PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

PENGANTAR MODUL BEBAS DAN MODUL TORSI

SKRIPSI

Diajukan untuk Memenuhi Salah Satu Syarat
Memperoleh Gelar Sarjana Pendidikan
Program Studi Pendidikan Matematika

Oleh :

Gregoria Ariyanti

NIM : 92 414 030
NIRM : 920052010501120026

PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA
JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
UNIVERSITAS SANATA DHARMA
YOGYAKARTA
1997

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

Skripsi

PENGANTAR MODUL BEBAS DAN

MODUL TORSI

Oleh :

Gregoria Ariyanti

NIM : 92 414 030

NIRM : 920052010501120026

Telah disetujui oleh :

Pembimbing I

Drs. AL. Sutjijana,M.Sc tanggal 5-8-1997

Pembimbing II

Dr.F. Susilo. S.J. tanggal 12-8-1997

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

SKRIPSI

PENGANTAR MODUL BEBAS DAN MODUL TORSI

Dipersiapkan dan ditulis oleh

Gregoria Ariyanti

NIM : 92 414 030

NIRM : 920052010501120026

Telah dipertahankan di depan Panitia Penguji

pada tanggal 14 Juli 1997

dan dinyatakan memenuhi syarat

Susunan Panitia Penguji

	Nama lengkap	Tanda tangan
Ketua	Drs. Fr.Y. Kartika Budi, M.Pd	....
Sekretaris	Dr. St. Suwarsono	....
Anggota	Drs. AL. Sutjijana, M.Sc	....
Anggota	Dr. F. Susilo, S.J.	....
Anggota	Dr. Y. Marpaung	....

Yogyakarta, Juli 1997

Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan

Universitas Sanata Dharma

Dekan,

Dr. Paul Suparno, S.J. MST

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

KATA PENGANTAR

Dengan mengucap syukur ke hadirat Tuhan Yang Maha Esa, bahwa penyusunan skripsi guna memenuhi syarat dalam menempuh ujian sarjana Pendidikan pada Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Sanata Dharma Yogyakarta telah dapat diselesaikan penulisannya.

Dalam kesempatan ini tidaklah berlebihan apabila penulis menyampaikan ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya atas bantuan yang telah diberikan .

Ucapan terima kasih ditujukan kepada :

1. Bapak Drs. AL. Sutjijana, M.Sc selaku Pembimbing I.
2. Romo Dr. F. Susilo .S.J. selaku Pembimbing II.
3. Bapak Drs. St. Susento, M.Si selaku Ketua Program Studi Pendidikan Matematika.
4. Bapak Drs.Fr.Y.Kartika Budi M.Pd, selaku Ketua Jurusan Pendidikan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam.
5. Karyawan Sekretariat Pendidikan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam yang telah banyak membantu.
6. Pihak-pihak lain yang juga telah membantu demi kelancaran penyelesaian skripsi ini.

Penulis menyadari, bahwa skripsi ini masih jauh dari sempurna, baik ditinjau dari segi isi maupun rumusan

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

kalimatnya. Oleh karena itu, penulis selalu terbuka dalam menerima kritik dan saran yang bersifat membangun dari semua pihak. Atas segala kritik dan saran itu, penulis mengucapkan terima kasih.

Akhir kata, semoga skripsi ini berguna bagi semua pihak yang berkepentingan dan dapat lebih dikembangkan.

Penulis

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

DAFTAR ISI

Halaman

HALAMAN JUDUL i
HALAMAN PERSETUJUAN PEMBIMBING ii
HALAMAN PENGESAHAN iii
KATA PENGANTAR iv
DAFTAR ISI vi
ABSTRAK viii
ABSTRACT ix
BAB I PENDAHULUAN
1.1. Latar Belakang Masalah 1
1.2. Perumusan Masalah 2
1.3. Tujuan Penulisan 2
1.4. Metode Penulisan 3
BAB II PENGERTIAN MODUL DAN ISOMORFISMA PADA MODUL
2.1. Modul 4
2.2. Isomorfisma Pada Modul 13
BAB III MODUL BEBAS
3.1. Basis 25
3.2. Ideal Maksimal dalam Ring............... 34
3.3. Modul Bebas 41
BAB IV MODUL TORSI
4.1. Daerah Ideal Utama dan Daerah Faktorisasi

SANATA DHARMA UNIVERSITAS Ad Dei Majorem Gloriam PERPUSTAKAAN YOGYAKARTA

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

Tunggal 52

4.2. Modul Torsi dan Bebas Torsi 68

BAB V MODUL LEWAT DAERAH IDEAL UTAMA $\mathbb{Z}$

5.1. Grup Komutatif Terhadap Penjumlahan Adalah Modul Lewat Daerah Ideal Utama $\mathbb{Z}$ 82

5.2. $\mathbb{Z}_n$ Merupakan Modul Torsi yang dibangun secara berhingga lewat Daerah Ideal Utama $\mathbb{Z}$ 83

BAB VI KESIMPULAN 91

DAFTAR PUSTAKA 93

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

ABSTRAK

Himpunan tak kosong M disebut modul lewat ring komutatif R dengan elemen satuan 1, bila M dilengkapi dengan dua operasi, yaitu operasi jumlahan (+) dan operasi perkalian dengan skalar, yang dapat dinyatakan dengan pemetaan $\phi : R \times M \longrightarrow M$ di mana $\phi(r,u) = ru \in M$ untuk tiap $r \in R$ dan $u \in M$ sedemikian sehingga dipenuhi sifat-sifat berikut :

1. M adalah grup komutatif terhadap operasi jumlahan.
2. Untuk semua $r,s \in R$, $u,v \in M$ berlaku

$$r(u+v) = ru + rv$$
$$(r+s)u = ru + su$$
$$(rs)u = r(su)$$
$$1u = u.$$

Grup bagian S dari modul M lewat ring R disebut modul bagian dari M jika $ru \in S$ untuk setiap $r \in R$ dan $u \in S$.

Suatu modul M lewat ring R dikatakan bebas jika M mempunyai basis. Jika B adalah basis untuk M, kita katakan bahwa M adalah bebas pada B.
Jika $v \in M$ mempunyai ciri bahwa $rv=0$ untuk suatu elemen taknol $r \in R$, maka v disebut elemen torsi dari M.
Modul M lewat ring R disebut modul torsi jika semua elemen dari M adalah elemen torsi.
Suatu modul yang tidak mempunyai elemen torsi taknol disebut bebas torsi.

Modul torsi M yang dibangun secara berhingga lewat daerah ideal utama R merupakan jumlahan langsung dari modul bagian-modul bagian primer.

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

ABSTRACT

A nonempty set M is called a module over a commutative ring R with identity 1, if two operations, i.e. addition (+) and multiplication with scalar, which can be stated as a mapping $\phi: R \times M \longrightarrow M$ where $\phi(r,u) = ru \in M$ for all $r \in R$ and $u \in M$, are defined in M such that the following properties are satisfied :

1. M is a comutative group under addition.
2. For all $r,s \in R$, $u,v \in M$

$$r(u+v) = ru+rv$$
$$(r+s)u = ru+su$$
$$(rs)u = r(su)$$
$$1u = u$$

A subgroup S of module M over a ring R is a submodule of M if $ru \in S$ for all $r \in R$ and $u \in S$.

A module M over a ring R is called free if it has a basis. If B is a basis for M, we say that M is free on B.

If $v \in M$ has a property that $rv=0$ for some nonzero $r \in R$, then v is called a torsion element of M. A module M over a ring R is a torsion module if all elements of M are torsion elements.

A module that has no nonzero torsion elements is called torsion free.

A finitely generated torsion module M over a principal ideal domain is a direct sum of primary submodules.

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

BAB I

PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang Masalah

Modul merupakan perluasan pengertian dari ruang vektor. Pada ruang vektor yang merupakan daerah operator adalah field, sedangkan pada modul sebagai daerah operator adalah ring. Modul bagian merupakan grup bagian dari suatu modul dan memenuhi sifat-sifat tertentu.

Dalam tulisan ini akan diterangkan tentang modul bebas dan modul torsi. Sebelum masuk pada pembahasan modul bebas dan modul torsi, diuraikan terlebih dahulu pengertian modul itu sendiri. Pembahasan modul (khususnya modul bebas) terkait dengan materi-materi lainnya, seperti ideal, jumlahan langsung, himpunan pembangun, bebas linear, basis, homomorfisma dan isomorfisma. Dan pembahasan modul torsi terkait dengan elemen torsi dan bebas torsi.

Modul yang akan dibahas adalah modul lewat suatu ring komuataif dan dalam keadaan lebih khusus lagi ditambahkan juga uraian tentang modul lewat daerah ideal utama. Sebagai aplikasi dari modul lewat daerah ideal

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

utama adalah modul lewat $\mathbb{Z}$ ($\mathbb{Z}$ adalah daerah ideal utama).

Dalam tulisan ini akan dibuktikan teorema dekomposisi primer dan juga diberikan definisi modul bagian primer.

1.2. Perumusan Masalah

Adapun masalah-masalah yang akan diungkapkan dalam tulisan ini dapat dirumuskan secara sederhana sebagai berikut :

1. Apa yang dimaksud dengan modul dan bagaimana contoh-contoh modul itu ?
2. Apakah yang dimaksud dengan modul bebas dan modul torsi serta beberapa teorema pengembangannya ?
3. Apakah yang dimaksud dengan modul primer dan bagaimana bukti teorema dekomposisi primer ?
4. Bagaimana bentuk dari teorema tersebut pada modul $\mathbb{Z}_n$ lewat $\mathbb{Z}$?

1.3. Tujuan Penulisan

Adapun tujuan dari penulisan sebagai berikut :

1. Memahami pengertian modul dan bentuk-bentuk modul seperti modul bebas dan modul torsi.
2. Mengetahui pembuktian teorema dekomposisi primer dan bentuk teorema tersebut pada modul $\mathbb{Z}_n$ lewat $\mathbb{Z}$.

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

1.4. Metode Penulisan

Metode yang dilakukan penulis dalam penyusunan skripsi ini adalah dengan studi pustaka yaitu dengan mempelajari buku-buku yang berkaitan dengan judul tulisan ini.

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

BAB II

PENGERTIAN MODUL DAN ISOMORFISMA PADA MODUL

Dalam bab ini, akan diuraikan tentang modul dan isomorfisma pada modul. Untuk subbab pertama diuraikan definisi modul dan contohnya serta modul bagian dan teorema yang merupakan pengembangan dari pengertian modul bagian. Dan dalam subbab kedua dibahas tentang isomorfisma.

2.1. Modul

Definisi 2.1.1

Himpunan tak kosong M disebut <u>modul lewat ring komutatif R</u> dengan elemen satuan 1, bila M dilengkapi dengan dua operasi, yaitu operasi jumlahan (+) dan operasi perkalian dengan skalar, yang dapat dinyatakan dengan pemetaan $\phi : R \times M \longrightarrow M$ di mana $\phi(r,u) = ru \in M$ untuk tiap $r \in R$ dan $u \in M$ sedemikian sehingga dipenuhi sifat-sifat berikut :

1. M adalah grup komutatif terhadap operasi jumlahan
2. $\forall$ r,s $\in$ R, $\forall$ u,v $\in$ M berlaku

   $r(u+v) = ru + rv$

   $(r+s)u = ru + su$

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

$(rs)u = r(su)$

$1u = u$ □

Dari definisi 2.1.1 tersebut dapat dikatakan bahwa operasi perkalian dengan skalar yang dikerjakan oleh elemen dari R pada elemen dalam M, mengubah elemen dari M ini, dengan tunggal menjadi elemen dari M lagi. Oleh karena itu R disebut daerah operator. Elemen-elemen dari R disebut skalar.

Jika daerah operator pada modul adalah field F, maka modul tersebut tidak lain adalah ruang vektor lewat field F.

Untuk selanjutnya dalam tulisan ini, daerah operator dari modul yang dibicarakan adalah ring R yang komutatif dan memiliki elemen satuan.

Contoh :

1. Diberikan R ring. Himpunan R^n yang masing-masing komponennya dalam R, merupakan modul lewat R, dengan operasi jumlahan dan perkalian dengan skalar sebagai berikut

   $(a_1,\ldots,a_n) + (b_1,\ldots,b_n) = (a_1+b_1,\ldots,a_n+b_n)$

   $r(a_1,\ldots,a_n) = (ra_1,\ldots,ra_n)$

   $\forall\ (a_1,\ldots,a_n),(b_1,\ldots,b_n) \in R^n$ dan $r \in R$.

2 Diberikan R ring. Himpunan $M_{mn}(R)$ yaitu himpunan semua matriks berordo mxn dengan elemen-elemennya dalam R,

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

merupakan modul lewat R, dengan operasi jumlahan dan perkalian dengan skalar sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} a_{11} \cdots a_{1n} \\ \vdots \\ a_{m1} \cdots a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} \cdots b_{1n} \\ \vdots \\ b_{m1} \cdots b_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} \cdots a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} \cdots a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}$$

$$\text{dan} \quad r \begin{bmatrix} a_{11} \cdots a_{1n} \\ \vdots \\ a_{m1} \cdots a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ra_{11} \cdots ra_{1n} \\ \vdots \\ ra_{m1} \cdots ra_{mn} \end{bmatrix}$$

$$\forall \begin{bmatrix} a_{11} \cdots a_{1n} \\ \vdots \\ a_{m1} \cdots a_{mn} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b_{11} \cdots b_{1n} \\ \vdots \\ b_{m1} \cdots b_{mn} \end{bmatrix} \in M_{mn}(R) \text{ dan } r \in R.$$

3. Diberikan ring komutatif R dengan elemen satuan. Maka R ini adalah modul lewat dirinya sendiri.

4. Diberikan ring komutatif R dan M = {0} adalah grup komutatif dengan satu elemen. Jika didefinisikan $\forall r \in R$, $r0 = 0 \in M$, maka M adalah modul lewat ring R, yaitu suatu modul trivial (sederhana).

Definisi 2.1.2

Diberikan ring komutatif R. Himpunan bagian tak kosong I dari R disebut <u>ideal</u> jika

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

1. $\forall a,b \in I$, $a-b \in I$
2. I tertutup terhadap perkalian dengan elemen dalam ring R, yaitu $\forall$ $a\in I$, $r\in R$, $ar\in I$. □

Teorema 2.1.1

Diberikan ring komutatif R dan modul M lewat R. Jika I himpunan elemen-elemen $x\in R$ sedemikian sehingga $xv = 0$ untuk semua $v\in M$, maka I adalah ideal dari R.

Bukti :

Diberikan himpunan I dengan $I = \{ x\in R / xv = 0, \forall v\in M\}$.
Dari definisi jelas $I\subseteq R$.
Karena $0\in R$ dan $0v=0$ untuk tiap $v\in M$, maka $0\in I$.
Jadi $I\neq\emptyset$. Akan dibuktikan bahwa

i) $a,b \in I \Rightarrow a - b \in I$

ii) $a \in I$, $r \in R \Rightarrow ar \in I$

i) Ambil $a,b\in I$, maka $av=0$ dan $bv=0$ untuk tiap $v\in M$.
Jadi $(a-b)v = av-bv = 0-0 = 0$.
Karena $a-b \in R$ dan $(a-b)v = 0$ untuk $\forall v\in M$, maka $a-b \in I$

ii) Ambil $r\in R$, $a\in I$, maka $av = 0$ untuk $v\in M$.
Karena $I\subseteq R$, jika $a\in I$ maka $a\in R$.
Jadi $ar\in R$ dan $ar=ra$ (karena R komutatif).
Sehingga $(ar)v = (ra)v = r(av) = r0 = 0$ untuk tiap $v\in M$. Maka $ar\in I$.

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

Dari i) dan ii) terbukti I ideal dari R. ∎

Definisi 2.1.3

Diberikan modul M lewat ring R.

S disebut modul bagian dari M jika S adalah grup bagian dari grup M dan dipenuhi $ru \in S$ untuk setiap $r \in R$ dan $u \in S$. □

Contoh :

1. Diberikan ring R. Karena R merupakan modul lewat R, maka setiap himpunan bagian dari R merupakan modul bagian dari R bila dan hanya bila himpunan bagian tersebut merupakan ideal.
2. Diberikan modul M lewat ring R dan $x \in M$. Himpunan $\{rx / r \in R\}$ merupakan modul bagian dari M.

Teorema 2.1.2

Diberikan modul M lewat ring R. Himpunan bagian tak kosong S dari M adalah modul bagian dari M bila dan hanya bila untuk setiap $r,s \in R$ dan setiap $u,v \in S$, $ru+sv \in S$.

Bukti :

($\Rightarrow$) Diketahui S modul bagian dari M.

Ambil $r,s \in R$ dan $u,v \in S$.

Akan dibuktikan $ru+sv \in S$.

Karena S modul bagian, maka $ru \in S$ dan $sv \in S$.

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

Karena S grup bagian dari grup M dan $ru \in S, sv \in S$ maka $ru+sv \in S$.

($\Leftarrow$) Diberikan modul M lewat ring R dan $S \subseteq M$ dengan $S \neq \emptyset$.

Diketahui : $r,s \in R, u,v \in S \Rightarrow ru+sv \in S$.

i). Akan dibuktikan S grup bagian dari M.

Ambil $u,v \in S$.

Karena R ring dengan elemen satuan 1, maka $1 \in R$ dan $-1 \in R$.

Sehingga $1u+(-1)v \in S$ (berdasarkan yang diketahui).

Didapat $1u+(-1)v = u-v$. Maka $u-v \in S$.

Terbukti S grup bagian dari M.

ii). Akan dibuktikan S modul bagian dari M.

Ambil $r \in R$ dan $u \in S$. Akan ditunjukkan $ru \in S$.

Karena $0 \in S$, maka berdasarkan yang diketahui : jika $r \in R$, $u,0 \in S$, maka $ru+r0 \in S$.

Karena $ru+r0 = ru+0$, maka $ru \in S$.

Dari i) dan ii) terbukti S modul bagian dari M. ■

Teorema 2.1.3

Diberikan modul M lewat ring R. Jika S dan T adalah modul bagian dari M, maka $S \cap T$ dan $S+T = \{ u+v / u \in S, v \in T \}$ adalah modul bagian dari M.

Bukti :

Diberikan modul M lewat ring R dan S dan T modul

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

bagian dari M.

a). Akan dibuktikan $S \cap T$ grup bagian dari M.

i). Karena S dan T grup bagian dari M, maka $0 \in S$ dan $0 \in T$. Jadi $0 \in S \cap T$. Sehingga $S \cap T \neq \emptyset$.

ii). Jelas $S \cap T \subseteq M$.

iii). Diberikan $u, v \in S \cap T$.

Berarti $u \in S$, $u \in T$, $v \in S$ dan $v \in T$.

Karena S grup bagian dari M : $u, v \in S \Rightarrow u-v \in S$.

Karena T grup bagian dari M : $u, v \in T \Rightarrow u-v \in T$.

Didapat $u-v \in S$ dan $u-v \in T$, sehingga $u-v \in S \cap T$.

Terbukti $S \cap T$ grup bagian dari M.

Akan dibuktikan $S \cap T$ modul bagian dari M.

Diberikan $u \in S \cap T$ dan $r \in R$.

Akan ditunjukkan $ru \in S \cap T$.

Karena $u \in S \cap T$, maka $u \in S$ dan $u \in T$.

Karena S modul bagian M, dan $u \in S$, $r \in R$, maka $ru \in S$. Karena T modul bagian M, dan $u \in T$, $r \in R$, maka $ru \in T$.

Sehingga, karena $ru \in S$ dan $ru \in T$, maka $ru \in S \cap T$.

Terbukti $S \cap T$ modul bagian dari M.

b). Akan dibuktikan S+T grup bagian dari M.

i). Karena S dan T grup bagian dari M, maka $0 \in S$ dan $0 \in T$. Sehingga $0 = 0+0 \in S+T$. Jadi $S+T \neq \emptyset$.

ii). Jelas $S+T \subseteq M$.

iii). Diberikan $a, b \in S+T$.

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

$a \in S+T \Rightarrow a = u_1+v_1$, untuk suatu $u_1 \in S$, $v_1 \in T$.

$b \in S+T \Rightarrow b = u_2+v_2$, untuk suatu $u_2 \in S$, $v_2 \in T$.

Karena S dan T grup bagian dari M, maka untuk $u_1, u_2 \in S$ diperoleh $u_1-u_2 \in S$ dan untuk $v_1, v_2 \in T$ diperoleh $v_1-v_2 \in T$.

Sehingga $a-b = (u_1+v_1) - (u_2+v_2)$

$= (u_1-u_2) + (v_1-v_2) \in SxT$.

Didapat : $a,b \in S+T \Rightarrow a-b \in S+T$.

Terbukti S+T grup bagian dari M.

Akan dibuktikan S+T modul bagian M.

Diberikan $a \in S+T$ dan $r \in R$.

Akan ditunjukkan $ra \in S+T$.

Karena $a \in S+T$, maka $a = u+v$ dengan $u \in S$ dan $v \in T$.

Karena S dan T modul bagian dari M, maka untuk $r \in R$, $u \in S$ diperoleh $ru \in S$ dan untuk $r \in R$, $v \in T$ diperoleh $rv \in T$.

Jadi $ra = r(u+v)$

$= ru + rv$, dengan $ru \in S$ dan $rv \in T$.

Didapat : $a \in S+T$, $r \in R \Rightarrow ra \in S+T$.

Terbukti S+T modul bagian dari M. ■

Teorema 2.1.4

Diberikan modul M lewat ring R dan I ideal dari R. Diberikan IM himpunan semua jumlahan berhingga berbentuk

$$r_1v_1 + \ldots + r_nv_n \text{ dengan } r_i \in I \text{ , } v_i \in M.$$

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

Maka IM adalah modul bagian M.

Bukti :

Akan ditunjukkan terlebih dulu IM grup bagian M.

1). Karena $0 \in M$ maka dapat ditulis sebagai

$0 = r_1 0 + r_2 0 + \ldots + r_n 0$, dengan $r_i \in I$ dan $0 \in M$.

Sehingga $0 \in IM$, jadi $IM \neq \emptyset$.

2). Ambil $x \in IM$.

Maka $x = r_1 v_1 + \ldots + r_n v_n$, dengan $r_i \in I$, $v_i \in M$.

Karena $I \subseteq R$, dan $r_1, \ldots, r_n \in I$, maka $r_1, \ldots, r_n \in R$. Karena M modul lewat ring R maka

$x = r_1 v_1 + \ldots + r_n v_n \in M$

Didapat : $IM \subseteq M$.

3). Ambil $x, y \in IM$.

Maka $x = r_1 v_1 + \ldots + r_n v_n$, dengan $r_i \in I$, $v_i \in M$ dan $y = t_1 u_1 + \ldots + t_m u_m$, dengan $t_i \in I$, $u_i \in M$.

Sehingga $x - y = (r_1 v_1 + \ldots + r_n v_n) - (t_1 u_1 + \ldots + t_m u_m)$

$= r_1 v_1 + \ldots + r_n v_n + (-t_1) u_1 + \ldots + (-t_m) u_m$

Karena I ideal, maka $-t_1, \ldots, -t_m \in I$.

Sehingga karena $r_1, \ldots, r_n, -t_1, \ldots, -t_m \in I$ dan $v_1, \ldots, v_n, u_1, \ldots, u_m \in M$, maka $x - y \in IM$.

Dari 1), 2) dan 3) terbukti IM grup bagian dari M.

Selanjutnya akan dibuktikan IM merupakan modul bagian dari M.

Diberikan $r \in R$. Ambil $x \in IM$, maka

$x = t_1 v_1 + \ldots + t_n v_n$, dengan $t_i \in I$, dan $v_i \in M$.

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

Sehingga $rx = r(t_1v_1 + \ldots + t_nv_n)$

$$= (rt_1)v_1 + \ldots + (rt_n)v_n$$

Karena I ideal, maka untuk $r \in R$ dan $t_i \in I$, didapat $rt_i \in I$, untuk $i=1,\ldots,n$. Jadi $rx \in IM$.

Terbukti IM merupakan modul bagian dari M. ∎

2.2. Isomorfisma Pada Modul

Definisi 2.2.1

Diberikan M dan N modul lewat ring R.

Fungsi $\alpha : M \longrightarrow N$ disebut homomorfisma dari M ke N jika

$$\alpha(m_1+m_2) = \alpha(m_1) + \alpha(m_2) \text{ dan } \alpha(rm_1) = r\alpha(m_1)$$

untuk semua $m_1, m_2 \in M$ dan skalar $r \in R$.

Himpunan semua homomorfisma dari M ke N dilambangkan dengan Hom(M,N). Selanjutnya didefinisikan :

1. Endomorfisma adalah homomorfisma dari M ke M.
2. Monomorfisma adalah homomorfisma yang injektif.
3. Epimorfisma adalah homomorfisma yang surjektif.
4. Isomorfisma adalah homomorfisma yang bijektif.

Jika $\alpha : M \longrightarrow N$ adalah suatu isomorfisma, maka M dan N dikatakan isomorfik dan ditulis $M \cong N$. □

Teorema 2.2.1

Diberikan M dan N modul lewat ring R dan $\alpha \in Hom(M,N)$.

Kernel dan bayangan α yang didefinisikan sebagai

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

berikut $Ker(\alpha)=\{v\in M/\alpha(v)=0\}$ dan $\alpha(M)=\{\alpha(v) \in N/v\in M\}$, berturut-turut merupakan modul bagian dari M dan modul bagian dari N.

Bukti :

Diketahui $\alpha : M \longrightarrow N$ homomorfisma.

Akan dibuktikan $Ker(\alpha)$ modul bagian M.

i). $Ker(\alpha)\subseteq M$.

ii). Karena M grup penjumlahan, maka untuk $a\in M$, $a+(-a)=0\in M$. Sehingga

$$\begin{aligned}\alpha(0) &= \alpha(a+(-a))\\ &= \alpha(a)+-(\alpha(a))\\ &= 0\end{aligned}$$

Jadi $0 \in Ker(\alpha)$ berarti $Ker(\alpha)\neq\emptyset$.

iii). Diberikan $a,b\in Ker(\alpha)$, maka $a,b\in M$ dan $\alpha(a)=0$, $\alpha(b)=0$.

Didapat $\alpha(a-b) = \alpha(a)-\alpha(b)$
$= 0-0$
$= 0$

Jadi $a-b \in Ker(\alpha)$.

iv). Diberikan $r\in R$, $a\in Ker(\alpha)$, maka $\alpha(ra) = r\alpha(a) = r0 = 0$.

Jadi $ra\in Ker(\alpha)$.

Dari i),ii), iii) dan iv) terbukti $Ker(\alpha)$ modul bagian M. Akan dibuktikan $\alpha(M)$ modul bagian N.

i). $\alpha(M)\subseteq N$.

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

ii). Karena M grup penjumlahan, maka untuk $v \in M$, terdapat $v+(-v)=0 \in M$.

Maka $\alpha(0) = \alpha(v+(-v))$

$= \alpha(v)+-\alpha(v)$

$= 0$

Jadi $0 \in \alpha(M)$, sehingga $\alpha(M) \neq \emptyset$.

iii). Ambil $a,b \in \alpha(M)$.

Maka $a = \alpha(v_1)$ dan $b = \alpha(v_2)$, dengan $v_1, v_2 \in M$.

Sehingga $a-b = \alpha(v_1)-\alpha(v_2) = \alpha(v_1-v_2)$.

Karena M modul, maka $v_1-v_2 \in M$.

Jadi $a-b \in \alpha(M)$.

iv). Ambil $r \in R$, $a \in \alpha(M)$, maka $a=\alpha(v_1)$, dengan $v_1 \in M$.

Sehingga $ra = r\alpha(v_1) = \alpha(rv_1)$ dengan $rv_1 \in M$.

Jadi $ra \in \alpha(M)$.

Terbukti $\alpha(M)$ modul bagian N. ■

Teorema 2.2.2

Diberikan M dan N modul lewat ring R dan $\alpha : M \longrightarrow N$ suatu homomorfisma.

Maka α monomorfisma bila dan hanya bila $Ker(\alpha) = \{0\}$.

Bukti :

($\Rightarrow$) Diketahui α monomorfisma.

Akan dibuktikan $Ker(\alpha)=\{0\}$.

Ambil $x \in Ker(\alpha)$. Maka $\alpha(x)=0$.

Karena $\alpha(0)=0$, maka $\alpha(x)=\alpha(0)$.

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

Karena α injektif, maka $x = 0$.

Jadi terbukti $Ker(\alpha)=\{0\}$.

($\Leftarrow$) Diketahui $Ker(\alpha)=\{0\}$ dan α homomorfisma.

Akan ditunjukkan α injektif. Ambil $x_1, x_2 \in M$ dengan $\alpha(x_1)=\alpha(x_2)$. Maka $\alpha(x_1)-\alpha(x_2)=0$.

Karena α homomorfisma, maka $\alpha(x_1-x_2) = 0$.

Berarti $x_1-x_2 \in Ker(\alpha)$.

Padahal $Ker(\alpha)=\{0\}$, jadi $x_1-x_2 = 0$.

Maka $x_1=x_2$.

Terbukti α monomorfisma. ■

Contoh :

1. Diberikan ring $\mathbb{Z}$ dan $\mathbb{Z}$ adalah modul lewat dirinya sendiri. Bila didefinisikan pemetaan $\varphi: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ dengan $\varphi(x) = 2x$ untuk $x\in\mathbb{Z}$, maka φ merupakan homomorfisma.
2. Diberikan ring R dan modul R^n lewat R. Pemetaan $\alpha_i : R^n \longrightarrow R$ didefinisikan sebagai $\alpha_i((x_1,\ldots,x_n)) = x_i$, adalah suatu epimorfisma untuk setiap $i = 1,2,\ldots,n$.

Definisi 2.2.2

Diberikan modul M lewat ring R dan S modul bagian M sedangkan $M/S = \{m+S/\ m\in M\}$.

Operasi jumlahan dan perkalian dengan skalar pada M/S didefinisikan sebagai berikut

$$(m_1+S)+(m_2+S) = (m_1+m_2)+S \text{ dan}$$

$$r(m_1+S) = rm_1+S$$

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

untuk setiap $m_1+S, m_2+S \in M/S$ dan $r \in R$. □

Akan diperlihatkan M/S merupakan modul lewat R dan disebut sebagai modul faktor.

Teorema 2.2.3

Diberikan modul M lewat ring R dan S modul bagian M dan $M/S = \{m+S / m \in M\}$.

Terhadap operasi jumlahan dan perkalian dengan skalar yang didefinisikan pada definisi 2.2.2, M/S merupakan modul lewat ring R.

Bukti :

Terlebih dahulu akan ditunjukkan operasi pada M/S tersebut well defined.

Ambil $m_1+S, m_2+S \in M/S$ dengan $m_1+S=m_2+S$ dan $m_3+S, m_4+S \in M/S$ dengan $m_3+S=m_4+S$.

Akan ditunjukkan $(m_1+m_3)+S=(m_2+m_4)+S$.

Karena $m_1+S=m_2+S$ dan $m_3+S=m_4+S$, maka $m_1-m_2 \in S$ dan $m_3-m_4 \in S$. Sehingga $(m_1-m_2)+(m_3-m_4) \in S$.

Terdapat $(m_1+m_3)-(m_2+m_4) \in S$.

Jadi $(m_1+m_3)+S = (m_2+m_4)+S$.

Ambil $m_1+S, m_2+S \in M/S$ dengan $m_1+S=m_2+S$ dan $r \in R$.

Akan ditunjukkan $rm_1+S=rm_2+S$.

Karena $m_1+S=m_2+S$, maka $m_1-m_2 \in S$ dan $r \in R$.

Sehingga $r(m_1-m_2) = rm_1-rm_2 \in S$. Jadi $rm_1+S=rm_2+S$.

Akan dibuktikan M/S grup komutatif terhadap operasi

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

jumlahan.

Operasi + pada M/S adalah asosiatif karena untuk $m_1+S, m_2+S, m_3+S \in M/S$,

$$\begin{aligned}(m_1+S)+[(m_2+S)+(m_3+S)] &= (m_1+S)+[(m_2+m_3)+S] \\ &= m_1+(m_2+m_3)+S \\ &= (m_1+m_2)+m_3+S \\ &= [(m_1+m_2)+S]+(m_3+S) \\ &= [(m_1+S)+(m_2+S)]+(m_3+S)\end{aligned}$$

Elemen $0+S \in M/S$ adalah elemen identitas, karena untuk $m_1+S \in M/S$, $(0+S)+(m_1+S) = (0+m_1)+S = m_1+S$ dan $(m_1+S)+(0+S) = (m_1+0)+S = m_1+S$.

Elemen $-m_1+S \in M/S$ adalah invers untuk $m_1+S \in M/S$ karena $(m_1+S)+(-m_1+S) = (m_1-m_1)+S = 0+S$ dan $(-m_1+S)+(m_1+S) = (-m_1+m_1)+S = 0+S$.

Operasi + pada M/S adalah komutatif, karena untuk $m_1+S, m_2+S \in M/S$,

$$\begin{aligned}(m_1+S)+(m_2+S) &= (m_1+m_2)+S \\ &= (m_2+m_1)+S \text{ , karena } M \text{ komutatif} \\ &= (m_2+S)+(m_1+S)\end{aligned}$$

Jadi M/S grup komutatif terhadap operasi jumlahan.

Selanjutnya ditunjukkan aksioma-aksioma modul berlaku pada M/S.

Diberikan $r, s \in R$, $m_1+S, m_2+S \in M/S$, maka

a. $r((m_1+S)+(m_2+S))$

$$\begin{aligned}&= r((m_1+m_2)+S) \\ &= r(m_1+m_2)+S\end{aligned}$$

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

$$= (rm_1+rm_2)+S$$

$$= (rm_1+S)+(rm_2+S)$$

$$= r(m_1+S)+r(m_2+S)$$

b. $(r+s)(m_1+S) = (r+s)m_1+S$

$$= (rm_1+sm_1)+S$$

$$= (rm_1+S)+(sm_1+S)$$

$$= r(m_1+S)+s(m_1+S)$$

c. $(rs)(m_1+S) = (rs)m_1+S$

$$= r(sm_1)+S$$

$$= r(sm_1+S)$$

$$= r(s(m_1+S))$$

d. $1(m_1+S) = 1m_1+S = m_1+S$

Terbukti M/S adalah modul lewat ring R. ■

Teorema 2.2.4 (Teorema Isomorfisma Pertama)

Diberikan M dan N modul lewat ring R dan $\varphi: M \longrightarrow N$ suatu homomorfisma. Maka $M/Ker(\varphi) \cong \varphi(M)$.

Bukti:

Menurut teorema 2.2.1, $Ker(\varphi) = \{x \in M / \varphi(x) = 0\}$ adalah modul bagian M dan $\varphi(M)$ adalah modul bagian dari N. Dan menurut teorema 2.2.3, $M/Ker(\varphi)$ merupakan modul faktor.

Akan dibuktikan $\phi : M/Ker(\varphi) \longrightarrow \varphi(M)$ isomorfisma.

Didefinisikan $\phi(m+Ker(\varphi)) = \varphi(m)$ untuk $m+Ker(\varphi) \in M/Ker(\varphi)$, $m \in M$.

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

Ambil $m_1+Ker(\varphi), m_2+Ker(\varphi) \in M/Ker(\varphi)$ dengan $m_1+Ker(\varphi) = m_2+Ker(\varphi)$. Karena $m_1+Ker(\varphi) = m_2+Ker(\varphi)$, maka $m_1-m_2 \in Ker(\varphi)$. Jadi $\varphi(m_1-m_2)=0$.

Sehingga $\varphi(m_1)-\varphi(m_2)=0$ dan $\varphi(m_1)=\varphi(m_2)$.

Maka $\phi(m_1+Ker(\varphi)) = \varphi(m_1) = \varphi(m_2) = \phi(m_2+Ker(\varphi))$.

$\therefore$ ϕ merupakan pemetaan.

Ambil $r\in R$, $m_1+Ker(\varphi), m_2+Ker(\varphi) \in M/Ker(\varphi)$.

$$\begin{aligned}\phi((m_1+Ker(\varphi))+(m_2+Ker(\varphi))) &= \phi((m_1+m_2)+Ker(\varphi))\\ &= \varphi(m_1+m_2)\\ &= \varphi(m_1) + \varphi(m_2)\\ &=\varphi(m_1+Ker(\varphi))+\phi(m_2+Ker(\varphi))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi(r(m_1+Ker(\varphi))) &= \phi(rm_1+Ker(\varphi))\\ &= \varphi(rm_1)\\ &= r\varphi(m_1)\\ &= r\phi(m_1+Ker(\varphi))\end{aligned}$$

$\therefore\phi$ homomorfisma.

Ambil $m_1+Ker(\varphi), m_2+Ker(\varphi) \in M/Ker(\varphi)$ dan $\phi(m_1+Ker(\varphi)) = \phi(m_2+Ker(\varphi))$. Maka

$\varphi(m_1) = \varphi(m_2)$

$\varphi(m_1)-\varphi(m_2)=0$

$\varphi(m_1-m_2)=0$

Jadi $m_1-m_2 \in Ker(\varphi)$, sehingga $m_1+Ker(\varphi)= m_2+Ker(\varphi)$.

$\therefore\phi$ injektif.

Ambil sembarang $x\in\varphi(M)$. Maka $x=\varphi(m)$ untuk suatu $m\in M$, sehingga terdapat $m+Ker(\varphi) \in M/Ker$, dan $\phi(m+Ker(\varphi)) = \varphi(m) = x$.

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

Jadi untuk sembarang $x \in \varphi(M)$ ada $m+Ker(\varphi) \in M/Ker(\varphi)$ sedemikian sehingga $\phi(m+Ker(\varphi)) = x$.

$\therefore$ ϕ surjektif.

Maka terbukti bahwa $M/Ker(\varphi) \cong \varphi(M)$. ∎

Teorema 2.2.5 (Teorema Isomorfisma Kedua)

Diberikan modul M lewat ring R, dan S serta T modul bagian dari M. Maka $(S+T)/T \cong S/S\cap T$.

Bukti :

Diberikan modul M lewat ring R.

Menurut teorema 2.1.3, $S+T$ dan $S\cap T$ modul bagian dari M. Akan dibuktikan T modul bagian dari $S+T$.

a. Karena T modul bagian M, jadi $T \neq \emptyset$.

b. Karena S modul bagian M, maka $0 \in S$.

Ambil $t \in T$, maka $t=0+t$. Sehingga $t \in S+T$, untuk $0 \in S$. Jadi $T \subseteq S+T$.

c. Ambil $x,y \in T$.

Karena T modul bagian M, maka $x-y \in T$.

d. Diberikan $r \in R$, $x \in T$.

Karena T modul bagian M, maka $rx \in T$.

Terbukti T modul Bagian $S+T$.

Akan dibuktikan $S\cap T$ modul bagian S.

a. Karena $S\cap T$ modul bagian M, jadi $S\cap T \neq \emptyset$ dan $S\cap T \subseteq S$.

b. Ambil $x,y \in S\cap T$.

Karena $S\cap T$ grup bagian M, maka $x-y \in S\cap T$.

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

c. Ambil $r \in R$, $x \in S \cap T$.

Karena $S \cap T$ modul bagian M, maka $rx \in S \cap T$.

Terbukti $S \cap T$ modul bagian S.

Didefinisikan perkawanan φ: $S+T \longrightarrow S/S \cap T$ sebagai berikut $\varphi(s+t) = s+S \cap T$, untuk $s+t \in S+T$.

Ambil $s_1+t_1, s_2+t_2 \in S+T$ dengan $s_1+t_1=s_2+t_2$, $s_1, s_2 \in S$, $t_1, t_2 \in T$.

Maka $s_1-s_2 = t_2-t_1$.

Karena S modul bagian dari M, maka $s_1-s_2 \in S$.

Demikian pula $t_1-t_2 \in T$.

Karena $s_1-s_2 = t_2-t_1$, maka $s_1-s_2 \in T$.

Jadi $s_1-s_2 \in S \cap T$. Sehingga $s_1+S \cap T = s_2+S \cap T$.

$\therefore$ φ pemetaan .

Ambil $r \in R$, $s_1+t_1, s_2+t_2 \in S+T$. Maka

$$\begin{aligned}\varphi((s_1+t_1)+(s_2+t_2)) &= \varphi((s_1+s_2)+(t_1+t_2)) \\ &= (s_1+s_2)+S \cap T \\ &= (s_1+S \cap T)+(s_2+S \cap T) \\ &= \varphi(s_1+t_1)+\varphi(s_2+t_2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi(r(s_1+t_1)) &= \varphi(rs_1+rt_1) \\ &= rs_1+S \cap T \\ &= r(s_1+S \cap T) \\ &= r\varphi(s_1+t_1)\end{aligned}$$

$\therefore$ φ homomorfisma.

Ambil sembarang $y \in S/S \cap T$, maka $y = s+S \cap T$ untuk suatu $s \in S$, sehingga terdapat $s+t \in S+T$ dan $\varphi(s+t)=s+S \cap T=y$.

$\therefore$ φ surjektif, sehingga $\varphi(S+T) = S/S \cap T$.

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

Akan ditunjukkan $Ker(\varphi)=T$.

$$\begin{aligned} Ker(\varphi) &= \{ s+t \in S+T \,/\, \varphi(s+t) = S\cap T\} \\ &= \{ s+t \in S+T /\, s+S\cap T = S\cap T \} \\ &= \{ s+t \in S+T /\, s \in S\cap T \} \\ &= T \end{aligned}$$

Menurut teorema isomorfisma pertama $(S+T)/Ker(\varphi) \cong \varphi(S+T)$, yaitu $(S+T)/T \cong S/S\cap T$. ■

Teorema 2.2.6 (Teorema Isomorfisma Ketiga)

Diberikan modul M lewat ring R, dan S serta T modul bagian M, dengan $S\subseteq T$. Maka $(M/S)/(T/S) \cong M/T$.

Bukti :

Didefinisikan pemetaan $\varphi: M/S \longrightarrow M/T$ dengan aturan $\varphi(m+S) = m+T$,untuk $m+S \in M/S$, $m\in M$.

Ambil $m_1+S, m_2+S \in M/S$ dengan $m_1+S = m_2+S$.

Karena $m_1+S = m_2+S$, maka $m_1-m_2 \in S$.

Karena $S\subseteq T$, maka $m_1-m_2 \in T$. Jadi $m_1+T = m_2+T$.

Sehingga $\varphi(m_1+S) = \varphi(m_2+S)$.

$\therefore$ φ merupakan pemetaan.

Ambil $m_1+S, m_2+S \in M/S$ dan $r\in R$. Maka

$$\begin{aligned} \varphi((m_1+S)+(m_2+S)) &= \varphi((m_1+m_2)+S) \\ &= (m_1+m_2)+T \\ &= (m_1+T) + (m_2+T) \\ &= \varphi(m_1+S) + \varphi(m_2+S) \end{aligned}$$

$\varphi(r(m_1+S)) = \varphi(rm_1+S)$

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

$= rm_1+T$

$= r(m_1+T)$

$= r\varphi(m_1+S)$

$\therefore$ φ homomorfisma.

Ambil $y \in M/T$ dengan $y = m+T$ untuk $m \in M$. Maka ada $m+S \in M/S$ sedemikian sehingga $\varphi(m+S) = m+T = y$.

$\therefore$ φ surjektif, sehingga $\varphi(M/S) = M/T$.

Akan ditunjukkan $Ker(\varphi)=T/S$.

$$\begin{aligned} Ker(\varphi) &= \{\ m+S \in M/S\ /\ \varphi(m+S)=T\ \} \\ &= \{\ m+S \in M/S\ /\ m+T = T\ \} \\ &= \{\ m+S \in M/S\ /\ m \in T\ \} \\ &= \{\ m+S \in T/S\ \} \\ &= T/S \end{aligned}$$

$\therefore$ $Ker(\varphi) = T/S$.

Menurut teorema isomorfisma pertama $(M/S)/Ker(\varphi) \cong \varphi(M/S)$, yaitu $(M/S)/(T/S) \cong M/T$. ■

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

BAB III

MODUL BEBAS

Pada bab III akan diuraikan tentang modul bebas lewat ring komutatif dengan elemen satuan dan teorema-teorema yang merupakan pengembangan dari modul bebas. Sebelum masuk pada pembahasan modul bebas, dalam bab ini akan diuraikan hal-hal yang berhubungan dengan pengertian modul bebas. Pada subbab pertama dijelaskan tentang jumlahan langsung, himpunan pembangun, bebas linear dan basis, hal-hal yang juga dikenal dalam ruang vektor. Dalam subbab kedua diuraikan tentang ideal maksimal dan dalam subbab ketiga dibahas modul bebas serta teoremanya.

3.1. Basis

UNIVERSITAS SANATA DHARMA
Ad Maiorem Dei Gloriam
PERPUSTAKAAN
YOGYAKARTA

Definisi 3.1.1

Diberikan modul M lewat ring R dan $S_1, S_2, \ldots, S_n$ adalah modul-modul bagian dari M.

Modul M disebut <u>jumlahan langsung</u> dari $S_1, S_2, \ldots, S_n$ jika setiap $m \in M$ dapat disajikan sebagai $m = s_1+s_2+\ldots+s_n$ dengan $s_i \in S_i$, dan jika $m = w_1+w_2+\ldots+w_n$ dengan $w_i \in S_i$, maka $w_i = s_i$ untuk $i=1,2,\ldots,n$.

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

Jika M adalah jumlahan langsung dari $S_1, S_2, \ldots, S_n$ maka kita tulis $M = S_1 \oplus S_2 \oplus \ldots \oplus S_n$. □

Teorema 3.1.1

Modul M lewat ring R merupakan jumlahan langsung dari modul-modul bagian $S_1, S_2, \ldots, S_n$ bila dan hanya bila

1). $M = S_1 + S_2 + \ldots + S_n$

2). $S_i \cap (\sum_{j \neq i} S_j) = \{0\}$ untuk setiap $i = 1, 2, \ldots, n$.

Bukti :

($\Rightarrow$) Diberikan modul M lewat ring R yang merupakan jumlahan langsung dari modul-modul bagian $S_1, S_2, \ldots, S_n$.

Akan dibuktikan berlakunya sifat 1) dan 2).

Ambil $m \in M$.

Karena M jumlahan langsung dari $S_1, S_2, \ldots, S_n$, maka terdapat dengan tunggal $s_i \in S_i$ sehingga $m = s_1 + s_2 + \ldots + s_n$.

Maka $m \in S_1 + S_2 + \ldots + S_n$.

Jadi $M \subseteq S_1 + S_2 + \ldots + S_n$ ....(1)

Ambil $m \in S_1 + S_2 + \ldots + S_n$.

Maka ada $s_i \in S_i$ sehingga $m = s_1 + s_2 + \ldots + s_n$.

Karena S_i modul bagian dari M, maka $S_i \subseteq M$, untuk setiap $i = 1, 2, \ldots, n$.

Sehingga $s_1, s_2, \ldots, s_n \in M$. Karena M grup

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

penjumlahan, maka $s_1+s_2+...+s_n \in M$. Jadi $m \in M$.

Sehingga $S_1+S_2+...+S_n \subseteq M$ .... (2)

Dari (1) dan (2) terbukti $M = S_1+S_2+...+S_n$.

Ambil $m \in S_i \cap (\sum_{j \neq i} S_j)$, untuk $i=1,2,...,n$.

Maka $m \in S_i$ dan $m \in \sum_{j \neq i} S_j$.

Karena $m \in S_i$, maka $m = s_i = 0+...+0+s_i+0+...+0$ untuk suatu $s_i \in S_i$.

Karena $m \in \sum_{j \neq i} S_j$ dengan $\sum_{j \neq i} S_j = S_1+S_2+...+S_{i-1}+S_{i+1}+...+S_n$, maka $m = s_1+s_2+...+s_{i-1}+0+s_{i+1}+...+s_n$, untuk $s_j \in S_j$.

Karena M jumlahan langsung dari $S_1, S_2, ..., S_n$ maka diperoleh $s_i=0$, untuk $i=1,2,...,n$.

Jadi $m=0$.

Terbukti $S_i \cap \sum_{j \neq i} S_j = \{0\}$.

($\Leftarrow$) Diberikan modul M lewat ring R dan $S_1, S_2, ..., S_n$ modul-modul bagian dari M yang memenuhi

1). $M = S_1 + S_2 + ... + S_n$ dan

2). $S_i \cap \sum_{j \neq i} S_j = \{0\}$ untuk setiap $i=1,2,...,n$.

Akan dibuktikan M jumlahan langsung dari $S_1, S_2, ..., S_n$. Ambil $m \in M$.

Karena $M = S_1+S_2+...+S_n$ maka $m = s_1+s_2+...+s_n$ dengan $s_i \in S_i$, $i=1,2,...,n$.

Misalkan $m = w_1+w_2+...+w_n$, dengan $w_i \in S_i$, $i=1,2,...,n$.

Maka $(s_1-w_1)+(s_2-w_2)+...+(s_n-w_n)=0$.

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

Didapat $-(s_i-w_i) = (s_1-w_1) + (s_2-w_2) +\ldots+ (s_{i-1}-w_{i-1}) + (s_{i+1}-w_{i+1}) +\ldots+ (s_n-w_n)$.

Sehingga $-(s_i-w_i)\in S_i$ dan $-(s_i-w_i)\in \sum_{j\neq i} S_j$.

Maka $-(s_i-w_i) \in S_i\cap \sum_{j\neq i} S_j$.

Karena $S_i\cap \sum_{j\neq i} S_j = \{0\}$, maka $-(s_i-w_i)=0$.

Jadi $s_i= w_i$, untuk setiap $i=1,2,\ldots,n$.

Terbukti M jumlahan langsung dari $S_1,S_2,\ldots,S_n$. ■

Definisi 3.1.2

Diberikan modul M lewat ring R.

Jika S himpunan bagian dari modul M, maka himpunan semua kombinasi linear dari elemen-elemen S, yang dinotasikan dengan $\langle S\rangle = \{r_1s_1+\ldots+r_ns_n / r_i\in R,\ s_i\in S\}$, merupakan modul bagian dari M dan disebut <u>modul bagian yang dibangun oleh S</u>.

Himpunan S dikatakan <u>membangun</u> M jika $M = \langle S\rangle$, yang berarti setiap $m\in M$ dapat ditulis dalam bentuk

$$m = r_1s_1 + \ldots + r_ns_n$$

di mana $r_1, r_2,\ldots,r_n \in R$ dan $s_1,s_2,\ldots,s_n \in S$.

Jika S berhingga, maka $\langle S\rangle$ disebut <u>modul bagian yang dibangun secara berhingga</u>.

Suatu modul M dikatakan <u>dibangun secara berhingga</u> jika M memuat himpunan berhingga yang membangun M. □

Definisi 3.1.3

Diberikan modul M lewat ring R dan $m \in M$.

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

Modul bagian yang berbentuk $\langle m\rangle = \{ rm/r\in R \}$ disebut <u>modul bagian siklik</u>.

Modul M disebut <u>modul siklik</u> jika terdapat $m\in M$ sedemikian sehingga $M=\langle m\rangle$ dan dikatakan <u>modul M dibangun oleh m</u>. □

Modul bagian yang dibangun oleh S adalah modul bagian terkecil dari M yang memuat S.

Contoh :

1. Diberikan ring R dengan elemen satuan dan modul M = R lewat ring R, maka R dibangun secara berhingga dan merupakan modul siklik karena $R= \{ r1 / r\in R \} = \langle 1\rangle$.
2. Diberikan ring R dan modul $M = R^n$ lewat R. Untuk setiap $i=1,2,\ldots,n$ diberikan $e_i= (0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)$, di mana 1 muncul pada koordinat ke-i, maka untuk setiap $(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n) \in M$ berlaku $(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$, $\alpha_i\in R$. Dengan demikian $M=R^n$ dibangun oleh $\{e_1, e_2,\ldots, e_n\}$.

Definisi 3.1.4

Himpunan tak kosong $S = \{s_1,s_2,\ldots,s_n\}$ dari modul M lewat ring R disebut <u>bebas linear</u> jika untuk setiap $r_1,r_2,\ldots,r_n \in R$, $r_1s_1+r_2s_2+\ldots+r_ns_n = 0$ hanya dipenuhi jika $r_1 = r_2 =\ldots= r_n = 0$.

Sebaliknya, himpunan S dikatakan <u>tak bebas linear</u>

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

jika dapat ditemukan $r_1, r_2, \ldots, r_n$ yang tidak semuanya 0 sedemikian sehingga berlaku $r_1 s_1 + r_2 s_2 + \ldots + r_n s_n = 0$. □

Contoh :

Diberikan ring $\mathbb{Z}$ dan modul $M = \mathbb{Z}^2$ lewat $\mathbb{Z}$. Pasangan terurut (2,0) dan (3,0) adalah tak bebas linear karena terdapat skalar yang tidak nol sedemikian sehingga $3(2,0) - 2(3,0) = (0,0)$.

Sedangkan pasangan terurut (1,0) dan (0,2) bebas linear karena jika $c_1(1,0) + c_2(0,2) = (0,0)$ maka $c_1 = c_2 = 0$.

Definisi 3.1.5

Diberikan modul M lewat ring R.

Himpunan bagian B dari M disebut <u>basis</u> jika B bebas linear dan B membangun M. □

Teorema 3.1.2

Diberikan modul M lewat ring R dan $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\} \subseteq M$.

B adalah basis bila dan hanya bila untuk setiap $m \in M$, terdapat dengan tunggal skalar-skalar $r_1, r_2, \ldots, r_n \in R$ yang memenuhi $m = r_1 b_1 + r_2 b_2 + \ldots + r_n b_n$.

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

Bukti :

Diberikan modul M lewat ring R dan $B \subseteq M$.

($\Rightarrow$) Diketahui B adalah basis, berarti B bebas linear dan membangun M.

Akan dibuktikan terdapat dengan tunggal skalar-skalar $r_1, r_2, \ldots, r_n \in R$ sedemikian sehingga $m = r_1b_1+r_2b_2+\ldots+r_nb_n$.

Karena B membangun M maka

$M = \langle B \rangle = \{ r_1b_1+r_2b_2+\ldots+r_nb_n \ / \ r_i \in R, \ b_i \in B \}$.

Ambil sembarang $m \in M$.

Maka $m = r_1b_1+r_2b_2+\ldots+r_nb_n$ dengan $r_i \in R$.

Misalkan $m = t_1b_1+t_2b_2+\ldots+t_nb_n$ dengan $t_i \in R$.

Maka $r_1b_1+r_2b_2+\ldots+r_nb_n = t_1b_1+t_2b_2+\ldots+t_nb_n$.

Sehingga $(r_1b_1-t_1b_1)+ \ldots +(r_nb_n-t_nb_n) = 0$.

Jadi $(r_1-t_1)b_1+ \ldots +(r_n-t_n)b_n = 0$.

Karena B bebas linear, maka $r_1-t_1= \ldots =r_n-t_n=0$.

Jadi $r_i = t_i$ untuk $i = 1,2,\ldots,n$.

Terbukti terdapat dengan tunggal skalar-skalar $r_1, r_2, \ldots, r_n$ sedemikian sehingga $m = r_1b_1+r_2b_2+\ldots+r_nb_n$.

($\Leftarrow$) Diketahui untuk $m \in M$, ada dengan tunggal skalar-skalar $r_1, r_2, \ldots, r_n$ sedemikian sehingga $m = r_1b_1 + r_2b_2 +\ldots+ r_nb_n$.

Akan dibuktikan B basis (B bebas linear dan B membangun M).

Ambil sembarang $m \in M$.

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

Maka $m = r_1b_1+r_2b_2+...+r_nb_n$ untuk skalar-skalar $r_1, r_2, ..., r_n \in R$ yang tunggal.

Jadi $m \in \langle B \rangle$, sehingga $M \subseteq \langle B \rangle$ ....(i)

Karena berdasarkan yang diketahui yaitu $m = r_1b_1+....+r_nb_n$ untuk $r_i \in R$ dan $b_i \in M$ dan M modul lewat ring, maka $r_ib_i \in M$.

Karena M merupakan grup, maka $m = r_1b_1+...+r_nb_n \in M$.

Sehingga $\langle B \rangle \subseteq M$ ....(ii)

Dari (i) dan (ii) terbukti $M=\langle B \rangle$.

Diberikan $\alpha_1b_1+\alpha_2b_2+...+\alpha_nb_n = 0$ dengan $\alpha_i \in R$, $b_i \in B$. Karena $M=\langle B \rangle=\{ r_1b_1+r_2b_2+...+r_nb_n / r_i \in R, b_i \in B \}$ maka $0 \in M$ dapat ditulis sebagai

$0 = 0b_1+0b_2+...+0b_n$, dengan $0 \in R$, $b_i \in B$.

Karena diketahui terdapat dengan tunggal skalar-skalar $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in R$ sedemikian sehingga $0 = \alpha_1b_1+\alpha_2b_2+ ...+ \alpha_nb_n$, maka haruslah $\alpha_1=\alpha_2= ...= \alpha_n=0$.

Terbukti B adalah bebas linear.

Maka B merupakan basis dari M. ∎

Teorema 3.1.3

Diberikan basis $B = \{b_1, b_2, ..., b_n\}$ untuk modul M lewat ring R. Maka

1. B adalah himpunan pembangun minimal
2. B adalah himpunan bebas linear maksimal

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

Bukti :

Karena B basis untuk modul M lewat ring R maka B membangun M dan B bebas linear.

Akan dibuktikan B himpunan pembangun minimal dari M, yaitu setiap himpunan bagian sejati dari B tidak membangun M.

Diberikan $B' \subset B$ dan $B' \neq B$ dengan $B' \neq \emptyset$ (B' himpunan bagian sejati). Misalkan $B' = \{b_1, \ldots, b_k\}$, dengan $k<n$.

Andaikan B' membangun M.

Karena $b_n \in M$ dan $M = \langle B' \rangle$, maka $b_n = r_1b_1 + r_2b_2 + \ldots + r_kb_k$.

Sehingga $r_1b_1 + r_2b_2 + \ldots + r_kb_k - 1b_n = 0$.

Dan dapat ditulis sebagai $r_1b_1 + r_2b_2 + \ldots + r_kb_k + 0b_{k+1} + \ldots + 0b_{n-1} - 1b_n = 0$

Karena tidak semua $r_i = 0$, untuk $i = 1, 2, \ldots, n$, yaitu $r_n = -1$, berarti $\{b_1, b_2, \ldots, b_k, \ldots, b_n\}$ tidak bebas linear.

Padahal $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_k, \ldots, b_n\}$ bebas linear maka timbul kontradiksi.

Jadi terbukti B adalah himpunan pembangun minimal.

Untuk bagian (2) cukup dibuktikan setiap himpunan yang memuat B pasti tidak bebas linear.

Diandaikan himpunan B' memuat B dengan $B' \neq B$.

Misalkan $B' = \{b_1, \ldots, b_n, \ldots, b_m\}$.

Karena $M = \langle B \rangle$, maka $b_m \in M$ dapat ditulis sebagai $b_m = r_1b_1 + \ldots + r_nb_n$.

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

Sehingga $r_1b_1+ \ldots +r_nb_n-1b_m = 0$.

Dan dapat ditulis sebagai $r_1b_1+\ldots+r_nb_n+0b_{n+1}+\ldots+0b_{m-1}-1b_m = 0$

Maka $B' = \{b_1,\ldots,b_n,\ldots,b_m\}$ tidak bebas linear.

Terbukti B adalah himpunan bebas linear maksimal. ■

3.2. Ideal Maksimal dalam Ring

Ideal maksimal dalam ring dibicarakan pada subbab ini, karena terdapat teorema dalam ring yang berkaitan dengan ideal maksimal, di mana teorema ini digunakan dalam modul bebas.

Definisi 3.2.1

Ideal sejati dari ring R adalah ideal I dari R sedemikian sehingga $I \neq R$. □

Definisi 3.2.2

Suatu ideal sejati I dalam ring R disebut ideal maksimal jika untuk setiap ideal G yang memenuhi $I \subseteq G \subseteq R$, maka $G=I$ atau $G=R$. □

Teorema 3.2.1

Jika R adalah ring komutatif dengan elemen satuan dan I adalah ideal dari R yang memuat elemen satuan, maka $I=R$.

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

Bukti :

Diberikan $r \in R$. Karena I ideal dan $1 \in I$, maka $r1 = r \in I$. Jadi $R \subseteq I$. Karena I adalah ideal dari R, maka $I \subseteq R$. Terbukti $I = R$. ∎

Definisi 3.2.3

Diberikan ring komutatif R dengan elemen satuan dan $r \in R$. Himpunan semua rs dengan $s \in R$ merupakan ideal dari R yang disebut <u>ideal utama</u> yang dibangun oleh r dan dinotasikan dengan $\langle r \rangle$. Jadi $\langle r \rangle = \{\ rs / \ s \in R\ \}$.□

Teorema 3.2.2

Diberikan ring komutatif R dengan elemen satuan dan I ideal dari R. Maka I adalah ideal maksimal bila dan hanya bila R/I adalah field.

Bukti:

($\Rightarrow$)

Diberikan ring komutatif R dengan elemen satuan dan I ideal dari R. Diketahui I ideal maksimal dari R, maka $I \neq R$. Dibentuk ring faktor $R/I = \{\ r+I / \ r \in R\ \}$.

Menurut teorema dalam teori ring :

Jika R ring komutatif dengan elemen satuan dan I ideal dari R maka R/I merupakan ring komutatif dengan elemen satuan .

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

Diberikan $r+I$ elemen taknol dalam R/I berarti $r \notin I$. Akan ditunjukkan bahwa $r+I$ mempunyai invers perkalian dalam R/I.

Diberikan $N = \{ sr+i / s \in R, i \in I \}$ dan akan ditunjukkan N merupakan ideal dari R.

i). Karena $0=0r+0$, dengan $0 \in R$ dan $0 \in I$, maka $0 \in N$.
Berarti $N \neq \emptyset$.

ii). Ambil $x \in N$.
Maka ada $s \in R$ dan $i \in I$, sehingga $x=sr+i$.
Karena I ideal dari R, jika $i \in I$ maka $i \in R$.
Jadi $x=sr+i \in R$. Maka $N \subseteq R$.

iii). Ambil $x, y \in N$. Maka $x=s_1r+i_1$ dan $y=s_2r+i_2$ dengan $s_1, s_2 \in R$, $i_1, i_2 \in I$.
$x-y = (s_1r+i_1)-(s_2r+i_2) = (s_1-s_2)r+(i_1-i_2)$.
Karena R ring, jika $s_1, s_2 \in R$ maka $s_1-s_2 \in R$.
Karena I ideal, jika $i_1, i_2 \in I$ maka $i_1-i_2 \in I$.
Jadi $x-y \in N$.

iv). Ambil $r_1 \in R$, $x \in N$.
Karena $x \in N$, maka $x=sr+i$ dengan $s \in R, i \in I$.
Maka $r_1x = r_1(sr+i) = r_1(sr)+r_1i$
$= (r_1s)r+r_1i$
Karena I ideal, jika $r_1 \in R$ dan $i \in I$ maka $r_1i \in I$.
Jadi $r_1x \in N$.

Terbukti N adalah ideal dari R.

Jika $i \in I$, maka $i=0r+i$ dengan $0 \in R$, sehingga $i \in N$.

Berarti $I \subseteq N$. Jadi I dan N keduanya ideal dari R

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

sedemikian sehingga $I \subseteq N \subseteq R$. Karena I ideal maksimal, maka $N=I$ atau $N=R$.

Karena $r=1r+0$, dengan $1 \in R$ dan $0 \in I$, berarti $r \in N$. Tetapi $r \notin I$. Maka tidak mungkin $N=I$. Jadi $N=R$, berarti $1 \in N$. Maka ada $b \in R$ dan $i \in I$ sedemikian sehingga $1=br+i$. Maka $1-br=i$, berarti $1-br \in I$.

Jadi $1+I = br+I = (b+I)(r+I)$.

Maka $b+I$ adalah invers perkalian dari $r+I$.

Terbukti R/I adalah field.

($\Leftarrow$)

Diketahui R/I field.

Andaikan N ideal dalam R dengan $I \subseteq N \subseteq R$ dan $N \neq I$.

Akan ditunjukkan $N=R$. Diberikan $j \in N-I$ (yaitu $j \in N$, $j \notin I$). Karena $j \notin I$, maka $j+I \neq I$.

Karena R/I field, maka ada $b+I \in R/I$ sedemikian sehingga $(j+I)(b+I) = 1+I$. Berarti $jb+I = 1+I$.

Maka $1 \in jb+I$. Karena $j \in N$, $b \in R$ dan N ideal, maka $jb \in N$. Dan karena $I \subseteq N$, maka $jb+I \subseteq N$, sehingga $1 \in N$.

Karena N ideal dalam R dan memuat elemen satuan, maka $N=R$. Terbukti I ideal maksimal dari R. ∎

Definisi 3.2.4

<u>Himpunan terurut parsial</u> (poset) adalah himpunan tak kosong P, dengan relasi $<$ yang didefinisikan pada P dan memenuhi sifat-sifat berikut

1. refleksif : $\forall a \in P$, $a<a$

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

2. antisimetri : $\forall a,b \in P$, jika $a<b$ dan $b<a$ maka $a=b$

3. transitif : $\forall a,b,c \in P$, jika $a<b$ dan $b<c$ maka $a<c$. □

Definisi 3.2.5

Himpunan terurut parsial P disebut <u>himpunan terurut total</u> (rantai) jika $\forall a,b \in P$ dengan $a \neq b$ berlaku $a<b$ atau $b<a$. □

Definisi 3.2.6.

Diberikan poset P dan A himpunan bagian dari P.

1. Elemen $b \in P$ disebut <u>batas atas</u> untuk A bila dan hanya bila $a \leq b$ untuk semua $a \in A$.
2. Elemen $c \in P$ disebut <u>elemen maksimal</u> untuk P bila dan hanya bila untuk setiap $d \in P$ jika $c \leq d$, maka $c=d$. □

Berikut ini diberikan suatu lemma yang tidak dibuktikan dalam tulisan ini tetapi akan digunakan dalam pembuktian teorema lain berkaitan dengan judul tulisan ini.

Lemma 3.2.3 (Lemma Zorn).

Jika P himpunan terurut parsial dan setiap rantai dari P mempunyai batas atas, maka P mempunyai elemen maksimal. □

Teorema 3.2.4

Diberikan ring komutatif R dengan elemen satuan.

1. Irisan dari ideal-ideal dalam R adalah suatu ideal.
2. Jika $I_1 \subset I_2 \subset \ldots$ adalah rangkaian naik dari ideal-ideal dalam R, maka gabungan ideal-ideal tersebut

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

juga merupakan ideal.

Bukti :

Diberikan R ring dan I_k ideal-ideal dari R dengan $k \in N$, di mana N adalah suatu himpunan indeks.

Diberikan $G = \bigcap I_k$, $k \in N$. Jelas $G \subseteq R$.

Akan dibuktikan G ideal dari R.

i). Karena I_k ideal, maka $0 \in I_k$ untuk semua $k \in N$.

Jadi $0 \in \bigcap I_k$. Sehingga $G \neq \emptyset$.

ii). Ambil $a, b \in G$, maka $a, b \in I_k$ untuk $\forall k \in N$.

Karena I_k ideal, maka $a-b \in I_k$, untuk $\forall k \in N$.

Berarti $a-b \in \bigcap I_k$.

iii). Ambil $a \in G$, $r \in R$.

Maka $a \in I_k$ untuk $\forall k \in N$.

Karena I_k ideal, maka didapat $ra \in I_k$ untuk setiap k. Berarti $ra \in \bigcap I_k$.

Terbukti $G = \bigcap I_k$ adalah ideal.

Diberikan ideal-ideal $I_1, I_2, \ldots$ dengan $I_1 \subset I_2 \subset \ldots$ dan $H = \bigcup I_k$, $k \in \mathbb{N}$. Jelas $H \subseteq R$.

Akan dibuktikan H ideal dari R.

i). Karena $I_1, I_2, \ldots$ ideal, maka $0 \in I_k$ untuk $k \in \mathbb{N}$.

Jadi $0 \in \bigcup I_k$.

ii). Ambil $a, b \in H$.

Maka ada $i, j \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $a \in I_i$ dan $b \in I_j$. Karena itu jika $m = \max\{i, j\}$, kita peroleh $a, b \in I_m$, dan karena I_m ideal, maka $a-b \in$

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

$I_m \subset \cup I_k$. Jadi $a-b \in H$.

iii). Ambil $r \in R$ dan $a \in H$.

Karena $a \in H$, maka ada $i \in N$ sedemikian sehingga $a \in I_i$. Karena I_i ideal, maka $ra \in I_i$.

Karena $I_i \subset \cup I_k$, maka $ra \in \cup I_k$. Jadi $ra \in H$.

Terbukti $H = \cup I_k$ merupakan ideal. ■

Teorema 3.2.5

Setiap ring komutatif R dengan elemen satuan pasti memuat suatu ideal maksimal.

Bukti :

Diberikan ring komutatif R dengan elemen satuan. Berarti $R \neq \{0\}$. Maka R mempunyai ideal sejati (yaitu ideal yang tidak sama dengan R sendiri) di antaranya $\{0\}$. Akan dibuktikan R mempunyai ideal maksimal.

Andaikan S himpunan semua ideal sejati dari R.

Maka S tak kosong, karena $\{0\} \in S$.

Andaikan $I_1 \subset I_2 \subset \ldots$ adalah rangkaian naik ideal-ideal sejati dalam R, maka $H = \cup I_j$ merupakan ideal dalam R (menurut teorema 3.2.4).

Akan dibuktikan bahwa H ideal sejati.

Andaikan $H=R$. Maka $1 \in H$, sehingga terdapat indeks i sedemikian sehingga $1 \in I_i$.

Karena I_i ideal dari R dan memuat elemen satuan , maka $I_i = R$ (teorema 3.2.1), yang berarti I_i ideal tak

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

sejati. Timbul kontradiksi, karena diketahui I_i ideal sejati. Maka $H \neq R$, sehingga $H \in S$.

Berarti tiap rantai dalam S mempunyai batas atas, dan menurut lemma Zorn, S mempunyai elemen maksimal, namakan C. Diberikan $I \in S$ $(I \neq R)$ yang memenuhi $C \subseteq I \subseteq R$. Karena C elemen maksimal, maka C=I.

Jadi C adalah ideal maksimal dalam R.

Terbukti R mempunyai ideal maksimal. ■

3.3. Modul Bebas

Definisi 3.3.1

Modul M lewat ring R dikatakan <u>bebas</u> jika M mempunyai basis. Jika B adalah basis untuk M, maka M dikatakan <u>bebas pada B</u>. Sedangkan, modul {0} lewat ring R dikatakan bebas dengan basis Ø. □

Dalam tulisan ini hanya akan dibahas modul bebas dengan basis berhingga.

Contoh :

1. Diberikan modul $M=R^n$ lewat ring R. Dalam R^n diberikan $x_i=(0,\dots,1,0,\dots,0)$, di mana tiap komponen adalah 0 kecuali pada koordinat ke-i sama dengan 1. M merupakan modul bebas dengan basis $x_1,\dots,x_n$.
2. Diberikan modul $M=\langle u_1,u_2,u_3\rangle$ lewat $\mathbb{Z}$, dengan $u_1=(3,-1,2)$, $u_2=(0,2,5)$ dan $u_3=(0,0,4)$. M merupakan modul

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

bebas dengan basis $\{u_1, u_2, u_3\}$.

Teorema 3.3.1

Diberikan M dan N modul lewat ring R dan $\alpha \in Hom(M,N)$ dengan α isomorfisma.

Jika B adalah basis untuk M, maka $\alpha(B) = \{\alpha(b) \in N / b \in B\}$ adalah basis untuk N.

Bukti :

Diberikan $\alpha : M \longrightarrow N$ homomorfisma yang bijektif (injektif dan surjektif).

Karena B adalah basis untuk M, maka B bebas linear dan B membangun M. Misalkan $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$.

Setiap $m \in M$ dapat ditulis sebagai

$m = r_1 b_1 + \ldots + r_n b_n$ untuk $r_i \in R, b_i \in B$.

Akan dibuktikan $\alpha(B)$ basis untuk N, berarti akan ditunjukkan $\alpha(B)$ bebas linear dan membangun N.

a. $\alpha(B) = \{\alpha(b_1), \alpha(b_2), \ldots, \alpha(b_n)\} \subseteq N$.

Ambil $r_1\alpha(b_1) + r_2\alpha(b_2) + \ldots + r_n\alpha(b_n) = 0$.

Karena α homomorfisma, maka

$r_1\alpha(b_1) + r_2\alpha(b_2) + \ldots + r_n\alpha(b_n)$

$= \alpha(r_1 b_1) + \alpha(r_2 b_2) + \ldots + \alpha(r_n b_n)$

$= \alpha(r_1 b_1 + r_2 b_2 + \ldots + r_n b_n)$

Karena α injektif dan $\alpha(r_1 b_1 + \ldots + r_n b_n) = 0 = \alpha(0)$, maka $r_1 b_1 + r_2 b_2 + \ldots + r_n b_n = 0$.

Karena $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ basis untuk M, maka

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

$r_1 = \ldots = r_n = 0$.

Terbukti $\alpha(B)$ bebas linear.

b. Ambil $n \in N$.

Karena α surjektif, maka ada $m \in M$ sedemikian sehingga $\alpha(m) = n$.

Karena B membangun M, maka $m = r_1 b_1 + \ldots + r_n b_n$, dengan $r_i \in R$.

Jadi $\alpha(m) = \alpha(r_1 b_1 + r_2 b_2 + \ldots + r_n b_n) = n$.

Karena α homomorfisma, maka

$$n = r_1 \alpha(b_1) + r_2 \alpha(b_2) + \ldots + r_n \alpha(b_n)$$

Jadi setiap $n \in N$ bisa dinyatakan sebagai kombinasi linear dari $\alpha(b_1), \alpha(b_2), \ldots, \alpha(b_n)$.

Terbukti $N = \langle \alpha(B) \rangle$.

Karena $\alpha(B)$ membangun N dan bebas linear maka $\alpha(B)$ merupakan basis N. ■

Teorema 3.3.2

Setiap dua basis dari modul bebas M lewat ring R mempunyai jumlah elemen yang sama.

Bukti :

Akan dibentuk suatu ruang vektor dengan sifat bahwa untuk setiap basis untuk M, terdapat basis untuk ruang vektor tersebut dengan banyak elemen yang sama.

Karena R ring komutatif dengan elemen satuan, maka

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

menurut teorema 3.2.5, R memuat ideal maksimal I.

Dan menurut teorema 3.2.2, R/I merupakan field.

Diberikan $IM = \{a_1v_1 + \ldots + a_nv_n / a_i \in I, v_i \in M\}$.

Menurut teorema 2.1.4 IM adalah modul bagian dari M.

Dibentuk modul faktor M/IM.

Akan dibuktikan bahwa M/IM merupakan suatu ruang vektor lewat field R/I.

Akan ditunjukkan bahwa operasi perkalian dengan skalar yang didefinisikan sebagai berikut :

$(r+I)(u+IM) = ru+IM$, untuk $r+I \in R/I$, $u+IM \in M/IM$,

adalah well defined.

Misalkan $r_1+I = r_2+I$ dan $u_1+IM = u_2+IM$.

Akan ditunjukkan : $r_1u_1+IM = r_2u_2+IM$.

$r_1+I = r_2+I \Rightarrow r_1-r_2 \in I$

$u_1+IM = u_2+IM \Rightarrow u_1-u_2 \in IM$

Terdapat : $r_1(u_1-u_2) \in IM$ dan $(r_1-r_2)u_2 \in IM$.

Maka $r_1(u_1-u_2)+(r_1-r_2)u_2 \in IM$

$r_1u_1-r_1u_2+r_1u_2-r_2u_2 \in IM$

$r_1u_1-r_2u_2 \in IM$

$r_1u_1+IM = r_2u_2+IM$.

Selanjutnya akan ditunjukkan M/IM memenuhi aksioma-aksioma dari ruang vektor lewat field R/I.

Diberikan $r_1+I, r_2+I \in R/I$ dan $u_1+IM, u_2+IM \in M/IM$.

$(r_1+I)[(u_1+IM)+(u_2+IM)]$

$= (r_1+I)[(u_1+u_2)+IM]$

$= r_1(u_1+u_2)+IM$

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

$= (r_1u_1+r_1u_2)+IM$

$= (r_1u_1+IM)+(r_1u_2+IM)$

$= (r_1+I)(u_1+IM)+(r_1+I)(u_2+IM)$

$[(r_1+I)+(r_2+I)](u_1+IM)$

$= [(r_1+r_2)+I](u_1+IM)$

$= (r_1+r_2)u_1+IM$

$= (r_1u_1+r_2u_1)+IM$

$= (r_1u_1+IM)+(r_2u_1+IM)$

$= (r_1+I)(u_1+IM)+(r_2+I)(u_1+IM)$

$[(r_1+I)(r_2+I)](u_1+IM)$

$= (r_1r_2+I)(u_1+IM)$

$= (r_1r_2)u_1+IM$

$= r_1(r_2u_1)+IM$

$= (r_1+I)(r_2u_1+IM)$

$= (r_1+I)[(r_2+I)(u_1+IM)]$

$(1+I)(u_1+IM) = 1u_1+IM = u_1+IM$

Maka M/IM merupakan ruang vektor lewat field R/I.

Andaikan $B = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ basis untuk modul M lewat R.

Jika $x_i, x_j \in B$ maka $x_i, x_j \in M$.

Ambil $x_i+IM, x_j+IM \in B'$ dengan $B' = \{ x+IM / x \in B \}$.

Untuk $x_i \neq x_j$, akan ditunjukkan $x_i+IM \neq x_j+IM$.

Andaikan $x_i+IM = x_j+IM$.

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

Maka $x_i - x_j \in IM$, sehingga $x_i - x_j = a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n$ untuk $a_k \in I$, $v_k \in M$, $\forall k = 1, \ldots, n$.

Karena B basis untuk M, maka untuk setiap $v_k \in M$ dapat ditulis sebagai kombinasi linear dari $x_1, x_2, \ldots, x_m$.

Maka

$$v_1 = b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \ldots + b_{1i}x_i + \ldots + b_{1j}x_j + \ldots + b_{1m}x_m$$

$$\vdots$$

$$v_k = b_{k1}x_1 + b_{k2}x_2 + \ldots + b_{ki}x_i + \ldots + b_{kj}x_j + \ldots + b_{km}x_m$$

$$\vdots$$

$$v_n = b_{n1}x_1 + b_{n2}x_2 + \ldots + b_{ni}x_i + \ldots + b_{nj}x_j + \ldots + b_{nm}x_m$$

Berarti $x_i - x_j =$

$$a_1(b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \ldots + b_{1i}x_i + \ldots + b_{1j}x_j + \ldots + b_{1m}x_m) + \ldots + a_k(b_{k1}x_1 + b_{k2}x_2 + \ldots + b_{ki}x_i + \ldots + b_{kj}x_j + \ldots + b_{km}x_m) + \ldots + a_n(b_{n1}x_1 + b_{n2}x_2 + \ldots + b_{ni}x_i + \ldots + b_{nj}x_j + \ldots + b_{nm}x_m).$$

Sehingga $x_i - x_j =$

$$x_1 \sum_{k=1}^{n} a_k b_{k1} + x_2 \sum_{k=1}^{n} a_k b_{k2} + \ldots + x_i \sum_{k=1}^{n} a_k b_{ki} + \ldots + x_j \sum_{k=1}^{n} a_k b_{kj} + \ldots + x_m \sum_{k=1}^{n} a_k b_{km}.$$

Maka diperoleh

$$x_1 \sum_{k=1}^{n} a_k b_{k1} + x_2 \sum_{k=1}^{n} a_k b_{k2} + \ldots + x_i \left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_{ki} - 1\right) + \ldots + x_j \left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_{kj} + 1\right) + \ldots + x_m \sum_{k=1}^{n} a_k b_{km} = 0.$$

Karena $x_1, x_2, \ldots, x_m$ bebas linear maka

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_{k1} = \sum_{k=1}^{n} a_k b_{k2} = \ldots = \sum_{k=1}^{n} a_k b_{ki} - 1 = \ldots =$$

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

$\sum_{k=1}^{n} a_k b_{kj} + 1 = \ldots = \sum_{k=1}^{n} a_k b_{km} = 0.$

Jadi terdapat $\sum_{k=1}^{n} a_k b_{ki} = 1.$

Karena I ideal, dan $a_k \in I$, $b_{ki} \in R$ untuk $k=1,2,\ldots,n$,

maka terdapat $\sum_{k=1}^{n} a_k b_{ki} \in I$ untuk suatu i.

Jadi $1 \in I$. Berarti $I=R$.

Padahal diketahui I ideal maksimal ($I \neq R$).

Kontradiksi dengan diketahui.

Jadi $x_i+IM \neq x_j+IM$, untuk $x_i+IM, x_j+IM \in B'$.

Sehingga $|B| = |B'|$.

Akan ditunjukkan B' basis untuk ruang vektor M/IM lewat field R/I.

Diketahui B membangun M. Maka untuk tiap $v \in M$,

$v = r_1x_1 + r_2x_2 \ldots + r_mx_m$.

Ambil $v+IM \in M/IM$.

$$
\begin{aligned}
v+IM &= (r_1x_1+r_2x_2\ldots+r_mx_m)+IM \\
&= (r_1x_1+IM)+(r_2x_2+IM)+\ldots+(r_mx_m+IM) \\
&= (r_1+I)(x_1+IM)+(r_2+I)(x_2+IM)+\ldots+(r_m+I)(x_m+IM)
\end{aligned}
$$

Jadi $B' = \{x_i+IM / x_i \in B\}$ membangun M/IM.

Andaikan

$(r_1+I)(x_1+IM)+(r_2+I)(x_2+IM)+\ldots+(r_m+I)(x_m+IM) = 0+IM.$

$(r_1x_1+IM)+(r_2x_2+IM)+\ldots+(r_mx_m+IM) = IM.$

$(r_1x_1+r_2x_2+\ldots+r_mx_m) + IM = IM.$

Jadi $r_1x_1+r_2x_2+\ldots+r_mx_m \in IM$.

Maka $r_1x_1+r_2x_2+\ldots+r_mx_m = a_1v_1+\ldots+a_nv_n$, dengan $a_i \in I$, $v_i \in M$. Masing-masing v_i dapat dinyatakan

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

sebagai kombinasi linear dari $x_1, x_2, \ldots, x_m$:

$v_1 = b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \ldots + b_{1m}x_m$

.

.

$v_k = b_{k1}x_1 + b_{k2}x_2 + \ldots + b_{km}x_m$

.

.

$v_n = b_{n1}x_1 + b_{n2}x_2 + \ldots + b_{nm}x_m$

Maka $a_1v_1 + \ldots + a_nv_n =$

$x_1 \sum_{k=1}^{n} a_k b_{k1} + x_2 \sum_{k=1}^{n} a_k b_{k2} + \ldots + x_m \sum_{k=1}^{n} a_k b_{km}$.

Karena $r_1x_1 + r_2x_2 + \ldots + r_mx_m = a_1v_1 + \ldots + a_nv_n$, didapat

$x_1 (\sum_{k=1}^{n} a_k b_{k1} - r_1) + x_2 (\sum_{k=1}^{n} a_k b_{k2} - r_2) + \ldots +$

$x_m (\sum_{k=1}^{n} a_k b_{km} - r_m) = 0$.

Karena B bebas linear, maka

$\sum_{k=1}^{n} a_k b_{k1} - r_1 = \sum_{k=1}^{n} a_k b_{k2} - r_2 = \ldots = \sum_{k=1}^{n} a_k b_{km} - r_m = 0$,

sehingga $\sum_{k=1}^{n} a_k b_{k1} = r_1$, $\sum_{k=1}^{n} a_k b_{k2} = r_2, \ldots, \sum_{k=1}^{n} a_k b_{km} = r_m$.

Karena $\sum_{k=1}^{n} a_k b_{k1}, \sum_{k=1}^{n} a_k b_{k2}, \ldots, \sum_{k=1}^{n} a_k b_{km} \in I$ maka $r_1, r_2, \ldots, r_m \in I$, sehingga $r_i + I = I$ untuk tiap $i = 1, 2, \ldots, m$.

Terbukti B' bebas linear. Jadi B' merupakan basis untuk ruang vektor M/IM lewat field R/I.

Akhirnya, dengan cara yang sama, jika terdapat $C = \{y_1, y_2, \ldots, y_k\}$ basis untuk modul M, maka $C' =$

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

$\{y_i+IM/y_i \in C\}$ adalah basis untuk ruang vektor M/IM lewat field R/I, dan $|C|=|C'|$.

Menurut teorema dalam ruang vektor $|B'|=|C'|$.

Jadi $|B|=|C|$, dengan B dan C adalah basis dari modul M lewat R. ■

Definisi 3.3.2

Banyaknya elemen dalam suatu basis pada modul bebas M lewat ring komutatif R dengan elemen satuan disebut <u>rank M</u> dan ditulis rk(M). □

Teorema 3.3.3

Modul M lewat ring R adalah bebas dengan rank n bila dan hanya bila $M \cong R^n$.

Bukti :

($\Rightarrow$)

Andaikan $B = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ basis untuk M.

Didefinisikan perkawanan $\varphi : M \longrightarrow R^n$ sebagai berikut : untuk $u \in M$ dengan $u = r_1x_1+\ldots+r_nx_n$,

$\varphi(u) = \varphi(r_1x_1+\ldots+r_nx_n) = r_1y_1+\ldots+r_ny_n$ dengan $y_i=(0,\ldots,1,\ldots,0) \in R^n$, yaitu 1 pada koordinat ke i untuk tiap $i = 1,2,\ldots,n$..

Akan dibuktikan φ isomorfisma.

a). Diberikan $u,w \in M$.

Maka $u = r_1x_1+\ldots+r_nx_n$ untuk $r_1,\ldots,r_n \in R$ dan

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

$w = t_1x_1+\ldots+t_nx_n$ untuk $t_1,\ldots,t_n \in R$.

Misalkan $u=w$, maka $r_1x_1+\ldots+r_nx_n = t_1x_1+\ldots+t_nx_n$.

Sehingga $(r_1-t_1)x_1+\ldots+(r_n-t_n)x_n = 0$.

Karena $\{x_1,\ldots,x_n\}$ bebas linear, maka $r_1-t_1 =\ldots= r_n-t_n = 0$. Sehingga $r_1=t_1,\ldots,r_n=t_n$. Jadi

$$\begin{aligned}\varphi(u) &= \varphi(r_1x_1+\ldots+r_nx_n)\\ &= r_1y_1+\ldots+r_ny_n\\ &= t_1y_1+\ldots+t_ny_n\\ &= \varphi(t_1x_1+\ldots+t_nx_n)\\ &= \varphi(w)\end{aligned}$$

Maka φ pemetaan.

b). Diberikan $u,w\in M$ dan $r\in R$.

$$\begin{aligned}\varphi(u+w) &= \varphi((r_1x_1+\ldots+r_nx_n)+(t_1x_1+\ldots+t_nx_n))\\ &= \varphi((r_1+t_1)x_1+\ldots+(r_n+t_n)x_n)\\ &= (r_1+t_1)y_1+\ldots+(r_n+t_n)y_n\\ &= r_1y_1+t_1y_1+\ldots+r_ny_n+t_ny_n\\ &= (r_1y_1+\ldots+r_ny_n)+(t_1y_1+\ldots+t_ny_n)\\ &= \varphi(r_1x_1+\ldots+r_nx_n)+\varphi(t_1x_1+\ldots+t_nx_n)\\ &= \varphi(u)+\varphi(w)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi(ru) &= \varphi(r(r_1x_1+\ldots+r_nx_n))\\ &= \varphi(rr_1x_1+\ldots+rr_nx_n)\\ &= rr_1y_1+\ldots+rr_ny_n\\ &= r(r_1y_1+\ldots+r_ny_n)\\ &= r\varphi(r_1x_1+\ldots+r_nx_n)\\ &= r\varphi(u)\end{aligned}$$

UNIVERSITAS SANATA DHARMA PERPUSTAKAAN YOGYAKARTA

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

$\therefore\ \varphi$ homomorfisma.

c). Diberikan $u,w \in M$ dengan $\varphi(u)=\varphi(w)$.

Maka $\varphi(r_1x_1+\ldots+r_nx_n) = \varphi(t_1x_1+\ldots+t_nx_n)$.

Sehingga $r_1y_1+\ldots+r_ny_n = t_1y_1+\ldots+t_ny_n$.

Didapat $(r_1-t_1)y_1+\ldots+(r_n-t_n)y_n=0$.

$(r_1-t_1)(1,0,\ldots,0) + \ldots + (r_n-t_n)(1,0,\ldots,0) = (0,0,\ldots,0)$.

Maka $(r_1-t_1,\ldots,r_n-t_n) = (0,\ldots,0)$.

Jadi $r_1-t_1=\ldots=r_n-t_n=0$, sehingga $r_1=t_1,\ldots,r_n=t_n$.

Maka $r_1x_1+\ldots+r_nx_n = t_1x_1+\ldots+t_nx_n$, yaitu $u=w$.

$\therefore\ \varphi$ injektif.

d). Ambil $(r_1,r_2,\ldots,r_n) \in R^n$, maka terdapat $r_1x_1+\ldots+r_nx_n \in M$ dan $\varphi(r_1x_1+\ldots+r_nx_n) = r_1y_1+\ldots+r_ny_n = (r_1,\ldots,r_n)$.

$\therefore\ \varphi$ surjektif.

Terbukti $M \cong R^n$.

$(\Leftarrow)$

Diketahui modul M lewat ring R dan $M \cong R^n$.

R^n adalah modul bebas lewat ring R dengan basis $\{y_1,y_2,\ldots,y_n\}$ dengan $y_i = (0,\ldots,1,0,\ldots,0)$ di mana 1 berada pada koordinat ke-i.

Karena $M \cong R^n$, maka ada isomorfisma $\alpha : R^n \longrightarrow M$.

Menurut teorema 3.3.1, $\{\alpha(y_1),\alpha(y_2),\ldots,\alpha(y_n)\}$ merupakan basis dari modul M.

Jadi M adalah modul bebas dengan rank n. ■

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

BAB IV

MODUL TORSI

Dalam bab IV ini akan diuraikan pengertian modul torsi yang dibangun secara berhingga lewat daerah ideal utama. Sebelumnya akan diuraikan daerah ideal utama dan daerah faktorisasi tunggal. Selain modul torsi akan dibahas juga modul yang tidak memiliki elemen torsi yang disebut bebas torsi.

4.1. Daerah Ideal Utama dan Daerah Faktorisasi Tunggal

Definisi 4.1.1

Elemen taknol a dalam ring komutatif R disebut pembagi nol dalam R jika ada elemen taknol c dari R sedemikian sehingga $ac=0$.

Sedangkan elemen taknol $a \in R$ bukan pembagi nol jika untuk $c \in R$ dan $ac=0$ maka $c=0$. □

Definisi 4.1.2

1. Suatu ring komutatif R dengan elemen satuan disebut daerah integral jika tidak memuat pembagi nol.

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

2. Daerah integral R di mana setiap ideal dari R merupakan ideal utama disebut <u>daerah ideal utama</u>.□

Contoh :

1. Ring bilangan rasional dan ring bilangan real adalah daerah integral.
2. Ring $\mathbb{Z}x\mathbb{Z}$ bukan daerah integral karena mempunyai pembagi nol.
3. Ring bilangan bulat merupakan daerah ideal utama.

Teorema 4.1.1

Diberikan daerah integral R dan $a,b,c \in R$. Jika $ab=ac$ dan $a\neq0$, maka $b=c$. (disebut aturan kanselasi).

Bukti:

Diberikan $a,b,c \in R$, $a\neq0$ dengan $ab=ac$.

Maka $ab-ac=0$ sehingga $a(b-c)=0$.

Karena $a\in R$ dengan $a\neq0$ dan R daerah integral, maka a bukan pembagi nol. Jadi $b-c=0$. Maka $b=c$. ■

Suatu modul bagian N dari modul bebas M lewat ring komutatif R dengan elemen satuan, tidak selalu merupakan modul bebas.

Adapun contoh yang dapat menjelaskan pernyataan di atas adalah sebagai berikut :

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

Diberikan ring $\mathbb{Z}x\mathbb{Z}$ dan modul M = $\mathbb{Z}x\mathbb{Z}$ lewat dirinya sendiri.

$\mathbb{Z}x\mathbb{Z}$ adalah modul bebas dengan basis {(1,1)}.

Karena (1,1) adalah bebas linear, yaitu :

untuk $\forall(n,m)\in\mathbb{Z}x\mathbb{Z}$, jika $(n,m)(1,1)=(0,0)$ maka $(n,m)=(0,0)$.

Dan (1,1) membangun $\mathbb{Z}x\mathbb{Z}$, yaitu :

untuk $\forall(n,m)\in\mathbb{Z}x\mathbb{Z}$, $(n,m) = (n,m)(1,1)$.

Modul bagian S = $\mathbb{Z}x\{0\}$ dari modul $\mathbb{Z}x\mathbb{Z}$ adalah modul bagian yang tidak bebas, karena jika $(n,0)\neq(0,0)$ maka terdapat $(0,1)\neq(0,0)$ sedemikian sehingga $(0,1)(n,0) = (0,0)$.

Berarti $\{(n,0)\}$ tidak bebas linear, untuk setiap $n\in\mathbb{Z}$, jadi S modul bagian yang tidak bebas.

Tetapi jika daerah operatornya adalah daerah ideal utama, maka modul bagian dari modul bebas juga modul bebas. Hal ini dituangkan dalam teorema di bawah ini dan dibatasi untuk modul bebas dengan basis berhingga.

Teorema 4.1.2

Bila M modul bebas lewat daerah ideal utama R, maka setiap modul bagian S dari M juga bebas, dengan $rk(S) \leq rk(M)$.

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

Bukti :

Akan diberikan bukti hanya untuk modul dengan rank berhingga, meskipun teorema ini benar untuk semua modul bebas.

Diberikan modul bebas M lewat daerah ideal utama R dengan rank n, maka menurut teorema 3.3.3, $M \cong R^n$.

Akan dibuktikan dengan induksi matematik bahwa setiap modul bagian S dari R^n adalah bebas.

a). Untuk n=1 :

Andaikan S modul bagian dari modul R.

Maka S juga merupakan ideal dari R.

Karena R daerah ideal utama, maka S merupakan ideal utama.

Jadi $S=\langle a\rangle=\{ra/r\in R\}$, untuk suatu $a\in R$.

Jika a=0, didapat ra=0, maka $S=\langle 0\rangle$.

Dan S merupakan modul bebas dengan basis $\emptyset$.

Untuk $S=\langle a\rangle$ dengan $a\neq 0$, jika ra=0 untuk $r\in R$, maka r=0, karena R daerah integral.

Jadi a bebas linear.

Maka S merupakan modul bebas.

b). Andaikan teorema benar untuk setiap modul bagian dari modul R^{n-1}.

Andaikan S modul bagian dari R^n .

Akan ditunjukkan S modul bebas.

Andaikan $S_1 = \{(s_1,\ldots,s_{n-1},0)/ \ (s_1,\ldots,s_{n-1},s_n)$

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

$\in S$ untuk suatu $s_n\}$ dan $S_2 = \{(0,\ldots,0,s_n)/$ $(s_1,\ldots,s_{n-1},s_n)\in S$ untuk suatu $s_1,\ldots,s_{n-1}\}$.

Jelas S_1 dan S_2 merupakan modul bagian dari R^n.

Demikian juga S_1 dan S_2 modul bagian dari S.

Akan ditunjukkan bahwa $S = S_1 \oplus S_2$.

Ambil $(s_1,s_2,\ldots,s_n) \in S$.

Maka $(s_1,s_2,\ldots,s_n) =$

$(s_1,s_2,\ldots,s_{n-1},0)+(0,0,\ldots,0,s_n)$.

Karena $(s_1,s_2,\ldots,s_{n-1},0) \in S_1$ dan $(0,0,\ldots,0,s_n) \in S_2$, maka $(s_1,s_2,\ldots,s_n) \in S_1+S_2$.

Sehingga $S = S_1+S_2$ .... (1)

Ambil $x \in S_1\cap S_2$.

Maka $x = (s_1,s_2,\ldots,s_{n-1},0)$ karena $x\in S_1$, dan $x = (0,0,\ldots,0,s_n)$ karena $x\in S_2$.

Jadi $(s_1,s_2,\ldots,s_{n-1},0) = (0,0,\ldots,0,s_n)$.

Terdapat $s_1=s_2=\ldots=s_{n-1}=s_n=0$.

Sehingga $S_1\cap S_2 = \{(0,0,\ldots,0)\}$.......... (2)

Jadi dari (1) dan (2) didapat $S = S_1\oplus S_2$.

Perhatikan $S_1' = \{ (s_1,\ldots,s_{n-1}) / (s_1,\ldots,s_{n-1},0) \in S_1 \}$ modul bagian dari R^{n-1}, dan $S_2' = \{ s_n / (0,\ldots,0,s_n) \in S_2 \}$ modul bagian dari R.

Selanjutnya S_1 isomorfik dengan S_1', dan S_2 isomorfik dengan S_2'.

Karena tiap modul bagian dari R^{n-1} adalah bebas menurut anggapan di atas, maka S_1' adalah bebas.

Jadi S_1 juga modul bagian bebas.

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

Dan karena tiap modul bagian dari R adalah bebas, maka S_2' bebas, sehingga S_2 juga bebas.

Andaikan S_1 modul bagian bebas dari modul R^n dengan basis $\{u_1,\ldots,u_s\}$ di mana $s\leq n-1$, dan S_2 modul bagian bebas dari R^n dengan basis $\{v_1\}$.

Ambil $s\in S$.

Karena $S = S_1+S_2$, maka $s = s_1+s_2$ dengan $s_1\in S_1$ dan $s_2\in S_2$.

Karena $\{u_1,\ldots,u_s\}$ basis S_1, maka $s_1 = r_1u_1+\ldots+r_su_s$.

Karena $\{v_1\}$ basis S_2, maka $s_2 = t_1v_1$.

Karena $s = s_1+s_2$, maka $s = r_1u_1+\ldots+r_su_s+t_1v_1$.

Jadi $s\in\langle u_1,\ldots,u_s,v_1\rangle$.

Sehingga $S=\langle u_1,\ldots,u_s,v_1\rangle$.

Andaikan $\alpha_1u_1+\ldots+\alpha_su_s+\alpha_{s+1}v_1 = 0$.

Maka $\alpha_1u_1+\ldots+\alpha_su_s = -\alpha_{s+1}v_1$.

Berarti $-\alpha_{s+1}v_1 \in S_1$ dan $-\alpha_{s+1}v_1 \in S_2$.

Karena $S_1\cap S_2 = \{0\}$, maka $\alpha_1u_1+\ldots+\alpha_su_s = 0$ dan $-\alpha_{s+1}v_1 = 0$.

Karena $\{u_1,\ldots,u_s\}$ dan $\{v_1\}$ bebas linear maka $\alpha_1 =\ldots= \alpha_s = -\alpha_{s+1} = 0$.

Jadi $\{u_1,\ldots,u_s,v_1\}$ bebas linear.

Maka S modul bagian bebas dari R^n dengan basis $\{u_1,u_2,\ldots,u_s,v_1\}$ untuk $s+1\leq n$, yaitu $rk(S)\leq rk(R^n)$.■

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

Definisi 4.1.3

Diberikan R daerah integral.

1. Elemen taknol $u \in R$ disebut <u>unit</u> jika $uv = 1$ untuk suatu $v \in R$.
2. Elemen $r \in R$ yang taknol dan bukan unit disebut <u>irreducible</u> jika $r=ab$ hanya bila a unit atau b unit.
3. Diberikan elemen $a, b \in R$.
   Elemen b dikatakan <u>membagi</u> a (atau b <u>faktor</u> dari a) jika ada elemen $c \in R$ sedemikian sehingga $a = cb$ (ditulis sebagai $b|a$).
4. Elemen taknol $p \in R$ dan bukan elemen unit disebut <u>prima</u> jika $p|ab$ hanya bila $p|a$ atau $p|b$.
5. Elemen $a, b \in R$ dikatakan <u>bersekawan</u> jika $a=bu$, dengan u unit dalam R. □

Teorema 4.1.3

Diberikan R daerah ideal utama.

Setiap elemen yang taknol dan bukan unit dalam R adalah hasilkali dari elemen-elemen irreducible.

Bukti :

Diberikan $a \in R$ dengan a taknol dan bukan unit.

Terlebih dahulu akan ditunjukkan bahwa a mempunyai paling sedikit satu faktor irreducible.

Jika a irreducible, maka bukti selesai.

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

Jika a tidak irreducible, maka $a = a_1 b_1$ dengan a_1 dan b_1 bukan unit.

Sehingga diperoleh $<a> \subset <a_1>$.

Jika a_1 tidak irreducible, maka $a_1 = a_2 b_2$ dengan a_2 dan b_2 bukan unit.

Sehingga diperoleh $<a_1> \subset <a_2>$.

Jadi $<a> \subset <a_1> \subset <a_2>$.

Demikian seterusnya sehingga diperoleh $<a> \subset <a_1> \subset <a_2> \subset <a_3> \subset \ ...$

Andaikan $B = <a> \cup <a_1> \cup <a_2> \cup <a_3> \cup \ ...$

Menurut teorema 3.2.4, B adalah ideal dari R.

Karena R daerah ideal utama, maka $B = <b>$, untuk suatu $b \in R$.

Karena $b \in B$, maka ada indeks k sedemikian sehingga $b \in <a_k>$.

Sehingga untuk $r \geq k$ didapat $<b> \subseteq <a_k> \subseteq <a_r> \subseteq B = <b>$.

Jadi $<a_k> = <a_r>$ untuk $r \geq k$.

Atau $<a_k> = <a_{k+1}> = ...$

Maka rangkaian diatas akan berhenti pada suatu $<a_k>$ dan a_k harus irreducible.

Jadi a mempunyai sebuah faktor irreducible a_k.

Dari apa yang telah dibuktikan di atas, untuk sebuah elemen a yang taknol dan bukan unit dalam R, a irreducible atau $a = p_1 c_1$ untuk p_1 irreducible dan c_1 bukan unit.

Sehingga akan didapat $<a> \subset <c_1>$.

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

Jika c_1 tidak irreducible, maka $c_1=p_2c_2$ untuk p_2 irreducible dan c_2 bukan unit.

Demikian seterusnya sehingga didapat rangkaian naik dari ideal-ideal, yaitu

$<a> \subset <c_1> \subset <c_2> \subset <c_3> \subset \ldots .$

Dengan cara yang sama seperti di atas maka rangkaian ini berhenti pada suatu $c_k = q_k$ yang irreducible.

Maka $a = p_1p_2 \ldots p_kq_k$ dengan $p_1, p_2, \ldots, p_k, q_k$ elemen-elemen irreducible. ∎

Teorema 4.1.4

Diberikan R daerah ideal utama .

Suatu elemen $u \in R$ adalah unit bila dan hanya bila $<u>=R$.

Bukti :

Diberikan R daerah ideal utama.

($\Rightarrow$) Diberikan $u \in R$ dengan u unit.

Jelas $<u> \subseteq R$.

Karena u unit, maka $uv = 1$ untuk suatu $v \in R$.

Ambil $r \in R$.

Maka $r = 1r = (uv)r = u(vr)$.

Jadi $r \in <u>$, sehingga $R \subseteq <u>$. Terbukti $<u>=R$.

($\Leftarrow$) Diberikan $<u>=R$, untuk $u \in R$.

Karena $1 \in R$ maka $1 \in <u>$.

Sehingga $1=uv$, untuk suatu $v \in R$.

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

Terbukti u adalah unit. ■

Teorema 4.1.5

Diberikan R daerah ideal utama.

Jika $r \in R$ adalah irreducible, maka $\langle r \rangle$ adalah ideal maksimal.

Bukti :

Diberikan $r \in R$ dengan r irreducible.

Diberikan $\langle a \rangle$ ideal dari R dengan $\langle r \rangle \subseteq \langle a \rangle \subseteq R$.

Akan ditunjukkan $\langle a \rangle = \langle r \rangle$ atau $\langle a \rangle = R$.

Karena $\langle r \rangle \subseteq \langle a \rangle$, maka $r \in \langle a \rangle$ yaitu $r = xa$ untuk suatu $x \in R$. Karena r irreducible, maka x unit atau a unit.

Jika a unit, maka $\langle a \rangle = R$, menurut teorema 4.1.4.

Jika a bukan unit, maka x harus unit, sehingga ada $u \in R$ sedemikian sehingga $xu = 1$.

Karena $r = xa$ dan $xu = 1$, maka $ru = (xa)u = a$, sehingga $a \in \langle r \rangle$. Jadi $\langle a \rangle \subseteq \langle r \rangle$, sehingga $\langle a \rangle = \langle r \rangle$.

Sehingga jika $\langle a \rangle$ ideal dari R dengan $\langle r \rangle \subseteq \langle a \rangle \subseteq R$, maka $\langle a \rangle = \langle r \rangle$ atau $\langle a \rangle = R$.

Jadi $\langle r \rangle$ adalah ideal maksimal. ■

Teorema 4.1.6

Diberikan R daerah ideal utama . Elemen $p \in R$ adalah prima bila dan hanya bila p adalah irreducible.

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

Bukti :

Diberikan R daerah ideal utama.

($\Rightarrow$) Misalkan $p \in R$ dan p prima.

Andaikan $p = ab$, dengan $a,b \in R$.

Akan ditunjukkan a unit atau b unit.

Maka $ab = p = 1p$, sehingga $p|ab$.

Karena p prima, maka $p|a$ atau $p|b$.

Misalkan $p|a$, maka $a = xp$, untuk suatu $x \in R$.

Sehingga $p = ab = (xp)b = (xb)p$.

Jadi $1 = xb$, sehingga b unit.

Terbukti p irreducible.

($\Leftarrow$) Misalkan $p \in R$ dan p irreducible.

Andaikan $p|ab$, untuk $a,b \in R$.

Karena p irreducible, maka $\langle p \rangle$ ideal maksimal (menurut teorema 4.1.5).

Akan ditunjukkan $p|a$ atau $p|b$.

Diandaikan $a \notin \langle p \rangle$ dan $b \notin \langle p \rangle$.

Karena $a \notin \langle p \rangle$, maka $\langle a,p \rangle = R$, sehingga $1 = xa+yp$, $x,y \in R$. Karena $b \notin \langle p \rangle$, maka $\langle b,p \rangle = R$, sehingga $1 = x'b+y'p$, $x',y' \in R$.

$$\begin{aligned} \text{Maka } 1 = 1.1 &= (xa+yp)(x'b+y'p) \\ &= xx'ab + xy'ap + x'ybp + yy'p^2 \\ &= \alpha p, \text{ untuk suatu } \alpha \in R. \end{aligned}$$

Berarti $1 \in \langle p \rangle$.

Sehingga diperoleh $\langle p \rangle = R$. Menurut teorema 4.1.4, karena $\langle p \rangle = R$, maka p adalah unit.

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

Kontradiksi dengan yang diketahui yaitu bahwa p irreducible.

Jadi $a \in \langle p \rangle$ atau $b \in \langle p \rangle$. Sehingga $p|a$ atau $p|b$.

Terbukti p prima. ■

Teorema 4.1.7

Jika p adalah irreducible dalam daerah ideal utama R dan $p|(a_1 a_2 \ldots a_n)$ dengan $a_1, a_2, \ldots, a_n \in R$, maka $p|a_i$ untuk suatu i $(1 \le i \le n)$.

Bukti :

Diberikan $p \in R$ dengan p irreducible.

Menurut teorema 4.1.6, p adalah prima.

Akan dibuktikan dengan induksi matematik pada n.

Untuk n =1, jelas $p|a_1$.

Dianggap benar untuk n=k-1, berarti jika $p|a_1 a_2 \ldots a_{k-1}$, maka $p|a_i$ untuk suatu $i(1 \le i \le k-1)$.

Akan ditunjukkan benar untuk n=k.

Andaikan $p|a_1 a_2 a_3 \ldots a_k$. Maka $p|(a_1 a_2 a_3 \ldots a_{k-1})a_k$.

Karena p prima, maka diperoleh $p|a_1 a_2 \ldots a_{k-1}$ atau $p|a_k$.

Menurut anggapan di atas, jika $p|a_1 a_2 \ldots a_{k-1}$ maka $p|a_i$ untuk suatu i $(1 \le i \le k-1)$.

Terbukti $p|a_i$ untuk suatu i dengan $1 \le i \le k$. ■

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

Definisi 4.1.4

Daerah integral R disebut daerah faktorisasi tunggal jika kondisi berikut dipenuhi :

1. Jika elemen $a \in R$ taknol dan bukan unit, maka a dapat ditulis sebagai hasilkali elemen-elemen irreducible.
2. Jika $a=p_1 \dots p_r$ dan $a=q_1 \dots q_s$ dengan p_i dan q_j adalah irreducible, maka $r=s$ dan p_i dan q_i bersekawan (kalau perlu dengan mengubah urutan q_j). □

Teorema 4.1.8

Setiap daerah ideal utama adalah daerah faktorisasi tunggal.

Bukti :

Diberikan R daerah ideal utama, dan $a \in R$ dengan a taknol dan bukan unit.

Menurut teorema 4.1.3, a dapat ditulis sebagai hasilkali $a = p_1 p_2 \dots p_r$ dengan $p_1, p_2, \dots, p_r$ elemen-elemen irreducible

Akan ditunjukkan sifat ketunggalan.

Andaikan $a = q_1 q_2 \dots q_s$ dengan $q_1, q_2, \dots, q_s$ adalah irreducible.

Maka $p_1 p_2 \dots p_r = q_1 q_2 \dots q_s$.

Jadi $p_1 | q_1 q_2 \dots q_s$ dan menurut teorema 4.1.7, $p_1 | q_j$ untuk suatu $j = 1,2,\dots,s$.

Misalkan $p_1 | q_1$ (kalau perlu dengan mengubah urutan

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

q_j), maka $q_1 = p_1u_1$.

Karena q_1 dan p_1 irreducible, maka haruslah u_1 suatu unit, jadi p_1 dan q_1 bersekawan.

Diperoleh $p_1p_2 \ldots p_r = p_1u_1q_2 \ldots q_s$. Dengan aturan kanselasi didapat $p_2 \ldots p_r = u_1q_2 \ldots q_s$.

Dengan jalan yang sama dipilih $p_2 | q_2$, yaitu $q_2 = p_2u_2$. Karena q_2 dan p_2 irreducible, maka u_2 unit, jadi p_2 dan q_2 bersekawan.

Diperoleh $p_2p_3 \ldots p_r = u_1p_2u_2q_3 \ldots q_s$.

Maka $p_3 \ldots p_r = u_1u_2q_3 \ldots q_s$.

Demikian seterusnya sampai akhirnya diperoleh p_r dan q_r bersekawan dan $p_r = u_1u_2 \ldots u_{r-1}p_ru_r \ldots q_s$, sehingga $1 = u_1u_2 \ldots u_rq_{r+1} \ldots q_s$.

Berarti $q_{r+1} \ldots q_s$ adalah unit.

Padahal masing-masing q_j, $j=1,2,\ldots,s$, adalah irreducible, jadi bukan unit.

Maka harus dipunyai $r=s$. ∎

Definisi 4.1.b

Diberikan R daerah faktorisasi tunggal.

Elemen $d \in R$ disebut <u>faktor persekutuan terbesar</u> dari a dan b dalam R jika

1. $d|a$ dan $d|b$
2. jika $d' \in R$ dengan $d'|a$ dan $d'|b$, maka $d'|d$.

Jika d faktor persekutuan terbesar dari a dan b, maka ditulis sebagai $d = (a,b)$. □

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

Teorema 4.1.9

Jika R adalah daerah ideal utama dan a dan b elemen taknol dalam R, maka ada faktor persekutuan terbesar dari a dan b, katakan d. Selanjutnya d dapat ditulis dalam bentuk $d=ka+lb$, untuk suatu $k,l \in R$.

Bukti :

Andaikan a dan b adalah elemen taknol dari daerah ideal utama R.

Diberikan himpunan $I = \{ra+sb \mid r,s \in R\}$.

I merupakan ideal dari R, karena :

1. $0 = 0a+0b$, untuk $0 \in R$. Maka $0 \in I$, sehingga $I \neq \emptyset$.
2. Jelas $I \subseteq R$.
3. Ambil $x,y \in I$.

   Maka $x=r_1a+s_1b$ dan $y=r_2a+s_2b$, dengan $r_1,r_2,s_1,s_2 \in R$.

   Sehingga $x-y = (r_1a+s_1b)-(r_2a+s_2b)$

   $= (r_1-r_2)a + (s_1-s_2)b$.

   Jadi $x-y \in I$
4. Ambil $x \in I$, $t \in R$. Maka $x= ra+sb$, $r,s \in R$.

   Sehingga $tx = t(ra+sb) = (tr)a + (ts)b$.

   Jadi $tx \in I$.

Karena I ideal dalam R dan R daerah ideal utama, maka ada $d \in R$ sedemikian sehingga $I=\langle d \rangle$.

Jadi $\langle d \rangle = \{ ra+sb / r,s \in R \}$.

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

Karena $d \in \langle d \rangle$, maka $d = ka + lb$ untuk suatu $k, l \in R$.

Akan ditunjukkan bahwa d adalah faktor persekutuan terbesar dari $a, b \in R$.

Karena $a = 1a + 0b$ dan $b = 0a + 1b$, maka $a, b \in I$.

Padahal $I = \langle d \rangle$, maka ada $m, n \in R$ sehingga $a = md$ dan $b = nd$. Berarti d membagi a dan d membagi b.

Misalkan d' membagi a, katakan $a = a'd'$ dan d' membagi b, katakan $b = b'd'$ untuk $a', b' \in R$. Maka

$$
\begin{aligned}
d &= ka + lb \\
&= ka'd' + lb'd' \\
&= (ka' + lb')d'
\end{aligned}
$$

Maka d' membagi d.

Terbukti d adalah faktor persekutuan terbesar dari a dan b. ∎

Teorema 4.1.10

Jika R adalah daerah ideal utama, maka setiap elemen taknol dan bukan unit dari R merupakan hasilkali dari elemen-elemen prima.

Bukti :

Menurut teorema 4.1.3, elemen taknol dan bukan unit dari R adalah hasilkali elemen-elemen irreducible. Menurut teorema 4.1.6, elemen irreducible dalam daerah ideal utama adalah prima. Maka terbukti elemen taknol dan bukan unit dalam R adalah

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

hasilkali elemen-elemen prima. ■

4.2. Modul Torsi dan Bebas Torsi

Definisi 4.2.1

Diberikan modul M lewat ring komutatif R.

Suatu elemen m dari modul M disebut elemen torsi jika ada elemen taknol $r \in R$ sedemikian sehingga $rm=0$. Sedangkan, suatu elemen $m \in M$ bukan elemen torsi, jika untuk tiap $r \in R$ dengan $rm=0$, maka $r=0$. □

Definisi 4.2.2

Diberikan modul M lewat ring R. M disebut modul torsi jika semua elemennya adalah elemen torsi. Sedangkan M disebut bebas torsi jika tidak memiliki elemen torsi taknol. □

Contoh :

1. Ruang vektor lewat field F yang dapat dipandang sebagai modul lewat field F adalah bebas torsi.
2. Jika R daerah integral, maka modul R lewat dirinya sendiri adalah bebas torsi.
3. Diberikan $M = \{0\}$ modul lewat ring R. Modul M ini merupakan modul torsi.
4. Diberikan $M = \mathbb{Z}x\{0\}$ modul lewat ring $\mathbb{Z}x\mathbb{Z}$. Modul M ini merupakan modul torsi.

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

Teorema 4.2.1

Jika M adalah modul lewat daerah integral R, maka himpunan semua elemen torsi adalah modul bagian dari M.

Bukti :

Diberikan modul M lewat daerah integral R dan $Tor(M)=\{x \in M / \exists r \in R, r \neq 0$ sedemikian sehingga $rx=0\}$.

Akan dibuktikan Tor(M) modul bagian dari M.

a). Jelas, dari definisi, $Tor(M) \subseteq M$.

b). Karena M modul, maka $0 \in M$, sehingga $r0=0$, untuk $r \in R$ dengan $r \neq 0$. Jadi $0 \in Tor(M)$. Berarti $Tor(M) \neq \emptyset$.

c). Ambil $x_1, x_2 \in Tor(M)$.

Maka $\exists r_1, r_2 \in R$, dengan $r_1 \neq 0$ dan $r_2 \neq 0$ sedemikian sehingga $r_1x_1=0$ dan $r_2x_2=0$.

Karena R daerah integral, maka untuk $r_1 \neq 0$ dan $r_2 \neq 0$ didapat $r_1r_2 \neq 0$. Sehingga

$$
\begin{aligned}
r_1r_2(x_1-x_2) &= (r_1r_2)x_1-(r_1r_2)x_2. \\
&= (r_2r_1)x_1-r_1(r_2x_2), \text{ R komutatif} \\
&= r_2(r_1x_1)-r_1(r_2x_2) \\
&= r_20-r_10 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Jadi $x_1-x_2 \in Tor(M)$.

d). Ambil $s \in R$, $x_1 \in Tor(M)$.

Maka $\exists r_1 \in R$ dengan $r_1 \neq 0$ sedemikian sehingga

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

$r_1x_1=0$. Sehingga

$$\begin{aligned} r_1(sx_1) &= (r_1s)x_1 \\ &= (sr_1)x_1 \\ &= s(r_1x_1) \\ &= s0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Jadi $sx_1 \in Tor(M)$.

Terbukti Tor(M) adalah modul bagian M. ∎

Teorema 4.2.2

Diberikan modul M lewat daerah integral R. Jika $Tor(M) = \{x \in M / \exists r \in R,\ r \neq 0$ sedemikian sehingga $rx=0\}$ merupakan himpunan semua elemen torsi, maka M/Tor(M) adalah bebas torsi.

Bukti :

Menurut teorema 4.2.1 Tor(M) modul bagian M. Akan dibuktikan M/Tor(M) adalah bebas torsi, berarti akan ditunjukkan $Tor(M/Tor(M)) = \{Tor(M)\}$, dengan $Tor(M/Tor(M)) = \{\ x+Tor(M) \in M/Tor(M) / \ \exists s \in R,\ s \neq 0$ dan $s(x+Tor(M))=Tor(M)\ \}$.

Ambil $x+Tor(M) \in Tor(M/Tor(M))$.

Maka ada $s \in R$ dengan $s \neq 0$ sedemikian sehingga $s(x+Tor(M)) = Tor(M)$.

Maka $sx+Tor(M) = Tor(M)$. Jadi $sx \in Tor(M)$.

Karena $sx \in Tor(M)$, maka ada $r \in R$ dengan $r \neq 0$

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

sedemikian sehingga $r(sx)=0$. Jadi $r(sx) = (rs)x = 0$. Karena R daerah integral, dan $r\neq0$ dan $s\neq0$ maka $rs\neq0$. Jadi $x\in Tor(M)$. Berarti $x+Tor(M) = Tor(M)$. Terbukti $Tor(M/Tor(M)) = \{Tor(M)\}$. ∎

Teorema 4.2.3

Diberikan modul M yang dibangun secara berhingga lewat daerah ideal utama R. M modul bebas bila dan hanya bila M bebas torsi.

Bukti :

($\Rightarrow$)

Karena M modul bebas, maka M punya basis, katakan $B=\{x_1,\dots,x_n\}$. Akan ditunjukkan $Tor(M)=\{0\}$.

Ambil $m\in Tor(M)$, berarti $m\in M$.

Karena B membangun M, maka $m = r_1x_1+\dots+r_nx_n$ dengan $r_1,\dots,r_n\in R$. Dan terdapat $s\in R$ dengan $s\neq0$ sedemikian sehingga $sm=0$, yaitu $s(r_1x_1+\dots+r_nx_n)=0$.

Jadi $s(r_1x_1)+\dots+s(r_nx_n)=0$, sehingga $(sr_1)x_1+\dots+(sr_n)x_n=0$.

Karena $B=\{x_1,\dots,x_n\}$ basis, maka bebas linear.

Jadi $sr_1=\dots=sr_n=0$.

Karena R daerah integral, dan $s\neq0$ dengan $sr_1=\dots=sr_n=0$, maka $r_1=\dots=r_n=0$.

Jadi $m = 0x_1+\dots+0x_n = 0$.

Terbukti $Tor(M)=\{0\}$. Jadi M bebas torsi.

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

($\Leftarrow$)

Karena M dibangun secara berhingga, maka $M=<x_1,\ldots,x_n>$ untuk $x_i \in M$.

Jika $\{x_1,\ldots,x_n\}$ bebas linear, maka M modul bebas.(bukti selesai).

Jika $\{x_1,\ldots,x_n\}$ tak bebas linear, maka memuat himpunan yang bebas linear secara maksimal, katakan $S=\{x_1,\ldots,x_k\}$, sehingga $M = <x_1,\ldots,x_k,x_{k+1},\ldots,x_n>$.

Karena $\{x_1,x_2,\ldots,x_k\}$ bebas linear, maka $\{x_1,\ldots,x_k,x_{k+1}\}$ tak bebas linear.

Karena $\{x_1,\ldots,x_k,x_{k+1}\}$ tak bebas linear, maka ada $a_1,\ldots,a_k,a_{k+1}$ yang tak nol sedemikian sehingga $a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_kx_k+a_{k+1}x_{k+1}=0$. Dan jelas $a_{k+1}\neq 0$.

Karena $\{x_1,x_2,\ldots,x_k,x_{k+2}\}$ tak bebas linear, maka ada $a_1,a_2,\ldots,a_k,a_{k+2}$ yang taknol sedemikian sehingga $a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_kx_k+a_{k+2}x_{k+2}=0$. Dan jelas $a_{k+2}\neq 0$.

Demikian seterusnya, sehingga karena $\{x_1,x_2,\ldots,x_k,x_n\}$ tak bebas linear, maka ada $a_1,a_2,\ldots,a_k,a_n$ yang taknol sedemikian sehingga $a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_kx_k+a_nx_n=0$. Dan jelas $a_n\neq 0$.

Jika diambil $a=a_{k+1}\cdot a_{k+2}\cdot\ldots a_n$, maka $a\neq 0$ dengan $a\in R$.

Diperoleh :

$ax_{k+1} = (a_{k+1}.a_{k+2}\ldots a_n)x_{k+1} = r_1x_1+\ldots+r_kx_k$, maka $ax_{k+1}\in<S>$.

$ax_{k+2} = (a_{k+1}.a_{k+2}\ldots a_n)x_{k+2} = t_1x_1+\ldots+t_kx_k$, maka

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

$ax_{k+2} \in \langle S \rangle$.

Demikian seterusnya sehingga

$ax_n = (a_{k+1}.a_{k+2}...a_n)x_n = b_1x_1+...+b_kx_k$, maka $ax_n \in \langle S \rangle$.

Jika $aM = \{ax/x \in M\}$, akan ditunjukkan aM modul bagian dari $\langle S \rangle$.

a). Jelas $aM \subseteq \langle S \rangle$.

b). Karena $0 \in M$ maka $a0=0 \in aM$. Jadi $aM \neq \emptyset$.

c). Ambil $ax_i, ax_j \in aM$ dengan $x_i, x_j \in M$.

Sehingga $ax_i - ax_j = a(x_i - x_j)$.

Karena $x_i, x_j \in M$ maka $ax_i - ax_j \in aM$.

d). Ambil $s \in R$, $ax \in aM$.

Maka $s(ax) = (sa)x = (as)x$

$= (as)(r_1x_1+...+r_kx_k+...+r_nx_n)$

$= a((sr_1)x_1+...+(sr_k)x_k+...+(sr_n)x_n)$

Sehingga $s(ax) \in aM$.

Jadi aM modul bagian dari $\langle S \rangle$.

Karena $\langle S \rangle$ adalah modul bebas (dengan $\{x_1,...,x_k\}$ basis dari $\langle S \rangle$) dan aM modul bagian $\langle S \rangle$, maka menurut teorema 4.1.2. aM merupakan modul bebas.

Diberikan $\alpha : M \longrightarrow aM$ yang didefinisikan sebagai $\alpha(x)=ax$, untuk $x \in M$. α isomorfisma karena dipenuhi ;

a). α pemetaan .

Ambil $x_1, x_2 \in M$ dengan $x_1 = x_2$.

Maka $\alpha(x_1) = ax_1$

$= ax_2$

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

$= \alpha(x_2)$.

b). α homomorfisma .

Ambil $r \in R$, $x_1, x_2 \in M$

Maka $\alpha(x_1+x_2) = a(x_1+x_2)$

$= ax_1+ax_2$

$= \alpha(x_1)+\alpha(x_2)$.

Dan $\alpha(rx_1) = a(rx_1)$

$= (ar)x_1$

$= (ra)x_1$

$= r(ax_1)$

$= r\alpha(x_1)$.

c). α injektif.

Ambil $x_1, x_2 \in M$ dengan $\alpha(x_1) = \alpha(x_2)$.

Maka $ax_1 = ax_2$, sehingga $a(x_1-x_2) = 0$, dengan $x_1-x_2 \in M$.

Karena M bebas torsi yaitu $Tor(M)=\{0\}$, maka untuk $a \in R$ dengan $a \neq 0$ dan $a(x_1-x_2)=0$, diperoleh $x_1-x_2=0$. Jadi $x_1=x_2$.

d). α surjektif.

Ambil sembarang $y \in aM$, maka $y=ax$ untuk suatu $x \in M$ dan $\alpha(x)=ax=y$.

Jadi α isomorfisma.

Karena $M \cong aM$ dan aM bebas, maka M merupakan modul bebas. ∎

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

Definisi 4.2.3

Diberikan modul M lewat ring R dan $v \in M$. Annihilator dari v adalah $\text{ann}(v)=\{r \in R / rv=0\}$ dan annihilator dari M adalah $\text{ann}(M)=\{r \in R / rM=\{0\}\}$ dengan $rM=\{rv / v \in M\}$. □

Teorema 4.2.4

Diberikan modul M lewat daerah ideal utama R dan $v \in M$. Maka ann(v) dan ann(M) adalah ideal-ideal dalam R.

Bukti :

Akan dibuktikan ann(v) ideal dari R.

a). Jelas $\text{ann}(v) \subseteq R$

b). Karena $0 \in R$ dan $0v=0$ untuk $v \in M$, maka $0 \in \text{ann}(v)$.

Jadi $\text{ann}(v) \neq \emptyset$.

c). Ambil $r_1, r_2 \in \text{ann}(v)$.

Maka $r_1, r_2 \in R$, dengan $r_1 v=0$ dan $r_2 v=0$.

Sehingga $(r_1-r_2)v = r_1 v - r_2 v = 0$.

Jadi $r_1 - r_2 \in \text{ann}(v)$.

d). Ambil $s \in R$, $r_1 \in \text{ann}(v)$.

Maka $r_1 \in R$ dan $r_1 v=0$.

Jadi $(sr_1)v = s(r_1 v)$

$= s0$

$= 0$

Maka $sr_1 \in \text{ann}(v)$.

Terbukti ann(v) ideal dalam R.

UNIVERSITAS SANATA DHARMA PERPUSTAKAAN YOGYAKARTA

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

Akan dibuktikan ann(M) ideal dalam R.

a). Jelas ann(M) $\subseteq$ R.

b). Karena $0 \in R$ dan $0M=\{0v/v \in M\}=\{0\}$, maka $0 \in$ ann(M).

Maka ann(M)$\neq\emptyset$.

c). Ambil $r_1, r_2 \in$ ann(M).

Maka $r_1, r_2 \in R$ dengan $r_1M=\{r_1v/v \in M\}=\{0\}$ dan $r_2M=\{r_2v/v \in M\}=\{0\}$. Sehingga $r_1v=0$ dan $r_2v=0$ untuk $v \in M$. Didapat $(r_1-r_2)M = \{(r_1-r_2)v/v \in M\}$

$= \{r_1v-r_2v/ v \in M\}$

$= \{0\}$

Jadi $r_1-r_2 \in$ ann(M).

d). Ambil $s \in R$, $r_1 \in$ ann(M).

Maka $r_1 \in R$ dan $r_1M = \{r_1v/v \in M\} = \{0\}$.

Sehingga $r_1v=0$ untuk $v \in M$.

Jadi $(sr_1)M = \{(sr_1)v/v \in M\}$

$= \{s(r_1v)/v \in M\}$

$= \{0\}$

Berarti $sr_1 \in$ ann(M).

Terbukti ann(M) ideal dalam R. ∎

Karena ann(v) dan ann(M) adalah ideal dalam R dan R merupakan daerah ideal utama, maka terdapat $c, d \in R$ sedemikian sehingga ann(v)=<c> dan ann(M)=<d>. Dan c disebut <u>orde dari v∈M</u> dan d disebut <u>orde dari M</u>.

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

Definisi 4.2.4

Modul M lewat daerah ideal utama R disebut <u>modul primer</u> jika $ann(M)=\langle p^e \rangle$ (dengan p adalah prima dalam R dan e bilangan bulat positif). □

Teorema 4.2.5

Diberikan modul torsi M yang dibangun secara berhingga lewat daerah ideal utama R, dengan orde w $= p_1^{e_1}p_2^{e_2}$ dengan p_1 dan p_2 elemen-elemen prima yang berbeda.

Jika $M_{p_i}=\{v \in M / p_i^{e_i}v=0\}$, untuk i=1,2, maka M_{p_i} modul bagian dari M dan disebut <u>modul bagian primer</u>.

Bukti :

Akan dibuktikan M_{p_i} modul bagian dari M.

a). $M_{p_i} \subseteq M$, jelas dari definisi.

b). Karena $0 \in M$, maka $p_i^{e_i}0=0$. Jadi $M_{p_i} \neq \emptyset$.

c). Ambil $v_1, v_2 \in M_{p_i}$, maka $p_i^{e_i}v_1=0$ dan $p_i^{e_i}v_2=0$.

Jadi $p_i^{e_i}(v_1-v_2) = p_i^{e_i}v_1-p_i^{e_i}v_2$

$= 0-0$

$= 0$

Berarti $v_1-v_2 \in M_{p_i}$.

d). Ambil $r \in R$, $v_1 \in M_{p_i}$.

Jelas $rv_1 \in M$. Karena M modul dengan $v_1 \in M$, maka

$p_i^{e_i}(rv_1) = (p_i^{e_i}r)v_1$

$= (rp_i^{e_i})v_1$

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

$$= r(p_i^{e_i} v_1)$$

$$= 0$$

Jadi $rv_1 \in M_{p_i}$.

Terbukti M_{p_i} adalah modul bagian dari M ■

Teorema 4.2.6 (Teorema Dekomposisi Primer)

Diberikan modul torsi taknol M yang dibangun secara berhingga lewat daerah ideal utama R dengan orde $u = p_1^{e_1} \dots p_n^{e_n}$, dengan $p_1, \dots, p_n$ elemen-elemen prima yang berbeda dan $e_1, \dots, e_n$ bilangan bulat positif. Maka M adalah jumlahan langsung

$$M = M_{p_1} \oplus \dots \oplus M_{p_n}$$

dengan $M_{p_i} = \{v \in M / p_i^{e_i} v = 0\}$ adalah modul bagian primer, dengan orde $p_i^{e_i}$.

Bukti :

Diberikan modul torsi M yang dibangun secara berhingga lewat daerah ideal utama R.

Akan dibuktikan dengan induksi matematik pada n.

1. Untuk n = 2.

Andaikan M modul berorde $w = p_1^{e_1} p_2^{e_2}$, dengan $(p_1^{e_1}, p_2^{e_2}) = 1$ dan $M_{p_i} = \{v \in M / p_i^{e_i} v = 0\}$ untuk i = 1,2.

Menurut teorema 4.2.5, M_{p_i} merupakan modul bagian M.

Akan ditunjukkan $M = M_{p_1} \oplus M_{p_2}$ dan ditunjukkan

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

$ann(M_{p_1})=\langle p_1^{e_1}\rangle$ dan $ann(M_{p_2})=\langle p_2^{e_2}\rangle$.

Faktor persekutuan terbesar dari $p_1^{e_1}$ dan $p_2^{e_2}$ adalah 1.

Menurut teorema 4.1.9, ada $a,b\in R$ sedemikian sehingga $(p_1^{e_1},p_2^{e_2}) = ap_1^{e_1}+bp_2^{e_2} = 1$.

Ambil $v \in M_{p_1}\cap M_{p_2}$.

Maka $v\in M_{p_1}$ dan $v\in M_{p_2}$, sehingga $p_1^{e_1}v=0$ dan $p_2^{e_2}v=0$, dan $v = 1v$

$$\begin{aligned} &= (ap_1^{e_1}+bp_2^{e_2})v \\ &= a(p_1^{e_1}v)+b(p_2^{e_2}v) \\ &= 0+0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Sehingga $M_{p_1}\cap M_{p_2} = \{0\}$ ....(1).

Ambil $v\in M$.

Maka $v = 1v = ap_1^{e_1}v+bp_2^{e_2}v$.

Karena $p_2^{e_2}(ap_1^{e_1}v) = p_2^{e_2}(p_1^{e_1}a)v = (p_2^{e_2}p_1^{e_1})av = w(av) = (wa)v = 0$, maka $ap_1^{e_1}v \in M_{p_2}$.

Karena $p_1^{e_1}(bp_2^{e_2}v) = p_1^{e_1}(p_2^{e_2}b)v = (p_1^{e_1}p_2^{e_2})bv = w(bv) = (wb)v = 0$, maka $bp_2^{e_2}v\in M_{p_1}$.

Oleh karena itu $v = ap_1^{e_1}v+bp_2^{e_2}v \in M_{p_2}+M_{p_1}$.

Sehingga $v \in M_{p_1}+M_{p_2}$ .... (2)

Dari (1) dan (2), terbukti $M = M_{p_1} \oplus M_{p_2}$ (menurut teorema 3.1.1).

Ambil $r\in ann(M_{p_1})$, maka $rM_{p_1}=\{0\}$ atau $rv_1=0$, untuk $v_1\in M_{p_1}$.

Ambil $v\in M$. Karena $M = M_{p_1}+M_{p_2}$, maka $v=v_1+v_2$ dengan

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

$v_1 \in M_{p_1}$, $v_2 \in M_{p_2}$.

Sehingga $(rp_2^{e_2})v = rp_2^{e_2}(v_1+v_2)$

$= rp_2^{e_2}v_1+rp_2^{e_2}v_2$

$= p_2^{e_2}(rv_1)+r(p_2^{e_2}v_2)$

$= 0$.

Maka $rp_2^{e_2} \in ann(M)$.

Karena w orde dari M, yaitu $ann(M) = \langle w \rangle$, maka $rp_2^{e_2} \in \langle w \rangle$.

Jadi $rp_2^{e_2} = mp_1^{e_1}p_2^{e_2}$, sehingga $r = mp_1^{e_1}$.

Maka $r \in \langle p_1^{e_1} \rangle$. Didapat $ann(M_{p_1}) \subseteq \langle p_1^{e_1} \rangle$. (3)

Ambil $r \in \langle p_1^{e_1} \rangle$, maka $r = mp_1^{e_1}$ untuk suatu $m \in R$.

$rM_{p_1} = \{rv_1 / v_1 \in M_{p_1}\} = \{(mp_1^{e_1})v / p_1^{e_1}v = 0\}$

$= \{m(p_1^{e_1}v) / p_1^{e_1}v = 0\} = \{0\}$

Maka $r \in ann(M_{p_1})$. Jadi $\langle p_1^{e_1} \rangle \subseteq ann(M_{p_1})$ (4)

Dari (3) dan (4) didapat $ann(M_{p_1}) = \langle p_1^{e_1} \rangle$.

Dengan cara yang sama akan didapat $ann(M_{p_2}) = \langle p_2^{e_2} \rangle$.

2. Andaikan teorema benar untuk n = k-1.

Yaitu : jika M modul dengan orde $g = p_1^{e_1}p_2^{e_2}\ldots p_{k-1}^{e_{k-1}}$ dengan $p_1, p_2, \ldots, p_{k-1}$ elemen-elemen prima yang berbeda, maka

$M = M_{p_1} \oplus M_{p_2} \oplus \ldots \oplus M_{p_{k-1}}$ dengan $ann(M_{p_i}) = \langle p_i^{e_i} \rangle$ untuk $i = 1, 2, \ldots, k-1$.

Akan ditunjukkan teorema benar untuk n=k.

Andaikan M modul dengan orde u =

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

$p_1^{e_1} p_2^{e_2} \dots p_{k-1}^{e_{k-1}} p_k^{e_k}$.

Maka $u = (p_1^{e_1} p_2^{e_2} \dots p_{k-1}^{e_{k-1}}) p_k^{e_k} = g p_k^{e_k}$.

Karena teorema berlaku untuk n=2, maka $M = M_g \oplus M_{p_k}$ dengan $ann(M_g) = \langle g \rangle$ dan $ann(M_{p_k}) = \langle p_k^{e_k} \rangle$.

Karena diandaikan teorema benar untuk n=k-1, maka $M_g = M_{p_1} \oplus M_{p_2} \oplus \dots \oplus M_{p_{k-1}}$ dengan $ann(M_{p_i}) = \langle p_i^{e_i} \rangle$ untuk $i=1,2,\dots,k-1$.

Sehingga $M = (M_{p_1} \oplus M_{p_2} \oplus \dots \oplus M_{p_{k-1}}) \oplus M_{p_k}$ dengan $ann(M_{p_i}) = \langle p_i^{e_i} \rangle$ untuk $i= 1,2,\dots,k-1,k$. ∎

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

BAB V

MODUL LEWAT DAERAH IDEAL UTAMA $\mathbb{Z}$

Pada bab ini akan diberikan contoh dari modul lewat daerah ideal utama $\mathbb{Z}$. Pada subbab pertama akan ditunjukkan bahwa setiap grup komutatif terhadap penjumlahan merupakan modul lewat daerah ideal utama $\mathbb{Z}$. Dan dalam subbab kedua dijelaskan contoh dari modul torsi yang dibangun secara berhingga lewat daerah ideal utama.

5.1. Grup Komutatif Terhadap Penjumlahan Adalah Modul Lewat Daerah Ideal Utama $\mathbb{Z}$

Karena $\mathbb{Z}$ mempunyai sifat komutatif, mempunyai elemen satuan dan tidak memuat pembagi nol, maka $\mathbb{Z}$ merupakan daerah integral. Dan karena untuk setiap ideal I dari $\mathbb{Z}$ adalah ideal utama, yaitu $I=\langle a\rangle$, untuk $a\in I$, maka $\mathbb{Z}$ adalah daerah ideal utama.

Setiap grup komutatif terhadap penjumlahan merupakan modul lewat daerah ideal utama $\mathbb{Z}$. Hal tersebut dapat dijelaskan sebagai berikut :

Diberikan grup komutatif G terhadap penjumlahan.

Untuk semua $a,b\in G$ dan $m,n\in\mathbb{Z}$ dipenuhi aksioma-aksioma dari

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

modul (menurut definisi 2.1.1) sebagai berikut :

$$\begin{aligned} m(a+b) &= (a+b)+(a+b)+\ldots+(a+b), \text{ sebanyak } m \text{ suku} \\ &= (a+a+\ldots+a)+(b+b+\ldots+b) \\ &= ma + mb \\ (m+n)a &= a+a+\ldots+a, \text{ sebanyak } m+n \text{ suku} \\ &= (a+a+\ldots+a)+(a+a+\ldots+a) \\ &= ma+na \\ (mn)a &= a+a+\ldots+a, \text{ sebanyak } mn \text{ suku} \\ &= na+na+\ldots+na, \text{ sebanyak } m \text{ suku} \\ &= m(na) \\ 1a &= a \end{aligned}$$

5.2. $\mathbb{Z}_n$ Merupakan Modul Torsi yang dibangun secara berhingga lewat Daerah Ideal Utama $\mathbb{Z}$

Definisi 5.2.1

Relasi ~ pada himpunan takkosong S disebut <u>relasi ekuivalensi</u> pada S jika memenuhi sifat-sifat berikut:

1. refleksif : $\forall a \in S$, $a \sim a$.
2. simetris : $\forall a, b \in S$, jika $a \sim b$, maka $b \sim a$.
3. transitif : $\forall a, b, c \in S$, jika $a \sim b$ dan $b \sim c$, maka $a \sim c$.

Jika ~ adalah relasi ekuivalensi dan $a \sim b$, maka dikatakan " a dan b ekuivalen ". □

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

Definisi 5.2.2

Diberikan $\sim$ relasi ekuivalensi pada himpunan S. Untuk $a \in S$, himpunan $[a] = \{x \in S / \ a \sim x\}$ disebut <u>klas ekuivalensi dari a</u>. □

Jika a dan b ekuivalen, maka $[a]=[b]$.

Pernyataan diatas dijelaskan sebagai berikut :

Diketahui a dan b ekuivalen dan ditulis $a \sim b$.

Ambil $x \in [a]$.

Maka $a \sim x$. Karena $\sim$ simetris, maka $b \sim a$.

Karena $\sim$ transitif, jika $b \sim a$ dan $a \sim x$ maka $b \sim x$.

Jadi $x \in [b]$. Sehingga $[a] \subseteq [b]$.........(1).

Ambil $y \in [b]$. Maka $b \sim y$.

Karena $\sim$ transitif, jika $a \sim b$ dan $b \sim y$ maka $a \sim y$.

Jadi $y \in [a]$. Sehingga $[b] \subseteq [a]$..........(2).

Terbukti $[a]=[b]$.

Definisi 5.2.4

Diberikan bilangan bulat positif n dan $a, b \in \mathbb{Z}$.

Dikatakan bahwa a dan b <u>kongruen modulo n</u> jika $n | (a-b)$. Dan ditulis sebagai $a \equiv b (\text{mod}. n)$. □

Teorema 5.2.1

Untuk setiap bilangan bulat positif n, kongruen modulo n adalah relasi ekuivalensi pada himpunan bilangan bulat.

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

Bukti :

1. Memenuhi sifat refleksif, yaitu :

   jika $a \in \mathbb{Z}$, maka $a-a=0$, untuk $0 \in \mathbb{Z}$.

   Karena $(a-a) = 0 = n0$, maka $n \mid (a-a)$.

   Sehingga $a \equiv a (\mathrm{mod}.n)$.

2. Memenuhi sifat simetris, yaitu :

   jika $a \equiv b(\mathrm{mod}.n)$, berarti $n \mid (a-b)$.

   Maka $n \mid (b-a)$, sehingga didapat $b \equiv a(\mathrm{mod}.n)$.

3. Memenuhi sifat transitif, yaitu :

   jika $a \equiv b(\mathrm{mod}.n)$ dan $b \equiv c(\mathrm{mod}.n)$, maka terdapat $n \mid (a-b)$ dan $n \mid (b-c)$.

   Padahal $n \mid [(a-b)+(b-c)] \Leftrightarrow n \mid (a-c)$.

   Berarti $a \equiv c(\mathrm{mod}.n)$. ■

Klas-klas ekuivalensi untuk relasi ekuivalensi pada teorema 5.2.1 disebut <u>klas-klas kongruen modulo n</u> dan didefinisikan untuk $u \in \mathbb{Z}$, $[u] = \{ v \in \mathbb{Z} / u \equiv v(\mathrm{mod}.n) \}$.

Berikut ini diberikan teorema algoritma pembagian pada $\mathbb{Z}$, yang tidak dibuktikan, tetapi akan digunakan untuk pembuktian teorema lain.

Teorema 5.2.2 (Algoritma Pembagian Pada Bilangan Bulat).

Jika m dan n adalah bilangan bulat dengan $n > 0$, maka terdapat dengan tunggal q dan r sedemikian sehingga

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

$m = nq + r$ dan $0 \le r < n$

dengan q disebut <u>faktor</u> dan r adalah <u>sisa</u> dari pembagian m oleh n. □

Teorema 5.2.3

Diberikan n bilangan bulat positif. Maka setiap bilangan bulat adalah kongruen modulo n terhadap salah satu dari bilangan-bilangan bulat 0, 1, 2, ..., n-1.

Bukti :

Jika a adalah bilangan bulat, maka menurut algoritma pembagian ada bilangan bulat q dan r sedemikian sehingga $a = nq + r$, $0 \le r < n$.

Karena $a - r = nq$, maka $n \mid (a-r)$ dan $a \equiv r (\mathrm{mod}.n)$ dengan $0 \le r < n$

Maka a adalah kongruen modulo n terhadap paling sedikit satu dari bilangan-bilangan bulat 0,1,2, ...,n-1.

Untuk menunjukkan r tunggal, diasumsikan $a \equiv s\ (\mathrm{mod}.n)$ dengan $0 \le s < n$. Maka $a - s = nl$ dan didapat $a = nl + s$. Menurut sifat ketunggalan dalam algoritma pembagian pada $\mathbb{Z}$, diperoleh $r = s$.

Terbukti a kongruen modulo n terhadap salah satu dari bilangan bulat 0,1,2,...,n-1. ■

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

Definisi 5.2.5

Diberikan $\mathbb{Z}_n$ melambangkan himpunan $\{[0], [1], [2], \ldots, [n-1]\}$.

Didefinisikan operasi $\oplus$ pada $\mathbb{Z}_n$ sebagai berikut

$[a] \oplus [b] = [a+b]$, untuk setiap $[a], [b] \in \mathbb{Z}_n$. $\square$

Akan ditunjukkan bahwa operasi $\oplus$ pada elemen-elemen $\mathbb{Z}_n$ well defined :

Ambil $[a_1], [a_2], [b_1], [b_2] \in \mathbb{Z}_n$ dengan $[a_1]=[a_2]$ dan $[b_1]=[b_2]$.

Akan ditunjukkan $[a_1+b_1]=[a_2+b_2]$.

Karena $[a_1]=[a_2]$, maka $a_1 \equiv a_2 (mod.n)$, sehingga $n|(a_1-a_2)$.

Karena $[b_1]=[b_2]$, maka $b_1 \equiv b_2 (mod.n)$, sehingga $n|(b_1-b_2)$.

Sehingga diperoleh

$n|((a_1-a_2)+(b_1-b_2)) \Leftrightarrow n|((a_1+b_1)-(a_2+b_2))$

Jadi $a_1+b_1 \equiv a_2+b_2$ (mod.n)

Terbukti $[a_1+b_1]=[a_2+b_2]$. $\blacksquare$

Telah diketahui dalam teori grup, $\mathbb{Z}_n$ adalah grup komutatif terhadap operasi $\oplus$.

Definisi 5.2.6

Diberikan grup komutatif G terhadap penjumlahan. Jika grup G memuat sebuah elemen a sedemikian sehingga $G=\{ka/k \in \mathbb{Z}\}$, maka G disebut <u>grup siklik</u> dan dikatakan G dibangun oleh a dan ditulis $G=\langle a \rangle$.

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

Grup bagian dari G berbentuk $<g>= \{mg/m\in\mathbb{Z}\}$ untuk suatu $g\in G$ disebut <u>grup bagian siklik</u>. □

Dalam teori grup dibuktikan bahwa setiap bagian dari suatu grup siklik G adalah grup siklik.

Definisi 5.2.7

Diberikan grup komutatif G terhadap penjumlahan.

1. Jika grup G mempunyai n elemen, dengan n adalah bilangan bulat positif, maka G dikatakan mempunyai <u>orde berhingga</u> (mempunyai orde n) dan disebut grup komutatif berhingga..
2. <u>Orde dari elemen a</u> dari grup G adalah orde dari grup bagian siklik dari G yang dibangun oleh a, yaitu bilangan bulat positif terkecil n sedemikian sehingga $na=0$. □

Teorema 5.2.4

Grup komutatif $\mathbb{Z}_n$ terhadap operasi $\oplus$ merupakan modul torsi yang dibangun secara berhingga lewat daerah ideal utama $\mathbb{Z}$.

Bukti :

Diberikan grup komutatif $\mathbb{Z}_n$ terhadap operasi $\oplus$.

Karena grup komutatif merupakan modul lewat $\mathbb{Z}$, maka $\mathbb{Z}_n$ adalah modul lewat $\mathbb{Z}$.

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

Karena $\mathbb{Z}_n$ adalah modul siklik, yaitu dibangun oleh $[1]$ dengan $[1] \in \mathbb{Z}_n$, maka $\mathbb{Z}_n$ dapat dikatakan dibangun secara berhingga.

Akan dibuktikan modul $\mathbb{Z}_n$ lewat $\mathbb{Z}$ adalah modul torsi.
Ambil $[a]\in\mathbb{Z}_n$. Ada $r\in\mathbb{Z}$, $r\neq0$, yaitu $r=n$ sedemikian sehingga $r[a] = n[a] = n(a[1]) = a(n[1]) = a[n] = [0]$. Jadi $[a] \in Tor(\mathbb{Z}_n)$.

Terbukti $\mathbb{Z}_n$ adalah modul torsi yang dibangun secara berhingga lewat $\mathbb{Z}$. ■

Dalam teori grup diketahui bahwa setiap grup siklik dengan orde n isomorfik dengan $\mathbb{Z}_n$.

Karena $\mathbb{Z}$ adalah daerah ideal utama dan menurut teorema 4.1.8 daerah ideal utama adalah daerah faktorisasi tunggal, maka $\mathbb{Z}$ adalah daerah faktorisasi tunggal. Dan dalam $\mathbb{Z}$, elemen prima dikenal sebagai bilangan prima.

Jadi setiap elemen taknol dan bukan unit dalam $\mathbb{Z}$ adalah hasilkali dari bilangan-bilangan prima.

Sehingga dapat disimpulkan :

Diberikan modul torsi $\mathbb{Z}_n$ yang dibangun secara berhingga lewat $\mathbb{Z}$ dengan orde $n = p_1^{e_1}p_2^{e_2}\ldots p_t^{e_t}$, dengan $p_1, p_2, \ldots, p_t$ adalah bilangan-bilangan prima dan $e_1, e_2, \ldots, e_t$ adalah bilangan-bilangan bulat positif.

Maka menurut teorema 4.2.6, diperoleh modul bagian primer yaitu $M_{p_i} = \{[m]\in\mathbb{Z}_n \ / \ p_i^{e_i}[m] = [0]\}$ yang berorde $p_i^{e_i}$.

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

Karena $\mathbb{Z}_n$ grup siklik, maka M_{p_i} adalah grup bagian siklik dengan orde $p_i^{e_i}$. Sehingga diperoleh $M_{p_i} \cong \mathbb{Z}_{p_i^{e_i}}$, untuk $i = 1,2,\ldots,t$.

Dan disimpulkan $\mathbb{Z}_n = M_{p_1} \oplus M_{p_2} \oplus \ldots \oplus M_{p_t}$ dengan $M_{p_i} \cong \mathbb{Z}_{p_i^{e_i}}$ untuk $i = 1,2,\ldots,t$.

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

BAB VI

KESIMPULAN

Berdasarkan uraian di atas, dapat ditarik beberapa kesimpulan sebagai berikut :

1. Jika diberikan modul M lewat ring komutatif R dengan elemen satuan, maka M modul bebas dengan rank n bila dan hanya bila $M \cong R^n$.

2. Suatu modul bagian N dari modul bebas M lewat ring komutatif R dengan elemen satuan tidak selalu merupakan modul bebas. Tetapi jika daerah operatornya adalah daerah ideal utama, maka modul bagian dari modul bebas juga merupakan modul bebas.

3. Modul torsi taknol M yang dibangun secara berhingga lewat daerah ideal utama R merupakan jumlahan langsung dari modul-modul bagian primer.

4. Teorema dekomposisi primer dapat diaplikasikan pada modul torsi $\mathbb{Z}_n$ lewat daerah ideal utama $\mathbb{Z}$:

   Modul torsi $\mathbb{Z}_n$ lewat $\mathbb{Z}$ mempunyai orde

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

$n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \ldots p_t^{e_t}$.

Maka $\mathbb{Z}_n = M_{p_1} \oplus M_{p_2} \oplus \ldots \oplus M_{p_t}$ dengan $M_{p_i} = \{[m] \in \mathbb{Z}_n \,/\, p_i^{e_i}[m] = [0]\}$ berorde $p_i^{e_i}$ dan $M_{p_i} \cong \mathbb{Z}_{p_i^{e_i}}$ untuk $i=1,2,\ldots,t$.

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

DAFTAR PUSTAKA

Arifin, Achmad. (1985). *Aljabar Linear*. Bandung: Penerbit ITB.

Bhattacharya, P.B., Jain, S.K. dan Nagpaul, S.R. (1994) *Basic Abstract Algebra* (2nd.ed.). Cambridge: Cambridge University.

Dummit, David S. dan Foote, Richard M. (1991). *Abstract Algebra*. New Jersey: Prentice-Hall.

Durbin, John R. (1985). *Modern Algebra* (2nd.ed.). New York: John Wiley & Sons.

Fraleigh, John B. (1989). *A First Course In Abstract Algebra* (4th.ed.). Reading, MA: Addison-Wesley Publishing Company.

Hartley, B. dan Hawkes, T.O. (1970). *Rings, Modules and Linear Algebra*. London : Chapman and Hall.

Jacobson, Nathan. (1974). *Basic Algebra I*. San Fransisco: W.H. Freeman And Company.

Lang, Serge. (1980). *Linear Algebra*. New York: Columbia University.

McCoy, Neal Henry. (1987). *Introduction to Modern Algebra* (4th ed.). Boston: Allyn and Bacon, Inc.

Pedersen, Franklin. (1993). *Modern Algebra : A Conceptual Approach*. Dubuque: Wm C. Brown Publ.

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

Pinter, Charles C. (1982). *A Book of Abstract Algebra*. New York: Mc. Graw-Hill Book Company.

Roman, Steven. (1992). *Advanced Linear Algebra*. New York: Springer-Verlag.

Sims, Charles C. (1984). *Abstract Algebra*. New York: John Wiley & Sons

Soehakso, Prof.Ir. (1976). *Aljabar Abstract (Aljabar Linear)*. Yogyakarta: FMIPA UGM.