RANTAI MARKOV

SKRIPSI

Diajukan Untuk Memenuhi Salah Satu Syarat
Memperoleh Gelar Sarjana Pendidikan
Program Studi Pendidikan Matematika

oleh :

Josef Trihandoko

NIM : 92 414 031

NIRM : 920052010501120027

PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA
JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA DAN IILMU PENGETAHUAN ALAM
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
UNIVERSITAS SANATA DHARMA
YOGYAKARTA

1997

SKRIPSI

RANTAI MARKOV

Oleh:

Josef Trihandoko

NIM: 92 414 031

NIRM: 920052010501120027

Telah Disetujui Oleh:

Pembimbing I

Drs. B. Susanta tanggal: ....

Pembimbing II

Ir. Ig. Aris Dwiatmoko, M. Sc tanggal: 2/9-1997

SKRIPSI

RANTAI MARKOV

Yang dipersiapkan dan disusun oleh

Josef Trihandoko
NIM : 92 414 031
NIRM : 920052010501120027

Telah dipertahankan di depan Panitia Penguji
pada tanggal : 28 Agustus 1997
dan dinyatakan telah memenuhi syarat

SUSUNAN PANITIA

	Nama lengkap	Tanda tangan
Ketua	: Drs. F. Kartika Budi, M. Pd	....
Sekretaris	: Dr. St. Suwarsono	....
Anggota	: Ir. Ig. Aris Dwiatmoko, M. Sc	....
	Drs. B. Susanta	....
	Dr. Y. Marpaung	....

Yogyakarta, ...1997
Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan
Universitas Sanata Dharma
Dekan FKIP

Dr. Paulus Suparno, S.J., MST

Kupersembahkan untuk
Bapak, Ibu, Widji, Mbak Titik,
Hastian, Iwan, Budi, dan
kekasihku Grace Triyani

KATA PENGANTAR

Syukur dan puji bagi Tuhan Yang Maha Kasih atas rahmat dan kasih-Nya sehingga skripsi yang berjudul Rantai Markov dapat terselesaikan.

Penyusunan skripsi ini dimaksudkan untuk memenuhi salah satu syarat memperoleh gelar Sarjana Pendidikan Program Studi Pendidikan Matematika di Jurusan Pendidikan Matematika Dan Ilmu Pengetahuan Alam Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Sanata Dharma Yogyakarta.

Pada kesempatan ini, penyusun ingin mengucapkan terima kasih kepada :

- Bapak Drs. B. Susanta, selaku pembimbing I yang telah membimbing dan memberikan masukan yang berharga.
- Bapak Ir. Ig. Aris Dwiatmoko, M.Sc selaku pembimbing II yang dengan teliti, sabar dan penuh pengertian membimbing dalam penyusunan skripsi ini.
- Bapak dan Ibu dosen yang telah membimbing dan mendidik penulis selama belajar di Universitas Sanata Dharma.
- Ibu Warni, Bapak Sunarjo dan Mas Sugeng yang dengan sabar membantu penyusun selama kuliah hingga menyelesaikan skripsi ini.

Akhirnya penulis menyadari, bahwa masih banyak kekurangan dan kelemahan dalam skripsi ini karenanya segala masukan dan saran yang membangun akan diterima dengan senang hati.

Penyusun

DAFTAR ISI

ABSTRAK

Sebuah model matematika yang banyak digunakan untuk memodelkan obyek dalam kehidupan nyata adalah model probabilistik. Pada tulisan ini akan dibahas sebuah model probabilistik yang disebut rantai Markov.

Peubah acak (X_t), $t \geq 0$, disebut suatu rantai Markov (homogen berhingga) untuk waktu diskret dengan ruang kedudukan S diskret berhingga, jika untuk semua $i_o, \ldots, i_t \in S$ dan t adalah variabel diskret, $P(X_{t+1} = i_{t+1} | X_t = i_t, \ldots, X_o = i_o) = P(X_{t+1} = i_{t+1} | X_t = i_t)$. Selama S diandaikan berhingga, rantai Markov yang dihasilkan adalah rantai Markov berhingga. Kehomogenan rantai Markov dinyatakan dengan kesamaan $P(X_{t+1} = i_{t+1} | X_t = i_t) = p_{i_t i_{t+1}}$ yang menyatakan bahwa rantai Markov tidak bergantung pada saat rantai mulai berlangsung.

Kedudukan i disebut kedudukan berulang jika rantai Markov kembali ke kedudukan i dalam langkah yang berhingga dengan probabilitas 1. Jika tidak demikian kedudukan tersebut disebut kedudukan transien. Sebuah kedudukan j disebut menyerap apabila pada kedudukan j tersebut rantai Markov berhenti, dicirikan dengan elemen pada baris ke j dan kolom ke j dari matriks transisinya yang bernilai 1. Suatu rantai Markov yang semua kedudukan berulangnya menyerap disebut rantai Markov menyerap.

Sifat-sifat rantai Markov menyerap dapat diterapkan pada bidang genetika, yaitu untuk menghitung probabilitas ketidakmunculan gen dominan A[atau resesif a] dan rata-rata banyaknya generasi sampai ketidakmunculan genotip heterozigot Aa.

ABSTRACT

Probabilistic model is the most popular mathematical model used to model the real life. Here, the writer would like to discuss a probabilistic model called a Markov chain.

A random variables (X_t), $t \geq 0$, is said to be a (homogeneous finite) discrete time Markov chain with state space S, if for all t, t is discrete variable and $i_o, \ldots, i_t \in S$, $P(X_{t+1} = i_{t+1} | X_t = i_t, \ldots, X_o = i_o) = P(X_{t+1} = i_{t+1} | X_t = i_t)$. Since the state space S is assumed to be finite, the Markov chain resulted is a finite Markov chain. The homogeneity of Markov chains is formulated by the equality $P(X_{t+1} = i_{t+1} | X_t = i_t) = p_{i_t i_{t+1}}$ which implies that the Markov chain does not depend on the time when the chain is starting to begin.

A state i is called recurrent state if the Markov chain returns to i with probability 1 in finite number of steps. Otherwise the state is called a transient state. A state j is called absorbing if in state j Markov chain stops, as noticed with entry at jth row and jth column from the transition matrix equals 1. When all of recurrent states are absorbing, a Markov chain is called an absorbing Markov chain.

The properties of an absorbing Markov chain is applicable for genetics, viz to count the probability of disappearence of the dominant gene A [or recessive gene a], and the mean number of generation until the disappearence of the heterozigous genotype Aa.

BAB I

PENDAHULUAN

Situasi fisik tertentu dalam kehidupan nyata sehari-hari dapat dianalisis lewat model matematikanya. Salah satu model matematika yang banyak digunakan untuk memodelkan obyek dalam kehidupan nyata adalah model probabilistik. Model probabilistik yang baik adalah model yang dapat mendekati keadaan sesungguhnya dari obyek yang dimodelkan (realistik). Sebuah konsep dalam probabilitas yang disebut dependensi dapat menciptakan model yang realistik tetapi di lain pihak dependensi menjadikan perhitungan probabilitas tidak masuk akal dan terbatas untuk dilakukan. Terdapat konsep lain yang disebut independensi yang membuat perhitungan probabilitas dalam model tersebut menjadi masuk akal, meskipun masih memiliki kelemahan yaitu model probabilistiknya menjadi tidak realistik lagi.

Tantangan yang muncul ketika membuat suatu model probabilistik yang baik adalah model tersebut harus memiliki dependensi yang menjamin realisasinya. Di samping itu model tersebut secara analitik mudah diselesaikan dengan matematika. Proses Markov membuat seimbang dua permintaan ini dengan apik. Proses Markov memiliki sifat bersyarat pada sejarah sampai saat ini, struktur probabilistik dari masa yang akan datang tidak bergantung pada seluruh sejarah tetapi hanya bergantung pada masa sekarang. Dependensi selanjutnya dapat dikendalikan selama proses bersyarat pada kedudukan sekarang, masa yang akan datang menjadi independen bersyarat terhadap masa yang lalu. Proses Markov dengan himpunan indeks diskret dan ruang kedudukan terbilang atau berhingga disebut rantai Markov.

Rantai Markov ini menarik perhatian dan minat penulis, karena banyak masalah dalam berbagai bidang dapat diselesaikan menggunakan Rantai Markov.

Rantai Markov adalah proses perubahan yang memiliki sifat bahwa sesuatu dapat diprediksi masa depannya secara lebih baik dari pengetahuan keadaaan sekarang dalam hubungannya dengan pengetahuan sekarang bersama-sama dengan seluruh pengetahuan lampau.

Ide rantai Markov di atas dapat digambarkan dengan teori mobilitas (model mobilitas sosial), yang didalamnya dibahas tentang mobilitas status sosial antar generasi. Masalah yang akan dibicarakan berkenaan dengan model ini adalah berapa besar status sosial ayah, kakek, buyut, dan generasi di atasnya mempengaruhi status sosial seorang anak. Dalam gambaran ini dibuat anggapan-anggapan : 1) hanya anak tertua yang diperhatikan 2) hanya garis keturunan pria yang diperhatikan. Dengan dua anggapan tersebut status generasi dalam masyarakat dibagi menjadi tiga kelas : kelas atas, kelas menengah, dan kelas bawah. Diandaikan pula perubahan keadaan sebuah keluarga di antara tiga kelas sosial tersebut adalah suatu proses perubahan (lebih ditentukan dengan hukum probabilistik daripada hukum deterministik). Proses yang independen menggambarkan secara sempurna mobilitas sosial tersebut. Dalam hal ini probabilitas bahwa seorang pria berada dalam kelas tertentu sama sekali tidak bergantung pada kelas ayahnya. Proses independen ini kurang realistik apabila dibandingkan dengan kenyataan yang ada di masyarakat. Proses yang lebih realistik dapat dinyatakan sebagai berikut : probabilitas bahwa seorang pria berada dalam kelas tertentu, bergantung pada kelas ayahnya, pada kelas kakeknya, pada kelas buyutnya dan seterusnya.

Rantai Markov adalah sebuah proses yang lebih rumit daripada kedua proses di atas : probabilitas bahwa seorang pria berada dalam sebuah kelas yang diberikan mungkin bergantung pada kelas ayahnya, tetapi probabilitas tersebut tidak bergantung pada kelas-kelas keturunan sebelum ayahnya. Sebagai contoh, diberikan sebuah kelas yang terdiri dari pria-pria kelas menengah. Probabilitas seorang ayah kelas atas mempunyai anak kelas menengah berbeda dengan probabilitas seorang ayah kelas menengah untuk mempunyai anak kelas menengah. Tetapi seorang ayah kelas atas yang ayahnya juga kelas atas harus memiliki probabilitas yang sama dengan seorang ayah kelas atas yang ayahnya kelas menengah untuk mempunyai anak kelas menengah.

Tidak ada proses-proses perubahan yang dijumpai dalam banyak penerapan benar-benar independen -khususnya, tidak ada masyarakat yang mobilitasnya sempurna—. Di lain pihak tidak ada proses-proses alamiah yang benar-benar memenuhi kondisi rantai Markov. Kebanyakan proses tersebut cukup memenuhi kondisi untuk dimodelkan dengan rantai Markov.

Konsep rantai Markov (dependensi Markov) diperkenalkan pada tahun 1907 oleh matematikawan Rusia Andrei Andreevich Markov (1856-1922) dalam sebuah makalah. Dalam rangkaian makalahnya, Markov mempelajari macam-macam sifat barisan-barisan peubah acak dependen yang karena jasanya barisan tersebut disebut rantai Markov berhingga. Tujuan Markov adalah memperumum sifat-sifat klasik barisan peubah acak independen ke barisan yang tidak memenuhi asumsi independensi. Meskipun demikian, perluasan sifat yang dipenuhi oleh peubah acak independen ini tidak semuanya masuk akal atau terbatas dalam kasus dependen.

Anggap suatu sistem (keluarga, masyarakat, pribadi, organisme) yang pada saat waktu diskret t = 0, 1, 2, ... berada pada salah satu dari kedudukan -kedudukan 0, ... , r (X_0, X_1, . . . ,X_r). Kedudukan sistem tersebut pada suatu saat (menit, jam, generasi) t dinotasikan dengan X_t. (kelas atas X_0, kelas menengah X_1, kelas bawah X_2 adalah kedudukan-kedudukan dalam gambaran di atas). Diandaikan pula bahwa perkembangan (evolusi) sistem tersebut probabilistik. Yang berarti sebagai pengganti pengetahuan tentang kedudukan-kedudukan yang berurutan X_0, X_1, . . . hanya diketahui probabilitas-probabilitas

$$P(X_o = i_o, \ldots, X_t = i_t)$$

untuk semua barisan berhingga kedudukan $i_o, \ldots i_t$.

Probabilitas bahwa kedudukan-kedudukan sistem yang bervariasi pada saat t+1 jika diketahui evolusi sistem sampai saat t dinyatakan dengan $P(X_{t+1} = i_{t+1} | X_t = i_t, \ldots, X_o = i_o)$. Probabilitas $P(X_{t+1} = i_{t+1} | X_t = i_t, \ldots, X_o = i_o)$ ini tidak bergantung pada $i_o, \ldots i_t$, dan sama dengan $P(X_{t+1} = i_{t+1})$; yaitu , pengetahuan dari masa lalu tidak memberi suatu informasi masa yang akan datang. Dalam kasus ini kesamaan di atas menghasilkan

$$P(X_o = i_o, \ldots, X_t = i_t) = P(X_o = i_o) \ldots P(X_t = i_t)$$

sebuah persamaan yang menunjukkan independensi (stokastik) kedudukan-kedudukan berurutan dari sistem tersebut.

Untuk mempelajari rantai Markov diperlukan pengetahuan dasar probabilitas. Konsep-konsep dasar probabilitas seperti ruang sampel, kejadian, kelas kejadian, fungsi probabilitas, ruang probabilitas, probabilitas bersyarat, independensi, peubah acak, dan vektor probabilitas akan dibahas pada Bab II.

Pada Bab III pertama-tama akan dibahas matriks stokastik. Selanjutnya akan dibahas sifat Markov yang meliputi rantai Markov, matriks probabilitas transisi dan persamaan Chapman-Kolmogorov. Rantai Markov yang dibahas pada Bab III dan seluruh bab dalam tulisan ini dibatasi pada rantai Markov homogen berhingga untuk waktu diskret ruang kedudukan diskret berhingga. Untuk selanjutnya rantai Markov homogen berhingga untuk waktu diskret ruang kedudukan diskret berhingga akan disebut rantai Markov. Sub bab ketiga akan membahas klasifikasi kedudukan rantai Markov. Sub bab keempat membahas periode rantai Markov, sifat-sifatnya, kedudukan berkala, kedudukan tidak berkala. Sub bab selanjutnya membahas waktu berhenti dan sifat Markov kuat. Akhirnya akan dibahas tentang perulangan dan transiensi.

Bab IV membahas rantai Markov menyerap. Sub bab pertama akan membahas matriks fundamental, dilanjutkan dengan penerapan matriks fundamental. Sub bab ketiga membahas tentang himpunan kedudukan terbuka.

Bab V akan membicarakan penerapan rantai Markov. Penerapaan rantai Markov banyak dijumpai dalam bidang ekonomi, psikologi, genetika. Dalam tulisan ini hanya akan dibicarakan contoh penerapan rantai Markov dalam bidang genetika.

Beberapa materi prasyarat yang diperlukan dalam pembahasan tulisan ini adalah teori himpunan, matriks, kalkulus dan logika matematika.

Metode penulisan yang digunakan dalam tulisan ini adalah metode studi pustaka.

Pada akhir tulisan ini akan diberikan beberapa kesimpulan yang berkaitan dengan pembahasan rantai Markov pada bab-bab sebelumnya.

BAB II

LANDASAN TEORI

Dalam bab II ini akan dibahas beberapa pengertian dasar yang perlu dikuasai untuk mempelajari bab-bab selanjutnya. Definisi-definisi, teorema-teorema dan beberapa contoh dalam bab II ini dibagi dalam 2 sub bab. Sub bab yang pertama akan membahas pengantar probabilitas, sedangkan sub bab yang kedua akan membahas vektor probabilitas.

2.1 Pengantar Probabilitas

2.1.1 Definisi Ruang Sampel dan Kejadian

DEFINISI 2.1.1. Percobaan. Suatu prosedur yang secara teoritis dapat diulang tak berhingga kali dan mempunyai hasil yang terdefinisi disebut percobaan.

CONTOH 2.1.1 : Perhatikan percobaan pelemparan sebuah dadu bersisi enam satu kali.

Hasil : {1, 2, 3, 4, 5, 6}.

DEFINISI 2.1.2. Ruang Sampel. Himpunan semua hasil yang mungkin dari suatu percobaan disebut ruang sampel dan dilambangkan dengan $\mathscr{S}$.

CONTOH 2.1.2 : Percobaan melempar sebuah dadu 1 kali.

Ruang sampelnya $\mathscr{S}$ = { 1, 2, 3, 4, 5, 6 }.

DEFINISI 2.1.3. Ruang Sampel Diskret. Jika ruang sampel ($\mathscr{S}$) berhingga atau tak hingga terbilang, maka $\mathscr{S}$ disebut ruang sampel diskret

Ruang sampel yang anggotanya tak hingga banyaknya dapat dinyatakan dalam bentuk pembangun himpunan. Misalnya percobaan menjatuhkan pensil pada bidang dengan ukuran A x B cm^2, bila kemungkinan hasil percobaan berupa himpunan posisi tempat pensil jatuh, maka ruang sampelnya dapat dituliskan sebagai berikut :

$$\mathscr{S} = \{(x,y) \mid (x,y) \in \mathbb{R}_2,\ 0 \leq x \leq A,\ 0 \leq y \leq B\}.$$

DEFINISI 2.1.4. Kejadian. Kejadian adalah suatu himpunan bagian dari ruang sampel.

Kejadian biasanya dilambangkan dengan huruf besar, misalnya A, B, C, dan seterusnya.

CONTOH 2.1.3 : Dari percobaan melemparkan sebuah dadu yang mempunyai ruang sampel $\mathscr{S}$ = {1,2,3,4,5,6}, dapat ditentukan beberapa kejadian.

* A = kejadian munculnya mata dadu genap.

  Maka kejadian tersebut dapat ditulis sebagai

  A = {2,4,6}.

* B = kejadian munculnya mata dadu prima.

$B = \{2,3,5\}$.

DEFINISI 2.1.5. Kejadian Sederhana dan Majemuk. Bila suatu kejadian dapat dinyatakan sebagai himpunan yang terdiri dari satu titik sampel, maka kejadian itu disebut kejadian sederhana. Sedangkan kejadian majemuk adalah kejadian yang dapat dinyatakan sebagai gabungan beberapa kejadian sederhana.

CONTOH 2.1.4 : Kejadian terambilnya kartu hati berwarna merah dari seperangkat (52 helai) kartu bridge dapat dinyatakan sebagai A = {hati} yang merupakan himpunan bagian dari ruang sampel $\mathcal{S}$ = {hati,sekop,keriting, wajik}. Jadi A adalah kejadian sederhana. Kejadian B yaitu terambilnya kartu merah merupakan kejadian majemuk, karena B = {hati ∪ wajik} = {hati,wajik}.

DEFINISI 2.1.6. Kejadian Mustahil. Kejadian mustahil adalah himpunan bagian ruang sampel yang tidak mengandung satu pun anggota.
Kejadian ini diberi lambang khusus $\emptyset$, sedangkan $\mathcal{S}$ disebut kejadian yang pasti terjadi.

CONTOH 2.1.5 : Dalam contoh 2.1.3. Misalnya C adalah kejadian munculnya mata dadu 7, maka kejadian tersebut dapat ditulis sebagai : $C = \emptyset$.

DEFINISI 2.1.7. Pengolahan Kejadian. Diberikan kejadian $A, B \subset \mathscr{S}$, maka :

(a) $A \cup B$ = Kejadian yang akan terjadi apabila A terjadi atau B terjadi atau kedua-duanya.

(b) $A \cap B$ = Kejadian yang akan terjadi apabila A terjadi dan B terjadi.

(c) A^c = Kejadian yang terjadi apabila A tidak terjadi.

CONTOH 2.1.6 : Diberikan $\mathscr{S} = \{ 1,2,3,4,5,6 \}$ sebagai ruang sampel pelemparan satu dadu satu kali.

A = Kejadian munculnya mata dadu ganjil

B = Kejadian munculnya mata dadu genap

* $A \cup B$ = Kejadian muncul mata dadu ganjil atau genap

$A \cup B = \{ 1,3,5 \} \cup \{ 2,4,6 \}$

$= \{ 1,2,3,4,5,6 \} = \mathscr{S}$

* $A \cap B$ = Kejadian muncul mata dadu ganjil dan genap

$A \cap B = \{ 1,3,5 \} \cap \{ 2,4,6 \}$

$= \emptyset$

* A^c = Kejadian tidak muncul mata dadu ganjil

$= \{ 1,3,5 \}^c$

$= \{ 2,4,6 \}$ = muncul mata dadu genap

DEFINISI 2.1.8. Kelas Kejadian. Kelas kejadian ($\mathfrak{U}$) adalah keluarga himpunan tak kosong yang anggota-anggotanya adalah himpunan bagian dari $\mathscr{S}$ yang memenuhi aksioma-aksioma :

i) $\forall A,\ A \in \mathfrak{U} \Rightarrow A^c \in \mathfrak{U}$ (tertutup terhadap komplemen)

ii) $A_j \in \mathfrak{U}$, $j = 1, 2, \ldots \Rightarrow \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathfrak{U}$

(tertutup terhadap gabungan)

Dari kedua aksioma tersebut dapat diturunkan bahwa :

a. $\mathscr{S} \in \mathfrak{U}$.

b. $\emptyset \in \mathfrak{U}$.

c. $A_j \in \mathfrak{U}$, $j = 1, 2, \ldots \Rightarrow \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathfrak{U}$.

<u>Bukti</u> :

a. Karena $\mathfrak{U} \neq \emptyset$, maka $\exists A,\ A \in \mathfrak{U}$

berdasarkan aksioma (i) maka $A^c \in \mathfrak{U}$

Jadi A dan $A^c \in \mathfrak{U}$.

Berdasarkan aksioma (ii) $A \cup A^c \in \mathfrak{U}$

Karena $A \cup A^c = \mathscr{S}$

Maka jelas bahwa $\mathscr{S} \in \mathfrak{U}$. ∎

b. Dari bukti a di atas ternyata $\mathscr{S} \in \mathfrak{U}$

Berdasarkan aksioma (i) maka,

$$\mathscr{S}^c \in \mathfrak{U} \Leftrightarrow \emptyset \in \mathfrak{U}$$

Terbukti $\emptyset \in \mathfrak{U}$. ∎

c. Diketahui $A_j \in \mathfrak{U}$, $j = 1, 2, \ldots$

Maka menurut aksioma (i) $(A_j)^c \in \mathfrak{U}$, $j = 1, 2, \ldots$.

Dari aksioma (ii) didapat $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j^c \in \mathfrak{U}$.

Tetapi menurut hukum De Morgan, $\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j = \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j^c\right)^c$

Menurut aksioma (i)

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j^c \in \mathfrak{U} \Rightarrow \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j^c\right)^c = \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathfrak{U}. \qquad \blacksquare$$

2.1.2 Definisi Probabilitas

DEFINISI 2.1.9. Fungsi Probabilitas. Fungsi probabilitas $P(\cdot)$ adalah sebuah fungsi dengan domain $\mathfrak{U}$ dan kodomain interval $[0,1]$ yang memenuhi aksioma-aksioma berikut :

(i) $P(A) \geq 0$, $\forall$ $A \in \mathfrak{U}$.

(ii) $P(\mathscr{S}) = 1$.

(iii) Jika $A_1, A_2, \ldots$ adalah kejadian-kejadian yang saling asing dalam $\mathfrak{U}$ (yaitu $A_i \cap A_j = \emptyset$ untuk $i \neq j$, $i, j = 1,2,\ldots$) dan jika $A_1 \cup A_2 \cup \ldots = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathfrak{U}$, maka $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$.

$P(A)$ dibaca "probabilitas kejadian A" atau "probabilitas bahwa kejadian A terjadi".

Sifat-sifat $P(\cdot)$

Untuk setiap teorema berikut, diandaikan bahwa $\mathscr{S}$ dan $\mathfrak{U}$ diberikan dan $P(\cdot)$ adalah fungsi probabilitas yang mempunyai domain $\mathfrak{U}$.

TEOREMA 2.1.1. $P(\emptyset) = 0$

<u>Bukti</u> : $A \cap \emptyset = \emptyset$ dan $A \cup \emptyset = A$

A dan $\emptyset$ adalah dua kejadian yang saling asing.

Maka,

$$P(A \cup \emptyset) = P(A) + P(\emptyset)$$

$$P(A) = P(A) + P(\emptyset)$$

$$P(\emptyset) = P(A) - P(A) = 0. \qquad \blacksquare$$

TEOREMA 2.1.2. Jika A_1, A_2, ... ,A_n kejadian-kejadian yang saling asing dalam $\mathcal{U}$ maka

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

<u>**Bukti**</u> : Andaikan $A_{n+1} = \emptyset$, $A_{n+2} = \emptyset$, ...; maka,

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{U} ,$$

dan

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i). \qquad \blacksquare$$

TEOREMA 2.1.3. Jika A^c adalah komplemen kejadian A maka $P(A^c) = 1 - P(A)$.

<u>**Bukti**</u> : $A \cap A^c = \emptyset$ $\qquad A \cup A^c = S$

$$P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c)$$

$$P(S) = P(A) + P(A^c)$$

$$1 = P(A) + P(A^c)$$

$$P(A^c) = 1 - P(A). \qquad \blacksquare$$

CONTOH 2.1.7. : Sekeping uang logam dilemparkan 6 kali berturut-turut. Berapa peluang sekurang-kurangnya sisi muka muncul 1 kali ?.

Jawab : Misalkan E adalah kejadian sekurang-kurangnya sisi muka muncul 1 kali. Ruang sampel $\mathscr{S}$ mempunyai $2^6 = 64$ titik sampel, karena setiap pelemparan menghasilkan 2 kemungkinan .

$P(E) = 1 - P(E^c)$.

E^c adalah kejadian bahwa sisi muka tidak muncul sama sekali atau terjadi bila semua pelemparan menghasilkan sisi belakang.

Jadi, $P(E^c) = \frac{1}{64}$.

Jadi $P(E) = 1 - P(E^c) = 1 - \frac{1}{64}$

$= \frac{63}{64}$.

TEOREMA 2.1.4. Jika A dan B suatu kejadian maka $P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B)$.

Bukti :

$$(A \cap B) \cap (A \cap B^c) = (A \cap B \cap A) \cap (A \cap B \cap B^c)$$
$$= (A \cap B) \cap \emptyset$$
$$= \emptyset \ .$$

Berarti $(A \cap B)$ dan $(A \cap B^c)$ saling asing dan karena $(A \cap B) \cup (A \cap B^c) = A$.

Maka,

$P[(A \cap B) \cup (A \cap B^c)] = P(A)$

$$P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B). \qquad \blacksquare$$

TEOREMA 2.1.5. Jika A dan B adalah dua kejadian maka $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Bukti : $A \cup B = (A \cap B^c) \cup B$

$P(A \cup B) = P[(A \cap B^c) \cup (B)]$

Karena $(A \cap B^c) \cap B = \emptyset$,

maka,

$P(A \cup B) = P(A \cap B^c) + P(B)$.

Dari teorema 2.1.4 diperoleh,

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. ∎

TEOREMA 2.1.6 Jika $A \subset B$ maka $P(A) \leq P(B)$.

Bukti :

Karena $A \subset B$ maka $B = A \cup (A^c \cap B)$ ... (1)

dan $A \cap (A^c \cap B) = \emptyset$ ... (2)

Dari (1)

$P(B) = P(A \cup (A^c \cap B))$

Karena (2), maka

$$P(B) = \underbrace{P(A)}_{\geq 0} + \underbrace{P(A^c \cap B)}_{\geq 0}$$

Karena $P(A^c \cap B) \geq 0$

maka $P(A) \leq P(B)$. ∎

TEOREMA 2.1.7 **Pertidaksamaan Boole.** Jika $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathfrak{U}$ maka

$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) \leq P(A_1) + P(A_2) + \ldots P(A_n)$.

<u>Bukti</u> : Akan dibuktikan dengan induksi matematika

<u>Pangkal</u> : Untuk n = 1 teorema tersebut benar

$$A_1 \in \mathfrak{U} \Rightarrow P(A_1) = P(A_1) \qquad \text{trivial}$$

Untuk n = 2 teorema tersebut benar

$$A_1, A_2 \in \mathfrak{U} \Rightarrow P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$$
$$\leq P(A_1) + P(A_2)$$

<u>Langkah</u> : Andaikan teorema itu benar untuk n = k.

Akan dibuktikan benar untuk n = k + 1

$$A_1, A_2, \ldots, A_k, A_{k+1} \in \mathfrak{U}$$

$$\bigcup_{j=1}^{k+1} A_j = \bigcup_{j=1}^{k} A_j \cup A_{k+1}$$

$$P\left(\bigcup_{j=1}^{k+1} A_j\right) = P\left(\bigcup_{j=1}^{k} A_j \cup A_{k+1}\right)$$
$$= P\left(\bigcup_{j=1}^{k} A_j\right) + P(A_{k+1})$$
$$\leq \sum_{j=1}^{k} P(A_j) + P(A_{k+1})$$
$$\leq \sum_{j=1}^{k+1} P(A_j) \qquad \blacksquare$$

DEFINISI 2.1.10. Ruang Probabilitas. Ruang probabilitas adalah triplet (tigaan) $\{\mathscr{S}, \mathfrak{U}, P(\cdot)\}$ di mana $\mathscr{S}$ adalah ruang sampel. $\mathfrak{U}$ adalah kelas kejadian, dan $P(\cdot)$ adalah fungsi probabilitas dengan domain $\mathfrak{U}$.

Tiga komponen dari ruang probabilitas di atas saling berhubungan : $\mathfrak{U}$ adalah kelas kejadian dari $\mathscr{S}$, sedangkan

$P(\cdot)$ adalah fungsi yang memiliki $\mathfrak{U}$ sebagai domainnya.

2.1.3 Probabilitas Bersyarat dan Independensi

Dalam penerapan teori probabilitas pada masalah-masalah praktis, tidak jarang terjadi seseorang yang melakukan percobaan berhadapan dengan situasi berikut: menentukan berapa probabilitas bahwa kejadian yang lain akan terjadi jika suatu kejadian terjadi.

Perhatikan contoh berikut, dalam percobaan pencatatan lama hidup bola lampu, seseorang tertarik pada probabilitas bola lampu yang akan mati setelah 100 jam, jika diketahui bola lampu sebelumnya mati setelah 24 jam. Atau percobaan pengambilan hambatan dari sebuah kotak yang berisi 100 hambatan dengan 5 diantaranya rusak, berapa probabilitas bahwa pada pengambilan ketiga terambil hambatan rusak jika diketahui dua pengambilan sebelumnya terambil hambatan rusak ?.

Pertanyaan-pertanyaan probabilitas demikian dibahas dalam kerangka probabilitas bersyarat.

Probabilitas bersyarat

Diberikan dua kejadian A dan B, akan didefinisikan probabilitas bersyarat kejadian A bila diketahui kejadian B terjadi.

DEFINISI 2.1.11. Probabilitas bersyarat. Diberikan ruang probabilitas $\{\mathcal{S},\mathfrak{U},P(\cdot)\}$. Andaikan A dan B dua kejadian dalam $\mathfrak{U}$. Probabilitas bersyarat A jika diketahui B terjadi, ditulis dengan $P(A|B)$, didefinisikan sebagai :

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \text{jika } P(B) > 0.$$

CONTOH 2.1.8 : Sepasang dadu bersisi 6 dilemparkan sekali. Jika jumlah mata dadu yang muncul sama dengan 6 berapa probabilitas bahwa salah satu dadu muncul angka (sisi) 2 ?.

Jawab : $\mathscr{S} = \{(1.1),(1,2),\ldots,(1,6), \ldots ,(6,1), 6,2), \ldots \quad (6,6)\}$.

B = Kejadian jumlah mata dadu sama dengan 6.

$B = \{(1,5),(2,4),(3.3),(4,2),(5,1)\}$.

$$P(B) = \frac{5}{36}$$

A = Kejadian salah satu dadu muncul angka 2.

$A \cap B = \{(2,4),(4,2)\}$.

$$P(A \cap B) = \frac{2}{36} .$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{2/36}{5/36} = \frac{2}{5} .$$

Independensi Kejadian

Jika $P(A|B)$ tidak tergantung pada kejadian B, yaitu $P(A|B) = P(A)$, maka dapat dikatakan bahwa kejadian A independen dari kejadian B.

DEFINISI 2.1.12. Kejadian Independen. Diberikan ruang probabilitas $\{\mathscr{S},\mathfrak{U},P(\cdot)\}$, Andaikan A dan B dua kejadian dalam $\mathcal{U}$. Kejadian A dan B dikatakan independen bila dan hanya bila $P(A \cap B) = P(A).P(B)$.

CONTOH 2.1.9 : Sebuah uang logam dilemparkan tiga kali dan dicatat kejadian-kejadian berikut :

Kejadian A = kejadian munculnya sisi angka pada pelemparan I.

Kejadian B = kejadian munculnya sisi angka pada pelemparan II.

Kejadian C = kejadian munculnya tepat dua sisi angka berturutan.

Manakah dari tiga kejadian tersebut yang saling independen ?.

<u>Jawab</u> :

$\mathcal{S}$ = { AAA, AAG, GAA, AGG, AGA, GAG, GGA, GGG }.

A = { AAA, AAG, AGG, AGA }.

B = { AAA, AAG, GAA, GAG }.

C = { AAG, GAA }.

$A \cap B$ = { AAA, AAG }.

$A \cap C$ = { AAG }.

$B \cap C$ = { AAG, GAA }.

$P(A) = 1/2$, $P(B) = 1/2$, $P(C) = 1/4$.

$P(A \cap B) = 1/4$, $P(A \cap C) = 1/8$, $P(B \cap C) = 1/4$.

* $P(A \cap B) = P(A) \,.\, P(B)$.

$1/4 = 1/2 \,.\, 1/2$.

$1/4 = 1/4$.

A dan B independen.

* $P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C)$.

$1/8 = 1/2 \cdot 1/4$.

$1/8 = 1/8$

A dan C independen.

* $P(B \cap C) \neq P(B) \cdot P(C)$.

$1/4 \neq 1/2 \cdot 1/4$.

$1/4 \neq 1/8$.

B dan C tidak independen atau B dan C dependen.

Definisi tentang independensi 2 kejadian dapat diperluas menjadi independensi lebih dari 2 kejadian.

DEFINISI 2.1.13. Independensi Beberapa Kejadian. Diberikan ruang probabilitas $\{\mathscr{S}, \mathfrak{U}, P(\cdot)\}$. Andaikan $A_1, A_2, \ldots, A_n$ adalah n kejadian dalam $\mathfrak{U}$. Kejadian $A_1, A_2, \ldots, A_n$ dikatakan independen bila dan hanya bila :

$$P(A_i \cap A_j) = P(A_i)\,P(A_j) \qquad \text{untuk } i \neq j$$

$$P(A_i \cap A_j \cap A_k) = P(A_i)\,P(A_j)\,P(A_k) \text{ untuk } i\neq j, j\neq k, i\neq k$$

$$\vdots$$

$$P\Big(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\Big) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i).$$

2.1.4. Peubah Acak

DEFINISI 2.1.14. Peubah Acak. Diberikan ruang probabilitas $\{\mathscr{S}, \mathfrak{U}, P(\cdot)\}$. Peubah acak, ditulis X atau $X(\cdot)$, adalah fungsi dengan domain $\mathscr{S}$ dan kodomain himpunan bilangan real. Fungsi $X(\cdot)$ harus sedemikian sehingga himpunan A_r, yang didefinisikan dengan $A_r = \{\omega : X(\omega) \leq r\} \in \mathfrak{U}$ untuk setiap bilangan real r.

CONTOH 2.1.10 : Misalkan percobaan melempar sekeping mata uang. Andaikan peubah acak X menyatakan banyaknya sisi muka. $\mathscr{S}$ = {sisi muka,sisi belakang} dan $X(\omega) = 1$ jika ω = sisi muka dan $X(\omega) = 0$ jika ω = sisi belakang, maka peubah acak X mengawankan sebuah bilangan real dengan setiap hasil percobaan. X disebut peubah acak dan dapat ditunjukkan bahwa X memenuhi definisi peubah acak di atas, yaitu harus ditunjukkan bahwa $\{\omega : X(\omega) \leq r\} \in \mathfrak{U}$ untuk setiap bilangan real r. $\mathfrak{U}$ terdiri dari 4 himpunan bagian ; $\emptyset$, {sisi muka}, {sisi belakang}, dan $\mathscr{S}$.

Jika $r < 0$, $\{\omega : X(\omega) \leq r\} = \emptyset$; dan jika $0 \leq r < 1$, $\{\omega : X(\omega) \leq r\}$ = {sisi belakang}; dan jika $r \geq 1$, $\{\omega : X(\omega) \leq r\} = \mathscr{S}$ = {sisi muka,sisi belakang}.

Jadi untuk setiap r, himpunan $\{\omega : X(\omega) \leq r\} \in \mathfrak{U}$. Jadi X adalah peubah acak.

DEFINISI 2.1.15. Fungsi Sebaran Kumulatif. Fungsi sebaran kumulatif dari peubah acak X , ditulis dengan $F_X(\cdot)$, didefinisikan sebagai fungsi dengan domain himpunan bilangan real dan kodomain selang [0,1] yang memenuhi $F_X(x) = P(X \leq x) = P[\{\omega : X(\omega) \leq r\}]$ untuk setiap bilangan real x.

DEFINISI 2.1.16. Peubah Acak Diskret. Suatu peubah acak yang nilai-nilai berbedanya merupakan suatu himpunan berhingga atau terbilang dari $x_1, x_2, \ldots$ disebut peubah acak diskret.

DEFINISI 2.1.17. Fungsi Probabilitas Diskret. Jika X adalah suatu peubah acak diskret dengan nilai-nilai berbeda $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, maka suatu fungsi ditulis dengan $f_X(\cdot)$ dan didefinisikan dengan

$$f_X(x_j) = \begin{cases} P(x = x_j), & \text{jika } x = x_j; j = 1,2,\ldots,n,\ldots . \\ 0 & , \text{jika } x \neq x_j \end{cases}$$

disebut fungsi probabilitas diskret dari X.

DEFINISI 2.1.18. Peubah Acak Kontinu. Suatu peubah acak disebut peubah acak kontinu bila terdapat fungsi $f_X(\cdot)$ sedemikian hingga

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)du \text{ untuk setiap bilangan real } x.$$

$f_X(\cdot)$ disebut fungsi densitas kontinu.

2.1.5. Independensi Peubah Acak

DEFINISI 2.1.19. Fungsi Sebaran Kumulatif Bersama. Andaikan $X_1, X_2, \ldots, X_k$ adalah k peubah acak yang kesemuanya didefinisikan pada ruang probabilitas yang sama $\{\mathcal{S}, \mathfrak{U}, P(\cdot)\}$. Fungsi sebaran kumulatif bersama dari $X_1, X_2, \ldots, X_k$, ditulis dengan $F_{X_1, \ldots, X_k}(\cdot, \ldots, \cdot)$ didefinisikan sebagai $P(X_1 \leq x_1; \ldots; X_k \leq x_k)$ untuk semua $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$.

DEFINISI 2.1.20. Peubah Acak Berdimensi-k. Jika $X_1, X_2, \ldots, X_k$ adalah peubah acak yang didefinisikan pada ruang probabilitas yang sama maka $(X_1, X_2, \ldots, X_k)$ disebut peubah acak berdimensi-k.

DEFINISI 2.1.21. Independensi. Andaikan $(X_1, X_2, \ldots, X_k)$ adalah peubah acak berdimensi-k, $X_1, X_2, \ldots, X_k$ disebut independen bila dan hanya bila

$$F_{X_1, \ldots, X_k}(X_1, \ldots, X_k) = \prod_{i=1}^{k} F_{X_i}(x_i)$$

untuk setiap $x_1, x_2, \ldots, x_k$.

DEFINISI 2.1.22. Nilai Harapan Peubah Acak. Jika X adalah peubah acak dan g adalah suatu fungsi, maka Y = g(X) adalah juga suatu peubah acak. Jika X adalah peubah acak diskret dengan nilai-nilai x_1, x_2, ... , maka nilai harapan dari g(X) disajikan dengan

$$E\left[g(X)\right] = \sum_{i=1}^{\infty} g(x_i) \; P\{X = x_i\}$$

DEFINISI 2.1.23. Nilai Harapan Bersyarat Peubah Acak. Andaikan X dan Y adalah sebaran peubah acak kontinu bersama, fungsi densitas bersyarat $f_{X|Y}(x|y)$ dari X diberikan Y = y didefinisikan sebagai

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{d}{dx} F_{X|Y}(x|y)$$

$$= \begin{cases} \dfrac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)}, & \text{jika } f_Y(y) > 0 \\ \text{suatu fungsi densitas probabilitas sebarang,} & \text{jika } f_Y(y) = 0 \end{cases}$$

Andaikan g suatu fungsi di mana nilai harapan dari g(X) berhingga. Nilai harapan bersyarat dari g(X) diberikan Y = y dinyatakan dengan bentuk

$$E\left[g(X)|Y = y\right] = \int_x g(X)\, dF_{X|Y}(x|y)$$

Jika X dan Y adalah sebaran peubah-peubah acak diskret bersama, dengan nilai-nilai x_1, x_2, ... , maka

$$E\left[g(X)|Y = y\right] = \sum_{i=1}^{\infty} g(x_i)\, P\left[X = x_i | Y = y\right]$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{\infty} g(x_i)\, P\{X = x_i | Y = y\}}{P\{Y = y\}},$$

jika P(Y = y) > 0

2.2. Vektor Probabilitas

DEFINISI 2.2.1.

i) Vektor dimensi n adalah n bilangan real terurut.

ii) Masing-masing bilangan real penyusun vektor itu disebut komponen dari vektor tersebut.

CONTOH 2.2.1 : (3,2,7,8,-1) adalah vektor dimensi lima, yang komponennya berturut-turut adalah 3, 2, 7, 8, dan -1.

DEFINISI 2.2.2. Vektor probabilitas. Suatu vektor $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ disebut vektor probabilitas jika : $u_i \geq 0$, untuk $i = 1,2,3,\ldots,n$, dan $u_1+u_2+\ldots+u_n = 1$.

CONTOH 2.2.2 : (1,0,0),(1/4,1/8,1/8,1/2),(0,2/3,0,1/3, 0,0), yang masing-masing adalah vektor probabilitas.

BAB III

RANTAI MARKOV

3.1 Matriks Stokastik

DEFINISI 3.1.1. Matriks Stokastik. Suatu matriks tidak negatif disebut stokastik bila dan hanya bila jumlah elemen setiap barisnya sama dengan 1.

Setiap baris matriks stokastik disebut juga vektor probabilitas.

CONTOH 3.1.1 : Jika $A = \begin{bmatrix} 1/4 & 3/4 \\ 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$, maka A disebut matriks stokastik.

DEFINISI 3.1.2. Matriks Stokastik Ganda. Suatu matriks stokastik disebut matriks stokastik ganda bila dan hanya bila jumlah elemen setiap kolomnya sama dengan 1.

Dalam matriks stokastik ganda baik baris dan kolomnya adalah vektor probabilitas.

CONTOH 3.1.2 : Jika $B = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 0 & 3/4 \end{bmatrix}$, maka B disebut matriks stokastik ganda.

Definisi dan contoh di atas menunjukkan bahwa konsep matriks stokastik tidak terbatas hanya pada matriks bujursangkar, tetapi kata "stokastik" dalam tulisan ini selalu bersangkut-paut dengan matriks bujursangkar.

Lambang **P** akan digunakan untuk menuliskan matriks stokastik.

3.2. Sifat Markov

Seringkali pengamatan-pengamatan dicatat dalam sebuah barisan secara kronologis, misalnya kebijaksanaan populasi tahunan suatu negara. Bila pengamatan-pengamatan di atas diandaikan independen maka pengamatan demikian seringkali kurang sesuai lagi dengan kenyataan yang ada. Konsep independensi secara teoritik membuat perhitungan probabilitas dapat dilakukan dengan tepat. Tetapi konsep ini secara praktek sulit untuk dipenuhi karena banyak pengamatan yang pada kenyataannya bergantung satu dengan yang lain. Oleh karena itu diperlukan konsep lain yang membuat pengamatan sesuai dengan kenyataan yang sesungguhnya. Konsep ini disebut dependensi. Tulisan ini membahas sebuah bentuk dependensi yang disebut rantai Markov.

Rantai Markov dalam tulisan ini dibentuk dari tiga komponen dasar, yaitu :

1. Himpunan berhingga S yang elemen-elemennya disebut kedudukan.
2. Sebaran probabilitas $p = p_i$, $i \in S$, yang komponen-

komponennya disebut probabilitas awal.

3. Matriks stokastik $P = \| p_{ij} \|$, $i,j \in S$ elemen-elemennya disebut probabilitas transisi, karena itu :

$$p_i \geq 0,\ i \in S,\ \sum_{i \in S} p_i = 1$$

$$p_{ij} \geq 0,\ i,j \in S,\ \sum_{j \in S} p_{ij} = 1,\ i \in S$$

DEFINISI 3.2.1 Rantai Markov. Peubah acak (X_t), $t \geq 0$, disebut suatu rantai Markov (homogen berhingga) dengan ruang kedudukan S, sebaran probabilitas awal **p** dan matriks transisi P, bila dan hanya bila

(i) $P(X_{t+1} = i_{t+1} | X_o = i_o, \ldots, X_t = i_t)$

$= P(X_{t+1} = i_{t+1} | X_t = i_t)$.

(ii) $P(X_{t+1} = i_{t+1} | X_t = i_t) = p_{i_t i_{t+1}}$.

(iii) $P(X_o = i) = p_i$, $i \in S$

untuk semua $t \geq 0$ dan $i_o, \ldots, i_{t+1} \in S$

Kesamaan (i) dikenal sebagai sifat Markov. Jika ruang kedudukan S diasumsikan berhingga, maka akan didapat rantai Markov berhingga. Kehomogenan rantai Markov disajikan dengan kesamaan (ii) yang tidak bergantung pada t. Hanya rantai Markov homogen dan berhingga yang diperhatikan pada pembahasan mengenai rantai Markov untuk waktu diskret ruang kedudukan diskret berhingga selanjutnya.

Seperti pada kesamaan (ii) dari definisi rantai

Markov di atas, jika $P(X_{t+1} = i_{t+1} | X_t = i_t)$ hanya bergantung pada (i_t, i_{t+1}) dan tidak bergantung pada t, probabilitas transisi dari rantai Markov tersebut dikatakan *stasioner*. Probabilitas transisinya dapat ditulis dengan $p_{i_t \, i_{t+1}}$. Pada kasus di atas

$$P(X_{t+1} = j | X_t = i) = p_{i_t \, i_{t+1}} \qquad (i,j \in S)$$

menyatakan *probabilitas transisi satu-langkah.*

DEFINISI 3.2.2. Matriks Probabilitas Transisi.

(i) Jika ruang kedudukan (S) suatu rantai Markov terdiri atas r elemen maka dikatakan bahwa rantai Markov itu mempunyai r kedudukan.

(ii) Jika suatu rantai Markov mempunyai r kedudukan maka matriks

$$P = \begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} & \cdots & p_{0j} & \cdots & p_{0r} \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1j} & \cdots & p_{1r} \\ p_{i0} & p_{i1} & p_{i2} & \cdots & p_{ij} & \cdots & p_{ir} \\ p_{r0} & p_{r1} & p_{r2} & \cdots & p_{rj} & \cdots & p_{rr} \end{bmatrix}$$

disebut matriks transisi atau matriks probabilitas transisi rantai Markov tersebut.

p_{ij} disebut probabilitas transisi satu langkah, atau probabilitas transisi dari rantai Markov yang bersangkutan. p_{ij} mempunyai arti probabilitas bersyarat bahwa rantai Markov dalam kedudukan j pada saat t+1, jika diketahui bahwa rantai Markov itu dalam kedudukan i pada saat t.

Selain probabilitas transisi satu langkah, di dalam rantai Markov juga dibicarakan probabilitas transisi n-langkah. Matriks transisinya disebut matriks probabilitas transisi n-langkah, $P^{(n)} = \| p^n_{ij} \|$. Di sini p^n_{ij} menyatakan probabilitas bahwa rantai Markov tersebut berpindah dari kedudukan i ke kedudukan j dalam n transisi.

Secara formal ditulis :

$$p^n_{ij} = P(X_n = j \mid X_o = i)$$

atau pada kasus probabilitas transisi stasioner

$$p^n_{ij} = P(X_{n+m} = j \mid X_m = i), \; (\forall m = 1,2, \ldots) \qquad (3.2.1)$$

LEMMA 3.2.1. Persamaan Chapman-Kolmogorov. Didefinisikan $p^1_{ij} = p_{ij}$, $p^o_{ij} = \delta^n_{ij} = \begin{cases} 1 & ,i = j \\ 0 & ,i \neq j \end{cases}$

Maka untuk rantai Markov dengan probabilitas transisi stasioner diperoleh

$$p^{n+m}_{ij} = \sum_{k \in S} p^n_{ik} \; p^m_{kj} \quad ,n \geq 0 \quad , m \geq 0 \qquad (3.2.2)$$

atau ekuivalen dengan

$$P^{(n+m)} = P^{(n)} \; P^{(m)}$$

<u>Bukti</u> : Akan dibuktikan dengan induksi matematika, pertama pada n dan kemudian pada m.

Lemma benar untuk m = 0 dan semua n (dengan definisi).

(i) <u>Pangkal</u> : Lemma benar untuk n = 1

<u>Langkah</u> : Andaikan lemma itu benar untuk m = 1

dan $n = t$, untuk semua $i, j \in S$. Akan dibuktikan benar untuk $n = t+1$.

Menggunakan sifat probabilitas dan sifat pemulusan (smoothing property) dari probabilitas bersyarat.

$$P_{ij}^{t+1+1} = P_{ij}^{t+2} = P(X_{v+t+2} = j \mid X_v = i)$$

$$= \sum_k P(X_{v+t+2} = j,\ X_{v+t+1} = k \mid X_v = i)$$

$$= \sum_k P(X_{v+t+2} = j \mid X_{v+t+1} = k,\ X_v = i)\ P(X_{v+t+1} = k \mid X_v = i)$$

(dari definisi probabilitas bersyarat)

$$= \sum_k P(X_{v+t+2} = j \mid X_{v+t+1} = k)\ P(X_{v+t+1} = k \mid X_v = i)$$

Kesamaan terakhir mengikuti sifat Markov. Menurut probabilitas transisi

$$P_{ij}^{t+1+1} = P_{ij}^{t+2} = \sum_{k \in S} P_{ik}^{t+1}\ P_{kj}^{1}$$

Maka lemma itu benar untuk semua n dan $m = 1$.

(ii) <u>Pangkal</u> : Lemma benar untuk semua n dan $m = 1$ (dari i)

<u>Langkah</u> : Andaikan lemma itu benar untuk $m = r$ dan semua n.

Akan dibuktikan benar untuk $m = r + 1$

Maka dengan (i),

$$p_{ij}^{r+n+1} = \sum_{k\in S} p_{ik}^{n+r}\; p_{kj},$$

$$= \sum\Big(\sum_{\ell} p_{i\ell}^{n}\; p_{\ell k}^{r} \Big)\; p_{kj}$$

$$= \sum_{\ell} p_{i\ell}^{n} \Big(\sum_{k} p_{\ell k}^{r}\; p_{kj} \Big),$$

$$= \sum_{\ell} p_{i\ell}^{n}\quad p_{ij}^{r+1} \qquad \text{(dengan (i))}$$

Maka dengan induksi, lemma itu benar untuk semua n dan semua m. ∎

Menggunakan notasi matriks dari (3.2.2)

$$P^{(0)} = I\;,\; P^{(1)} = P$$

$$P^{(n+1)} = P^{(n)}\; P$$

$$P^{(n+m)} = P^{(n)} P^{(m)}$$

Oleh karena itu $P^{(2)} = P^2$ yaitu matriks untuk sebaran probabilitas setelah 2-langkah adalah kuadrat matriks transisinya.

Secara umum hasilnya dapat diperkirakan sebagai berikut: matriks sebaran probabilitas setelah n-langkah adalah pangkat ke-n dari matriks transisi semula. Selanjutnya, hasil tersebut dinyatakan dalam teorema berikut.

TEOREMA 3.2.1 Untuk suatu rantai Markov berlaku

$P^{(n)} = P^n\;,\;\forall\; n \geq 1.$

Bukti : Akan dibuktikan dengan induksi matematika

Pangkal : Untuk n = 1, maka $p_{ij}^{n} = p_{ij}^{1}$ adalah probabilitas transisi dari kedudukan i ke kedudukan j dalam satu-langkah. Menurut definisi, hal itu tidak lain adalah probabilitas transisi p_{ij}. Dengan demikian $p_{ij}^{1} = p_{ij}$ untuk setiap i dan j, maka $P^{(1)} = P$ jadi untuk n = 1, teorema benar.

Langkah : Andaikan teorema benar untuk n = k akan dibuktikan bahwa teorema benar untuk n = k + 1. Karena benar untuk n = k, maka berlaku $P^{(k)} = P^{k}$, artinya :

$p_{ij}^{k} = (P^{k})_{ij}$, untuk setiap i dan j

untuk n = k + 1 :

$$
\begin{aligned}
(P^{k+1})_{ij} &= (P^{k}P)_{ij} && ,\forall i,j \\
&= \sum_{t\in S} ((P^{k})_{it})\, p_{tj} && ,\forall i,j \\
&= \sum_{t\in S} p_{it}^{k}\; p_{tj} && ,\ \forall i,j \\
&= p_{ij}^{k+1} && ,\ \forall i,j \qquad \text{(menurut lemma 3.2.1)}
\end{aligned}
$$

Karena $(P^{k+1})_{ij} = p_{ij}^{k+1}$, untuk setiap i,j maka $P^{k+1} = P^{(k+1)}$ sehingga terbukti bahwa berlaku $P^{(n)} = P^{n}$, $\forall n \geq 1$. ∎

Lemma 3.2.1 menyatakan bahwa suatu transisi dari kedudukan i ke kedudukan j dalam n+m langkah dapat dicapai dengan bergerak dari kedudukan i ke suatu kedudukan *antara* k dalam n-langkah (dengan probabilitas

p^n_{ik}), dilanjutkan dengan suatu transisi dari kedudukan k ke kedudukan j dalam m-langkah (dengan probabilitas p^m_{kj}).

Jika probabilitas awal rantai Markov dalam kedudukan j adalah p_j, yaitu $P(X_o = j) = p_j$, maka probabilitas proses yang berada dalam kedudukan k pada saat n adalah :

$$p^n_k = \sum_{j=o}^{\infty} p_j \; p^n_{jk} = P(X_n = k) \qquad (3.2.3)$$

Untuk memperjelas maka matriks transisi P sering dilengkapi dengan kedudukan-kedudukan yang bersangkutan, sehingga mempunyai bentuk sebagai berikut

$$P = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} X_o & X_1 & \quad & X_r \end{array} \\ \begin{array}{c} X_o \\ X_1 \\ - \\ - \\ - \\ X_r \end{array} & \begin{bmatrix} - & - & \cdots & - \\ - & - & \cdots & - \\ . & . & \cdots & . \\ . & . & \cdots & . \\ . & . & \cdots & . \\ - & - & \cdots & - \end{bmatrix} \end{array}$$

CONTOH 3.2.1 : **(Masalah Kekalahan Penjudi).** Anggap dua orang bermain judi berulang-ulang dengan modal awal k dan $\ell - k$ satuan. Dalam setiap permainan, pemenang akan mendapat satu satuan modal dari yang kalah jika ia mempunyai uang. Andaikan pula probabilitas kemenangan dua orang penjudi tersebut adalah berturut-turut p dan $q = 1 - p$ dan hasil percobaan dari permainan berturut-turut adalah independen. Sebaran gabungan modal ℓ di antara kedua penjudi akan terus bervariasi sampai salah satu dari mereka kalah, yaitu, kehilangan satuan modal terakhir. Kita tertarik pada probabilitas kekalahan akhir kedua penjudi dan (rata-rata) lamanya permainan tersebut.

Perkembangan modal penjudi pertama (X_t) setelah permainan ke-t dapat dilukiskan dengan suatu rantai Markov dengan probabilitas transisi satu langkah disajikan dengan :

$$P(X_{t+1} = j \mid X_t = i) = p_{ij} = \begin{cases} p \text{ jika } j = i+1, \\ q \text{ jika } j = i-1, \\ 0 \text{ yang lain} \end{cases}$$

(t = 0,1,2, ...), dan ruang kedudukan (0, ... , ℓ) dan matriks transisi :

$$P = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccccccc} 0 & 1 & 2 & \cdots & \ell-2 & \ell-1 & \ell \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ . \\ . \\ . \\ \ell-1 \\ \ell \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & \cdots & . & . & . \\ . & . & . & \cdots & . & . & . \\ . & . & . & \cdots & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Dari matriks transisi di atas diperoleh :

p_{00} = 1 menyatakan probabilitas bersyarat modal penjudi I pada kedudukan 0, jika diketahui modalnya pada kedudukan 0. Juga menyatakan probabilitas sebelum permainan dimulai, di mana penjudi I belum kehilangan atau bertambah modalnya

p_{10} = q menyatakan probabilitas bersyarat modal penjudi I pada kedudukan 0, jika diketahui modalnya pada kedudukan 1. Juga menyatakan probabilitas penjudi I kehilangan satu satuan modal atau probabilitas ia mengalami kekalahan dalam satu permainan.

$p_{12} = p$ menyatakan probabilitas bersyarat modal penjudi I pada kedudukan 2, jika diketahui modalnya pada kedudukan 1. Juga menyatakan probabilitas penjudi I mendapatkan satu satuan modal atau probabilitas ia mengalami kemenangan dalam satu permainan.

$p_{\ell\ell} = 1$ menyatakan probabilitas bersyarat modal penjudi I pada kedudukan ℓ, jika diketahui modalnya pada kedudukan ℓ. Juga menyatakan kemenangan penjudi I.

Lama (rata-rata) permainan judi tersebut akan dibahas pada bab IV.

CONTOH 3.2.2 : Andaikan suatu kursus terdiri atas d tingkatan, masing-masing tingkatan memerlukan satu satuan waktu (misalnya satu tahun) untuk menyelesaikannya. Pada akhir tiap tingkatan diadakan suatu ujian untuk menentukan kenaikan tingkat siswa ke tingkat selanjutnya (atau pada tingkat tertinggi, tamat dari kursus tersebut). Juga diandaikan siswa dapat meninggalkan kursus, tetapi bila ia terkena DO siswa tersebut tidak dapat mengikuti kursus itu lagi. Jadi, pada akhir suatu tingkatan, perkembangan siswa dapat dilukiskan dengan satu dari tiga kemungkinan berikut : 1) siswa lulus ujian dan naik ke tingkat berikutnya; 2) siswa gagal ujian dan mengulang tingkat yang sama; 3) siswa meninggalkan kursus sebelum ujian (jika siswa tersebut meninggalkan kursus sesaat setelah ujian, ia dianggap DO selama tingkat berikutnya).

Akhirnya diandaikan bahwa probabilitas kenaikan tingkat siswa ke tingkat berikutnya, pengulangan tingkat, dan meninggalkan kursus tidak tergantung pada keadaan siswa sebelumnya. Dengan asumsi di atas perkembangan siswa menjalani kursus sampai ia DO atau lulus semua tingkat (d tingkat) dapat dilukiskan dengan suatu rantai Markov dengan kedudukan 1,2, ... , $d-1, d, d+1$. Kedudukan 1 adalah siswa memasuki kursus pada tingkat pertama, kedudukan $d+1$ adalah siswa meninggalkan kursus, kedudukan i , $1 \le i \le d$, adalah siswa yang sukses menempuh i kedudukan pertama ($i = d$ adalah siswa yang sukses menyelesaikan seluruh tingkat).

Matriks transisinya berbentuk :

$$
P = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ d-1 \\ d \\ d+1 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & \ldots & d-1 & d & d+1 \end{array} \\
\left[\begin{array}{ccccccc}
r_1 & p_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & q_1 \\
0 & r_2 & p_2 & \ldots & 0 & 0 & q_2 \\
0 & 0 & r_3 & \ldots & 0 & 0 & q_3 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \ldots & r_d & p_d & q_d \\
0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1
\end{array}\right]
\end{array}
$$

Probabilitas-probabilitas p_i, r_i q_i berhubungan dengan kemungkinan 1) - 3) di atas pada tingkat i, $1 \leq i \leq d$.

Dari matriks transisi di atas diperoleh :

$p_{11} = r_1$ menyatakan probabilitas siswa diterima di tingkat 1.

$p_{12} = p_1$ menyatakan probabilitas bersyarat siswa naik ke tingkat 2, jika diketahui siswa tersebut berada di tingkat 1. Juga menyatakan siswa tersebut lulus ujian dan naik ke tingkat berikutnya.

$p_{22} = r_2$ menyatakan probabilitas bersyarat siswa berada di tingkat 2, jika diketahui siswa tersebut berada di tingkat 2. Juga menyatakan siswa tersebut gagal ujian dan mengulang tingkat 2.

$p_{3\ d+1} = q_3$ menyatakan probabilitas bersyarat siswa berada di tingkat d+1, jika diketahui siswa tersebut berada di tingkat 3. Juga menyatakan siswa meninggalkan kursus (DO).

3.3. Klasifikasi Kedudukan

Salah satu hal yang penting pada pembahasan rantai Markov adalah bagaimana sebuah kedudukan dapat dicapai dari kedudukan lain. Untuk memahaminya berikut akan diperkenalkan *konsep waktu kena (hitting time)*.

Andaikan (X_t), $t \geq 0$ adalah sebuah rantai Markov dengan ruang kedudukan berhingga S.

Andaikan untuk $B \subset S$

$$\tau_B = \inf \{n \geq 0 \mid X_n \in B\} \qquad (3.3.1)$$

adalah *waktu kena (hitting time)* dari B. Waktu kena dari B adalah angka yang menyatakan batas bawah terbesar dari indeks X_n, n = 0, 1, ... , r, dengan $X_n \in B$. Atau dengan kata lain waktu kena dari B adalah waktu di mana rantai Markov mencapai suatu kedudukan $X_n \in B$ pertama kali.

Untuk memahami kedudukan mana yang dapat dicapai dari suatu kedudukan awal i, definisi berikut adalah dasarnya

DEFINISI 3.3.1. Untuk i, j $\in$ S ,j dikatakan *terakses (accessible)* dari i ,ditulis i $\longrightarrow$ j ,jika

$$P_i(\tau_j < \infty) > 0$$

Dengan kata lain, dimulai dari i, dengan probabilitas positif rantai tersebut mencapai kedudukan j.

Karena dalam (3.3.1) n boleh sama dengan nol, maka dapat diperoleh i $\longrightarrow$ i untuk semua i $\in$ S selama $P_i(\tau_j < \infty) = 1$; dalam kenyataannya $P_i(\tau_i = 0) = P_i(X_0 = i) = 1$.

Berikut adalah syarat bagi kedudukan yang dapat dicapai

TEOREMA 3.3.1. Kedudukan j dapat dicapai dari kedudukan i bila dan hanya bila $\exists$ n $\geq$ 0 sedemikian hingga $p^n_{ij} > 0$.

Bukti :

($\Rightarrow$) Diketahui : kedudukan j terakses dari kedudukan i

Dibuktikan : $\exists$ n $\geq$ 0 sedemikian hingga $p^n_{ij} > 0$.

Bukti :

Karena diketahui kedudukan j terakses dari kedudukan i, maka menurut definisi 3.3.1

$$P_i(\tau_j < \infty) > 0$$

yaitu rantai Markov dimulai dari kedudukan i dengan probabilitas positif rantai tersebut mencapai j. Berarti terdapat n $\geq$ 0 sedemikian hingga rantai Markov tersebut berpindah dari kedudukan i ke kedudukan j dalam n langkah dengan probabilitas positif.

$\therefore \exists$ n $\geq$ 0 sedemikian hingga $p^n_{ij} > 0$.

($\Leftarrow$) Diketahui : $\exists$ n $\geq$ 0 sedemikian hingga $p^n_{ij} > 0$.

Dibuktikan: Kedudukan j terakses dari kedudukan i.

Bukti :

Karena diketahui $\exists$n $\geq$ 0 sedemikian hingga $p^n_{ij} > 0$ maka rantai Markov tersebut berpindah dari kedudukan i ke kedudukan j dalam n-langkah dengan probabilitas positif.

Jadi,

$$p^n_{ij} = P(X_n = j \mid X_0 = i) > 0$$

Karena $(X_n = j) \subset (\tau_j \leq n) \subset (\tau_j < \infty)$

Jadi, menurut teorema 2.1.6

$$0 < p^n_{ij} < P_i(\tau_j < \infty)$$

yaitu kedudukan j terakses dari kedudukan i (menurut definisi 3.3.1). ∎

Teorema 3.3.1 di atas mengatakan bahwa kedudukan j terakses dari kedudukan i bila dan hanya bila terdapat probabilitas positif dalam sebuah transisi yang berhingga, kedudukan j dapat dicapai dimulai dari kedudukan i.

Definisi berikut berhubungan dengan pertanyaan : jika terdapat suatu lintasan dari kedudukan pertama ke kedudukan kedua dengan probabilitas positif, apakah terdapat sebuah lintasan kembali dari kedudukan kedua ke kedudukan pertama ?.

DEFINISI 3.3.2. Kedudukan-kedudukan i dan j dapat saling dicapai satu sama lain, dikatakan *berhubungan*, ditulis $i \leftrightarrow j$, jika $i \longrightarrow j$ dan $j \longrightarrow i$.

Jika dua kedudukan i dan j *tidak berhubungan*, maka baik $p^n_{ij} = 0$ untuk semua $n \geq 0$ atau $p^n_{ji} = 0$ untuk semua $n \geq 0$ atau keduanya benar.

Konsep tentang komunikasi adalah relasi ekuivalensi (hubungan kesetaraan), yang berarti,

(1). $i \leftrightarrow i$ (bersifat refleksif), akibat dari definisi

$$p^o_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

(2). $i \leftrightarrow j$ bila dan hanya bila $j \leftrightarrow i$ (bersifat simetrik)

(3). Jika $i \leftrightarrow j$ dan $j \leftrightarrow k$ maka $i \leftrightarrow k$ (bersifat transitif)

Hanya sifat terakhir, (sifat transitif) yang akan dibuktikan. Jika $i \leftrightarrow j$ dan $j \leftrightarrow k$ akan dibuktikan $i \leftrightarrow k$.

Jika $i \leftrightarrow j$ maka menurut teorema 3.3.1 terdapat $n \geq 0$ sedemikian hingga $p^n_{ij} > 0$; demikian pula jika $j \leftrightarrow k$ maka terdapat $m \geq 0$ sedemikian hingga $p^m_{jk} > 0$. Dengan lemma 3.2.1 diperoleh

$$p^{n+m}_{ik} = \sum_{r=0}^{\infty} p^n_{ir}\, p^m_{rk} \geq p^n_{ij}\, p^m_{jk} > 0 \qquad \text{(i)}$$

dengan jalan yang serupa akan diperoleh bahwa terdapat bilangan bulat v sedemikian hingga $p^v_{ki} > 0$ (ii).

Dari (i) dan (ii) diperoleh $i \leftrightarrow k$. ■

Sekarang kedudukan-kedudukan dapat dipisahkan menjadi kelas-kelas yang ekuivalen. yaitu kelas yang kedudukan-kedudukannya berhubungan satu sama lain. Kelas-kelas ekuivalensi ini *saling asing*. Misalnya dipilih sebuah kedudukan, katakan 0, kemudian letakkan 0 dan semua kedudukan yang berhubungan dengan 0 dalam sebuah kelas, katakan C_0. Kemudian pilih sebuah kedudukan dalam S selain C_0, misalnya i, dan letakkan i dan semua kedudukan yang berhubungan dengan i ke dalam kelas lain yang bernama C_1. Proses berlanjut sampai semua kedudukan ditentukan. Akhirnya kita peroleh

$$C_i \cap C_j = \emptyset \quad , \ i \neq j \text{ dan } \bigcup_i C_i = S$$

Himpunan C_0, C_1 disebut kelas-kelas ekuivalen.

Jadi, ruang kedudukan dari suatu rantai Markov dapat dipartisi menjadi kelas-kelas ekuivalen yang saling asing.

DEFINISI 3.3.3. Sebuah rantai Markov dikatakan *tak tereduksi (irreducible)* jika ruang kedudukan hanya mengandung satu kelas, yaitu untuk sebarang $i, j \in S$ $i \leftrightarrow j$.

Dengan kata lain suatu rantai Markov dikatakan tak tereduksi jika semua kedudukan berhubungan satu sama lain.

CONTOH 3.3.1. : Andaikan matriks probabilitas suatu rantai Markov disajikan dengan

$$P = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc|ccc} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 3/4 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \end{array} = \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix}$$

P_1 adalah matriks partisi yang dibentuk dari dua baris dan kolom pertama matriks P, demikian pula P_2 adalah matriks partisi yang dibentuk dari baris dan kolom ke 3, 4, dan 5 matriks P. Rantai Markov di atas terbagi atas dua kelas yang terdiri atas kedudukan-kedudukan {1,2} dan kedudukan-kedudukan {3,4,5}. Jika kedudukan X_o terletak dalam kelas pertama matriks transisi yang bersesuaian adalah P_1. Begitu pula, jika kedudukan awal terletak pada kelas kedua, maka matriks transisi yang bersesuaian adalah P_2.

DEFINISI 3.3.4. Suatu himpunan bagian tak kosong M dari ruang kedudukan dikatakan tertutup bila dan hanya bila $\sum_{j \in M} p_{ij} = 1$, untuk semua $j \in M$, yaitu matriks partisi $\| p_{ij} \|$, $i, j \in M$ dari matriks transisi P adalah stokastik. (karena itu juga $\| p^n_{ij} \|$, $i, j \in M$ untuk setiap $n \geq 1$)

Dengan kata lain, M tertutup bila dan hanya bila setiap kedudukan dalam M tidak mungkin meninggalkan M bila diketahui rantai Markov tersebut dimulai pada suatu kedudukan dalam M. Contoh sederhana misalnya pada suatu kelas tertutup yang terdiri dari kedudukan tunggal i pada saat $p_{ii} = 1$. Suatu kedudukan demikian disebut *menyerap* (seperti dapat ditemukan pada contoh 3.2.1). Kasus lain misalnya seluruh ruang kedudukan S membentuk satu kelas (tertutup). Dalam kasus ini ruang kedudukan (juga rantai Markov dikatakan tak tereduksi (definisi 3.3.3)).

Definisi 3.3.4 berakibat bahwa S dapat direduksi menjadi kelas-kelas yang tidak berhubungan bila M adalah himpunan bagian sejati dari S.

3.4. Periode Rantai Markov

Suatu sifat yang didefinisikan untuk semua kedudukan dari suatu rantai Markov dikatakan menjadi sifat kelas. Kondisi tersebut dicapai bila sifat itu dimiliki oleh suatu kedudukan i maka sifat itu juga dimiliki oleh semua kedudukan dari kelas yang berhubungan dengan i. Dengan kata lain, jika C suatu kelas ekuivalen dari kedudukan-kedudukan dan $i \in C$ mempunyai sifat itu, maka semua kedudukan $j \in C$ mempunyai sifat itu juga.

Contoh pertama dari sifat kelas adalah konsep periode suatu kedudukan.

DEFINISI 3.4.1 Periode Kedudukan Suatu Rantai Markov. Periode kedudukan i ditulis d(i), adalah pembagi persekutuan terbesar (greatest common divisor) dari semua bilangan bulat $n \geq 1$ di mana $p_{ii}^{n} > 0$. Jika $p_{ii}^{n} = 0$ untuk semua $n \geq 0$ didefinisikan $d(i) = 0$.

CONTOH 3.4.1. : Andaikan matriks probabilitas transisi suatu rantai Markov berhingga dengan n kedudukan disajikan dengan

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & & n \end{array} \\
P = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ . \\ . \\ . \\ n-1 \\ n \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ . & . & . & . & \cdots & . \\ . & . & . & . & \cdots & . \\ . & . & . & . & \cdots & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

Setiap kedudukan dari matriks tersebut mempunyai periode n. Setiap kedudukan dari matriks transisi di atas membutuhkan n-langkah untuk kembali pada kedudukan semula, yaitu $p_{ii}^{n} > 0$,$\forall$ $i \in S$. Pembagi bilangan bulat terbesar dari n adalah n.

Jadi, periode setiap kedudukan dari matriks tersebut adalah n.

Berikut ini adalah sifat dasar periode suatu kedudukan.

TEOREMA 3.4.1. Jika $i \leftrightarrow j$ maka $d(i) = d(j)$

__Bukti__ : Andaikan $i \leftrightarrow j$ dan i mempunyai periode $d(i)$, j mempunyai periode $d(j)$. Selama $i \leftrightarrow j$ menurut teorema 3.3.1 terdapat bilangan bulat $m, n > 0$ sedemikian hingga $p_{ij}^{n} > 0$ dan $p_{ji}^{m} > 0$. Dari lemma 3.2.1, diperoleh :

$$p_{jj}^{m+n+k} \geq p_{ji}^{m} \, p_{ii}^{k} \, p_{ij}^{n} = (p_{ji}^{m} p_{ij}^{n}) p_{ii}^{k}$$

$$= c \, p_{ii}^{k}$$

di mana $c > 0$

∴ untuk $c > 0$, diperoleh

$$p_{jj}^{m+n+k} \geq c \, p_{ii}^{k} \qquad (3.4.1)$$

Diketahui $p_{ii}^{0} = 1$ dan dengan memasukkan $k = 0$ ke persamaan (3.4.1) diperoleh

$$p_{jj}^{m+n} > 0$$

Yang berarti $m + n = k_1 \, d(j)$ untuk suatu bilangan bulat k_1.

∴ Untuk setiap $k > 0$ sedemikian hingga $p_{ii}^{k} > 0$, diperoleh $p_{jj}^{m+n+k} \geq c \, p_{ii}^{k} > 0$

Jadi, $m + n + k = k_2 \, d(j)$ untuk suatu bilangan bulat k_2. Sekarang untuk $p_{ii}^{k} > 0$ diperoleh

$$k = m + n + k - (m + n) = k_2 \, d(j) - k_1 \, d(j)$$

$$k = (k_2 - k_1)\, d(j)$$

Jadi, d(j) adalah pembagi dari semua bilangan $n \geq 1$, sehingga $p^n_{ii} > 0$ atau dengan definisi 3.4.1 d(j) adalah pembagi d(i) dan karenanya $d(j) \leq d(i)$. (i)

Dengan mengganti i dengan j dapat diperoleh d(i) adalah pembagi d(j), Jadi $d(i) \leq d(j)$. (ii)

Dari (i) dan (ii) diperoleh $d(i) = d(j)$ ∎

Teorema 3.4.1 di atas menunjukkan bahwa periode adalah sebuah konstanta dalam setiap kelas dari kedudukan-kedudukan yang berhubungan.

Suatu rantai Markov dengan setiap kedudukan mempunyai periode satu disebut *aperiodik (tak berkala)*, sedang apabila kedudukannya mempunyai periode lebih dari satu disebut *periodik (berkala)*.

DEFINISI 3.4.2. Suatu kedudukan i dari suatu rantai Markov dikatakan berkala bila $d(i) > 1$ dan dikatakan tak berkala bila $d(i) = 1$.

Transisi dari suatu kedudukan ke kedudukan lain dalam sebuah kelas ekuivalen tertutup C dengan periode $d > 1$, meskipun acak, memiliki sebuah bentuk siklik nyata yang akan dibahas berikut ini.

Andaikan $i, j \in C$; jika $p^r_{ij} > 0$ dan $p^s_{ij} > 0$. Andaikan terdapat t sedemikian hingga $p^t_{ji} > 0$

Maka

$$p_{ii}^{r+t} \geq p_{ij}^{r} \; p_{ji}^{t} > 0 \; ;$$

berarti r + t = k d untuk suatu bilangan bulat positif k, karena itu d membagi r + t.

Mirip dengannya, d membagi s+t, dan juga d membagi s−r.

Sehingga, jika r = ad + b, a dan b bilangan bulat, $0 \leq b \leq d-1$, maka

s = cd + b untuk suatu bilangan bulat c.

Jadi, jika j dapat dicapai dari i dalam n-langkah, maka n berasal dari bentuk ed + b, yaitu :

$$n \equiv b \bmod d$$

di mana b tergantung pada kedudukan i dan j, tetapi independen terhadap n.

Andaikan i ∈ C dan didefinisikan

$C_0 = \{j \in C \mid p_{ij}^{n} > 0$ mengakibatkan $n \equiv 0 \bmod d\}$

$C_1 = \{j \in C \mid p_{ij}^{n} > 0$ mengakibatkan $n \equiv 1 \bmod d\}$

.
.
.

$C_{d-1} = \{j \in C \mid p_{ij}^{n} > 0$ mengakibatkan $n \equiv d-1 \bmod d\}$

Maka

$$C = \bigcup_{j=0}^{d-1} C_j$$

TEOREMA 3.4.2. Jika $k \in C_t$ dan $p_{kj} > 0$, maka $j \in C_{t+1}$ (yang menunjukkan penyederhanaan mod d; yaitu, $C_d = C_0$, $C_{d+1} = C_1$, dan seterusnya). Sehingga, mulai dari kedudukan i, rantai itu bergerak dari C_0 ke C_1 ke...ke C_{d+1} kembali ke C_0. C_j disebut kelas-kelas bagian C yang bergerak secara siklik.

Bukti : Pilih n sedemikian hingga $p^n_{ik} > 0$. Maka n berasal dari bentuk ad + t.

Pandang p^{n+1}_{ij}. Menurut lemma 3.2.1

$$p^{n+1}_{ij} \geq p^n_{ik}\, p_{kj} > 0$$

Karena itu j dapat dicapai dari i, dan selama C tertutup $j \in C$.

Tetapi diketahui $n \equiv t \bmod d$.

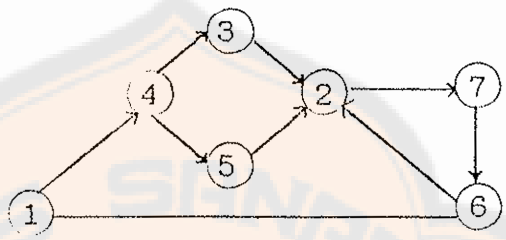
Maka $n+1 \equiv t + 1 \bmod d$, sehingga $j \in C_{t+1}$. ■

Terdapat sebuah cara yang efektif untuk menentukan periode dan kelas-kelas bagian dari suatu kelas tertutup. Cara tersebut akan dilukiskan dengan contoh berikut.

CONTOH 3.4.1 : Andaikan suatu rantai Markov memiliki matriks transisi sebagai berikut :

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} \\ \begin{bmatrix} & & & \times & & & \\ & & & & & & \times \\ & & \times & & & & \\ & & \times & & \times & & \\ & \times & & & & & \\ \times & \times & & & & & \\ & & & & & & \times \end{bmatrix} \end{array}$$

Tanda × menunjukkan bahwa elemen-elemennya bernilai tak negatif. Terlihat bahwa semua kedudukan berhubungan dan karena itu kedudukan tersebut membentuk sebuah kelas tertutup tunggal *C*. Matriks transisi di atas dapat dinyatakan dengan suatu graf berarah, dengan simpul menyatakan kedudukan rantai. Relasi keterhubungan dinyatakan dengan anak panah. Grafnya menjadi



Pilih sebuah kedudukan, katakan 1 dan namakan C_0 kelas bagian yang mengandung kedudukan 1. Kemudian semua kedudukan yang dapat dijangkau dengan satu langkah dari kedudukan 1 dimasukkan dalam C_1, dalam contoh di atas $4 \in C_1$. Semua kedudukan yang dapat dijangkau dalam satu langkah dari kedudukan 4 dimasukkan dalam C_2, dalam contoh di atas $3,5 \in C_2$. Demikian seterusnya sampai diperoleh tabel

C_0	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6
1	4	3,5	2	7	6	1,2

Tabel berhenti ketika sebuah kedudukan yang sudah ada muncul lagi. Karena itu diperoleh $1 \in C_0 \cap C_6$ berarti $C_0 \triangleq C_6$. Tanda $\triangleq$ menotasikan bahwa kelas bagian berada dalam kelas ekuivalen tertutup yang sama. $2 \in C_3 \cap C_6$, berarti $C_3 \triangleq C_6$,sehingga dapat disimpulkan $C_0 \triangleq C_3 \triangleq C_6$.

Sekarang dibentuk tabel baru yang dimulai dengan C_0 = kelas bagian yang mengandung kedudukan 1 dan 2. Semua kedudukan yang dapat dijangkau dalam satu langkah baik dari kedudukan 1 maupun kedudukan 2 $\in C_1$ dan seterusnya. Diperoleh ,

C_0	C_1	C_2	C_3
1,2	4,7	3,5,6	1,2

Demikianlah $C_0 = C_3$ dan selama $C_0 \cup C_1 \cup C_2 = C$, dapat disimpulkan bahwa periode C adalah 3. Dengan menyusun kembali kedudukan tersebut agar memiliki grup yang dapat diamati sebagai kelas bagian, matriks transisinya dapat ditulis sebagai

$$P = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 4 \\ 7 \\ 3 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 4 & 7 & 3 & 5 & 6 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccccc} & & \times & & & & \\ & & & \times & & & \\ & & & & \times & \times & \\ & & & & & & \times \\ & \times & & & & & \\ & \times & & & & & \\ \times & \times & & & & & \end{array}\right] \end{array}$$

atau secara skematik

$$P = \begin{array}{c|ccc} & C_0 & C_1 & C_2 \\ \hline C_0 & & \times & \\ C_1 & & & \times \\ C_2 & \times & & \end{array}$$

Representasi skematik dari P^2 dan P^3 adalah sebagai berikut

$$P^2 = \begin{array}{c|ccc} & C_0 & C_1 & C_2 \\ \hline C_0 & & & \times \\ C_1 & \times & & \\ C_2 & & \times & \end{array} \qquad P^3 = \begin{array}{c|ccc} & C_0 & C_1 & C_2 \\ \hline C_0 & \times & & \\ C_1 & & \times & \\ C_2 & & & \times \end{array}$$

Matriks-matriks P^{3n+1}, P^{3n+2}, P^{3n+3}, $n = 1, 2, \ldots$ secara berturut-turut mempunyai bentuk yang sama dengan P, P^2, P^3, tetapi tidak sama secara numerik.

3.5. Waktu Berhenti dan Sifat Markov Kuat (Stopping Times and The Strong Markov Property)

DEFINISI 3.5.1. Waktu Berhenti. Suatu peubah acak τ dikatakan sebagai *waktu berhenti (stopping time)* untuk suatu rantai Markov (X_t), $t \geq 0$, jika τ mengambil nilai dalam $\{0, 1, \ldots, \infty\}$ dan bila untuk setiap $k = 0, 1, 2, \ldots$, kejadian acak $\{\tau = k\}$ ditentukan dengan $(X_o, \ldots, X_k)$.

Kata "ditentukan" dapat diterangkan menggunakan konsep fungsi indikator. Fungsi indikator dari kejadian acak $\{\tau = k\}$ dapat ditulis sebagai suatu fungsi dari $X_o, \ldots, X_k$, yaitu, dapat ditentukan apakah $\tau = k$ atau $\tau \neq k$ dari pengetahuan tentang nilai dari proses-proses $X_o, \ldots, X_k$ sampai waktu k. Hal ini dinyatakan dengan $I_{\{\tau=k\}} = I_{\{\tau=k\}}(X_o, \ldots, X_k)$

$$= \begin{cases} 1, & \text{jika } \tau = k \\ 0, & \text{jika } \tau \neq k \end{cases}$$

Jika τ adalah waktu berhenti, maka untuk setiap k kejadian $\{\tau \leq k\}$, $\{\tau > k\}$, $\{\tau \geq k\}$, dan $\{\tau < k\}$ ditentukan pula dengan $(X_o, \ldots, X_k)$. Dalam kenyataannya diperoleh $I_{\{\tau \leq k\}} = \sum_{n=0}^{k} I_{\{\tau=n\}}(X_o, \ldots, X_k)$,

$$I_{\{\tau>k\}} = 1 - I_{\{\tau\leq k\}}(X_o, \; \ldots \; ,X_k)$$

Sebaliknya, jika untuk setiap k, kejadian $\{\tau \leq k\}$ ditentukan dengan $(X_o, \; \ldots \; ,X_k)$, maka τ disebut waktu berhenti. Atau, jika untuk setiap k, kejadian $\{\tau > k\}$ ditentukan dengan $(X_o, \; \ldots \; ,X_k)$, maka τ adalah suatu waktu berhenti.

CONTOH 3.5.1 :

(a). $\tau = k$ adalah waktu berhenti. Untuk semua $X_o, X_1,$ ... diperoleh

$$I_{\{\tau=n\}}(X_o, \; \ldots \; ,X_n) = \begin{cases} 0, & \text{jika } n \neq k \\ 1, & \text{jika } n = k \end{cases}$$

(b). *Waktu pelintasan pertama (first passage time)* ke kedudukan i yang akan didefinisikan pada subbab 3.6 adalah suatu waktu berhenti. Yaitu, untuk $\tau_i = \min\,(n \geq 1 \mid X_n = i)$, diperoleh

$$I_{\{\tau=n\}}(X_o, \; \ldots \; ,X_n) = \begin{cases} 1, & \text{jika } X_m \neq i, \text{ untuk } m = 0,\ldots,n-1,\; X_n = i \\ 0, & \text{yang lain} \end{cases}$$

(c). Secara umum untuk sebarang konstanta k, waktu ke k proses mencapai suatu kedudukan adalah suatu waktu berhenti. Tetapi waktu terakhir suatu proses mencapai suatu kedudukan bukanlah suatu waktu berhenti. Untuk menentukan apakah suatu pencapaian kedudukan tertentu adalah pencapaian terakhir diperlukan pengetahuan keseluruhan proses yang akan datang.

Andaikan τ_i adalah waktu pelintasan pertama ke kedudukan i, dan pandang barisan (X_t) setelah rantai mencapai i, dengan kata lain, barisan $X_{\tau_i}, X_{\tau_{i+1}}, \ldots$. Maka dapat diharapkan bahwa barisan $X_{\tau_i}, X_{\tau_{i+1}}, \ldots$ adalah juga sebuah rantai Markov dengan probabilitas transisi yang sama seperti rantai Markov semula. Jika $X_{\tau_i} = k$, maka barisan di atas menjadi X_k, X_{k+1}, ...

Pertama-tama akan diperkenalkan sebuah konsep, yaitu tentang *kejadian sebelum* τ. Jika τ suatu waktu berhenti, sebuah kejadian A dikatakan sebelum τ bila dan hanya bila untuk setiap k = 0,1, ... kejadian acak $A \cap \{\tau = k\}$ adalah sebelum waktu k untuk rantai Markov tersebut.

DEFINISI 3.5.2. Andaikan τ suatu waktu berhenti rantai Markov (X_t), $t \geq 0$. Sebuah kejadian acak A dikatakan menjadi *sebelum* τ *(prior to* τ*)* bila dan hanya bila untuk setiap k = 0,1,2, ...

$$I_{A \cap \{\tau = k\}} = I_{A \cap \{\tau = k\}}(X_0, \ldots, X_k) = \begin{cases} 1, & \text{jika } \tau = k \\ 0, & \text{jika } \tau \neq k \end{cases}$$

Ekuivalen dengan definisi 3.5.2 di atas , kejadian A menjadi sebelum τ bila dan hanya bila kejadian A ditentukan dengan peubah acak $X_0, \ldots, X_\tau$, yaitu, berasal dari bentuk $A = \{X_0, \ldots, X_\tau\} \in E$ di mana E adalah himpunan bagian dari semua barisan berhingga kedudukan dari rantai tersebut.

CONTOH 3.5.2 : Jika τ_i suatu waktu berhenti untuk rantai Markov (X_t), $t \geq 0$ didefinisikan peubah acak X_{τ_i} sebagai berikut :

* Jika $\tau_i = k$ maka $X_{\tau_i} = X_k$,untuk $k = 0,1,\ldots$

* Jika $\tau_i = \infty$ maka $X_{\tau_i} = c$. di mana c adalah elemen sebarang yang bukan anggota S. S dapat diganti dengan $S \cup \{c\}$ dan didefinisikan $p_{cc} = 1$, $p_{cj} = 0$, $j \in S$.

Jika $A = \{X_{\tau_i - j} = i\}$, $i \in S$,$j = 0,1, \ldots$ maka A adalah kejadian sebelum τ_i (Himpunan $X_{\tau_i - j} = X_0$,jika $j > \tau_i$).

Untuk menunjukkan bahwa $\tau_i = k$, perhatikan bahwa $\{X_{\tau_i - j} = i\} \cap \{\tau_i = k\} = \{X_{k-j} = i\} \cap \{\tau_i = k\}$; pemeriksaan terhadap barisan $X_0, \ldots ,X_k$ menentukan nilai dari X_{k-j}, dan menentukan juga $\tau_i = k$.

TEOREMA 3.5.1. Andaikan τ adalah waktu berhenti untuk rantai Markov (X_t), $t \geq 0$. Jika A kejadian acak sebelum τ, maka

$$P(A \cap \{X_\tau = i, X_{\tau+1} = i_1, \ldots ,X_{\tau+k} = i_k\})$$
$$= P(A \cap \{X_\tau = i\} p_{ii_1} p_{i_1 i_2} \ldots p_{i_{k-1} i_k}$$
$$(i, i_1, \ldots ,i_k \in S)$$

<u>**Bukti**</u> :

$$P(A \cap \{X_\tau = i, X_{\tau+1} = i_1, \ldots ,X_{\tau+k} = i_k\})$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} P(A \cap \{\tau = n, X_n = i, X_{n+1} = i_1, \ldots ,X_{n+k} = i_k\})$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P(A \cap \{\tau = n,\ X_n = i\})$$

$$\times\ P(X_{n+1} = i_1, \dots, X_{n+k} = i_k \mid A \cap \{\tau = n,\ X_n = i\}).$$

Sebenarnya jumlahan tersebut adalah hanya atas n, untuk $P(A \cap \{\tau = n,\ X_n = i\}) > 0$.

$$P(X_{n+1} = i_1, \dots, X_{n+k} = i_k \mid A \cap \{\tau = n,\ X_n = i\})$$

$$= P(X_{n+1} = i_1, \dots, X_{n+k} = i_k \mid X_n = i\}).$$

(selama A kejadian acak sebelum τ)

$$= p_{ii_1} p_{i_1 i_2} \dots p_{i_{k-1} i_k}$$

Jumlahan tersebut menjadi

$$\sum_{n=0}^{\infty} P(A \cap \{\tau = n,\ X_n = i\}) p_{ii_1} p_{i_1 i_2} \dots p_{i_{k-1} i_k}$$

$$= P(A \cap \{X_\tau = i\} p_{ii_1} p_{i_1 i_2} \dots p_{i_{k-1} i_k} \qquad \blacksquare$$

TEOREMA 3.5.2. (Sifat Markov Kuat). Andaikan τ adalah waktu berhenti untuk rantai Markov (X_t), $t \geq 0$, maka

(a) $P(X_{\tau+1} = i_1, \dots, X_{\tau+k} = i_k \mid X_\tau = i)$

$$= p_{ii_1} p_{i_1 i_2} \dots p_{i_{k-1} i_k}$$

jika $P(X_\tau = i) > 0$ $\qquad (i, i_1, \dots, i_k \in S)$

(b) Jika A adalah kejadian acak sebelum τ, maka

$$P(X_{\tau+1} = i_1, \dots, X_{\tau+k} = i_k \mid A \cap \{X_\tau = i\})$$

$$= P(X_{\tau+1} = i_1, \dots, X_{\tau+k} = i_k \mid X_\tau = i)$$

dengan definisi 3.5.2

jika $P(A \cap \{X_\tau = i\}) > 0$ $\qquad (i, i_1, \dots, i_k \in S)$

<u>**Bukti**</u> :

(a) Mengambil A = S (kejadian yang pasti terjadi) dan menggunakan teorema 3.5.1 di atas diperoleh

$$P(S \cap \{X_\tau = i,\ X_{\tau+1} = i_1, \ldots, X_{\tau+k} = i_k\})$$
$$= P(X_\tau = i,\ X_{\tau+1} = i_1, \ldots, X_{\tau+k} = i_k)$$
$$= P(X_{\tau+1} = i_1, \ldots, X_{\tau+k} = i_k \mid X_\tau = i),$$
$$\text{jika } P(X_\tau = i) > 0.$$
$$= P_{ii_1} P_{i_1 i_2} \cdots P_{i_{k-1} i_k} \qquad \blacksquare$$

(b). $P(X_{\tau+1} = i_1, \ldots, X_{\tau+k} = i_k \mid A \cap \{X_\tau = i\})$

$$= P(X_{\tau+1} = i_1 \mid A \cap \{X_\tau = i\}) \ldots P(X_{\tau+k} = i_k \mid A \cap \{X_{\tau+1} = i_1, \ldots, X_{\tau+k-1} = i_{k-1}\})$$
$$= P(X_{\tau+1} = i_1 \mid X_\tau = i) \ldots P(X_{\tau+k} = i_k \mid X_{\tau+1} = i_1, \ldots, X_{\tau+k-1} = i_{k-1})$$

karena A adalah kejadian acak sebelum τ.

$$= P_{ii_1} \cdots P_{i_{k-1} i_k}$$
$$= P(X_{\tau+1} = i_1, \ldots, X_{\tau+k} = i_k \mid X_\tau = i) \qquad \blacksquare$$

3.6. Perulangan dan Transiensi (Recurrence and Transience)

Dalam sub bab ini akan dibahas beberapa klasifikasi kedudukan yang mengarah pada manfaat pemisahan ruang kedudukan. Klasifikasi yang paling mendasar dari suatu kedudukan bergantung pada berapa kali rantai itu kembali ke kedudukan semula.

Kedudukan i disebut *kedudukan berulang (recurrent state)* jika rantai tersebut kembali ke kedudukan i dalam langkah yang jumlahnya berhingga, dengan probabilitas 1. Jika tidak demikian kedudukan disebut *kedudukan transien (transient state)*.

DEFINISI 3.6.1. Andaikan (X_t), $t \geq 0$, suatu rantai Markov dan anggap $P(X_o = i) = 1$. Andaikan proses dimulai dari kedudukan i. Didefinisikan $\tau_i(0) = 0$ dan $\tau_i(1) = \inf \{m \geq 1 | X_m = i\}$. Pada $\{\tau_i(1) < \infty\}$ didefinisikan $\tau_i(2) = \inf \{m \geq \tau_i(1) | X_m = i\}$. Melanjutkan proses ini, pada $\{\tau_i(1) < \infty, \ldots, \tau_i(n) < \infty\}$, didefinisikan $\tau_i(n+1) = \inf \{m \geq \tau_i(n) | X_m = i\}$. Waktu $\{\tau_i(n)\}$ adalah waktu-waktu rantai Markov mencapai kedudukan i.

Pada kasus khusus untuk $n = 1$, $\tau_i(1)$ disebut *waktu pelintasan pertama (first passage time)* ke kedudukan i, dan ditulis dengan τ_i. Dengan menggunakan konsep *peubah waktu kena* $\{\tau_i(n),\ n \geq 1\}$ dari definisi 3.6.1 di atas, dapat didefinisikan konsep-konsep berikut.

DEFINISI 3.6.2. Kedudukan i disebut kedudukan berulang bila $P_i(\tau_i(1) < \infty) = 1$ dan sebaliknya kedudukan yang tidak berulang disebut kedudukan transien.

Pada kasus kedudukan i adalah transien, terdapat probabilitas positif rantai Markov tidak kembali ke kedudukan i.

DEFINISI 3.6.3. Andaikan kedudukan awal suatu rantai Markov adalah i sebaran probabilitas waktu kena j dimulai dari i didefinisikan sebagai

$$f^n_{ij} = P_i(\tau_j(1) = n) \quad ,\text{untuk } n = 1,2, \ldots$$

Selama $\tau_j(1) \geq 1$, didefinisikan $f^0_{ij} = 0$. Juga didefinisikan

$$f_{ij} = \sum_{n=0}^{\infty} f^n_{ij} = P_i(\tau_j(1) < \infty)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}, \text{ untuk } f^0_{ij} = 0$$

adalah probabilitas mencapai j dalam waktu yang berhingga mulai dari i.

Oleh karena itu

$$P_i(\tau_j(1) = \infty) = f^\infty_{ij} = 1 - f_{ij}$$

Secara khusus, kedudukan i berulang bila dan hanya bila $f_{ii} = 1$. f^n_{ij} disebut juga probabilitas bersyarat bahwa lintasan pertama dari i ke j tepat muncul pada langkah ke-n. Karena itu $\sum_{n=1}^{\infty} f^n_{ij} = f_{ij}$ adalah probabilitas bahwa j pernah dicapai dari i. Untuk j = i , f_{ii} menunjukkan probabilitas pernah kembali ke i. Jika $f_{ii} =$ 1, rantai Markov dalam kedudukan i akan kembali ke i setelah langkah yang berhingga. Maka i dikatakan sebagai kedudukan berulang. Jika $f_{ii} < 1$, maka i bukan sebuah kedudukan tak-kembali atau kedudukan transien.

TEOREMA 3.6.1. Teorema Jalan Masuk Pertama. Andaikan f^n_{ii} adalah probabilitas bahwa perjalanan kembali pertama ke kedudukan i akan terjadi pada saat n, bila kedudukan awalnya i, yaitu,

$$f_{ii}^{n} = P(X_n = i,\ X_k \neq i,\ 1 \le k \le n-1 \mid X_o = i)$$
$$n = 1, 2, \ldots$$

Jika $i \neq j$, andaikan f_{ij}^{n} adalah probabilitas bahwa kunjungan pertama ke kedudukan j akan terjadi pada saat n, bila kedudukan awalnya i, yaitu,

$$f_{ij}^{n} = P(X_n = j,\ X_k \neq j,\ 1 \le k \le n-1 \mid X_o = i)$$
$$n = 1, 2, \ldots$$

Maka

$$p_{ij}^{n} = \sum_{k=1}^{n} f_{ij}^{k}\, p_{jj}^{n-k}, \qquad n = 1, 2, \ldots \qquad (3.6.1)$$

Bukti : Secara intuitif, jika rantai Markov berada dalam kedudukan j setelah n-langkah, rantai Markov tersebut harus mencapai j pertama kali pada langkah k, $1 \le k \le n$. Setelah kejadian ini, rantai Markov berada dalam kedudukan j setelah sisa n-k langkah.

Untuk bukti formal, digunakan sifat Markov kuat (Teorema 3.5.2).

Andaikan kedudukan awalnya i, dan $\tau_j(1)$ adalah waktu rantai Markov mencapai kedudukan j pertama kali ($\tau_j(1) = \inf\{k \ge 1 \mid X_k = j\}$ jika $X_k = j$ untuk suatu k $= 1, 2, \ldots$; $\tau_j(1) = \infty$ jika $X_k \neq j$ untuk semua k = 1, 2, ...). Maka

$$p_{ij}^{n} = P_i(X_n = j) = \sum_{k=1}^{n} P_i(X_n = j\ ,\ \tau_j(1) = k)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} P_i(\tau_j(1) = k\ ,\ X_{\tau_j(1)+n-k} = j)$$

Tetapi,

$$P_i(\tau_j(1) = k\ ,\ X_{\tau_j(1)+n-k} = j) = P_i(\tau_j(1) = k) \times$$

$$\times\ P_i(X_{\tau_j(1)+n-k} = j \mid (\tau_j(1) = k)$$

dan selama $(\tau_j(1) = k) = (\tau_j(1) = k\ ,\ X_{\tau_j(1)} = j)$

$$P_i(X_{\tau_j(1)+n-k} = j \mid (\tau_j(1) = k)$$

$$= P_i(X_{\tau_j(1)+n-k} = j \mid X_{\tau_j(1)} = j\ ,\ \tau_j(1) = k)$$

$$= P_i(X_{\tau_j(1)+n-k} = j \mid X_{\tau_j(1)} = j)$$

$$= p_{jj}^{n-k}$$

selama $P_i(\tau_j(1) = k) = f_{ij}^{k}$,kita peroleh

$$p_{ij}^{n} = \sum_{k=1}^{n} f_{ij}^{k}\ p_{jj}^{n-k}\ ,\quad n = 1,\ 2,\ \ldots \qquad \blacksquare$$

Dari definisi 3.6.3 f_{ii} dapat ditulis sebagai probabilitas mencapai kedudukan i dalam waktu yang berhingga apabila kedudukan awalnya i, yaitu $f_{ii} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}^{n} = \sum_{n=0}^{\infty} f_{ii}^{n}$, dengan $f_{ii}^{0} = 0$ untuk semua i.

TEOREMA 3.6.2. Jika kedudukan awal suatu rantai Markov adalah i maka probabilitas kembalinya ke kedudukan i sekurang-kurangnya r kali adalah $(f_{ii})^{r}$.

Bukti : Dibuktikan dengan induksi matematika pada r.

Pangkal : Untuk $r = 1$, teorema benar menurut definisi.

Langkah : Andaikan teorema benar untuk $r = m-1$, akan dibuktikan bahwa teorema benar untuk $r = m$.

Andaikan $\tau_i(1)$ adalah waktu rantai Markov mencapai kedudukan i pertama kali.

Maka

$P_i(X_n = i$ untuk sekurang-kurangnya m nilai dari $n \geq 1)$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} P_i(\tau_i(1) = k,\ X_{\tau_i(1)+\ell} = i \text{ untuk sekurang-kurangnya } m-1 \text{ nilai dari } \ell \geq 1)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} P_i(\tau_i(1) = k)\ P_i(X_{\tau_i(1)+\ell} = i \text{ untuk sekurang-kurangnya } m-1 \text{ nilai dari } \ell \geq 1 | \tau_i(1) = k)$$

Jika $\{X_{\tau_i(1)} = i\}$ adalah kejadian yang pasti terjadi (S), $\tau_i(1)$ adalah waktu berhenti untuk rantai Markov yang diandaikan dan kejadian acak $\{\tau_i(1) = k\}$ adalah sebelum $\tau_i(1)$, maka diperoleh

$P_i(X_{\tau_i(1)+\ell} = i$ untuk sekurang-kurangnya $m-1$ nilai dari $\ell \geq 1 | \tau_i(1) = k)$

$$= P_i(X_{\tau_i(1)+\ell} = i \text{ untuk sekurang-kurangnya } m-1 \text{ nilai dari } \ell \geq 1 | X_{\tau_i(1)} = i,\ \tau_i(1) = k)$$

$$= P_i(X_{\tau_i(1)+\ell} = i \text{ untuk sekurang-kurangnya } m-1 \text{ nilai dari } \ell \geq 1 | X_{\tau_i(1)} = i)$$

dengan sifat Markov kuat

$= P_i(X_\ell = i$ untuk sekurang-kurangnya m-1 nilai dari $\ell \geq 1 | X_o = i)$

dengan sifat Markov kuat

$= (f_{ii})^{m-1}$ oleh hipotesis induksi

Jadi, $P_i(X_n = i$ untuk sekurang-kurangnya m nilai dari

$$n \geq 1) = \sum_{k=1}^{\infty} f_{ii}^{k} (f_{ii})^{m-1} = f_{ii}(f_{ii})^{m-1}$$

$$= (f_{ii})^{m}$$

Jadi probabilitas kembalinya ke kedudukan i sekurang-kurangnya r kali adalah $(f_{ii})^r$ ■

AKIBAT 3.6.1. Andaikan kedudukan awal suatu rantai Markov adalah i. Jika $f_{ii} = 1$, maka probabilitas kembalinya ke kedudukan i tak berhingga kali adalah 1. Jika $f_{ii} < 1$, maka probabilitas kembalinya ke kedudukan i tak berhingga kali adalah 0.

<u>**Bukti**</u> : Kejadian {Kembali ke kedudukan i sekurang-kurangnya r kali}, r = 1,2, ... membentuk suatu *barisan mengerut (contracting sequence)* yang irisannya adalah {Kembali ke kedudukan i tak berhingga kali}. Jadi probabilitas kembalinya ke kedudukan i tak berhingga kali adalah

$$\lim_{r \to \infty} (f_{ii})^r = \begin{cases} 1, & \text{jika } f_{ii} = 1 \\ 0, & \text{jika } f_{ii} < 1 \end{cases}$$ ■

DEFINISI 3.6.4. Jika $f_{ii} = 1$, maka kedudukan i dikatakan berulang (recurrent atau persistent); jika

$f_{ii} < 1$, maka kedudukan i dikatakan transien (transient).

Teorema 3.6.2 dapat dibuat menjadi lebih umum dalam teorema berikut.

TEOREMA 3.6.3. Jika kedudukan awal suatu rantai Markov adalah i maka probabilitas bahwa kedudukan j akan dicapai sekurang-kurangnya r kali sama dengan $f_{ij}(f_{jj})^{r-1}$

<u>Bukti</u> : Bukti teorema 3.6.3 di atas seluruhnya sejalan dengan bukti teorema 3.6.2, dengan menggunakan $\tau_j(1)$ sebagai pengganti $\tau_i(1)$.

<u>Pangkal</u> : Untuk r = 1, teorema benar dengan definisi.

<u>Langkah</u> : Andaikan teorema benar untuk r = m-1, akan dibuktikan bahwa teorema benar untuk r = m.

Andaikan $\tau_j(1)$ adalah waktu rantai Markov mengenai kedudukan j pertama kali.

Maka

$P_i(X_n = j$ untuk sekurang-kurangnya m nilai dari $n \geq 1)$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} P_i(\tau_j(1) = k,\ X_{\tau_j(1)+\ell} = j \text{ untuk sekurang-kurangnya m-1 nilai dari } \ell \geq 1)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} P_i(\tau_j(1) = k)\ P_i(X_{\tau_j(1)+\ell} = j \text{ untuk sekurang-kurangnya m-1 nilai dari } \ell \geq 1 \mid \tau_j(1) = k)$$

Jika $\{X_{\tau_j(1)} = j\}$ adalah kejadian yang pasti terjadi S. $\tau_j(1)$ adalah waktu berhenti untuk rantai Markov yang diandaikan dan kejadian acak $\{\tau_j(1) = k\}$ adalah sebelum $\tau_j(1)$, maka diperoleh

$P_i(X_{\tau_j(1)+\ell} = j$ untuk sekurang-kurangnya m-1 nilai dari $\ell \geq 1 | \tau_j(1) = k)$

$= P_i(X_{\tau_j(1)+\ell} = j$ untuk sekurang-kurangnya m-1 nilai dari $\ell \geq 1 | X_{\tau_j(1)} = j,\ \tau_j(1) = k)$

$= P_i(X_{\tau_j(1)+\ell} = j$ untuk sekurang-kurangnya m-1 nilai dari $\ell \geq 1 | X_{\tau_j(1)} = j)$

dengan sifat Markov kuat

$= P_i(X_\ell = j$ untuk sekurang-kurangnya m-1 nilai dari $\ell \geq 1 | X_0 = j)$

dengan sifat Markov kuat

$= (f_{jj})^{m-1}$ oleh hipotesis induksi

Jadi, $P_i(X_n = j$ untuk sekurang-kurangnya m nilai dari

$$n \geq 1) = \sum_{k=1}^{\infty} f_{ij}^{k} (f_{jj})^{m-1} = f_{ij}(f_{jj})^{m-1}$$

Jadi probabilitas bahwa kedudukan j akan dicapai sekurang-kurangnya r kali adalah $f_{ij}(f_{jj})^{r-1}$ ∎

AKIBAT 3.6.2. Andaikan kedudukan awal suatu rantai Markov adalah i. Jika j berulang, maka probabilitas bahwa kedudukan j dicapai tak berhingga kali adalah f_{ij} ; jika j transien, maka probabilitas bahwa kedudukan j dicapai tak berhingga kali adalah 0.

Bukti : Bukti akibat 3.6.2 di atas sejalan dengan bukti akibat 3.6.1.

Kejadian {kedudukan j dicapai sekurang-kurangnya r kali}, r = 1, 2, ... membentuk barisan yang irisannya adalah kejadian {kedudukan j dicapai tak berhingga kali}

∴ Probabilitas kedudukan j dicapai tak berhingga kali adalah

$$\lim_{r \to \infty} f_{ij}(f_{jj})^{r-1} = \begin{cases} f_{ij}, & \text{jika } f_{jj} = 1 \\ 0, & \text{jika } f_{jj} < 1 \end{cases} \quad \blacksquare$$

Yang perlu diperhatikan adalah pada kasus dari suatu kedudukan transien j, akibat 3.6.2 di atas dipenuhi oleh sebarang sebaran awal.

P(Kedudukan j terjadi tak berhingga kali)

$$= \sum_{i \in S} P(X_0 = i)\ P(\text{Kedudukan } j \text{ dicapai tak berhingga kali} \mid X_0 = i)$$

$$= \sum_{i \in S} P(X_0 = i)\ 0 = 0.$$

Selain itu, probabilitas dari sisa kedudukan dalam himpunan kedudukan-kedudukan transien T adalah 0.

Karena $P(X_n \in T \text{ untuk semua } n \ge 0) \le \sum_{j \in T} P(\text{Kedudukan } j \text{ terjadi tak berhingga kali})$, sedangkan

$\sum_{j \in T} P(\text{Kedudukan } j \text{ terjadi tak berhingga kali}) = 0$. Maka,

$P(X_n \in T \text{ untuk semua } n \ge 0) = 0.$

TEOREMA 3.6.4. Kedudukan i adalah berulang bila dan hanya bila $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{n} = \infty$

Bukti : Menggunakan teorema 3.6.1 (teorema jalan masuk pertama)

($\Rightarrow$) Akan dibuktikan jika i adalah kedudukan berulang, maka $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{n} = \infty$.

Dibuktikan dengan kontraposisi, yaitu :

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{n} \neq \infty \Rightarrow \text{i tidak berulang atau}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{n} \neq \infty \Rightarrow \text{i transien}$$

Menggunakan teorema 3.6.1 (teorema jalan masuk pertama)

$$p_{ii}^{n} = \sum_{k=1}^{n} f_{ii}^{k} \; p_{ii}^{n-k}$$

Jadi,

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} f_{ii}^{k} \; p_{ii}^{n-k} = \sum_{k=1}^{\infty} f_{ii}^{k} \sum_{n=k}^{\infty} p_{ii}^{n-k}$$

$$= f_{ii} \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{n}$$

Diperoleh

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{n} = f_{ii} (1 + \sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{n})$$

Oleh karena itu, jika $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{n} < \infty$ maka $f_{ii} < 1$.

Menurut definisi 3.6.4, i adalah kedudukan transien.

Jadi, jika i adalah kedudukan berulang maka $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{n} = \infty$.

($\Leftarrow$) Akan dibuktikan jika $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{n} = \infty$ maka i adalah kedudukan berulang.

$$\sum_{n=1}^{N} p_{ii}^{n} = \sum_{n=1}^{N} \sum_{k=1}^{n} f_{ii}^{k} \; p_{ii}^{n-k}$$

$$= \sum_{k=1}^{N} f_{ii}^{k} \sum_{n=k}^{N} p_{ii}^{n-k} \leq \sum_{k=1}^{N} f_{ii}^{k} \sum_{r=0}^{N} p_{ii}^{r}$$

Diperoleh

$$f_{ii} = \sum_{k=1}^{\infty} f_{ii}^{k} \geq \sum_{k=1}^{N} f_{ii}^{k} \geq \frac{\sum_{n=1}^{N} p_{ii}^{n}}{\sum_{r=0}^{N} p_{ii}^{r}} \longrightarrow 1$$

bila dan hanya bila $N \longrightarrow \infty$.

Tetapi $N \longrightarrow \infty$ bila $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{n} = \infty$.

Jadi, jika $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{n} = \infty$ maka $f_{ii} = 1$ atau i berulang. ■

TEOREMA 3.6.5. Jika j suatu kedudukan transien dan i sebarang kedudukan, maka $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{n} < \infty$.

<u>**Bukti**</u> : Menggunakan teorema jalan masuk pertama.

$$p_{ij}^{n} = \sum_{k=1}^{n} f_{ij}^{k} \; p_{jj}^{n-k}$$

Jadi,

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} f_{ij}^{k} \; p_{jj}^{n-k} = \sum_{k=1}^{\infty} f_{ij}^{k} \sum_{n=0}^{\infty} p_{jj}^{n}$$

$$= f_{ij} \sum_{n=0}^{\infty} p_{jj}^{n}$$

f_{ij} adalah suatu probabilitas, yaitu $0 \le f_{ij} \le 1$, jadi $f_{ij} \le 1$.

Dengan menggunakan teorema 3.6.4 diperoleh

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{jj}^{n} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}^{n} < \infty$$

Jadi

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{n} = f_{ij} \sum_{n=0}^{\infty} p_{jj}^{n} < \infty \qquad \blacksquare$$

Dengan teorema jalan masuk pertama, f_{ij} dapat dinyatakan dalam pernyataan probabilitas transisi n-langkah, seperti *rumus Doeblin* dalam teorema berikut

TEOREMA 3.6.6. Rumus Doeblin. Untuk sebarang kedudukan i dan kedudukan j dipenuhi

$$f_{ij} = \lim_{s\to\infty} \frac{\sum_{n=1}^{s} p_{ij}^{n}}{1 + \sum_{n=1}^{s} p_{jj}^{n}} \qquad (3.6.2)$$

<u>**Bukti**</u> : Menggunakan teorema 3.6.1 (teorema jalan masuk pertama)

$$\sum_{n=1}^{s} p_{ij}^{n} = \sum_{n=1}^{s}\sum_{m=1}^{n} f_{ij}^{m}\, p_{jj}^{n-m} = \sum_{m=1}^{s}\left(f_{ij}^{m} \sum_{n=m}^{s} p_{jj}^{n-m}\right)$$

di mana

$$\left(1 + \sum_{n=1}^{s} p_{jj}^{n}\right) \sum_{m=1}^{s} f_{ij}^{m} \ge \sum_{n=1}^{s} p_{ij}^{n} \ge \left(1 + \sum_{n=1}^{s-s'} p_{jj}^{n}\right) \sum_{m=1}^{s'} f_{ij}^{m}$$ untuk semua $s' < s$.

Untuk $1 + \sum_{n=1}^{s} p_{jj}^{n}$ diperoleh $\sum_{n=m}^{s} p_{jj}^{n-m} = 1 + \sum_{n=1}^{s-m} p_{jj}^{n}$, juga untuk $\sum_{m=1}^{s}\left(f_{ij}^{m} \sum_{n=m}^{s} p_{jj}^{n-m}\right)$ diperoleh

$$\sum_{m=1}^{s'}\left(f_{ij}^{m} \sum_{n=m}^{s-s'+m} p_{jj}^{n-m}\right) = \left(1 + \sum_{n=1}^{s-s'} p_{jj}^{n}\right) \sum_{m=1}^{s'} f_{ij}^{m} \qquad (3.6.3)$$

Bagi ruas kanan persamaan (3.6.3) dengan $1 + \sum_{n=1}^{s} p_{jj}^{n}$, diperoleh

$$\frac{\left(1+\sum_{n=1}^{s-s'} p_{jj}^{n}\right)\sum_{m=1}^{s'} f_{ij}^{m}}{1+\sum_{n=1}^{s} p_{jj}^{n}}$$

Dengan mengandaikan $s \to \infty$, diperoleh

$$\lim_{s\to\infty} \frac{\left(1+\sum_{n=1}^{s-s'} p_{jj}^{n}\right)\sum_{m=1}^{s'} f_{ij}^{m}}{1+\sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}^{n}} = \sum_{m=1}^{s'} f_{ij}^{m}$$

Kemudian dengan mengandaikan pula $s' \to \infty$ diperoleh

$$\lim_{s'\to\infty} \sum_{m=1}^{s'} f_{ij}^{m} = f_{ij}.$$

Jadi, $$f_{ij} = \lim_{s\to\infty} \frac{\sum_{n=1}^{s} p_{ij}^{n}}{1+\sum_{n=1}^{s} p_{jj}^{n}} \qquad \blacksquare$$

Dengan menggunakan teorema 3.6.6, jika $j = i$ maka

$$f_{ii} = 1 - \lim_{s\to\infty} \frac{1}{1+\sum_{n=1}^{s} p_{ii}^{n}}$$

AKIBAT 3.6.3. Kedudukan i adalah berulang bila deret $\sum_{n\geq 1} p_{ii}^{n}$ divergen dan kedudukan i adalah transien bila deret $\sum_{n\geq 1} p_{ii}^{n}$ konvergen.

<u>Bukti</u> : Menggunakan rumus Doeblin, divergensi deret $\sum_{n\geq 1} p_{ii}^{n}$ mengakibatkan $f_{ii} = 1$ dan kovergensi deret $\sum_{n\geq 1} p_{ii}^{n}$ mengakibatkan $f_{ii} < 1$. ∎

AKIBAT 3.6.4. Andaikan i adalah kedudukan sebarang. Jika j adalah suatu kedudukan transien maka deret $\sum_{n\geq 1} p_{ij}^{n}$ konvergen. Karenanya $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{n} = 0$.

<u>Bukti</u> : Diketahui j adalah suatu kedudukan transien, maka menurut akibat 3.6.3 deret $\sum_{n\geq 1} p_{jj}^{n}$ konvergen. Dengan rumus Doeblin, deret $\sum_{n\geq 1} p_{ij}^{n}$ konvergen juga dan jumlahnya sama dengan $f_{ij} \sum_{n\geq 0} p_{jj}^{n}$. Karena deret $\sum_{n\geq 1} p_{ij}^{n}$ konvergen maka $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{n} = 0$ (dengan teorema kovergensi dalam kalkulus). ∎

AKIBAT 3.6.5. Ruang kedudukan suatu rantai Markov berhingga memuat sekurang-kurangnya sebuah kedudukan yang berulang.

<u>Bukti</u> : Akan dibuktikan dengan kontradiksi.

Andaikan semua kedudukan dari rantai Markov berhingga (S = 1,2, ... ,r) adalah transien, maka

$$\sum_{j=1}^{r} p_{ij}^{n} = 1, \ \forall \ n \qquad (3.6.4)$$

Andaikan n $\longrightarrow \infty$, dengan menggunakan akibat 3.6.4 dan kenyataan bahwa limit dari suatu jumlahan berhingga unsur-unsur adalah jumlah limit unsur-unsurnya, diperoleh :

$$0 = \sum_{j=1}^{r} \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{n} = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{r} p_{ij}^{n} = 1.$$

suatu kotradiksi. ■

Kasus khusus dari akibat 3.6.5, yaitu jika setiap kedudukan dalam suatu rantai berhingga dapat dicapai dari setiap kedudukan lain, sehingga hanya terdapat sebuah kelas ekuivalen (namakan S), maka semua kedudukan adalah transien atau berulang seperti yang akan dibahas pada teorema berikut.

TEOREMA 3.6.7. Keadaan berulang dan keadaan transien adalah sifat-sifat kelas.

<u>Bukti</u> : Karena keadaan transien dapat didefinisikan dari keadaan berulang, yaitu keadaan transien adalah keadaan tak berulang, maka hanya keadaan berulang yang akan dibuktikan.

Andaikan C adalah suatu kelas dari kedudukan, dan andaikan pula $i \in C$ adalah kedudukan berulang. Jika $j \in C$, $j \neq i$, maka $i \leftrightarrow j$ dan terdapat $r > 0$, $s > 0$ sedemikian hingga $p_{ij}^{r} = a > 0$, $p_{ji}^{s} = b > 0$. Andaikan $n > 0$, menggunakan persamaan Chapman-Kolmogorov diperoleh :

$$p_{jj}^{n+r+s} \geq p_{ji}^{s}\ p_{ii}^{n}\ p_{ij}^{r}$$

Juga diperoleh

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}^{n+r+s} \geq \sum_{n=1}^{\infty} p_{ji}^{s}\ p_{ii}^{n}\ p_{ij}^{r} = p_{ji}^{s}\ p_{ij}^{r} \sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{n}$$

$$= a\ b \sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{n}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{n}$ divergen $\Rightarrow$ $a\ b \sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{n}$ divergen

Karena

$a\ b \sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}^{n+r+s}$ maka $\sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}^{n+r+s}$ juga divergen.

Dan karena $\sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}^{n+r+s} < \sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}^{n}$, maka $\sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}^{n}$ divergen.

Oleh karena itu jika $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{n}$ divergen, maka $\sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}^{n}$ juga divergen. Menggunakan akibat 3.6.3 j adalah kedudukan berulang. ■

Teorema 3.6.7 ini membuktikan bahwa keadaan berulang merupakan sifat kelas sebagaimana periode, yaitu semua kedudukan dalam suatu kelas ekuivalensi adalah berulang atau tidak berulang. Teorema ini juga memberikan syarat untuk menyatakan apakah kelas-kelas kedudukan berulang atau transien.

TEOREMA 3.6.8. Andaikan i adalah suatu kedudukan berulang. Jika $i \longrightarrow j$ maka kedudukan j berulang, dan $f_{ij} = f_{ji} = 1$.

Dalam kenyataannya, jika f'_{ij} adalah probabilitas bahwa kedudukan j akan dicapai tak berhingga kali apabila kedudukan awalnya adalah i, maka $f'_{ij} = f'_{ji} = 1$.

<u>**Bukti**</u> : Andaikan rantai Markov mulai dari kedudukan i dan $\tau_j(1)$ adalah waktu rantai Markov mencapai kedudukan j pertama kali. Untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ apabila kedudukan i berulang, maka

$$1 = P_i(\text{kedudukan i dicapai tak berhingga kali})$$

$$1 = \sum_{k=1}^{\infty} P_i(\tau_j(1) = k) + P_i(\tau_j(1) = \infty)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} P_i\left(\tau_j(1) = k, \text{ tak berhingga kali banyak pencapaian ke i setelah } \tau_j(1)\right) + P_i(\tau_j(1) = \infty).$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} P_i\left(\tau_j(1) = k\right) P_i\left(X_{\tau_j(1)+1}, X_{\tau_j(1)+2}, \ldots, \text{ mencapai i tak berhingga kali} \mid \tau_j(1) = k, X_{\tau_j(1)} = j\right) + \left(1 - f_{ij}\right).$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} f_{ij}^{k} \quad P_i\left(X_1, X_2, \ldots, \text{ mencapai i tak berhingga kali} \mid X_0 = j\right) + \left(1 - f_{ij}\right).$$

Maka

$1 \;= f_{ij} f'_{ji} + 1 - f_{ij}$ atau $f_{ij} = f_{ij} f'_{ji}$

selama $f_{ij} > 0$ diperoleh $f'_{ji} = 1$.

Sekarang, jika $p^{r}_{ij} > 0$, $p^{s}_{ji} > 0$, maka

$$p^{n+r+s}_{jj} \geq p^{s}_{ji}\; p^{n}_{ii}\; p^{r}_{ij}$$

Sebuah lintasan dari kedudukan j kembali ke kedudukan j dalam n+r+s langkah adalah perpindahan dari kedudukan j ke kedudukan i dalam s langkah, dari kedudukan i ke kedudukan i dalam n langkah, dan akhirnya dari kedudukan i ke kedudukan j dalam r langkah. Dari Teorema 3.6.4 dapat disimpulkan

$\sum_{n=1}^{\infty} p^{n}_{jj} = \infty$, atau dengan kata lain j berulang. Jadi, j berulang dan $f_{ji} > 0$.

Dengan jalan yang serupa dan mengganti i dengan j, diperoleh $f'_{ij} = 1$ selama $f_{ij} \geq f'_{ij}$, $f_{ji} \geq f'_{ji}$.

Akhirnya diperoleh $f_{ij} = f_{ji} = 1$. ■

Teorema-teorema berikut membahas hubungan antara kelas tertutup yang telah kita definisikan pada sub bab 3.3 (definisi 3.3.4) dan kelas berulang.

TEOREMA 3.6.9. Sebuah kelas kedudukan C disebut tertutup bila dan hanya bila untuk semua $i \in C$, i mencapai j mengakibatkan $j \in C$.

Bukti :

($\Rightarrow$) Andaikan C tertutup. Jika $i \in C$ dan i mencapai j, maka $p_{ij}^{n} > 0$ untuk suatu n. Andaikan $j \notin C$. Jika $j \notin C$, maka terdapat $k \in C$ sedemikian hingga

$\sum_{k \in C} p_{ik}^{n} < 1$. Suatu kontradiksi. ■

($\Leftarrow$) Diketahui untuk semua $i \in C$, i mencapai $j \Rightarrow j \in C$. Akan dibuktikan C tertutup.

Andaikan C tidak tertutup, maka $\sum_{j \in C} p_{ij} < 1$ untuk suatu $i \in C$; karenanya $p_{ij} > 0$ untuk suatu $i \in C$, $j \notin C$. Kontradiksi dengan $j \in C$.

$\therefore$ C tertutup ■

TEOREMA 3.6.10 Suatu kelas disebut berulang bila dan hanya bila kelas tersebut tertutup.

Bukti :

($\Rightarrow$) Andaikan C adalah suatu kelas berulang. Jika C tidak tertutup, maka dengan teorema 3.6.9 diperoleh i mencapai j untuk suatu $j \notin C$ dan suatu $i \in C$. Tetapi dengan teorema 3.6.8, $i \leftrightarrow j$, maka i ekuivalen dengan j (i dan j terletak dalam satu kelas ekuivalen).

Kontradiksi dengan $i \in C$, $j \notin C$.

$\therefore$ C tertutup.

($\Leftarrow$) Andaikan C adalah suatu kelas tertutup. Dengan akibat 3.6.5 (berkenaan dengan rantai Markov dengan ruang kedudukan C dan matriks probabilitas transisi $\| p_{ij} \|$, $i, j \in C$) maka terdapat sekurang-kurangnya satu kedudukan berulang dalam C. Tetapi kedudukan berulang adalah sifat kelas, oleh karena itu C adalah suatu kelas berulang. ■

Dalam mempelajari rantai Markov, salah satu tugas yang mendasar adalah menentukan kedudukan mana yang transien dan kedudukan mana yang berulang. Untuk rantai Markov berhingga ada suatu metode klasifikasi yang dapat digunakan yaitu :

(1) Pisahkan ruang kedudukan (S) menjadi kelas-kelas ekuivalensi.

(2) Kelas-kelas ekuivalensi tertutup adalah berulang.

(3) Kelas-kelas ekuivalensi yang tidak tertutup mengandung kedudukan-kedudukan transien.

Pemisahan S menjadi kelas-kelas ekuivalensi dapat dilakukan dengan langkah-langkah berikut :

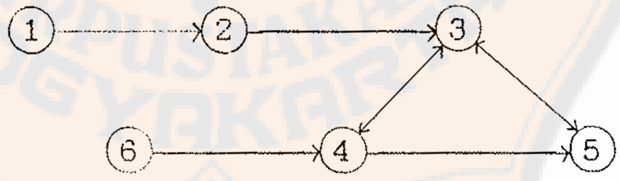
(1) Pilih sebuah kedudukan, misalnya i dan tentukan semua kedudukan j yang dapat dicapai dari i. Tentukan pula semua kedudukan yang dapat dicapai dari j dan seterusnya. Proses ini akan membuat $\mathcal{cl}(i)$, himpunan tertutup terkecil yang mengandung i. Pilih $k \notin \mathcal{cl}(i)$, dan tentukan pula $\mathcal{cl}(k)$. Lanjutkan proses ini sampai semua kedudukan dalam

S telah dicapai dari kedudukan lain.

(2) Himpunan-himpunan tertutup yang dihasilkan boleh jadi mengandung lebih dari 1 kelas ekuivalensi. Kelas-kelas ekuivalensi yang tidak tertutup yang merupakan himpunan bagian dari himpunan-himpunan tertutup akan mengandung kedudukan transien.

(3) Gambarkan graf berarah kedudukan-kedudukan yang akan sangat membantu jika banyaknya kedudukan masuk akal.

CONTOH 3.6.1 : Andaikan suatu rantai Markov berhingga disajikan dengan sebuah graf seperti terlihat pada gambar 3.6.1. Anak panah dari i ke j menyatakan $p_{ij}>0$. Terdapat 3 kelas ekuivalen , C_1 = {1,2}, C_2 = {3,4,5} dan C_3 = {6}. Dengan menggunakan teorema 3.6.10 didapat C_2 berulang, C_1 dan C_3 transien.

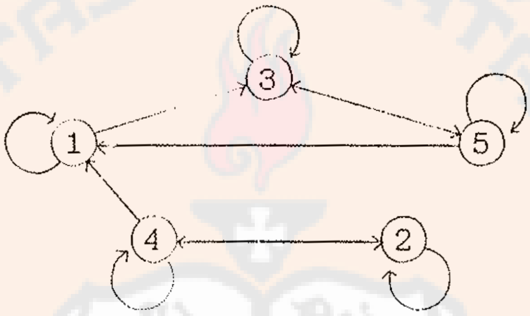


gambar 3.6.1

CONTOH 3.6.2 : Andaikan S = {1,2,...,5} dengan matriks probabilitas transisinya disajikan sebagai berikut

$$P = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc} 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 & 3/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 & 2/3 \\ 1/4 & 1/2 & 0 & 1/4 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \end{array} \right] \end{array}$$

Graf berarahya disajikan dengan



Perhatikan $\mathcal{C}(1)$ = {1,3,5} adalah suatu kelas selanjutnya {2,4} adalah juga suatu kelas, tetapi tidak tertutup. Jadi, $S = T \cup C_1$, di mana T = {2,4} dan C_1 = {1,3,5}. Dalam bentuk kanonik matriksnya menjadi :

$$P = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|cc} 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1/4 & 3/4 \\ 1/4 & 0 & 0 & 1/2 & 1/4 \end{array} \right] \end{array}$$

BAB IV

RANTAI MARKOV MENYERAP

Sebuah kedudukan i dari suatu rantai Markov dikatakan menyerap apabila $p_{ii} = 1$ dan semua elemen lainnya dalam baris tersebut dari matriks transisinya sama dengan 0. Suatu rantai Markov, dengan semua kedudukan berulangnya menyerap disebut *rantai Markov menyerap.*

Bab ini mempelajari macam-macam aspek berkenaan dengan gerakan rantai Markov menyerap sampai pada penyerapan, yaitu sampai rantai tersebut mencapai suatu kedudukan berulang. Juga akan dibahas peubah-peubah acak, seperti banyaknya kedudukan transien yang terjadi sebelum penyerapan, banyaknya langkah sampai pada penyerapan, kedudukan-kedudukan dalam rantai di mana penyerapan terjadi.

Ketika menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan gerakan rantai Markov menyerap dalam himpunan kedudukan transiennya, sifat umum rantai tersebut tidak akan hilang jika semua kedudukan berulangnya diasumsikan menyerap. Akibatnya dalam masalah-masalah tersebut matriks transisi dari rantai Markov akan diasumsikan berbentuk kanonik

$$P = \begin{pmatrix} I & 0 \\ R & T \end{pmatrix}$$

4.1 Matriks Fundamental

Banyaknya kedudukan transien j yang terjadi dinyatakan dengan v_j. v_j adalah peubah acak yang karena akibat 3.6.2 berhingga dengan probabilitas 1 (yaitu, $P(v_j < \infty) = 1$).

DEFINISI 4.1.1. v_j dapat disajikan sebagai jumlah dari suatu deret takhingga dengan mengandaikan peubah-peubah acak u_j^m, $m \geq 0$ yang didefinisikan sebagai

$$u_j^m = \begin{cases} 1, & \text{jika } X_m = j \\ 0, & \text{jika } X_m \neq j \end{cases}$$

yaitu,

$$v_j = \sum_{m \geq 0} u_j^m$$

Perhatikan E_i[1]$(u_j^m) = 1\ P_i(X_m = j) + 0\ P_i(X_m \neq j)$

$$= p_{ij}^m$$

Oleh karena itu untuk semua $i, j \in T$ diperoleh

$$E_i(v_j) = E_i\left(\sum_{m \geq 0} u_j^m\right)$$

$$= \sum_{m \geq 0} E_i(u_j^m)$$

$$= \sum_{m \geq 0} p_{ij}^m$$

TEOREMA 4.1.1. Jika A adalah matriks bujursangkar sedemikian hingga $A^n \to 0$ (matriks nol) untuk $n \to \infty$,

[1] E_i menotasikan operator nilai rata-rata di bawah probabilitas P_i.

maka terdapat invers $(I - A)^{-1}$ dan dinyatakan dengan

$$(I - A)^{-1} = \sum_{n\geq 0} A^n$$

Bukti : Perhatikan bahwa

$$(I - A)(I + A + \ldots + A^{n-1}) = I - A^n$$

Dengan hipotesis, ruas kanan konvergen ke matriks satuan I yang mempunyai determinan 1. Maka untuk n cukup besar, det $(I - A^n) \neq 0$. Karena determinan dari hasil kali dua matriks adalah hasil kali determinan masing-masing matriksnya maka dapat disimpulkan $\det(I-A) \neq 0$. Oleh karena itu $(I - A)^{-1}$ ada.

Kalikan kedua ruas dari identitas di atas dengan $(I - A)^{-1}$ menghasilkan

$$I + A + \ldots + A^{n-1} = (I - A)^{-1}(I - A^n)$$

Dengan mengandaikan $n \to \infty$, diperoleh

$$I + A + \ldots = (I - A)^{-1} = \sum_{n\geq 0} A^n \qquad \blacksquare$$

Dalam notasi matriks, $(E_i(v_j))_{i,j \in T}$ dapat dinyatakan dengan $(E_i(v_j))_{i,j \in T} = I + T + T^2 + \ldots$

$$= (I - T)^{-1} \qquad (4.1)$$

(menggunakan Teorema 4.1.1)

DEFINISI 4.1.2. Untuk suatu rantai Markov menyerap matriks $(I-T)^{-1}$ dalam persamaan (4.1) disebut *matriks fundamental* dan dinotasikan dengan

$$N = (I - T)^{-1}$$

CONTOH 4.1.1. : Perhatikan contoh 3.2.1 (Masalah kekalahan penjudi) dalam Bab 3.

$$T = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \ell-2 \\ \ell-1 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & \cdots & \ell-2 & \ell-1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & p & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ q & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & & q & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$(I - T) = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & p & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ q & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & q & 0 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -p & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -q & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -p \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -q & 1 \end{bmatrix}$$

Matriks fundamental $N = (I - T)^{-1}$ dapat diperoleh dengan menggunakan rumus

$$(I - T)^{-1} = \frac{1}{\left|(I - T)\right|} \operatorname{adj}(I - T)$$

Elemen-elemen matriks fundamental $N = (I - T)^{-1}$ disajikan dengan

$$n_{ij} = \frac{1}{(2p-1)(a^{\ell}-1)} \begin{cases} (a^{j}-1)(a^{\ell-i}-1) & ,\text{jika } j \le i, \\ (a^{i}-1)(a^{\ell-1}-a^{j-i}) & ,\text{jika } j > i, \end{cases}$$

Untuk $p \neq 1/2$ di mana $a = p/q$, dan

$$n_{ij} = \frac{2}{\ell} \begin{cases} j(\ell - i), \text{ jika } j \le i, \\ i(\ell - j), \text{ jika } j > i, \end{cases}$$

Untuk $p = 1/2$.

Khususnya untuk $\ell = 4$ diperoleh

$$N = \frac{1}{p^2 + q^2} \begin{bmatrix} p+q^2 & p & p^2 \\ q & 1 & p \\ q^2 & q & q+p^2 \end{bmatrix}$$

CONTOH 4.1.2. : Perhatikan contoh 3.2.2 dalam Bab 3.

$$T = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ d-2 \\ d-1 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & \ldots & d-2 & d-1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} r_1 & p_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & r_1 & p_2 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_1 & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & r_{d-1} & p_{d-1} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & r_d \end{bmatrix} \end{array}$$

Elemen-elemen matriks fundamental $N = (I - T)^{-1}$ disajikan dengan

$$n_{ii} = (1 - r_i)^{-1}, \; 1 \le i \le d-1,$$

$$n_{ij} = p_i \ldots p_{j-1}(1 - r_i)^{-1} \ldots (1 - r_j)^{-1}, \; i < j,$$

$$n_{ij} = 0 \;, \; i > j.$$

4.2. Penerapan Matriks Fundamental

DEFINISI 4.2.1. Momen. Jika X adalah peubah acak, momen ke r dari X, ditulis dengan μ_r', didefinisikan sebagai $\mu_r' = \mathbf{E}(X^r)$.

Perhatikan bahwa $\mu_1' = \mathbf{E}(X) = \mu_x$ adalah rata-rata dari X.

Teorema berikut adalah perumuman hasil yang berkenaan dengan eksistensi nilai rata-rata $E_i(v_j)_{i,j\in T}$.

TEOREMA 4.2.1. Momen kedua $E_i(v_j^2)$ dari peubah acak v_j adalah berhingga untuk sebarang rantai menyerap dan sebarang kedudukan i, j $\in$ T.

<u>Bukti</u> : $E_i(v_j^2) = \left[\left(\sum_{m=0}^{\infty} u_j^m\right)^2\right] = E_i\left[\left(\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{\ell=0}^{\infty} u_j^m \; u_j^\ell\right)\right]$

$$= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{\ell=0}^{\infty} E_i\left[u_j^m \; u_j^\ell\right]$$

$E_i\left[u_j^m \; u_j^\ell\right]$ adalah probabilitas rantai Markov berada dalam kedudukan j baik pada langkah m maupun pada langkah ℓ. Andaikan k = min(m,ℓ), dan d = |m−ℓ|, maka probabilitas di atas menjadi probabilitas rantai Markov yang berada dalam kedudukan j setelah k langkah dan probabilitas kembali ke kedudukan j, d langkah kemudian.

Jadi, $E_i\left[u_j^m \; u_j^\ell\right] = p_{ij}^{k} \; p_{jj}^{d}$

$$E_i(v_j^2) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{\ell=0}^{\infty} p_{ij}^{k} \; p_{jj}^{d}$$

$$\leq \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{\ell=0}^{\infty} (b.c^{k})(b.c^{d})$$

$$= b^2 \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{\ell=0}^{\infty} c^n, \text{ di mana } n = \max(m,\ell)$$

$$= b^2 \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)\, c^n, \text{ yang berhingga.}$$ ■

TEOREMA 4.2.2. $TN = NT = N - I$

Bukti : Dari persamaan (4.1.1) dan definisi 4.1.2 diperoleh $N = I + T + T^2 + \dots$ .Oleh karena itu $TN = T + T^2 + T^3 + \dots$ yang merupakan deret mula-mula tanpa I. ■

TEOREMA 4.2.3. Momen kedua $E_i(v_j^2)$ dari peubah acak v_j dapat dinyatakan dengan matriks $N_2 = N\left[2(TN)_{dg} + I\right]$

$$= N\left[2N_{dg} - I\right]$$

Bukti :

$$E_i(v_j^2) = \sum_{n\geq 0} n^2 P_i(v_j=n)$$

$$= \delta_{ij} P_i((v_j=\delta_{ij}) + \sum_{n\geq \delta_{ij}+1} n^2 P_i(v_j=n), \text{ dengan}$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{jika } i = j \\ 0, & \text{jika } i \neq j \end{cases}$$

$$= \delta_{ij} P_i(X_1 \notin T) + \sum_{n\geq \delta_{ij}+1} \sum_{k\in T} n^2 P_i(v_j=n \mid X_1=k) P_i(X_1=k)$$

$$= \delta_{ij} \sum_{\ell\notin T} p_{i\ell} + \sum_{k\in T} p_{ik} \sum_{n\geq 0} (n+\delta_{ij})^2 P_k(v_j=n-\delta_{ij})$$

Selama $P_i(v_j=n \mid X_1=k) = P_k(v_j= n-\delta_{ij})$

$$= \delta_{ij} \sum_{\ell\notin T} p_{i\ell} + \sum_{k\in T} p_{ik} E_k\left[(v_j+\delta_{ij})^2\right]$$

$$= \delta_{ij} \sum_{\ell\notin T} p_{i\ell} + \sum_{k\in T} p_{ik} E_k\left[v_j^2 + 2v_j\delta_{ij} + \delta_{ij}^2\right]$$

$$= \sum_{k\in T} p_{ik} \left[E_k(v_j^2) + 2E_k(v_j).\delta_{ij}\right] + \delta_{ij}$$

Dalam notasi matriks

$$N_2 = T\left[E_i(v_j^2)\right] + 2(TN)_{dg} + I$$

$$N_2 = TN_2 + 2(TN)_{dg} + I$$

$$(I-T)N_2 = 2(TN)_{dg} + I$$

$$N_2 = (I-T)^{-1}\left[2(TN)_{dg} + I\right]$$

$$= N\left[2(TN)_{dg} + I\right]$$

$$= N\left[2(N-I)_{dg} + I\right]$$

$$= N(2N_{dg} - I) \qquad \blacksquare$$

DEFINISI 4.2.2. Andaikan v menotasikan banyaknya langkah (termasuk posisi awal) di mana rantai Markov berada dalam suatu kedudukan transien. Peubah acak v disebut *waktu untuk menyerap (time to absorption)* dan dinyatakan dengan $v = \sum_{j\in T} v_j$.

Sebaran probabilitas dari v dapat ditemukan seperti kejadian acak $\{v > t\}$ dan $\{X_t \in T\}$. Kejadian-kejadian acak $\{v > t\}$ dan $\{X_t \in T\}$ adalah ekuivalen. Penyerapan terjadi pada suatu saat setelah t bila dan hanya bila pada saat t rantai Markov tersebut masih berada dalam himpunan kedudukan transien T.

Karena kenyataan bahwa $\{v > t-1\} = \{v > t\} \cup \{v = t\}$, $t \geq 1$, maka diperoleh

$$P_i(v = t) = P_i(v > t-1) - P_i(v > t)$$

$$= P_i(X_{t-1} \in T) - P_i(X_t \in T)$$

$$= \sum_{j \in T} (p_{ij}^{t-1} - p_{ij}^{t}) \qquad (4.2)$$

di mana $P_i(v = t)_{i \in T} = (T^{t-1} - T^t)e$

$$= T^{t-1}(I - T)e$$

(e adalah vektor kolom dengan semua elemennya sama dengan 1).

Untuk t = 0, $P_i(v = 0) = 0$, $i \in T$.

Menggunakan persamaan (4.2) vektor rata-rata $\overline{m} = (E_i(v))_{i \in T}$ dapat dihitung dan diperoleh

$$\overline{m} = \left(\sum_{t \geq 0} t\, P_i(v = t)\right)_{i \in T} = \sum_{t \geq 1} t(T^{t-1} - T^t)e$$

$$= Ne \qquad (4.3)$$

TEOREMA 4.2.4. Momen kedua peubah acak v adalah berhingga. Vektor $\overline{m}_2 = \left(E_i(v^2)\right)_{i \in T}$ dihubungkan oleh $\overline{m}_2 = (2N - I)Ne$

<u>**Bukti**</u> : Keberhinggaan momen kedua v mengikuti perhitungan persamaan $v = \sum_{j \in T} v_j$ dari Teorema 4.2.1. Dengan jalan pemikiran yang sama dengan pembuktian Teorema 4.2.2 diperoleh

$$E_i(v^2) = \sum_{\ell \notin T} p_{i\ell} + \sum_{k \in T} p_{ik}\, E_k((v+1)^2)$$

$$= \sum_{k \in T} p_{ik}\left(E_k(v^2 + 2v + 1)\right)$$

$$= \sum_{k \in T} p_{ik} \left[E_k(v^2) + 2\ E_k(v) \right] + 1$$

Atau dalam notasi matriks

$$\begin{aligned}
\overline{m}_2 &= T\left[E_i(v^2)\right] + 2T\overline{m} + e \\
&= T(\overline{m}_2) + 2T\overline{m} + e \\
(I-T)\overline{m}_2 &= 2T\overline{m} + e \\
\overline{m}_2 &= (I-T)^{-1}(2T\overline{m} + e) \\
&= 2NT\overline{m} + Ne \\
&= 2(N-I)\overline{m} + \overline{m} \\
&= (2N-I)\overline{m} \\
&= (2N-I)Ne \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

Sebuah konsep yang belum dibahas pada pembahasan mengenai rantai Markov menyerap di muka dapat digambarkan dengan sebuah pertanyaan, yaitu apakah rantai Markov pernah mencapai suatu kedudukan transien yang diberikan. Pertanyaan ini dan pertanyaan-pertanyaan yang berkaitan dengannya akan dibahas pada teorema 4.2.5, teorema 4.2.6 dan definisi 4.2.3 berikut.

Untuk teorema-teorema dan definisi tersebut diandaikan v_j adalah banyaknya kedudukan transien j yang terjadi, v' adalah banyaknya kedudukan transien saling asing yang terjadi sampai penyerapan, dan f_{ij} adalah probabilitas bahwa rantai pernah mencapai kedudukan transien j, dimulai dari kedudukan transien i.

v' adalah peubah acak yang nilai-nilainya berupa bilangan asli dari 1 sampai orde matriks T (banyaknya kedudukan transien).

TEOREMA 4.2.5. $F = (f_{ij})_{i,j\in T} = (N-I)N_{dg}^{-1}$

Bukti :

$$E_i(v_j) = \delta_{ij} + f_{ij}E_j(v_j)$$

Atau dalam notasi matriks

$$n_{ij} = I + f_{ij}n_{jj}$$

$$N = I + FN_{dg}$$

$$F = (N-I)N_{dg}^{-1}$$

■

TEOREMA 4.2.6. Probabilitas rantai Markov mencapai suatu kedudukan transien yang diberikan tepat r kali dinyatakan oleh

$$P_i(v_j-\delta_{ij}=r) = \begin{cases} E - F & ,\text{jika } r = 0 \\ F\,F_{dg}^{r-1}(I-F_{dg}) = (N-I)N_{dg}^{-2}(I-N_{dg}^{-1})^{r-1} & ,\text{jika } r > 0 \end{cases}$$

Bukti : Menggunakan teorema 3.6.3 diberikan rantai Markov mulai dalam kedudukan i, probabilitas kedudukan j terjadi tepat r kali, r ≥ 1 adalah

$$f_{ij}(f_{jj})^{r-1} - f_{ij}(f_{jj})^{r} = f_{ij}(f_{jj})^{r-1}(1 - f_{jj})$$

atau dalam notasi matriks

$$f_{ij}(f_{jj})^{r-1} - f_{ij}(f_{jj})^{r} = F\,F_{dg}^{r-1}(I-F_{dg})$$

$$= (N-I)N_{dg}^{-2}(I-N_{dg}^{-1})^{r-1}$$

Probabilitas tidak terjadinya kedudukan j adalah 1-

f_{ij} atau dalam notasi matriks $1 - f_{ij} = E - F$, di mana E adalah matriks rxs yang bersesuaian dan semua elemennya sama dengan 1. ∎

DEFINISI 4.2.3. Nilai Rata-rata v'. Didefinisikan peubah-peubah acak

$$u_j = \begin{cases} 1, \text{ jika } \tau_j < \infty \\ 0, \text{ jika } \tau_j = \infty, \; j \in T \end{cases}$$

di mana $\tau_j \geq 1$ adalah waktu kunjungan pertama ke kedudukan transien j.

Untuk sebarang $i \in T$, $v' = \delta_{x_0 i} + \sum_{j \neq i} u_j$, $i \in T$

dan untuk $E_i(u_j) = P_i(\tau_j < \infty)$

$$= f_{ij}$$

nilai rata-rata dari v' disajikan dengan

$$E_i(v') = 1 + \sum_{j \neq i} f_{ij}$$

Dalam notasi matriks $(E_i(v'))_{i \in T} = (F + I - F_{dg})e$

$$= NN_{dg}^{-1} e$$

Berikut akan dibahas masalah perhitungan probabilitas penyerapan, misalnya probabilitas bahwa rantai Markov mulai dalam kedudukan transien i dan berakhir dalam kedudukan menyerap k. Juga akan dibahas bagaimana menyelesaikan masalah perhitungan probabilitas penyerapan untuk kasus dari suatu rantai menyerap umum di mana kelas-kelas berulang tidak tereduksi ke kedudukan-kedudukan menyerap.

TEOREMA 4.2.7. Andaikan a_{ik} menotasikan probabilitas bahwa rantai Markov mulai dalam kedudukan transien i dan berakhir dalam kedudukan menyerap k, maka $(a_{ik}) = A = NR$, $i \in \mathcal{T}$, $k \in S - \mathcal{T}$

Bukti : a_{ik} adalah tak lain dari f_{ik} selama tidak mungkin terjadi transisi di antara kedudukan-kedudukan menyerap. Sebab, $f_{ik} = P_i(\bigcup_{t\geq 1}\{X_t = k\})$ dan $\{X_t = k\} \subset \{X_{t+1} = k\}$, maka kedudukan k menjadi menyerap. Selanjutnya diperoleh

$$\begin{aligned} a_{ik} &= \lim_{t\to\infty} P_i(X_t = k) \\ &= \lim_{t\to\infty} p^t_{ik} \end{aligned} \qquad (4.4)$$

Menggunakan persamaan Chapman-Kolmogorov,

$$p^{t+1}_{ik} = \sum_{j\in S} p_{ij}\, p^t_{jk}$$

Karena hanya probabilitas-probabilitas p^t_{jk}, $j \in \mathcal{T}$ yang tidak sama dengan 0 dan kenyataan bahwa $p^t_{kk} = 1$, diperoleh $p^{t+1}_{ik} = p_{ik} + \sum_{j\in T} p_{ij}\, p^t_{jk}$

Menggunakan persamaan (4.4) dan dengan mengandaikan $t\longrightarrow\infty$ diperoleh $a_{ik} = p_{ik} + \sum_{j\in T} p_{ij} a_{jk}$, atau dalam notasi matriks $A = R + \mathcal{T}A$

$$(I-\mathcal{T})A = R$$

$$A = NR$$

Bukti alternatif didasarkan pada pengamatan berikut :

Jika setiap saat rantai Markov berada dalam kedudukan transien j maka rantai tersebut mempunyai probabilitas p_{jk} untuk mencapai k. Oleh karena itu

$$a_{ik} = \sum_{j \in T} E_i(v_j) p_{jk}$$

atau dalam notasi matriks

$$A = NR$$ ■

DEFINISI 4.2.4. Andaikan $A = a_{ij}$ adalah matriks bujursangkar berorde r. Suatu bilangan real λ dikatakan menjadi *nilai eigen (eigen value)* dari matriks A bila terdapat sebuah vektor $u \neq 0$, sedemikian hingga $u'A = \lambda u'$.

Jika λ adalah nilai eigen matriks A, maka himpunan $\mathfrak{U}_\lambda$ dari semua vektor u yang memenuhi persamaan $u'A = \lambda u'$ (termasuk vektor nol 0_r) disebut *ruang eigen kiri (left eigenspace)* yang berkorespondensi dengan λ. $\mathfrak{U}_\lambda$ adalah ruang bagian dari R^r (ruang Euclides berdimensi r). Dimensi dari $\mathfrak{U}_\lambda$ disebut *kegandaan geometrik (geometric multiplicity)* dari nilai eigen λ. Nilai-nilai eigen dari matriks A adalah akar-akar dari persamaan aljabar (disebut persamaan karakteristik) det $(\lambda I_r - A) = 0$.

DEFINISI 4.2.5. Vektor taknol dari $\mathfrak{U}_\lambda$ disebut *vektor eigen kiri (left eigen vector)* yang berkorespondensi dengan λ.

AKIBAT 4.2.1. Andaikan matriks $A^* = \begin{bmatrix} I \\ A \end{bmatrix}$. Untuk suatu matriks transisi P diperoleh hubungan $PA^* = A^*$

<u>**Bukti**</u> : $$PA^* = \begin{bmatrix} I & 0 \\ R & T \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I \\ A \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} I \\ R+TA \end{bmatrix}$$

Tetapi, $$\begin{aligned} R + TA &= R + TNR \\ &= (I + TN)R \\ &= (I + T + T^2 + \ldots)R \\ &= NR \\ &= A \end{aligned}$$

Jadi, $PA^* = A^*$ ∎

Dengan akibat 4.2.1 di atas kegandaan geometrik nilai eigen $\lambda = 1$ sama dengan kegandaan aljabarnya (yang sama dengan banyaknya kedudukan-kedudukan menyerap yaitu r). Nilai eigen kiri yang berkorespondensi dengan nilai eigen ini adalah vektor satuan δ_{ij} , $j \in S$, $1 \le i \le r$.

DEFINISI 4.2.6. Jika C adalah suatu kelas berulang maka probabilitas a_{ic}, yaitu rantai Markov mulai dalam kedudukan transien $i \in T$ mencapai C sama dengan jumlah probabilitas penyerapan a_{ik} atas semua kedudukan $k \in C$, yaitu $a_{ic} = \sum_{k \in C} a_{ik}$ dan $(a_{ic})_{i \in T} = NR(\delta_{kc})_{k \in S-T}$, di mana $\delta_{kc} = \begin{cases} 1, & \text{jika } k \in C \\ 0, & \text{jika } k \notin C \end{cases}$

CONTOH 4.2.1. Untuk masalah kekalahan penjudi (contoh 3.2.1) didapat

$$R = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \ell-2 \\ \ell-1 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 0 & \ell \end{array} \\ \begin{bmatrix} q & 0 \\ 0 & 0 \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ 0 & 0 \\ 0 & p \end{bmatrix} \end{array}$$

Dari contoh 4.1.1 diperoleh

$$n_{ij} = \frac{1}{(2p-1)(a^{\ell}-1)} \begin{cases} (a^{j}-1)(a^{\ell-i}-1) & ,\text{jika } j \le i, \\ (a^{i}-1)(a^{\ell-1}-a^{j-i}) & ,\text{jika } j > i, \end{cases}$$

Untuk $p \neq 1/2$ di mana $a = p/q$, dan

$$n_{ij} = \frac{2}{\ell} \begin{cases} j(\ell-i), & \text{jika } j \le i, \\ i(\ell-j), & \text{jika } j > i, \end{cases}$$

Untuk $p = 1/2$.

Menggunakan teorema 4.2.7 probabilitas penyerapan dalam kedudukan 0 dan ℓ dinyatakan dengan

$$a_{i0} = \sum_{j=1}^{\ell-1} n_{ij} p_{j0} = \begin{cases} \dfrac{a^{\ell-i}-1}{a^{\ell}-1}, & \text{jika } p \neq \frac{1}{2}, \\ 1 - \frac{i}{\ell}, & \text{jika } p = \frac{1}{2}, \end{cases}$$

$$a_{i\ell} = 1 - a_{i0}, \qquad 1 \le i \le \ell-1.$$

Probabilitas-probabilitas penyerapan ini dalam 0 kemudian dalam ℓ tidak lain adalah probabilitas kekalahan penjudi I dari penjudi II .

Nilai rata-rata $E_i(v)$ dari persamaan (4.3) menyatakan rata-rata lamanya permainan. Nilai ini disajikan dengan

$$E_i(v) = \sum_{j=1}^{\ell-1} n_{ij} = \begin{cases} \dfrac{1}{2p-1}\left(\ell\dfrac{a^{\ell}-a^{\ell-i}}{a^{\ell}-1} - i\right), & \text{jika } p \neq \frac{1}{2}, \\ i(\ell - i), \text{ jika } p = \frac{1}{2} & , \end{cases}$$

untuk $1 \le i \le \ell-1$.

CONTOH 4.2.2 Untuk contoh 3.2.2

$$R = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ d-2 \\ d-1 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} d & d+1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & q_1 \\ 0 & q_2 \\ 0 & q_3 \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ 0 & q_{d-1} \\ p_d & q_d \end{bmatrix} \end{array}$$

Dari contoh 4.1.2 diperoleh

$$n_{ii} = (1 - r_i)^{-1}, \quad 1 \le i \le d-1,$$

$$n_{ij} = p_i \;\ldots\; p_{j-1}(1-r_i)^{-1} \;\ldots\; (1-r_j)^{-1}, \quad i < j \;,$$

$$n_{ij} = 0 \;, \quad i > j \;.$$

Menggunakan teorema 4.2.7 probabilitas penyerapan dalam kedudukan d dan $d+1$ dinyatakan dengan

$$a_{id} = \sum_{j=1}^{d-1} n_{ij}\, p_{jd} = p_i \;\ldots\; p_d(1-r_i)^{-1} \ldots (1-r_d)^{-1},$$

$$a_{id+1} = 1 - a_{id}, \qquad 1 \le i \le d-1.$$

Probabilitas penyerapan a_{1d} menyajikan probabilitas bahwa orang yang baru mulai belajar menyelesaikan seluruh tingkatan dengan sukses. Probabilitas penyerapan a_{1d+1} menyajikan probabilitas bahwa orang yang baru mulai belajar meninggalkan kursus (DO).

Selanjutnya, $E_i(v) = \sum_{j=0}^{d-1} n_{ij} =$

$$\begin{cases} (1-r_i)^{-1}\left[1+\sum_{j=i}^{d-1} p_i \ldots p_j (1-r_i)^{-1} \ldots (1-r_j)^{-1}\right], & \text{jika } 1 \le i < d-1, \\ (1-r_d)^{-1}, \text{ jika } i = d-1. \end{cases}$$

Secara khusus $E_1(v)$ menyatakan nilai rata-rata dari lamanya pendidikan untuk orang yang baru mulai belajar, diakhiri dengan menyelesaikan dengan sukses atau meninggalkan kursus tersebut (DO).

TEOREMA 4.2.8. Andaikan kejadian acak A = {kedudukan menyerap k} = $\{X_v = k\}$. Akan ditunjukkan bahwa berkenaan dengan probabilitas bersyarat P_A, barisan (X_t), $t \ge 0$ masih tetap suatu rantai Markov menyerap dengan ruang kedudukan $T \cup \{k\}$.

<u>**Bukti**</u> : Satu-satunya kedudukan berulang (Jadi menyerap) adalah k. Perhatikan bahwa untuk membuat probabilitas bersyarat

$$P_A(X_{t+1} = i_{t+1} | X_t = i_t, \ldots, X_o = i_o) \qquad (4.5)$$

sesuai pengandaian pentinglah barisan $i_o, \ldots, i_t$ tidak mengandung kedudukan berulang yang berbeda dari k. Dan jika $i_m = k$ untuk suatu $m \le t$ maka $i_\ell = k$, m

$\leq \ell \leq t$. Tinggal membuktikan berlakunya sifat Markov, yaitu

$$P_A(X_{t+1} = i_{t+1} | X_o = i_o, \ldots, X_t = i_t)$$
$$= P(X_{t+1} = i_{t+1} | X_t = i_t)$$
$$= P(X_{t+1} = i_{t+1} | X_t = k)$$

Andaikan $i_o, \ldots, i_t \in T \cup \{k\}$ dan andaikan $B_o = \{X_o = i_o, \ldots, X_t = i_t\}$. Probabilitas bersyarat (4.5) menjadi

$$P_A(X_{t+1} = i_{t+1} | B_o) = \frac{P(A \cap \{X_{t+1} = i_{t+1}\} \cap B_o)}{P(A \cap B_o)}$$

- Jika diasumsikan $i_o, \ldots, i_t \neq k$. Maka untuk sebarang kejadian acak $B_s = \{X_s = i_s, \ldots, X_t = i_t\}$ $0 \leq s \leq t$ diperoleh

  $$P(A \cap B_s) = P(\{X_v = k\} \cap B_s)$$
  $$= \sum_{\ell \geq 1} P(\{X_{t+\ell} = k\} \cap \{X_u \neq k,\ t \leq u \leq t+\ell\} \cap B_s)$$
  $$= P(B_s) \sum_{\ell \geq 1} f^{\ell}_{i_t k}$$
  $$= P(B_s) f_{i_t k}$$

  Dan

  $$P(A \cap \{X_{t+1} = i_{t+1}\} \cap B_s)$$
  $$= P(B_s) p_{i_t i_{t+1}} \left(\delta_{i_{t+1} k} + \sum_{\ell \geq 1} (1-\delta_{i_{t+1} k}) f^{\ell}_{i_{t+1} k}\right)$$
  $$= P(B_s) p_{i_t i_{t+1}} \left(\delta_{i_{t+1} k} + (1-\delta_{i_{t+1} k}) f_{i_{t+1} k}\right)$$

  Karenanya, perbandingan antara $P(A \cap \{X_{t+1} = i_{t+1}\} \cap B_s)$ dan $P(A \cap B_s)$ yaitu

$$\frac{P(A \cap \{X_{t+1} = i_{t+1}\} \cap B_s)}{P(A \cap B_s)} \qquad (4.6)$$

tidak bergantung pada s, $0 \le s \le t$, jika $i_o, \ldots, i_t \ne k$.

- Hal yang sama dipenuhi jika $i_t = k$ selama kejadian acak $\{X_t = i_t\}$ mengakibatkan kejadian acak A.
  Dan perbandingan di atas (4.6) tereduksi ke $P(X_{t+1} = i_{t+1} | X_t = k)$ untuk sebarang s, $0 \le s \le t$. ■

Sebagai contoh untuk s = 0 dan s = t, persamaan

$$\frac{P(A \cap \{X_{t+1} = i_{t+1}\} \cap B_o)}{P(A \cap B_o)} = \frac{P(A \cap \{X_{t+1} = i_{t+1}\} \cap B_t)}{P(A \cap B_t)}$$

Probabilitas transisi rantai Markov berkenaan dengan probabilitas bersyarat P_A, mengikuti perhitungan pembuktian teorema 4.2.8 di atas.

Untuk $i \ne k$ diperoleh

$$P_A(X_{t+1} = j | X_t = i) = \frac{p_{ij}(\delta_{jk} - (1 - \delta_{jk})f_{jk}}{f_{ik}} = \frac{p_{ij}a_{jk}}{a_{ik}}$$

Untuk $a_{kk} = 1$ dan $P_A(X_{t+1} = k | X_t = k) = 1$.

Berkenaan dengan bentuk kanonik

$$P_A = \begin{array}{c|cc} & k & T \\ \hline k & I & 0 \\ T & R_A & T_A \end{array}$$

dari matriks transisi, R_A adalah vektor dengan elemen-elemen p_{ik}/a_{ik}, $i \in T$, dan $T_A = D_A^{-1} T D_A$, di mana D_A adalah sebuah matriks diagonal dengan elemen-elemen pada diagonal utama a_{ik}, $i \in T$. Juga diperoleh

$$T_A^n = D_A^{-1} T^n D_A, \quad n \geq 1 \quad \text{dan}$$

$$N_A = I + T_A + T_A^2 + \ldots$$

$$= D_A^{-1} N D_A$$

Hasil di atas akan digunakan pada contoh 3.2.2 untuk menghitung rata-rata lamanya pendidikan untuk orang yang baru belajar, bersyarat pada kenyataan bahwa seseorang menyelesaikan kursus dengan sukses (A) atau meninggalkan kursus (A'). Dengan menggunakan notasi-notasi pada halaman sebelumnya diperoleh [2]

$$\mathbf{E}(v|A) = \sum_{j=1}^{d-1} (a_{1d})^{-1} n_{1j} a_{jd}$$

$$= \sum_{i=1}^{d} (1-r_i)^{-1} ,$$

Diketahui $N_A = D_A^{-1} N D_A$, dengan D_A adalah matriks diagonal dengan elemen-elemen pada diagonalnya adalah a_{id}, $i \in T$.

Diketahui pula $\mathbf{E}(v) = \sum_{j=1}^{d-1} n_{ij} = N$,maka

$$\mathbf{E}(v|A) = N_A = \sum_{j=1}^{d-1} (a_{1d})^{-1} n_{ij} a_{jd}.$$

Dengan jalan yang sama diperoleh

$$\mathbf{E}(v|A') = \sum_{j=1}^{d-1} (a_{1d+1})^{-1} n_{1j} a_{jd+1} = (1-r_1)^{-1} +$$

$$+ \sum_{j=2}^{d-1} \frac{p_1 \cdots p_{j-1} (1-r_1)^{-1} \cdots (1-r_j)^{-1} \left[1 - p_j \cdots p_d (1-r_j) \cdots (1-r_d)^{-1}\right]}{1 - p_1 \cdots p_d (1-r_1)^{-1} \cdots (1-r_d)^{-1}}$$

---

[2] $\mathbf{E}(v|A)$ menotasikan nilai rata-rata v di bawah probabilitas P_A

Sampai saat ini telah dihitung probabilitas dan nilai rata-rata rantai Markov yang diberikan dimulai dalam suatu kedudukan transien T. Berikut ini akan dibahas hasil-hasil yang berhubungan dengan kasus dari sebarang sebaran probabilitas awal $\mathbf{p} = p_i$, $i \in S$ atas seluruh ruang kedudukan S. Apapun kejadian acak A, diperoleh

$$P_p(A) = \sum_{i \in S} P_p(X_o = i) P_p(A \mid X_o = i)$$

$$= \sum_{i \in S} p_i P_i(A)$$

Khususnya jika A didefinisikan sebagai perpindahan rantai ke dalam himpunan kedudukan-kedudukan transiennya, maka $P_i(A) = 0$. Untuk sebarang kedudukan i diperoleh

$$P_p(A) = \sum_{i \in T} p_i P_i(A)$$

Dengan menetapkan $\mathbf{p}_T = (p_i)_{i \in T}$, sebagai contoh diperoleh

$$E_p(v_j) = \mathbf{p}_T' N, \quad E_p(v) = \mathbf{p}_T' Ne,$$

$$(P_p(\text{penyerapan terjadi pada kedudukan } k))_{k \in S-T}$$

$$= \mathbf{p}_T' NR + (p_k)_{k \in S-T}.$$

yang berarti probabilitas bahwa penyerapan terjadi pada kedudukan k, dengan sebarang sebaran probabilitas awal $\mathbf{p} = p_i$, $i \in S$ sama dengan hasil kali probabilitas-probabilitas awal $\mathbf{p}_T'$ dan probabilitas bahwa rantai Markov mulai dalam kedudukan transien i berakhir dalam kedudukan menyerap k atau sebaran probabilitas $(p_k)_{k \in S-T}$.

Untuk memberikan contoh menghitung panjang rata-rata dari suatu permainan perhatikan contoh 4.2.3 berikut.

CONTOH 4.2.3. Perhatikan kembali contoh 3.2.1, yaitu masalah kekalahan penjudi, untuk $\ell = 4$.

Andaikan probabilitas awal (berkorespondensi dengan r = 4) diberikan sebagai berikut

$$p_0 = q^4(1 + 4p),\quad p_1 = 4p^2q^3,\quad p_2 = 6p^2q^2$$

$$p_3 = 4p^3q^2,\quad p_4 = p^4(1 + 4q)$$

Matriks fundamental dari masalah tersebut telah dihitung, sehingga diperoleh

$$(E_i(v))_{1\le i\le 3} = \frac{1}{p^2+q^2}\begin{bmatrix} p^2+q^2+2p \\ 2 \\ p^2+q^2+2q \end{bmatrix}$$

$$(a_{i4})_{1\le i\le 3} = \frac{1}{p^2+q^2}\begin{bmatrix} p^3 \\ p^2 \\ p(p^2+q) \end{bmatrix}$$

Oleh karena itu untuk probabilitas awal yang diberikan diperoleh

$$E(v) = \frac{1}{p^2+q^2}\left[4p^2q^3(p^2+q^2+2p)+12p^2q^2+4p^3q^2(p^2+q^2+2q)\right]$$

$$= \frac{8p^2q^2(2+pq)}{p^2+q^2}$$

P(Pemain I menang)

= P(penyerapan terjadi pada kedudukan 4)

$$= \frac{1}{p^2+q^2}\left[4p^5q^3+ 6p^4q^2+ 4p^4q^2(p^2+q)\right] + p^4(1+4q)$$

$$= \frac{p^4(1+2q)(1+4q^2)}{p^2+q^2}$$

Untuk $p = 1/2$ P(Pemain I memenangkan permainan) = 1/2, suatu hasil yang diharapkan pada permainan jujur.

Perhatikan $E(v)$ tidak menyatakan banyaknya kali permainan (langkah rata-rata dari suatu permainan), tetapi menyatakan kemungkinan banyaknya langkah yang diperlukan sampai salah seorang penjudi kalah.

Untuk memperoleh langkah rata-rata dari suatu permainan $E(v)$ harus ditambah dengan langkah rata-rata dari kedudukan sebelumnya. Dalam contoh ini akan dibahas 4 atau 5 titik. Probabilitas-probabilitas yang berkorespondensi adalah $p^4+q^4+6p^2q^2$ dan $1 - (p^4+q^4+6p^2q^2)$, sehingga langkah rata-rata sebelum titik 4 dan 5 sama dengan

$$
\begin{aligned}
&4(p^4+q^4+6p^2q^2) + 5(1-p^4-q^4-6p^2q^2)\\
&= 5 - (p^4 + q^4 + 6p^2q^2)\\
&= 4(1+ pq - 2p^2q^2)
\end{aligned}
$$

Kesimpulannya, langkah rata-rata dari suatu permainan adalah

$$\frac{8p^2q^2(2+pq)}{p^2+q^2} + 4(1 + pq - 2p^2q^2) = \frac{4(6p^3q^3 - pq + 1)}{1 - 2pq}$$

Demikianlah, untuk kasus di mana $p = \frac{1}{2}$ (pemain sama kuat) langkah rata-rata suatu permainan adalah 27/4 = 6 3/4 titik (langkah rata-rata dari kedudukan akhirnya menjadi 2 1/4 titik). Perhatikan bahwa untuk dua orang pemain yang sama kuat langkah rata-rata suatu permainan melampaui 75 % langkah minimumnya (yaitu 4 titik).

4.3 Himpunan Kedudukan Terbuka

DEFINISI 4.3.1. Suatu himpunan kedudukan $M \subset S$ disebut terbuka jika dari setiap kedudukan M, suatu kedudukan dari S-M dapat dicapai

Dari definisi tersebut dapat diperoleh bahwa sebarang himpunan bagian dari suatu himpunan terbuka kedudukan-kedudukan adalah terbuka juga.

TEOREMA 4.3.1. $M \subset S$ terbuka bila dan hanya bila tidak ada kelas berulang yang merupakan himpunan bagian dari M.

Bukti :

($\Rightarrow$) Jika M mengandung suatu kelas berulang C, maka dari setiap kedudukan $i \in C$ tidak ada kedudukan dari $S - C \supset S - M$ dapat dicapai, yaitu M tidak terbuka.

($\Leftarrow$) Jika M mengandung suatu kedudukan berulang i tanpa mengandung seluruh kelas C dari i, maka dari i semua kedudukan dari $C - M \subset S - M$ adalah dapat dicapai. Selanjutnya, dari sebarang kedudukan transien M (jika ada) suatu kedudukan berulang (baik dari S-M atau dari M) adalah dapat dicapai. Oleh karena itu, jika tidak ada kelas berulang yang adalah suatu himpunan bagian dari M, maka M adalah terbuka. ∎

TEOREMA 4.3.2. Jika $M \subset S$ terbuka dan semua kedudukan dalam dalam $S - M$ dibuat menjadi kedudukan-kedudukan menyerap, maka rantai Markov yang dihasilkan adalah menyerap dan kedudukan-kedudukan transiennya adalah elemen-elemen dari M

<u>**Bukti**</u> **:** Selama M terbuka, suatu kedudukan dalam $S - M$ dapat dicapai dari setiap kedudukan dalam M. Oleh karena itu rantai menyerap.

Dan selama suatu kedudukan menyerap dapat dicapai dari setiap elemen M, elemen-elemen dari M semuanya haruslah menjadi kedudukan-kedudukan transien dalam rantai Markov yang dibentuk. ∎

Studi tentang perubahan suatu rantai Markov dalam suatu himpunan kedudukan terbuka M tereduksi ke masalah yang telah dibahas di muka, yaitu $M = T$.

Untuk memudahkan pembahasan, kata "lama" dan "baru" dalam tulisan ini akan didefinisikan. Rantai Markov lama seperti yang telah dibahas di muka, mempunyai ruang kedudukan S dan probabilitas transisi yang didefinisikan sebagai berikut :

$$p_{ij} \geq 0,\ i,j \in S,\ \sum_{j \in S} p_{ij} = 1,\ i \in S$$

Rantai Markov baru mempunyai ruang kedudukan yang sama dengan rantai Markov lama, dengan syarat tambahan $S - M$ adalah kedudukan-kedudukan menyerap, $M \in S$. Probabilitas transisirantai Markov baru didefinisikan sebagai berikut

$$\tilde{p}_{ij} = \begin{cases} p_{ij} & ,\text{jika } i \in M \quad ,j \in S \\ \delta_{ij} & ,\text{jika } i \in S-M \ ,j \in S \end{cases}$$

Karena definisi tersebut semua kedudukan dari S - M menjadi menyerap.

Untuk rantai baru itu himpunan kedudukan transiennya bersamaan waktu dengan M dan sebelum meninggalkan M perkembangan rantai lama dan rantai baru adalah identik. Jadi, sifat-sifat seperti : rata-rata banyaknya pemunculan suatu kedudukan dari suatu himpunan kedudukan terbuka sebelum meninggalkan kedudukan itu, rata-rata banyaknya langkah dalam suatu himpunan kedudukan terbuka, dan sebagainya dapat dibuktikan. Untuk menghitungnya akan digunakan matriks fundamental yang berkorespondensi dengan rantai baru, yaitu, $(I-M)^{-1}$, di mana $M = (p_{ij})$, i, $j \in M$.

Perhatikan untuk kasus suatu himpunan M yang terdiri dari kedudukan tak menyerap tunggal. Himpunan M ini terbuka. Untuk kasus ini matriks fundamental N yang berkorespondensi dengan rantai baru mempunyai elemen tunggal sama dengan

$$1 + p_{ii} + p_{ii}^2 + \ldots = \frac{1}{(1-p_{ii})}$$

Andaikan ρ_i menyatakan total langkah rantai berada pada kedudukan tak menyerap i (termasuk langkah masuk), maka diperoleh

$$P_i(\rho_i = r+1) = (p_{ii})^r(1 - p_{ii}), \qquad r \geq 0$$

Akibatnya di bawah probabilitas P_i, peubah acak ρ_i

mempunyai sebaran geometrik dengan parameter p_{ii}, dan

$$E_i(\rho_i) = \frac{1}{(1-p_{ii})}$$

$$E_i(\rho_i^2) = \frac{1+p_{ii}}{(1-p_{ii})^2}$$

Dan probabilitas bersyarat rantai Markov mencapai kedudukan $j \neq i$, diberikan bahwa rantai Markov meninggalkan i adalah

$$P_i(X(\rho_i) = j) = \frac{p_{ij}}{1 - p_{ii}} .$$

BAB V

PENERAPAN RANTAI MARKOV DALAM BIDANG GENETIKA

5.1. Teori Hereditas Mendel

Teori sel memegang peranan penting dalam perkembangan biologi sampai saat ini. Menurut teori ini semua hewan dan tanaman berasal dari unit dasar kecil yang disebut *sel*. Sel dikelilingi oleh membran dan umumnya mengandung sebuah formasi internal, *nukleus*, yang dikelilingi pula oleh membran.

Nukleus setiap sel mengandung sejumlah tertentu filamen seperti struktur-struktur yang disebut *kromosom*. Jumlah kromosom pada setiap spesies menunjukkan karakteristik spesies tersebut. Pada hewan tingkat tinggi terdapat pasangan kromosom homolog (disebut *diploid*), sedangkan pada hewan tingkat rendah dan bakteri hanya terdapat sebuah kromosom (disebut *haploid*).

Sel baru dihasilkan dari sel lama dengan proses pembelahan. Kebanyakan sel dapat tumbuh dan membelah menjadi dua bagian yang relatif sama. Dua sel anakan hasil pembelahan ini identik dengan sel induknya. Terdapat dua jenis pembelahan sel, yaitu *mitosis* dan *meiosis*.

Sifat yang paling menarik dari sel hidup adalah kemampuan untuk menurunkan sifat dari satu generasi ke generasi berikutnya. Keberadaan hereditas telah cukup lama menjadi perhatian manusia, sebagai contoh, warna rambut anak yang akan dilahirkan dapat dengan mudah ditebak. Dasar fisik dari proses ini mulai dipahami pada permulaan abad 20 ketika teori kromosom tentang penurunan sifat mulai dibangun. Hukum dasar hereditas dinyatakan oleh Gregor Mendel (1822-1884) pada permulaan tahun 1865. Menurut Mendel, sifat yang bervariasi dikontrol oleh suatu faktor (yang kemudian hari disebut *gen* dan diketahui menjadi bagian dari kromosom). Posisi tempat gen tersebut terdapat pada kromosom disebut *lokus (locus)*. Sebarang gen pada suatu lokus yang diberikan mungkin mempunyai beberapa bentuk alternatif yang disebut *alela (alleles)*.

Di dalam sel diploid gen muncul dalam pasangan seperti halnya kromosom, lokus-lokus mereka pada pasangan kromosom homolog menjadi sama. Pada kasus yang sangat sederhana dengan dua alela, A dan a, pada lokus yang bersesuaian dengan pasangan kromosom dapat ditemukan 3 pasang gen berbeda AA, Aa, dan aa (secara genetik Aa dan aA adalah sama). AA, Aa, dan aa ini disebut *genotif*. Individu yang memiliki genotif AA disebut *dominan* atau *homozigot*, individu dengan genotif Aa disebut *hibrid* atau *heterozigot*, dan individu dengan genotif aa disebut *resesif*.

Sifat yang bervariasi dari keturunan ditentukan oleh gen orang tuanya. Setiap orang tua sebagai individu memiliki sepasang gen. Asumsi dasar teori Mendel menyatakan keturunan mewarisi satu gen dari orang tua secara acak dan dengan jalan yang independen.

Diandaikan beberapa kemungkinan : Jika kedua orang tua dominan (homozigot) maka keturunannya juga dominan; jika kedua orang tua resesif maka keturunannya akan resesif pula dan jika salah satu dari kedua orang tua dominan sedang yang lain resesif, maka keturunannya akan hibrid (heterozigot) (lihat tabel 5.1.1 dan 5.1.2).

Jika salah satu dari kedua orang tua dominan (AA) dan yang lain hibrid (Aa), maka keturunannya harus mendapat sebuah gen dominan A dari orang tua dominan dan sebuah gen dari orang tua hibrid. Dalam kasus ini, probabilitas bahwa keturunan tersebut akan dominan adalah $\frac{1}{2}$ dan probabilitas bahwa keturunannya akan hibrid (Aa) adalah $\frac{1}{2}$ (lihat tabel 5.1.3).

Serupa dengan di atas, jika salah satu dari kedua orang tua resesif (aa) dan yang lain hibrid (Aa), maka probabilitas bahwa keturunannya akan menjadi resesif (aa) adalah $\frac{1}{2}$ dan probabilitas bahwa keturunannya akan menjadi hibrid (Aa) adalah $\frac{1}{2}$ (lihat tabel 5.1.4).

Jika kedua orang tua hibrid (heterozigot), maka keturunannya memiliki probabilitas yang sama untuk mendapat sebuah gen dominan atau gen resesif dari masing-masing orang tua. Jadi, probabilitas keturunannya dominan (homozigot) adalah $\frac{1}{4}$, resesif $\frac{1}{4}$, dan hibrid (heterozigot) $\frac{1}{2}$ (lihat tabel 5.1.5)

Kemungkinan-kemungkinan di atas dapat digambarkan menggunakan lima tabel berikut

	A	A
A	AA	AA
A	AA	AA

tabel 5.1.1

	a	a
a	aa	aa
a	aa	aa

tabel 5.1.2

	A	A
A	AA	AA
a	Aa	Aa

tabel 5.1.3

	A	a
a	Aa	aa
a	Aa	aa

tabel 5.1.4

	A	a
A	AA	Aa
a	Aa	aa

tabel 5.1.5

5.2. Masalah Perkawinan "Kakak-Adik" (Brother - Sister Mating Problem).

Perkawinan "kakak-adik" adalah perkawinan yang terjadi antara dua individu dengan jenis kelamin berbeda yang berasal dari keturunan langsung suatu perkawinan. Perkawinan tersebut diulang dengan prosedur yang sama dari generasi ke generasi.

Dalam bab ini akan ditunjukkan bahwa perkembangan dari tipe perkawinan tersebut dalam generasi yang berturutan adalah suatu rantai Markov dengan 2 kedudukan menyerap dan 4 kedudukan transien.

Dengan tiga kemungkinan genotif AA, Aa dan aa untuk setiap orang tua, akan dibedakan enam kombinasi orang tua (tipe perkawinan) yang disajikan dalam tabel di bawah, di mana probabilitas dari pemunculan genotif keturunannya juga diberikan.

tipe perkawinan		genotif keturunan AA	Aa	aa
1.	AA×AA	1	0	0
2.	AA×Aa	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
3.	Aa×Aa	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
4.	Aa×aa	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
5.	aa×aa	0	0	1
6.	AA×aa	0	1	0

Seperti yang telah dibahas di muka, tipe pertama perkawinan hanya dapat memproduksi individu dengan genotif AA maka keturunan selanjutnya hanya dapat melangsungkan perkawinan dengan tipe yang sama. Demikian pula tipe 5 perkawinanyang menghasilkan keturunan dengan genotif aa.

Tipe 2 menghasilkan individu-individu dengan genotif AA dan Aa dengan probabilitas yang sama. Tipe-tipe yang mungkin dari perkawinan di antara keturunan-keturunan langsungnya adalah AA×AA (tipe 1) dengan probabilitas $\frac{1}{4}$, AA×Aa (tipe 2) dengan probabilitas $\frac{1}{2}$ dan Aa×Aa (tipe 3) dengan probabilitas $\frac{1}{4}$. Dengan jalan yang sama untuk tipe 3, 4, dan 6 diperoleh matriks transisi

$$P = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{16} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{16} & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \qquad (5.1)$$

Dari matriks transisi di atas dapat dilihat bahwa kedudukan 1 dan 5 adalah kedudukan-kedudukan menyerap. Perkawinan kakak-adik (sib mating) memproduksi genotif homozigot (AA,aa) dengan cara mengeliminasi salah satu gen a atau A dari genotif heterozigot Aa. Penyerapan dalam kedudukan 1[atau 5] menandakan ketidakmunculan gen a[atau A].

Hasil-hasil yang diperoleh pada bab 4 dapat dipakai untuk menghitung probabilitas ketidakmunculan gen A[atau a], yaitu probabilitas penyerapan dalam kedudukan 5[atau 1]. Dapat dihitung pula rata-rata banyaknya generasi sampai ketidakmunculan genotif heterozigot Aa (rata-rata waktu untuk menyerap) dimulai dari salah satu tipe perkawinan 2, 3, 4, 6.

Matriks transisi (5.1) dapat diubah menjadi bentuk kanonik sebagai berikut :

$$P = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 5 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 6 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 5 & 2 & 3 & 4 & 6 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{16} & \frac{1}{16} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array} = \left[\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline R & T \end{array}\right]$$

di mana matriks-matriks I, 0, R dan T adalah

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad 0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{16} & \frac{1}{16} \\ 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad T = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriks fundamental N disajikan oleh

$$N = (I-T)^{-1} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 16 & 8 & 4 & 1 \\ 8 & 16 & 8 & 2 \\ 4 & 8 & 16 & 1 \\ 8 & 16 & 8 & 8 \end{bmatrix}$$

Hasil kali matriks fundamental N dan R yang menyatakan probabilitas penyerapan disajikan dengan matriks

$$A = NR = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 16 & 8 & 4 & 1 \\ 8 & 16 & 8 & 2 \\ 4 & 8 & 16 & 1 \\ 8 & 16 & 8 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{16} & \frac{1}{16} \\ 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 6 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} 1 & 5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \end{array}$$

Rata-rata waktu untuk menyerap disajikan oleh vektor

$$Ne = \begin{array}{c} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 6 \end{array}\begin{bmatrix} 29/6 \\ 34/6 \\ 29/6 \\ 40/6 \end{bmatrix}$$

Seperti yang telah dijelaskan di muka, matriks A = NR dapat diinterpretasikan, bahwa setelah sejumlah besar "perkawinan sedarah", seseorang dapat berada dalam kedudukan 1 atau 5. Yaitu, hanya genotif-genotif homozigot yang tersisa, sementara genotif-genotif heterozigot akan menghilang. Perhatikan pula bahwa jika seseorang mulai dari kedudukan 4: Aa × aa yang memiliki 3 gen resesif dan 1 gen dominan, maka probabilitas untuk berakhir dalam kedudukan 1: AA × AA adalah $\frac{1}{4}$ yang adalah rasio antara gen dominan dan gen total.

Dari vektor Ne, dapat diperoleh nilai harapan (rata-rata) generasi yang dibutuhkan berawal dari suatu kedudukan tak menyerap ke salah satu kedudukan menyerap. Sebagai contoh, nilai harapan generasi yang dibutuhkan berawal dari kedudukan 3 ke kedudukan 1 atau 5 adalah $\frac{34}{6}$. Dari vektor Ne dapat diketahui pula bahwa nilai minimum dari probabilitas ketidakmunculan gen a[atau A] berhubungan dengan tipe mula-mula dari perkawinan 4[atau 2]. Juga, nilai maksimum dari rata-rata banyaknya generasi sampai ketidakmunculan genotif heterozigot berhubungan dengan tipe mula-mula dari perkawinan 6.

BAB VI

KESIMPULAN

Berdasarkan uraian pada bab-bab terdahulu, secara umum dapat disimpulkan :

Perhitungan-perhitungan probabilitas yang telah dikenal luas mengasumsikan independensi antar peubahnya. Kenyataannya, banyak persoalan yang dijumpai dalam dunia praktis tidak memenuhi asumsi ini. Persoalan-persoalan tersebut seringkali memenuhi asumsi dependensi. Rantai Markov dapat menyelesaikan persoalan-persoalan yang mengasumsikan konsep dependensi.

Suatu proses disebut rantai Markov jika probabilitas bersyarat $P(X_{t+1} = i_{t+1} | X_t = i_t, \ldots, X_0 = i_0)$ sama dengan $P(X_{t+1} = i_{t+1} | X_t = i_t)$. Dengan kata lain, pengaruh yang kuat dari masa lalu pada evolusi yang akan datang terkonsentrasi pada kedudukan yang disajikan pada saat terakhir di mana sistem tersebut diamati. Suatu rantai Markov disebut berhingga apabila ruang kedudukannya berhingga dan disebut homogen apabila probabilitas $P(X_{t+1} = i_{t+1} | X_t = i_t) = p_{i_t i_{t+1}}$ tidak bergantung pada t (saat rantai Markov mulai berlangsung)

Kedudukan-kedudukan dalam suatu rantai Markov homogen berhingga dapat dipisahkan menjadi kedudukan berulang dan kedudukan transien. Kedudukan i disebut kedudukan berulang jika rantai tersebut kembali ke kedudukan i dalam langkah yang jumlahnya berhingga dengan probabilitas 1. Jika tidak demikian kedudukan disebut kedudukan transien. Sebuah kedudukan i dari suatu rantai Markov dikatakan menyerap apabila pada kedudukan i tersebut rantai berhenti, hal ini dicirikan dengan elemen pada baris ke i dan kolom ke i dari matriks transisinya yang bernilai 1. Suatu rantai Markov dengan semua kedudukan berulangnya menyerap disebut rantai Markov menyerap.

Sifat-sifat rantai Markov menyerap dapat diterapkan pada bidang genetika, khususnya pada masalah perkawinan "kakak-adik" (brother-sister mating problem) yaitu untuk menghitung probabilitas ketidakmunculan gen dominan A[atau resesif a] dan rata-rata banyaknya generasi sampai ketidak-munculan genotif heterozigot Aa.

DAFTAR PUSTAKA

Abbott, David. 1986. *The Biographical Dictionary of Scientists*. New York : Peter Bedrick Books.

Ash,R.B. 1970. *Basic Probability Theory*. New York : John Wiley & Sons, Inc.

Bhat,R.B. 1981. *Modern Probability Theory*. New York : John Wiley & Sons, Inc.

Feller, William. 1960. *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*. New York : John Willey & Sons, Inc.

Iosifescu, M. 1980. *Finite Markov Processes and Their Applications*. Romania : John Wiley & Sons, Ltd.

Karlin, S. - *A First Course In Stochastic Processes*. New York : Academic Press.

Kemmeny, J.G., dan Snell, J.L. 1960. *Finite Markov Chains*. Princenton, N.J : Van Nostrand, Inc.

Kemmeny, J.G., Snell, J.L., dan Thompson, G.L . 1962. *Finite Mathematics With Bussiness Applications*. Englewood Cliff, N.J : Prentice-Hall, Inc.

________ . 1962. *Introduction to Finite Mathematics*. Englewood Cliff, N.J : Prentice-Hall, Inc.

________ . 1963. *Finite Mathematical Structures*. Englewood Cliff, N.J : Prentice-Hall, Inc.

Lipschutz, Seymour. 1982. *Theory and Problems of Probability*. Singapore : McGraw-Hill, Inc.

Michaels, J.G., dan Rosen, K.H. 1991. *Applications of Discrete Mathematics*. New York : McGraw-Hill, Inc.

Mizrahi, Abe., dan Sulivan, M. 1979. *Finite Mathematics With Applications for Bussiness and Social Sciences*. New York : John Wiley & Sons, Inc.

Mood,A.M. 1974. *Introduction to The Theory of Statistics*. New York : McGraw-Hill, Inc.

Resnick, Sidney I. 1992. *Adventures in Stochastic Processes*. Boston : Birkhauser.

Roussas, G.G. 1973. *A First Course in Mathematical Statistics*. Massachusetts : Addison-Wesley Publishing Company, Inc.

Todorovic, P. 1992. *An Introduction to Stochastic Processes and Their Applications*. New York : Springer-Verlag New York.

Walrand, Jean.1988. *An Introduction to Queueing Networks*. Englewood Cliff, N.J : Prentice-Hall, Inc.

DAFTAR SIMBOL

a_{ik}	probabilitas bahwa rantai Markov mulai dalam kedudukan transien i dan berakhir dalam kedudukan menyerap k.
C	Kelas tertutup
$C_i \triangleq C_j$	C_i berada dalam kelas ekuivalen yang sama dengan C_j
δ_{ij}	$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{jika } i = j \\ 0, & \text{jika } i \neq j \end{cases}$
d(i)	periode kedudukan i
E	matriks dengan semua elemennya sama dengan 1
$\mathbf{E}_i$	nilai harapan di bawah probabilitas P_i
e	vektor kolom dengan semua elemennya sama dengan 1
F	matriks elemen-elemennya f_{ij}
f_{ij}	probabilitas bahwa rantai pernah mencapai kedudukan transien j, dimulai dari kedudukan transien i
f^n_{ij}	probabilitas bersyarat bahwa lintasan pertama dari i ke j tepat muncul pada langkah ke-n.
$i \rightarrow j$	j terakses dari i
$i \leftrightarrow j$	i berhubungan dengan j
N	matriks fundamental
N_{dg}	matriks yang dihasilkan dari matriks N dengan memasang semua elemen selain elemen pada diagonal utama sama dengan nol
n_{ij}	elemen matriks fundamental N
O	matriks dengan semua elemennya sama dengan nol
P	matriks probabilitas transisi
p	probabilitas awal
p_{ij}	probabilitas transisi
p^n_{ij}	probabilitas transisi n-langkah
T	himpunan kedudukan transien
T	matriks yang elemen-elemennya adalah kedudukan-kedudukan transien
τ	waktu berhenti
τ_i	waktu pelintasan pertama ke kedudukan i
u^m_j	$u^m_j = \begin{cases} 1, & \text{jika } X_m = j \\ 0, & \text{jika } X_m \neq j \end{cases}$
v	waktu untuk menyerap (banyaknya langkah yang diperlukan sebelum penyerapan)
v_j	banyaknya kedudukan transien yang terjadi
v'	banyaknya kedudukan transien saling asing yang terjadi sampai penyerapan

DAFTAR ISTILAH

accessible = *terakses*
alela = *alleles*
barisan mengerut = *contracting sequence*
berkala = *periodic*
communating = *berhubungan*
diploid = *diploid*
dominan = *dominant*
fungsi densitas bersyarat = *conditional density function*
fungsi densitas diskret = *discrete density function*
fungsi densitas probabilitas = *probability density function*
fungsi probabilitas = *probability function*
fungsi sebaran kumulatif = *cumulative distribution function*
fungsi sebaran kumulatif bersama = *joint cumulative distribution function*
genotif = *genotype*
haploid = *haploid*
heterozigot = *heterozygotes*
homozigot = *homozigotes*
independensi = *independence*
independensi beberapa kejadian = *independence of several events*
independensi kejadian = *independence of events*
independensi peubah acak = *independence of random variable*
kedudukan = *state*
kedudukan berulang = *recurrent state*
kedudukan transien = *transient state*
kegandaan geometrik = *geometric multiplicity*
kejadian = *event*
kejadian independen = *independen event*
kejadian majemuk = *compoud event*
kejadian mustahil = *impossible event*
kejadian saling asing = *mutually exclusive event*
kejadian yang pasti terjadi = *sure event*
kelas kejadian = *class of event*
kromosom = *chromosome*
lokus = *locus*
masalah kekalahan penjudi = *gambler´s ruin problem*
masalah perkawinan "kakak-adik" = *sister-brother mating problem (sib mating)*
matriks fundamental = *fundamental matrix*
matriks probabilitas transisi n-langkah = *n-step transition probabilities matrix*
matriks stokastik = *stochastic matrix*
matriks stokastik ganda = *doubly stochastic matrix*
matriks transisi = *transition matrix*
medan-σ = *σ-field*
meiosis = *meiosis*

mitosis = *mitosis*
nilai eigen = *eigen value*
nilai harapan bersyarat peubah acak = *conditional expectation of random variable*
nilai harapan peubah acak = *expectation of random variable*
nukleus = *nucleus*
pembagi persekutuan terbesar = *greatest common divisor*
percobaan = *eksperiment*
perulangan = *recurrence*
peubah acak = *random variable*
peubah acak berdimensi k = *k-dimensional random variable*
peubah acak diskret = *discrete random variable*
peubah acak kontinu = *continuous random variable*
probabilitas awal = *initial probabilities*
probabilitas bersyarat = *conditional probability*
probabilitas penyerapan = *absorption probability*
probabilitas transisi = *transition probabilities*
probabilitas transisi satu langkah = *one step transition probabilities*
probabilitas transisi stasioner = *stationary transition probabilities*
rantai Markov = *Markov chain*
rantai Markov menyerap = *absorbing Markov chain*
resesif = *resessif*
ruang eigen kiri = *left eigen space*
ruang probabilitas = *probability space*
ruang sampel = *sample space*
sebaran peubah acak kontinu bersama = *jointly distributed continuous random variable*
sebaran peubah acak diskret bersama = *jointly distributed discrete random variable*
sebaran probabilitas = *probability distribution*
sifat Markov = *Markov property*
sifat pemulusan = *smoothing property*
stasioner = *stationary*
tak berkala = *aperiodic*
tak tereduksi = *irreducible*
terakses = *accessible*
transien = *transience*
vektor eigen kiri = *left eigen vector*
vektor probabilitas = *probability vector*
waktu berhenti = *stopping time*
waktu pelintasan pertama = *first passage time*
waktu untuk menyerap = *time to absorption*