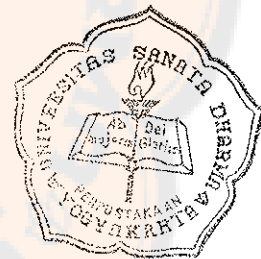
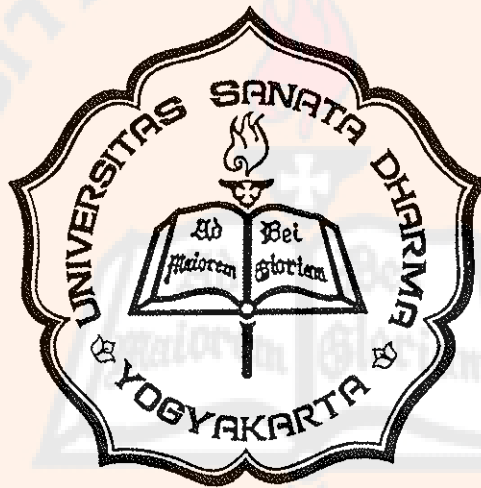


PERSAMAAN DIFERENSI

SKRIPSI

Diajukan Untuk Memenuhi Salah Satu Syarat
Memperoleh Gelar Sarjana Pendidikan
Program Studi Pendidikan
Matematika



Disusun Oleh :

Grace Triyani

NIM : 92 414 005

NIRM : 920052010501120005

PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA
JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
UNIVERSITAS SANATA DHARMA
YOGYAKARTA
1997

SKRIPSI

PERSAMAAN DIFERENSI

Oleh:

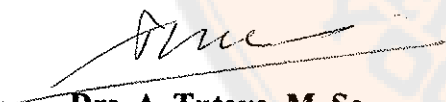
Grace Triyani

NIM: 92 414 005

NIRM: 920052010501120005

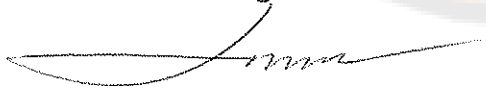
Telah Disetujui Oleh:

Pembimbing I


Drs. A. Tutoyo, M. Sc

tanggal: *26-7-1997*

Pembimbing II


Drs. St. Susento, M. Si

tanggal: *28-7-97*

SKRIPSI

PERSAMAAN DIFERENSI

Yang dipersiapkan dan disusun oleh

Grace Triyani

NIM : 92 414 005

NIRM : 920052010501120005

Telah dipertahankan di depan Panitia Penguji
pada tanggal : 16 Juli 1997
dan dinyatakan telah memenuhi syarat

SUSUNAN PANITIA

Nama lengkap

Tanda tangan

Ketua : Drs. F. Kartika Budi, M. Pd

Sekretaris : Dr. St. Suwarsono

Anggota : Drs.A.Tutoyo, M.Sc

Prof.Drs.R.Soemantri

Drs.St.Susento, M.Si

.....

.....

.....

.....

.....

Yogyakarta, 1 Agustus 1997

Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan
Universitas Sanata Dharma
Dekan FKIP



Dr. Paulus Suparno, S.J, MST



*Kupersembahkan untuk
Papi, Mami, Ci Susi, Koh Teguh,
Stephen, Ci Irma, dan
kekasihku Josef Trihandoko*

KATA PENGANTAR

Syukur dan puji bagi Tuhan Yang Maha Kasih atas rahmat dan kasih-Nya sehingga skripsi yang berjudul Persamaan Diferensi dapat terselesaikan.

Penyusunan skripsi ini dimaksudkan untuk memenuhi salah satu syarat memperoleh gelar Sarjana Pendidikan Program Studi Pendidikan Matematika di Jurusan Pendidikan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Sanata Dharma Yogyakarta.

Pada kesempatan ini, penyusun ingin mengucapkan terima kasih kepada :

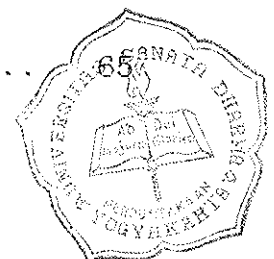
- Drs.A.Tutoyo,M.Sc selaku pembimbing I yang telah membimbing dan memberikan masukan yang berharga.
- Drs.St.Susento,M.Si selaku pembimbing II yang dengan teliti, sabar dan penuh pengertian membimbing dalam penyusunan skripsi ini.
- Bapak dan Ibu dosen yang telah membimbing dan mendidik penulis selama belajar di Universitas Sanata Dharma.
- Ibu Warni, Bapak Sunarjo dan Mas Sugeng yang dengan sabar membantu penyusun selama kuliah hingga menyelesaikan skripsi ini.

Akhirnya penulis menyadari, bahwa masih banyak kekurangan dan kelemahan dalam skripsi ini karenanya segala masukan dan saran yang membangun akan diterima dengan senang hati.

Penyusun

DAFTAR ISI

	HALAMAN
HALAMAN JUDUL.....	i
HALAMAN PERSETUJUAN PEMBIMBING.....	ii
HALAMAN PENGESAHAN.....	iii
HALAMAN PERSEMBAHAN.....	iv
KATA PENGANTAR.....	v
DAFTAR ISI.....	vi
ABSTRAK.....	viii
ABSTRACT.....	ix
BAB I PENDAHULUAN.....	1
BAB II MODEL MATEMATIKA DISKRIT.....	12
2.1 Variabel Diskrit.....	12
2.2 Fungsi Diskrit.....	15
2.3 Model Matematika Diskrit.....	16
BAB III PERSAMAAN DIFERENSI.....	26
3.1 Diferensi.....	26
3.2 Persamaan Diferensi.....	51
3.3 Penyelesaian Persamaan Diferensi.....	54
3.4 Teorema Eksistensi Dan Ketunggalan.....	58
BAB IV PERSAMAAN DIFERENSI LINEAR DENGAN KOEFSISIEN KONSTAN.....	62
4.1 Pengantar.....	62
4.2 Persamaan Diferensi Linear Homogen.....	65
4.2.1 Persamaan diferensi linear homogen orde-1.....	65



4.2.2 Persamaan diferensi linear	
homogen orde-2.....	73
4.3 Persamaan Diferensi Linear Non Homogen.....	87
4.3.1 Persamaan diferensi linear	
non homogen orde-1.....	87
4.3.2 Persamaan diferensi linear	
non homogen orde-2.....	92
4.4 Hubungan Persamaan Diferensial dengan	
Persamaan Diferensi.....	98
BAB V PENERAPAN PERSAMAAN DIFERENSI DALAM	
BIDANG EKONOMI.....	108
5.1 Penerapan Persamaan Diferensi	
Linear Orde-1 Dengan Koefisien Konstan.....	108
5.1.1 Bunga tunggal.....	108
5.1.2 Bunga majemuk.....	109
5.1.3 Pendapatan nasional (Model Harrod)...	110
5.2 Penerapan Persamaan Diferensi	
Linear Orde-2 Dengan Koefisien Konstan.....	112
5.2.1 Analisis persediaan (Model Metzler)..	112
5.2.2 Model interaksi Samuelson.....	116
BAB VI PENUTUP.....	119
DAFTAR PUSTAKA	

ABSTRAK

Suatu persamaan yang mengandung satu atau lebih diferensi-diferensi dinamakan persamaan diferensi. Bentuk umum persamaan diferensi biasa orde- n adalah

$$F(x, y_x, \Delta y_x, \Delta^2 y_x, \dots, \Delta^n y_x) = 0$$

atau dapat ditulis

$$f(x, y_x, y_{x+1}, y_{x+2}, \dots, y_{x+n}) = 0$$

Suatu persamaan diferensi yang mempunyai bentuk

$$y_{k+n} + a_1 y_{k+n-1} + \dots + a_{n-1} y_{k+1} + a_n y_k = r_k$$

dimana $a_1, a_2, \dots, a_n$ adalah konstanta-konstanta sebarang ($a_n \neq 0$) adalah persamaan diferensi linear baku orde- n dengan koefisien konstan, sedangkan jika $r_k = 0$ maka persamaan itu adalah persamaan diferensi linear homogen orde- n dengan koefisien konstan. Jika $n = 1$ maka persamaan di atas adalah persamaan diferensi baku linear orde-1 dengan koefisien konstan, sedangkan jika $n = 2$ maka persamaan di atas adalah persamaan diferensi linear baku orde-2 dengan koefisien konstan. Setiap fungsi y_k yang memenuhi persamaan diferensi yang diberikan disebut suatu penyelesaian persamaan diferensi itu.

Persamaan diferensi linear orde- n dengan koefisien konstan mempunyai satu dan hanya satu penyelesaian y yang bernilai pada n berturut-turut yang bergantung pada nilai k yang secara sebarang ditetapkan.

Peranan persamaan diferensi dalam bidang ekonomi misalnya untuk persamaan diferensi linear orde-1 yaitu bunga tunggal, bunga majemuk, dan pendapatan nasional (model Harrod) sedangkan untuk persamaan diferensi linear orde-2 yaitu analisis persediaan (model Metzler) dan model interaksi Samuelson.

ABSTRACT

A difference equation is an equation which consists of one or more differences. Generally, it is formulated as :

$$F(x, y_x, \Delta y_x, \Delta^2 y_x, \dots, \Delta^n y_x) = 0$$

or written as

$$f(x, y_x, y_{x+1}, y_{x+2}, \dots, y_{x+n}) = 0$$

A difference equation which is formulated as

$$y_{k+n} + a_1 y_{k+n-1} + \dots + a_{n-1} y_{k+1} + a_n y_k = r_k$$

in which $a_1, a_2, \dots, a_n$ are arbitrary constants ($a_n \neq 0$) is called the linear n th order difference equation with constant coefficients. When $r_k = 0$ it is called the linear homogenous n th order difference equation with constant coefficients. If $n = 1$ then that equation is called the linear first order difference equation with constant coefficients, however if $n = 2$ then that equation is called the linear second order difference equation with constant coefficients. Every function y_k which satisfies the difference equation given is called the solution of the difference equation.

The linear n th order difference equation with constant coefficients has one, and only one solution y for which values at n consecutive which also depends on k -values arbitrarily prescribed.

There are many examples of difference equation in economics. For examples, the linear first order difference equation is used for simple interest, compound interest, and national income (Harrod model), however the linear second order difference equation is used for inventory analysis (Metzler model) and Samuelson's interaction model.

BAB I

PENDAHULUAN

Dalam kehidupan sehari-hari masalah-masalah yang melibatkan variabel kontinu merupakan dasar bagi gagasan pemodelan matematika dengan persamaan diferensial. Misalnya dalam konteks waktu yang kontinu, pola perubahan suatu variabel y terhadap variabel waktu t diwujudkan dalam bentuk turunan $y'(t)$, $y''(t)$, dan seterusnya. Besar perubahan waktu yang terlibat di sini sangat kecil. Akan tetapi untuk masalah-masalah yang melibatkan variabel diskrit, pemodelan matematika dengan persamaan diferensial kurang cocok. Bila kita dihadapkan dengan waktu diskrit, maka variabel waktu t hanya diijinkan mengambil nilai berupa bilangan bulat. Dalam hal ini, akan lebih mudah untuk menafsirkan nilai t sebagai satu periode, misalnya $t = 1$ menunjukkan periode ke-1, $t = 2$ menunjukkan periode ke-2, dan seterusnya. Kemudian kita dapat menganggap y mempunyai nilai tunggal dalam tiap periode waktu. Namun, harus ditekankan, bahwa kata "periode" yang digunakan di sini bukan dalam pengertian kalender, tetapi dalam pengertian analitik. Oleh karena itu, misalkan dalam suatu model ekonomi, satu periode mungkin melibatkan lebih dari satu kalender waktu, tapi di saat lain berbeda sama sekali. Bahkan dalam model yang sama, secara berturut-turut setiap periode tidak perlu ditafsirkan dalam arti waktu kalender yang sama. Dalam

pengertian analitik, suatu periode hanyalah merupakan suatu jangka waktu yang berlaku sebelum variabel y mengalami suatu perubahan.

Ilustrasi bagi hal ini tampak misalnya dalam bidang ekonomi. Misalkan para ekonom ingin mendata pendapatan nasional. Biasanya tersedia interval-interval waktu yang secara keseluruhan di data setiap 1 bulan, 4 bulan, 1 tahun atau bahkan setiap 10 tahun, seperti halnya sensus nasional. Pada saat awal pengamatan, yaitu pada $t = 0$ dicatat besar pendapatannya. Demikian pula pada periode-periode berikutnya, yakni pada $t = 1$, $t = 2$, dan seterusnya. Akhirnya diperoleh data-data, lalu disusun dalam suatu tabel. Terlihat bahwa waktu pengamatan merupakan variabel diskrit.

Ilustrasi yang kedua diambil dalam bidang psikologi, yaitu berkaitan dengan eksperimen tentang situasi belajar suatu subyek. Suatu subyek diperkenalkan ke dalam situasi belajar yang disederhanakan yaitu (1) diberikan suatu rangsangan, (2) subyek mungkin bereaksi atau tidak bereaksi terhadap rangsangan, tetapi (3) jika subyek memberikan respon positif, maka subyek dengan suatu cara dianjurkan untuk tidak mengulangi respon ini. Dalam eksperimen ini sebagai contoh subyek diambil seekor tikus yang diletakkan dalam kotak yang kosong, dimana tikus tersebut tentu akan berlari ke sana ke mari untuk mencari makanan. Dianggap berlarnya tikus adalah suatu respon positif. Pada langkah berikutnya dihitung probabilitas

dari respon positif yang dilakukan oleh tikus. Percobaan berikutnya tikus tersebut diambil dan diletakkan kembali pada kotak yang sama. Dilihat apakah tikus itu masih berlari (bereaksi positif) sama seperti pertama kali dia diletakkan di dalam kotak. Demikian seterusnya, jika tikus masih memberikan respon positif maka percobaan diulangi kembali dengan prosedur yang sama. Eksperimen ini akan berhenti sampai tikus tidak memberikan respon positif lagi. Pada percobaan pertama tikus dianggap telah mempelajari situasi dari kotak, sehingga probabilitas dari percobaan ke- $n+1$ dari respon positif akan berkurang dari percobaan ke- n . Dalam hal ini, variabel diskritnya berupa banyaknya eksperimen yang dilakukan.

Ilustrasi yang ketiga, dalam bidang ekologi khususnya tentang populasi terhadap suatu spesies. Misalnya pada suatu cagar alam terdapat populasi suatu jenis kera. Untuk mengetahui perkembangan populasi kera tersebut diadakan pengamatan secara periodik dengan interval waktu tertentu. Di sini terlihat bahwa waktu pengamatan merupakan variabel diskrit.

Pada ilustrasi yang ketiga mengenai populasi suatu jenis kera, misalkan jika y menyatakan ukuran pada populasi sensus ke- t , maka kita dapat mendefinisikan suatu fungsi baru yang bernilai pada t berupa beda antara ukuran populasi dalam tahun ke- t dan tahun ke- $t+h$ dimana h berupa bilangan bulat non negatif. Jika fungsi baru itu ditulis Δy , maka $\Delta y_t = y_{t+h} - y_t$. Δy_t menyatakan

perubahan ukuran populasi diantara sensus ke- t dan sensus ke- $t+h$. Δy_t ini disebut diferensi pertama, sedangkan simbol Δ disebut operator diferensi, h disebut interval diferensi. Misalkan $h = 1$, maka $\Delta y_t = y_{t+1} - y_t$. Bagaimanakah halnya untuk diferensi yang kedua sampai diferensi yang ke- n ? Secara umum diferensi-diferensi tersebut dapat didefinisikan sebagai berikut :

$$\Delta^2 y_t = \Delta(\Delta y_t) = y_{t+2} - 2y_{t+1} + y_t ,$$

$$\Delta^3 y_t = \Delta(\Delta^2 y_t) = y_{t+3} - 3y_{t+2} + 3y_{t+1} - y_t ,$$

...

$$\Delta^n y_t = \Delta(\Delta^{n-1} y_t) = \sum_{r=0}^n (-1)^r \frac{n!}{r!(n-r)!} y_{t+n-r}$$

Simbol $\Delta^2 y_t$ disebut diferensi ke-2, $\Delta^3 y_t$ disebut diferensi ke-3 dan seterusnya sampai $\Delta^n y_t$ disebut diferensi ke- n .

Secara umum persamaan yang mengandung satu atau lebih diferensi-diferensi dinamakan persamaan diferensi. Bentuk umum persamaan diferensi biasa orde- n adalah

$$F(x, y_x, \Delta y_x, \Delta^2 y_x, \dots, \Delta^n y_x) = 0 ,$$

atau dapat ditulis

$$f(x, y_x, y_{x+1}, y_{x+2}, \dots, y_{x+n}) = 0$$

Orde persamaan diferensi adalah selisih antara subskrip yang tertinggi dan yang terendah dari y pada persamaan tersebut sedangkan derajat diferensi adalah pangkat tertinggi dari y .

CONTOH :

1. $y_{x+2} + 5y_{x+1} - 7y_x = 2x$ (orde 2, derajat 1)
2. $y_{x+2} + 5y_{x+1} = 2x$ (orde 1, derajat 1)
3. $3y_{x+5} + 5y_{x+1} = 0$ (orde 4, derajat 1)

Pada bab II untuk mengawali pembahasan tentang persamaan diferensi akan dibahas konsep-konsep dasar yang bersangkutan paut dengan model matematika diskrit.

Pada bab III pertama-tama akan dibahas tentang pengantar ke persamaan diferensi seperti operator diferensi (Δ), operator E, sifat-sifat dari Δ dan E, serta ekuivalensi antara Δ dan E. Selanjutnya dibahas tentang persamaan diferensi dan penyelesaian umumnya beserta syarat-syarat cukup bagi eksistensi dan ketunggalan penyelesaian persamaan diferensi.

Pada bab IV akan dibahas persamaan diferensi linear orde 1 dan orde 2 baik yang homogen maupun non homogen dengan koefisien konstan. Persamaan Diferensi biasa orde-n disebut linear dalam y jika persamaan diferensi dapat ditulis dalam bentuk :

$$f_k^{(0)} y_{k+n} + f_k^{(1)} y_{k+n-1} + \dots + f_k^{(n-1)} y_{k+1} + f_k^{(n)} y_k = g_k \quad (1)$$

dimana $f_k^{(0)}, f_k^{(1)}, \dots, f_k^{(n)}$ dan g adalah fungsi-fungsi dari k yang didefinisikan untuk $k = 0, 1, 2, \dots$

Jika koefisien-koefisien $f_k^{(0)}, f_k^{(1)}, \dots, f_k^{(n)}$ adalah fungsi konstan dengan $f_k^{(0)} \neq 0$ dan $f_k^{(n)} \neq 0$ maka dikatakan persamaan diferensi linear orde-n dengan koefisien konstan. Dalam hal $f_k^{(0)}, f_k^{(1)}, \dots, f_k^{(n)}$ konstan, jika $f_k^{(0)} \neq 0$ dan $f_k^{(n)} \neq 0$ maka kedua ruas persamaan (1)

dapat dibagi dengan $f^{(0)}$ dan diperoleh bentuk :

$$y_{k+n} + a_1 y_{k+n-1} + \dots + a_{n-1} y_{k+1} + a_n y_k = r(k) \quad (2)$$

dimana koefisien-koefisien $a_1, a_2, \dots, a_n$ adalah konstanta-konstanta sebarang dan r adalah sebarang fungsi yang didefinisikan untuk $k = 0, 1, 2, 3, \dots$.

Persamaan (2) disebut persamaan diferensi baku linear non homogen orde- n dengan koefisien konstan sedangkan jika ruas kanan persamaan (2) berharga nol maka akan diperoleh persamaan :

$$y_{k+n} + a_1 y_{k+n-1} + \dots + a_{n-1} y_{k+1} + a_n y_k = 0, \quad (3)$$

yang disebut persamaan diferensi baku linear homogen orde- n dengan koefisien konstan. Akhirnya akan dibahas tentang hubungan persamaan diferensial dengan persamaan diferensi.

Bab V akan membicarakan penerapan persamaan diferensi. Penerapan persamaan diferensi banyak terlihat antara lain dalam bidang sosial. Pada skripsi ini penulis ingin menyoroti penerapannya di bidang ekonomi. Banyak data dalam ekonomi yang bersangkutan dengan selang waktu atau periode tertentu, misalnya suku bunga sebulan, gaji sebulan, jatah yang dibeli, dijual atau diproduksi sebulan, pendapatan, tabungan, investasi, dan konsumsi nasional dalam setahun. Dalam bab V ini penulis membatasi diri pada penerapan persamaan diferensi pada masalah-masalah mengenai bunga tunggal, bunga majemuk, pendapatan nasional (model Harrod), analisis persediaan dan pendapatan nasional (model interaksi Samuelson).

Secara umum bunga tunggal adalah bunga yang dihitung pada modal awal untuk jangka waktu penggunaan modal. Andaikan modal mula-mula yang diinvestasikan diberikan suku bunga tunggal, maka pada sebarang keadaan, jumlah modal sama dengan modal periode sebelumnya ditambah bunga yang didapat dari modal mula-mula yang diinvestasikan.

Jika P_0 adalah modal mula-mula yang diinvestasikan dengan bunga tunggal sebesar $\frac{r}{100}$, dan jika P_n menyatakan jumlah modal setelah periode ke- n , maka berlaku rumus bunga tunggal : $P_n = P_0 + n \frac{r}{100} P_0$.

Dalam pembahasan, berdasarkan rumus ini akan diturunkan hubungan antara P_{n+1} dan P_n , sebagai berikut :

$$P_{n+1} - P_n = \frac{r}{100} P_0.$$

Tampak bahwa persamaan ini merupakan persamaan diferensi linear non homogen orde-1.

Dalam hal bunga majemuk, selama jangka waktu tertentu bunga yang dikenakan pada modal ditambahkan ke pokoknya, yang kemudian menjadi pokok yang baru untuk perhitungan masa berikutnya. Andaikan modal mula-mula diinvestasikan dengan suku bunga majemuk, maka pada sebarang keadaan, jumlah modal sama dengan modal satu periode pertama ditambah bunga yang didapat pada seluruh modal yang ada pada satu periode pertama.

Andaikan P_0 adalah modal mula-mula yang diinvestasikan dengan bunga majemuk sebesar $\frac{r}{100}$. Andaikan pula P_n menyatakan jumlah modal pada akhir periode ke- n . Dalam hal ini berlaku rumus bunga majemuk : $P_n = P_0 \left(1 + \frac{r}{100}\right)^n$.

Dalam pembahasan, dari rumus ini akan diturunkan hubungan antara P_{n+1} dan P_n sebagai berikut :

$$P_{n+1} - \left(1 + \frac{r}{100}\right) P_n = 0 ,$$

yang merupakan persamaan diferensi linear homogen orde-1.

Dinamika ekonomi merupakan bagian dari ekonomi yang mempelajari tentang pergerakan dan perubahan sistem ekonomi terhadap waktu. Sistem disini diartikan sebagai cara untuk mengatur dan mengkoordinasi kegiatan ekonomi, antara lain seperti suatu pasar, perusahaan, perdagangan. Aspek-aspek yang dianalisis dalam dinamika ekonomi antara lain penawaran dan permintaan suatu barang, pertumbuhan ekonomi dengan faktor penyebabnya pendapatan nasional serta ekspor dan impor suatu barang atau jasa.

Dalam perekonomian sederhana pendapatan nasional terdiri dari 2 aspek yaitu konsumsi dan investasi. Karena itu perhitungan pendapatan nasionalnya sama dengan konsumsi ditambah dengan investasi. Model ini diusulkan oleh R.F Harrod. Andaikan fungsi Y , C , dan I yang nilainya berturut-turut menyatakan besarnya pendapatan nasional, konsumsi dan investasi yang masing-masing bergantung pada waktu t yang bernilai diskrit, maka pada setiap waktu t , nilai-nilai fungsi Y , C dan I dinotasikan dengan Y_t , C_t dan I_t . Secara matematis perhitungan pendapatan nasional dinyatakan dengan :

$$Y_t = C_t + I_t , \quad t = 0,1,2,\dots . \quad (4)$$

Besarnya konsumsi yang disediakan bergantung pada besarnya pendapatan nasional. Andaikan fungsi konsumsi

linear, maka fungsi konsumsi dapat ditulis sebagai:

$$C_t = c + m Y_t, \quad , c \geq 0, t = 0,1,2,\dots, \quad (5)$$

dimana c adalah konstanta sebarang dan $0 < m < 1$. Apabila $Y_t = 0$, maka konsumsi menjadi sebesar c , sedangkan m merupakan gradien fungsi yang menunjukkan apa yang dinamakan hasrat konsumsi marginal.

Selanjutnya diasumsikan terdapat konstanta yang disebut faktor tumbuh, dinotasikan dengan r , dengan

$$\Delta Y_t = Y_{t-1} - Y_t = r I_t, \quad r > 0, t = 0,1,2,\dots. \quad (6)$$

Dengan demikian dari persamaan-persamaan (4 - 6) diperoleh hubungan :

$$Y_{t+1} = [1 + r(1 - m)] Y_t - rc, \quad t = 0,1,2,\dots \quad (7)$$

Persamaan terakhir ini tak lain adalah persamaan diferensi linear non homogen orde-1 dengan koefisien konstan yang dipenuhi oleh fungsi pendapatan nasional Y_t .

Penerapan persamaan diferensi selanjutnya berkaitan dengan analisis persediaan. Pada analisis persediaan akan dibuat suatu model matematik dimana pengusaha mempunyai tujuan untuk menjual produksi barang-barang konsumsi dan mempertahankan mutu persediaan agar tetap yang terbaik. Model ini diusulkan pertama kali oleh L. A Metzler pada tahun 1941.

Pada kenyataannya jumlah pendapatan total dalam setiap periode sama dengan jumlah dari nilai barang-barang konsumsi ditambah investasi netto. Andaikan U_t adalah jumlah dari nilai barang-barang konsumsi yang diproduksi untuk dijual dalam periode t , S_t adalah

jumlah dari nilai barang-barang konsumsi yang diproduksi untuk persediaan dalam periode t . Jika Y_t adalah pendapatan total yang diperoleh dalam periode t , maka berlaku hubungan :

$$Y_t = U_t + S_t + V_0, \quad t = 0, 1, 2, \dots, \quad (8)$$

dimana V_0 merupakan bilangan konstan yang disebut investasi netto.

Di dalam pembahasan analisis persediaan dikenal hubungan :

$$U_t = \beta Y_{t-1}, \quad t = 1, 2, 3, \dots \quad (9)$$

dan,

$$S_t = \beta Y_{t-1} - \beta Y_{t-2}, \quad t = 2, 3, \dots, \quad (10)$$

dimana β adalah hasrat konsumsi marginal ($0 < \beta < 1$).

Dari persamaan (8 - 10) diperoleh persamaan diferensi untuk pendapatan Y_t yaitu

$$Y_t - 2\beta Y_{t-1} + \beta Y_{t-2} = V_0, \quad t = 2, 3, \dots \quad (11)$$

Jika persamaan diferensi di atas didefinisikan untuk nilai t mulai dari $t = 0$, maka persamaan (11) ekuivalen dengan :

$$Y_{t+2} - 2\beta Y_{t+1} + \beta Y_t = V_0, \quad t = 0, 1, \dots \quad (12)$$

Persamaan terakhir ini adalah persamaan diferensi linear non homogen orde-2 dengan koefisien konstan.

Penerapan yang terakhir adalah model Interaksi dari P.A Samuelson. Model ini juga membahas tentang analisis pendapatan nasional seperti model yang diusulkan oleh R.F Harrod tetapi model interaksi ini menganalisis pendapatan nasional pada perekonomian tertutup. Sedangkan pada

perekonomian sederhana meliputi dua aspek yaitu konsumsi dan investasi, maka pada perekonomian tertutup meliputi tiga aspek yaitu konsumsi, investasi dan pengeluaran pemerintah.

Sehingga secara matematis diperoleh

$$Y_t = C_t + I_t + G_t \quad (13)$$

dimana Y, C, I , dan G berturut-turut menyatakan pendapatan nasional, konsumsi, investasi dan pengeluaran pemerintah yang masing-masing bergantung pada waktu t yang bernilai diskrit. Pengeluaran pemerintah G_t oleh Samuelson dianggap konstan pada sebarang keadaan dengan $G_t = 1$.

Selanjutnya di dalam pembahasan terdapat hubungan :

$$C_t = \alpha Y_{t-1} \quad (14)$$

$$I_t = \beta [C_t - C_{t-1}] \quad (15)$$

$$Y_0 = y_0 \quad (16)$$

$$Y_1 = y_1 \quad (17)$$

$$\alpha > 0, \beta > 0$$

Kemudian dengan mensubstitusikan persamaan (14) dan (15) ke dalam persamaan (13) diperoleh hubungan :

$$Y_t - \alpha(1+\beta)Y_{t-1} + \beta\alpha Y_{t-2} = 1, \quad t = 2, 3, \dots \quad (19)$$

atau

$$Y_{t+2} - \alpha(1+\beta)Y_{t+1} + \beta\alpha Y_t = 1, \quad t = 0, 1, \dots \quad (20)$$

Persamaan ini adalah persamaan diferensi linear non homogen orde-2 dengan koefisien konstan.

Pada akhir penulisan ini akan diberikan beberapa kesimpulan yang berkaitan dengan pembahasan persamaan diferensi pada bab-bab sebelumnya.

BAB II

MODEL MATEMATIKA DISKRIT

Dalam bab II ini akan dibahas beberapa pengertian dasar yang bersangkutan paut dengan model matematika diskrit. Salah satu alasan mempelajari matematika adalah agar matematika dapat membantu kita untuk menyelesaikan masalah-masalah dalam dunia real. Untuk dapat menggunakan atau menerapkan matematika dengan baik maka penyusunan model matematikalah yang menjadi kunci utamanya. Perhatian khusus kita pada saat ini adalah proses pembentukan model matematika yang menyangkut diferensi, karena itu perlu mempelajari konsep-konsep dasar dari model matematika diskrit.

2.1. Variabel diskrit

DEFINISI 2.1.1 (Himpunan semesta) Himpunan semesta adalah himpunan semua elemen yang dibahas dalam suatu pembicaraan.

DEFINISI 2.1.2 (Variabel) variabel adalah lambang yang mewakili setiap anggota dalam suatu himpunan. Himpunan ini dinamakan domain variabel itu. Jika wakil itu dinotasikan dengan x , maka x merupakan wakil dari setiap anggota dalam suatu himpunan, sedangkan jika x menunjuk pada anggota tertentu dari suatu himpunan maka anggota tertentu itu disebut konstanta.

Variabel merupakan konsep yang penting dalam bahasa matematika, dan digunakan dalam berbagai situasi. Dalam kalimat terbuka, sering ditunjukkan dengan lambang-lambang seperti x dalam kalimat terbuka seperti " $x^2 - 3x + 1 = 0$ " atau lambang x dan y dalam kalimat " $x+y$ lebih besar dari $x-y$ ". Suatu variabel dapat juga dilambangkan dengan kotak dalam kalimat terbuka seperti $\square + 2 = 5$, kalimat terbuka ini akan bernilai benar bila kotak yang kosong diisi dengan suatu konstanta misalnya 3. Variabel juga muncul dalam rumus-rumus matematika.

CONTOH 2.1.1.1 Suatu himpunan yang anggota-anggotanya memenuhi suatu sifat tertentu, sebut P , dinotasikan dengan

$$S = \{x | x \text{ mempunyai sifat } P\}$$

S adalah himpunan dari semua anggota x sedemikian hingga x mempunyai sifat P . Huruf x , menyatakan variabel dari himpunan S . S adalah himpunan semesta.

CONTOH 2.1.1.2 $\mathbb{Z}^+ = \{x | x \in \mathbb{Z} \text{ dan } x \geq 1\}$, dengan $\mathbb{Z}^+$ adalah himpunan semua bilangan bulat positif, huruf x merupakan suatu variabel dan $\mathbb{Z}^+$ adalah himpunan semesta.

CONTOH 2.1.1.3 Rumus untuk mencari luas suatu lingkaran adalah $L = \pi R^2$. Rumus ini dapat digunakan untuk mencari luas lingkaran sebarang, untuk berbagai nilai R diketahui. Dalam rumus ini variabelnya adalah R

yang disebut variabel bebas dan L juga variabel yang disebut variabel tak bebas.

DEFINISI 2.1.3. Diambil himpunan semesta himpunan semua bilangan real $\mathbb{R}$. Diberikan himpunan $E \subset \mathbb{R}$. Titik $p \in E$ dinamakan titik terasing himpunan E jika terdapat suatu selang terbuka I yang memuat p sehingga $I \cap E = \{p\}$. Himpunan $E \subset \mathbb{R}$ dinamakan himpunan diskrit jika semua anggota E adalah titik terasing, dan dinamakan himpunan kontinu jika E tidak memuat titik terasing. Jadi suatu variabel x dikatakan diskrit jika x adalah anggota dari himpunan diskrit, sedangkan x dikatakan kontinu jika x adalah anggota dari himpunan kontinu.

CONTOH 2.1.3.1 $S = \{x | x \geq 0, x \in \mathbb{R}\}$, x merupakan variabel kontinu.

CONTOH 2.1.3.2 $B = \{x | x^2 + x - 6 \geq 0, x \in \mathbb{R}\}$, x merupakan variabel kontinu.

CONTOH 2.1.3.3 Pada bab I dalam ilustrasi yang pertama, waktu pengamatan terhadap besar pendapatan merupakan variabel diskrit, dalam ilustrasi yang kedua variabel diskritnya berupa banyaknya eksperimen yang dilakukan, sedangkan dalam ilustrasi yang ketiga waktu pengamatan terhadap perkembangan populasi merupakan variabel diskrit.

2.2 Fungsi diskrit

DEFINISI 2.2.1 Andaikan A dan B adalah himpunan-himpunan yang tidak kosong. Suatu aturan yang mengawankan setiap elemen dalam himpunan A dengan tepat satu elemen dalam himpunan B disebut fungsi dari A ke B .

Fungsi dari A ke B dinotasikan dengan $f : A \rightarrow B$. Dalam hal ini himpunan A disebut daerah asal dan himpunan B disebut daerah kawan, sedangkan $f(A) = \{y | y = f(x), x \in A, y \in B\}$ dinamakan daerah hasil. Jika oleh fungsi f elemen $x \in A$ dikawankan dengan elemen $y \in B$, maka y disebut nilai fungsi f dari x , dan diberi notasi $y = f(x)$ atau $y = f_x$. Variabel-variabel x dan y tersebut masing-masing sering dinamakan variabel bebas dan variabel tak bebas.

CONTOH 2.2.1 $y = x^2 - 5x + 2$ merupakan suatu fungsi sebab jika $x = 0, 1, 2, -1$ maka secara berturut-turut nilai $y = 2, -2, -4, 8$ tetapi $y^2 = x$ bukan fungsi sebab menghasilkan 2 nilai untuk x positif.

DEFINISI 2.2.2 (Fungsi kontinu) Fungsi f dikatakan kontinu pada daerah asal jika f kontinu di setiap titik daerah asal itu.

$$f : E \rightarrow \mathbb{R}, E \subset \mathbb{R}, p \in E$$

Sedangkan suatu fungsi f kontinu pada suatu titik p jika $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in E, |x-p| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(p)| < \varepsilon)$.

CONTOH 2.2.2.1 $f(x) = \cos x$ kontinu pada setiap x dalam himpunan bilangan real.

CONTOH 2.2.2.2 Setiap fungsi polinom f dalam x , dengan $f_x = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ kontinu pada $\mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

DEFINISI 2.2.3 (FUNGSI DISKRIT) Fungsi f dikatakan diskrit jika daerah asal fungsi merupakan himpunan diskrit.

CONTOH 2.2.3 Pada Bab I, dalam ilustrasi yang pertama fungsi diskritnya adalah pendapatan nasional dalam periode ke- t dimana t anggota dari himpunan bilangan bulat positif. Dalam ilustrasi yang kedua fungsi diskritnya adalah probabilitas dari respon positif ke- n , dimana n anggota dari himpunan bilangan bulat positif. Sedangkan pada ilustrasi yang ketiga fungsi diskritnya adalah populasi suatu jenis kera pada periode ke- n dengan n anggota dari himpunan bilangan bulat positif.

2.3. Model matematika diskrit

2.3.1 Model

Di jaman modern ini terjadi perkembangan yang mencolok dalam penerapan analisis matematika. Bila dulu yang dimaksudkan dengan matematika terapan biasanya terbatas pada penerapan matematika dalam bidang fisika

dan teknik, tetapi sekarang matematika sudah banyak diterapkan dalam bidang ekonomi, biologi, farmasi, geografi, bahkan sosiologi dan psikologi.

Untuk dapat menerapkan atau menggunakan matematika secara baik, maka perlu penyusunan suatu model matematika. Masalah-masalah dalam kehidupan nyata adalah sangat kompleks. Untuk setiap masalah perlu diusahakan penyelesaiannya. Salah satu cara penyelesaiannya yaitu dengan menerjemahkan masalah tersebut dalam bahasa matematika.

DEFINISI 2.3.1.1 (Model) Model adalah gambaran (perwakilan) suatu obyek yang disusun dengan tujuan tertentu.

Obyek di sini dapat berupa suatu sistem, suatu perilaku sistem, atau suatu proses tertentu. Dalam pembicaraan ini yang dimaksud dengan sistem adalah suatu himpunan beserta relasi antar unsur-unsurnya yang disusun dengan tujuan tertentu.

Misalnya suatu rumah sakit adalah suatu sistem yang bertujuan merawat orang sakit. Semua bagian rumah sakit harus berfungsi mendukung tujuan di atas. Suatu perguruan tinggi adalah suatu sistem dan akan menjadi sub sistem dari sistem pendidikan tingkat nasional. Tubuh manusia adalah suatu sistem biologi yang paling rumit.

CONTOH 2.3.1.1.1 Suatu biro arsitektur yang merencanakan pembangunan suatu kompleks akan membuat gambar-gambar sketsa, menyusun perhitungan-perhitungan konstruksi kemudian membuat maket yang memberikan suatu gambaran yang tujuannya untuk memperlihatkan bentuk dan posisi bangunan yang akan dibangun.

CONTOH 2.3.1.1.2 Pembuatan suatu peta daerah yang memperlihatkan benda-benda dipermukaan bumi, misalnya garis utuh untuk menandai jalan raya, garis tebal putus-putus untuk batas daerah, warna yang berbeda untuk membedakan sifat geologis tanah, dan sebagainya.

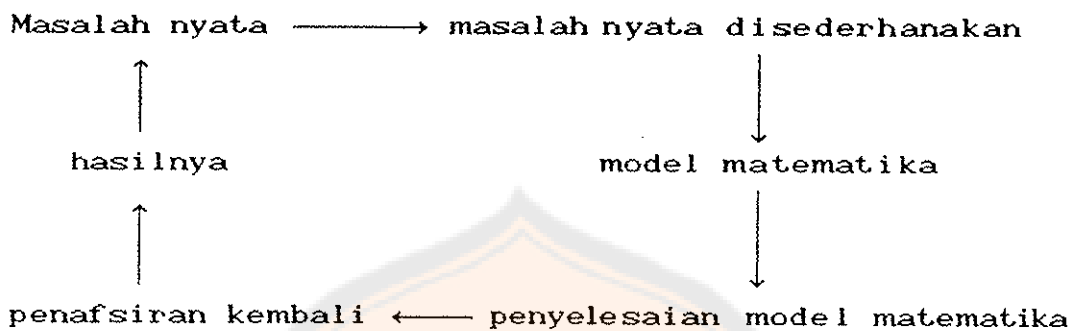
Model adalah suatu tiruan dari suatu obyek dengan tujuan tertentu. Dari model ini dapat lebih mudah untuk dikenali, dipelajari, dan dimanipulasi lebih lanjut.

2.3.2 Model matematika

DEFINISI 2.3.2.1 (Model matematika) Suatu model yang menggunakan lambang-lambang (simbol) matematika untuk menyajikan perilaku obyek disebut model matematika.

Untuk selanjutnya yang akan dibahas hanya model matematika dari suatu obyek.

2.3.2.1 Langkah-langkah penyusunan model matematika



langkah-langkah penyusunan model matematika adalah sebagai berikut :

1. Temukan masalah yang sesungguhnya dan adakan penyederhanaan. Secara umum penyederhanaan dapat berupa :
 - a. Pengabaian beberapa faktor yang kurang relevan dengan masalahnya.
 - b. Anggapan-anggapan, misalnya relasi yang tidak linear dianggap linear, variabel yang kontinu dianggap diskrit, bilangan yang cukup kecil dianggap nol, yang berubah dianggap tetap, suatu fungsi diganti dengan fungsi lain yang dekat dengan fungsi semula supaya mudah diselesaikan, dan sebagainya.
2. Rumuskan masalah dalam bahasa matematika.

Pada langkah ini semua variabel-variabel, konstanta-konstanta dan relasinya dinyatakan dengan lambang matematika dan dicoba untuk mengenali pola masalah matematika mana yang sesuai dengan masalah tersebut.

3. Selesaikan masalah dalam model dengan alat matematika yang sesuai. Alat matematika di sini misalnya aljabar, grafik fungsi, kalkulus, persamaan diferensial, persamaan diferensi, peluang, statistik, dan sebagainya.

4. Tafsirkan kembali.

Sesudah penyelesaian secara matematika diperoleh, hasilnya harus ditafsirkan kembali.

5. Kaji penyelesaiannya.

Hasil penafsiran kembali perlu dikaji apakah cukup valid dalam sistemnya semula. Hal ini dapat dikerjakan antara lain dengan cara mengadakan percobaan-percobaan atau suatu simulasi. Bila ternyata bahwa hasil ini jauh menyimpang maka mungkin harus dikembalikan ke langkah 1 atau 2.

2.3.2.2 Jenis-jenis model

Berdasarkan tujuannya model dapat dibedakan menjadi :

- a. Model keterkaitan, yaitu model yang tujuannya untuk mengenali keadaan, sifat, atau perilaku sistem dengan cara mencari keterkaitan antara unsur-unsurnya.
- b. Model pendugaan, yaitu model yang tujuannya untuk mengadakan pendugaan (untuk memperbaiki keadaan obyek).
- c. Model optimisasi, yaitu model yang tujuannya mengadakan optimisasi bagi obyek.

Berdasarkan segi penyajiannya model dibedakan menjadi :

- a. Model deskriptif, yaitu model yang menggambarkan keadaan obyek seperti apa adanya. Yang merupakan model deskriptif yaitu model keterkaitan dan model pendugaan.
- b. Model preskriptif, yaitu model yang memberikan gambaran obyek sesuai dengan harapan kita. Model optimisasi merupakan model preskriptif.

Berdasarkan sifatnya model dibedakan menjadi :

- a. Model deterministik dan model probabilistik. Suatu model disebut deterministik jika dengan diketahuinya informasi yang lengkap mengenai obyek pada suatu saat tertentu akan memberi jalan untuk diketahuinya keadaan obyek pada masa mendatang secara pasti, sebaliknya dengan model probabilistik meskipun keadaan obyek pada saat sekarang diketahui dengan pasti namun model tidak mampu memberi informasi keadaan obyek pada masa mendatang secara pasti.
- b. Model kontinu dan model diskrit.
Suatu model disebut kontinu jika variabelnya merupakan variabel kontinu, sebaliknya model diskrit jika variabelnya merupakan variabel diskrit.

Pada pembahasan selanjutnya hanya akan dibicarakan mengenai model matematika diskrit. Untuk selanjutnya model matematika diskrit kita sebut model diskrit. Model diskrit dapat berupa persamaan matriks, model optimisasi,

persamaan diferensi yang variabel bebasnya berupa himpunan bilangan bulat.

Dalam skripsi ini hanya akan dibahas model matematika diskrit. Berikut ini akan diberikan beberapa contoh model diskrit.

CONTOH 2.3.2.1 (Pendapatan nasional) Dalam perekonomian sederhana pendapatan nasional terdiri dari 2 komponen yaitu konsumsi dan investasi. Dalam Bab I telah disinggung perhitungan pendapatan nasional dinyatakan dengan $Y_t = C_t + I_t$, $t = 0, 1, 2, \dots$.

Berdasarkan tujuannya model ini merupakan model keterkaitan. Berdasarkan segi penyajiannya, merupakan model deskriptif, sedangkan berdasarkan sifatnya merupakan model deterministik dan model diskrit.

CONTOH 2.3.2.2 (Eksperimen tentang situasi belajar suatu subyek). Misalkan subyek yang kita ambil adalah seekor tikus (ilustrasi kedua dalam bab I). Andaikan kita anggap probabilitas awal dari respon positif sebelum percobaan pertama adalah 1, maka kita notasikan $P_0 = 1$. Jika probabilitas berubah dari percobaan ke percobaan, maka kita harus menetapkan cara-cara yang bervariasi. Misalkan kita menginginkan probabilitas berkurang bersamaan dengan belajarnya subyek terhadap situasi, kita anggap bahwa $(P_{n+1} - P_n)$ menjadi negatif untuk $n = 0, 1, 2, \dots$. Jika dinyatakan dalam notasi $\Delta P_n = P_{n+1} - P_n$

sebagai selisih probabilitas dari respon positif dalam percobaan ke- n dan ke- $n+1$, maka dapat kita notasikan sebagai :

$$(i) \Delta P_n < 0, n = 0,1,2,\dots$$

Andaikan probabilitas respon positif dalam berbagai percobaan adalah pecahan tertentu (sebut β) dari probabilitas respon positif dalam percobaan sebelumnya, maka dapat dinotasikan sebagai $P_1 = \beta P_0$, $P_2 = \beta P_1, \dots$ atau

$$(ii) P_{n+1} = \beta P_n, n = 0,1,2,\dots$$

Karena probabilitas harus tetap antara 0 dan 1, maka

$$(iii) 0 < \beta < 1$$

Dari (ii) diperoleh bentuk,

$$P_{n+1} - P_n = \beta P_n - P_n = (1-\beta)(-P_n)$$

atau

$$(iv) \Delta P_n = (1-\beta)(-P_n)$$

Persamaan (iv) dapat diterjemahkan sebagai berikut : pengurangan sebenarnya dalam probabilitas berasal dari perubahan dari suatu percobaan ke percobaan selanjutnya (ΔP_n), $(1-\beta)$ adalah suatu pecahan tertentu, sedangkan dari kemungkinan pengurangan maksimal $(-P_n)$, jika probabilitas adalah P_n dan tidak akan kurang dari 0, maka kemungkinan pengurangan maksimal adalah $0 - P_n$ atau $-P_n$. Berdasarkan tujuannya model di atas merupakan model pendugaan, dari segi penyajiannya termasuk model deskriptif, sedangkan berdasarkan sifatnya termasuk model probabilistik dan model diskrit.

CONTOH 2.3.2.3 (Perkembangan populasi, B.Susanta, 1989, hal 1.3) Sebuah negara kecil yang baru berkembang mengadakan sensus penduduknya setiap tahun dan diperoleh hasil sebagai berikut :

Tahun	Besar Populasi
1988	5.405.280
1989	5.630.542
1990	5.856.122
1991	6.089.243
1992	6.333.721
1993	6.586.112
1994	6.850.125

Sesudah data diolah maka ditemukan bahwa besar populasi selama 6 tahun terakhir ini mengikuti hubungan yang kurang lebih berbunyi:

$$P = 5.405.280 (1+0,04)^t$$

$$= 5.405.280 (1,04)^t$$

dengan P : besar populasi

t : banyak tahun dihitung dari tahun 1988

Ini berarti bahwa setiap tahun populasi bertambah $\frac{4}{100}$ dan ini merisaukan pimpinan negara, karena kalau keadaan berlanjut maka pada tahun 2000 populasi sudah mencapai lebih dari delapan setengah juta yang akan terlalu besar dibandingkan dengan kemampuan pengadaan pangan oleh negara. Pimpinan lalu berpikir untuk mengadakan undang-undang pembatasan kelahiran. Model ini merupakan model diskrit karena variabel t bernilai pada bilangan bulat.

Berdasarkan tujuannya model ini merupakan model pendugaan, dari segi penyajiannya termasuk model deskriptif, sedangkan berdasarkan sifatnya merupakan

model deterministik dan model diskrit.

Dari ketiga contoh diatas terlihat bahwa suatu model disebut model diskrit bila variabel bebas dalam model bernilai bilangan bulat.



BAB III

PERSAMAAN DIFERENSI

3.1 Diferensi

3.1.1 Operator diferensi (Δ)

DEFINISI 3.1.1.1 Andaikan diberikan suatu fungsi diskrit y dan h suatu konstanta positif, maka Δy adalah diferensi pertama dari y sebagai fungsi baru yang bernilai pada x dinotasikan dengan $\Delta y(x)$ atau Δy_x , diperoleh :

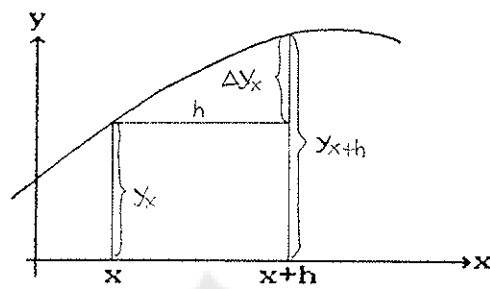
$$\Delta y_x = y_{x+h} - y_x \quad (1.1)$$

Simbol Δ dinotasikan sebagai operator diferensi, jika Δ dioperasikan pada fungsi y , maka dihasilkan fungsi baru Δy . Sedangkan h disebut interval diferensi.

CONTOH 3.1.1.1.1 Jika diberikan fungsi sederhana $y_x = x$, maka dengan menggunakan (1.1) diperoleh $\Delta y_x = \Delta x = (x+h) - x = h$. Karena alasan ini, interval diferensi seringkali dinotasikan dengan Δx .

Dalam gambar 1.1 terlihat perpindahan x ke $x+h$ dalam domain dari y , nilai dari y berubah dari y_x ke y_{x+h} .

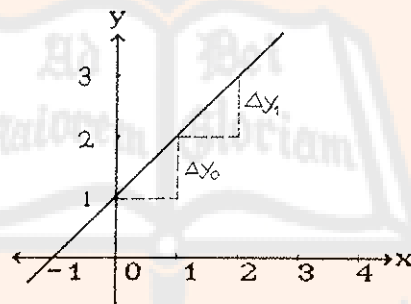
Diferensi pertama dari y diinterpretasikan sebagai fungsi yang bernilai pada x yang mengalami pertambahan atau perubahan dalam y yang dapat disamakan dengan pertambahan h (atau Δx) dalam x .



gambar 1.1

CONTOH 3.1.1.1.2 Jika y ditentukan dengan $y_x = x+1$, dan andaikan diambil interval diferensi $h = 1$, maka nilai Δy yang dihasilkan adalah :

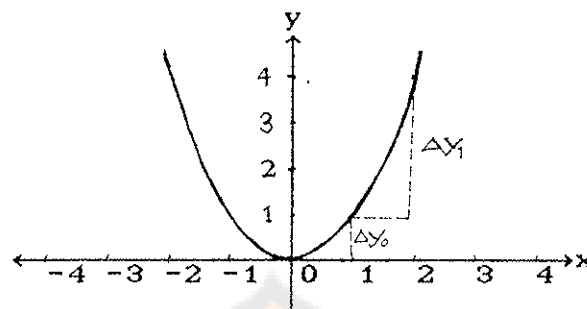
$$\begin{aligned}\Delta y_x &= y_{x+1} - y_x = x+2 - (x+1) \\ &= x+2-x-1 \\ &= 1\end{aligned}$$



gambar 1.2

CONTOH 3.1.1.1.3 Jika y ditentukan dengan $y_x = x^2$, dan andaikan diambil interval diferensi $h = 1$, maka nilai dari Δy yang dihasilkan adalah :

$$\begin{aligned}\Delta y_x &= y_{x+1} - y_x \\ &= (x+1)^2 - x^2 \\ &= x^2 + 2x + 1 - x^2 \\ &= 2x + 1\end{aligned}$$



gambar 1.3

Dengan prosedur yang sama jika Δy dihitung secara umum dengan interval diferensinya h , maka

$$\begin{aligned}\Delta y_x &= y_{x+h} - y_x \\ &= (x+h)^2 - x^2 \\ &= x^2 + 2xh + h^2 - x^2 \\ &= 2xh + h^2\end{aligned}$$

Jadi jika $h = 1$, maka $\Delta y_x = 2x+1$

Fungsi baru Δy yang telah didefinisikan merupakan hasil dari operator Δ yang dikenakan pada y . Kemudian jika operator Δ dikenakan pada fungsi baru Δy menjadi $\Delta(\Delta y)$ (menurut definisi 3.1.1.1) yang bernilai pada x , maka diperoleh

$$\begin{aligned}\Delta(\Delta y_x) &= \Delta(y_{x+h} - y_x) \\ &= \Delta y_{x+h} - \Delta y_x\end{aligned}$$

Dari contoh 3.1.1.3 yaitu untuk $y_x = x^2$ diperoleh $\Delta y_x = 2xh + h^2$, oleh sebab itu,

$$\begin{aligned}\Delta y_{x+h} &= 2(x+h)h + h^2 \\ &= 2xh + 2h^2 + h^2 \\ &= 2xh + 3h^2\end{aligned}$$

sehingga diperoleh,

$$\Delta y_{x+h} - \Delta y_x = 2xh + 3h^2 - (2xh + h^2)$$

$$\begin{aligned} &= 2xh + 3h^2 - 2xh - h^2 \\ &= 2h^2 \end{aligned}$$

Jadi nilai dari fungsi $\Delta(\Delta y)$ untuk sebarang nilai x adalah konstanta $2h^2$ untuk $y_x = x^2$. $\Delta(\Delta y)$ dapat juga ditulis dengan $\Delta^2 y$. $\Delta^2 y$ yang bernilai pada x dinotasikan dengan $\Delta^2 y_x$. Maka diperoleh, $\Delta^2 y_x = \Delta^2 x^2 = 2h^2$.

Selanjutnya jika operator Δ dikenakan pada fungsi $\Delta^2 y$, kita sebut fungsi $\Delta^3 y$, menurut definisi 3.1.1.1 maka nilai dari fungsi $\Delta^3 y$ pada x adalah $\Delta^2 y_{x+h} - \Delta^2 y_x$. Di atas telah diperoleh nilai dari fungsi $\Delta^2 y_x$ adalah konstanta $2h^2$, ternyata untuk nilai dari fungsi $\Delta^2 y_{x+h}$ juga konstanta $2h^2$. Oleh karena itu, nilai dari fungsi $\Delta^3 y_x$ adalah

$$\Delta^3 y_x = \Delta^2 y_{x+h} - \Delta^2 y_x = 2h^2 - 2h^2 = 0$$

Demikian seterusnya, jika nilai dari fungsi $\Delta^3 y_x = 0$ maka $\Delta^4 y_x$ juga bernilai nol. Jadi jika fungsi yang diberikan adalah $y_x = x^2$, maka untuk $\Delta^3 y_x$, $\Delta^4 y_x$, $\Delta^5 y_x$, $\Delta^6 y_x$, ... semuanya akan merupakan fungsi konstan (= 0 untuk setiap nilai x).

DEFINISI 3.1.1.2 Andaikan diberikan suatu fungsi diskrit y dan diferensi pertama Δy , maka diferensi kedua dari y dinotasikan dengan $\Delta^2 y$, merupakan diferensi dari diferensi pertama dari y yang berarti :

$$\Delta^2 y = \Delta(\Delta y) \tag{1.2}$$

(nilai dari fungsi $\Delta^2 y$ pada x , dinotasikan dengan $\Delta^2 y_x$, diperoleh $\Delta^2 y_x = \Delta y_{x+h} - \Delta y_x$). Selanjutnya diferensi

ketiga dari y dinotasikan dengan $\Delta^3 y$ yang merupakan diferensi dari diferensi kedua dari y , yang berarti : $\Delta^3 y = \Delta(\Delta^2 y)$. Secara umum, diferensi ke- n dari y , dinotasikan dengan $\Delta^n y$ yang merupakan diferensi dari diferensi ke- $(n-1)$ dari y , yang berarti :

$$\Delta^n y = \Delta(\Delta^{n-1} y) \quad n = 2, 3, 4, \dots \quad (1.3)$$

Sedangkan untuk $n = 1$, dibuat perjanjian $\Delta^1 y_x$ ditulis sebagai Δy . Satu lagi perjanjian untuk $n = 0$, jika $\Delta y = \Delta(\Delta^0 y)$, maka $\Delta^0 y = y$, yang berarti Δ^0 adalah operator identitas yang jika dikenakan pada fungsi y maka tidak mengalami perubahan yaitu tetap 1.

CONTOH 3.1.1.2.1 Andaikan diberikan fungsi y dengan $y_x = x^3$, maka $\Delta y_x = \Delta x^3 = (x+h)^3 - x^3$. Dengan menggunakan teorema binomial $(x+h)^3$ dijabarkan menjadi $(x+h)^3 = x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3$, sehingga

$$\begin{aligned} \Delta x^3 &= x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3 \\ &= 3x^2h + 3xh^2 + h^3 \end{aligned}$$

Dengan membandingkan fungsi y_x dan Δy_x terlihat bahwa pangkat dari x berkurang 1. Fungsi y adalah fungsi kubik dalam x (karena pangkat tertinggi dari x adalah 3), sedangkan Δy adalah fungsi kuadrat dalam x (karena pangkat tertinggi dari x adalah 2).

Sekarang akan dicari nilai fungsi dari $\Delta^2 y_x$, diperoleh :

$$\begin{aligned} \Delta^2 y_x &= \Delta y_{x+h} - \Delta y_x \\ &= [3(x+h)^2h + 3(x+h)h^2 + h^3] - [3x^2h + 3xh^2 + h^3] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 3x^2h + 6xh^2 + 3h^3 + 3xh^2 + 3h^3 + h^3 - 3x^2h - \\
 &\quad 3xh^2 - h^3 \\
 &= 6xh^2 + 6h^3
 \end{aligned}$$

Oleh karena itu untuk menurunkan derajat dari fungsi digunakan operator Δ , sehingga untuk $\Delta^2 y_x$ merupakan fungsi linear dari x (sebab pangkat tertinggi dari x adalah 1).

Akhirnya untuk $\Delta^3 y_x$ diperoleh :

$$\begin{aligned}
 \Delta^3 y_x &= \Delta^2 y_{x+h} - \Delta^2 y_x \\
 &= [6(x+h)h^2 + 6h^3] - [6xh^2 + 6h^3] \\
 &= 6xh^2 + 6h^3 + 6h^3 - 6xh^2 - 6h^3 \\
 &= 6h^3
 \end{aligned}$$

dengan begitu,

$$\begin{aligned}
 \Delta^4 y_x &= \Delta^3 y_{x+h} - \Delta^3 y_x \\
 &= 6h^3 - 6h^3 \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Tentu saja, untuk selanjutnya diferensi yang lebih tinggi darinya bernilai 0. Untuk hal ini dapat diringkas dalam tabel 1.1 :

Tabel 1.1

y_x	Δy_x	$\Delta^2 y_x$	$\Delta^3 y_x$	$\Delta^n y_x, n \geq 4$
1	0	0	0	0
x	h	0	0	0
x^2	$2xh + h^2$	$2h^2$	0	0
x^3	$3x^2h + 3xh^2 + h^3$	$6xh^2 + 6h^3$	$6h^3$	0

CONTOH 3.1.1.2.2 Akan ditunjukkan bahwa $\Delta^2 y_x = y_{x+2h} - 2y_{x+h} + y_x$ dan $\Delta^3 y_x = y_{x+3h} - 3y_{x+2h} + 3y_{x+h} - y_x$.

Jawab :

$$\begin{aligned}
 \bullet) \Delta^2 y_x &= \Delta(\Delta y_x) \\
 &= \Delta(y_{x+h} - y_x) \\
 &= \Delta y_{x+h} - \Delta y_x \\
 &= (y_{x+2h} - y_{x+h}) - (y_{x+h} - y_x) \\
 &= y_{x+2h} - y_{x+h} - y_{x+h} + y_x \\
 &= y_{x+2h} - 2y_{x+h} + y_x \\
 \Delta^2 y_x &= y_{x+2h} - 2y_{x+h} + y_x \quad (1.4)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bullet) \Delta^3 y_x &= \Delta(\Delta^2 y_x) \\
 &= \Delta(\Delta(\Delta y_x)) \\
 &= \Delta(\Delta(y_{x+h} - y_x)) \\
 &= \Delta(\Delta y_{x+h} - \Delta y_x) \\
 &= \Delta^2 y_{x+h} - \Delta^2 y_x \\
 &= y_{x+3h} - 2y_{x+2h} + y_{x+h} - (y_{x+2h} - 2y_{x+h} + y_x) \\
 &= y_{x+3h} - 2y_{x+2h} + y_{x+h} - y_{x+2h} + 2y_{x+h} - y_x \\
 &= y_{x+3h} - 3y_{x+2h} + 3y_{x+h} - y_x \\
 \Delta^3 y_x &= y_{x+3h} - 3y_{x+2h} + 3y_{x+h} - y_x \quad (1.5)
 \end{aligned}$$

DEFINISI 3.1.1.3 Operator identitas dinotasikan sebagai I , merupakan operator yang jika dikenakan pada sebarang fungsi y maka diperoleh fungsi baru Iy yang sama

dengan y . Berarti untuk sebarang x dalam domain y berlaku

$$Iy_x = y_x \quad (1.6)$$

Karena simbol Δ^0 didefinisikan sebagai operator identitas, maka diperoleh

$$\Delta^0 y = Iy \quad (1.7)$$

Akibatnya persamaan (1.3) sekarang benar untuk $n = 1$.

3.1.2 Operator E

DEFINISI 3.1.2.1 Andaikan diberikan fungsi diskrit y dan h suatu konstanta positif, maka Ey adalah fungsi baru yang bernilai pada x , dinotasikan dengan Ey_x , disajikan dengan

$$Ey_x = y_{x+h} \quad (1.8)$$

dimana $x, x+h$ di dalam domain y .

Sehingga persamaan (1.1) dapat ditulis menjadi :

$$\Delta y_x = Ey_x - y_x \quad (1.9)$$

TEOREMA 3.1.1.1 Jika operator E , seperti operator Δ dikenakan lebih dari satu kali pada suatu fungsi, dengan notasi yang sejalan dengan definisi 3.1.1.2 maka,

$$E^2 y_x = E(Ey_x) = Ey_{x+h} = y_{x+2h}$$

$$E^3 y_x = E(E^2 y_x) = Ey_{x+2h} = y_{x+3h}$$

secara umum, dapat ditunjukkan bahwa :

$$E^n y_x = E(E^{n-1} y_x) \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (1.10)$$

Persamaan (1.10) juga dapat berbentuk :

$$E^n y_x = y_{x+nh} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (1.11)$$

Sebelum membuktikan teorema ini seperti pada operator Δ dibuat perjanjian notasi $E^1 y$ ditulis sebagai Ey , sehingga untuk $n = 1$ dari persamaan (1.10) diperoleh $Ey_x = E(E^0 y_x)$, oleh karena itu $E^0 y_x = y_x$.

Akibatnya,

$$E^0 y_x = y_x = Iy_x \quad (1.12)$$

Karena alasan ini, maka persamaan (1.11) juga benar untuk $n = 0$.

Bukti : Dengan menggunakan induksi matematika untuk $n = 1$, $Ey_x = y_{x+h}$ (dari definisi 3.1.2.1)

Sekarang diasumsikan benar untuk $n = k$,

$$E^k y_x = y_{x+kh} \quad (1.13)$$

Maka akan dibuktikan benar untuk $n = k+1$. Jika operator E dikenakan pada kedua ruas dalam persamaan (1.13), maka

$$E(E^k y_x) = Ey_{x+kh}$$

$$E^{k+1} y_x = Ey_{x+kh} \quad (\text{dari (1.10)})$$

$$E^{k+1} y_x = y_{x+kh+h} \quad (\text{dari definisi 3.1.2.1})$$

$$E^{k+1} y_x = y_{x+(k+1)h}$$

Jadi terbukti benar untuk $n = k + 1$. Maka menurut induksi matematika berlaku $E^n y_x = y_{x+nh}$ benar untuk setiap bilangan bulat positif n . ■

CONTOH 3.1.2.1.1 Jika $y_x = 3x$, maka $Ey_x = y_{x+h}$
 $= 3(x+h) = 3x + 3h$, dari persamaan (1.11) $E^n y_x = y_{x+nh}$
 $= 3(x+nh) = 3x + 3nh$.

CONTOH 3.1.2.1.2 Jika $y_x = 2^x$, maka $E y_x = y_{x+h}$
 $= 2^{x+h} = 2^x \cdot 2^h$, dari persamaan (1.11), $E^n y_x = y_{x+nh}$
 $= 2^{x+nh} = 2^x \cdot 2^{nh}$.

3.1.3 Sifat-sifat dari operator Δ dan E

TEOREMA 3.1.1.2 (Hukum komutatif berkenaan dengan konstanta). Jika c adalah sebarang konstanta, diferensi dari fungsi cy adalah sama dengan c kali diferensi dari y , yang berarti,

$$\Delta (cy_x) = c \Delta y_x \quad (1.14)$$

Bukti :

$$\begin{aligned} \Delta (cy_x) &= cy_{x+h} - cy_x && \text{(dari definisi 3.1.1.1)} \\ &= c (y_{x+h} - y_x) \\ &= c \Delta y_x \end{aligned}$$

Persamaan (1.14) dapat membantu (dengan memakai tabel 1.1) untuk menemukan hasil dari diferensi-diferensi dalam contoh tanpa menghitung.

Contoh : $\Delta(3x) = 3\Delta x = 3h$

$$\Delta(5x^2) = 5\Delta x^2 = 5(2xh + h^2), \text{ dan seterusnya.}$$

TEOREMA 3.1.1.3 (Hukum distributif) Diferensi dari jumlah 2 fungsi sama dengan jumlah diferensi masing-masing, yang berarti jika $y^{(1)}, y^{(2)}$ adalah fungsi-fungsi¹ maka, $\Delta[y_x^{(1)} + y_x^{(2)}] = \Delta y_x^{(1)} + \Delta y_x^{(2)}$ (1.15)

¹ Notasi $y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(n)}$ diperkenalkan sebagai fungsi pertama, fungsi kedua sampai ke- n .

Bukti :

$$\begin{aligned}\Delta[y_x^{(1)} + y_x^{(2)}] &= [y_{x+h}^{(1)} + y_{x+h}^{(2)}] - [y_x^{(1)} + y_x^{(2)}] \\ &= y_{x+h}^{(1)} - y_x^{(1)} + y_{x+h}^{(2)} - y_x^{(2)} \\ &= \Delta y_x^{(1)} + \Delta y_x^{(2)}\end{aligned}\quad \blacksquare$$

AKIBAT 1 Jika c_1 dan c_2 adalah konstanta-konstanta sebarang maka,

$$\Delta[c_1 y_x^{(1)} + c_2 y_x^{(2)}] = c_1 \Delta y_x^{(1)} + c_2 \Delta y_x^{(2)} \quad (1.16)$$

Bukti :

$$\begin{aligned}\Delta[c_1 y_x^{(1)} + c_2 y_x^{(2)}] &= \Delta c_1 y_x^{(1)} + \Delta c_2 y_x^{(2)} \\ &\quad \text{(dari teorema 3.1.1.3)} \\ &= c_1 \Delta y_x^{(1)} + c_2 \Delta y_x^{(2)} \\ &\quad \text{(dari teorema 3.1.1.2)}\end{aligned}\quad \blacksquare$$

AKIBAT 2 Jika diberikan fungsi-fungsi $y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(n)}$, dan $c_1, c_2, \dots, c_n$ konstanta-konstanta sebarang, maka berlaku :

$$\begin{aligned}\Delta[c_1 y_x^{(1)} + c_2 y_x^{(2)} + \dots + c_n y_x^{(n)}] &= c_1 \Delta y_x^{(1)} + \\ &\quad c_2 \Delta y_x^{(2)} + \dots + c_n \Delta y_x^{(n)}\end{aligned} \quad (1.17)$$

untuk setiap bilangan bulat positif n .

Bukti : Dengan induksi matematika,

untuk $n = 1$, $\Delta[c_1 y_x^{(1)}] = c_1 \Delta y_x^{(1)}$ benar (menurut teorema 3.1.1.2),

Andaikan benar untuk $n = k$, $\Delta[c_1 y_x^{(1)} + c_2 y_x^{(2)} + \dots + c_k y_x^{(k)}] = c_1 \Delta y_x^{(1)} + c_2 \Delta y_x^{(2)} + \dots + c_k \Delta y_x^{(k)}$.

Akan dibuktikan benar untuk $n = k+1$, dengan memakai akibat 1 maka $\Delta[c_1y_x^{(1)} + c_2y_x^{(2)} + \dots + c_{k+1}y_x^{(k+1)}] = \Delta[c_1y_x^{(1)} + c_2y_x^{(2)} + \dots + c_ky_x^{(k)}] + \Delta[c_{k+1}y_x^{(k+1)}] = c_1\Delta y_x^{(1)} + c_2\Delta y_x^{(2)} + \dots + c_k\Delta y_x^{(k)} + c_{k+1}\Delta y_x^{(k+1)}$.

Jadi terbukti benar untuk $n = k+1$.

Jadi $\Delta[c_1y_x^{(1)} + c_2y_x^{(2)} + \dots + c_ny_x^{(n)}] = c_1\Delta y_x^{(1)} + c_2\Delta y_x^{(2)} + \dots + c_n\Delta y_x^{(n)}$, benar untuk setiap bilangan bulat positif n . ■

Bentuk jumlahan dalam persamaan (1.17) akan ditulis dengan menggunakan notasi Σ . Jika $y^{(k)}$ adalah fungsi dari fungsi y yang ke- k dan jika a dan b sebarang bilangan bulat (dengan $b \geq a$), maka jumlahan $y^{(a)} + y^{(a+1)} + \dots + y^{(b)}$ dapat ditulis dalam bentuk, $\sum_{k=a}^b y^{(k)}$

Simbol ini dibaca "jumlah dari $y^{(k)}$ mulai dari $k = a$ sampai $k = b$ ".

Contoh :

a. Jumlah dari n bilangan bulat positif pertama dapat ditulis

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \sum_{k=1}^n k$$

b. Jumlah dari 10 bilangan bulat positif ganjil pertama

$$1 + 3 + 5 + \dots + 19 = \sum_{k=1}^{10} (2k-1)$$

c. Jumlah dari diferensi pertama sampai ke tiga dari fungsi y , yang masing-masing bernilai pada x :

$$\sum_{k=1}^3 \Delta^k y_x^{(k)} = \Delta y_x^{(1)} + \Delta^2 y_x^{(2)} + \Delta^3 y_x^{(3)}$$

Beberapa sifat yang berlaku pada notasi Σ : Andaikan y dan z sebarang fungsi dan c konstanta sebarang, maka :

1. $\sum_{k=1}^n c = nc$
2. $\sum_{k=1}^n c y^{(k)} = c \sum_{k=1}^n y^{(k)}$
3. $\sum_{k=1}^n (y^{(k)} \pm z^{(k)}) = \sum_{k=1}^n y^{(k)} \pm \sum_{k=1}^n z^{(k)}$

Sekarang dapat digunakan notasi Σ untuk menuliskan persamaan (1.17) dalam bentuk :

$$\Delta \sum_{k=1}^n c_k y_x^{(k)} = \sum_{k=1}^n c_k \Delta y_x^{(k)} \quad (1.17')$$

CONTOH :

$$\begin{aligned} \text{a. } \Delta (3x^2 + 5x) &= 3 \Delta x^2 + 5 \Delta x && \text{(menurut 1.16)} \\ &= 3 (2xh + h^2) + 5h && \text{(menurut tabel 1.1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b. } \Delta (a + bx + cx^2) &= a \Delta 1 + b \Delta x + c \Delta x^2 && \text{(menurut 1.17)} \\ &= 0 + bh + c(2xh + h^2) && \text{(dari tabel 1.1)} \\ &= bh + c(2xh + h^2), && a, b, c \text{ konstanta} \end{aligned}$$

c. Andaikan diberikan fungsi c yang bernilai pada n , dinotasikan dengan c_n , didefinisikan dengan :

$$c_n = \frac{a + bn}{1-b} = \frac{a}{1-b} + \frac{b}{1-b} n$$

dengan a dan b konstanta, $b \neq 1$, maka

$$\Delta c_n = \Delta \left(\frac{a}{1-b} \right) + \Delta \left(\frac{b}{1-b} n \right)$$

$$\begin{aligned}
 &= 0 + \frac{b}{1-b} \Delta n \\
 &= \frac{b}{1-b} \Delta n \\
 \frac{\Delta c_n}{\Delta n} &= \frac{b}{1-b}
 \end{aligned}$$

TEOREMA 3.1.1.4 Diberikan fungsi y sebagai polinom berderajat n , yang berarti,

$$y_x = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \quad (1.18)$$

dengan $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ konstanta-konstanta sebarang dan $a_n \neq 0$, maka diferensi ke- n dari fungsi y merupakan fungsi konstan (sama dengan $n!h^n a_n$) dan semua diferensi setelah diferensi ke- n berturut-turut adalah nol, yang berarti,

$$\Delta^p y_x = 0, \text{ jika } p > n \quad (1.19)$$

Bukti : Diberikan m sebarang bilangan bulat positif, maka berlaku teorema binomial yaitu :

$$\begin{aligned}
 \Delta x^m &= (x+h)^m - x^m \\
 &= x^m + mx^{m-1}h + \frac{m(m-1)}{2!} x^{m-2}h^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} x^{m-3}h^3 \\
 &\quad + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{4!} x^{m-4}h^4 + \dots + h^m - x^m \\
 &= mx^{m-1}h + \frac{m(m-1)}{2!} x^{m-2}h^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} x^{m-3}h^3 \\
 &\quad + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{4!} x^{m-4}h^4 + \dots + h^m
 \end{aligned}$$

yang berarti aplikasi Δ untuk x^m menghasilkan jumlahan berhingga, dengan $m-1$ sebagai pangkat tertinggi dari x . Dengan menggunakan persamaan (1.17)

$$\Delta y_x = a_0\Delta 1 + a_1\Delta x + a_2\Delta x^2 + \dots + a_n\Delta x^n \quad (1.20)$$

Jadi jika Δ dikenakan pada y dimana y adalah fungsi polinom berderajat n , maka mengakibatkan fungsi polinom

berderajat $n-1$. Dengan alasan yang sama $\Delta^2 y$ akan menjadi fungsi polinom berderajat $n-2$. Dan seterusnya $\Delta^n y$ akan mengakibatkan fungsi polinom berderajat nol atau merupakan suatu konstanta.

Dari persamaan (1.20) diperoleh,

$$\begin{aligned}\Delta^n y_x &= a_0 \Delta^n 1 + a_1 \Delta^n x + a_2 \Delta^n x^2 + \dots + a_n \Delta^n x^n \\ &= 0 + 0 + 0 + \dots + a_n \Delta^n x^n \\ \Delta^n y_x &= a_n \Delta^n x^n\end{aligned}\tag{1.21}$$

Oleh karena $\Delta x = h$,

$$\begin{aligned}\Delta^2 x^2 &= \Delta(\Delta x^2) \\ &= \Delta(2xh + h^2) \\ &= \Delta 2xh + \Delta h^2 \\ &= 2h \Delta x \\ &= 2h^2 \\ &= 2!h^2, \\ \Delta^3 x^3 &= 6h^3 \\ &= 3!h^3, \\ \Delta^4 x^4 &= 4!h^4, \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \\ \Delta^n x^n &= n!h^n\end{aligned}$$

maka persamaan (1.21) menjadi,

$$\Delta^n y_x = a_n n! h^n\tag{1.21'}$$

Hal ini membuktikan $\Delta^n y_x$ merupakan suatu konstanta akibatnya semua diferensi setelah diferensi ke- n berturut-turut adalah nol karena diferensi dari konstanta adalah nol. ■

DEFINISI 3.1.3.1 Fungsi faktorial dari orde n ($n=2,3,\dots$) ditulis dan didefinisikan dengan

$x^{[n]} = x(x-h)(x-2h)\dots[x-(n-1)h]$, untuk h tertentu dan untuk $x^{[1]} = x$.

CONTOH 3.1.3.1 Jika $x^{[1]} = x$, $x^{[2]} = x(x-h)$, $x^{[3]} = x(x-h)(x-2h)$, maka

$$(x+h)^{[1]} = x+h,$$

$$(x+h)^{[2]} = (x+h)(x+h-h) = (x+h)x,$$

$$(x+h)^{[3]} = (x+h)(x+h-h)(x+h-2h) = (x+h)x(x-h)$$

sehingga jika $h = 2$, maka

$$3^{[1]} = 3,$$

$$3^{[2]} = 3.1 = 3,$$

$$3^{[3]} = 3(3-2)(3-4) = 3.1.-1 = -3$$

sedangkan jika $h = 3$, maka

$$3^{[1]} = 3,$$

$$3^{[2]} = 3.0 = 0,$$

$$3^{[3]} = 3.0.-3 = 0$$

Fungsi faktorial dari orde- n mempunyai n faktor. Meskipun demikian, tetap dapat ditemukan diferensinya.

$$\text{Untuk } \Delta x^{[n]} = (x+h)^{[n]} - x^{[n]}$$

$$= \{(x+h)x(x-h)(x-2h)\dots[x-(n-2)h]\} - \{x(x-h)(x-2h)\dots[x-(n-2)h][x-(n-1)h]\}$$

$$= x(x-h)(x-2h)\dots[x-(n-2)h] \{(x+h) - [x-(n-1)h]\}$$

$$= x^{[n-1]} \{(x+h) - [x-(n-1)h]\}$$

$$= nhx^{[n-1]}$$

Hal ini berlaku untuk setiap $n > 1$, tapi tidak untuk $n = 1$, selama $x^{[0]}$ tidak didefinisikan. Oleh karena $x^{[1]} = x$ dan $\Delta x = h$, maka definisi fungsi faktorial diperluas dengan menambahkan

$$x^{[0]} = 1 \quad (1.22)$$

sehingga diperoleh,

$$\Delta x^{[n]} = nhx^{[n-1]}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (1.23)$$

Perhatikan bahwa kecuali untuk faktor konstan, diferensi dari fungsi faktorial merupakan fungsi faktorial dengan tingkat yang lebih rendah 1 dari mula-mula.

Hal ini membuat perulangan diferensi dari $x^{[n]}$ lebih mudah dibentuk. Sebagai contoh :

$$\begin{aligned} \Delta^2 x^{[n]} &= \Delta (\Delta x^{[n]}) \\ &= \Delta (nhx^{[n-1]}) \\ &= nh(n-1)hx^{[n-2]} \\ &= n(n-1)h^2 x^{[n-2]} \end{aligned}$$

Begitupun untuk $\Delta^3 x^{[n]}$ yaitu

$$\Delta^3 x^{[n]} = n(n-1)(n-2)h^3 x^{[n-3]}$$

Dan seterusnya sampai perulangan n kali operasi Δ ,

$$\Delta^n x^{[n]} = n(n-1)(n-2)\dots 3.2.1.h^n \quad (1.24)$$

Bilangan $1.2.3\dots(n-2).(n-1).n$ yang dihasilkan adalah hasil kali dari n bilangan bulat positif yang pertama.

DEFINISI 3.1.3.2 Hasil kali dari n bilangan bulat positif pertama dinotasikan dengan $n!$, yang berarti,

$$n! = 1.2.3\dots(n-1).n \quad (1.25)$$

Sebagai tambahan, nol faktorial didefinisikan dengan

$$0! = 1 \quad (1.26)$$

Dengan notasi ini dapat ditulis menjadi

$$\Delta^n x^{[n]} = n!h^n, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (1.27)$$

CONTOH 3.1.3.2

a. $\Delta x^{[3]} = 3hx^{[2]} = 3hx(x-h)$

$$\Delta^2 x^{[3]} = 3.2h^2 x^{[1]} = 6h^2 x$$

$$\Delta^3 x^{[3]} = 3!h^3 = 6h^3$$

$$\Delta^n x^{[3]} = 0, \text{ jika } n = 4, 5, 6, \dots$$

b. Dengan memakai persamaan (1.17) dan persamaan (1.23) diperoleh,

$$\begin{aligned} \Delta(3 + 5x^{[1]} - 2x^{[2]} + 4x^{[3]}) &= 3 \Delta 1 + 5 \Delta x^{[1]} - 2 \Delta x^{[2]} \\ &\quad + 4 \Delta x^{[3]} \\ &= 0 + 5h - 2.2hx^{[1]} + 4.3hx^{[2]} \\ &= 5h - 4hx^{[1]} + 12hx^{[2]} \\ &= 5h - 4hx + 12hx(x-h) \\ &= 5h - 4hx + 12hx^2 - 12h^2x \end{aligned}$$

TEOREMA 3.1.1.5 Diberikan u dan v merupakan fungsi-fungsi diskrit, maka

$$\Delta[u_x \cdot v_x] = Eu_x \cdot \Delta v_x + \Delta u_x \cdot v_x \quad (1.28)$$

Bukti :

$$\begin{aligned} \Delta[u_x \cdot v_x] &= u_{x+h} \cdot v_{x+h} - u_x \cdot v_x \\ &= Eu_x \cdot (\Delta v_x + v_x) - (u_{x+h} - \Delta u_x) \cdot v_x \\ &= (Eu_x \cdot \Delta v_x + Eu_x \cdot v_x) - (Eu_x \cdot v_x - \Delta u_x \cdot v_x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= Eu_x \Delta v_x + Eu_x v_x - Eu_x v_x + \Delta u_x v_x \\
 &= Eu_x \Delta v_x + \Delta u_x v_x
 \end{aligned}$$

CONTOH :

$$\begin{aligned}
 \bullet \Delta x^4 &= \Delta(x \cdot x^3) && \text{(dengan } u_x = x \text{ dan } v_x = x^3) \\
 &= Ex \Delta x^3 + \Delta u_x x^3 \\
 &= (x + h) (3hx^2 + 3h^2x + h^3) + hx^3 \\
 &= 4hx^3 + 6h^2x^2 + 4h^3x + h^4
 \end{aligned}$$

3.1.4 Ekuivalensi dari operator-operator

Perhatikan persamaan (1.9), persamaan ini dapat ditulis menjadi

$$\Delta y_x = Ey_x - Iy_x \quad (1.9')$$

DEFINISI 3.1.4.1 Dua operator, O_1 dan O_2 dikatakan ekuivalen (dinotasikan dengan $O_1 \equiv O_2$) jika untuk sebarang fungsi y berlaku $O_1 y = O_2 y$.

Jadi persamaan (1.9') dapat ditulis sebagai ekuivalen

$$\Delta \equiv E - I, \text{ karena } \Delta y = (E - I)y = Ey - Iy \quad (1.29)$$

Apabila (1.9') ditulis dalam bentuk $Ey_x = \Delta y_x + Iy_x$, untuk semua y_x maka diperoleh :

$$E \equiv \Delta + I \quad (1.30)$$

CONTOH 3.1.4.1.1 Dari persamaan (1.7) akibat definisi 3.1.4.1 diperoleh $\Delta^0 \equiv I$

CONTOH 3.1.4.1.2 Dari persamaan (1.12) akibat definisi 3.1.4.1 diperoleh $E^0 \equiv I$

CONTOH 3.1.4.1.3 Dari persamaan (1.4) dan (1.5) menggunakan teorema 3.1.1.1 berturut-turut diperoleh :

$$\Delta^2 \equiv E^2 - 2E + I \quad (1.31)$$

$$\Delta^3 \equiv E^3 - 3E^2 + 3E - I \quad (1.32)$$

TEOREMA 3.1.1.6 Operator Δ dan E adalah komutatif, yang berarti $\Delta E \equiv E\Delta$.

Bukti : Dengan menentukan dan menunjukkan bahwa $(\Delta E)y_x$ dan $(E\Delta)y_x$ untuk semua y_x keduanya sama.

$$(\Delta E)y_x = \Delta [Ey_x] = \Delta y_{x+h} = y_{x+2h} - y_{x+h}$$

dan

$$\begin{aligned} (E\Delta)y_x &= E [\Delta y_x] = E [y_{x+h} - y_x] = Ey_{x+h} - Ey_x \\ &= y_{x+2h} - y_{x+h} \end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa $\Delta E \equiv E\Delta$ ■

DEFINISI 3.1.4.2 Operator Δ dan E memenuhi hukum indeks, yang berarti untuk m dan n bilangan bulat non negatif, berlaku

$$\Delta^m \Delta^n \equiv \Delta^n \Delta^m \equiv \Delta^{m+n} \quad (1.33)$$

$$E^m E^n \equiv E^n E^m \equiv E^{m+n} \quad (1.34)$$

Bentuk persamaan (1.31) dan persamaan (1.32) menunjukkan bahwa Δ^2 dan Δ^3 dapat ditulis dalam bentuk yang ekuivalen berkenaan dengan operator E . Andaikan persamaan (1.29) dipangkatkan 3 di kedua ruasnya, maka diperoleh :

$$\Delta^3 \equiv (E-I)^3$$

Dengan menggunakan teorema binomial maka diperoleh :

$$\Delta^3 = E^3 - 3E^2I + 3EI^2 - I^3 \quad (1.35)$$

Karena $I^3 \equiv I$ dan juga untuk sebarang operator O berlaku $OI \equiv IO \equiv O$ maka persamaan (1.35) menjadi $\Delta^3 = E^3 - 3E^2 + 3E - I$ yang hasilnya tepat sama dengan persamaan (1.32). Sekarang, secara umum jika persamaan (1.29) kedua ruasnya dipangkatkan n maka diperoleh :

$$\Delta^n \equiv (E-I)^n \quad (1.36)$$

Kemudian dikenalkan penggunaan notasi $\binom{n}{k}$ dalam persamaan (1.25) dan (1.26), untuk k dan n bilangan bulat non negatif ($k \leq n$), didefinisikan :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! (n-k)!} \quad (1.37)$$

oleh pembagian $n!$ dengan $(n-k)!$ diperoleh

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!} \quad (1.38)$$

maka diperoleh rumus binomial :

$$(A + B)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A^k B^{n-k}$$

Lambang $\binom{n}{k}$ berlaku untuk $k = 0, 1, 2, 3, \dots, n$ yang dikenal sebagai koefisien binomial.

Dengan menggunakan persamaan (1.38) dan persamaan (1.36) diperoleh,

$$\Delta^n \equiv \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} E^k I^{n-k}$$

tetapi $E^k I^{n-k} \equiv E^k$, maka $\Delta^n \equiv \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} E^k$

TEOREMA 3.1.1.7 Jika n adalah bilangan bulat positif, maka

$$\Delta^n y_x = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} E^k y_x \quad (1.39)$$

Bukti :

$$\begin{aligned} \Delta^n y_x &= (E-I)^n y_x \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} E^k I^{n-k} y_x \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} E^k y_x \quad \blacksquare \end{aligned}$$

TEOREMA 3.1.1.8 Jika n adalah bilangan bulat positif, maka

$$E^n y_x = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \Delta^k y_x \quad (1.40)$$

Bukti :

$$\begin{aligned} E^n y_x &= (\Delta+I)^n y_x \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \Delta^k I^{n-k} y_x = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \Delta^k y_x \quad \blacksquare \end{aligned}$$

3.1.5 Operator Δ^{-1}

Di atas telah didefinisikan Δ^n dan E^n hanya berlaku untuk bilangan bulat n tak negatif. Tetapi ketentuan ini dapat diperluas untuk indeks bilangan bulat negatif, misalnya Δ^{-n} , dimana $n \in \mathbb{Z}^+$, untuk $n = 1$ diperoleh Δ^{-1} .

Definisi akan diperluas sedemikian hingga sifat-sifat dasar (seperti sifat linear dari teorema 3.1.1.2, 3.1.1.3 dan aturan indeks dari definisi 3.1.4.2) tetap berlaku. Sehingga jika operator Δ dikenakan pada operator Δ^{-1} diperoleh,

$$\Delta[\Delta^{-1}y_x] = \Delta^{1-1}y_x = \Delta^0y_x = y_x \quad (1.41)$$

Jadi jika aturan indeks dipakai, maka $\Delta^{-1}y$ akan didefinisikan sebagai fungsi yang diferensi pertamanya adalah fungsi y .

DEFINISI 3.1.5.1 Jika Y adalah fungsi yang diferensi pertamanya adalah fungsi y , maka Y disebut jumlah tak tentu dari y dan dinotasikan dengan $\Delta^{-1}y$, yang berarti jika $\Delta Y_x = y_x$, maka

$$\Delta^{-1}y_x = Y_x \quad (1.42)$$

CONTOH 3.1.5.1.1 Andaikan ditentukan jumlah tak tentu dari fungsi konstan x sama dengan h (interval diferensi). Diketahui karena h adalah interval diferensi $\Delta x = h$, jika kedua ruas dikalikan Δ^{-1} dihasilkan

$$\Delta^{-1}(\Delta x) = \Delta^{-1}h$$

$$\Delta x = h$$

$$\Delta^{-1}h = x$$

Karena $\Delta(x+2) = h$ diperoleh juga $\Delta^{-1}h = x + 2$.

Secara umum jika $\Delta(x+c) = h$, maka diperoleh

$$\Delta^{-1}h = x + c \quad (1.43)$$

dimana c adalah konstanta sebarang.

Jika p adalah sebarang fungsi periodik dengan periode h , maka berlaku

$$\Delta p_x = p_{x+h} - p_x = 0 \quad (\text{karena } p_{x+h} = p_x) \quad (1.44)$$

Untuk semua x dalam domain dari p , maka

$$\Delta[x + p_x] = \Delta x + \Delta p_x = h + 0 = h$$

sehingga,

$$\Delta^{-1}h = x + p_x \quad (1.45)$$

Karena persamaan (1.45) bernilai benar untuk sebarang fungsi periodik p (dengan periode h), maka terlihat bahwa fungsi konstan h mempunyai banyak tak hingga jumlah tak tentu. Secara khusus, untuk setiap fungsi konstan adalah periodik. Jadi persamaan (1.45) dan (1.43) sebagai kasus khusus. Tetapi ada juga fungsi nonkonstan yang periodik, seperti fungsi sinus dan kosinus dalam trigonometri.

Contoh di atas memberikan ilustrasi kenyataan berikut : jika Y sebarang jumlah tak tentu dari y , maka $Y + p$ adalah jumlah tak tentu yang lain dari y asalkan p adalah fungsi periodik dengan periode yang sama dengan interval diferensi.

TEOREMA 3.1.1.9 Jika $Y^{(1)}$ dan $Y^{(2)}$ adalah jumlah tak tentu berturut-turut dari fungsi $y^{(1)}$ dan $y^{(2)}$ dan jika c_1 dan c_2 konstanta-konstanta sebarang, maka $c_1 Y^{(1)} + c_2 Y^{(2)}$ adalah jumlah tak tentu dari fungsi $c_1 y^{(1)} + c_2 y^{(2)}$, yang berarti

$$\Delta^{-1}(c_1 y^{(1)} + c_2 y^{(2)}) = c_1 \Delta^{-1} y^{(1)} + c_2 \Delta^{-1} y^{(2)} \quad (1.46)$$

Bukti : Diberikan $\Delta Y^{(1)} = y^{(1)}$ dan $\Delta Y^{(2)} = y^{(2)}$ maka harus dibuktikan bahwa diferensi $c_1 Y^{(1)} + c_2 Y^{(2)}$, dengan menggunakan persamaan (1.16), diperoleh,

$$\begin{aligned}\Delta(c_1 Y^{(1)} + c_2 Y^{(2)}) &= c_1 \Delta Y^{(1)} + c_2 \Delta Y^{(2)} \\ &= c_1 y^{(1)} + c_2 y^{(2)}\end{aligned}$$

sehingga,

$$\begin{aligned}\Delta^{-1}(c_1 y^{(1)} + c_2 y^{(2)}) &= c_1 Y^{(1)} + c_2 Y^{(2)} \\ &= c_1 \Delta^{-1} y^{(1)} + c_2 \Delta^{-1} y^{(2)}\end{aligned}$$

Persamaan (1.46) menandakan kombinasi linear dari n fungsi dengan memakai (1.17'), diperoleh

$$\Delta^{-1} \sum_{k=0}^n c_k y_k = \sum_{k=0}^n c_k \Delta^{-1} y_k \quad (1.47)$$

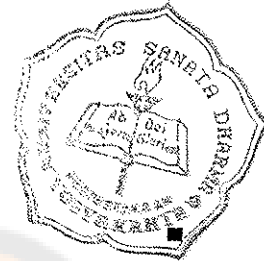
DEFINISI 3.1.5.2 Jika operator E dikenakan pada fungsi Y menghasilkan fungsi y maka ditulis $E^{-1}y = Y$, yang berarti, $EY = y$. Sejalan dengan operator Δ , jika $EY_x = y_x$ maka,

$$E^{-1}y_x = Y_x \quad (1.48)$$

Tetapi operator E^{-1} sedikit menarik dan sedikit dipakai daripada Δ^{-1} , dari persamaan (1.48) diperoleh

$$E^{-1}y_x = y_{x-h} \quad (1.49)$$

Hal ini dikarenakan $Ey_{x-h} = y_x$ (dari definisi 3.1.2.1). Kenyataannya, untuk sebarang bilangan bulat positif n , didefinisikan diferensi ke- n dari fungsi $\Delta^{-n}y$ adalah y . Sama halnya dengan $E^{-n}y$, jika dikenakan operator E^n , maka diperoleh $E^n(E^{-n}y) = y$. Jadi perhatikan bahwa jika $E^n y_{x-nh} = y_x$, maka diperoleh



$$E^{-n}y_x = y_{x-nh} \quad (1.50)$$

3.2 Persamaan Diferensi

DEFINISI 3.2.1 Persamaan yang berhubungan dengan nilai dari fungsi y dan satu atau lebih diferensi-diferensi $(\Delta y, \Delta^2 y, \Delta^3 y, \dots)$ untuk setiap nilai x dari sebarang himpunan S (dimana y terdefinisikan) disebut persamaan diferensi lewat himpunan S , dan ditulis

$$F(x, y_x, \Delta y_x, \Delta^2 y_x, \dots, \Delta^n y_x) = 0 \quad (2.1)$$

Persamaan (2.1) disebut persamaan diferensi biasa orde- n .

persamaan (2.1) juga dapat ditulis

$$f(x, y_x, y_{x+1}, y_{x+2}, \dots, y_{x+n}) = 0 \quad (2.3)$$

Orde persamaan diferensi adalah selisih antara subskrip yang tertinggi dan yang terendah dari y pada persamaan tersebut, sedangkan derajat diferensi adalah pangkat tertinggi dari y .

CONTOH 3.2.1.1 Andaikan fungsi y didefinisikan untuk semua bilangan real x , persamaan-persamaan berikut merupakan contoh-contoh dari persamaan diferensi lewat himpunan S ;

$$\Delta y_x + 3y_x = 0 \quad (2.4)$$

$$\Delta^2 y_x + 3\Delta y_x + y_x = 0 \quad (2.5)$$

$$\Delta^2 y_x - xy_x = 2x + 7 \quad (2.6)$$

$$\Delta^3 y_x + \Delta^2 y_x + \Delta y_x + y_x = 0 \quad (2.7)$$

$$\Delta^2 y_x - 3\Delta y_x - 3y_x = x \quad (2.8)$$

Berdasarkan teorema 3.1.1.7 persamaan diferensi pada contoh di atas dapat ditulis sebagai relasi antara nilai dari y dengan satu atau lebih fungsi $Ey, E^2y, \dots$ seperti antara y dengan $\Delta y, \Delta^2 y, \dots$. Jadi selama $\Delta y_x = Ey_x - y_x$, maka persamaan (2.4) menjadi

$$Ey_x + 2y_x = 0 \quad (2.9)$$

andaikan $h = 1$, dari persamaan (1.11) telah diperoleh

$$E^n y_x = y_{x+n} \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (2.10)$$

Maka persamaan (2.9) menjadi

$$y_{x+1} + 2y_x = 0 \quad (2.4')$$

Dengan jalan yang sama, jika $\Delta^2 y_x = E^2 y_x - 2Ey_x + y_x$ maka persamaan (2.5) menjadi

$$y_{x+2} + y_{x+1} - y_x = 0 \quad (2.5')$$

Begitu juga persamaan (2.6 - 2.8) menjadi

$$y_{x+2} - 2y_{x+1} + (1-k)y_x = 2x + 7 \quad (2.6')$$

$$y_{x+3} - 2y_{x+2} + 2y_{x+1} = 0 \quad (2.7')$$

$$y_{x+2} - 5y_{x+1} + y_x - x = 0 \quad (2.8')$$

CONTOH 3.2.1.2 Persamaan diferensi yang diberikan pada contoh 3.2.1.1 berikut ini akan ditunjukkan orde dan derajatnya,

$$y_{x+1} + 2y_x = 0 \quad (\text{orde-1, derajat 1}) \quad (2.4')$$

$$y_{x+2} + y_{x+1} - y_x = 0 \quad (\text{orde-1, derajat 1}) \quad (2.5')$$

$$y_{x+2} - 2y_{x+1} + (1-k)y_x = 2x + 7 \quad (\text{orde-2, derajat 1}) \quad (2.6')$$

$$y_{x+3} - 2y_{x+2} + 2y_{x+1} = 0 \quad (\text{orde-2, derajat 1}) \quad (2.7')$$

$$y_{x+2} - 5y_{x+1} + y_x - x = 0 \quad (\text{orde-2, derajat 1}) \quad (2.8')$$

DEFINISI 3.2.2 Suatu persamaan diferensi lewat himpunan S adalah linear dengan orde- n jika dapat ditulis dalam bentuk

$$f_k^{(0)} y_{k+n} + f_k^{(1)} y_{k+n-1} + \dots + f_k^{(n-1)} y_{k+1} + f_k^{(n)} y_k = g_k \quad (2.10)$$

dengan $f_k^{(0)}, f_k^{(1)}, \dots, f_k^{(n-1)}, f_k^{(n)}$ dan g masing-masing merupakan fungsi dari k (tetapi bukan dari y_k) didefinisikan untuk setiap nilai k dalam himpunan S , dimana $f_k^{(0)}$ dan $f_k^{(n)}$ keduanya tidak sama dengan nol.

CONTOH 3.2.2.1 Persamaan (2.4' - 2.5') merupakan persamaan diferensi linear, dari persamaan (2.4') jika $n = 1$ maka $f_k^{(0)} = 1, f_k^{(1)} = 2, g_k = 0$. Dari persamaaan (2.5') untuk $n = 2$, diperoleh $f_k^{(0)} = 1, f_k^{(1)} = 0, f_k^{(2)} = 0, g_k = 0$. Kedua persamaan ini, koefisien-koefisien $f_k^{(0)}, f_k^{(1)}, \dots, f_k^{(n-1)}, f_k^{(n)}$ adalah fungsi konstan, yang berarti, tidak mengalami perubahan terhadap k . Persamaan seperti ini disebut persamaan diferensi linear dengan koefisien konstan, hal ini merupakan dasar yang terpenting yang akan dibahas pada bab IV. Perhatikan persamaan (2.6') tidak termasuk dalam bentuk itu, meskipun linear, tetapi tidak dengan koefisien konstan, sebab $f_k^{(2)} = (1-k)$.

CONTOH 3.2.2.2 Persamaan diferensi berikut semuanya linear dengan orde yang telah ditunjukkan :

$$y_{k+2} + 5y_{k+1} - 7y_k = 2k \quad (\text{orde-2})$$

$$y_{k+2} + 5y_{k+1} = 2k \quad (\text{orde-1})$$

$$y_{k+2} - 7y_k = 2k \quad (\text{orde-2})$$

$$ky_{k+2} + 2y_{k+1} - 6y_k = 0 \quad (\text{orde-2 dengan } k \neq 0)$$

$$4^k y_{k+3} - 3ky_{k+2} + 2ky_{k+1} - y_k = 1 \quad (\text{orde-3})$$

3.3 Penyelesaian persamaan diferensi

Di dalam persamaan aljabar, penyelesaian persamaan aljabar dengan bentuk linear

$$2x-1 = 3 \quad (3.1)$$

adalah nilai x yang bila disubstitusikan dalam persamaan (3.1) membuat persamaan itu menjadi pernyataan yang benar. Nilai x yang seperti itu dikatakan penyelesaian dari persamaan aljabar. Persamaan (3.1) memiliki tepat satu penyelesaian yaitu $x = 2$. Sedangkan persamaan aljabar yang berbentuk kuadrat, misalnya $x^2 - 4x + 3 = 0$ mempunyai tepat 2 penyelesaian yaitu $x = 1$ dan $x = 3$.

Sekarang andaikan diberikan suatu persamaan diferensi,

$$y_{k+1} - 2y_k = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.2)$$

maka timbul pertanyaan bagaimana penyelesaian dari persamaan ini. Persamaan (3.2) merupakan hubungan antara nilai dari suatu fungsi y pada titik k dan $k+1$. Adakah fungsi yang didefinisikan dengan daerah asalnya merupakan himpunan dari bilangan bulat non negatif, yang membuat persamaan ini menjadi pernyataan yang benar untuk setiap nilai k dimana persamaan tersebut didefinisikan ? Jawabannya adalah ya, seperti yang ditunjukkan oleh

fungsi

$$y_k = 2^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.3)$$

Untuk fungsi y ini diperoleh,

$$y_{k+1} - 2y_k = 2^{k+1} - 2 \cdot 2^k = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

sehingga y memenuhi persamaan diferensi (3.2), fungsi y yang didefinisikan dalam (3.3) dikatakan merupakan penyelesaian dari persamaan diferensi (3.2).

Andaikan setiap fungsi yang nilainya pada bilangan bulat non negatif k diberikan dengan :

$$y_k = 3 \cdot 2^k, \quad y_k = 4 \cdot 2^k, \quad y_k = 1/5 \cdot 2^k \quad (3.4)$$

Ternyata persamaan (3.4) juga memenuhi persamaan diferensi (3.2). Sehingga jika c sebarang konstanta dan y diberikan oleh,

$$y_k = c \cdot 2^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.5)$$

maka y adalah penyelesaian dari persamaan (3.2), karena

$$y_{k+1} - 2y_k = c \cdot 2^{k+1} - 2 \cdot c \cdot 2^k = c(2^{k+1} - 2^{k+1}) = 0$$

Oleh karena itu fungsi y yang diberikan dalam persamaan (3.3) dan (3.4) disebut penyelesaian partikular dari persamaan diferensi (3.2) sedangkan fungsi y dalam persamaan (3.5), dengan sebarang konstanta c , merupakan penyelesaian umum dari persamaan diferensi (3.2).

DEFINISI 3.3.1 Fungsi y merupakan penyelesaian dari persamaan diferensi lewat himpunan S jika nilai dari y dapat direduksi pada persamaan diferensi dengan suatu identitas lewat S yang berarti, jika nilai dari y membuat persamaan diferensi menjadi pernyataan yang benar untuk

setiap titik dari S . Dan jika suatu fungsi merupakan penyelesaian dari persamaan diferensi maka dikatakan memenuhi persamaan diferensi.

CONTOH 3.3.1.1 Perhatikan bahwa

$$y_k = 1 - 2/k, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (3.6)$$

merupakan penyelesaian dari persamaan diferensi orde-1 :

$$(k+1)y_{k+1} + ky_k = 2k - 3, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (3.7)$$

Jawab : Untuk memperlihatkannya substitusikan nilai dari y ke dalam persamaan (3.7) dan tampak suatu identitas untuk setiap bilangan bulat positif k . Dari persamaan (3.6) diperoleh,

$$y_{k+1} = 1 - 2/(k+1)$$

maka persamaan (3.7) menjadi

$$(k+1) (1 - 2/(k+1)) + k (1 - 2/k) = 2k - 3$$

kemudian sederhanakan ruas kiri dari persamaan ini, dihasilkan $(k+1) - 2 + k - 2 = 2k - 3$.

Maka persamaan (3.6) memenuhi persamaan diferensi (3.7).

CONTOH 3.3.1.2 Perhatikan bahwa persamaan diferensi

$$y_{k+2} - 4y_{k+1} + 4y_k = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.8)$$

mempunyai penyelesaian,

$$y_k = 2^k(c_1 + c_2k), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.9)$$

untuk sebarang konstanta c_1, c_2 .

Jawab : Substitusikan persamaan (3.9) ke dalam persamaan (3.8) sehingga menghasilkan,

$$2^{k+2} [c_1 + c_2(k+2)] - 4 \cdot 2^{k+1} [c_1 + c_2(k+1)] + 4 \cdot 2^k [c_1 + c_2 k] = 0 \quad (3.10)$$

kemudian sederhanakan ruas kiri dengan memfaktorkan 2^{k+2} , diperoleh

$$2^{k+2} (c_1 + c_2(k+2) - 2[c_1 + c_2(k+1)] + [c_1 + c_2 k])$$

Akibat penyederhanaan ini menunjukkan bahwa nilai dalam kurung kurawal adalah 0, untuk setiap $k = 0, 1, 2, \dots$ dan untuk setiap c_1 dan c_2 . Jadi persamaan (3.9) memenuhi persamaan (3.8).

Perhatikan dari contoh di atas dapat ditemukan tak hingga banyak penyelesaian dari persamaan (3.8), satu untuk setiap pasang nilai dari konstanta c_1 dan c_2 . Andaikan kita bertanya bagaimana penyelesaian dari persamaan (3.8) jika diberikan $y_0 = 1$ dan $y_1 = 6$. Hal ini disebut syarat awal yang merupakan syarat tambahan dari fungsi y disamping memenuhi persamaan diferensi. Jika kita masukkan $k = 0$ dan $k = 1$ ke dalam persamaan (3.9), maka diperoleh $y_0 = c_1$ dan $y_1 = 2(c_1 + c_2)$, oleh sebab itu $c_1 = 1$ dan $c_2 = 2$. Sehingga persamaan (3.9) menjadi $y_k = 2^k(1+2k)$, ini merupakan penyelesaian partikular dari persamaan diferensi (3.8) yang memenuhi syarat awal.

CONTOH 3.3.1.3 Perhatikan bahwa

$$y_k = c2^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.11)$$

memenuhi persamaan diferensi :

$$y_{k+1} - 2y_k = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.12)$$

untuk setiap nilai dari konstanta c , dengan syarat awal

$$y_0 = 3.$$

Jawab : Jika ingin menemukan penyelesaian dari persamaan (3.12) yang memenuhi syarat awal $y_0 = 3$, maka dari persamaan (3.11), diperoleh

$$y_0 = c2^0 = c,$$

sehingga dari syarat awal diperoleh $c = 3$.

Jadi penyelesaiannya adalah

$$y_k = 3 \cdot 2^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

yang memenuhi persamaan diferensi (3.12) dan syarat awal $y_0 = 3$.

Dalam sub bab berikut, akan dibuktikan teorema dasar yang menjamin eksistensi dan ketunggalan dari penyelesaian partikular dari persamaan diferensi linear (dari sebarang orde) yang memenuhi syarat-syarat awal yang diberikan.

3.4 Teorema Eksistensi dan Ketunggalan

Telah diketahui bahwa sebarang persamaan diferensi mempunyai tak hingga banyak penyelesaian, tapi untuk persamaan diferensi linear dapat selalu ditemukan paling sedikit satu penyelesaian, dengan syarat tertentu, hanya ada satu penyelesaian, akan dibuktikan teorema eksistensi dan ketunggalan untuk persamaan diferensi linear orde- n , tetapi akan dilihat lebih dahulu pada kasus yang khusus yaitu pada persamaan diferensi linear orde-2.

Persamaan diferensi linear orde-2 mempunyai bentuk

$$f_k^{(0)} y_{k+2} + f_k^{(1)} y_{k+1} + f_k^{(2)} y_k = g_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (4.1)$$

dengan koefisien-koefisien dari y_k dan y_{k+2} tidak sama dengan 0, yang berarti,

$$f_k^{(0)} \neq 0, f_k^{(2)} \neq 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (4.2)$$

Jika $k = 0$, maka persamaan (4.1) menjadi

$$f_0^{(0)} y_2 + f_0^{(1)} y_1 + f_0^{(2)} y_0 = \xi_0 \quad (4.3)$$

Pada persamaan diferensi linear orde-2 jika hanya diketahui salah satu dari nilai y_0 , y_1 , atau y_2 tidak memungkinkan untuk ditemukan dua nilai yang lainnya. Tetapi jika diketahui dua nilai berturutan y_0 dan y_1 , dapat ditemukan y_2 , dengan kata lain untuk persamaan diferensi linear orde-2 diperlukan dua syarat awal yang berturutan. Untuk itu persamaan (4.3) diubah menjadi

$$f_0^{(0)} y_2 = \xi_0 - f_0^{(1)} y_1 - f_0^{(2)} y_0$$

dan mengingat persamaan (4.2) boleh dibagi dengan $f_0^{(0)}$ untuk menghasilkan y_2 .

Jika $k = 1$, maka persamaan (4.1) menjadi

$$f_1^{(0)} y_3 + f_1^{(1)} y_2 + f_1^{(2)} y_1 = \xi_1 \quad (4.4)$$

Sekarang digunakan nilai-nilai dari y_1 dan y_2 untuk menemukan y_3 . Untuk itu persamaan (4.4) diubah menjadi

$$f_1^{(0)} y_3 = \xi_1 - f_1^{(1)} y_2 - f_1^{(2)} y_1$$

dengan mengingat persamaan (4.2) boleh dibagi dengan $f_1^{(0)}$ untuk menghasilkan y_3 . Dengan cara yang sama, maka akan dihasilkan penyelesaian tunggal dari persamaan diferensi orde-2 (4.1) dimulai dengan dua nilai y_0 dan y_1 .

Andaikan persamaan diferensi didefinisikan lewat himpunan S dengan $a \leq k$ atau $a \leq k \leq b$,
dengan a, b bilangan bulat non negatif. (4.5)

TEOREMA 3.1.1.10 Persamaan diferensi linear orde- n

$$f_k^{(0)} y_{k+n} + f_k^{(1)} y_{k+n-1} + \dots + f_k^{(n-1)} y_{k+1} + f_k^{(n)} y_k = \xi_k \quad (4.6)$$

lewat suatu himpunan S dengan nilai k yang merupakan bilangan bulat yang berturutan, dengan $f_k^{(0)} \neq 0$ dan $f_k^{(n)} \neq 0$, mempunyai satu dan hanya satu penyelesaian y yang nilainya pada n berturutan dengan nilai k yang secara sebarang ditetapkan.

Bukti : Dengan hipotesa, S merupakan himpunan dari salah satu bentuk dalam persamaan (4.5). Andaikan pertama-tama ditentukan n nilai dari y yaitu $y_a, y_{a+1}, \dots, y_{a+n-1}$ dibuktikan dengan menggunakan induksi matematika, bahwa nilai dari y pada tiap titik dari S adalah tunggal, jadi membuktikan bahwa terdapat suatu penyelesaian tunggal. Jika $k = a$, maka persamaan (4.6) menjadi,

$$f_a^{(0)} y_{a+n} + f_a^{(1)} y_{a+n-1} + \dots + f_a^{(n-1)} y_{a+1} + f_a^{(n)} y_a = \xi_a \quad (4.7)$$

kemudian persamaan (4.7) diubah bentuknya menjadi

$$f_a^{(0)} y_{a+n} = \xi_a - f_a^{(1)} y_{a+n-1} - \dots - f_a^{(n-1)} y_{a+1} - f_a^{(n)} y_a \quad (4.8)$$

karena $f_a^{(0)} \neq 0$ maka persamaan (4.8) dapat dibagi oleh $f_a^{(0)}$ untuk menghasilkan y_{a+n} . Sekarang andaikan dibuat hipotesis induksi bahwa y diketahui untuk setiap nilai k dalam S sampai dengan y_{a+j} dengan $j \geq n$. Pembuktian ini diselesaikan dengan menunjukkan bahwa y_{a+j+1} merupakan penyelesaian tunggal.

Jika $k = k_1 = a + j + 1 - n$, maka persamaan (4.6) menjadi

$$f_{k_1}^{(0)} y_{a+j+1} + f_{k_1}^{(1)} y_{a+j} + f_{k_1}^{(2)} y_{a+j-1} + \dots + f_{k_1}^{(n)} y_{a+j-n+1} = \xi_{k_1}$$

kemudian diubah bentuknya menjadi

$$f_{k_1}^{(0)} y_{a+j+1} = \xi_{k_1} - f_{k_1}^{(1)} y_{a+j} - f_{k_1}^{(2)} y_{a+j-1} - \dots - f_{k_1}^{(n)} y_{a+j-n+1}$$

karena $f_{k_1}^{(0)} \neq 0$ maka persamaan ini dapat dibagi oleh $f_{k_1}^{(0)}$ sehingga dihasilkan y_{a+j+1} .

Sekarang terbukti bahwa y ditentukan dengan tunggal untuk setiap nilai k dalam S asalkan nilai $y_a, y_{a+1}, \dots, y_{a+n-1}$ sudah ditentukan. ■

Teorema (3.1.1.10) sangat penting, bukan karena memberitahu bagaimana mencari penyelesaian tetapi membuat agar percaya bahwa suatu persamaan diferensi dengan syarat-syarat tertentu yang sudah ditentukan hanya mempunyai satu penyelesaian.

BAB IV

PERSAMAAN DIFERENSI LINEAR DENGAN KOEFISIEN KONSTAN

4.1 Pengantar

DEFINISI 4.1.1 Persamaan diferensi dikatakan linear orde- n dengan koefisien konstan, jika mempunyai bentuk

$$b_k^{(0)} y_{k+n} + b_k^{(1)} y_{k+n-1} + \dots + b_k^{(n-1)} y_{k+1} + b_k^{(n)} y_k = g_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (4.1)$$

dengan $b^{(0)}, b^{(1)}, \dots, b^{(n)}$ merupakan fungsi konstan dan g sebarang fungsi k tapi tidak perlu konstan, dimana $b^{(0)} \neq 0, b^{(n)} \neq 0$.

CONTOH 4.1.1

a. $2 y_{k+1} - y_k = 6 \quad (\text{PDL orde-1}) \quad (4.2)$

b. $3 y_{k+2} + 2 y_{k+1} + y_k = 3^k \quad (\text{PDL orde-2}) \quad (4.3)$

c. $y_{k+3} - y_k = k \quad (\text{PDL orde-3}) \quad (4.4)$

Karena $b^{(0)} \neq 0$ maka persamaan (4.1) dapat dibagi dengan $b^{(0)}$, sehingga diperoleh bentuk,

$$y_{k+n} + a_1 y_{k+n-1} + \dots + a_{n-1} y_{k+1} + a_n y_k = r_k \quad (4.5)$$

dimana $a_1 = b^{(1)}/b^{(0)}, a_2 = b^{(2)}/b^{(0)}, \dots, a_n = b^{(n)}/b^{(0)}, r_k = g_k/b^{(0)}$.

Persamaan (4.5) disebut persamaan diferensi linear baku orde- n dengan koefisien konstan.

Sehingga persamaan (4.2 - 4.4) menjadi

$$y_{k+1} - \frac{1}{2} y_k = 3 \quad (4.2')$$

$$y_{k+2} + \frac{2}{3} y_{k+1} + \frac{1}{3} y_k = 3^{k-1} \quad (4.3')$$

$$y_{k+3} - y_k = k \quad (4.4')$$

DEFINISI 4.1.2 Persamaan diferensi linear orde- n dengan koefisien konstan dikatakan homogen jika ruas kanan dari persamaan (4.5) sama dengan nol, yang berarti,

$$y_{k+n} + a_1 y_{k+n-1} + \dots + a_{n-1} y_{k+1} + a_n y_k = 0 \quad (4.6)$$

sedangkan persamaan (4.5) adalah persamaan diferensi linear non homogen orde- n dengan koefisien konstan (atau disebut juga persamaan lengkap).

CONTOH 4.1.2

- a. $y_{k+1} - \frac{1}{2} y_k = 0$ (PDLH orde-1)
- b. $y_{k+2} + \frac{2}{3} y_{k+1} + \frac{1}{3} y_k = 3^{k-1}$ (PDLNH orde-2)
- c. $y_{k+3} - y_k = k$ (PDLNH orde-3)

TEOREMA 4.1 Jika $y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(n)}$ adalah fungsi-fungsi yang memenuhi persamaan diferensi (4.6), dan jika $c_1, c_2, \dots, c_n$ adalah konstanta-konstanta sebarang, maka $c_1 y^{(1)} + c_2 y^{(2)} + \dots + c_n y^{(n)}$ juga memenuhi persamaan (4.6).

Bukti : Akan ditunjukkan jika $y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(n)}$ memenuhi persamaan (4.6), maka $c_1 y^{(1)} + c_2 y^{(2)} + \dots + c_n y^{(n)}$ juga memenuhi persamaan (4.6), yang berarti, harus ditunjukkan bahwa :

$$\begin{aligned} & (c_1 y_{k+n}^{(1)} + c_2 y_{k+n}^{(2)} + \dots + c_n y_{k+n}^{(n)}) + a_1 (c_1 y_{k+n-1}^{(1)} + \\ & c_2 y_{k+n-1}^{(2)} + \dots + c_n y_{k+n-1}^{(n)}) + \dots + a_{n-1} (c_1 y_{k+1}^{(1)} + c_2 y_{k+1}^{(2)} \\ & + \dots + c_n y_{k+1}^{(n)}) + a_n (c_1 y_k^{(1)} + c_2 y_k^{(2)} + \dots + c_n y_k^{(n)}) = 0 \end{aligned}$$

kemudian ruas kiri disederhanakan bentuknya menjadi,

$$\begin{aligned} & c_1(y_{k+n}^{(1)} + a_1 y_{k+n-1}^{(1)} + \dots + a_{n-1} y_{k+1}^{(1)} + a_n y_k^{(1)}) + \\ & c_2(y_{k+n}^{(2)} + a_1 y_{k+n-1}^{(2)} + \dots + a_{n-1} y_{k+1}^{(2)} + a_n y_k^{(2)}) + \dots + \\ & c_n(y_{k+n}^{(n)} + a_1 y_{k+n-1}^{(n)} + \dots + a_{n-1} y_{k+1}^{(n)} + a_n y_k^{(n)}) \end{aligned}$$

ternyata yang di dalam kurung sama dengan nol karena berdasarkan asumsi di atas. Jadi jumlahan di atas sama dengan nol.

Terbukti bahwa $c_1 y^{(1)} + c_2 y^{(2)} + \dots + c_n y^{(n)}$ juga memenuhi persamaan (4.6). ■

TEOREMA 4.2 Jika Y adalah suatu penyelesaian dari persamaan homogen (4.6) dan y^* adalah penyelesaian partikular dari persamaan non homogen (4.5), maka $Y + y^*$ adalah penyelesaian umum dari persamaan lengkap (4.5).

Bukti : Y adalah penyelesaian dari persamaan homogen (4.6), berarti

$$Y_{k+n} + a_1 Y_{k+n-1} + \dots + a_{n-1} Y_{k+1} + a_n Y_k = 0$$

y^* adalah penyelesaian partikular dari persamaan non homogen (4.5), berarti

$$y_{k+n}^* + a_1 y_{k+n-1}^* + \dots + a_{n-1} y_{k+1}^* + a_n y_k^* = r_k$$

kemudian kedua persamaan ini dijumlahkan, dihasilkan

$$\begin{aligned} & (Y_{k+n} + y_{k+n}^*) + a_1 (Y_{k+n-1} + y_{k+n-1}^*) + \dots + a_{n-1} \\ & (Y_{k+1} + y_{k+1}^*) + a_n (Y_k + y_k^*) = r_k \end{aligned}$$

ternyata memenuhi persamaan lengkap (4.5), sehingga terbukti bahwa $Y + y^*$ adalah penyelesaian umum dari persamaan lengkap (4.5). ■

4.2 Persamaan Diferensi Linear Homogen dengan Koefisien Konstan

4.2.1 Persamaan diferensi linear homogen orde-1 dengan koefisien konstan

DEFINISI 4.2.1.1 Persamaan diferensi dikatakan linear orde-1 dengan koefisien konstan jika mempunyai bentuk,

$$b_k^{(0)} y_{k+1} + b_k^{(1)} y_k = g_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (4.7)$$

dengan $b_k^{(0)}$, $b_k^{(1)}$ adalah fungsi-fungsi konstan yang tidak nol. Andaikan persamaan (4.7) dibagi oleh $b_k^{(0)}$, maka diperoleh

$$y_{k+1} = - \frac{b_k^{(1)}}{b_k^{(0)}} y_k + \frac{g_k}{b_k^{(0)}}$$

sehingga jika $b_k^{(0)}$, $b_k^{(1)}$, g adalah fungsi-fungsi konstan, maka persamaan di atas dapat ditulis dalam bentuk

$$y_{k+1} = Ay_k + B, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (4.8)$$

dimana A , B adalah konstanta-konstanta sebarang ($A \neq 0$).

Sedangkan jika B sama dengan nol, maka persamaan (4.8) adalah persamaan diferensi linear orde-1 homogen dengan koefisien konstan.

CONTOH 4.2.1.1

- $y_{k+1} = 3y_k + 8$ (PDLNH orde-1)
- $y_{k+1} = y_k + 1$ (PDLNH orde-1)
- $y_{k+1} - 3y_k = 0$ (PDLH orde-1)
- $y_{k+1} - y_k = 0$ (PDLH orde-1)

Penyelesaian Persamaan Diferensi (4.8)

TEOREMA 4.3 Persamaan diferensi linear orde-1 dengan koefisien konstan

$$y_{k+1} = Ay_k + B, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

mempunyai penyelesaian umum

$$y_k = \begin{cases} A^k y_0 + B \frac{1 - A^k}{1 - A}, & \text{jika } A \neq 1 \\ y_0 + Bk & \text{jika } A = 1 \end{cases}, \quad k = 0, 1, \dots$$

Bukti : Andaikan ditentukan syarat awal y_0 , maka persamaan (4.8), dengan $k = 0$ diperoleh,

$$y_1 = Ay_0 + B \quad (4.9)$$

jika $k = 1$, maka diperoleh

$$\begin{aligned} y_2 &= Ay_1 + B = A(Ay_0 + B) + B \\ &= A^2 y_0 + B(1 + A) \end{aligned} \quad (4.10)$$

jika $k = 2$, maka diperoleh

$$\begin{aligned} y_3 &= Ay_2 + B \\ &= A[A^2 y_0 + B(1 + A)] + B \\ &= A^3 y_0 + B(1 + A + A^2) \end{aligned} \quad (4.11)$$

Demikian seterusnya, akhirnya diperoleh

$$\begin{aligned} y_k &= A^k y_0 + B(1 + A + A^2 + \dots + A^{k-1}), \\ k &= 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (4.12)$$

ternyata jumlahan yang terletak di dalam kurung pada persamaan (4.12) merupakan suatu deret geometri dengan suku pertama 1 dan rasionya A , oleh karena itu

$$1 + A + A^2 + \dots + A^{k-1} = \begin{cases} \frac{1 - A^k}{1 - A}, & \text{jika } A \neq 1 \\ k & \text{jika } A = 1 \end{cases}$$

akhirnya persamaan (4.12) menjadi,

$$y_k = \begin{cases} A^k y_0 + B \frac{1 - A^k}{1 - A}, & \text{jika } A \neq 1 \\ y_0 + Bk & \text{jika } A = 1 \end{cases}, k = 0, 1, \dots \quad (4.13)$$

selanjutnya jika y_k disubstitusikan ke dalam persamaan (4.8) ternyata y_k memenuhi persamaan (4.8).

Jadi persamaan (4.13) adalah penyelesaian umum dari persamaan diferensi (4.8).

TEOREMA 4.4 Jika fungsi y yang terdapat dalam persamaan (4.13) merupakan suatu penyelesaian, maka hanya ada satu penyelesaian dari persamaan diferensi (4.8) dengan syarat awal y_0 .

Bukti : Sebelumnya perhatikan bahwa fungsi y yang terdapat dalam persamaan (4.13) sebenarnya mereduksi y_0 pada saat $k = 0$. Tetapi juga dapat ditunjukkan dengan mensubstitusikannya ke dalam persamaan diferensi. Dari persamaan (4.13) dimana $A \neq 1$, diperoleh

$$y_{k+1} = A^{k+1} y_0 + B \frac{1 - A^{k+1}}{1 - A},$$

akan ditunjukkan bahwa

$$A^{k+1} y_0 + B \frac{1 - A^{k+1}}{1 - A} = A \left(A^k y_0 + B \frac{1 - A^k}{1 - A} \right) + B$$

merupakan suatu identitas, berarti benar untuk $k = 0, 1, 2, \dots$.

Untuk menunjukkannya cukup dengan menyederhanakan ruas kanan menjadi

$$A^{k+1} y_0 + B \left[1 + \frac{A(1 - A^k)}{1 - A} \right]$$

Perhatikan bahwa

$$1 + \frac{A(1 - A^k)}{1 - A} = \frac{1 - A + A(1 - A^k)}{1 - A} = \frac{1 - A^{k+1}}{1 - A}$$

Oleh karena itu,

$$\begin{aligned} A^{k+1}y_0 + B \frac{1 - A^{k+1}}{1 - A} &= A \left(A^k y_0 + B \frac{1 - A^k}{1 - A} \right) + B \\ &= A^{k+1}y_0 + B \left[1 + \frac{A(1 - A^k)}{1 - A} \right] \\ &= A^{k+1}y_0 + B \frac{1 - A^{k+1}}{1 - A} \end{aligned}$$

Sedangkan untuk $A = 1$, diperoleh

$$y_{k+1} = y_0 + B(k+1)$$

akan ditunjukkan bahwa

$$y_0 + B(k+1) = A(y_0 + Bk) + B$$

Dengan menyederhanakan ruas kanan menjadi

$$Ay_0 + ABk + B$$

diperoleh,

$$\begin{aligned} y_0 + B(k+1) &= A(y_0 + Bk) + B \\ &= Ay_0 + B(Ak + 1) \\ &= y_0 + B(k+1), \text{ karena } A = 1 \end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa hanya ada satu penyelesaian persamaan (4.8) dengan syarat awal y_0 . ■

AKIBAT Jika fungsi y yang diberikan pada persamaan (4.13) adalah penyelesaian dari persamaan diferensi (4.8), maka terdapat suatu konstanta c dengan,

$$y_k = \begin{cases} cA^k + B \frac{1 - A^k}{1 - A}, & \text{jika } A \neq 1 \\ c + Bk, & \text{jika } A = 1 \end{cases}, k = 0, 1, 2, \dots \quad (4.14)$$

Bukti : hanya dengan menyamakan konstanta c dengan syarat awal y_0 dan memakai teorema 4.4. ■

Jadi persamaan (4.14) merupakan penyelesaian persamaan diferensi (4.8) dimana satu penyelesaian untuk masing-masing nilai konstanta c .

CONTOH :

a. Andaikan diberikan persamaan diferensi

$$y_{k+1} = 2y_k + 1, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

dengan syarat awal $y_0 = 5$. Carilah penyelesaiannya !

Jawab : Dengan menggunakan persamaan (4.13) dimana $A = 2$, $B = 1$ dan $y_0 = 5$ maka diperoleh,

$$y_k = 5 \cdot 2^k + 1 \cdot \frac{1 - 2^k}{1 - 2}, \quad \text{karena } A \neq 1$$

atau

$$y_k = 6 \cdot 2^k - 1, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Jadi $y_k = 6 \cdot 2^k - 1$ adalah penyelesaian tunggal dari persamaan diferensi yang diberikan dan memenuhi syarat awal $y_0 = 5$.

b. Andaikan diberikan persamaan diferensi

$$2y_{k+1} - y_k = 4, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

dengan syarat awal $y_0 = 3$. Carilah penyelesaiannya !

Jawab : Pertama-tama ubah persamaan diferensi di atas ke dalam bentuk baku menjadi,

$$y_{k+1} = \frac{1}{2} y_k + 2, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

dengan menggunakan persamaan (4.13) dimana $A = \frac{1}{2}$, $B = 2$

dan $y_0 = 3$ maka diperoleh,

$$y_k = 3.\left(\frac{1}{2}\right)^k + 2.\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^k}{1 - \frac{1}{2}}, \text{ karena } A \neq 1$$

atau

$$y_k = 4 - \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

Jadi $y_k = 4 - \left(\frac{1}{2}\right)^k$ adalah penyelesaian tunggal dari persamaan diferensi yang diberikan dan memenuhi syarat awal $y_0 = 3$.

c. Andaikan diberikan persamaan diferensi

$$y_{k+1} = -y_k + 1, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

dengan syarat awal $y_0 = 1$. Carilah penyelesaiannya !

Jawab : Dengan menggunakan persamaan (4.13), dimana $A = -1$, $B = 1$ dan $y_0 = 1$ maka diperoleh,

$$\begin{aligned} y_k &= (-1)^k + \frac{1 - (-1)^k}{1 - (-1)} \\ &= (-1)^k + \frac{1 - (-1)^k}{2} \\ &= \frac{1}{2} [2 \cdot (-1)^k + 1 - (-1)^k] \\ &= \frac{1}{2} [1 + (-1)^k], \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Jadi $y_k = \frac{1}{2} [1 + (-1)^k]$ adalah penyelesaian tunggal dari persamaan diferensi yang diberikan dan memenuhi syarat awal $y_0 = 1$.

d. Andaikan diberikan persamaan diferensi

$$y_{k+1} = 3y_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

dengan syarat awal $y_0 = 2$. Carilah penyelesaiannya !

Jawab : Dengan menggunakan persamaan (4.13) dimana $A = 3$, $B = 0$ dan $y_0 = 2$ maka diperoleh,

$$y_k = 2.(3)^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Jadi $y_k = 2.(3)^k$ adalah penyelesaian tunggal dari persamaan diferensi yang diberikan dan memenuhi syarat awal $y_0 = 2$.

e. Andaikan diberikan persamaan diferensi

$$2y_{k+1} = y_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

dengan syarat awal $y_0 = 3$. Carilah penyelesaiannya !

Jawab : Pertama-tama ubah persamaan di atas ke dalam bentuk baku menjadi

$$y_{k+1} = \frac{1}{2} y_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

dengan menggunakan persamaan (4.13) dimana $A = \frac{1}{2}$, $B = 0$ dan $y_0 = 3$ maka diperoleh,

$$y_k = 3.\left(\frac{1}{2}\right)^k$$

Jadi $y_k = 3.\left(\frac{1}{2}\right)^k$ adalah penyelesaian tunggal dari persamaan diferensi yang diberikan dan memenuhi syarat awal $y_0 = 3$.

Dari contoh-contoh di atas, ternyata penyelesaian tunggal dari persamaan diferensi tergantung pada syarat awal y_0 . Sekarang dapatkan jika syarat awal yang diberikan sebarang nilai y ? Jawabannya adalah ya. Seperti contoh di bawah ini.

CONTOH :

a. Mencari penyelesaian persamaan diferensi

$$y_{k+1} = 3y_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

dengan syarat awal $y_0 = 9$.

sehingga penyelesaiannya menjadi

$$y_k = \frac{1}{3} (3)^k = 3^{k-1}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Jadi $y_k = 3^{k-1}$ adalah penyelesaian tunggal dari persamaan diferensi yang diberikan dan memenuhi syarat awal $y_0 = 9$.

b. Mencari penyelesaian persamaan diferensi

$$y_{k+1} = 2y_k - 1, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

dengan syarat awal $y_0 = 9$

Jawab : Dengan memakai persamaan (4.14), dimana $A = 2$, $B = -1$ diperoleh,

$$y_k = c \cdot 2^k - \frac{1 - 2^k}{1 - 2}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

karena $y_0 = 9$ ambil $k = 0$ diperoleh,

$$y_0 = c \cdot 2^0 - \frac{1 - 2^0}{1 - 2}$$

$$9 = 8c - 7$$

$$c = 2$$

sehingga penyelesaiannya menjadi

$$y_k = 2 \cdot 2^k - \frac{1 - 2^k}{1 - 2}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

atau

$$y_k = 2^k + 1$$

Jadi $y_k = 2^k + 1$ adalah penyelesaian tunggal persamaan diferensi yang diberikan dan memenuhi syarat awal $y_0 = 9$.

4.2.2 Persamaan diferensi linear homogen orde-2 dengan koefisien konstan.

DEFINISI 4.2.2.1 Persamaan diferensi linear homogen orde-2 dengan koefisien konstan mempunyai bentuk umum

$$y_{k+2} + a_1 y_{k+1} + a_2 y_k = 0 \quad (4.15)$$

dengan a_1, a_2 adalah konstanta-konstanta sebarang ($a_2 \neq 0$).

CONTOH 4.2.2.1 :

- a. $y_{k+2} - 3y_{k+1} + 2y_k = 0$
- b. $y_{k+2} - 2y_{k+1} + y_k = 0$
- c. $y_{k+2} + y_k = 0$

DEFINISI 4.2.2.2 Fungsi-fungsi $y^{(1)}, y^{(2)}$ disebut tak bebas linear jika terdapat konstanta-konstanta c_1, c_2 yang tidak seluruhnya nol sedemikian hingga

$$c_1 y_k^{(1)} + c_2 y_k^{(2)} \equiv 0 \quad (4.16)$$

sebaliknya, jika persamaan (4.16) berlaku hanya bila konstanta-konstanta c_1, c_2 adalah nol maka fungsi-fungsi $y^{(1)}, y^{(2)}$ adalah bebas linear.

TEOREMA 4.5 fungsi-fungsi $y^{(1)}, y^{(2)}$ adalah penyelesaian-penyelesaian persamaan (4.15) tak bebas linear bhh

$$W_t = \begin{vmatrix} y_t^{(1)} & y_t^{(2)} \\ y_{t+1}^{(1)} & y_{t+1}^{(2)} \end{vmatrix} = 0$$

BUKTI :

($\Rightarrow$) Andaikan penyelesaian-penyelesaian $y^{(1)}, y^{(2)}$ tak bebas linear, ini berarti terdapat konstanta-konstanta c_1, c_2 yang tidak seluruhnya nol sedemikian hingga (4.16) benar. Andaikan diambil sebarang nilai t sebut t_0 kemudian substitusikan ke dalam persamaan (4.16), diperoleh

$$(i) \begin{cases} c_1 y_{t_0}^{(1)} + c_2 y_{t_0}^{(2)} = 0 \\ c_1 y_{t_0+1}^{(1)} + c_2 y_{t_0+1}^{(2)} = 0 \end{cases}$$

persamaan tersebut adalah dua persamaan linear dengan dua variabel yang tidak seluruhnya nol. Ini berarti bahwa determinan koefisien-koefisiennya harus nol. Tetapi determinan koefisien-koefisien itu adalah W_{t_0} , selama t_0 adalah sebarang nilai t . Jadi $W_t = 0$.

($\Leftarrow$) Andaikan $W_t = 0$ maka untuk sebarang nilai t sebut t_0 sistem persamaan (i) mempunyai penyelesaian-penyelesaian c_1, c_2 yang tidak seluruhnya nol.

Jika $\xi_t = c_1 y_t^{(1)} + c_2 y_t^{(2)}$ adalah penyelesaian persamaan (4.15) maka $\xi_t \equiv 0$. Karena diketahui $\xi_{t_0} \equiv 0$, $\xi_{t_0+1} \equiv 0$. Ini berarti bahwa fungsi-fungsi $y_t^{(1)}, y_t^{(2)}$ adalah tak bebas linear.

Penyelesaian persamaan diferensi (4.15)

Sebelum menyelesaikan persamaan diferensi ini timbul suatu pertanyaan syarat apakah yang harus ditentukan oleh

kedua penyelesaian $y^{(1)}$ dan $y^{(2)}$ dari persamaan (4.15) supaya

$$Y_k = c_1 y_k^{(1)} + c_2 y_k^{(2)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

dengan c_1, c_2 adalah konstanta-konstanta sebarang yang tidak sama dengan nol, merupakan penyelesaian umum persamaan diferensi (4.15). Teorema dibawah ini akan menjawab pertanyaan di atas.

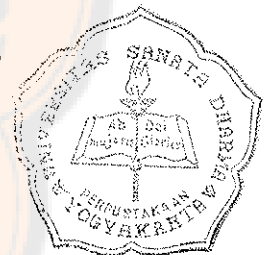
TEOREMA 4.6. Andaikan $y^{(1)}$ dan $y^{(2)}$ adalah penyelesaian-penyelesaian dari persamaan homogen (4.15) dan andaikan

$$Y_k = c_1 y_k^{(1)} + c_2 y_k^{(2)},$$

dengan c_1, c_2 adalah konstanta-konstanta sebarang yang tidak sama dengan nol. Jika

$$\begin{vmatrix} y_0^{(1)} & y_0^{(2)} \\ y_1^{(1)} & y_1^{(2)} \end{vmatrix} = y_0^{(1)} \cdot y_1^{(2)} - y_0^{(2)} \cdot y_1^{(1)} \neq 0 \quad (4.17)$$

maka Y_k adalah penyelesaian umum persamaan (4.15).



Bukti : Dengan menggunakan teorema 4.1, Y adalah suatu penyelesaian dari (4.15) akan ditunjukkan jika y adalah sebarang penyelesaian dari persamaan (4.15), maka c_1 dan c_2 dapat ditentukan asalkan Y dan y sama. Berdasarkan teorema ketunggalan, cukup ditunjukkan bahwa Y dan y sama pada $k = 0$ dan $k = 1$. Berarti, harus ditentukan c_1 dan c_2 dengan $Y_0 = y_0$ dan $Y_1 = y_1$.

Jika $Y_0 = c_1 y_0^{(1)} + c_2 y_0^{(2)}$ dan $Y_1 = c_1 y_1^{(1)} + c_2 y_1^{(2)}$, maka

$$c_1 y_0^{(1)} + c_2 y_0^{(2)} = y_0$$

$$c_1 y_1^{(1)} + c_2 y_1^{(2)} = y_1$$

ternyata ini merupakan dua persamaan linear dengan c_1 dan c_2 yang tidak diketahui. Koefisien-koefisien c_1 dan c_2 tidak sama dengan nol. Selanjutnya hitung determinannya,

$$\begin{vmatrix} y_0^{(1)} & y_0^{(2)} \\ y_1^{(1)} & y_1^{(2)} \end{vmatrix} = y_0^{(1)} \cdot y_1^{(2)} - y_0^{(2)} \cdot y_1^{(1)} \neq 0$$

sehingga diperoleh sepasang nilai c_1 dan c_2 .

Jadi Y_k adalah penyelesaian umum dari persamaan (4.15). ■

DEFINISI 4.2.2.3 Dua penyelesaian $y^{(1)}$ dan $y^{(2)}$ dari persamaan (4.15) yang memenuhi persamaan (4.17) dikatakan merupakan suatu bentuk himpunan dasar penyelesaian persamaan (4.15).

Istilah ini dapat digunakan untuk menyatakan kembali teorema 4.4 sebagai berikut :

Penyelesaian umum persamaan (4.15) adalah

$$Y = c_1 y^{(1)} + c_2 y^{(2)},$$

dimana $y^{(1)}$, $y^{(2)}$ adalah suatu bentuk himpunan dasar penyelesaian dan c_1 dan c_2 adalah konstanta-konstanta sebarang.

Selanjutnya akan dibahas bagaimana mencari penyelesaian umum persamaan diferensi linear homogen orde-2.

Andaikan penyelesaian persamaan (4.15) adalah

$$y_k = m^k \tag{4.18}$$

dengan m konstanta sebarang, $m \neq 0$.

Sebab jika $m = 0$, maka $y_k = 0$ tidak berarti apa-apa.

Andaikan persamaan (4.17) disubstitusikan ke dalam persamaan (4.15), diperoleh

$$m^{k+2} + a_1 m^{k+1} + a_2 m^k = 0$$

Kemudian difaktorkan dihasilkan

$$m^2 + a_1 m + a_2 = 0 \quad (4.19)$$

yang merupakan persamaan bantu (atau persamaan karakteristik) dari persamaan diferensi (4.15).

Jika m adalah suatu bilangan yang memenuhi persamaan bantu (m kemudian disebut akar dari persamaan itu), maka persamaan (4.18) adalah salah satu bentuk himpunan dasar penyelesaian dari persamaan (4.15). Ternyata persamaan bantu (4.19) merupakan persamaan aljabar bentuk kuadrat, sehingga mempunyai 2 akar-akar sebut m_1 dan m_2 yang keduanya tidak sama dengan nol, sebab pada persamaan (4.15) terdapat suatu syarat dimana $a_2 \neq 0$. Akibatnya terdapat hubungan yang bersesuaian antara akar-akar dari persamaan (4.19) dengan bentuk himpunan dasar penyelesaian diperoleh,

$$y_k^{(1)} = m_1^k \text{ dan } y_k^{(2)} = m_2^k \quad (4.20)$$

Persamaan bantu yang dibicarakan menyangkut akar-akar dari persamaan kuadrat, diperoleh 3 kasus yang menyangkut akar-akar tersebut yaitu :

- (1). Akar-akar m_1 dan m_2 merupakan bilangan real yang tidak sama
- (2). Kedua akarnya real dan sama
- (3). Kedua akarnya merupakan bilangan kompleks

CONTOH :

a. Diberikan persamaan diferensi homogen

$$y_{k+2} - 3y_{k+1} + 2y_k = 0 \quad (4.21)$$

Persamaan bantu yang bersesuaian adalah

$$m^2 - 3m + 2 = 0$$

kemudian difaktorkan untuk mencari akar-akar persamaan ini, diperoleh

$$(m - 1)(m - 2) = 0$$

$$m_1 = 1 \text{ dan } m_2 = 2$$

ternyata $m_1 = 1$ dan $m_2 = 2$ real dan tidak sama.

b. Diberikan persamaan diferensi homogen

$$y_{k+2} - 2y_{k+1} + y_k = 0 \quad (4.22)$$

Persamaan bantu yang bersesuaian adalah

$$m^2 - 2m + 1 = 0$$

$$(m - 1)(m - 1) = 0$$

$$m_1 = 1 \text{ dan } m_2 = 1$$

ternyata $m_1 = 1$ dan $m_2 = 1$ real dan sama.

c. Diberikan persamaan diferensi homogen

$$y_{k+2} + y_k = 0 \quad (4.23)$$

Persamaan bantu yang bersesuaian adalah

$$m^2 + 1 = 0$$

$$m^2 = -1$$

diperoleh akar-akarnya $m_1 = i$ dan $m_2 = -i$, dimana $i = \sqrt{-1}$

Jadi kedua akarnya merupakan bilangan kompleks.

Untuk selanjutnya akan dibicarakan perkusus secara lebih terinci.

KASUS I AKAR-AKARNYA REAL DAN TIDAK SAMA

Andaikan diberikan suatu bentuk himpunan dasar dalam persamaan (4.19) yaitu $y_k^{(1)} = m_1^k$ dan $y_k^{(2)} = m_2^k$. Kemudian dihitung determinannya dengan mengambil $k = 0$ dan $k = 1$, diperoleh

$$\begin{vmatrix} y_0^{(1)} & y_0^{(2)} \\ y_1^{(1)} & y_1^{(2)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ m_1 & m_2 \end{vmatrix} = m_2 - m_1 \neq 0$$

sebab $m_1 \neq m_2$. Jadi menurut teorema 4.6 penyelesaian umum persamaan diferensi homogen (4.15) adalah

$$Y_k = c_1 m_1^k + c_2 m_2^k$$

CONTOH :

a. Persamaan diferensi (4.21) setelah ditemukan akar-akar persamaan bantu ternyata real dan tidak sama yaitu $m_1 = 1$ dan $m_2 = 2$. Jadi penyelesaian umumnya adalah

$$Y_k = c_1 1^k + c_2 2^k = c_1 + c_2 2^k$$

b. Diberikan persamaan diferensi homogen

$$y_{k+2} + 3y_{k+1} + y_k = 0 \quad (4.24)$$

Tentukan penyelesaian umumnya !

Jawab : Persamaan (4.24) mempunyai persamaan bantu

$$m^2 + 3m + 1 = 0$$

Kemudian akar-akar persamaannya dihitung menggunakan rumus kuadrat diperoleh,

$$m_1 = \frac{-3 + \sqrt{5}}{2} \text{ dan } m_2 = \frac{-3 - \sqrt{5}}{2}$$

ternyata akar-akarnya real dan tidak sama.

Jadi penyelesaian umumnya adalah

$$Y_k = c_1 \left(\frac{-3 + \sqrt{5}}{2} \right)^k + c_2 \left(\frac{-3 - \sqrt{5}}{2} \right)^k$$

KASUS II AKAR-AKARNYA REAL DAN SAMA

Pada kasus ini, andaikan bentuk dari himpunan dasar penyelesaian dalam persamaan (4.20) yaitu $y_k^{(1)} = m_1^k$ dan $y_k^{(2)} = m_2^k$ dihitung determinannya hasilnya adalah nol, karena $m_1 = m_2$. Oleh karena itu ditetapkan $y_k^{(1)} = m_1^k$, sedangkan untuk,

$$y_k^{(2)} = k m_1^k \quad (4.25)$$

Untuk membuktikan jika $m_1 = m_2$, maka persamaan (4.25) juga merupakan penyelesaiannya, substitusikan persamaan (4.25) ke dalam persamaan diferensi (4.15), diperoleh

$$\begin{aligned} y_{k+2}^{(2)} + a_1 y_{k+1}^{(2)} + a_2 y_k^{(2)} &= (k+2)m_1^{k+2} + a_1(k+1)m_1^{k+1} \\ &\quad + a_2 k m_1^k \\ &= k m_1^k (m_1^2 + a_1 m_1 + a_2) + m_1^{k+1} \\ &\quad (2m_1 + a_1) \end{aligned} \quad (4.26)$$

tetapi yang berada dalam tanda kurung pertama jumlahnya nol selama m_1 adalah akar persamaan bantu. Sedangkan yang berada dalam tanda kurung kedua jumlahnya juga nol karena jumlah dari akar-akar persamaan bantu adalah $-a_1$ yang berarti $m_1 + m_2 = -a_1$, sehingga jika $m_1 = m_2$, maka $2m_1 = -a_1$. Jadi $2m_1 + a_1 = 0$. Akibatnya persamaan (4.25) juga

suatu penyelesaian dari persamaan diferensi. Kemudian dihitung determinannya dengan mengambil $k = 0$ dan $k = 1$, diperoleh,

$$\begin{vmatrix} y_0^{(1)} & y_0^{(2)} \\ y_1^{(1)} & y_1^{(2)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ m_1 & m_1 \end{vmatrix} = m_1 \neq 0$$

sebab tidak ada akar dari persamaan bantu yang sama dengan nol.

Jadi, dengan akar-akar m_1 dan m_2 sama, penyelesaian umum persamaan (4.15) adalah

$$Y_k = c_1 m_1^k + c_2 k m_1^k$$

atau

$$Y_k = (c_1 + c_2 k) m_1^k$$

CONTOH :

a. Persamaan diferensi (4.22) setelah ditemukan akar-akar persamaan bantu ternyata real dan sama yaitu $m_1 = m_2 =$

1. Jadi penyelesaian umumnya adalah :

$$Y_k = c_1 + c_2 k$$

b. Diberikan persamaan diferensi

$$4y_{k+2} + 4y_{k+1} + y_k = 0 \quad (4.27)$$

Tentukan penyelesaian umumnya!

Jawab : Persamaan (4.27) mempunyai persamaan bantu

$$4m^2 + 4m + 1 = 0$$

kemudian diubah ke dalam bentuk baku menjadi

$$m^2 + m + \frac{1}{4} = 0$$

$$(m + \frac{1}{2})^2 = 0$$

$$m_1 = m_2 = -\frac{1}{2}$$

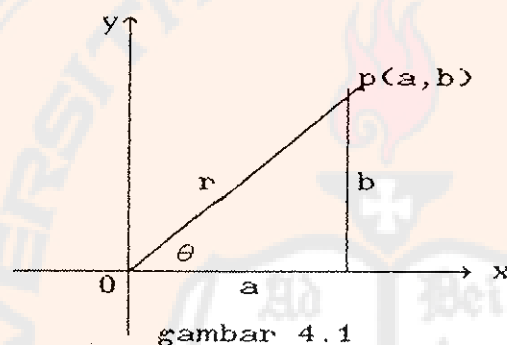
sehingga diperoleh akar-akarnya real dan sama,

Jadi penyelesaian umumnya adalah

$$Y_k = (c_1 + c_2 k) \left(-\frac{1}{2}\right)^k$$

KASUS III AKAR-AKARNYA KOMPLEKS

Bilangan kompleks $a + bi$ dapat digambarkan secara grafik, seperti dalam gambar 4.1



Titik p dengan koordinat (a, b) dapat juga ditunjukkan dengan koordinat polar, yang berarti dengan menentukan panjang r dari titik asal ke p dengan sudut θ terhadap sumbu x positif, diperoleh

$$a = r \cos \theta, \quad b = r \sin \theta, \quad -\pi < \theta < \pi$$

akibatnya

$$\begin{aligned} a + bi &= r \cos \theta + r \sin \theta i \\ &= r (\cos \theta + i \sin \theta) \end{aligned}$$

Identitas trigonometri $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ menunjukkan

$$a^2 + b^2 = r^2 \text{ atau } r = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (4.28)$$

oleh karena itu,

$$\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \sin\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad -\pi < \theta < \pi \quad (4.29)$$

Persamaan (4.28) dan (4.29) digunakan untuk mencari bentuk polar dari suatu bilangan kompleks. r disebut modulus dan sudut θ disebut amplitudo. Dalam bentuk polar, hasil kali 2 bilangan kompleks adalah suatu bilangan kompleks yang modulusnya merupakan hasil kali modulus mereka sedangkan amplitudonya merupakan jumlah amplitudonya yang berarti,

$$\begin{aligned} r_1 (\cos\theta_1 + i \sin\theta_1) \cdot r_2 (\cos\theta_2 + i \sin\theta_2) \\ = r_1 r_2 [(\cos\theta_1 \cos\theta_2 - \sin\theta_1 \sin\theta_2) + i(\sin\theta_1 \cos\theta_2 + \cos\theta_1 \sin\theta_2)] \\ = r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)] \end{aligned}$$

selanjutnya, untuk n bilangan bulat positif sebarang berlaku,

$$[r (\cos\theta + i \sin\theta)]^n = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta)$$

bentuk ini dikenal sebagai teorema De Moivre.

CONTOH :

a. Tulislah bilangan kompleks $1 + i$ dalam bentuk polar.

Jawab : hitung $r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}, \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}, \theta = \frac{\pi}{4}$$

sehingga diperoleh,

$$1 + i = \sqrt{2} \left(\cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4} \right)$$

b. Tulislah bilangan kompleks $(1 + i)^5$ dalam bentuk polar.

Jawab : hitung $r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$,
 $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\theta = \frac{\pi}{4}$

Dengan menggunakan teorema De Moivre diperoleh,

$$(1 + i)^5 = (\sqrt{2})^5 \left(\cos\frac{5\pi}{4} + i \sin\frac{5\pi}{4} \right)$$

Selanjutnya, perhatikan bahwa akar-akar kompleks dari persamaan kuadrat selalu terjadi dalam pasangan konjugat. Oleh karena itu, jika m_1 dan m_2 adalah akar-akar kompleks dari persamaan bantu, maka $m_1 \neq m_2$. Sehingga berdasarkan kasus I, dengan $y_k^{(1)} = m_1^k$ dan $y_k^{(2)} = m_2^k$, penyelesaian umumnya adalah

$$Y_k = c_1 m_1^k + c_2 m_2^k$$

dimana m_1 dan m_2 merupakan bilangan-bilangan kompleks. Tetapi kesulitannya menemukan penyelesaian umumnya dengan nilai real untuk semua nilai k walaupun akar-akarnya bilangan kompleks. Hal ini dapat terjadi jika c_1 dan c_2 juga konjugat kompleks, maka Y_k selalu merupakan bilangan kompleks. Untuk membuktikan ini, tulis semua bilangan kompleks dalam bentuk polar.

Akar-akar persamaan bantu memiliki bentuk polar yaitu

$$m_1 = r (\cos\theta + i \sin\theta) \text{ dan } m_2 = r (\cos\theta - i \sin\theta) \quad (4.30)$$

Dengan menggunakan teorema de Moivre, diperoleh

$$m_1^k = r^k (\cos k\theta + i \sin k\theta) \text{ dan } m_2^k = r^k (\cos k\theta - i \sin k\theta)$$

sehingga diperoleh penyelesaian umumnya yaitu

$$\begin{aligned} Y_k &= c_1 m_1^k + c_2 m_2^k \\ &= c_1 r^k (\cos k\theta + i \sin k\theta) + c_2 r^k (\cos k\theta - i \sin k\theta) \\ &= r^k [c_1 (\cos k\theta + i \sin k\theta) + c_2 (\cos k\theta - i \sin k\theta)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= r^k [c_1 \cos k\theta + c_1 i \sin k\theta + c_2 \cos k\theta - c_2 i \sin k\theta] \\
 &= r^k [(c_1 + c_2) \cos k\theta + (c_1 - c_2) i \sin k\theta] \\
 &= r^k [C_1 \cos k\theta + C_2 \sin k\theta],
 \end{aligned}$$

dengan $C_1 = c_1 + c_2$ dan $C_2 = (c_1 - c_2)i$

Tetapi andaikan c_1 dan c_2 juga merupakan pasangan konjugat kompleks yang memiliki bentuk polar,

$$c_1 = a(\cos B + i \sin B) \text{ dan } c_2 = a(\cos B - i \sin B)$$

Selanjutnya dengan menggunakan aturan mengalikan bilangan kompleks, dihasilkan untuk Y_k sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
 Y_k &= c_1 m_1^k + c_2 m_2^k \\
 &= ar^k [\cos(k\theta + B) + i \sin(k\theta + B)] + ar^k [\cos(k\theta + B) \\
 &\quad - i \sin(k\theta + B)] \\
 &= ar^k \cos(k\theta + B) + ar^k i \sin(k\theta + B) + ar^k \cos(k\theta + B) \\
 &\quad - ar^k i \sin(k\theta + B) \\
 &= 2ar^k \cos(k\theta + B)
 \end{aligned} \tag{4.31}$$

ternyata persamaan (4.31) merupakan suatu bilangan real.

Akhirnya diperoleh penyelesaian umum dari persamaan diferensi homogen dimana persamaan bantuannya memiliki akar-akar kompleks, yaitu

$$Y_k = Ar^k \cos(k\theta + B), \text{ dimana } A = 2a \tag{4.32}$$

dengan A dan B adalah konstanta-konstanta sebarang.

CONTOH :

a. Persamaan diferensi (4.23) ditemukan mempunyai persamaan bantu $m^2 + 1 = 0$, diperoleh akar-akarnya yaitu $m_1 = i$ dan $m_2 = -i$. Kemudian m_1 dan m_2 ditulis dalam bentuk polar, diperoleh $r = 1$ dan $\theta = \frac{\pi}{2}$ sehingga,

$$m_1 = i = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \text{ dan } m_2 = -i = \cos \frac{\pi}{2} - i \sin \frac{\pi}{2}$$

Jadi penyelesaian umumnya adalah

$$Y_k = A \cos\left(\frac{k\pi}{2} + B\right) \quad (4.33)$$

Jika ingin mencari penyelesaian partikular dari persamaan diferensi (4.23) yang memenuhi syarat awal $y_0 = 0$ dan $y_1 = 1$, maka substitusikan syarat awal ke dalam persamaan (4.33) diperoleh

$$0 = A \cos B \quad (i)$$

$$1 = A \cos\left(\frac{\pi}{2} + B\right) \quad (ii)$$

Dari persamaan (i) dipenuhi $B = \frac{\pi}{2}$, sehingga persamaan

$$(ii) \text{ menjadi } 1 = A \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$1 = A \cos \pi$$

diperoleh $A = -1$.

Jadi diperoleh penyelesaian partikularnya yaitu

$$y_k = -1 \cos\left(\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = -\cos\left(\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right)$$

Tetapi untuk θ sebarang berlaku,

$$\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin \theta$$

Jadi $y_k = \sin \frac{k\pi}{2}$ adalah penyelesaian partikular dari persamaan diferensi (4.23) yang memenuhi syarat awal $y_0 = 0$ dan $y_1 = 1$.

b. Diberikan persamaan diferensi

$$y_{k+2} - 2y_{k+1} + 2y_k = 0 \quad (4.34)$$

Tentukan penyelesaian umumnya !

Jawab : Persamaan (4.34) mempunyai persamaan bantu

$$m^2 - 2m + 2 = 0$$

diperoleh akar-akar kompleks yaitu

$$m_1 = 1 + i \text{ dan } , m_2 = 1 - i$$

dalam bentuk polar

$$m_1 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

$$m_2 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

Jadi penyelesaian umumnya adalah

$$Y_k = (\sqrt{2})^k \left(C_1 \cos \frac{k\pi}{4} + C_2 \sin \frac{k\pi}{4} \right)$$

4.3 Persamaan Diferensi Linear Non Homogen Dengan Koefisien Konstan

4.3.1 Persamaan diferensi linear non homogen orde-1 dengan koefisien konstan

DEFINISI 4.3.1.1 Persamaan diferensi linear non homogen orde-1 dengan koefisien konstan mempunyai bentuk umum

$$y_{k+1} + a_1 y_k = r_k \quad (4.35)$$

dimana a_1 adalah konstanta sebarang ($a_1 \neq 0$), sedangkan r adalah sebarang fungsi yang didefinisikan untuk $k = 0, 1, 2, \dots$

CONTOH 4.3.1.1

a. $y_{k+1} - 2y_k = 5$ adalah persamaan diferensi linear non homogen orde-1 dengan $a_1 = -2$, $r_k = 5$

b. $y_{k+1} - 2y_k = k + 1$ adalah persamaan diferensi linear non homogen orde-1 dengan $a_1 = -1$, $r_k = k + 1$

Penyelesaian persamaan diferensi (4.35)

Andaikan diberikan persamaan diferensi linear non homogen orde-1 dengan koefisien konstan

$$y_{k+1} + a_1 y_k = r_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Persamaan homogen yang bersesuaian adalah

$$y_{k+1} + a_1 y_k = 0$$

Akibat dari teorema 4.3 (dengan $A = -a_1$, $B = 0$) maka diperoleh penyelesaian umumnya

$$Y_k = c (-a_1)^k$$

dengan c adalah konstanta sebarang.

Andaikan penyelesaian partikular dari persamaan lengkap (4.35) adalah y_k^* , dengan memakai teorema 4.2 $c (-a_1)^k + y_k^*$ juga merupakan penyelesaian persamaan lengkap (4.35). Tetapi timbul suatu pertanyaan bagaimana caranya untuk mencari penyelesaian partikular dari persamaan lengkap (4.35). Salah satu cara yang akan dibicarakan adalah *metode koefisien tak tentu*. Untuk menentukan y_k^* didasarkan pada pengandaian bahwa y_k^* mempunyai bentuk umum yang sama dengan sebarang fungsi r yang diberikan pada persamaan lengkap dan menentukan koefisien-koefisien pada y_k^* yang memenuhi persamaan diferensi yang diberikan. Proses perhitungan koefisien-koefisien pada y_k^* disebut *metode koefisien tak tentu*. Bentuk penyelesaian yang sama dengan sebarang fungsi r yang diberikan disebut penyelesaian percobaan. Tabel 1.2 menunjukkan bentuk penyelesaian percobaan yang bentuknya sama dengan sebarang fungsi r .

Tabel 1.2

fungsi r_k	penyelesaian percobaan
a^k	Aa^k
k^n	$A_0 + A_1k + A_2k^2 + \dots + A_nk^n$
$k^n a^k$	$a^k(A_0 + A_1k + A_2k^2 + \dots + A_nk^n)$
$\sin bk$ atau $\cos bk$	$A \sin bk + B \cos bk$
$a^k \sin bk$ atau $a^k \cos bk$	$a^k(A \sin bk + B \cos bk)$

Tetapi jika penyelesaian percobaannya merupakan penyelesaian dari persamaan yang direduksi ke dalam persamaan homogen maka dikalikan dengan k dan penyelesaian percobaan yang baru digunakan, sedangkan jika penyelesaian percobaan yang baru masih merupakan penyelesaian dari persamaan yang direduksi, maka sekali lagi dikalikan dengan k demikian seterusnya.

Teorema berikut ini lebih memperkuat bahwa dapat ditentukan seluruh penyelesaian dari persamaan lengkap yang diberikan.

TEOREMA 4.7 Andaikan diberikan persamaan diferensi linear orde-1 dengan koefisien konstan

$$y_{k+1} + a_1 y_k = r_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (4.36)$$

Jika y_k^* adalah sebarang penyelesaian partikular dari persamaan lengkap (4.36) dan Y_k adalah penyelesaian umum dari persamaan diferensi homogen yang bersesuaian dengan persamaan lengkap (4.36) maka $Y_k + y_k^*$ adalah penyelesaian umum dari persamaan lengkap, yang berarti, jika y_k adalah sebarang penyelesaian persamaan lengkap (4.36) maka terdapat konstanta c dimana $y_k = c(-a_1)^k + y_k^*$

Bukti : Andaikan y_k adalah sebarang penyelesaian dari persamaan lengkap. Dengan memakai teorema 4.2, $Y_k + y_k^*$ adalah suatu penyelesaian dari persamaan lengkap untuk c konstanta sebarang. Harus dibuktikan bahwa terdapat konstanta c untuk mana $Y_k + y_k^*$ dan y_k merupakan penyelesaian yang sama. Menurut teorema ketunggalan, $Y_k + y_k^* = y_k$ untuk sebarang k .

Andaikan diambil $k = 0$, diperoleh

$$y_0 = c (-a_1)^0 + y_0^*$$

$$y_0 = c + y_0^*$$

$$c = y_0 - y_0^*$$

Jadi terdapat konstanta c untuk $y_k = c (-a_1)^k + y_k^*$ ■

CONTOH :

a. Andaikan diberikan persamaan diferensi

$$y_{k+1} - 2y_k = 5 \quad (4.37)$$

Tentukan penyelesaian umumnya !

Jawab : Persamaan homogen yang bersesuaian adalah

$$y_{k+1} - 2y_k = 0 \quad (4.38)$$

mempunyai penyelesaian umum

$$Y_k = c 2^k \quad (4.39)$$

Kemudian dicari penyelesaian partikular dari persamaan (4.37). Andaikan $y_k^* = A$ merupakan penyelesaian percobaan yang memenuhi persamaan (4.37), maka diperoleh

$$A - 2A = 5, A = -5$$

sehingga penyelesaian partikular persamaan (4.37) adalah $y_k^* = -5$.

Jadi penyelesaian umumnya adalah

$$y_k = c 2^k - 5 \quad (4.40)$$

Jika diberikan syarat awal

$$y_0 = 4 \quad (4.41)$$

maka akan diperoleh konstanta c .

Ambil $k = 0$, substitusikan ke dalam persamaan (4.40)

sehingga, $y_0 = c - 5$

$$4 = c - 5$$

$$c = 9$$

Jadi diperoleh $y_k = 9 \cdot 2^k - 5$ adalah penyelesaian yang memenuhi persamaan diferensi (4.37) dan memenuhi syarat awal $y_0 = 4$.

b. Andaikan diberikan persamaan diferensi

$$y_{k+1} - 2y_k = k + 1 \quad (4.42)$$

Tentukan penyelesaian umumnya !

Jawab : Persamaan homogen yang bersesuaian dengan persamaan (4.42) sama dengan persamaan (4.38), sehingga penyelesaian umumnya juga sama dengan persamaan (4.39) yaitu $Y_k = c \cdot 2^k$. Masalahnya sekarang adalah mencari penyelesaian partikular dari persamaan (4.42).

Andaikan $y_k^* = Ak + B$ sebagai penyelesaian percobaan yang memenuhi persamaan (4.42), maka diperoleh

$$A(k + 1) + B - 2(Ak + B) = k + 1$$

$$Ak + A + B - 2Ak - 2B = k + 1$$

$$-Ak + A - B = k + 1$$

$$-Ak - k + A - B - 1 = 0$$

$$(-A - 1)k + (A - B - 1) = 0$$

ini berarti

$$-A - 1 = 0, A = -1$$

karena $A = -1$, maka

$$-1 - B - 1 = 0, B = -2$$

sehingga diperoleh

$$y_k^* = -k - 2, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Jadi penyelesaian umum dari persamaan (4.42) adalah

$$y_k = c \cdot 2^k - k - 2 \quad (4.43)$$

Jika diberikan syarat awal

$$y_0 = 4$$

maka ambil $k = 0$, substitusikan ke dalam persamaan (4.43)

sehingga diperoleh,

$$y_0 = c - 0 - 2$$

$$4 = c - 2$$

$$c = 6$$

Jadi diperoleh $y_k = 6 \cdot 2^k - k - 2$ adalah penyelesaian yang memenuhi persamaan (4.42) dan syarat awal $y_0 = 4$.

4.3.2 Persamaan diferensi linear non homogen orde-2 dengan koefisien konstan

DEFINISI 4.3.2.1 Persamaan diferensi linear non homogen orde-2 dengan koefisien konstan mempunyai bentuk

$$\text{umum } y_{k+2} + a_1 y_{k+1} + a_2 y_k = r_k \quad (4.44)$$

dimana a_1, a_2 adalah konstanta-konstanta sebarang ($a_2 \neq 0$), sedangkan r adalah sebarang fungsi yang didefinisikan untuk $k = 0, 1, 2, \dots$.

CONTOH 4.3.2

- a. $y_{k+2} - 3y_{k+1} + 2y_k = 3^k$ adalah persamaan diferensi linear non homogen orde-2 dengan $a_1 = -3$, $a_2 = 2$, $r_k = 3^k$.
- b. $8y_{k+2} - 6y_{k+1} + y_k = 5 \sin \frac{k\pi}{2}$ adalah persamaan diferensi linear non homogen orde-2 dengan $a_1 = -\frac{3}{4}$, $a_2 = \frac{1}{8}$, $r_k = \frac{5}{8} \sin \frac{k\pi}{2}$.
- c. $y_{k+2} - 4y_{k+1} + 4y_k = 3k + 2^k$ adalah persamaan diferensi linear non homogen orde-2 dengan $a_1 = -4$, $a_2 = 4$, $r_k = 3k + 2^k$.

Penyelesaian persamaan diferensi (4.44)

Andaikan diberikan persamaan diferensi dengan bentuk $y_{k+2} + a_1y_{k+1} + a_2y_k = r_k$ maka persamaan homogen yang bersesuaian adalah

$$y_{k+2} + a_1y_{k+1} + a_2y_k = 0 \quad (4.45)$$

selanjutnya untuk mencari penyelesaian umum caranya seperti yang telah dijelaskan pada sub bab 4.2.2. Jadi untuk mencari penyelesaian umum dari persamaan lengkap (4.44), kita harus menentukan penyelesaian umum dari persamaan homogen dan menentukan penyelesaian partikular dari persamaan lengkap. Untuk menentukan penyelesaian partikular digunakan metode koefisien tak tentu. Maka menurut teorema 4.2, jumlah dari penyelesaian umum dengan penyelesaian partikular merupakan penyelesaian umum dari persamaan lengkap. Untuk itu akan diberikan beberapa contoh untuk lebih menjelaskan hal ini.

CONTOH :

a. Andaikan diberikan persamaan diferensi

$$y_{k+2} - 3y_{k+1} + 2y_k = 3^k \quad (4.46)$$

Tentukan penyelesaian umumnya !

Jawab : Persamaan homogen yang bersesuaian dengan persamaan (4.46) adalah

$$y_{k+2} - 3y_{k+1} + 2y_k = 0$$

sehingga persamaan bantuannya adalah

$$m^2 - 3m + 2 = 0$$

$$(m - 1)(m - 2) = 0$$

$$m_1 = 1, m_2 = 2$$

diperoleh akar-akarnya real dan tidak sama. Oleh karena itu penyelesaian umumnya adalah

$$Y_k = c_1 + c_2 \cdot 2^k \quad (4.47)$$

Selanjutnya akan ditentukan penyelesaian partikularnya.

Karena $r_k = 3^k$ maka penyelesaian percobaannya adalah

$$y_k^* = A \cdot 3^k \quad (4.48)$$

dimana koefisien A belum ditentukan. Akan dicari nilai A.

Andaikan persamaan (4.48) memenuhi persamaan (4.46), maka diperoleh

$$\begin{aligned} y_{k+2}^* - 3y_{k+1}^* + 2y_k^* &= A3^{k+2} - 3A3^{k+1} + 2A3^k \\ &= A3^k(9 - 9 + 2) = 2A3^k \end{aligned}$$

sehingga jika y_k^* memenuhi persamaan (4.46), maka diperoleh $A = \frac{1}{2}$ Sehingga $y_k^* = \frac{1}{2} \cdot 3^k$ merupakan penyelesaian partikular yang diinginkan.

Jadi penyelesaian umum dari persamaan (4.46) adalah

$$y_k = c_1 + c_2 \cdot 2^k + \frac{1}{2} \cdot 3^k,$$

dimana c_1, c_2 adalah konstanta-konstanta sebarang.

b. Carilah penyelesaian umum dari persamaan diferensi

$$y_{k+2} - 4y_{k+1} + 4y_k = 3k + 2^k \quad (4.49)$$

Jawab : Persamaan homogen yang bersesuaian adalah

$$y_{k+2} - 4y_{k+1} + 4y_k = 0$$

mempunyai persamaan bantu

$$m^2 - 4m + 4 = 0$$

$$(m - 2)^2 = 0$$

$$m_1 = m_2 = 2$$

diperoleh akar-akar real dan sama.

Jadi penyelesaian umumnya adalah

$$Y_k = (c_1 + c_2 k) \cdot 2^k$$

Selanjutnya akan ditentukan penyelesaian partikularnya.

Pada ruas kanan bentuk $3k$ menimbulkan penyelesaian

percobaan $y_k^* = A_0 + A_1 k$; bentuk 2^k menimbulkan

penyelesaian percobaan $A2^k$, tetapi karena 2^k merupakan

penyelesaian persamaan yang direduksi oleh karena itu

kalikan dengan k diperoleh $Ak2^k$ tetapi ini masih

merupakan penyelesaian persamaan yang direduksi maka

kalikan lagi dengan k dihasilkan penyelesaian percobaan

$Ak^2 2^k$. Selanjutnya diperoleh penyelesaian percobaan

$$y_k^* = A_0 + A_1 k + Ak^2 2^k \quad (4.50)$$

Akan ditentukan nilai-nilai A_0, A_1, A .

Andaikan penyelesaian percobaan memenuhi persamaan (4.49)

maka diperoleh,

$$y_{k+2}^* - 4y_{k+1}^* + 4y_k^* = A_0 + A_1(k+2) + A(k+2)^2 2^{k+2} - 4[A_0 + A_1(k+1) + A(k+1)^2 2^{k+1}]$$

$$\begin{aligned}
 & + A_1(k+1) + A(k+1)^2 2^{k+1}] + 4(A_0 \\
 & + A_1 k + A k^2 2^k) \\
 & = A_0 + A_1 k + 2A_1 + A(k^2 + 4k + 4)2^{k+2} - \\
 & 4[A_0 + A_1 k + A_1 + A(k^2 + 2k + 1)2^{k+1}] \\
 & + 4A_0 + 4A_1 k + 4A k^2 2^k \\
 & = A_0 + A_1 k + 2A_1 + (A k^2 + 4A k + 4A)2^{k+2} \\
 & - 4[A_0 + A_1 k + A_1 + (A k^2 + 2A k + \\
 & A)2^{k+1}] + 4A_0 + 4A_1 k + 4A k^2 2^k \\
 & = A_0 + A_1 k + 2A_1 + 4A k^2 2^k + 16A k 2^k + \\
 & 16A 2^k - 4(A_0 + A_1 k + A_1 + 2A k^2 2^k + \\
 & 4A k 2^k + 2A 2^k) + 4A_0 + 4A_1 k + 4A k^2 2^k \\
 & = A_0 + A_1 k + 2A_1 + 4A k^2 2^k + 16A k 2^k + \\
 & 16A 2^k - 4A_0 - 4A_1 k - 4A_1 - 8A k^2 2^k - \\
 & 16A k 2^k - 8A 2^k + 4A_0 + 4A_1 k + 4A k^2 2^k \\
 & = A_0 + A_1 k - 2A_1 + 8A 2^k \\
 & = A_0 - 2A_1 + A_1 k + 8A 2^k
 \end{aligned}$$

sehingga jika y_k^* memenuhi persamaan diferensi (4.49)

$$A_0 - 2A_1 = 0, A_1 = 3, 8A = 1$$

Jadi didapat $A_0 = 6, A_1 = 3, A = \frac{1}{8}$

∴ penyelesaian umum dari persamaan lengkap adalah

$$y_k = (c_1 + c_2 k)2^k + 6 + 3k + \frac{1}{8} k^2 2^k.$$

c. Carilah penyelesaian partikular dari persamaan diferensi

$$8y_{k+2} - 6y_{k+1} + y_k = 5 \sin \frac{k\pi}{2} \quad (4.51)$$

Jawab : karena $r_k = 5 \sin \frac{k\pi}{2}$, maka penyelesaian percobaannya adalah

$$y_k^* = A \sin \frac{k\pi}{2} + B \cos \frac{k\pi}{2} \quad (4.52)$$

akan ditentukan nilai-nilai A dan B.

Andaikan y_k^* memenuhi persamaan (4.51), maka diperoleh

$$\begin{aligned} 8y_{k+2}^* - 6y_{k+1}^* + y_k^* &= 8[A \sin \frac{(k+2)\pi}{2} + B \cos \frac{(k+2)\pi}{2}] \\ &\quad - 6[A \sin \frac{(k+1)\pi}{2} + B \cos \frac{(k+1)\pi}{2}] \\ &\quad + A \sin \frac{k\pi}{2} + B \cos \frac{k\pi}{2} \end{aligned} \quad (4.52)$$

Dengan menggunakan identitas trigonometri yaitu

$$\begin{aligned} \sin \frac{(k+2)\pi}{2} &= \sin \left(\frac{k\pi}{2} + \pi \right) = -\sin \frac{k\pi}{2} \\ \sin \frac{(k+1)\pi}{2} &= \sin \left(\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = \cos \frac{k\pi}{2} \\ \cos \frac{(k+2)\pi}{2} &= \cos \left(\frac{k\pi}{2} + \pi \right) = -\cos \frac{k\pi}{2} \\ \cos \frac{(k+1)\pi}{2} &= \cos \left(\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = -\sin \frac{k\pi}{2} \end{aligned}$$

maka ruas kanan dari persamaan (4.53) dapat disederhanakan menjadi

$$\begin{aligned} 8[A -\sin \frac{k\pi}{2} + B -\cos \frac{k\pi}{2}] - 6[A \cos \frac{k\pi}{2} + B -\sin \frac{k\pi}{2}] + A \sin \frac{k\pi}{2} + B \cos \frac{k\pi}{2} &= -8A \sin \frac{k\pi}{2} - 8B \cos \frac{k\pi}{2} - 6A \cos \frac{k\pi}{2} \\ &\quad + 6B \sin \frac{k\pi}{2} + A \sin \frac{k\pi}{2} + B \cos \frac{k\pi}{2} \\ &= -7A \sin \frac{k\pi}{2} + 6B \sin \frac{k\pi}{2} - 7B \cos \frac{k\pi}{2} \\ &\quad - 6A \cos \frac{k\pi}{2} \\ &= (-7A + 6B) \sin \frac{k\pi}{2} + (-6A - 7B) \cos \frac{k\pi}{2} \end{aligned}$$

sehingga jika y_k^* memenuhi persamaan (4.51), maka

$$-7A + 6B = 5, \quad -6A - 7B = 0$$

dengan menggunakan metode eliminasi diperoleh

$$A = -\frac{7}{17} \text{ dan } B = \frac{6}{17}$$

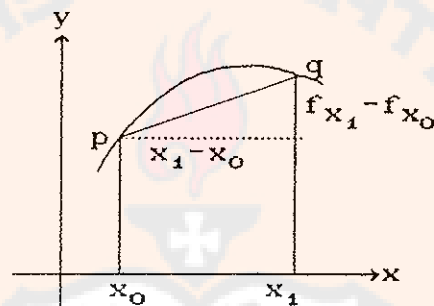
Jadi diperoleh, $y_k^* = \frac{1}{17} (-7 \sin \frac{k\pi}{2} + 6 \cos \frac{k\pi}{2})$ adalah penyelesaian partikularnya.

4.4 Hubungan Persamaan Diferensial Dengan Persamaan Diferensi

DEFINISI 4.4.1 Jika $p(x_0, y_0)$ adalah titik pada grafik suatu fungsi f , maka garis singgung pada grafik f di p didefinisikan sebagai garis melalui p dengan lereng

$$m_{\tan} = \lim_{x_1 \rightarrow x_0} \frac{f_{x_1} - f_{x_0}}{x_1 - x_0} \quad (4.54)$$

asalkan limitnya ada.



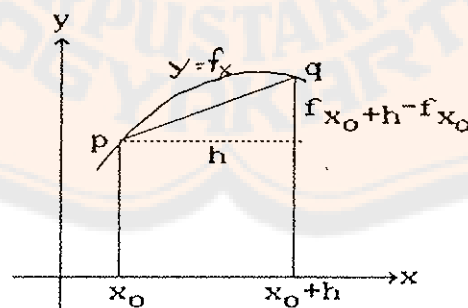
(a)

gambar 4.1

selanjutnya persamaan (4.53) kemudian diberi notasi khusus ditulis dengan,

$$f'_{x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_{x_0+h} - f_{x_0}}{h} \quad (4.55)$$

dimana f' disebut fungsi derivatif.



(b)

gambar 4.1

DEFINISI 4.4.2 Derivatif suatu fungsi f adalah fungsi f' yang didefinisikan oleh

$$f'_x = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_{x+h} - f_x}{h} \quad (4.56)$$

daerah asal f' adalah semua x dimana limitnya ada.

catatan: jika x_0 berada dalam domain f' maka dari persamaan (4.54) dan (4.55) diperoleh

$$f'_{x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_{x_0+h} - f_{x_0}}{h} = m_{tan} \quad (4.57)$$

Dengan kata lain, derivatif dari f adalah suatu fungsi yang nilainya pada $x = x_0$ sama dengan lereng garis singgung pada $y = f_x$ di $x = x_0$. Domain dari fungsi derivatif adalah himpunan semua nilai x dimana grafik $y = f_x$ mempunyai garis singgung pada x .

CONTOH 4.4.2.1 Tentukan derivatif dari $f_x = x^2 + 1$.

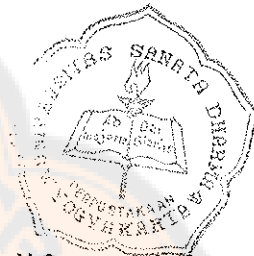
Jawab :

Dari definisi 4.4.2 diperoleh

$$\begin{aligned} f'_x &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_{x+h} - f_x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[(x+h)^2 + 1] - (x^2 + 1)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 + 1 - x^2 - 1}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2xh + h^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} 2x + h \\ &= 2x \end{aligned}$$

CONTOH 4.4.2.2 Dengan menggunakan derivatif yang diperoleh dari contoh 4.4.2.1 tentukan lereng garis singgung pada $y = x^2 + 1$ di $x = 2$, $x = 0$ dan $x = -2$.

Jawab : Lereng garis singgung pada sebarang titik adalah $f'_x = 2x$. Oleh karena itu lereng garis singgung pada $x = 2$ adalah $f'_2 = 2(2) = 4$
 pada $x = 0$ adalah $f'_0 = 2(0) = 0$
 pada $x = -2$ adalah $f'_{-2} = 2(-2) = -4$



Selanjutnya pada persamaan diferensial telah diperkenalkan operator diferensial. Operator diferensial dinotasikan dengan huruf D , misalnya

$y'' + 3y' - y = 6$ dapat ditulis sebagai $(D^2 + 3D - 1)y = 6$

dan

$y''' - 4y' = \cos x$ dapat ditulis sebagai $(D^3 - 4D)y = \cos x$.

DEFINISI 4.4.3 Andaikan diberikan fungsi y , fungsi baru Dy yang bernilai pada x , maka persamaan (4.56) dapat ditulis menjadi

$$Dy_x = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y_{x+h} - y_x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta y_x}{h} \quad (4.56')$$

D adalah operator derivatif yang pada saat dikenakan pada suatu fungsi, menghasilkan derivatif fungsi tersebut.

CONTOH 4.4.3.1 Dari tabel 1.1 diperoleh $\Delta x^2 = 2xh + h^2$, akibat definisi 4.4.3 diperoleh

$$Dx^2 = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2xh + h^2}{h}$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{h \rightarrow 0} 2xh + h \\ &= 2x \end{aligned}$$

CONTOH 4.4.3.2 Dari tabel 1.1 diperoleh $\Delta x^3 = 3x^2h + 3xh^2 + h^3$, akibat definisi 4.4.3 diperoleh

$$\begin{aligned} Dx^3 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} 3x^2 + 3xh + h^2 \\ &= 3x^2 \end{aligned}$$

Pada persamaan diferensi terdapat operator invers dinotasikan dengan Δ^{-1} , sehingga jika operator invers dikenakan pada suatu fungsi y diperoleh $\Delta^{-1}y = Y$ (berdasarkan definisi 3.1.5.1). Y dikatakan jumlah tak tentu dari y , sedangkan pada persamaan diferensial juga terdapat operator invers yang disebut antiderivatif. Jika diberikan fungsi Y sedemikian hingga $DY = y$, maka Y dikatakan antiderivatif dari y . Supaya menjadi konsisten dengan notasi invers dari operator diferensi (yang dinotasikan dengan Δ^{-1}), maka akan dinotasikan operator invers dari diferensial yaitu D^{-1} dan diperoleh $D^{-1}y = Y$. Tetapi notasi D^{-1} lebih umum ditulis sebagai $\int$ (baca integral) sehingga $Y = \int y$ dan menyebut Y sebagai integral tak tentu dari y , jika $DY = y$ maka $D(Y + c) = y$, untuk c konstanta sebarang.

Tabel 1.3 memperlihatkan hubungan antara kalkulus diferensi dengan kalkulus diferensial.

Tabel 1.3

kalkulus diferensi	kalkulus diferensial
1. $\Delta y_x = y_{x+h} - y_x$	1'. $Dy_x = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta y_x}{h}$
2. $\Delta^n y = \Delta(\Delta^{n-1} y)$, $n = 1, 2, \dots$	2'. $D^n y = D(D^{n-1} y)$, $n = 1, 2, \dots$
3. $\Delta(cy) = c \Delta y$	3'. $D(cy) = c Dy$
4. $\Delta(c_1 y^{(1)} + c_2 y^{(2)})$ $= c_1 \Delta y^{(1)} + c_2 \Delta y^{(2)}$	4'. $D(c_1 y^{(1)} + c_2 y^{(2)})$ $= c_1 Dy^{(1)} + c_2 Dy^{(2)}$
5. Jika y adalah polinom berderajat n maka $\Delta^n y$ adalah suatu konstanta dan diferensi setelahnya adalah nol	5'. Jika y adalah polinom berderajat n maka $D^n y$ adalah suatu konstanta dan derivatif setelahnya adalah nol
6. $\Delta x^{(n)} = nx^{(n-1)}$	6'. $Dx^n = nx^{n-1}$
7. $\Delta(u.v) = (Eu).\Delta v + v.\Delta u$	7'. $D(u.v) = u.Dv + v.Du$
8. $\Delta\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v.\Delta u - u.\Delta v}{v.Ev}$	8'. $D\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v.Du - u.Dv}{v^2}$
9. Jika $\Delta Y = y$, maka $\Delta^{-1} y = Y + p$ dimana p adalah fungsi dengan periode h	9'. Jika $DY = y$, maka $\int y = Y + c$ dimana c adalah konstanta sebarang

Tabel 1.3 menunjukkan beberapa hasil yang dikenal pada kalkulus diferensial memiliki bentuk yang analog dengan kalkulus diferensi. Beberapa hasil tersebut dapat dibuktikan dengan bantuan kalkulus diferensi dan sifat-sifat limit.

CONTOH :

a. Buktikan $D^n y = D(D^{n-1} y)$, $n = 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned}
 \text{Jawab : } D^n y &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta^n y}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta(\Delta^{(n-1)} y)}{h} \\
 &= D(D^{(n-1)} y)
 \end{aligned}$$

b. Buktikan $D(cy) = c Dy$

$$\begin{aligned}\text{Jawab : } D(cy) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta(cy)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c \Delta y}{h} \\ &= c \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{h} \\ &= c Dy\end{aligned}$$

c. Buktikan $D(c_1 y^{(1)} + c_2 y^{(2)}) = c_1 Dy^{(1)} + c_2 Dy^{(2)}$

Jawab :

$$\begin{aligned}D(c_1 y^{(1)} + c_2 y^{(2)}) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta(c_1 y^{(1)} + c_2 y^{(2)})}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c_1 \Delta y^{(1)} + c_2 \Delta y^{(2)}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c_1 \Delta y^{(1)}}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c_2 \Delta y^{(2)}}{h} \\ &= c_1 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta y^{(1)}}{h} + c_2 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta y^{(2)}}{h} \\ &= c_1 Dy^{(1)} + c_2 Dy^{(2)}\end{aligned}$$

d. Buktikan $D(u.v) = u.Dv + v.Du$

Jawab :

$$\begin{aligned}D(u.v) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta(u.v)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(Eu).\Delta v + v.\Delta u}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[(Eu) \frac{\Delta v}{h} + v \frac{\Delta u}{h} \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (Eu) \frac{\Delta v}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} v \frac{\Delta u}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (Eu) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} v \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{h} \quad (4.58)\end{aligned}$$

Andaikan u dan v adalah fungsi-fungsi diferensial, sehingga u dan v kontinu yang berarti $u_{x+h} \rightarrow u_x$ asalkan $h \rightarrow 0$ begitu juga dengan $v_{x+h} \rightarrow v_x$ asalkan $h \rightarrow 0$. Kondisi yang kontinu ini dalam operator diferensi menandakan $Eu_x \rightarrow u_x$ asalkan $h \rightarrow 0$, sebab $Eu_x = u_{x+h}$. Sehingga persamaan

(4.58) menjadi

$$= u.Dv + v.Du$$

f. Buktikan $D\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v.Du - u.Dv}{v^2}$

$$\begin{aligned} \text{Jawab : } D\left(\frac{u}{v}\right) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta\left(\frac{u}{v}\right)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v.\Delta u - u.\Delta v}{vEv.h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v.\Delta u}{vEv.h} - \frac{u.\Delta v}{vEv.h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v.\Delta u}{vEv.h} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u.\Delta v}{vEv.h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{Ev} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u\Delta v}{vEv} \\ &= \frac{Du}{v} - \frac{\lim_{h \rightarrow 0} u \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{h}}{\lim_{h \rightarrow 0} v \lim_{h \rightarrow 0} Ev} \\ &= \frac{Du}{v} - \frac{u.Dv}{v.v} \\ &= \frac{v.Du - u.Dv}{v^2} \end{aligned}$$

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa penyelesaian persamaan diferensial merupakan suatu pendekatan limit dari penyelesaian persamaan diferensi yang bersesuaian. Pembahasan ini akan dibatasi hanya untuk persamaan diferensial linear orde-1 dengan koefisien konstan.

Andaikan diberikan suatu fungsi y , yang didefinisikan untuk setiap x dalam interval $a \leq x \leq b$, $x \in \mathbb{R}$, sedemikian sehingga memenuhi persamaan diferensial

$$Dy_x = \frac{dy_x}{dx} = Ay_x + B, \quad a \leq x \leq b \quad (4.59)$$

dimana A dan B adalah konstanta-konstanta sebarang (dengan $A \neq 0$).

Andaikan ditentukan syarat awal y pada $x = a$, yang berarti mencari suatu fungsi y yang memenuhi persamaan diferensial (4.58) dan juga memenuhi syarat awal

$$y_a = y_0 \quad (4.60)$$

Untuk mengaproksimasikan persamaan diferensial (4.59) ke dalam persamaan diferensi, pertama-tama dengan mengganti interval kontinu $a \leq x \leq b$ dengan suatu himpunan diskrit nilai x lewat persamaan diferensi yang telah didefinisikan.

Andaikan diambil sebarang bilangan bulat positif n dan membagi interval tersebut ke dalam n bagian yang sama, yang panjangnya masing-masing

$$h = \frac{b-a}{n} \quad (4.61)$$

dengan

$$x_0 = a, x_1 = a+h, x_2 = a+2h, \dots, x_n = a+nh = b \quad (4.62)$$

kemudian andaikan penulisan tersebut disederhanakan, maka diperoleh

$$y_k = y_{x_k} = y_{x_0+kh} \quad (4.63)$$

karena diketahui bahwa

$$Dy_k = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta y_k}{h}$$

maka akibat (4.62) diperoleh

$$Dy_{x_k} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta y_k}{h} \quad (4.64)$$

oleh karena itu layak untuk mengganti persamaan diferensial (4.59) dengan persamaan diferensi

$$\frac{\Delta y_k}{h} = Ay_k + B, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (4.65)$$

atau

$$y_{k+1} = (1 + Ah)y_k + Bh, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (4.66)$$

dengan syarat awal yang sudah ditentukan.

Persamaan (4.66) adalah persamaan diferensi linear orde-1. Persamaan (4.66) dapat diselesaikan dengan menggunakan persamaan (4.13), dimana $A = 1 + Ah$ dan $B = Bh$, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} y_k &= (1 + Ah)^k y_0 + Bh \left[\frac{1 - (1 + Ah)^k}{1 - (1 + Ah)} \right] \\ &= (1 + Ah)^k y_0 + Bh \left[\frac{1 - (1 + Ah)^k}{-Ah} \right] \\ &= (1 + Ah)^k y_0 + B \left[\frac{1 - (1 + Ah)^k}{-A} \right] \\ &= (1 + Ah)^k y_0 + \frac{B - B(1 + Ah)^k}{-A} \\ &= (1 + Ah)^k y_0 - \frac{B}{A} + \frac{B}{A} (1 + Ah)^k \\ &= (1 + Ah)^k \left(y_0 + \frac{B}{A} \right) - \frac{B}{A}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (4.67) \end{aligned}$$

Andaikan $h \rightarrow 0$ dan $x_k = x_0 + kh \rightarrow x$ maka persamaan (4.65) akan menjadi persamaan diferensial (4.59). Oleh karena itu penyelesaian persamaan diferensial (4.59) dapat diperoleh dengan melimitkan penyelesaian persamaan diferensi (4.67), yang berarti,

$$\begin{aligned} y_x &= \lim_{h \rightarrow 0} y_k \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (1 + Ah)^k \left(y_0 + \frac{B}{A} \right) - \frac{B}{A} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (1 + Ah)^k y_0 + \frac{B}{A} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{B}{A} \\ &= y_0 + \frac{B}{A} \lim_{h \rightarrow 0} (1 + Ah)^k - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{B}{A} \\ &= y_0 + \frac{B}{A} \lim_{h \rightarrow 0} (1 + Ah)^k - \frac{B}{A} \quad (4.68) \end{aligned}$$

tetapi $\lim_{h \rightarrow 0} (1 + Ah)^k = \lim_{h \rightarrow 0} (1 + Ah)^{\frac{x-x_0}{h}}$, dimana $k = \frac{x-x_0}{h}$

Andaikan Ah diganti dengan ε , diperoleh

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [(1 + \varepsilon)^{1/\varepsilon}]^A (x - x_0)$$

padahal telah diketahui bahwa $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (1 + \varepsilon)^{1/\varepsilon} = e$, oleh karena itu

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [(1 + \varepsilon)^{1/\varepsilon}]^{A(x-x_0)} = e^{A(x-x_0)}$$

selanjutnya dari persamaan (4.68), diperoleh

$$y_x = (y_0 + \frac{B}{A})e^{A(x-x_0)} - \frac{B}{A} \quad (4.69)$$

Ternyata persamaan (4.69) adalah penyelesaian persamaan diferensial (4.59) hal ini dapat ditunjukkan bahwa persamaan (4.69) memenuhi persamaan (4.59), yang berarti

$$\frac{dy_x}{dx} = (y_0 + \frac{B}{A})e^{A(x-x_0)} \cdot A$$

padahal

$$\begin{aligned} \frac{dy_x}{dx} &= Ay_x + B \\ &= A[(y_0 + \frac{B}{A})e^{A(x-x_0)} - \frac{B}{A}] + B \\ &= A(y_0 + \frac{B}{A})e^{A(x-x_0)} - B + B \\ &= A(y_0 + \frac{B}{A})e^{A(x-x_0)} \end{aligned}$$

Jadi benar bahwa persamaan (4.69) memenuhi persamaan diferensial (4.59) dan juga memenuhi syarat awal $y_0 = y_0$.

BAB V

PENERAPAN PERSAMAAN DIFERENSI DALAM BIDANG EKONOMI

Salah satu penerapan persamaan diferensi adalah pada bidang ekonomi. Masalah-masalah yang akan dibahas adalah bunga tunggal, bunga majemuk, pendapatan nasional (model Harrod), analisis persediaan (model Metzler) dan pendapatan nasional (model Samuelson).

5.1 Penerapan persamaan diferensi linear orde-1 dengan koefisien konstan

5.1.1 Bunga Tunggal

Bunga tunggal adalah bunga yang dihitung pada modal awal untuk jangka waktu penggunaan modal. Andaikan modal mula-mula yang diinvestasikan diberikan suku bunga tunggal, maka pada sebarang keadaan, jumlah modal sama dengan jumlah modal satu periode sebelumnya ditambah bunga yang dihasilkan dalam periode itu pada modal mula-mula yang diinvestasikan.

Jika P_0 adalah modal mula-mula yang diinvestasikan dengan bunga tunggal sebesar $\frac{r}{100}$, dan jika P_t menyatakan jumlah modal setelah periode ke- t , maka diperoleh

$$P_{t+1} = P_t + \frac{r}{100} P_0, \quad t = 0, 1, 2, \dots \quad (5.1)$$

Pada bab IV telah diketahui bahwa bentuk umum persamaan diferensi linear orde-1 dengan koefisien konstan adalah

$$y_{k+1} = Ay_k + B, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

mempunyai penyelesaian umum yaitu :

$$y_k = \begin{cases} A^k y_0 + B \frac{1-A^k}{1-A}, & \text{jika } A \neq 1 \\ y_0 + Bk, & \text{jika } A = 1 \end{cases}, k = 0, 1, 2, \dots$$

Ternyata pada persamaan (5.1), y_{k+1} sesuai dengan P_{t+1} , y_k sesuai dengan P_t , $A = 1$ dan $B = \frac{r}{100} P_0$, oleh karena itu persamaan (5.1) adalah persamaan diferensi linear non homogen orde-1 dengan koefisien konstan.

Selanjutnya akan dicari penyelesaian umum persamaan (5.1) dengan menggunakan persamaan (4.13), dimana $A = 1$, $B = \frac{r}{100} P_0$, maka diperoleh

$$\begin{aligned} P_t &= P_0 + \frac{r}{100} P_0 t \\ &= P_0 \left(1 + \frac{r}{100} t \right), \quad t = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (5.2)$$

Jadi persamaan (5.2) adalah penyelesaian umum persamaan (5.1). Persamaan (5.2) inilah yang telah kita kenal sebagai rumus bunga tunggal.

5.1.2 Bunga Majemuk

Bunga majemuk adalah bunga yang dikenakan pada modal awal ditambahkan ke pokoknya, yang kemudian menjadi pokok yang baru untuk perhitungan masa berikutnya.

Andaikan modal awal diinvestasikan dengan suku bunga majemuk, maka pada sebarang keadaan, jumlah modal sama dengan modal satu periode pertama ditambah bunga yang dihasilkan pada seluruh modal yang ada pada satu periode pertama.

Andaikan P_t menyatakan jumlah modal pada akhir

periode ke- t , P_0 adalah modal awal yang diinvestasikan maka diperoleh persamaan,

$$\begin{aligned} P_{t+1} &= P_t + \frac{r}{100} P_t \\ &= P_t \left(1 + \frac{r}{100}\right), \quad t = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (5.3)$$

Ternyata y_{k+1} sesuai dengan P_{t+1} , y_k sesuai dengan P_t , $A = 1 + \frac{r}{100}$ dan $B = 0$, oleh karena itu persamaan (5.3) adalah persamaan diferensi linear homogen orde-1 dengan koefisien konstan.

Selanjutnya akan dicari penyelesaian umum persamaan (5.3) dengan menggunakan persamaan (4.13) dimana $A = 1 + \frac{r}{100}$ dan $B = 0$ maka diperoleh

$$P_t = \left(1 + \frac{r}{100}\right)^t P_0, \quad t = 0, 1, 2, \dots \quad (5.4)$$

Jadi persamaan (5.4) adalah penyelesaian umum persamaan (5.3). Persamaan (5.4) inilah yang kita kenal sebagai rumus bunga majemuk.

5.1.3 Pendapatan Nasional

Penerapan selanjutnya berkaitan dengan pendapatan nasional yang diusulkan oleh R.F Harrod, dimana akan dibuat suatu model matematika untuk menghitung pendapatan nasional. Menurut perekonomian sederhana pendapatan nasional terdiri dari 2 komponen yaitu konsumsi dan investasi. Andaikan fungsi Y , C , dan I yang nilainya berturut-turut menyatakan besarnya pendapatan nasional, konsumsi dan investasi yang masing-masing bergantung pada waktu t yang bernilai diskrit, maka pada setiap waktu t , nilai-nilai fungsi Y , C dan I dinotasikan dengan Y_t , C_t ,

dan I_t .

Secara matematis berlaku hubungan pendapatan nasional dinyatakan dengan

$$Y_t = C_t + I_t, \quad t = 0, 1, 2, \quad (5.5)$$

Besarnya konsumsi yang disediakan bergantung pada besarnya pendapatan nasional. Andaikan fungsi konsumsi linear, maka fungsi konsumsi dapat ditulis sebagai :

$$C_t = c + mY_t, \quad c \geq 0, \quad 0 < m < 1 \quad (5.6)$$

dimana c dan m adalah konstanta-konstanta.

Apabila $Y_t = 0$ maka konsumsi menjadi sebesar c , sedangkan m adalah gradien fungsi yang menunjukkan hasrat konsumsi marginal. Selanjutnya andaikan terdapat konstanta r yang disebut faktor tumbuh, dengan

$$\Delta Y_t = Y_{t+1} - Y_t = rI_t, \quad r > 0, \quad t = 0, 1, 2, \dots \quad (5.7)$$

Dengan demikian dari persamaan (5.5 - 5.7), diperoleh hubungan,

$$\begin{aligned} Y_{t+1} - Y_t &= rI_t \\ &= r(Y_t - C_t) \\ &= rY_t - rC_t \\ &= rY_t - r(c + mY_t) \\ &= rY_t - rc - rmY_t \\ Y_{t+1} &= rY_t + Y_t - rc - rmY_t \\ &= (1 + r - rm)Y_t - rc \\ &= [1 + r(1 - m)]Y_t - rc \end{aligned} \quad (5.8)$$

Ternyata persamaan (5.8) tak lain adalah persamaan diferensi linear non homogen orde-1 dengan koefisien konstan.

Kemudian akan dicari penyelesaian umum dari persamaan (5.8). Dengan menggunakan persamaan (4.13), dimana $A = 1 + r(1-m)$, $B = -rc$, maka diperoleh

$$\begin{aligned} Y_t &= [1 + r(1 - m)]^t Y_0 + (-rc) \frac{1 - [1 + r(1 - m)]^t}{1 - [1 + r(1 - m)]} \\ &= [1 + r(1 - m)]^t Y_0 + (-rc) \frac{1 - [1 + r(1 - m)]^t}{1 - 1 - r(1 - m)} \\ &= [1 + r(1 - m)]^t Y_0 + (-rc) \frac{1 - [1 + r(1 - m)]^t}{-r(1 - m)} \\ &= [1 + r(1 - m)]^t Y_0 + c \frac{1 - [1 + r(1 - m)]^t}{(1-m)} \\ &= [1 + r(1 - m)]^t Y_0 + \frac{c}{1-m} \left(1 - [1 + r(1 - m)]^t \right) \\ &= [1 + r(1 - m)]^t Y_0 + \frac{c}{1-m} - \frac{c}{1-m} [1 + r(1 - m)]^t \\ &= [1 + r(1 - m)]^t \left(Y_0 - \frac{c}{1-m} \right) + \frac{c}{1-m} \quad (5.9) \end{aligned}$$

Jadi persamaan (5.9) adalah penyelesaian umum persamaan (5.8). Persamaan (5.9) adalah rumus untuk menghitung pendapatan nasional dalam perekonomian sederhana.

5.2. Penerapan persamaan diferensi linear orde-2 dengan koefisien konstan

5.2.1 Analisis Persediaan

Penerapan persamaan diferensi selanjutnya berkaitan dengan analisis persediaan. Akan dibuat model matematik untuk menghitung jumlah pendapatan total pengusaha dengan mempertahankan mutu persediaan agar tetap yang terbaik.

Andaikan U_t adalah jumlah dari nilai barang-barang konsumsi yang diproduksi untuk dijual dalam periode t , S_t adalah jumlah dari nilai barang-barang konsumsi yang diproduksi untuk persediaan dalam periode t . Jika Y_t

adalah pendapatan total yang diperoleh dalam periode t , maka berlaku hubungan

$$Y_t = U_t + S_t + V_0 \quad , t = 0,1,2,\dots \quad (5.10)$$

dimana V_0 merupakan bilangan konstan yang disebut konstanta investasi netto.

Andaikan pengusaha merencanakan produksinya untuk dijual pada periode t dengan berdasarkan rencana produksi penjualan dari periode $t-1$, selanjutnya perencanaan produksi dari periode t sama dengan penjualan sebenarnya dari periode $t-1$, yang berarti

$$U_t = \beta Y_{t-1} \quad , t = 1,2,3,\dots \quad (5.11)$$

dimana β adalah hasrat konsumsi marginal dengan $0 < \beta < 1$.

Selanjutnya pengusaha akan membuat pertahanan persediaan pada tingkat yang konstan. Pengusaha berusaha mengisi persediaan yang habis karena adanya tambahan dalam permintaan atau mengurangi persediaan bila ada penurunan permintaan. Metzler menganggap bahwa produksi dari barang-barang untuk persediaan dalam sebarang periode t sama dengan beda antara kenyataan penjualan dan harapan penjualan dari periode sebelumnya. Andaikan harapan penjualan dari periode $t-1$ adalah U_{t-1} , maka oleh persamaan (5.11) diperoleh

$$U_{t-1} = \beta Y_{t-2} \quad (5.12)$$

sehingga

$$\begin{aligned} S_t &= U_t - U_{t-1} \\ &= \beta Y_{t-1} - \beta Y_{t-2} \quad t = 2,3,\dots \end{aligned} \quad (5.13)$$

Dari persamaan (5.10 - 5.13) diperoleh persamaan untuk

pendapatan total Y_t yaitu

$$Y_t = \beta Y_{t-1} + \beta Y_{t-1} - \beta Y_{t-2} + V_0, \quad t = 2, 3, \dots \quad (5.14)$$

atau

$$Y_t - 2\beta Y_{t-1} + \beta Y_{t-2} = V_0, \quad t = 2, 3, \dots \quad (5.15)$$

tetapi jika persamaan di atas didefinisikan untuk nilai t mulai dari $t = 0$ maka persamaan (5.15) ekuivalen dengan

$$Y_{t+2} - 2\beta Y_{t+1} + \beta Y_t = V_0, \quad t = 0, 1, \dots \quad (5.16)$$

Ternyata persamaan (5.16) adalah persamaan diferensi linear non homogen orde-2 dengan koefisien konstan.

Selanjutnya akan dicari penyelesaian umum persamaan (5.16). Persamaan bantu dari persamaan diferensi homogen yang bersesuaian dengan persamaan (5.16) adalah

$$m^2 - 2\beta m + \beta = 0 \quad (5.17)$$

sehingga diperoleh 3 sifat akar-akar dari persamaan bantu yaitu :

- (1) kedua akar-akarnya real dan tidak sama ($m_1 \neq m_2$)
- (2) kedua akar-akarnya real dan sama ($m_1 = m_2$)
- (3) kedua akar-akarnya merupakan bilangan kompleks yang konjugat

Dengan menggunakan rumus kuadrat diperoleh akar-akarnya

$$m_1 = \beta + \sqrt{\beta^2 - \beta}, \quad m_2 = \beta - \sqrt{\beta^2 - \beta} \quad (5.18)$$

Oleh karena itu,

- (a) Jika $m_1 \neq m_2$ maka diperoleh $Y_t = c_1 m_1^t + c_2 m_2^t$
- (b) Jika $m_1 = m_2$ maka diperoleh $Y_t = c_1 m_1^t + c_2 t m_1^t$
- (c) Jika m_1, m_2 merupakan akar-akar kompleks yang konjugat maka diperoleh

$$Y_t = r^t (C_1 \cos \theta t + C_2 \sin \theta t)$$

Tetapi karena $0 < \beta < 1$, maka nilai $\beta^2 - \beta$ dibawah tanda akar adalah negatif, sehingga diperoleh akar-akar kompleks

$$m_1 = \beta + i\sqrt{\beta(1 - \beta)} , m_2 = \beta - i\sqrt{\beta(1 - \beta)} \quad (5.19)$$

kemudian persamaan (5.19) akan diubah kedalam bentuk

$$\text{polar, } r = \sqrt{\beta^2 + \beta(1 - \beta)} = \sqrt{\beta} \quad (5.20)$$

dan $-\pi < \theta < \pi$, sehingga

$$\cos\theta = \frac{\beta}{r} = \sqrt{\beta} , \sin\theta = \frac{\sqrt{\beta(1 - \beta)}}{r} = \sqrt{1 - \beta} \quad (5.21)$$

Jadi penyelesaian umum dari persamaan homogennya adalah

$$Y_l = (\sqrt{\beta})^t (C_1 \cos \theta t + C_2 \sin \theta t)$$

dimana C_1, C_2 adalah konstanta-konstanta sebarang.

Untuk mencari penyelesaian partikular dari persamaan (5.16) dipakai penyelesaian percobaan dengan bentuk

$$Y_l^* = k \quad (5.22)$$

Jika persamaan (5.22) memenuhi persamaan (5.16) maka diperoleh, $k - 2\beta k + \beta k = V_0$

$$k(1 - 2\beta + \beta) = V_0$$

$$k(1 - \beta) = V_0$$

$$k = \frac{V_0}{1 - \beta}$$

sehingga penyelesaian partikularnya menjadi

$$Y_l^* = \frac{V_0}{1 - \beta} \quad (5.23)$$

Jadi penyelesaian umum dari persamaan (5.16) adalah

$$Y_l = (\sqrt{\beta})^t (C_1 \cos \theta t + C_2 \sin \theta t) + \frac{V_0}{1 - \beta} \quad (5.24)$$

yang merupakan rumus untuk menghitung pendapatan total.

5.2.2 Model interaksi dari Samuelson

Penerapan persamaan diferensi yang terakhir dibahas pada penulisan skripsi ini berkaitan dengan pendapatan nasional untuk perekonomian tertutup. Model berikut ini diusulkan oleh P.A.Samuelson untuk analisa pendapatan nasional pada perekonomian tertutup.

Samuelson membuat 3 anggapan yaitu :

- (i) Pengeluaran konsumsi (dalam sebarang periode) adalah sesuai dengan pendapatan nasional periode sebelumnya.
- (ii) Investasi pada setiap periode sesuai dengan peningkatan konsumsi periode tersebut terhadap periode sebelumnya, ini disebut prinsip aselerasi.
- (iii) Pengeluaran pemerintah sama pada semua periode.

Sehingga diusulkan, sehimpunan persamaan-persamaan sebagai berikut :

$$Y_t = C_t + I_t + G_t \quad (5.25)$$

$$C_t = \alpha Y_{t-1} \quad (5.26)$$

$$I_t = \beta [C_t - C_{t-1}] \quad (5.27)$$

$$Y_0 = y_0 \quad (5.28)$$

$$Y_1 = y_1 \quad (5.29)$$

$$\alpha > 0, \beta > 0$$

dimana Y , C , I dan G berturut-turut menyatakan pendapatan nasional, konsumsi, investasi dan pengeluaran pemerintah, sedangkan berdasarkan anggapan (iii) yaitu G dianggap konstan pada semua periode dan unitnya atau satuannya sedemikian rupa sehingga $G_t = 1$.

Dengan mensubstitusikan persamaan (5.26) dan (5.27) ke dalam persamaan (5.25) diperoleh,

$$\begin{aligned} Y_t &= \alpha Y_{t-1} + \beta [C_t - C_{t-1}] + 1 \\ &= \alpha Y_{t-1} + \beta [\alpha Y_{t-1} - \alpha Y_{t-2}] + 1 \\ &= \alpha Y_{t-1} + \beta \alpha Y_{t-1} - \beta \alpha Y_{t-2} + 1 \\ &= \alpha(1+\beta)Y_{t-1} - \beta \alpha Y_{t-2} + 1 \\ Y_t - \alpha(1+\beta)Y_{t-1} + \beta \alpha Y_{t-2} &= 1, \quad t = 2, 3, \dots \quad (5.30) \end{aligned}$$

atau

$$Y_{t+2} - \alpha(1+\beta)Y_{t+1} + \beta \alpha Y_t = 1, \quad t = 0, 1, \dots \quad (5.31)$$

Ternyata persamaan (5.31) adalah persamaan diferensi linear orde-2 non homogen dengan koefisien konstan.

Selanjutnya terdapat 3 penyelesaian umum dari persamaan homogen yang bersesuaian dengan persamaan (5.31) yang tergantung pada sifat akar-akar persamaan bantuannya, yaitu

- (a) Jika $m_1 \neq m_2$ maka diperoleh $Y_t = c_1 m_1^t + c_2 m_2^t$
 - (b) Jika $m_1 = m_2$ maka diperoleh $Y_t = c_1 m_1^t + c_2 t m_1^t$
 - (c). Jika m_1, m_2 merupakan akar-akar kompleks yang konjugat maka diperoleh
- $$Y_t = r^t (C_1 \cos \theta t + C_2 \sin \theta t)$$

Sedangkan penyelesaian partikular persamaan non homogen (5.31) yaitu dengan memakai penyelesaian percobaan dengan bentuk

$$Y_t^* = k \quad (5.32)$$

Jika persamaan (5.32) memenuhi persamaan (5.31) maka diperoleh

$$k - \alpha(1+\beta)k + \alpha\beta k = 1$$

$$k[1 - \alpha(1+\beta) + \alpha\beta] = 1$$

$$k[1 - \alpha - \alpha\beta + \alpha\beta] = 1$$

$$k[1 - \alpha] = 1$$

$$k = \frac{1}{1-\alpha}$$

sehingga diperoleh penyelesaian partikularnya yaitu

$$Y_t^* = \frac{1}{1-\alpha}$$

Jadi penyelesaian umum persamaan (5.31) adalah

$$(a'). Y_t = c_1 m_1^t + c_2 m_2^t + \frac{1}{1-\alpha}$$

$$(b'). Y_t = c_1 m_1^t + c_2 t m_1^t + \frac{1}{1-\alpha}$$

$$(c'). Y_t = r^t (C_1 \cos \theta t + C_2 \sin \theta t) + \frac{1}{1-\alpha}$$

yang merupakan rumus untuk menghitung pendapatan nasional.

BAB VI

PENUTUP

Berdasarkan uraian di atas, secara umum dapat ditarik kesimpulan sebagai berikut :

Masalah-masalah dalam kehidupan sehari-hari yang melibatkan variabel diskrit, pemodelan matematika yang cocok adalah dengan persamaan diferensi.

Secara umum persamaan yang mengandung satu atau lebih diferensi-diferensi dinamakan persamaan diferensi.

Bentuk umum persamaan diferensi biasa orde-n adalah :

$$F(x, y_x, \Delta y_x, \Delta^2 y_x, \dots, \Delta^n y_x) = 0$$

Pada penulisan skripsi ini hanya membahas tentang persamaan diferensi linear dengan koefisien konstan baik yang homogen maupun non homogen, baik yang orde-1 maupun orde-2.

Persamaan diferensi linear non homogen orde-1 dengan koefisien konstan yang mempunyai bentuk umum

$$y_{k+1} = Ay_k + B, \quad k = 0, 1, 2 \quad (6.1)$$

dimana A, B adalah konstanta-konstanta sebarang dan $A \neq 0$, sedangkan jika B sama dengan nol, maka persamaan (6.1) adalah persamaan diferensi linear orde-1 homogen dengan koefisien konstan, mempunyai penyelesaian umum yaitu :

$$y_k = \begin{cases} A^k y_0 + B \frac{1-A^k}{1-A}, & \text{jika } A \neq 1 \\ y_0 + Bk & \text{jika } A = 1 \end{cases}, \quad k = 0, 1, 2 \quad (6.2)$$

Persamaan diferensi linear homogen orde-2 dengan koefisien konstan mempunyai bentuk umum :

$$y_{k+2} + a_1 y_{k+1} + a_2 y_k = 0, \quad k = 0, 1, 2, \quad (6.3)$$

dengan a_1, a_2 adalah konstanta-konstanta sebarang ($a_2 \neq 0$)

Andaikan persamaan bantu yang bersesuaian dengan persamaan (6.3) adalah

$$m^2 + a_1 m + a_2 = 0, \quad (6.4)$$

ini berarti terdapat m_1 dan m_2 sebagai akar-akar penyelesaian dari persamaan (6.4).

Jika m_1 dan m_2 adalah real dan tidak sama maka penyelesaian umum dari persamaan (6.3) adalah

$$Y_k = c_1 m_1^k + c_2 m_2^k$$

Jika m_1 dan m_2 adalah real dan sama, maka penyelesaian umum dari persamaan (6.3) adalah

$$Y_k = (c_1 + c_2 k) m_1^k$$

Dan jika m_1 dan m_2 merupakan konjugat kompleks dengan bentuk polarnya $r(\cos \theta \pm i \sin \theta)$, maka penyelesaian umum persamaan (6.3) adalah

$$Y_k = r^k (C_1 \cos \theta k + C_2 \sin \theta k)$$

Selanjutnya untuk persamaan diferensi linear non homogen orde-2 mempunyai bentuk umum :

$$y_{k+2} + a_1 y_{k+1} + a_2 y_k = r_k, \quad (6.5)$$

dimana a_1, a_2 adalah konstanta-konstanta sebarang ($a_2 \neq 0$), r adalah sebarang fungsi yang didefinisikan untuk $k = 0, 1, 2, \dots$.

Untuk mencari penyelesaian umum persamaan (6.5), harus dicari terlebih dahulu penyelesaian partikularnya dengan

menggunakan metode koefisien tak tentu. Untuk itu digunakan penyelesaian percobaan yang terdapat dalam tabel 1.2, kemudian mencari penyelesaian umum dari persamaan homogen yang bersesuaian dengan persamaan (6.5). Jadi penyelesaian umum dari persamaan (6.5) adalah jumlah dari penyelesaian umum persamaan homogen yang bersesuaian dengan persamaan (6.5) dengan penyelesaian partikular persamaan (6.5).

Ternyata terdapat hubungan antara persamaan diferensial dengan persamaan diferensi, dimana

$$Dy_x = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta y_x}{h}$$

Selain itu dari tabel 1.3 dapat dilihat beberapa hasil yang dikenal pada kalkulus diferensial memiliki bentuk yang analog dengan kalkulus diferensi.

Akhirnya penulisan skripsi ini membahas penerapan persamaan diferensi dalam bidang ekonomi misalnya 1) untuk persamaan diferensi linear orde-1 yaitu bunga tunggal, bunga majemuk, dan pendapatan nasional (model Harrod) dan 2) untuk persamaan diferensi linear orde-2 yaitu analisis persediaan (model Metzler) dan analisis pendapatan nasional (model Samuelson).

Pada perhitungan bunga tunggal telah dikenal rumus :

$$P_t = P_0 + t \frac{r}{100} P_0$$

dimana : P_t adalah jumlah modal setelah periode ke- t

P_0 adalah modal mula-mula

$\frac{r}{100}$ adalah bunga yang diberikan

dalam pembahasan, berdasarkan rumus ini telah dapat

diturunkan hubungan antara P_{t+1} dan P_t sebagai berikut :

$$P_{t+1} - P_t = \frac{r}{100} P_0$$

Tampak bahwa persamaan ini merupakan persamaan diferensi linear non homogen orde-1.

Pada perhitungan bunga majemuk telah dikenal rumus :

$$P_t = P_0 \left(1 + \frac{r}{100}\right)^t$$

dimana : P_t adalah jumlah modal setelah periode ke- t

P_0 adalah modal mula-mula

$\frac{r}{100}$ adalah bunga yang diberikan

Dalam pembahasan juga telah diperoleh hubungan antara P_{t+1} dan P_t yaitu :

$$P_{t+1} - P_t \left(1 + \frac{r}{100}\right) = 0,$$

Tampak bahwa ini merupakan persamaan diferensi linear homogen orde-1.

Pada pendapatan nasional diperoleh hubungan :

$$Y_{t+1} = [1 + r(1 - m)]Y_t - rc$$

tampak bahwa persamaan ini adalah persamaan diferensi linear non homogen orde-1 dengan koefisien konstan, yang kemudian dalam pembahasan persamaan tersebut diselesaikan sehingga diperoleh rumus untuk menghitung pendapatan nasional yaitu :

$$Y_t = [1 + r(1 - m)]^t \left(Y_0 - \frac{c}{1-m}\right) + \frac{c}{1-m}$$

Penerapan persamaan diferensi selanjutnya adalah pada analisis persediaan. Pada pembahasan analisis persediaan diperoleh hubungan :

$$Y_{t+2} - 2\beta Y_{t+1} + \beta Y_t = V_0$$

tampak bahwa persamaan ini adalah persamaan diferensi

linear non homogen orde-2 dengan koefisien konstan, yang kemudian persamaan tersebut diselesaikan sehingga diperoleh rumus untuk menghitung pendapatan total yaitu :

$$Y_t = (\sqrt{\beta})^t (C_1 \cos \theta t + C_2 \sin \theta t) + \frac{V_0}{1 - \beta}$$

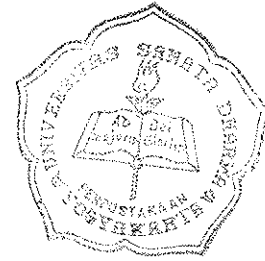
Akhirnya penerapan persamaan diferensi yang terakhir adalah pendapatan nasional pada perekonomian yang tertutup menurut P.A.Samuelson. Pada pembahasan diperoleh hubungan :

$$Y_{t+2} - \alpha(1+\beta)Y_{t+1} + \alpha\beta Y_t = 1, \quad t = 0, 1, 2, \dots$$

tampak bahwa persamaan ini adalah persamaan diferensi linear non homogen orde-2 dengan koefisien konstan, yang kemudian jika persamaan itu diselesaikan maka diperoleh tiga tipe penyelesaian umum yang tergantung pada sifat akar-akar persamaan bantuannya yaitu :

- (a) Jika $m_1 \neq m_2$ maka diperoleh $Y_t = c_1 m_1^t + c_2 m_2^t + \frac{1}{1-\alpha}$
- (b) Jika $m_1 = m_2$ maka diperoleh $Y_t = c_1 m_1^t + c_2 t m_1^t + \frac{1}{1-\alpha}$
- (c) Jika m_1, m_2 merupakan akar-akar kompleks yang konjugat maka diperoleh

$$Y_t = r^t (C_1 \cos \theta t + C_2 \sin \theta t) + \frac{1}{1-\alpha}$$



DAFTAR PUSTAKA

- Betz, Herman, *Differential Equations With Applications*, New York : Harper, 1964.
- Boyce, W.E, *Elementary Differential Equations*, New York : John Wiley and Sons, Inc, 1992.
- Bushaw, D.W dan Clower, R.W, *Introduction to Mathematical Economics*, Washington : Richard D. Irwin, Inc, 1957.
- Chiang, A.C, *Fundamental Methods of Mathematical Economics*, New York : Mc.Graw-Hill, Inc, 1974.
- Chorlton, F, *Ordinary Differential and Difference Equations*, London : D. Van Nostrand Company, Ltd, 1965.
- Goldberg, S, *Introduction to Difference Equations*, New York : John Wiley and Sons, Inc, 1958.
- Goldstein, L, *Finite Mathematics and Its Applications*, New Jersey : Prentice-Hall, Inc, Englewood Cliffs, 1980.
- Huang, S.D, *Introduction to The Use of Mathematics in Economic Analysis*, New York : John Wiley and Sons, Inc, 1964.
- Johannes, H. Prof dan Sri Handoko, B, *Pengantar Matematika untuk Ekonomi*, Jakarta : LP3S, 1974.
- Jordan, C, *Calculus of Finite Differences*, New York : Chelsea, Publishing Company, 1950.

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

- Martin, W.T, *Elementary Differential Equation*, Massachussetts : Addison-Wesley, 1956.
- Miller, K, *An Introduction to The Calculus of Finite Differences Equations*, New York : Henry Holt and Company, 1947.
- Scott, E.J, *Transform Calculus With An Introduction to Complex Variable*, New York : Harper, 1947.
- Supranto, J, *Matematika untuk Ekonomi dan Bisnis*, Jakarta : Lembaga Penerbit Fakultas Ekonomi Universitas Indonesia, 1987.
- Weber, J.E, *Analisis Matematik Penerapan Bisnis dan Ekonomi (terj)*, Jakarta : Erlangga, 1988.