang diketahui.

b. Dalam Bidang Biologi

Akan dibahas mengenai model untuk proses reproduksi dan kematian bakteri.

c. Dalam bidang Fisika

Akan diberikan contoh tentang gerak gelombang satu arah.

d. Akan diberikan pula beberapa contoh persamaan diferensial parsial orde ke dua yang penting, sebagai pengembangan.

Penyusunan model persamaan diferensial dan penyelesaian persamaan dengan lebih dari dua variabel bebas tidak akan dibahas disini. Selain itu, hal-hal yang menyangkut persamaan diferensial biasa dianggap telah dikuasai.

D. PERUMUSAN MASALAH

Pokok permasalahan yang akan dibahas dalam topik ini adalah :

1. Apakah pengertian persamaan diferensial parsial kuasilinear orde pertama dengan dua variabel bebas ?
2. Bagaimanakah metode-metode penyelesaian persamaan

diferensial parsial kuasilinear orde pertama dengan dua variabel bebas ?

3. Bagaimanakah masalah nilai awal untuk persamaan diferensial parsial kuasilinear orde pertama dengan dua variabel bebas ?

4. Bagaimana penerapan persamaan diferensial parsial kuasilinear orde pertama dengan dua variabel bebas ?

E. TUJUAN PEMBAHASAN

Tujuan pembahasan topik ini adalah untuk mengetahui beberapa metode penyelesaian persamaan diferensial parsial kuasilinear orde pertama dengan dua variabel bebas beserta contoh-contoh penerapannya.

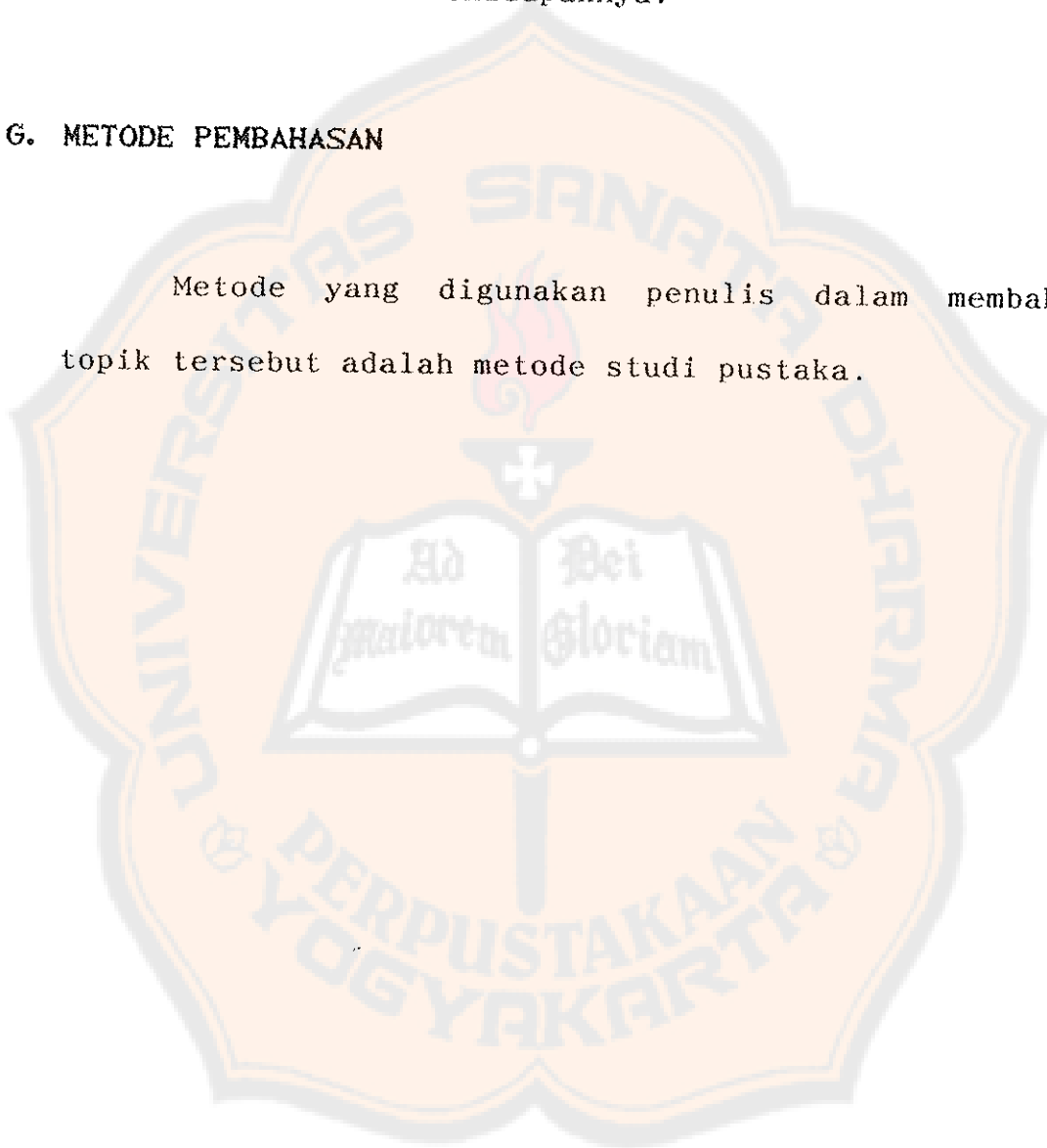
F. MANFAAT PEMBAHASAN

Manfaat pembahasan topik ini bagi penulis adalah lebih mendalami materi tentang persamaan diferensial, khususnya persamaan diferensial parsial. Bagi bidang ilmu yang bersangkutan, hasil pembahasan ini diharapkan dapat memperjelas kegunaan dan penerapan ilmu tersebut dalam dunia nyata, sehingga menarik minat untuk

mempelajari dan mengembangkannya lebih lanjut. Dengan demikian ilmu tersebut akan semakin besar manfaatnya bagi manusia dalam membantu menyelesaikan berbagai permasalahan dalam kehidupannya.

G. METODE PEMBAHASAN

Metode yang digunakan penulis dalam membahas topik tersebut adalah metode studi pustaka.



BAB II

LANDASAN TEORI

A. PERSAMAAN DIFERENSIAL PARSIAL

Persamaan diferensial parsial merupakan dasar dari hampir semua materi dalam fisika klasik dan teknik. Banyak sekali fenomena-fenomena fisik yang dapat dilukiskan dengan persamaan diferensial parsial.

Contoh 2.1 :

1. $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 = n(x,y,z)$ merupakan persamaan yang menyatakan perambatan gelombang cahaya dalam suatu medium tak homogen.

2. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ merupakan persamaan getaran pada senar.

DEFINISI :

Persamaan diferensial parsial adalah suatu persamaan yang memuat derivatif-derivatif parsial dari suatu fungsi dengan dua atau lebih variabel bebas

Bila tidak ada pernyataan khusus, semua fungsi yang ada

diasumsikan sebagai fungsi bernilai real.

Suatu persamaan diferensial parsial memiliki bentuk umum sebagai berikut :

$$f \left(x_1, x_2, \dots, x_n, z, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial z}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2}, \dots \right) = 0$$

dengan $x_1, x_2, \dots, x_n$ menyatakan variabel-variabel bebas dan z menyatakan variabel tak bebas.

DEFINISI :

Orde dari suatu persamaan diferensial parsial adalah tingkat derivatif tertinggi yang muncul dalam persamaan tersebut

Contoh 2.1.1 merupakan persamaan diferensial parsial orde pertama dengan tiga variabel bebas x, y, z dan dengan u sebagai variabel tak bebas ; sedangkan Contoh 2.1.2 merupakan persamaan diferensial parsial orde ke dua dengan dua variabel bebas x dan t .

Untuk persamaan diferensial parsial orde pertama dan ke dua sering digunakan beberapa notasi standar :

$$\begin{aligned} p &= \frac{\partial z}{\partial x} & q &= \frac{\partial z}{\partial y} \\ r &= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} & s &= \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} & t &= \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \end{aligned}$$

B. ASAL PERSAMAAN DIFERENSIAL PARSIAL

Sebelum dibicarakan lebih lanjut mengenai persamaan diferensial parsial, maka perlu diketahui asal persamaan diferensial parsial tersebut. Selain muncul dari masalah-masalah geometri dan fisika, persamaan diferensial parsial juga dapat dihasilkan dengan mengeliminasi parameter dari relasi yang diketahui antara variabel-variabelnya atau dengan mengeliminasi fungsi sembarang dari variabel-variabel tersebut.

Untuk memudahkan pemahaman, dalam contoh-contoh berikut sebagian besar akan digunakan fungsi-fungsi dengan dua variabel bebas.

1. Eliminasi Parameter

Andaikan z suatu fungsi dari dua variabel bebas x dan y , dan relasi antara variabel-variabel tersebut dinyatakan dengan persamaan :

$$F(x, y, z, a, b) = 0 \quad \dots\dots (1)$$

dengan a dan b adalah parameter-parameter.

Jika persamaan tersebut didiferensiasikan secara parsial berturut-turut terhadap x dan y , akan

diperoleh :

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial x} + p \frac{\partial F}{\partial z} = 0 \quad \dots\dots (2)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial y} + q \frac{\partial F}{\partial z} = 0 \quad \dots\dots (3)$$

Selanjutnya, parameter-parameter yang muncul dalam persamaan (2) dan (3) dapat dieliminasi sehingga menghasilkan suatu persamaan diferensial parsial orde pertama : $f(x,y,z,p,q) = 0$.

Secara umum, jika banyaknya parameter dalam persamaan (1) sama dengan banyaknya variabel bebas, maka akan dihasilkan persamaan diferensial parsial orde pertama. Jika dalam persamaan tersebut banyaknya parameter kurang dari banyaknya variabel bebas, maka ada kemungkinan untuk mendapatkan lebih dari satu persamaan diferensial parsial orde pertama. Sedangkan jika banyaknya parameter lebih dari banyaknya variabel bebas, prosedur eliminasi tersebut biasanya akan menghasilkan persamaan diferensial parsial dengan orde lebih tinggi daripada satu.

Contoh 2.2 :

Persamaan $x^2 + y^2 + (z-b)^2 = a^2$ dengan a dan b

parameter-parameter, menyatakan himpunan semua bola yang pusatnya terletak pada sumbu z.

Dengan mendiferensialasikan persamaan tersebut terhadap x dan y berturut-turut, diperoleh :

$$2x + 2(z-b) \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \iff x + p(z-b) = 0 \dots (4)$$

$$2y + 2(z-b) \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \iff y + q(z-b) = 0 \dots (5)$$

Selanjutnya, parameter b dieliminasi dari persamaan (4) dan (5).

$$p \times (5) : yp + pq(z-b) = 0$$

$$q \times (4) : xq + pq(z-b) = 0$$

$$yp - xq = 0$$

Karena terdapat dua variabel bebas dan dua parameter maka dihasilkan persamaan diferensial parsial orde pertama : $yp - xq = 0$.

Contoh 2.3 :

Diketahui persamaan $z = a(x+y) + b(x-y) + abt + c$ dengan x, y, t variabel-variabel bebas dan a, b, c parameter-parameter.

Dengan mendiferensialkan persamaan tersebut terhadap x, y, dan t berturut-turut, diperoleh :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = a + b, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = a - b, \quad \frac{\partial z}{\partial t} = ab$$

Karena $(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$, maka dengan cara substitusi, diperoleh suatu persamaan

$$\text{diferensial parsial : } \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = 4 \frac{\partial z}{\partial t} .$$

Karena terdapat tiga parameter dan tiga variabel bebas, maka persamaan yang dihasilkan adalah persamaan diferensial parsial orde pertama.

Contoh 2.4 :

Diketahui persamaan $z = a(x+y)$ dengan a parameter.

Dengan mendiferensialkan persamaan tersebut

$$\text{terhadap } x, \text{ diperoleh : } \frac{\partial z}{\partial x} = a \iff p = a$$

Dengan mendiferensialkan persamaan tersebut

$$\text{terhadap } y, \text{ diperoleh : } \frac{\partial z}{\partial y} = a \iff q = a$$

Karena banyaknya parameter kurang dari variabel bebasnya, maka dengan mensubstitusikan $p = a$ atau $q = a$ ke dalam persamaan semula, didapatkan dua persamaan diferensial parsial orde pertama yang berbeda, yaitu : $z = p(x+y)$ dan $z = q(x+y)$.

Contoh 2.5 :

Diketahui persamaan $z = ax + by + cxy$ dengan a, b, c parameter-parameter.

Dengan mendiferensiasikan persamaan tersebut terhadap x , diperoleh :

$$p = a + cy \quad \dots \quad (6)$$

Dengan mendiferensiasikan persamaan tersebut terhadap y , diperoleh :

$$q = b + cx \quad \dots \quad (7)$$

Persamaan-persamaan yang ada tidak cukup untuk dapat mengeliminasi ketiga parameter tersebut.

Dengan mendiferensiasikan persamaan (6) terhadap x , diperoleh persamaan diferensial parsial orde ke dua,

$$\text{yaitu : } \frac{\partial}{\partial x} p = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = r = 0$$

Dengan mendiferensiasikan persamaan (7) terhadap y , diperoleh persamaan diferensial parsial orde ke dua,

$$\text{yaitu : } \frac{\partial}{\partial y} q = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = t = 0$$

Dengan mendiferensiasikan persamaan (6) terhadap y , dan persamaan (7) terhadap x , diperoleh :

$$\frac{\partial}{\partial y} p = \frac{\partial}{\partial x} q = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = s = c$$

dan jika hasil ini disubstitusikan ke (6) dan (7), diperoleh :

$$p = a + sy \quad \Leftrightarrow \quad a = p - sy$$

$$q = b + sx \quad \Leftrightarrow \quad b = q - sx$$

Dengan mensubstitusi parameter-parameter a, b, c pada persamaan semula, diperoleh :

$$z = (p-sy)x + (q-sx)y + sxy \quad \Leftrightarrow \quad z = xp + yq - xys$$

Karena banyaknya parameter lebih dari banyaknya variabel bebas, didapatkan persamaan diferensial parsial dengan orde lebih dari satu, yaitu : $r = 0$, $t = 0$, dan $z = xp + yq - xys$, yang ketiganya berorde dua.

2. Eliminasi Fungsi Sembarang

Andaikan $u = u(x,y,z)$ dan $v = v(x,y,z)$ merupakan fungsi-fungsi yang diketahui dari variabel-variabel x, y, z dengan x dan y adalah variabel bebas sedangkan z adalah variabel tak bebas yang bergantung pada x dan y . Salah satu dari u atau v harus memuat z .

Andaikan F adalah fungsi sembarang dari u dan v dimana $F(u,v) = 0$ menunjukkan relasi antara u dan v . Relasi tersebut dapat pula dinyatakan dalam bentuk $u = \phi(v)$ atau $v = \psi(u)$ dimana ϕ dan ψ fungsi sembarang.

Dengan mendiferensialkan $F(u,v) = 0$ terhadap x , diperoleh :

$$\left(\frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} \right) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial u} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + p \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{\partial F}{\partial v} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + p \frac{\partial v}{\partial z} \right) = 0$$

Dengan mendiferensialkan $F(u,v) = 0$ terhadap y , diperoleh :

$$\left(\frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} \right) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial u} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + q \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{\partial F}{\partial v} \left(\frac{\partial v}{\partial y} + q \frac{\partial v}{\partial z} \right) = 0$$

Selanjutnya, $\frac{\partial F}{\partial u}$ dan $\frac{\partial F}{\partial v}$ dieliminasi dari kedua persamaan tersebut.

$$-\frac{\frac{\partial F}{\partial u}}{\frac{\partial F}{\partial v}} = \frac{\frac{\partial v}{\partial x} + p \frac{\partial v}{\partial z}}{\frac{\partial u}{\partial x} + p \frac{\partial u}{\partial z}}$$

$$-\frac{\frac{\partial F}{\partial u}}{\frac{\partial F}{\partial v}} = \frac{\frac{\partial v}{\partial y} + q \frac{\partial v}{\partial z}}{\frac{\partial u}{\partial y} + q \frac{\partial u}{\partial z}}$$

$$0 = \frac{\frac{\partial v}{\partial x} + p \frac{\partial v}{\partial z}}{\frac{\partial u}{\partial x} + p \frac{\partial u}{\partial z}} - \frac{\frac{\partial v}{\partial y} + q \frac{\partial v}{\partial z}}{\frac{\partial u}{\partial y} + q \frac{\partial u}{\partial z}}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} + p \frac{\partial u}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial y} + q \frac{\partial v}{\partial z} \right) = \left(\frac{\partial v}{\partial x} + p \frac{\partial v}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial y} + q \frac{\partial u}{\partial z} \right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + q \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} + p \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial y} + pq \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z}$$

$$= \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} + q \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial x} + p \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} + pq \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial y} \right) p + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} \right) q$$

$$= \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

Dengan memandang $P = \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial y}$,

$Q = \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z}$, dan $R = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x}$,

dimana P dan Q tidak keduanya bernilai nol, diperoleh suatu persamaan diferensial parsial orde pertama dalam bentuk $Pp + Qq = R$ yang tidak lagi memuat fungsi sembarang.

Jika relasi yang diketahui antara x , y , z menyangkut satu fungsi sembarang saja maka akan dihasilkan persamaan diferensial parsial orde pertama. Jika relasi tersebut menyangkut dua atau lebih fungsi sembarang maka akan didapatkan persamaan diferensial parsial dengan orde yang lebih tinggi daripada satu.

Contoh 2.6 :

Persamaan $x^2 + y^2 + (z-b)^2 = a^2$ pada Contoh 2.2

dapat dinyatakan secara umum dengan relasi

$F(x^2+y^2,z) = 0$ dimana F adalah fungsi sembarang.

Dengan memandang $u = x^2 + y^2$ dan $v = z$ maka relasi

tersebut dapat dinyatakan dengan $F(u,v) = 0$.

Dengan mendiferensiasikan $F(u,v) = 0$ terhadap x dan y secara berturut-turut, diperoleh :

$$2x \frac{\partial F}{\partial u} + p \frac{\partial F}{\partial v} = 0$$

$$2y \frac{\partial F}{\partial u} + q \frac{\partial F}{\partial v} = 0$$

Selanjutnya, $\frac{\partial F}{\partial u}$ dan $\frac{\partial F}{\partial v}$ dieliminasi dari persamaan-persamaan tersebut.

$$-\frac{\frac{\partial F}{\partial u}}{\frac{\partial F}{\partial v}} = \frac{p}{2x}$$

$$-\frac{\frac{\partial F}{\partial u}}{\frac{\partial F}{\partial v}} = \frac{q}{2y}$$

$$0 = \frac{p}{2x} - \frac{q}{2y}$$

$$yp - xq = 0$$

Karena relasinya menyangkut satu fungsi sembarang saja, didapatkan persamaan diferensial parsial orde pertama $yp - xq = 0$.

Contoh 2.7 :

Persamaan $z = x + y + f(xy)$ dapat ditulis dalam bentuk $F(x+y-z, xy) = 0$ atau $F(u,v) = 0$ dimana F fungsi sembarang dari $u = x + y - z$ dan $v = xy$.

Dengan mendiferensiasikan $F(u,v) = 0$ terhadap x dan

y secara berturut-turut, diperoleh :

$$(1-p) \frac{\partial F}{\partial u} + y \frac{\partial F}{\partial v} = 0$$

$$(1-q) \frac{\partial F}{\partial u} + x \frac{\partial F}{\partial v} = 0$$

Selanjutnya, $\frac{\partial F}{\partial u}$ dan $\frac{\partial F}{\partial v}$ dieliminasi dari persamaan-persamaan tersebut.

$$-\frac{\frac{\partial F}{\partial u}}{\frac{\partial F}{\partial v}} = \frac{y}{1-p}$$

$$-\frac{\frac{\partial F}{\partial u}}{\frac{\partial F}{\partial v}} = \frac{x}{1-q}$$

$$0 = \frac{y}{1-p} - \frac{x}{1-q}$$

$$xp - yq = x - y$$

Didapatkan persamaan diferensial parsial orde pertama $xp - yq = x - y$.

Cara lain :

Persamaan $z = x + y + f(xy)$ didiferensialkan terhadap x dan y berturut-turut sehingga diperoleh :

$$p = 1 + yf'(xy) \quad \dots \quad (8)$$

$$q = 1 + xf'(xy) \quad \dots \quad (9)$$

Selanjutnya, $f'(xy)$ dieliminasi dari persamaan-persamaan tersebut.

$$x \cdot x \text{ (8) : } \quad x_p = x + xyf'(xy)$$

$$y \cdot x \text{ (9) : } \quad y_q = y + xyf'(xy)$$

$$x_p - y_q = x - y$$

Didapatkan persamaan diferensial parsial orde pertama $x_p - y_q = x - y$.

Contoh 2.8 :

Persamaan $z = f(x-ky) + F(x+ky)$ dengan k suatu konstanta, memuat dua fungsi sembarang f dan F .

Dengan mendiferensialkan persamaan tersebut terhadap x dan y secara berturut-turut, diperoleh :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'(x-ky) + F'(x+ky) \quad \dots \quad (10)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (-k)f'(x-ky) + kF'(x+ky) \quad \dots \quad (11)$$

Persamaan-persamaan yang ada tidak cukup untuk mengeliminasi kedua fungsi sembarang tersebut.

Dengan mendiferensialkan persamaan (10) terhadap x dan persamaan (11) terhadap y , diperoleh :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''(x-ky) + F''(x+ky) \quad \dots \quad (12)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (-k)^2 f''(x-ky) + k^2 F''(x+ky) \quad \dots \quad (13)$$

Selanjutnya, kedua fungsi sembarang itu dieliminasi dari persamaan-persamaan tersebut.

$$k^2 \times (12) : \quad k^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = k^2 [f''(x-ky) + F''(x+ky)]$$

$$(13) : \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = k^2 [f''(x-ky) + F''(x+ky)]$$

$$k^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

Karena relasinya menyangkut dua fungsi sembarang maka didapatkan persamaan diferensial parsial dengan orde lebih tinggi dari satu, yaitu

$$k^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0, \text{ yang berorde dua.}$$

C. PERSAMAAN DIFERENSIAL PARSIAL ORDE PERTAMA

Bentuk umum persamaan diferensial parsial orde pertama adalah :

$$f \left(x_1, x_2, \dots, x_n, z, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial z}{\partial x_n} \right) = 0$$

Bila derivatif-derivatif parsial dari persamaan diferensial tersebut tidak semuanya berpangkat satu maka persamaan itu dikatakan non-linear. Bila semua derivatif parsial yang muncul berpangkat satu maka persamaan disebut kuasilinear.

Contoh 2.9 :

$$1. \ x^2 \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + y^2 \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 = z^2$$

$$2. \ 2x(y+z^2) \frac{\partial z}{\partial x} + y(2y+z^2) \frac{\partial z}{\partial y} = z^3$$

$$3. \ x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z^2 + x^2$$

$$4. \ y^2 \frac{\partial z}{\partial x} - xy \frac{\partial z}{\partial y} = x(z-2y)$$

Persamaan pada Contoh 2.9.1 di atas merupakan persamaan non-linear, sedangkan persamaan-persamaan pada Contoh 2.9.2, 2.9.3, dan 2.9.4 merupakan persamaan kuasilinear.

Persamaan diferensial parsial orde pertama dengan dua variabel bebas yang dihasilkan dari eliminasi fungsi sembarang merupakan persamaan kuasilinear, sedangkan yang berasal dari eliminasi parameter tidak selalu kuasilinear.

Dalam skripsi ini yang akan dibicarakan adalah persamaan diferensial parsial kuasilinear orde pertama dengan dua variabel bebas.

Suatu persamaan diferensial parsial kuasilinear orde pertama dengan dua variabel bebas mempunyai bentuk

umum :

$$P(x,y,z) \frac{\partial z}{\partial x} + Q(x,y,z) \frac{\partial z}{\partial y} = R(x,y,z)$$

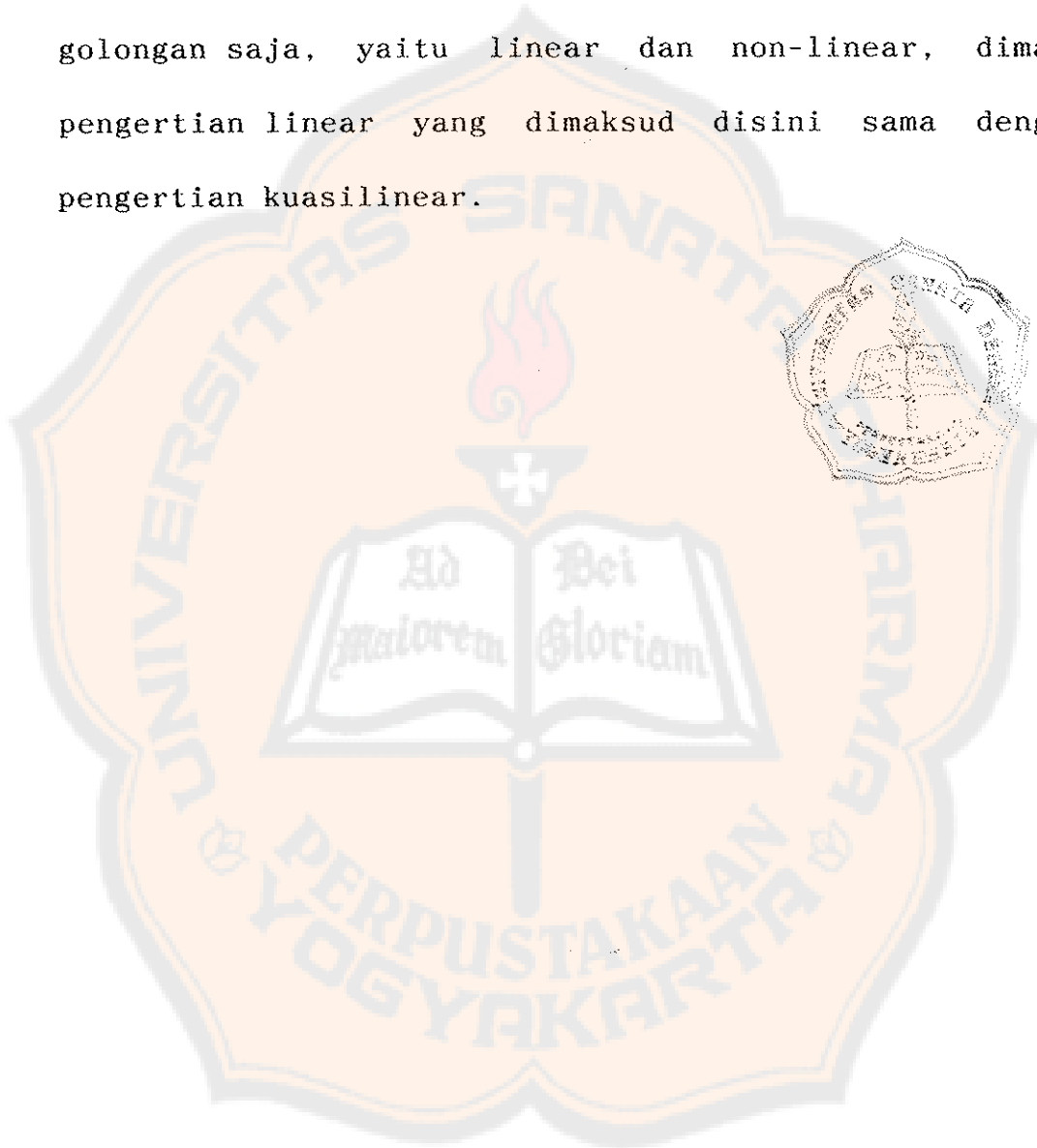
dimana x dan y menyatakan variabel-variabel bebas, sedangkan z menyatakan variabel tak bebas. P , Q , dan R merupakan fungsi-fungsi yang memuat x , y , atau z saja, dengan P dan Q tidak keduanya bernilai nol.

Secara singkat, persamaan tersebut dapat pula ditulis dalam bentuk : $Pp + Qq = R$, dengan p menyatakan $\frac{\partial z}{\partial x}$, dan q menyatakan $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Teori sistematis tentang persamaan jenis ini diberikan pertama kali oleh Lagrange. Karena itu, persamaan tersebut sering disebut sebagai Persamaan Lagrange.

Jika P dan Q tidak memuat z maka persamaan itu dikatakan semilinear. Jika P dan Q tidak memuat z , sedangkan z dalam R berpangkat nol atau satu maka persamaan itu disebut linear. Dengan demikian, persamaan semilinear dan linear sebenarnya termasuk dalam persamaan kuasilinear. Persamaan pada Contoh 2.9.3 merupakan persamaan yang semilinear, sedangkan Contoh 2.9.4 merupakan persamaan yang linear.

Penggolongan tersebut dijumpai dalam sebagian besar buku tentang persamaan diferensial parsial. Tetapi ada juga buku (misalnya Sneddon, 1957) yang membagi persamaan diferensial parsial menjadi dua golongan saja, yaitu linear dan non-linear, dimana pengertian linear yang dimaksud disini sama dengan pengertian kuasilinear.



BAB III

PENYELESAIAN PERSAMAAN DIFERENSIAL PARSIAL KUASILINEAR

ORDE PERTAMA DENGAN DUA VARIABEL BEBAS

Aspek selanjutnya dalam mempelajari persamaan diferensial parsial adalah tentang penyelesaiannya. Hal ini penting diketahui agar dapat diterapkan dalam menyelesaikan berbagai masalah kehidupan yang berkaitan dengan persamaan diferensial parsial.

Penyelesaian persamaan diferensial parsial adalah suatu relasi antara variabel tak bebas dengan variabel-variabel bebas yang memenuhi persamaan diferensial parsial yang diketahui. Dalam bentuk lain, penyelesaian bisa berupa suatu fungsi yang bebas dari derivatif dan memenuhi persamaan diferensial parsial yang diketahui tersebut.

DEFINISI :

Suatu fungsi $z = z(x,y)$ dari variabel-variabel x dan y dimana z beserta derivatif-derivatif parsial tingkat satunya memenuhi persamaan diferensial parsial orde pertama $f\left(x,y,z(x,y), \frac{\partial z(x,y)}{\partial x}, \frac{\partial z(x,y)}{\partial y}\right) = 0$ disebut penyelesaian atau integral dari persamaan diferensial parsial tersebut

A. JENIS-JENIS PENYELESAIAN

Penyelesaian yang berbentuk $z = z(x,y)$ ini disebut **penyelesaian eksplisit**. Dalam berbagai masalah yang menyangkut persamaan diferensial parsial, seringkali penyelesaiannya tidak berbentuk eksplisit melainkan implisit.

Penyelesaian implisit suatu persamaan diferensial parsial orde pertama dengan dua variabel bebas adalah suatu relasi antara variabel tak bebas z dengan variabel-variabel bebas x dan y yang memenuhi persamaan diferensial yang diketahui tersebut. Penyelesaian implisit ini berbentuk $F(x,y,z) = 0$. Dari relasi ini bisa diperoleh fungsi $z = z(x,y)$ tetapi bisa juga tidak. Jika (x,y,z) dipandang sebagai koordinat titik dalam koordinat Cartesius, maka $F(x,y,z) = 0$ menyatakan persamaan suatu permukaan. Jika relasi tersebut merupakan penyelesaian suatu persamaan diferensial parsial, maka permukaan itu disebut **permukaan integral**.

Dalam bab sebelumnya telah dibahas bahwa ada dua asal dari persamaan diferensial parsial, yaitu yang berkenaan dengan eliminasi parameter dan eliminasi fungsi sembarang. Lagrange menyebut asal persamaan

diferensial parsial yang menyangkut eliminasi parameter sebagai asal lengkap dan yang menyangkut eliminasi fungsi sembarang sebagai asal umum.

Sebaliknya, jika penyelesaian persamaan diferensial parsial yang didapatkan memuat parameter, penyelesaian itu disebut **penyelesaian lengkap** atau **integral lengkap**, sedangkan jika memuat fungsi sembarang, disebut **penyelesaian umum** atau **integral umum**.

Jadi, penyelesaian lengkap berbentuk $F(x,y,z,a,b) = 0$, sedangkan penyelesaian umum berbentuk $F(u,v) = 0$ dengan $u = u(x,y,z)$ dan $v = v(x,y,z)$. Jika untuk parameter a dan b dalam penyelesaian lengkap diberikan nilai tertentu atau dipilih fungsi F tertentu dalam penyelesaian umum, maka relasi yang diperoleh disebut **penyelesaian khusus**. Penjelasan lebih lanjut mengenai bentuk-bentuk penyelesaian tersebut akan diberikan dalam contoh-contoh pada pasal berikutnya.

Jenis penyelesaian yang lain adalah **penyelesaian singular** atau **integral singular**. Penyelesaian ini hanya muncul dalam pembicaraan tentang persamaan diferensial parsial non-linear. Penyelesaian singular tidak selalu ada dan biasanya tidak tercakup dalam penyelesaian

lengkap maupun penyelesaian umum.

Istilah penyelesaian umum dan penyelesaian lengkap tidaklah menyatakan bahwa penyelesaian yang satu lebih umum daripada yang lain, tetapi semata-mata menunjukkan perbedaan bentuk kedua jenis penyelesaian tersebut. Dalam beberapa hal, penyelesaian umum memang memuat himpunan penyelesaian yang lebih luas daripada penyelesaian lengkap, tetapi dalam pembicaraan lebih lanjut akan ditunjukkan bahwa bila penyelesaian lengkap dari suatu persamaan diferensial parsial orde pertama telah diketahui maka akan dapat dihasilkan pula semua jenis penyelesaian yang lain.

B. INTERPRETASI GEOMETRIS

Sebelumnya, perlu dikenal tentang istilah selubung.

SELUBUNG :

Selubung keluarga permukaan adalah suatu permukaan yang menyinggung setiap anggota dari keluarga permukaan tersebut.

Andaikan suatu keluarga permukaan S mempunyai selubung E . Ini berarti bahwa ada permukaan E yang menyinggung setiap permukaan S sepanjang suatu kurva C .

Jika S mempunyai persamaan $F(x,y,z,u) = 0$ dimana u parameter, maka dengan mengeliminasi u dari kedua persamaan :

$$F(x,y,z,u) = 0 \quad \text{dan} \quad \frac{\partial F}{\partial u}(x,y,z,u) = 0$$

akan dihasilkan persamaan selubung dari S .

Contoh 3.1 :

Keluarga bola dengan jari-jari R dan berpusat di sumbu- y memiliki persamaan :

$$x^2 + (y-u)^2 + z^2 = R^2$$

dimana $(0,u,0)$ dengan u parameter merupakan koordinat pusat bola.

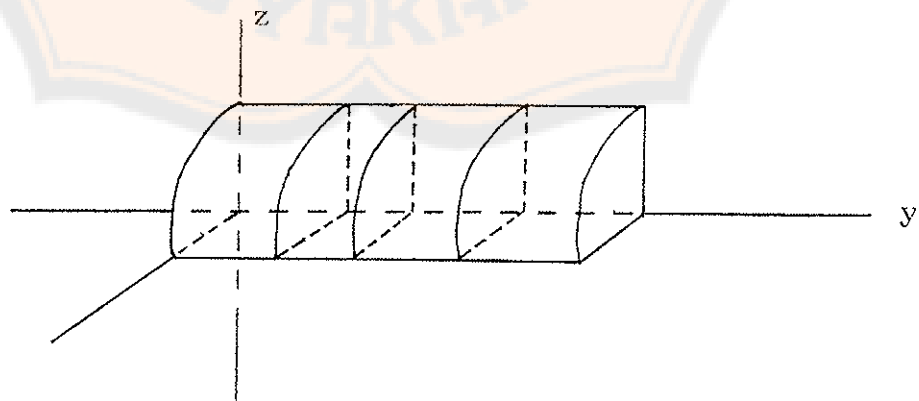
Dengan mengeliminasi u dari persamaan-persamaan :

$$x^2 + (y-u)^2 + z^2 = R^2$$

$$\frac{\partial F}{\partial u} = -2(y-u) = 0$$

dihasilkan selubung berbentuk silinder dengan persamaan :

$$x^2 + z^2 = R^2$$



Untuk memahami sifat-sifat integral atau penyelesaian yang dimiliki oleh persamaan diferensial parsial orde pertama $f(x,y,z,p,q) = 0$, perlu diketahui arti geometris dari persamaan diferensial itu sendiri.

Andaikan $z = z(x,y)$ merupakan permukaan integral dari persamaan diferensial parsial orde pertama $f(x,y,z,p,q) = 0$. Selanjutnya perhatikan kelima bentuk x,y,z,p,q . Setiap titik (x,y,z) pada permukaan tersebut akan menyatakan suatu bidang singgung dengan persamaan :

$$(Z-z) = p(X-x) + q(Y-y)$$

Karena itu setiap kuintupel (x,y,z,p,q) dapat disebut elemen planar yang dapat dipandang sebagai suatu bagian kecil bidang tersebut di sekitar titik (x,y,z) . Karena nilai-nilai p dan q bervariasi dengan bebas, maka pada tiap titik terdapat himpunan tak berhingga dari elemen-elemen planar semacam itu. Himpunan tersebut dikatakan sebagai himpunan tak berhingga ganda karena bergantung pada kedua nilai p dan q .

Perhatikan persamaan diferensial parsial $f(x,y,z,p,q) = 0$. Pada suatu titik tertentu (x,y,z) yang diketahui, persamaan tersebut menetapkan suatu relasi antara p dan q . Jika nilai p tertentu maka nilai

q juga tertentu. Dengan demikian, persamaan diferensial parsial tersebut menetapkan suatu subset dari elemen-elemen planar yang bergantung pada satu parameter saja, dan disebut subset tak berhingga tunggal. Dengan kata lain, persamaan diferensial parsial tersebut menunjukkan suatu medan planar.

Masalah mengintegrasikan persamaan diferensial parsial sekarang dapat diartikan sebagai menemukan semua permukaan yang elemen-elemen planarnya berada pada medan yang ditunjukkan oleh persamaan diferensial parsial tersebut.

Contoh berikut akan menunjukkan berbagai jenis permukaan integral yang dimiliki oleh persamaan diferensial parsial $f(x,y,z,p,q) = 0$ dan hubungan di antara mereka.

Contoh 3.2 :

Perhatikan himpunan tak berhingga ganda dari bola-bola yang pusatnya terletak pada bidang- xy :

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + z^2 = 1 \quad \dots\dots (1)$$

Dari persamaan tersebut dapat dibentuk suatu persamaan diferensial parsial dengan cara mengeliminasi parameter-parameter a dan b .

Dengan mendiferensialkan persamaan (1) berturut-turut terhadap x dan y , diperoleh :

$$2(x-a) + 2zp = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x - a = -zp$$

$$2(y-b) + 2zq = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y - b = -zq$$

Jika hasil tersebut disubstitusikan ke dalam persamaan (1), akan diperoleh persamaan diferensial parsial non-linear :

$$z^2(p^2 + q^2 + 1) = 1 \quad \dots\dots (2)$$

Sebaliknya, berarti persamaan (1) yang memiliki bentuk $F(x,y,z,a,b) = 0$ merupakan integral lengkap dari persamaan diferensial parsial (2).

Andaikan relasi antara parameter a dan b ditunjukkan dengan $b = \phi(a)$ dimana ϕ suatu fungsi sembarang.

Ini sama artinya dengan memilih bola-bola yang pusatnya terletak pada kurva $b = \phi(a)$ pada bidang- xy .

Selubung dari bola-bola ini berupa suatu permukaan berbentuk pipa, yang merupakan permukaan integral karena dibentuk dari elemen-elemen planar dari medan tersebut.

Setiap pilihan tertentu untuk ϕ menunjukkan penyelesaian umum tertentu yang mewakili keseluruhan permukaan berbentuk pipa tersebut.

Disamping keluarga bola dan pipa itu, masih ada permukaan integral yang lain, yaitu bidang-bidang $z = 1$ dan $z = -1$ yang menyinggung setiap bola maupun pipa tersebut. Bidang-bidang tersebut tidak termuat baik dalam penyelesaian lengkap maupun penyelesaian umum. Bidang-bidang ini merupakan representasi geometris dari penyelesaian singular $z = \pm 1$.

Dari contoh tersebut dapat dilihat bahwa penyelesaian umum dapat dihasilkan dengan menemukan selubung dari himpunan tak hingga tunggal tertentu dari bola-bola tersebut, sedangkan penyelesaian singular diperoleh dengan menemukan selubung dari semua bola-bola tersebut.

Secara umum, cara untuk mendapatkan penyelesaian umum dan penyelesaian singular dari suatu penyelesaian lengkap dapat dinyatakan sebagai berikut :

Jika diketahui suatu penyelesaian lengkap $F(x,y,z,a,b) = 0$ maka penyelesaian umum dapat dihasilkan dengan mengeliminasi parameter a dari persamaan-persamaan :

$$F[x,y,z,a,\phi(a)] = 0 \quad \text{dan} \quad \frac{\partial F[x,y,z,a,\phi(a)]}{\partial a} = 0$$

dan penyelesaian singular, jika ada, dapat diperoleh dengan mengeliminasi parameter a dan b dari

persamaan-persamaan :

$$F(x,y,z,a,b) = 0 \quad , \quad \frac{\partial F(x,y,z,a,b)}{\partial a} = 0 \quad , \quad \text{dan}$$

$$\frac{\partial F(x,y,z,a,b)}{\partial b} = 0$$

Berdasarkan metode tersebut, persamaan diferensial parsial (2) dalam Contoh 3.2 yang memiliki penyelesaian lengkap $(x-a)^2 + (y-b)^2 + z^2 = 1$ akan memiliki penyelesaian umum yang dinyatakan dengan dua persamaan :

$$(x-a)^2 + (y-\phi(a))^2 + z^2 - 1 = 0 \quad \dots \quad (3)$$

$$(x-a) + (y-\phi(a))\phi'(a) = 0 \quad \dots \quad (4)$$

dimana ϕ adalah suatu fungsi sembarang.

Jika dipilih $b = \phi(a) = 2a$, maka dari persamaan (4) diperoleh :

$$5a = x + 2y \quad \Leftrightarrow \quad a = \frac{x+2y}{5}$$

Bila hasil tersebut disubstitusikan ke persamaan (3), diperoleh :

$$(x-a)^2 + (y-2a)^2 + z^2 - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{x+2y}{5}\right)^2 + \left(y - \frac{2x+4y}{5}\right)^2 + z^2 - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 4xy + y^2 + 5z^2 = 5$$

Dihasilkan suatu penyelesaian khusus, yaitu :

$$4x^2 - 4xy + y^2 + 5z^2 = 5$$

Penyelesaian singular dapat dicari dengan mendiferensiasikan penyelesaian lengkap (1) berturut-turut terhadap a dan b.

Diperoleh :

$$x - a = 0 \quad \text{dan} \quad y - b = 0$$

Dengan mensubstitusikan hasil tersebut ke persamaan (1), didapatkan :

$$z^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad z = \pm 1$$

Dihasilkan permukaan integral $z = 1$ dan $z = -1$ yang merupakan penyelesaian singular dari persamaan diferensial parsial (2).

Contoh 3.3 :

Dalam Contoh 2.2, asal lengkap $x^2 + y^2 + (z-b)^2 = a^2$ menghasilkan persamaan diferensial parsial kuasilinear orde pertama : $yp - xq = 0$.

Sebaliknya, berarti persamaan diferensial $yp - xq = 0$ mempunyai penyelesaian lengkap : $x^2 + y^2 + (z-b)^2 = a^2$.

Dengan memandang $b = \phi(a)$, maka penyelesaian umum dari $yp - xq = 0$ ditunjukkan oleh kedua persamaan :

$$x^2 + y^2 + (z-\phi(a))^2 = a^2 \quad \dots \quad (5)$$

$$(z-\phi(a))\phi'(a) = -a \quad \dots \quad (6)$$

Sebagai contoh, diambil kasus khusus dimana

$$b = \phi(a) = 2a.$$

Bila disubstitusikan ke persamaan (6), diperoleh :

$$(z-2a)^2 = -a \iff a = \frac{2z}{3}$$

Bila hasil tersebut disubstitusikan ke persamaan (5),

diperoleh :

$$x^2 + y^2 + (z-2a)^2 = a^2$$

$$\iff x^2 + y^2 + \left(z - \frac{4z}{3}\right)^2 = \left(\frac{2z}{3}\right)^2$$

$$\iff 3x^2 + 3y^2 - z^2 = 0$$

Maka $3x^2 + 3y^2 - z^2 = 0$ merupakan salah satu penyelesaian khusus persamaan diferensial parsial $yp - xq = 0$. Persamaan diferensial ini tidak memiliki penyelesaian singular.

C. EKSISTENSI DAN KETUNGGALAN PENYELESAIAN

Sebelum suatu persamaan diferensial parsial diselesaikan, ada beberapa hal yang perlu diperhatikan. Pertama, apakah penyelesaian persamaan tersebut ada, dan ke dua, jika penyelesaiannya ada, apakah penyelesaian itu tunggal. Untuk itu perlu diketahui tentang teorema eksistensi dan ketunggalan.

Teorema semacam ini berisi syarat-syarat untuk menentukan apakah suatu persamaan diferensial parsial memiliki penyelesaian dan apakah penyelesaian tersebut tunggal. Dalam hal persamaan orde pertama, syarat-syarat tersebut diformulasikan dalam Problem Cauchy. Problem Cauchy untuk persamaan diferensial parsial orde pertama dengan dua variabel bebas dapat dinyatakan sebagai berikut :

PROBLEM CAUCHY

Andaikan :

1. Fungsi-fungsi $x_0(\mu)$, $y_0(\mu)$, dan $z_0(\mu)$ beserta derivatif-derivatif pertamanya kontinu dalam interval M yang didefinisikan dengan $\mu_1 < \mu < \mu_2$
2. $f(x,y,z,p,q)$ merupakan fungsi dari x,y,z,p , dan q dalam daerah tertentu U dari ruang-xyzpq

Dapat dicari keberadaan suatu fungsi $\phi(x,y)$ dengan sifat-sifat sebagai berikut :

- a. $\phi(x,y)$ dan derivatif-derivatif parsialnya terhadap x dan y merupakan fungsi-fungsi kontinu dari x dan y dalam suatu daerah R dari ruang-xy
- b. Untuk setiap nilai x dan y dalam R , titik $\{x,y,\phi(x,y),\phi_x(x,y),\phi_y(x,y)\}$ terletak pada U dan $f[x,y,\phi(x,y),\phi_x(x,y),\phi_y(x,y)] = 0$

c. Untuk setiap μ dalam interval M , titik $\{x_o(\mu), y_o(\mu)\}$ berada dalam daerah R , dan $\phi\{x_o(\mu), y_o(\mu)\} = z_o$

Secara geometris, dapat diartikan bahwa akan dibuktikan adanya suatu permukaan $z = \phi(x, y)$ yang melalui kurva Γ dengan persamaan parametrik :

$$x = x_o(\mu) \quad , \quad y = y_o(\mu) \quad , \quad z = z_o(\mu)$$

dimana pada setiap titik, arah $(p, q, -1)$ dari normalnya adalah sedemikian sehingga : $f(x, y, z, p, q) = 0$.

Problem Cauchy dapat dinyatakan dalam berbagai bentuk lain yang ekuivalen. Perlu diperhatikan bahwa problem tersebut tidak dapat dibuktikan dalam keadaan yang sangat umum demikian. Untuk membuktikannya, diperlukan asumsi-asumsi lebih lanjut tentang bentuk fungsi f dan sifat kurva Γ .

Jadi, ada sangat banyak bentuk teorema eksistensi, tergantung pada sifat dan asumsi-asumsi khusus tersebut. Salah satu teorema yang penting adalah Teorema yang dinyatakan oleh Sonia Kowalewski.

TEOREMA SONIA KOWALEWSKI

Jika :

1. $g(y)$ dan semua derivatifnya kontinu untuk $|y - y_o| < \delta$
2. x_o adalah bilangan yang diketahui dan $z_o = g(y_o)$,
 $q_o = g'(y_o)$

3. $f(x,y,z,q)$ dan semua derivatif parsialnya kontinu dalam daerah S yang didefinisikan oleh :

$$|x-x_0| < \delta, |y-y_0| < \delta, |z-z_0| < \delta$$

Maka ada fungsi tunggal $\phi(x,y)$ sedemikian sehingga :

a. $\phi(x,y)$ dan semua derivatif parsialnya kontinu dalam daerah R yang didefinisikan oleh : $|x-x_0| < \delta_1$, $|y-y_0| < \delta_2$

b. Untuk setiap (x,y) dalam R , $z = \phi(x,y)$ merupakan penyelesaian dari persamaan :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f(x,y,z, \frac{\partial z}{\partial y})$$

c. Untuk setiap nilai y dalam interval $|y-y_0| < \delta_1$, $\phi(x_0,y) = g(y)$

Teorema tersebut tidak dibuktikan di sini karena membutuhkan pengetahuan analisis tingkat lanjut, tetapi berlakunya teorema tersebut akan ditunjukkan dalam contoh berikut ini.

Contoh 3.4 :

Pandang fungsi $g(y) = 3e^{-2y}$

Jelas bahwa $g(y)$ dan semua derivatifnya kontinu pada $|y-y_0| < \delta$ untuk sembarang nilai tertentu dari y_0 .

Andaikan :

$$x_0 = 0$$

$$z_0 = g(y_0) = 3e^{-2y_0}$$

$$q_0 = \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{y=y_0} = g'(y_0) = -6e^{-2y_0}$$

Andaikan ada suatu fungsi :

$$f(x,y,z,q) = f(x,y,z, \frac{\partial z}{\partial y}) = -2 \frac{\partial z}{\partial y}$$

dimana $f(x,y,z,q)$ dan semua derivatif parsialnya kontinu dalam daerah S yang didefinisikan oleh :

$$|x-x_0| < \delta, \quad |y-y_0| < \delta, \quad |z-z_0| < \delta$$

Berarti syarat-syarat dalam Teorema Sonia Kowalewski dipenuhi.

Akan ditunjukkan bahwa ada fungsi tunggal $\phi(x,y)$ yang memiliki sifat-sifat seperti ketentuan dalam teorema tersebut.

Pandang fungsi $\phi(x,y) = 3e^{2(2x-y)}$

a. Jelas bahwa $\phi(x,y)$ dan semua derivatif parsialnya kontinu dalam daerah R yang didefinisikan oleh :

$$|x-x_0| < \delta_1, \quad |y-y_0| < \delta_2$$

b. Jika $z = \phi(x,y) = 3e^{2(2x-y)}$ maka :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 12e^{2(2x-y)}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -6e^{2(2x-y)}$$

Selanjutnya :

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= 12e^{2(2x-y)} = -2(-6e^{2(2x-y)}) \\ &= -2 \frac{\partial z}{\partial y} = f(x,y,z, \frac{\partial z}{\partial y}) \end{aligned}$$

Jadi, untuk $\forall (x,y) \in R$, $z = \phi(x,y)$ merupakan

penyelesaian dari persamaan $\frac{\partial z}{\partial x} = f(x,y,z, \frac{\partial z}{\partial y})$

c. Untuk setiap nilai y dalam interval $|y-y_0| < \delta_1$:

$$\phi(x_0, y) = \phi(0, y) = 3e^{-2y} = g(y)$$

Jadi, dapat ditunjukkan berlakunya Teorema Sonia

Kowalewski tentang eksistensi dan ketunggalan

penyelesaian persamaan diferensial parsial.

D. METODE KARAKTERISTIK LAGRANGE

Metode yang paling sering digunakan dalam menyelesaikan suatu persamaan diferensial parsial kuasilinear orde pertama adalah Metode Karakteristik Lagrange. Dalam bab sebelumnya telah disebutkan bahwa suatu persamaan diferensial parsial kuasilinear orde pertama dengan dua variabel bebas memiliki bentuk :

$$Pp + Qq = R \quad \dots\dots (1)$$

dimana P, Q, R merupakan fungsi-fungsi dari x, y, z saja, dan P dan Q tidak keduanya bernilai nol.

Persamaan ini disebut **Persamaan Lagrange**.

Bila $P = 0$ atau $Q = 0$ maka persamaan diferensial tersebut lebih mudah diselesaikan karena hanya menyangkut derivatif parsial terhadap salah satu

variabel bebasnya. Untuk keadaan tersebut, persamaan diferensial parsial itu dapat dianggap seperti persamaan diferensial biasa.

Contoh 3.5 :

Diketahui persamaan diferensial parsial $x + y \frac{\partial z}{\partial x} = 0$.

Karena y dipandang konstan, persamaan tersebut dapat ditulis dalam bentuk :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = - \frac{x}{y}$$

Selanjutnya,

$$z = \int - \frac{x}{y} \partial x = - \frac{x^2}{2y} + \phi(y)$$

dimana $\phi(y)$ fungsi sembarang dari variabel bebas y dan disebut fungsi integrasi.

Dalam contoh tersebut dapat dilihat bahwa fungsi integrasi mempunyai kedudukan yang serupa dengan konstanta integrasi pada penyelesaian suatu persamaan diferensial biasa.

Secara umum, penyelesaian suatu persamaan diferensial parsial kuasilinear orde pertama dengan dua variabel bebas dinyatakan oleh Lagrange dalam teorema berikut :

TEOREMA :

(METODE KARAKTERISTIK LAGRANGE)

Penyelesaian umum suatu persamaan diferensial parsial kuasilinear :

$$Pp + Qq = R \quad \dots\dots (1)$$

adalah :

$$F(u,v) = 0 \quad \dots\dots (2)$$

dimana F merupakan fungsi sembarang, sedangkan $u(x,y,z) = c_1$ dan $v(x,y,z) = c_2$ merupakan penyelesaian dari persamaan :

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R} \quad \dots\dots (3)$$

BUKTI GEOMETRIS :

Secara geometris, teorema ini dibuktikan dalam dua langkah.

Langkah pertama, akan ditunjukkan bahwa semua permukaan integral dari persamaan (1) dihasilkan oleh kurva integral dari persamaan (3).

Langkah ke dua, akan dibuktikan bahwa semua permukaan yang dihasilkan oleh kurva integral dari persamaan (3) merupakan permukaan integral dari persamaan (1).

1. Andaikan $z = f(x,y)$ merupakan permukaan integral dari persamaan (1) dan disebut permukaan S .

Berarti, normal permukaan ini memiliki bilangan arah yang sebanding dengan $(p, q, -1)$.

Persamaan diferensial (1) mengungkapkan fakta geometris bahwa normal permukaan tersebut tegak lurus dengan suatu garis yang arahnya ditunjukkan oleh rasio arah (P, Q, R) .

Dengan kata lain, garis ini menyinggung permukaan integral $z = f(x, y)$, sedangkan rasio arahnya, yaitu (P, Q, R) , disebut **Arah Karakteristik**.

Jika diambil sembarang titik $M(x_o, y_o, z_o)$ di S , maka normal permukaan S di M akan tegak lurus dengan garis melalui M yang bilangan-bilangan arahnya adalah nilai-nilai P, Q, R di M .

Garis ini menyinggung permukaan S di M dan memiliki persamaan :

$$\frac{x-x_o}{P} = \frac{y-y_o}{Q} = \frac{z-z_o}{R}$$

Terlihat bahwa di setiap titik pada S , didefinisikan suatu vektor singgung dengan arah dx, dy, dz yang memenuhi persamaan :

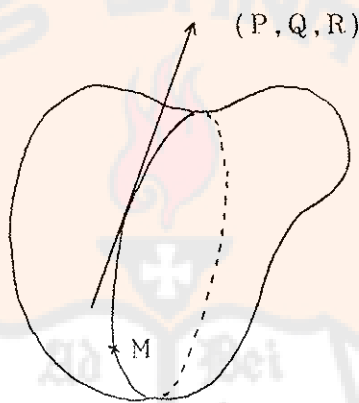
$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}$$

Jika dari M dilakukan gerakan sedemikian sehingga gerakan tersebut selalu memiliki arah (P, Q, R) ,

didapatkan suatu kurva integral dari persamaan (3).

Jika P, Q, R diasumsikan bernilai tunggal, berarti hanya ada satu kurva semacam itu yang melalui M .

Selanjutnya, karena arah (P, Q, R) selalu menyinggung permukaan S , berarti kurva integral dari persamaan (3) tersebut seluruhnya terletak pada permukaan S .



Dengan demikian, telah ditunjukkan bahwa melalui setiap titik M pada permukaan S , hanya ada satu kurva integral dari persamaan (3). Kurva ini seluruhnya terletak pada permukaan S dan disebut Kurva Karakteristik.

Terbukti bahwa setiap permukaan integral $z = f(x, y)$ dari persamaan (1) dihasilkan oleh kurva integral dari persamaan (3).

2. Persamaan $\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}$ menghasilkan dua persamaan diferensial biasa.

Penyelesaian persamaan diferensial ini merupakan sistem tak hingga ganda dari kurva-kurva, yaitu :

$$u(x,y,z) = c_1 \quad \text{dan} \quad v(x,y,z) = c_2 \quad \dots \quad (4)$$

dimana c_1 dan c_2 adalah konstanta.

Diasumsikan ada suatu relasi sembarang antara c_1 dan c_2 , misalnya :

$$c_2 = \phi(c_1)$$

Ini berarti memilih suatu sistem kurva tak hingga tunggal dari sistem (4).

Semua kurva ini terletak pada permukaan :

$$v = \phi(u)$$

Permukaan tersebut dapat pula ditulis dalam bentuk $u = \psi(v)$ atau $F(u,v) = 0$.

Normal permukaan itu pada sembarang titik M yang memiliki arah $(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, -1)$ pasti tegak lurus pada kurva-kurva anggota sistem (4) yang membentuk permukaan tersebut, yaitu pada vektor singgung dengan arah yang ditentukan oleh nilai-nilai P,Q,R pada M.

Maka :

$$P \frac{\partial z}{\partial x} + Q \frac{\partial z}{\partial y} - R = 0$$

$$\Leftrightarrow Pp + Qq = R$$

Dengan kata lain, $F(u,v) = 0$ merupakan permukaan integral dari persamaan (1).

CATATAN :

Persamaan $\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}$ merupakan persamaan bantu dan sering disebut sebagai **Sistem Lagrange**.

Bukti tersebut menggunakan interpretasi geometris dari persamaan diferensial parsial. Teorema tersebut dapat pula dibuktikan murni secara analitis.

BUKTI ANALITIS :

Dalam bab II.B (Asal Persamaan Diferensial) telah ditunjukkan bahwa dengan mengeliminasi fungsi F dalam persamaan (2) akan dihasilkan persamaan diferensial parsial (1).

Berarti, persamaan (2) merupakan penyelesaian umum atau integral umum dari persamaan (1).

Selanjutnya, akan dibuktikan bahwa $u(x,y,z) = c_1$ dan $v(x,y,z) = c_2$ merupakan penyelesaian persamaan (3).

Dengan mendiferensialkan $u(x,y,z) = c_1$ dan $v(x,y,z) = c_2$, diperoleh :

$$\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz = 0 \quad \dots \quad (4)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz = 0 \quad \dots \quad (5)$$

Dengan mengeliminasi dz dari kedua persamaan ini, diperoleh :

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial z} \times (4) : & \quad \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} dx + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} dy + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} dz = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial z} \times (5) : & \quad \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} dz = 0 \end{aligned}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial y} \right) dy = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{dx}{\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial y}} = \frac{dy}{\frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z}} \quad \dots (6)$$

Sedangkan dengan mengeliminasi dy dari kedua persamaan tersebut, diperoleh :

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial y} \times (4) : & \quad \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial y} dz = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} \times (5) : & \quad \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} dz = 0 \end{aligned}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} \right) dz = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{dx}{\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial y}} = \frac{dz}{\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x}} \quad \dots (7)$$

Dari persamaan (6) dan (7), diperoleh :

$$\begin{aligned} \frac{dx}{\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial y}} &= \frac{dy}{\frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z}} \\ &= \frac{dz}{\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x}} \quad \dots (8) \end{aligned}$$

Dalam bab sebelumnya telah diketahui bahwa

$$\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial y} = P, \quad \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} = Q, \quad \text{dan}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} = R$$

dimana P dan Q tidak keduanya bernilai nol.

Maka persamaan (8) dapat ditulis sebagai :

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R} \quad \dots \quad (3)$$

Dengan demikian terbukti bahwa $u(x,y,z) = c_1$ dan $v(x,y,z) = c_2$ merupakan penyelesaian persamaan (3).

Teorema tersebut terbukti.

Contoh 3.6 :

Diketahui persamaan diferensial parsial $yzp + zxq = xy$.

Akan dicari penyelesaiannya dengan Metode Karakteristik Lagrange.

Persamaan bantu untuk persamaan diferensial parsial tersebut adalah :

$$\frac{dx}{yz} = \frac{dy}{zx} = \frac{dz}{xy}$$

Dari persamaan $\frac{dx}{yz} = \frac{dy}{zx}$, diperoleh : $x^2 - y^2 = c_1$.

Dari persamaan $\frac{dx}{yz} = \frac{dz}{xy}$, diperoleh : $x^2 - z^2 = c_2$.

Diasumsikan ada relasi sembarang antara c_1 dan c_2 ,

yaitu $F(c_1, c_2) = 0$.

Telah dibuktikan dalam teorema Lagrange bahwa kurva-kurva integral yang diperoleh dari penyelesaian persamaan bantu tersebut terletak pada permukaan dengan persamaan $F(c_1, c_2) = 0$, dan bahwa permukaan itu merupakan permukaan integral.

Jadi, penyelesaian umum persamaan diferensial parsial tersebut dapat ditulis dalam bentuk :

$$F(x^2 - y^2, x^2 - z^2) = 0$$

dimana F fungsi sembarang.

Contoh 3.7 :

Diketahui persamaan diferensial parsial $yp - xq = 0$.

Akan dicari penyelesaiannya dengan Metode Karakteristik Lagrange.

Persamaan bantunya adalah :

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x}, \quad dz = 0$$

Diperoleh : $x^2 + y^2 = c_1$ dan $z = c_2$.

Berdasarkan teorema Lagrange, penyelesaian umum persamaan diferensial parsial tersebut adalah :

$$F(x^2 + y^2, z) = 0$$

dimana F fungsi sembarang.

Penyelesaian tersebut dapat pula ditulis dalam bentuk :

$$z = \phi(x^2+y^2)$$

dimana ϕ fungsi sembarang.

Beberapa contoh permukaan yang merupakan penyelesaian persamaan diferensial parsial tersebut antara lain :

$$x^2 + y^2 + (z-b)^2 = a^2 \quad (\text{lihat Contoh 2.2})$$

$$x^2 + y^2 = (z-b)^2 \tan^2 a$$

$$z = \frac{1}{2} a \ln(x^2+y^2) + b$$

dengan a dan b adalah parameter-parameter.

Penyelesaian dengan bentuk seperti itu merupakan penyelesaian lengkap.

Penyelesaian khusus dapat diperoleh dengan memberikan nilai tertentu pada parameter-parameter tersebut.

Misalnya :

$$x^2 + y^2 + (z-5)^2 = 25$$

$$x^2 + y^2 = (z-2)^2 \tan^2\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

Contoh 3.8 :

Diketahui persamaan diferensial parsial :

$$(1+y^2+z^2) \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 1$$

Akan dicari penyelesaiannya dengan Metode Karakteristik Lagrange.

Persamaan bantuanya adalah :

$$\frac{dx}{1+y^2+z^2} = \frac{dy}{1} = \frac{dz}{1}$$

Dari $dy = dz$ diperoleh penyelesaian pertama :

$$z - y = c_1 \quad \text{atau} \quad z = c_1 + y$$

Jika hasil tersebut disubstitusikan pada $\frac{dx}{1+y^2+z^2} = dy$

akan diperoleh :

$$x - y - \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{3}(c_1 + y)^3 = c_2$$

Diperoleh penyelesaian ke dua dari persamaan bantu :

$$x - y - \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{3}z^3 = c_2$$

Berdasarkan teorema Lagrange, penyelesaian umum persamaan diferensial parsial tersebut adalah :

$$F\left(z-y, x-y-\frac{1}{3}y^3-\frac{1}{3}z^3\right) = 0$$

dimana F fungsi sembarang.

Penyelesaian tersebut dapat pula ditulis dalam bentuk :

$$z = y + \psi\left(x-y-\frac{1}{3}y^3-\frac{1}{3}z^3\right)$$

atau :

$$z^3 = 3x - 3y - y^3 + \phi(z-y)$$

dimana ϕ dan ψ fungsi-fungsi sembarang.

Contoh 3.9 :

Akan dicari suatu permukaan yang bidang-bidang

Selain merupakan metode utama untuk menyelesaikan persamaan diferensial parsial kuasilinear orde pertama dengan dua variabel bebas, Metode Karakteristik Lagrange juga memiliki peranan penting dalam metode-metode penyelesaian persamaan diferensial parsial yang lebih kompleks. Salah satu metode yang menggunakan pertolongan Metode Karakteristik Lagrange adalah Metode Charpit. Metode ini merupakan metode umum untuk menyelesaikan persamaan diferensial parsial orde pertama dengan dua variabel bebas, baik kuasilinear maupun non-linear.

E. METODE CHARPIT

Ide dasar Metode Charpit ini adalah sebagai berikut :

Andaikan diketahui persamaan diferensial parsial :

$$f(x,y,z,p,q) = 0 \quad \dots\dots (1)$$

Akan dicari suatu persamaan diferensial parsial lain yang penyelesaiannya adalah suatu fungsi :

$$g(x,y,z,p,q,a) = 0 \quad \dots\dots (2)$$

yang memuat parameter a sedemikian sehingga :

1. Persamaan-persamaan (1) dan (2) dapat menghasilkan

$$p = p(x,y,z,a) \text{ dan } q = q(x,y,z,a)$$

2. Persamaan :

$$dz = p(x,y,z,a)dx + q(x,y,z,a)dy \quad \dots\dots (3)$$

dapat diintegrasikan

Jika fungsi g sudah diketemukan, maka penyelesaian persamaan (3), yaitu

$$F(x,y,z,a,b) = 0$$

yang memuat dua parameter a dan b , akan merupakan penyelesaian lengkap persamaan diferensial parsial (1).

Masalah utama yang ada sekarang ialah bagaimana fungsi g tersebut diperoleh.

Dengan mendiferensialkan persamaan (1) dan (2) terhadap x , didapatkan :

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} p + \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \quad \dots (4)$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial z} p + \frac{\partial g}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \quad \dots (5)$$

Dengan mendiferensialkan persamaan (1) dan (2) terhadap y , didapatkan :

$$\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} q + \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial y} = 0 \quad \dots (6)$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial z} q + \frac{\partial g}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial y} = 0 \quad \dots (7)$$

singgungnya memotong sumbu-z dengan jarak intersep konstan k.

Telah diketahui bahwa persamaan bidang singgung di sembarang titik (x,y,z) pada suatu permukaan adalah :

$$(Z-z) = p(X-x) + q(Y-y) \quad \dots \quad (9)$$

dimana (X,Y,Z) merupakan koordinat yang baru.

Karena (9) memotong sumbu-z dengan jarak intersep konstan k, maka (9) pasti melewati titik (0,0,k).

Diperoleh :

$$(k-z) = p(0-x) + q(0-y)$$

$$\Leftrightarrow xp + yq = z - k$$

yang merupakan persamaan diferensial parsial kuasilinear orde pertama.

Persamaan bantuannya adalah :

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z-k}$$

Dari $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$ diperoleh $\frac{y}{x} = c_1$.

Dari $\frac{dx}{x} = \frac{dz}{z-k}$ diperoleh $\frac{z-k}{x} = c_2$.

Berdasarkan teorema Lagrange, penyelesaian umum persamaan diferensial parsial tersebut adalah :

$$F\left(\frac{y}{x}, \frac{z-k}{x}\right) = 0$$

Jadi, permukaan yang dicari merupakan suatu kerucut dengan puncak pada titik (0,0,k).

Dengan mengeliminasi $\frac{\partial p}{\partial x}$ dari persamaan (4) dan (5), diperoleh :

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} p + \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial x} \right) \frac{\partial g}{\partial p} \\ & - \left(\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial z} p + \frac{\partial g}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial x} \right) \frac{\partial f}{\partial p} = 0 \\ \Leftrightarrow & \left(\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial p} - \frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial p} \right) + \left(\frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial g}{\partial p} - \frac{\partial g}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial p} \right) p \\ & + \left(\frac{\partial f}{\partial q} \frac{\partial g}{\partial p} - \frac{\partial g}{\partial q} \frac{\partial f}{\partial p} \right) \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \quad \dots \quad (8) \end{aligned}$$

Dengan mengeliminasi $\frac{\partial q}{\partial y}$ dari persamaan (6) dan (7), diperoleh :

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} q + \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial y} \right) \frac{\partial g}{\partial q} \\ & - \left(\frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial z} q + \frac{\partial g}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial y} \right) \frac{\partial f}{\partial q} = 0 \\ \Leftrightarrow & \left(\frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial q} - \frac{\partial g}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial q} \right) + \left(\frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial g}{\partial q} - \frac{\partial g}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial q} \right) q \\ & + \left(\frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial g}{\partial q} - \frac{\partial g}{\partial p} \frac{\partial f}{\partial q} \right) \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad \dots \quad (9) \end{aligned}$$

Karena $\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial p}{\partial y}$ maka untuk suku terakhir persamaan (8) dan (9) berlaku :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial q} \frac{\partial g}{\partial p} - \frac{\partial g}{\partial q} \frac{\partial f}{\partial p} \right) \frac{\partial q}{\partial x} = - \left(\frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial g}{\partial q} - \frac{\partial g}{\partial p} \frac{\partial f}{\partial q} \right) \frac{\partial p}{\partial y}$$

Selanjutnya, dengan menjumlahkan persamaan (8) dan (9), diperoleh :

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial p} - \frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial p} \right) + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial q} - \frac{\partial g}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial q} \right) \\
 & + \left(\frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial g}{\partial p} - \frac{\partial g}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial p} \right) p + \left(\frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial g}{\partial q} - \frac{\partial g}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial q} \right) q = 0 \\
 \\
 \Leftrightarrow & \left(- \frac{\partial f}{\partial p} \right) \frac{\partial g}{\partial x} + \left(- \frac{\partial f}{\partial q} \right) \frac{\partial g}{\partial y} - \left(p \frac{\partial f}{\partial p} + q \frac{\partial f}{\partial q} \right) \frac{\partial g}{\partial z} \\
 & + \left(\frac{\partial f}{\partial x} + p \frac{\partial f}{\partial z} \right) \frac{\partial g}{\partial p} + \left(\frac{\partial f}{\partial y} + q \frac{\partial f}{\partial z} \right) \frac{\partial g}{\partial q} = 0 \\
 & \dots\dots (10)
 \end{aligned}$$

Persamaan (10) dapat dipandang sebagai persamaan diferensial parsial kuasilinear orde pertama dengan variabel tak bebas g dan variabel-variabel bebas x, y, z, p, q .

Penyelesaian persamaan (10) tersebut menghasilkan fungsi g yang dicari.

Berdasarkan Metode Karakteristik Lagrange, persamaan bantu untuk persamaan (10) adalah :

$$\begin{aligned}
 \frac{dx}{-\frac{\partial f}{\partial p}} &= \frac{dy}{-\frac{\partial f}{\partial q}} = \frac{dz}{-\left(p \frac{\partial f}{\partial p} + q \frac{\partial f}{\partial q}\right)} \\
 &= \frac{dp}{\frac{\partial f}{\partial x} + p \frac{\partial f}{\partial z}} = \frac{dq}{\frac{\partial f}{\partial y} + q \frac{\partial f}{\partial z}} \dots (11)
 \end{aligned}$$

Persamaan ini disebut Persamaan Charpit.

Yang perlu dilakukan selanjutnya adalah mencari nilai p dan q dengan mengintegrasikan persamaan (11) yang memuat p atau q , atau keduanya.

Tidak semua persamaan pada persamaan (11) perlu

digunakan, tetapi dapat dipilih yang paling sederhana, asalkan p atau q muncul dalam penyelesaiannya.

Bila yang digunakan adalah Metode Charpit, maka penyelesaian yang diperoleh adalah penyelesaian lengkap.

Contoh 3.10 :

Diketahui persamaan diferensial parsial :

$$2xz - px^2 - 2xyq + pq = 0 \quad \dots \quad (1)$$

Berarti :

$$f(x,y,z,p,q) = 2xz - px^2 - 2xyq + pq$$

Persamaan Charpitnya adalah :

$$\begin{aligned} \frac{dx}{x^2 - q} &= \frac{dy}{2xy - p} = \frac{dz}{px^2 + 2xyq - 2pq} \\ &= \frac{dp}{2z - 2qy}, \quad dq = 0 \end{aligned}$$

Dari $dq = 0$, diperoleh : $q = a$.

Dengan mensubstitusikan hasil tersebut ke persamaan (1), diperoleh :

$$p = \frac{2x(z - ay)}{x^2 - a}$$

Dengan memasukkan nilai-nilai tersebut ke persamaan :

$dz = pdx + qdy$, diperoleh :

$$dz = \frac{2x(z - ay)}{x^2 - a} dx + a dy$$

Atau dalam bentuk lain :

$$\frac{dz-ady}{z-ay} = \frac{2xdx}{x^2-a}$$

Dengan mengintegrasikan persamaan tersebut, diperoleh :

$$\ln(z-ay) = \ln(x^2-a) + \ln b$$

Maka penyelesaian lengkap persamaan diferensial parsial tersebut adalah :

$$z - ay = b(x^2-a)$$

dengan a dan b adalah parameter.

Contoh 3.11 :

Diketahui persamaan diferensial parsial :

$$yp - xq = 0 \quad (\text{lihat Contoh 3.7})$$

Berarti :

$$f(x,y,z,p,q) = yp - xq$$

Persamaan Charpitnya adalah :

$$\frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x} = \frac{dz}{-yp+xq} = \frac{dp}{-q} = \frac{dq}{p}$$

Dengan memilih p, q, 0, x, y berturut-turut sebagai pengali, diperoleh :

$$\frac{pdx}{-yp} = \frac{qdy}{xq} = \frac{xdp}{-xq} = \frac{y dq}{yp}$$

Perhatikan penyebut-penyebut pada persamaan tersebut.

Karena :

$$(-yp) + xq + (-xq) + yp = 0$$

maka diperoleh :

$$pdx + qdy + xdp + ydq = 0$$

Didapatkan :

$$xp + yq = a \quad \text{atau} \quad q = \frac{a-xp}{y}$$

Jika hasil tersebut disubstitusikan ke dalam persamaan diferensial semula, maka :

$$yp - x\left(\frac{a-xp}{y}\right) = 0 \quad \text{atau} \quad p = \frac{ax}{x^2+y^2}$$

Dengan mensubstitusikan p ke dalam persamaan $q = \frac{a-xp}{y}$ diperoleh :

$$q = \frac{ay}{x^2+y^2}$$

Dengan memasukkan nilai-nilai p dan q ke persamaan $dz = pdx + qdy$, didapatkan :

$$dz = \frac{axdx + aydy}{x^2+y^2} = \frac{1}{2} a d[\ln(x^2+y^2)]$$

Maka penyelesaian lengkap persamaan diferensial parsial tersebut adalah :

$$z = \frac{1}{2} a \ln(x^2+y^2) + b$$

dengan a dan b adalah parameter.

BAB IV

MASALAH NILAI AWAL

Dalam bab sebelumnya telah dipelajari tentang metode-metode penyelesaian persamaan diferensial parsial kuasilinear orde pertama dengan dua variabel bebas. Kenyataannya, pada kasus-kasus dalam kehidupan sehari-hari, penyelesaiannya tidaklah sedemikian umum. Dalam penerapan, biasanya dibutuhkan penyelesaian persamaan diferensial parsial yang lebih khusus, dengan memperhatikan syarat-syarat tertentu.

Jika syarat bantu pada persamaan diferensial yang diketahui berkaitan dengan sebuah nilai variabel bebas maka syarat itu disebut syarat awal. Persamaan diferensial dengan syarat awal disebut **Masalah Nilai Awal**. Jika syarat bantunya berkaitan dengan dua atau lebih nilai variabel bebas, syarat itu disebut syarat batas. Persamaan diferensial beserta syarat batasnya disebut **Masalah Nilai Batas**.

Persamaan diferensial yang berkaitan dengan masalah nilai batas paling sedikit berorde ke dua. Persamaan diferensial orde pertama hanya memiliki satu syarat bantu dan karenanya hanya dapat digolongkan sebagai masalah

nilai awal.

Metode untuk menyelesaikan masalah nilai awal perlu diketahui, mengingat pentingnya masalah tersebut dalam penerapan persamaan diferensial parsial. Dalam bab ini akan dibahas metode penyelesaian masalah nilai awal untuk persamaan diferensial parsial kuasilinear :

$$P(x,y,z) \frac{\partial z}{\partial x} + Q(x,y,z) \frac{\partial z}{\partial y} = R(x,y,z) \quad \dots \quad (1)$$

yang disebut Metode Karakteristik. Selain itu akan dibahas pula metode penyelesaian masalah nilai awal untuk keadaan yang lebih khusus, yaitu jika P, Q, dan R pada persamaan diferensial parsial (1) merupakan konstanta atau bentuk yang sederhana. Metode ini disebut Metode Pemisahan Variabel.

METODE KARAKTERISTIK

Telah diketahui bahwa kurva karakteristik dari persamaan diferensial parsial kuasilinear :

$$P(x,y,z) \frac{\partial z}{\partial x} + Q(x,y,z) \frac{\partial z}{\partial y} = R(x,y,z) \quad \dots \quad (1)$$

adalah kurva yang vektor singgungnya di setiap titik memiliki arah karakteristik (P,Q,R).

Andaikan kurva-kurva tersebut dinyatakan dengan

persamaan parametrik :

$$x = x(s) \quad , \quad y = y(s) \quad , \quad z = z(s)$$

Komponen vektor singgung sepanjang kurva dengan persamaan parametrik demikian adalah $\left[\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds} \right]$.

Maka diperoleh persamaan :

$$\frac{dx}{ds} = P(x,y,z) \quad , \quad \frac{dy}{ds} = Q(x,y,z) \quad , \quad \frac{dz}{ds} = R(x,y,z) \quad \dots\dots (2)$$

Persamaan tersebut dinamakan **Persamaan Karakteristik**.

Dengan mengandaikan bahwa P, Q, R bernilai tunggal dan P dan Q tidak keduanya bernilai nol di satu titik, maka hanya ada tepat satu kurva karakteristik yang melalui suatu titik (x_o, y_o, z_o) .

Masalah nilai awal untuk persamaan diferensial parsial (1) berarti mencari suatu permukaan integral $z(x,y)$ tertentu yang melalui suatu kurva C dalam ruang-xyz. Kurva C ini disebut **Kurva Awal**.

Untuk menyelesaikan masalah nilai awal tersebut harus dicari suatu permukaan integral yang dibentuk oleh kurva-kurva karakteristik yang melalui setiap titik pada kurva awal C.

Syarat-syarat agar suatu masalah nilai awal memiliki penyelesaian tunggal disajikan dalam teorema berikut ini.

TEOREMA :

Andaikan P , Q , dan R dalam persamaan (1) mempunyai derivatif-derivatif parsial yang kontinu dalam ketiga variabel x , y , dan z .

Misalkan kurva awal C yang dinyatakan dengan persamaan parametrik :

$$x = x(t) \quad , \quad y = y(t), \quad \text{dan} \quad z = z(t)$$

memiliki vektor-vektor singgung kontinu, dan :

$$\frac{dy}{dt} P[x(t), y(t), z(t)] - \frac{dx}{dt} Q[x(t), y(t), z(t)] \neq 0$$

$$\dots \quad (3)$$

atau dalam bentuk determinan :

$$\begin{vmatrix} P & \frac{dx}{dt} \\ Q & \frac{dy}{dt} \end{vmatrix} \neq 0$$

pada C .

Maka ada penyelesaian tunggal $z = z(x, y)$ yang didefinisikan dalam suatu kitar dari kurva awal C , yang memenuhi persamaan diferensial parsial (1) dan syarat awal :

$$z[x(t), y(t)] = z(t)$$

Sebelum membuktikan teorema tersebut, perlu diketahui lemma-lemma berikut ini.

LEMMA 4.1 :

Andaikan fungsi-fungsi P , Q , R dari variabel-variabel x , y , z dan derivatif-derivatif parsialnya $\frac{\partial P}{\partial x}$, $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial P}{\partial z}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial z}$, $\frac{\partial R}{\partial x}$, $\frac{\partial R}{\partial y}$, $\frac{\partial R}{\partial z}$ kontinu dalam daerah R dari ruang- $sxyz$ yang didefinisikan oleh $\alpha < s < \beta$, $\alpha < x < \beta$,

$\alpha_2 < y < \beta_2$, $\alpha_3 < z < \beta_3$; dan andaikan titik (s_0, x_0, y_0, z_0) di dalam R.

Maka ada suatu interval $|s-s_0| < h$ dimana ada penyelesaian tunggal $x = x(s)$, $y = y(s)$, dan $z = z(s)$ dari sistem persamaan diferensial :

$$\begin{aligned}\frac{dx}{ds} &= P(x,y,z) \\ \frac{dy}{ds} &= Q(x,y,z) \\ \frac{dz}{ds} &= R(x,y,z)\end{aligned}$$

yang memenuhi syarat awal :

$$x(s_0) = x_0, \quad y(s_0) = y_0, \quad z(s_0) = z_0$$

LEMMA 4.2 :

Andaikan :

1. $X(s,t)$ dan $Y(s,t) \in C^1$ dalam suatu kitar titik (s^*, t^*)
2. $X(s^*, t^*) = x^*$ dan $Y(s^*, t^*) = y^*$

$$3. \text{ Determinan Jacobi } \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial s} & \frac{\partial X}{\partial t} \\ \frac{\partial Y}{\partial s} & \frac{\partial Y}{\partial t} \end{vmatrix} \neq 0 \text{ di titik } (s^*, t^*)$$

Maka ada suatu kitar $N(x^*, y^*)$ dari titik (x^*, y^*) dan sepasang fungsi tertentu $s = \phi(x,y)$ dan $t = \psi(x,y)$ sedemikian sehingga :

- a. $x = X(\phi(x,y), \psi(x,y))$ dan $y = Y(\phi(x,y), \psi(x,y))$
- b. $s^* = \phi(x^*, y^*)$ dan $t^* = \psi(x^*, y^*)$
- c. $\phi(x,y), \psi(x,y) \in C^1(N(x^*, y^*))$

Lemma-lemma tersebut akan dipergunakan tetapi tidak dibuktikan di sini karena membutuhkan pengetahuan analisis tingkat lanjut.

Selanjutnya dapat dibuktikan teorema eksistensi dan ketunggalan penyelesaian masalah nilai awal.

BUKTI TEOREMA :

P , Q , dan R mempunyai derivatif-derivatif parsial yang kontinu dalam x , y , dan z .

Berarti, menurut Lemma 4.1, persamaan karakteristik (2) mempunyai penyelesaian tunggal dalam bentuk :

$$x = x(s,t) \quad , \quad y = y(s,t) \quad , \quad z = z(s,t)$$

yang mempunyai derivatif-derivatif kontinu dalam s dan t , dan memenuhi syarat awal untuk $s = 0$:

$$x(0,t) = x(t) \quad , \quad y(0,t) = y(t) \quad , \quad z(0,t) = z(t)$$

Berdasarkan persamaan syarat (3) maka determinan Jacobi :

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{vmatrix}_{s=0} = \frac{dy}{dt} P - \frac{dx}{dt} Q \bigg|_{s=0}$$

tidak sama dengan nol.

Berarti determinan Jacobi tersebut tidak bernilai nol dalam suatu kitar dari kurva awal tersebut.

Berdasarkan Lemma 4.2, penyelesaian tersebut dapat dinyatakan dengan memandang s dan t sebagai fungsi dari x dan y pada suatu kitar dari kurva awal tersebut.

Sehingga :

$$z = z(s,t) = z[s(x,y),t(x,y)] = z(x,y) = z[x(s,t),y(s,t)]$$

Diperoleh suatu fungsi $z = z(x,y)$.

Akan dibuktikan bahwa $z = z(x,y)$ adalah penyelesaian persamaan diferensial parsial (1).

Hal ini mudah dilihat dengan cara mensubstitusikan $z = z(x,y)$ ke dalam persamaan diferensial parsial (1) dan dengan menggunakan aturan rantai dan persamaan karakteristik (2), sebagai berikut :

Perhatikan $z = z(x,y) = z[x(s,t),y(s,t)]$ dimana z merupakan fungsi yang diketahui dari x dan y .

Maka di sepanjang keluarga kurva satu parameter :

$$x = x(s,t) \quad , \quad y = y(s,t) \quad , \quad z = z[x(s,t),y(s,t)]$$

dengan t parameter

yang terletak pada permukaan integral $z = z(x,y)$, didapatkan :

$$\frac{dz}{ds} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{ds}$$

$$\Leftrightarrow P(x,y,z) \frac{\partial z}{\partial x} + Q(x,y,z) \frac{\partial z}{\partial y} = R(x,y,z)$$

Jadi, terbukti bahwa $z = z(x,y)$ merupakan penyelesaian persamaan diferensial parsial (1).

Jelas bahwa :

$$z[x(t),y(t)] = z[x(0,t),y(0,t)] = z(0,t) = z(t)$$

$$\text{Jadi dipenuhi : } z[x(t),y(t)] = z(t)$$

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa penyelesaian tersebut

tunggal.

Andaikan ada dua permukaan integral S dan S' melalui kurva awal C .

Berarti kurva-kurva karakteristik yang membentuk S maupun S' pasti melalui tiap titik pada kurva awal C .

Telah diketahui bahwa hanya ada tepat satu kurva karakteristik yang melalui suatu titik (x_0, y_0, z_0) .

Berarti kurva-kurva karakteristik yang melalui tiap titik pada kurva awal C juga tunggal.

Karena kurva-kurva karakteristik tersebut terletak pada S maupun S' , berarti S dan S' dihasilkan oleh kurva-kurva karakteristik yang sama.

Maka kedua permukaan integral itu pastilah sama.

Dengan demikian hanya ada tepat satu permukaan integral yang memenuhi persamaan diferensial parsial (1) dan melalui kurva awal C .

Terbukti bahwa penyelesaian masalah nilai awal tersebut tunggal.

Contoh 4.1 :

Diketahui persamaan diferensial parsial :

$$z \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

dengan syarat awal :

$$z(x,0) = x \quad , \quad 0 \leq x \leq 1 \quad \dots\dots (4)$$

yang tertentu pada sebagian saja dari sumbu-x.

Persamaan karakteristik untuk persamaan diferensial parsial tersebut ialah :

$$\frac{dx}{ds} = z \quad , \quad \frac{dy}{ds} = 1 \quad , \quad \frac{dz}{ds} = 0 \quad \dots (5)$$

Persamaan karakteristik tersebut mempunyai penyelesaian berbentuk :

$$x = x(s,t) \quad , \quad y = y(s,t) \quad , \quad z = z(s,t)$$

dimana untuk $s = 0$ dipenuhi syarat awal (4) yang dapat ditulis dalam bentuk :

$$x = t \quad , \quad y = 0 \quad , \quad z = t \quad , \quad 0 \leq t \leq 1 \quad \dots\dots (6)$$

Dengan menyelesaikan persamaan karakteristik (5) dan menggunakan syarat awal (6), diperoleh :

$$a. \quad \frac{dz}{ds} = 0 \quad \Rightarrow \quad z = k_1$$

$$\text{syarat awal : } z = t$$

$$\text{berarti } k_1 = t$$

$$\text{maka : } z = t$$

$$b. \quad \frac{dy}{ds} = 1 \quad \Rightarrow \quad y = s + k_2$$

$$\text{untuk } s = 0 : y = k_2$$

$$\text{syarat awal : } y = 0$$

berarti $k_z = 0$

maka : $y = s$

$$c. \frac{dx}{ds} = z \Rightarrow x = zs + k_s$$

untuk $s = 0 : x = k_s$

syarat awal : $x = t$

berarti $k_s = t$

maka : $x = zs + t = t(s+1)$

Jadi didapatkan penyelesaian dalam bentuk :

$$x = t(s+1), \quad y = s, \quad z = t \quad \dots \quad (7)$$

Penyelesaian tersebut dapat pula ditulis dalam bentuk eksplisit, yaitu :

$$z = \frac{x}{y+1}$$

Proyeksi suatu kurva karakteristik tertentu pada bidang-xy, yang melalui titik $x = t$ pada sumbu-x adalah sebuah garis lurus $x = t(y+1)$.

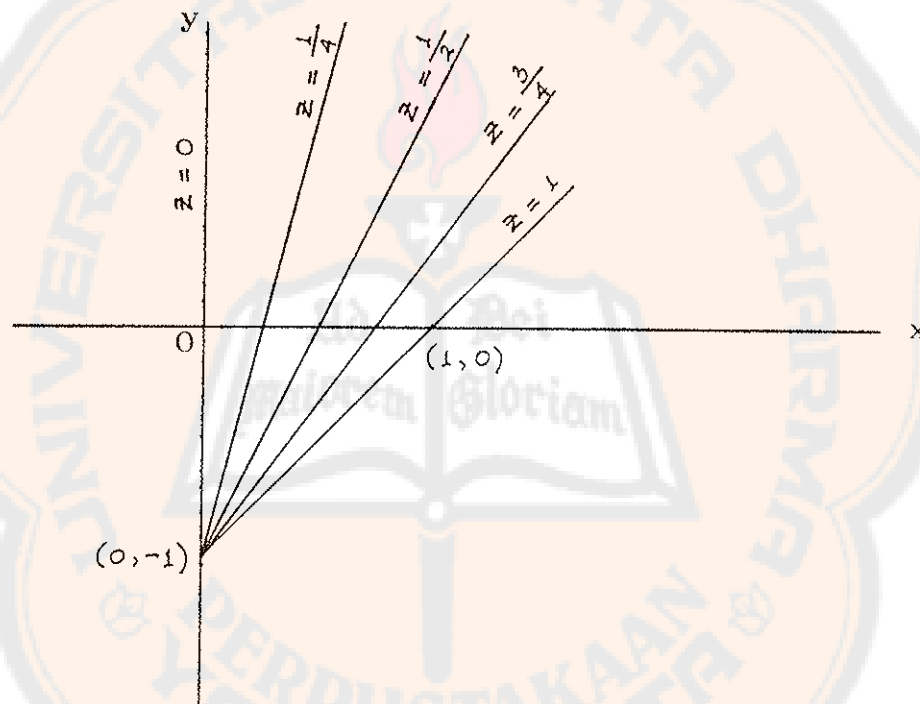
Untuk semua nilai tertentu yang mungkin dari t , yaitu $0 \leq t \leq 1$, proyeksi kurva-kurva karakteristik ini akan melalui titik $(0, -1)$ dan mencakup daerah berbentuk huruf V dari bidang-xy yang dibatasi oleh dua garis proyeksi ekstrim $x = 0$ dan $x = y + 1$.

Daerah berbentuk huruf V ini merupakan domain dimana penyelesaian persamaan diferensial parsial tersebut

tertentu.

Persamaan $z = t$ pada persamaan (7) menunjukkan bahwa z konstan pada garis proyeksi kurva-kurva karakteristik tersebut dan nilainya sama dengan absis dari titik dimana garis proyeksi tersebut memotong sumbu- x .

Domain penyelesaian persamaan diferensial parsial tersebut tampak pada gambar berikut :



Contoh 4.2 :

Diketahui persamaan diferensial parsial :

$$y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

dengan syarat awal : $z(x, 0) = x^4 \quad \dots \quad (8)$

Persamaan karakteristik untuk persamaan diferensial

parsial tersebut ialah :

$$\frac{dx}{ds} = y \quad , \quad \frac{dy}{ds} = -x \quad , \quad \frac{dz}{ds} = 0 \quad \dots \quad (9)$$

Persamaan karakteristik tersebut mempunyai penyelesaian berbentuk :

$$x = x(s,t) \quad , \quad y = y(s,t) \quad , \quad z = z(s,t)$$

dimana untuk $s = 0$ dipenuhi syarat awal (8) yang dapat ditulis dalam bentuk :

$$x = t \quad , \quad y = 0 \quad , \quad z = t^4 \quad \dots \quad (10)$$

Dengan menyelesaikan persamaan karakteristik (9) dan menggunakan syarat awal (10), diperoleh :

$$x = ys + t \quad , \quad y = -xs \quad , \quad z = t^4$$

Selanjutnya, dari :

$$s = \frac{x-t}{y} \quad \text{dan} \quad s = -\frac{y}{x}$$

diperoleh :

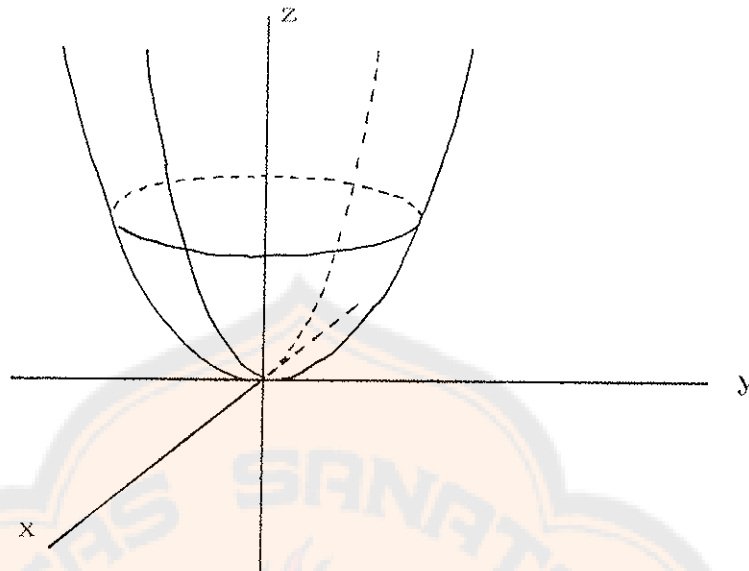
$$\begin{aligned} \frac{x-t}{y} &= -\frac{y}{x} &\Leftrightarrow & x^2 - tx = -y^2 \\ &&\Leftrightarrow & t \cdot t = t^2 = x^2 + y^2 \end{aligned}$$

$$\text{Sehingga : } z = t^4 = (t^2)^2 = (x^2 + y^2)^2$$

Maka penyelesaian masalah nilai awal tersebut ialah :

$$z = (x^2 + y^2)^2$$

Penyelesaian masalah nilai awal tersebut tampak pada gambar berikut ini :



Contoh 4.3 :

Diketahui persamaan diferensial parsial :

$$\frac{\partial z}{\partial x} + 2 \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

dengan syarat awal : $z(0,y) = 3e^{-2y} \dots (11)$

Persamaan karakteristik untuk persamaan diferensial parsial tersebut ialah :

$$\frac{dx}{ds} = 1, \quad \frac{dy}{ds} = 2, \quad \frac{dz}{ds} = 0 \dots (12)$$

Persamaan karakteristik tersebut mempunyai penyelesaian berbentuk :

$$x = x(s,t), \quad y = y(s,t), \quad z = z(s,t)$$

dimana untuk $s = 0$ dipenuhi syarat awal (11) yang dapat ditulis dalam bentuk :

$$x = 0, \quad y = t, \quad z = 3e^{-2t} \dots (13)$$

Dengan menyelesaikan persamaan karakteristik (12) dan menggunakan syarat awal (13), diperoleh :

$$x = s \quad , \quad y = 2s + t \quad , \quad z = 3e^{-2t}$$

Selanjutnya :

$$t = y - 2s = y - 2x$$

$$z = 3e^{-2t} = 3e^{-2(y-2x)}$$

Maka penyelesaian masalah nilai awal tersebut ialah :

$$z = 3e^{2(2x-y)}$$

Jika P dan Q pada persamaan diferensial parsial (1) berupa konstanta atau bentuknya sederhana, maka persamaan diferensial parsial tersebut dapat diselesaikan dengan suatu metode yang disebut Metode Pemisahan Variabel.

Metode ini disebut juga Metode Produk Bernoulli dan berbeda dengan metode pemisahan variabel untuk menyelesaikan persamaan diferensial biasa.

Ide dasar metode ini ialah memisahkan kedua variabel bebas dalam persamaan diferensial parsial dan menemukan dua persamaan diferensial biasa dalam masing-masing variabel tersebut sehingga dapat diselesaikan dengan lebih mudah.

Andaikan akan dicari penyelesaian persamaan diferensial parsial :

$$ap + bq = 0 \quad \dots\dots (14)$$

dengan a dan b konstanta. Penyelesaian yang dicari adalah penyelesaian yang merupakan perkalian antara fungsi dari x saja dengan fungsi dari y saja.

Dimisalkan penyelesaian yang dicari tersebut berbentuk :

$$z(x,y) = X(x)Y(y)$$

Karena tiap faktor hanya bergantung pada satu variabel saja, diperoleh :

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = X'(x)Y(y) \quad , \quad q = \frac{\partial z}{\partial y} = X(x)Y'(y) \quad \dots (15)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (15) ke persamaan (14), diperoleh :

$$aX'(x)Y(y) + bX(x)Y'(y) = 0$$

Selanjutnya, kedua variabel dapat dipisahkan menjadi :

$$\frac{aX'(x)}{X(x)} = - \frac{bY'(y)}{Y(y)}$$

Karena ruas kiri bebas dari variabel y dan ruas kanan bebas dari variabel x, maka hal itu hanya dapat terjadi jika kedua ruas sama dengan suatu konstanta λ .

$$\frac{aX'(x)}{X(x)} = - \frac{bY'(y)}{Y(y)} = \lambda$$

Dihasilkan dua persamaan diferensial biasa yang terpisah, yaitu :

$$aX'(x) - \lambda X(x) = 0$$

$$bY'(y) + \lambda Y(y) = 0$$

yang dapat diselesaikan dengan metode-metode penyelesaian persamaan diferensial biasa.

Penyelesaian yang muncul akan bermacam-macam bentuknya tergantung pada nilai λ . Penyelesaian khusus yang tunggal dapat diperoleh dari syarat awal yang ada.

Contoh 4.4 :

Perhatikan persamaan diferensial parsial pada Contoh 4.3 :

$$\frac{\partial z}{\partial x} + 2 \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

dengan syarat awal : $z(0,y) = 3e^{-2y}$

Akan dicari penyelesaian untuk masalah nilai awal tersebut dengan metode pemisahan variabel.

Dengan mengandaikan penyelesaiannya berbentuk :

$$z(x,y) = X(x)Y(y)$$

dan dengan mensubstitusikan dalam persamaan diferensial parsial yang diketahui, diperoleh :

$$X'(x)Y(y) + 2X(x)Y'(y) = 0$$

Persamaan tersebut dapat ditulis dalam bentuk :

$$\frac{X'(x)}{2X(x)} = - \frac{Y'(y)}{Y(y)}$$

Andaikan ada suatu konstanta λ sedemikian sehingga :

$$\frac{X'(x)}{2X(x)} = -\frac{Y'(y)}{Y(y)} = \lambda$$

Maka akan diperoleh dua persamaan diferensial biasa :

$$X'(x) - 2\lambda X(x) = 0$$

$$Y'(y) + \lambda Y(y) = 0$$

Penyelesaian dari kedua persamaan tersebut berturut-turut adalah :

$$X(x) = c_1 e^{2\lambda x} \quad \text{dan} \quad Y(y) = c_2 e^{-\lambda y}$$

Selanjutnya :

$$z(x,y) = X(x)Y(y) = Ae^{\lambda(2x-y)}$$

dengan $A = c_1 c_2$ adalah konstanta.

Dengan menggunakan syarat awal yang ada, diperoleh :

$$z(0,y) = Ae^{-\lambda y} = 3e^{-2y}$$

Dapat disimpulkan bahwa $A = 3$ dan $\lambda = 2$.

Maka penyelesaian masalah nilai awal tersebut ialah :

$$z(x,y) = 3e^{2(2x-y)}$$

Contoh 4.5 :

Diketahui persamaan diferensial parsial :

$$\frac{\partial z}{\partial x} + z = \frac{\partial z}{\partial y}$$

dengan syarat awal : $z(x,0) = 4e^{-3x}$

Akan dicari penyelesaian untuk masalah nilai awal tersebut.

Dengan mengandaikan penyelesaiannya berbentuk :

$$z(x,y) = X(x)Y(y)$$

dan dengan mensubstitusikan dalam persamaan diferensial yang diketahui, diperoleh :

$$X'(x)Y(y) + z = X(x)Y'(y)$$

$$\Leftrightarrow X'(x)Y(y) + X(x)Y(y) = X(x)Y'(y)$$

$$\Leftrightarrow [X'(x)+X(x)]Y(y) = X(x)Y'(y)$$

Persamaan tersebut dapat ditulis dalam bentuk :

$$\frac{X'(x)+X(x)}{X(x)} = \frac{Y'(y)}{Y(y)}$$

Andaikan ada suatu konstanta λ sedemikian sehingga :

$$\frac{X'(x)+X(x)}{X(x)} = \frac{Y'(y)}{Y(y)} = \lambda$$

Maka akan diperoleh dua persamaan diferensial biasa :

$$X'(x) + (1-\lambda)X(x) = 0$$

$$Y'(y) - \lambda Y(y) = 0$$

Penyelesaian dari kedua persamaan tersebut berturut-turut adalah :

$$X(x) = c_1 e^{-(1-\lambda)x} \quad \text{dan} \quad Y(y) = c_2 e^{\lambda y}$$

Selanjutnya :

$$z(x,y) = X(x)Y(y) = Ae^{(\lambda-1)x+\lambda y}$$

dengan $A = c_1 c_2$ adalah konstanta.

Dengan menggunakan syarat awal yang ada, diperoleh :

$$z(x,0) = Ae^{(\lambda-1)x} = 4e^{-3x}$$

Dapat disimpulkan bahwa $A = 4$ dan $\lambda = -2$.

Maka penyelesaian masalah nilai awal tersebut ialah :

$$z(x,y) = 4e^{-3x-2y} = 4e^{-(3x+2y)}$$

Metode pemisahan variabel ini tidak dapat digunakan untuk semua bentuk persamaan diferensial parsial. Bentuk persamaan diferensial parsial yang dapat diselesaikan dengan metode ini sangatlah terbatas. Misalnya, untuk persamaan diferensial parsial (1) dengan P , Q , atau R memuat variabel, kadang kala sulit untuk memisahkan variabel-variabel tersebut. Untuk memperjelas, perhatikan contoh berikut ini.

Contoh 4.6 :

Perhatikan persamaan diferensial parsial pada Contoh 4.2 :

$$y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

dengan syarat awal : $z(x,0) = x^4$

Akan dicari penyelesaian untuk masalah nilai awal tersebut dengan metode pemisahan variabel.

Dengan mengandaikan penyelesaiannya berbentuk :

$$z(x,y) = X(x)Y(y)$$

dan dengan mensubstitusikan dalam persamaan diferensial

parsial yang diketahui, diperoleh :

$$yX'(x)Y(y) - xX(x)Y'(y) = 0$$

$$\Leftrightarrow yX'(x)Y(y) = xX(x)Y'(y)$$

Persamaan tersebut dapat ditulis dalam bentuk :

$$\frac{X'(x)}{xX(x)} = \frac{Y'(y)}{yY(y)}$$

Andaikan ada suatu konstanta λ sedemikian sehingga :

$$\frac{X'(x)}{xX(x)} = \frac{Y'(y)}{yY(y)} = \lambda$$

Maka akan diperoleh dua persamaan diferensial biasa :

$$X'(x) - \lambda xX(x) = 0$$

$$Y'(y) - \lambda yY(y) = 0$$

Penyelesaian dari kedua persamaan tersebut berturut-turut adalah :

$$X(x) = c_1 e^{\frac{1}{2}\lambda x^2} \quad \text{dan} \quad Y(y) = c_2 e^{\frac{1}{2}\lambda y^2}$$

Selanjutnya :

$$z(x,y) = X(x)Y(y) = Ae^{\frac{1}{2}\lambda(x^2+y^2)}$$

dengan $A = c_1 c_2$ adalah konstanta.

Dengan menggunakan syarat awal yang ada, diperoleh :

$$z(x,0) = Ae^{\frac{1}{2}\lambda x^2} = x^4$$

Dengan menggunakan Deret MacLaurin, diperoleh :

$$Ae^{\frac{1}{2}\lambda x^2} = x^4$$

$$\Leftrightarrow A \left[\sum_{k=0}^n \frac{(1/2\lambda x^2)^k}{k!} \right] = x^4$$

$$\Leftrightarrow A \left[1 + \frac{1}{2}\lambda x^2 + \frac{(1/2\lambda x^2)^2}{2!} + \dots \right] = x^4$$

$$\Leftrightarrow A \left[1 + \frac{1}{2}\lambda x^2 + \frac{\lambda^2 x^4}{8} + \dots \right] = x^4$$

Dari hasil tersebut ternyata timbul kesulitan untuk menentukan nilai A dan λ sehingga sulit menentukan penyelesaiannya.

Dalam Contoh 4.6 tampak bahwa metode pemisahan variabel sulit digunakan untuk persamaan diferensial parsial (1) dengan P, Q, atau R memuat variabel. Namun, di luar keterbatasan itu, metode pemisahan variabel merupakan salah satu dari metode-metode yang paling sering digunakan. Walaupun bidang penerapan metode ini tidak luas, tetapi beberapa persamaan diferensial parsial yang penting dapat diselesaikan dengan metode tersebut.

BAB V

PENERAPAN

Telah diketahui bahwa persamaan diferensial parsial memiliki penerapan yang sangat luas dalam berbagai bidang kehidupan. Setelah dipelajari dalam bab-bab sebelumnya mengenai penyelesaian persamaan diferensial parsial kuasilinear dengan dua variabel bebas, baik penyelesaian umum maupun penyelesaian yang memenuhi syarat-syarat tertentu, maka dalam bab ini akan dibahas beberapa penerapannya dalam bidang geometri, biologi, dan fisika.

A. Dalam Bidang Geometri

1. Permukaan Integral Melalui Suatu Kurva Tertentu

Dalam pasal ini akan dibahas dua masalah dalam menentukan permukaan integral dari persamaan diferensial parsial $Pp + Qq = R$ yang melalui suatu kurva tertentu, berdasarkan bentuk dan persamaan kurva yang diketahui tersebut.

Kedua masalah itu ialah :

a. Jika permukaan integral tersebut melalui suatu

kurva yang dapat dinyatakan dengan persamaan parametrik :

$$x = x(t) \quad , \quad y = y(t) \quad , \quad z = z(t)$$

b. Jika permukaan integral tersebut melalui suatu kurva yang dinyatakan dengan dua persamaan :

$$\phi(x,y,z) = 0 \quad \text{dan} \quad \psi(x,y,z) = 0$$

Ada sedikit perbedaan dalam langkah-langkah menyelesaikan kedua masalah tersebut.

Masalah I :

Misalkan diketahui persamaan diferensial parsial :

$$Pp + Qq = R$$

dengan persamaan bantu yang menghasilkan dua penyelesaian :

$$u(x,y,z) = c_1 \quad \text{dan} \quad v(x,y,z) = c_2 \quad \dots\dots (1)$$

Akan dicari permukaan integral melalui suatu kurva yang persamaan parametriknya berbentuk :

$$x = x(t) \quad , \quad y = y(t) \quad , \quad z = z(t)$$

dengan t parameter.

Maka persamaan (1) dapat ditulis :

$$u[x(t),y(t),z(t)] = c_1 \quad \text{dan} \quad v[x(t),y(t),z(t)] = c_2 \quad \dots\dots (2)$$

Dengan mengeliminasi parameter t dalam persamaan

(2), diperoleh relasi yang memuat c_1 dan c_2 .

Selanjutnya, dengan mengganti c_1 dan c_2 dengan pertolongan persamaan (1), diperoleh permukaan integral yang dicari.

Contoh 5.1 :

Diketahui persamaan diferensial parsial kuasilinear :

$$x(y^2+z)p - y(x^2+z)q = (x^2-y^2)z$$

Akan dicari permukaan integral yang memuat garis lurus :

$$x + y = 0, \quad z = 1$$

Persamaan bantu untuk persamaan diferensial parsial tersebut adalah :

$$\frac{dx}{x(y^2+z)} = \frac{dy}{-y(x^2+z)} = \frac{dz}{(x^2-y^2)z} \quad \dots \quad (3)$$

Dengan memilih $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$, $\frac{1}{z}$ sebagai pengali,

persamaan (3) dapat ditulis :

$$\frac{\frac{dx}{x}}{y^2+z} = \frac{\frac{dy}{y}}{-(x^2+z)} = \frac{\frac{dz}{z}}{x^2-y^2} \quad \dots \quad (4)$$

Perhatikan penyebut-penyebut dalam persamaan (4)

Karena :

$$(y^2+z) + \{-(x^2+z)\} + (x^2-y^2) = 0$$

maka diperoleh :

$$\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} + \frac{dz}{z} = 0 \quad \text{atau} \quad xyz = c_1$$

Dengan memilih $x, y, -1$ sebagai pengali, persamaan

(3) dapat ditulis :

$$\frac{x dx}{x^2(y^2+z)} = \frac{y dy}{-y^2(x^2+z)} = \frac{-dz}{-z(x^2-y^2)} \quad \dots \quad (5)$$

Perhatikan penyebut-penyebut dalam persamaan (5)

Karena :

$$x^2(y^2+z) + [-y^2(x^2+z)] + [-z(x^2-y^2)] = 0$$

maka diperoleh :

$$x dx + y dy - dz = 0 \quad \text{atau} \quad x^2 + y^2 - 2z = c_2$$

Didapatkan dua penyelesaian :

$$xyz = c_1, \quad x^2 + y^2 - 2z = c_2 \quad \dots \quad (6)$$

Persamaan garis lurus yang diketahui dapat ditulis

dalam bentuk persamaan parametrik :

$$x = t, \quad y = -t, \quad z = 1$$

dengan t parameter.

Maka persamaan (6) dapat ditulis :

$$-t^2 = c_1, \quad 2t^2 - 2 = c_2 \quad \dots \quad (7)$$

Dari persamaan (7) diperoleh relasi :

$$2(-c_1) - 2 = c_2 \quad \text{atau} \quad 2c_1 + c_2 + 2 = 0 \quad \dots \quad (8)$$

Dengan mensubstitusikan nilai c_1 dan c_2 dalam

persamaan (6) ke dalam persamaan (8), diperoleh permukaan integral yang dicari, yaitu :

$$x^2 + y^2 + 2xyz - 2z + 2 = 0$$

Masalah II :

Misalkan diketahui persamaan diferensial parsial :

$$Pp + Qq = R$$

dengan persamaan bantu yang menghasilkan dua penyelesaian :

$$u(x,y,z) = c_1 \quad \text{dan} \quad v(x,y,z) = c_2 \quad \dots\dots (1)$$

Akan dicari permukaan integral melalui suatu kurva yang ditentukan oleh dua persamaan :

$$\phi(x,y,z) = 0 \quad \text{dan} \quad \psi(x,y,z) = 0 \quad \dots\dots (9)$$

Dengan mengeliminasi x, y, z dari persamaan (1) dan (9) diperoleh suatu relasi antara c_1 dan c_2 .

Selanjutnya, dengan mengganti c_1 dan c_2 dalam relasi tersebut dengan pertolongan persamaan (1), diperoleh permukaan integral yang dicari.

Contoh 5.2 :

Diketahui persamaan diferensial parsial kuasilinear :

$$(x-y)p + (y-x-z)q = z$$

Akan dicari permukaan integral yang melalui lingkaran dengan persamaan :

$$x^2 + y^2 = 1, \quad z = 1 \quad \dots\dots (10)$$

Persamaan bantu untuk persamaan diferensial parsial tersebut adalah :

$$\frac{dx}{x-y} = \frac{dy}{y-x-z} = \frac{dz}{z} \quad \dots\dots (11)$$

Perhatikan penyebut-penyebut dalam persamaan bantu Lagrange (11)

Karena :

$$(x-y) + (y-x-z) + z = 0$$

maka diperoleh :

$$dx + dy + dz = 0 \quad \text{atau} \quad x + y + z = c_1 \quad \dots (12)$$

Dari $\frac{dy}{y-x-z} = \frac{dz}{z}$ dan dengan menggunakan persamaan

(12) diperoleh :

$$\frac{dy}{y-(c_1-y)} = \frac{dz}{z} \quad \text{atau} \quad \frac{2dy}{2y-c_1} - \frac{2dz}{z} = 0$$

Dengan mengintegrasikan persamaan tersebut, diperoleh :

$$\ln (2y-c_1) - 2 \ln z = \ln c_2$$

$$\Leftrightarrow \frac{2y-c_1}{z^2} = c_2$$

$$\Leftrightarrow \frac{2y-x-y-z}{z^2} = c_2$$

$$\Leftrightarrow \frac{y-x-z}{z^2} = c_2 \quad \dots\dots (13)$$

Dengan mensubstitusikan $z = 1$ dari persamaan lingkaran (10) ke dalam persamaan (12) dan (13) diperoleh :

$$x + y = c_1 - 1 \quad \text{dan} \quad y - x = c_2 + 1 \quad \dots (14)$$

Diketahui bahwa :

$$2(x^2 + y^2) = (x+y)^2 + (y-x)^2 \quad \dots\dots (15)$$

Selanjutnya, dengan menggunakan persamaan (10), (14), dan (15) diperoleh :

$$2 = (c_1 - 1)^2 + (c_2 + 1)^2 \quad \text{atau} \quad c_1^2 + c_2^2 - 2c_1 + 2c_2 = 0$$

$$\dots\dots (16)$$

Dengan mensubstitusikan nilai c_1 dan c_2 dari persamaan (12) dan (13) ke dalam persamaan (16) diperoleh :

$$(x+y+z)^2 + \frac{(y-x-z)^2}{z^4} - 2(x+y+z) + \frac{2(y-x-z)}{z^2} = 0$$

Permukaan integral yang dicari ialah :

$$z^4(x+y+z)^2 + (y-x-z)^2 - 2z^4(x+y+z) + 2z^2(y-x-z) = 0$$

2. Permukaan Yang Ortogonal Terhadap Sistem Permukaan Lain Yang Diketahui

Andaikan diketahui keluarga permukaan satu parameter dengan persamaan :

$$F(x,y,z) = c \quad \dots\dots (1)$$

Akan dicari suatu permukaan yang memotong tegak lurus setiap permukaan dari keluarga permukaan (1) tersebut.

Permukaan dengan persamaan (1) yang melalui titik (x,y,z) akan memiliki normal permukaan yang arahnya di titik tersebut dinyatakan dengan rasio arah $(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z})$.

Andaikan permukaan dengan persamaan $z = \phi(x,y)$ memotong tegak lurus setiap permukaan dari keluarga permukaan (1).

Berarti arah normal dari $z = \phi(x,y)$ pada titik (x,y,z) , yaitu $(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, -1)$, akan tegak lurus dengan $(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z})$ di titik tersebut apabila dipenuhi hubungan :

$$\frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial z} \quad \dots\dots (2)$$

yang dapat ditulis dalam bentuk :

$$Pp + Qq = R$$

dan merupakan persamaan diferensial parsial kuasilinear dengan :

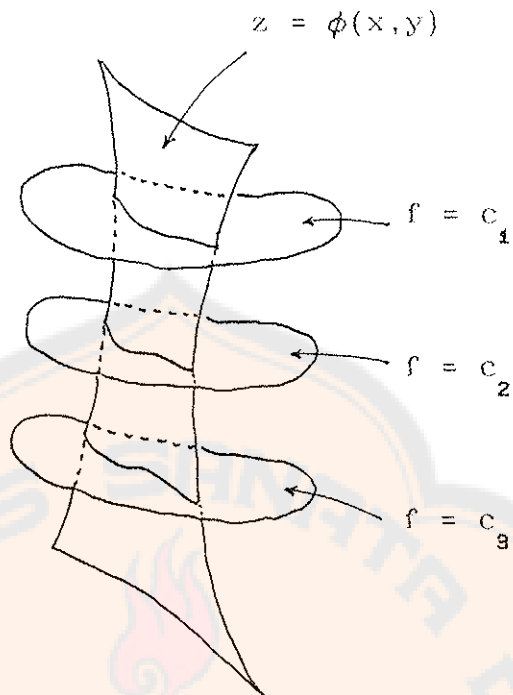
$$P = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial F}{\partial y}, \quad \text{dan} \quad R = \frac{\partial F}{\partial z}$$

Sebaliknya, setiap penyelesaian dari persamaan diferensial parsial (2) pasti tegak lurus pada setiap permukaan dari keluarga permukaan dengan persamaan (1).

Hal ini jelas karena persamaan (2) menunjukkan bahwa setiap penyelesaian dari persamaan tersebut pasti tegak lurus dengan normal permukaan setiap anggota sistem (1) yang melalui titik yang sama.

Dapat disimpulkan bahwa permukaan yang ortogonal terhadap sistem (1) adalah permukaan yang dihasilkan oleh kurva integral dari persamaan bantu :

$$\frac{dx}{\frac{\partial F}{\partial x}} = \frac{dy}{\frac{\partial F}{\partial y}} = \frac{dz}{\frac{\partial F}{\partial z}} \quad \dots\dots (3)$$



Gambar (1)

Contoh 5.3 :

Akan dicari suatu permukaan yang memotong tegak lurus setiap permukaan dari sistem permukaan :

$$z(x+y) = c(3z+1)$$

dan melalui lingkaran : $x^2 + y^2 = 1$, $z = 1$

Sistem permukaan tersebut dapat ditulis dalam bentuk :

$$F(x, y, z) \equiv \frac{z(x+y)}{3z+1} = c \quad \dots\dots (4)$$

Selanjutnya diperoleh :

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{z}{3z+1} \quad , \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{z}{3z+1} \quad ,$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = (x+y) \frac{1(3z+1)-z^3}{(3z+1)^2} = \frac{x+y}{(3z+1)^2}$$

Permukaan ortogonal yang dicari akan merupakan penyelesaian dari persamaan diferensial parsial :

$$\frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial z}$$

$$\Leftrightarrow \frac{z}{3z+1} p + \frac{z}{3z+1} q = \frac{x+y}{(3z+1)^2}$$

$$\Leftrightarrow z(3z+1)p + z(3z+1)q = x+y$$

Persamaan bantu untuk persamaan diferensial parsial tersebut ialah :

$$\frac{dx}{z(3z+1)} = \frac{dy}{z(3z+1)} = \frac{dz}{x+y} \dots\dots (5)$$

Dari $\frac{dx}{z(3z+1)} = \frac{dy}{z(3z+1)}$ diperoleh :

$$dx - dy = 0 \quad \text{atau} \quad x - y = c_1$$

Dengan memilih x , y , $-z(3z+1)$ sebagai pengali, persamaan (5) dapat ditulis :

$$\frac{x dx}{xz(3z+1)} = \frac{y dy}{yz(3z+1)} = \frac{-z(3z+1) dz}{-z(3z+1)(x+y)} \dots (6)$$

Perhatikan penyebut-penyebut dalam persamaan (6)

Karena :

$$xz(3z+1) + yz(3z+1) + [-z(3z+1)(x+y)] = 0$$

maka diperoleh :

$$x dx + y dy - z(3z+1) dz = 0$$

Selanjutnya,

$$x dx + y dy - 3z^2 dz - z dz = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2} y^2 - 3 \frac{z^3}{3} - \frac{1}{2} z^2 = \frac{1}{2} C_2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2z^3 - z^2 = C_2$$

Berarti setiap permukaan yang ortogonal pada sistem permukaan (4) memiliki persamaan :

$$x^2 + y^2 - 2z^3 - z^2 = \phi(x-y)$$

Untuk permukaan tertentu yang melalui lingkaran $x^2 + y^2 = 1$, $z = 1$, berarti nilai $\phi(x-y) = -2$

Jadi, permukaan yang dicari ialah :

$$x^2 + y^2 = 2z^3 + z^2 - 2$$

B. Dalam Bidang Biologi

(Proses Reproduksi Dan Kematian Bakteri)

Dalam bidang Biologi, persamaan diferensial parsial kuasilinear orde pertama muncul dalam teori tentang reproduksi dan kematian bakteri.

Andaikan pada saat t ada n bakteri hidup dan andaikan bahwa :

1. probabilitas suatu bakteri bereproduksi selama

selang waktu antara t dan $t + \delta t$ adalah $\lambda_n \delta t$, dimana

$$0 \leq \lambda_n \delta t \leq 1$$

2. probabilitas suatu bakteri mati selama selang waktu yang sama adalah $\mu_n \delta t$, dimana $0 \leq \mu_n \delta t \leq 1$

3. probabilitas banyaknya bakteri tetap konstan selama selang waktu yang sama adalah $1 - \lambda_n \delta t - \mu_n \delta t$, dimana $0 \leq 1 - \lambda_n \delta t - \mu_n \delta t \leq 1$

4. probabilitas bahwa ada lebih dari satu kelahiran atau kematian terjadi dalam waktu δt adalah nol

Syarat 4 tersebut diperlukan untuk memastikan bahwa tidak ada kemungkinan lain selain kemungkinan 1, 2, dan 3.

Andaikan $p_n(t)$ menyatakan probabilitas bahwa ada n bakteri yang hidup pada saat t , maka :

$$p_n(t+\delta t) = \lambda_{n-1} p_{n-1}(t) \delta t + \mu_{n+1} p_{n+1}(t) \delta t + (1 - \lambda_n \delta t - \mu_n \delta t) p_n(t)$$

yang dapat ditulis dalam bentuk :

$$\frac{p_n(t+\delta t) - p_n(t)}{\delta t} = \lambda_{n-1} p_{n-1}(t) + \mu_{n+1} p_{n+1}(t) - (\lambda_n + \mu_n) p_n(t)$$

Jika δt mendekati nol, diperoleh persamaan :

$$\frac{dp_n}{dt} = \lambda_{n-1} p_{n-1}(t) + \mu_{n+1} p_{n+1}(t) - (\lambda_n + \mu_n) p_n(t) \quad \dots\dots (1)$$

Secara umum, parameter λ_n dan μ_n bergantung pada n maupun t . Namun, untuk memperoleh model dalam bentuk persamaan diferensial parsial kuasilinear orde pertama, diambil kasus khusus dimana parameter λ_n dan μ_n berbanding lurus dengan n bakteri yang ada, yaitu :

$$\lambda_n = n\lambda, \quad \mu_n = n\mu$$

dengan λ dan μ konstanta.

Maka persamaan (1) menjadi :

$$\frac{dp_n}{dt} = \lambda(n-1)p_{n-1}(t) - (\lambda+\mu)np_n(t) + \mu(n+1)p_{n+1}(t) \quad \dots\dots (2)$$

Jika kedua ruas persamaan (2) dikalikan dengan x^n dan dicari jumlahnya untuk n dari 0 sampai ∞ , diperoleh :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{dp_n}{dt} x^n &= \lambda x^2 \sum_{n=1}^{\infty} (n-1)p_{n-1}(t)x^{n-2} \\ &\quad - (\lambda+\mu)x \sum_{n=1}^{\infty} np_n(t)x^{n-1} + \mu \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)p_{n+1}(t)x^n \quad \dots\dots (3) \end{aligned}$$

Didefinisikan suatu fungsi $\Phi(x,t)$, yaitu :

$$\Phi(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(t)x^n \quad \dots\dots (4)$$

Selanjutnya, dari persamaan (4) diperoleh :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{dp_n}{dt} x^n \quad \dots\dots (5)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \sum_{n=1}^{\infty} n p_n(t) x^{n-1} \quad \dots\dots \quad (6)$$

Persamaan (6) dapat ditulis dalam dua bentuk lain yang ekuivalen, yaitu :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) p_{n+1}(t) x^n \quad \dots\dots \quad (7)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \sum_{n=1}^{\infty} (n-1) p_{n-1}(t) x^{n-2} \quad \dots\dots \quad (8)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (5), (6), (7), (8) ke dalam persamaan (3) diperoleh :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial t} &= [\lambda x^2 - (\lambda + \mu)x + \mu] \frac{\partial \Phi}{\partial x} \\ \Leftrightarrow \frac{\partial \Phi}{\partial t} &= (\lambda x - \mu)(x-1) \frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad \dots\dots \quad (9) \end{aligned}$$

yang merupakan persamaan diferensial parsial kuasilinear orde pertama dengan dua variabel bebas x dan t .

Akan dicari penyelesaian persamaan diferensial tersebut dengan Metode Lagrange.

Persamaan bantu untuk persamaan diferensial parsial (9) tersebut adalah :

$$\frac{dx}{(\lambda x - \mu)(x-1)} = \frac{dt}{-1}, \quad d\Phi = 0$$

Selanjutnya :

$$d\Phi = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Phi = c_2$$

$$\frac{dx}{(\lambda x - \mu)(x-1)} = \frac{dt}{-1}$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{dx}{(\lambda x - \mu)(x-1)} = - \int dt$$

$$\Leftrightarrow \int \left[\frac{-\frac{\lambda}{\lambda-\mu}}{\lambda x - \mu} + \frac{\frac{1}{\lambda-\mu}}{x-1} \right] dx = - \int dt$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\lambda}{\lambda-\mu} \int \frac{dx}{\lambda x - \mu} + \frac{1}{\lambda-\mu} \int \frac{dx}{x-1} = - \int dt$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{\lambda-\mu} \left[\ln(\lambda x - \mu) - \ln(x-1) \right] = -t - k$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\lambda-\mu} \ln \left[\frac{\lambda x - \mu}{x-1} \right] = t + k$$

$$\Leftrightarrow \ln \left[\frac{\lambda x - \mu}{x-1} \right] = (\lambda - \mu)t + (\lambda - \mu)k$$

$$\Leftrightarrow \frac{\lambda x - \mu}{x-1} = e^{(\lambda - \mu)t} e^{(\lambda - \mu)k}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\lambda x - \mu}{x-1} = c_2 e^{(\lambda - \mu)t} \quad \text{dengan} \quad c_2 = e^{(\lambda - \mu)k}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\lambda x - \mu}{x-1} e^{-(\lambda - \mu)t} = c_2$$

Berdasarkan Teorema Lagrange, penyelesaian umum persamaan diferensial parsial (9) adalah :

$$F \left(\Phi, \frac{\lambda x - \mu}{x-1} e^{-(\lambda - \mu)t} \right) = 0$$

dimana F fungsi sembarang.

Penyelesaian tersebut dapat pula ditulis dalam bentuk :

$$\Phi = \psi \left[\frac{\lambda x - \mu}{x-1} e^{-(\lambda-\mu)t} \right] \quad \dots\dots \quad (10)$$

dimana ψ fungsi sembarang.

Jika pada saat $t = 0$ ada sejumlah m bakteri, maka :

$$p_m(0) = 1$$

$$p_0(0) = p_1(0) = \dots = p_{m-1}(0) = p_{m+1}(0) = \dots = 0$$

Sehingga untuk $t = 0$ berlaku :

$$\Phi(x, 0) = x^m$$

Padahal, untuk $t = 0$ juga berlaku :

$$\Phi(x, 0) = \psi \left[\frac{\lambda x - \mu}{x-1} \right]$$

Berarti harus dicari fungsi ψ sedemikian sehingga :

$$\psi \left[\frac{\lambda x - \mu}{x-1} \right] = x^m \quad \dots\dots \quad (11)$$

Jika diandaikan bahwa :

$$\frac{\lambda x - \mu}{x-1} = \xi \quad \dots\dots \quad (12)$$

maka diperoleh :

$$x = \frac{\mu - \xi}{\lambda - \xi} \quad \dots\dots \quad (13)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (12) dan (13) ke dalam persamaan (11), diperoleh fungsi ψ yang dicari :

$$\psi(\xi) = \left[\frac{\mu - \xi}{\lambda - \xi} \right]^m$$

Selanjutnya, dari persamaan (10) :

$$\begin{aligned}\Phi(x, t) &= \psi \left(\frac{\lambda x - \mu}{x-1} e^{-(\lambda-\mu)t} \right) \\ &= \left[\frac{\mu - \frac{\lambda x - \mu}{x-1} e^{-(\lambda-\mu)t}}{\lambda - \frac{\lambda x - \mu}{x-1} e^{-(\lambda-\mu)t}} \right]^m \\ &= \left[\frac{\frac{\mu(x-1) - (\lambda x - \mu)e^{-(\lambda-\mu)t}}{x-1}}{\frac{\lambda(x-1) - (\lambda x - \mu)e^{-(\lambda-\mu)t}}{x-1}} \right]^m \\ &= \left[\frac{x[\mu - \lambda e^{-(\lambda-\mu)t}] - \mu[1 - e^{-(\lambda-\mu)t}]}{\lambda x[1 - e^{-(\lambda-\mu)t}] - [\lambda - \mu e^{-(\lambda-\mu)t}]} \right]^m\end{aligned}$$

Dengan membagi pembilang maupun penyebut dengan $e^{-(\lambda-\mu)t}$ diperoleh :

$$\begin{aligned}\Phi(x, t) &= \left[\frac{\frac{x[\mu - \lambda e^{-(\lambda-\mu)t}] - \mu[1 - e^{-(\lambda-\mu)t}]}{e^{-(\lambda-\mu)t}}}{\frac{\lambda x[1 - e^{-(\lambda-\mu)t}] - [\lambda - \mu e^{-(\lambda-\mu)t}]}{e^{-(\lambda-\mu)t}}} \right]^m \\ &= \left[\frac{x\mu e^{(\lambda-\mu)t} - \lambda x - \mu e^{(\lambda-\mu)t} + \mu}{\lambda x e^{(\lambda-\mu)t} - \lambda x - \lambda e^{(\lambda-\mu)t} + \mu} \right]^m\end{aligned}$$

Akhirnya didapatkan hasil :

$$\Phi(x, t) = \left[\frac{\mu[1 - e^{(\lambda-\mu)t}] - x[\lambda - \mu e^{(\lambda-\mu)t}]}{\mu - \lambda e^{(\lambda-\mu)t} - \lambda x[1 - e^{(\lambda-\mu)t}]} \right]^m \quad \dots\dots (14)$$

Mengingat persamaan (4) yaitu :

$$\Phi(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(t)x^n \quad \dots\dots \quad (4)$$

maka $p_n(t)$ dapat ditentukan, karena merupakan koefisien-koefisien dari x^n dalam ekspansi deret kuasa untuk fungsi $\Phi(x,t)$ pada persamaan (4) tersebut.

C. Dalam Bidang Fisika

(Gerak Gelombang Satu Arah)

Model matematika paling sederhana yang menyatakan gerak gelombang satu arah ialah persamaan diferensial parsial kuasilinear :

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad \dots\dots \quad (1)$$

dengan x menyatakan suatu titik pada medium berupa fluida (zat alir) dinamik dan t menyatakan waktu.

Penyelesaian $u = u(x,t)$ dari persamaan diferensial parsial (1) menyatakan kedudukan vertikal gelombang tersebut pada titik x dan pada saat t . Diasumsikan bahwa pada saat $t = 0$ gelombang tersebut berkedudukan di sepanjang kurva tertentu $u = f(x)$.

Karena kedudukan awal gelombang tersebut adalah

kurva $u = f(x)$, maka harus dicari penyelesaian persamaan diferensial parsial (1) yang memenuhi syarat awal :

$$u(x,0) = f(x) \quad \dots\dots (2)$$

dimana $f(x)$ adalah fungsi mulus yang diketahui.

Kurva awal tersebut dapat ditulis dalam bentuk parametrik :

$$x = \eta \quad , \quad t = 0 \quad , \quad u = f(\eta) \quad \dots\dots (3)$$

Selanjutnya :

$$\frac{dt}{d\eta} u - \frac{dx}{d\eta} 1 = 0 \cdot u - 1 \cdot 1 = -1 \neq 0$$

Berarti nilai determinan Jacobi tidak sama dengan nol di sepanjang kurva awal tersebut. Maka ada penyelesaian tunggal $u = u(x,t)$ yang didefinisikan dalam suatu kitar dari kurva awal (3).

Persamaan karakteristik untuk persamaan diferensial parsial (1) adalah :

$$\frac{dx}{ds} = u \quad , \quad \frac{dt}{ds} = 1 \quad , \quad \frac{du}{ds} = 0 \quad \dots (4)$$

Persamaan $\frac{du}{ds} = 0$ menyatakan bahwa $u(s,\eta)$ konstan sepanjang kurva karakteristik.

Sehingga :

$$u(s,\eta) = u(0,\eta) = f(\eta) \quad \dots\dots (5)$$

Dengan mensubstitusikan bentuk tersebut dalam

$$\frac{dx}{ds} = u, \text{ diperoleh penyelesaian untuk } x(s, \eta) \text{ dan}$$

$t(s, \eta)$ sebagai berikut :

$$x(s, \eta) = sf(\eta) + \eta, \quad t(s, \eta) = s$$

Karena syarat dalam Teorema Masalah Nilai Awal dipenuhi, maka di sekitar $s = 0$, sistem tersebut dapat dinyatakan sebagai :

$$s = t \quad \text{dan} \quad \eta = \eta(x, t) \quad \dots \quad (6)$$

Maka persamaan (5) dan (6) menghasilkan penyelesaian :

$$u = f[\eta(x, t)] = u(x, t)$$

Karena $s = t$ dan $\eta = x - sf(\eta) = x - tu$, maka penyelesaian persamaan diferensial parsial kuasilinear (1) dapat dinyatakan dalam bentuk implisit :

$$u = f(x - tu) \quad \dots \quad (7)$$

Penyelesaian dalam bentuk $u = u(x, t) = f(x - tu)$ tersebut menyatakan suatu gelombang. Nilai numeris dari $u(x, t)$ menyatakan ketinggian gelombang di titik x dan pada saat t .

Untuk menentukan gerakan gelombang tersebut, harus diketahui kecepatan $\frac{dx}{dt}$ dari setiap titik pada gelombang itu. Dua persamaan pertama dalam persamaan

karakteristik (4) menghasilkan :

$$\frac{dx}{dt} = u.$$

Jadi, makin besar amplitudo $|u(x,t)|$ dari gelombang tersebut, makin besar kecepatan di titik yang bersangkutan pada gelombang tersebut.

Jika $u(x,t) > 0$, titik x bergerak ke kanan. Jika $u(x,t) = 0$, titik tersebut tetap. Sedangkan jika $u(x,t) < 0$ maka titik tersebut akan bergerak ke kiri. Jika $u(x,t)$ bisa bernilai positif ataupun negatif maka setiap titik tertentu memiliki arah gerakan yang tetap tetapi tiap bagian yang berbeda dari gelombang itu dapat memiliki arah gerakan yang berbeda.

Jika $u > 0$, titik-titik x dimana $u(x,t)$ memiliki nilai yang lebih besar dan gelombangnya lebih tinggi akan bergerak ke kanan lebih cepat daripada titik-titik dimana $u(x,t)$ memiliki nilai lebih kecil dan gelombangnya lebih rendah.

Jika pada saat awal ada bagian yang lebih tinggi dari gelombang tersebut yang terletak di sebelah kiri atau sebelah belakang bagian yang lebih rendah, titik-titik yang lebih tinggi tersebut mungkin suatu saat akan menyusul dan melalui titik-titik yang lebih

rendah. Dalam keadaan demikian, gelombang tersebut dikatakan putus.

Pada saat putus t ini, nilai fungsi $u(x,t)$ menjadi tidak tunggal dan $u(x,t)$ bukan lagi merupakan penyelesaian yang valid dari persamaan diferensial parsial (1). Demikian pula persamaan diferensial parsial (1) tidak lagi merupakan model matematis yang baik untuk proses fisis gelombang tersebut. Biasanya hal ini berarti dibutuhkan model dengan tingkat derivatif yang lebih tinggi.

Walaupun gelombang akan putus pada saat t , penyelesaian $u = f(x-tu)$ tetap valid sampai sebelum saat tersebut. Karena itu perlu diketahui bilamana gelombang $u(x,t)$ tersebut pertama kali putus.

Untuk menentukan waktu putus tersebut, pertama-tama harus dicari gradien bentuk gelombang $u = u(x,t) = f(x-tu)$ pada saat t .

Dengan mendiferensialkan $u(x,t)$ secara implisit terhadap x , diperoleh :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} [f(x-tu)] = f'(x-tu) \left[1 - t \frac{\partial u}{\partial x} \right]$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial x} + t f'(x-tu) \frac{\partial u}{\partial x} = f'(x-tu)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{f'(x-tu)}{1+tf'(x-tu)} \quad \dots\dots (8)$$

Pada saat pertama $1 + tf'(x-tu) = 1 + tf'(\eta) = 0$ maka gradien $\frac{\partial u}{\partial x}$ akan bernilai tak berhingga dan gelombang mulai putus. Karena $1 + f'(x-tu) = 0$ pada saat :

$$t = -\frac{1}{f'(\eta)}$$

maka waktu putus dapat ditentukan dari nilai η dimana t akan memiliki nilai non-negatif yang terkecil.

Agar lebih jelas, masalah gerak gelombang satu arah ini akan dibahas dalam contoh-contoh berikut.

Contoh 5.4 :

Diketahui persamaan gerak gelombang satu arah :

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

dengan kedudukan awal gelombang :

$$u(x,0) = f(x) = -x$$

Dari pembahasan sebelumnya diketahui bahwa gelombang tersebut dapat dinyatakan dengan persamaan :

$$u = f(x-tu) = -(x-tu)$$

atau dalam bentuk eksplisit :

$$u(x,t) = \frac{x}{t-1}$$

Gradien gelombang tersebut di tiap titik adalah :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{t-1}$$

Jelas bahwa gelombang tersebut akan putus pada saat $t = 1$.

Gerakan gelombang $u(x,t) = \frac{x}{t-1}$ dapat dilihat pada gambar (2).

Untuk $x > 0$, nilai $u(x,t)$, $0 < t < 1$ negatif sehingga gelombang bergerak ke kiri.

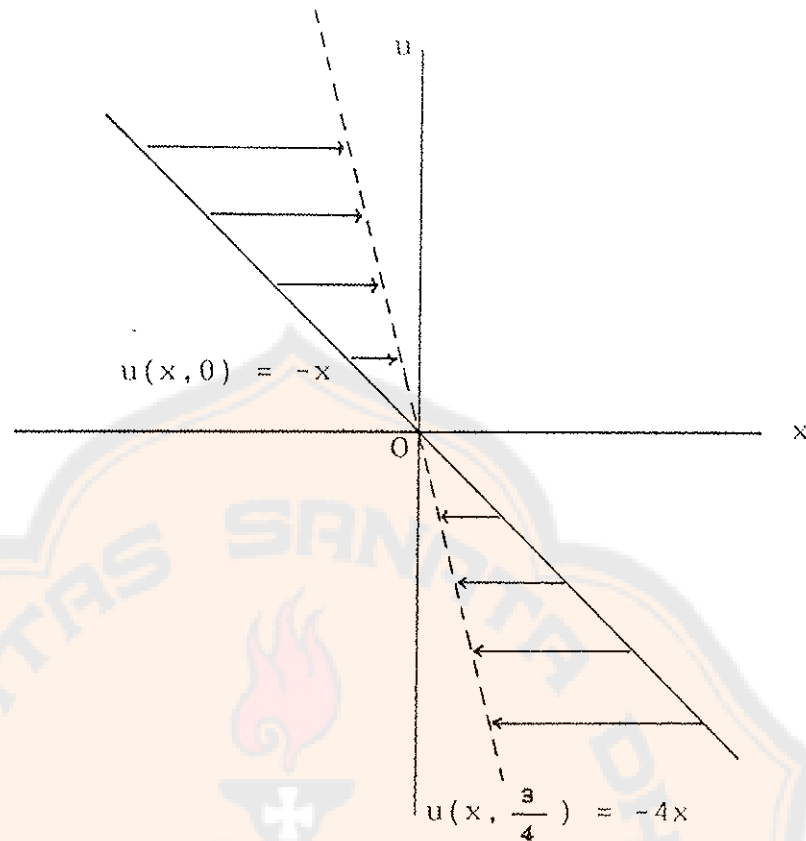
Untuk $x < 0$, nilai $u(x,t)$, $0 < t < 1$ positif sehingga gelombang bergerak ke kanan.

Titik $x = 0$ merupakan titik tetap atau titik stasioner karena pada titik tersebut nilai $u = 0$.

Jadi, dengan bertambahnya t , gelombang awal $u(x,0) = -x$ akan bergerak searah jarum jam dengan pusat pada titik asal 0 dalam bidang- xu .

Selain itu, nilai $|u|$ bertambah secara linear dengan $|x|$ dan titik-titik x yang makin jauh dari titik pusat kecepatannya akan bertambah secara linear.

Pada saat $t = 1$, gelombang $u(x,t)$ akan berimpit dengan sumbu- x dan nilainya menjadi tidak tunggal dan tidak berhingga, sehingga gelombang dikatakan putus.



Gambar (2)

Contoh 5.5 :

Diketahui persamaan gerak gelombang satu arah :

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

dengan kedudukan awal gelombang :

$$u(x, 0) = f(x) = \sin x$$

Dari pembahasan sebelumnya diketahui bahwa gelombang tersebut dapat dinyatakan secara implisit dengan persamaan :

$$u = f(x-tu) = \sin (x-tu)$$

Gelombang akan putus pada saat :

$$t = -\frac{1}{\cos \eta} \quad \dots\dots \quad (9)$$

Berarti waktu putus terjadi pada saat $t = 1$ karena untuk :

$$\eta = (2n+1)\pi, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

diperoleh : $\cos \eta = -1$

Untuk nilai-nilai η yang lain dalam persamaan (9), t akan negatif atau lebih dari satu.

Pada saat $t = 1$, gelombang akan putus secara serentak di titik-titik $x = (2n+1)\pi$.

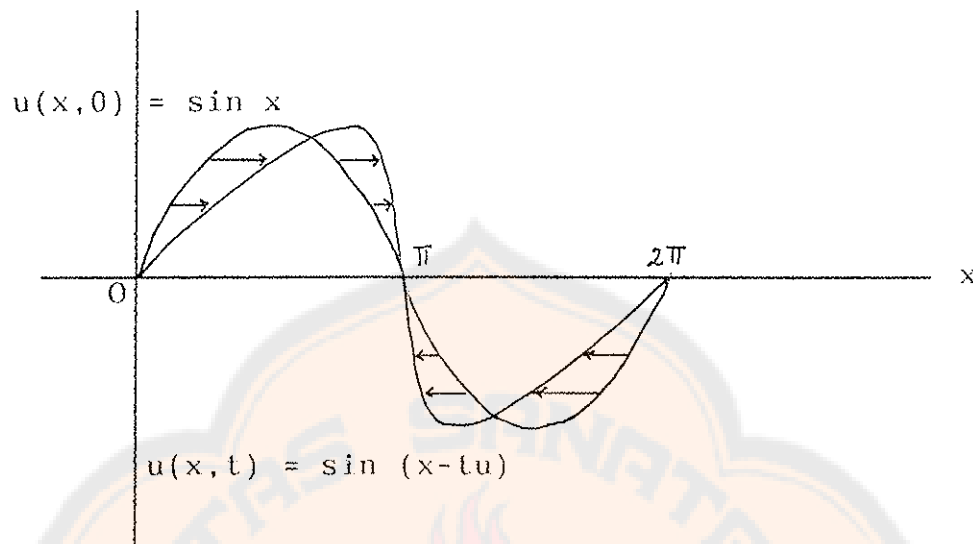
Gerakan gelombang $u(x,t) = \sin(x-t)$ dapat dilihat pada gambar (3) untuk interval $0 \leq x \leq 2\pi$.

Untuk $0 < x < \pi$, nilai $\sin x$ positif, karena itu gelombang bergerak ke kanan.

Untuk $\pi < x < 2\pi$, nilai $\sin x$ negatif, karena itu gelombang bergerak ke kiri.

Di titik $x = \pi$, nilai $\sin \pi = 0$, maka titik tersebut tetap.

Jadi, gelombang tersebut bergerak searah jarum jam di sekitar titik $(x,u) = (\pi,0)$.



Gambar (3)

Sebagai pengembangan, berikut ini akan diberikan contoh-contoh penerapan persamaan diferensial parsial yang berorde dua. Hal ini perlu diketahui mengingat banyak model matematika dari masalah-masalah fisis yang penting, yang berupa persamaan diferensial parsial orde ke dua.

Persamaan diferensial parsial orde ke dua yang akan dibahas di sini dapat diselesaikan dengan metode-metode yang telah dipelajari dalam bab-bab sebelumnya, khususnya Metode Pemisahan Variabel.

D. Contoh-Contoh Penerapan Persamaan Diferensial Parsial Orde Ke Dua

1. Konduksi Panas Dalam Medium Berdimensi Satu

Persamaan konduksi panas dalam suatu medium berdimensi satu adalah :

$$\frac{\partial z}{\partial t} = k \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \quad \dots \quad (1)$$

yang merupakan persamaan diferensial parsial orde ke dua dengan k suatu konstanta yang disebut difusivitas.

Besarnya k tergantung dari bahan apa medium itu terbuat. Dalam hal ini :

$$k = \frac{K}{c\rho}$$

dimana :

K menyatakan konduktivitas termal, yaitu sifat bahan yang menyatakan ukuran kemampuannya untuk menyalurkan panas

c menyatakan panas jenis medium, yaitu jumlah energi panas yang dibutuhkan oleh satu unit massa bahan untuk menaikkan suhunya sebesar 1^o

ρ menyatakan rapat massa medium, yaitu massa

per-satuan panjang medium

Variabel x menyatakan suatu titik pada medium dan t menyatakan waktu. Penyelesaian $z(x,t)$ dari persamaan diferensial parsial (1) menyatakan temperatur dalam suatu medium benda padat pada posisi x dan pada saat t .

Contoh 5.6 :

Andaikan ada sebuah batang yang permukaannya disekat, panjangnya 3 satuan, dan difusivitasnya 2 satuan.

Temperatur pada ujung-ujung batang tersebut dibuat tetap sebesar 0 satuan dan temperatur awalnya adalah $5 \sin 4\pi x - 3 \sin 8\pi x + 2 \sin 10\pi x$

Akan dicari temperatur batang tersebut pada posisi x dan pada saat t .

Masalah tersebut dapat dirumuskan dengan masalah nilai batas sebagai berikut :

Akan dicari penyelesaian $z(x,t)$ dari persamaan diferensial parsial :

$$\frac{\partial z}{\partial t} = 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 3, \quad t > 0$$

dengan syarat :

$$z(0,t) = z(3,t) = 0$$

$$z(x,0) = 5 \sin 4\pi x - 3 \sin 8\pi x + 2 \sin 10\pi x$$

$$\begin{array}{c}
 | \qquad \qquad \qquad | \\
 | \qquad \qquad \qquad | \\
 u(0,t) = 0 \quad \boxed{} \quad u(3,t) = 0 \\
 | \qquad \qquad \qquad | \\
 x = 0 \qquad \qquad \qquad x = 3
 \end{array}$$

Akan dicari penyelesaian persamaan diferensial parsial tersebut dengan Metode Pemisahan Variabel.

Dengan mengandaikan penyelesaiannya berbentuk :

$$z(x,t) = X(x)T(t)$$

diperoleh :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = X''(x)T(t) \quad \text{dan} \quad \frac{\partial z}{\partial t} = X(x)T'(t)$$

Dengan mensubstitusikan hasil tersebut dalam persamaan diferensial parsial yang diketahui, diperoleh :

$$X(x)T'(t) = 2X''(x)T(t)$$

Persamaan tersebut dapat ditulis dalam bentuk :

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{2T(t)}$$

Andaikan ada suatu konstanta $-\lambda^2$ sedemikian sehingga :

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{2T(t)} = -\lambda^2$$

Maka akan diperoleh dua persamaan diferensial biasa :

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0$$

$$T'(t) + 2\lambda^2 T(t) = 0$$

Penyelesaian dari kedua persamaan tersebut

berturut-turut adalah :

$$X(x) = A_1 \cos \lambda x + B_1 \sin \lambda x \quad \text{dan} \quad T(t) = c_1 e^{-2\lambda^2 t}$$

Selanjutnya :

$$\begin{aligned} z(x,t) &= X(x)T(t) = c_1 e^{-2\lambda^2 t} (A_1 \cos \lambda x + B_1 \sin \lambda x) \\ &= e^{-2\lambda^2 t} (A \cos \lambda x + B \sin \lambda x) \end{aligned}$$

Dengan menggunakan syarat $u(0,t) = 0$, diperoleh :

$$e^{-2\lambda^2 t} (A) = 0 \quad \text{atau} \quad A = 0$$

Berarti :

$$z(x,t) = B e^{-2\lambda^2 t} \sin \lambda x$$

Dengan menggunakan syarat $u(3,t) = 0$, diperoleh :

$$B e^{-2\lambda^2 t} \sin 3\lambda = 0$$

Jika $B = 0$ berarti penyelesaiannya akan identik dengan nol. Karena itu, haruslah :

$$\sin 3\lambda = 0 \quad \text{atau} \quad \lambda = \frac{n\pi}{3}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Diperoleh penyelesaian :

$$z(x,t) = B e^{-2n^2 \pi^2 t/9} \sin \frac{n\pi x}{3}$$

Berdasarkan prinsip superposisi, maka :

$$\begin{aligned} z(x,t) &= B_1 e^{-2n_1^2 \pi^2 t/9} \sin \frac{n_1 \pi x}{3} + B_2 e^{-2n_2^2 \pi^2 t/9} \sin \frac{n_2 \pi x}{3} \\ &\quad + B_3 e^{-2n_3^2 \pi^2 t/9} \sin \frac{n_3 \pi x}{3} \end{aligned}$$

juga merupakan suatu penyelesaian.

Selanjutnya, dengan syarat terakhir, didapatkan :

$$\begin{aligned} z(x,0) &= B_1 \sin \frac{n_1 \pi x}{3} + B_2 \sin \frac{n_2 \pi x}{3} + B_3 \sin \frac{n_3 \pi x}{3} \\ &= 5 \sin 4\pi x - 3 \sin 8\pi x + 2 \sin 10\pi x \end{aligned}$$

Dapat disimpulkan bahwa :

$$B_1 = 5, n_1 = 12, B_2 = -3, n_2 = 24, B_3 = 2, n_3 = 30$$

Maka penyelesaian masalah tersebut adalah :

$$\begin{aligned} z(x,t) &= 5e^{-32\pi^2 t} \sin 4\pi x - 3e^{-128\pi^2 t} \sin 8\pi x \\ &\quad + 2e^{-200\pi^2 t} \sin 10\pi x \end{aligned}$$

Penyelesaian tersebut menunjukkan temperatur batang pada suatu titik x dan pada saat t .

2. Getaran Pada Medium Berdimensi Satu

Persamaan getaran suatu medium berdimensi satu (misalnya : kabel, tali, senar gitar, dll.) yang kedua ujungnya terikat pada titik tetap dapat dinyatakan dengan persamaan diferensial parsial orde ke dua :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \quad \dots \quad (1)$$

dengan a^2 suatu konstanta.

Dalam hal ini :

$$a^2 = \frac{T}{\rho}$$

dimana :

T menyatakan tegangan dalam medium

ρ menyatakan massa per-satuan panjang medium

Variabel x menyatakan suatu titik pada medium dan t menyatakan waktu. Penyelesaian $z(x,t)$ dari persamaan diferensial parsial (1) menyatakan simpangan medium pada suatu titik x dan pada saat t .

Contoh 5.7 :

Sebuah senar sepanjang 50 cm dengan massa 5 gr yang kedua ujungnya terikat ditegangkan dengan gaya sebesar 400 Newton.

Senar tersebut digetarkan dengan menarik bagian tengahnya sehingga mempunyai simpangan sebesar 3 cm, kemudian dilepaskan tanpa diberi kecepatan awal.

Akan dicari simpangan senar pada suatu titik x dan pada saat t .

$$a^2 = \frac{T}{\rho} = \frac{400 \text{ N}}{\frac{0,005 \text{ kg}}{0,5 \text{ m}}} = 40000 \text{ m}^2/\text{dt}^2$$

Berarti harus dicari penyelesaian $z(x,t)$ dari persamaan

diferensial parsial :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = 40000 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

yang memenuhi syarat-syarat tertentu.

Karena kedua ujung senar terikat, berarti :

$$z(0,t) = z(0,5;t) = 0 \quad , \quad t \geq 0$$

Karena senar digetarkan dengan menarik bagian tengahnya sehingga mempunyai simpangan 3 cm, berarti :

$$z(x,0) = \begin{cases} \frac{0,03}{0,25} x = 0,12x & \text{untuk } 0 \leq x \leq 0,25 \\ \frac{0,03}{0,25} (0,5-x) = 0,12(0,5-x) & \text{untuk } 0,25 \leq x \leq 0,5 \end{cases}$$

Karena senar dilepas tanpa diberi kecepatan awal, berarti :

$$\left. \frac{\partial z}{\partial t} \right|_{t=0} = 0 \quad , \quad 0 \leq x \leq 0,5$$

Penyelesaian persamaan diferensial parsial tersebut akan dicari dengan Metode Pemisahan Variabel.

Dengan mengandaikan penyelesaiannya berbentuk :

$$z(x,t) = X(x)T(t)$$

dan dengan mensubstitusikan dalam persamaan diferensial parsial yang diketahui, diperoleh :

$$X(x)T''(t) = 40000X''(x)T(t)$$

Persamaan tersebut dapat ditulis dalam bentuk :

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{40000T(t)}$$

Andaikan ada suatu konstanta $-\lambda^2$ sedemikian sehingga :

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{40000T(t)} = -\lambda^2$$

Maka akan diperoleh dua persamaan diferensial biasa :

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0$$

$$T''(t) + 40000\lambda^2 T(t) = 0$$

Penyelesaian dari kedua persamaan tersebut berturut-turut adalah :

$$X(x) = A \cos \lambda x + B \sin \lambda x$$

$$T(t) = C \cos 200\lambda t + D \sin 200\lambda t$$

Selanjutnya :

$$\begin{aligned} z(x,t) &= X(x)T(t) \\ &= (A \cos \lambda x + B \sin \lambda x)(C \cos 200\lambda t + D \sin 200\lambda t) \end{aligned}$$

Dengan menggunakan syarat $z(0,t) = 0$, diperoleh :

$$A(C \cos 200\lambda t + D \sin 200\lambda t) = 0 \quad \text{atau} \quad A = 0$$

Berarti :

$$z(x,t) = B \sin \lambda x (C \cos 200\lambda t + D \sin 200\lambda t)$$

Dengan menggunakan syarat $z(0,5;t) = 0$, diperoleh :

$$B \sin \frac{1}{2} \lambda (C \cos 200\lambda t + D \sin 200\lambda t) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin \frac{1}{2} \lambda = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda = 2n\pi, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Selanjutnya, $z(x, t)$ dapat ditulis dalam bentuk :

$$z(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sin(2n\pi x) [a_n \cos(400n\pi t) + b_n \sin(400n\pi t)]$$

Dengan menggunakan syarat :

$$z(x, 0) = \begin{cases} 0,12x & \text{untuk } 0 \leq x \leq 0,25 \\ 0,12(0,5-x) & \text{untuk } 0,25 \leq x \leq 0,5 \end{cases}$$

diperoleh :

$$\begin{aligned} z(x, 0) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin(2n\pi x) \\ &= \begin{cases} 0,12x & \text{untuk } 0 \leq x \leq 0,25 \\ 0,12(0,5-x) & \text{untuk } 0,25 \leq x \leq 0,5 \end{cases} \end{aligned}$$

Dengan menggunakan Deret Fourier, diperoleh :

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{0,5} \left[\int_0^{0,25} 0,12x \sin(2n\pi x) dx + \int_{0,25}^{0,5} 0,12(0,5-x) \sin(2n\pi x) dx \right] \\ &= 0,48 \left[\frac{-x \cos(2n\pi x)}{2n\pi} + \frac{\sin(2n\pi x)}{(2n\pi)^2} \right]_0^{0,25} \\ &\quad - 0,24 \left[\frac{\cos(2n\pi x)}{2n\pi} \right]_{0,25}^{0,5} \\ &\quad + 0,48 \left[\frac{x \cos(2n\pi x)}{2n\pi} - \frac{\sin(2n\pi x)}{(2n\pi)^2} \right]_{0,25}^{0,5} \\ &= 0,96 \frac{\sin \frac{1}{2} n\pi}{(2n\pi)^2} \end{aligned}$$

$$= 0,24 \frac{\sin \frac{1}{2} n\pi}{n^2 \pi^2}, \quad n = 0,1,2, \dots$$

Untuk n genap, $\sin \frac{1}{2} n\pi = 0$

Jadi :

$$a_n = \frac{0,24(-1)^n}{\pi^2 (2n+1)^2}, \quad n = 0,1,2, \dots$$

Dengan menggunakan syarat $\left. \frac{\partial z}{\partial t} \right|_{t=0} = 0$, diperoleh :

$$\left. \frac{\partial z}{\partial t} \right|_{t=0} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n 400n\pi \sin(2n\pi x) = 0$$

Dengan menggunakan Deret Fourier, diperoleh :

$$b_n = \frac{2}{200n\pi} \int_0^{0,5} 0 \sin(2n\pi x) dx$$

$$b_n = 0, \quad n = 0,1,2, \dots$$

Maka penyelesaian masalah tersebut adalah :

$$z(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{0,24(-1)^n}{\pi^2 (2n+1)^2} \sin(2(2n+1)\pi x) \cos(400(2n+1)\pi t)$$

Penyelesaian tersebut menunjukkan simpangan senar pada suatu titik x dan pada saat t .

BAB VI

PENUTUP

Dalam skripsi ini dibahas tentang persamaan diferensial parsial kuasilinear orde pertama dengan dua variabel bebas, yang berbentuk :

$$P(x,y,z) \frac{\partial z}{\partial x} + Q(x,y,z) \frac{\partial z}{\partial y} = R(x,y,z) \quad \dots \quad (1)$$

dengan P dan Q tidak keduanya bernilai nol.

Penyelesaian persamaan diferensial parsial (1) dapat berupa penyelesaian umum, penyelesaian lengkap, atau penyelesaian khusus. Penyelesaian umum berbentuk $F(u,v)$ dengan $u = u(x,y,z)$ dan $v = v(x,y,z)$, sedangkan penyelesaian lengkap berbentuk $F(x,y,z,a,b)$ dengan a dan b parameter. Jika untuk parameter a dan b pada penyelesaian lengkap diberikan nilai tertentu atau dipilih suatu fungsi F tertentu pada penyelesaian umum, maka relasi yang diperoleh disebut penyelesaian khusus.

Ada beberapa metode untuk menyelesaikan persamaan diferensial parsial kuasilinear dengan dua variabel bebas. Metode yang relatif sederhana dan paling sering digunakan adalah Metode Karakteristik Lagrange. Penyelesaian yang diperoleh dengan metode ini adalah penyelesaian umum.

Masalah dalam metode ini terletak pada langkah penyelesaian persamaan bantuanya, yaitu :

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}$$

Asalkan dapat diperoleh dua penyelesaian dari persamaan bantu tersebut, metode ini dapat dikatakan mudah dan sederhana.

Metode yang lain adalah Metode Charpit, yang sebenarnya didasari oleh Metode Karakteristik Lagrange. Penyelesaian yang diperoleh berbentuk penyelesaian lengkap. Untuk menyelesaikan persamaan diferensial parsial kuasilinear dengan Metode Charpit ternyata lebih rumit dan kurang efisien jika dibandingkan dengan menggunakan Metode Karakteristik Lagrange. Metode Charpit akan lebih baik dan tepat digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial parsial non-linear.

Untuk menyelesaikan masalah nilai awal, yaitu persamaan diferensial parsial yang memenuhi syarat tertentu, dapat digunakan Metode Karakteristik. Dalam masalah-masalah kehidupan sehari-hari, penyelesaian persamaan diferensial parsial yang dicari biasanya bukan yang sangat umum tetapi yang memenuhi syarat-syarat tertentu, sehingga masalah nilai awal lebih sering dijumpai. Oleh karena itu, metode penyelesaian masalah

nilai awal ini penting untuk dikuasai.

Jika dalam persamaan diferensial parsial (1), P , Q , dan R merupakan konstanta atau cukup sederhana, maka masalah nilai awalnya dapat dengan lebih mudah diselesaikan dengan Metode Pemisahan Variabel. Penggunaan metode ini sangat terbatas karena jika P , Q , R memuat variabel-variabel atau bentuknya rumit, maka akan muncul kesulitan dalam memisahkan variabel-variabelnya dan dalam menyelesaikan persamaan diferensial parsial tersebut.

Pembahasan tentang persamaan diferensial parsial dalam skripsi ini sebenarnya barulah pada permukaannya dan masih sangat dangkal. Banyak masalah-masalah yang belum dapat dibahas oleh penulis karena keterbatasan pikiran, tenaga, dan waktu yang dimiliki.

Hal-hal tentang persamaan diferensial parsial kuasilinear orde pertama dengan n variabel, persamaan diferensial parsial non-linear, persamaan diferensial parsial dengan orde lebih tinggi, ataupun metode-metode penyelesaian persamaan diferensial parsial yang lain, seperti Metode Distribusi, Metode Numeris, dan lain-lain, tidak dijumpai dalam skripsi ini. Padahal, persamaan diferensial parsial merupakan cabang Matematika yang

sangat luas dan berkembang sangat pesat. Oleh karena itu, penulis menyarankan agar hal-hal tersebut dapat diteliti lebih lanjut, mengingat pentingnya persamaan diferensial parsial dalam menyelesaikan masalah-masalah dalam kehidupan nyata.





DAFTAR PUSTAKA

1. Andrews, Larry C., *Elementary Partial Differential Equations with Boundary Value Problem*, Florida : Academic Press, Inc., 1986
2. Ayres, Frank J.R., *Differential Equations*, Singapore : McGraw-Hill Book Company, 1988
3. Elsgolts, L., *Differential Equations and The Calculus of Variations*, Moscow : MIR Publisher, 1970
4. Feller, William, *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, Japan : John Wiley & Sons, Inc., 1961
5. Prasan, Phoolan & Ravindran, Renuka, *Partial Differential Equations*, New Delhi : Wiley Eastern Limited, 1985
6. Raisinghania, M.D., & Aggarwal, R.S., *Ordinary and Partial Differential Equations*, Ram Nagar - New Delhi : S. Chand & Company LTD, 1981
7. Sneddon, Ian N., *Elements of Partial Differential Equations*, New York : McGraw-Hill Book Co. Inc., 1957
8. Spiegel, Murray R., *Matematika Lanjutan untuk Para Insinyur dan Ilmuwan*, Jakarta : Penerbit Erlangga, 1989
9. Struik, Dirk J., *Differential Geometry*, Massachusetts : Addison-Wesley Publishing Company Inc., 1961
10. Susanta, B, Drs. & Soedijono, Bambang, Drs., *Model Matematik*, Jakarta : Penerbit Karunika Universitas Terbuka, 1989