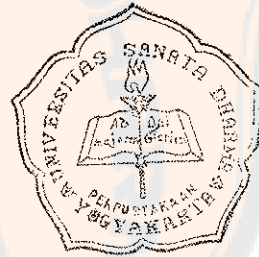


PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

**PENYELESAIAN MASALAH NILAI AWAL YANG
BERKAITAN DENGAN PERSAMAAN DIFERENSIAL
LINIER BIASA TAK HOMOGEN BERKOEFSIEN KONSTAN
DENGAN TEKNIK FUNGSI GREEN**

SKRIPSI

**Diajukan untuk Memenuhi Salah Satu Syarat
Memperoleh Gelar Sarjana Pendidikan
Program Studi Pendidikan Matematika**



Oleh :

Maria Xavera Murdiantini

NIM : 92414033

NIRM : 920052010501120029

**PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA
JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
UNIVERSITAS SANATA DHARMA
YOGYAKARTA
1999**

S K R I P S I

PENYELESAIAN MASALAH NILAI AWAL
YANG BERKAITAN DENGAN PERSAMAAN DIFERENSIAL
LINIER BIASA TAK HOMOGEN BERKOEFSIEN KONSTAN
DENGAN TEKNIK FUNGSI GREEN

Oleh :

Maria Xavera Murdiantini

NIM : 92414033

NIRM : 920052010501120029

Telah disetujui oleh

:
Pembimbing I



Drs. A. Tutoyo, M.Sc.

tanggal .. 8^{Desember} Oktober 1999

Pembimbing II



Drs. St. Susento, M.Si.

tanggal .. 9^{Desember} Oktober 1999

S K R I P S I

PENYELESAIAN MASALAH NILAI AWAL
YANG BERKAITAN DENGAN PERSAMAAN DIFERENSIAL
LINIER BIASA TAK HOMOGEN BERKOEFISIEN KONSTAN
DENGAN TEKNIK FUNGSI GREEN

Dipersiapkan dan ditulis oleh :

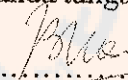

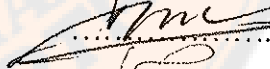


Maria Xavera Murdiantini

NIM : 92414033

NIRM : 920052010501120029

Telah dipertahankan di depan Panitia Penguji
pada tanggal 26 Oktober 1999
dan dinyatakan memenuhi syarat


Susunan Panitia Penguji

	Nama lengkap	Tanda tangan
Ketua	Drs. F. Kartika Budi, M. Pd.	
Sekretaris	Drs. St. Susento, M. Si.	
Anggota	Drs. A. Tutoyo, M. Sc.	
Anggota	Dr. St. Suwarsono	
Anggota	Drs. St. Susento, M. Si.	

Yogyakarta, ^{Desember} November 1999

Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan

Universitas Sanata Dharma

Dekan.

(Dr. Paulus Suparno, S.J. MST)

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

PERNYATAAN KEASLIAN KARYA

Saya menyatakan dengan sesungguhnya bahwa skripsi yang saya tulis ini tidak memuat karya atau bagian karya orang lain, kecuali yang telah disebutkan dalam kutipan dan daftar pustaka, sebagaimana layaknya karya ilmiah.

Yogyakarta, November 1999

Penulis



Maria Xavera Murdiantini

A B S T R A K

**PENYELESAIAN MASALAH NILAI AWAL
YANG BERKAITAN DENGAN PERSAMAAN DIFERENSIAL
LINIER BIASA TAK HOMOGEN BERKOEFSIEN KONSTAN
DENGAN TEKNIK FUNGSI GREEN**

Maria Xavera Murdiantini
Universitas Sanata Dharma
Yogyakarta

Teknik fungsi Green merupakan suatu cara penyelesaian masalah nilai awal (MNA) yang berkaitan dengan persamaan diferensial linier biasa tak homogen berkoefisien konstan. Teknik ini dapat menyelesaikan MNA dengan fungsi sumber yang paling umum dibandingkan dengan teknik-teknik penyelesaian lain, seperti teknik koefisien tak tentu, teknik invers operator, teknik variasi parameter maupun teknik transformasi Laplace. Teknik ini masih mampu menyelesaikan MNA sekalipun fungsi sumbernya tidak mempunyai transform Laplace. Penyelesaian MNA dengan teknik meliputi dua tahap, yakni penentuan fungsi Green dilanjutkan dengan penentuan konvolusi fungsi Green tersebut dan fungsi sumbernya. Fungsi Green tersebut didefinisikan sebagai penyelesaian MNA dengan fungsi δ Dirac sebagai fungsi sumbernya.

A B S T R A C T

**SOLUTION OF INITIAL VALUE PROBLEMS
RELATED WITH LINEARLY NONHOMOGENEOUS ORDINARY
DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH CONSTANT COEFFICIENTS
WITH THE GREEN'S FUNCTION TECHNIQUE**

Maria Xavera Murdiantini
Sanata Dharma University
Yogyakarta

The Green's function technique is a method for solving initial value problems (IVB) related with linearly nonhomogeneous ordinary differential equations with constant coefficients. The technique may solve IVB with the most general forcing function, compared to other techniques, such as techniques of undetermined coefficients, inverse operators, variation of parameters, or Laplace transformation. As a matter of fact, it may also be applied even though the forcing function has no its Laplace transform. For applying this technique, we first determine the Green's function, and then calculate the convolution of the function and the forcing function. The Green's function is defined as a solution of IVB with the Dirac's δ function as its forcing function.

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

KATA PENGANTAR

Puji dan syukur ke hadirat Tuhan Yang Maha Kasih atas segala rahmat dan penyertaan-Nya dalam penyusunan skripsi ini.

Skripsi ini disusun dalam rangka memenuhi salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Pendidikan pada Program Studi Pendidikan Matematika Universitas Sanata Dharma.

Penyusun menyadari bahwa penelitian dan penyusunan skripsi ini dapat terlaksana berkat bantuan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, sudah selayaknya penyusun mengucapkan terimakasih yang sedalam-dalamnya kepada semua pihak yang telah membantu penyusun hingga skripsi ini dapat terwujud.

1. Kepada Romo Dr. M. Sastrapratedja, S.J. selaku Rektor Universitas Sanata Dharma yang telah memberikan berbagai fasilitas guna penelitian dan penyusunan skripsi ini.
2. Kepada Romo Dr. Paulus Suparno, S.J. MST selaku Dekan Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Sanata Dharma.
3. Kepada Bapak Drs. R. Rohandi, M. Ed. selaku ketua Jurusan Pendidikan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam yang telah memberikan dukungan penelitian dan penyusunan ini sehingga dapat terlaksana sampai selesai.
4. Kepada Bapak Drs. A. Tutoyo, M. Sc. selaku pembimbing I yang telah membantu mewujudkan ide penyusunan skripsi dan dengan teliti mengoreksi skripsi ini.

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

5. Kepada Drs. St. Susento, M. Si. selaku pembimbing II yang dengan teliti, sabar dan penuh pengertian telah membimbing penyusun sampai penelitian dan penyusunan skripsi ini selesai.
6. Kepada Pak Narjo dan Bu Warni yang dengan sabar telah membantu penyusun selama kuliah sampai penyusunan skripsi ini selesai.
7. Kepada Bapak (alm.) dan Ibu Ambrosius Kardi, budhe Murjiyah serta Om Kelik yang selalu memberikan dukungan baik moral maupun spiritual.
8. Kepada saudara-saudaraku mas Kamus, mas Heru, mas Mikael, mas Kris, mbak Vita, Dyah, Irine yang selalu memberi dukungan hingga skripsi ini dapat terwujud.
9. Kepada semua pihak yang telah membantu penyelesaian skripsi ini.

Akhirnya penyusun menyadari bahwa masih banyak kekurangan dan kelemahan dalam penelitian maupun penyusunan skripsi ini. Oleh karena itu, penyusun dengan senang hati selalu terbuka untuk menerima saran dan kritik demi penyempurnaan skripsi ini.

Penyusun

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

DAFTAR ISI



	Halaman
HALAMAN JUDUL	i
HALAMAN PERSETUJUAN PEMBIMBING	ii
HALAMAN PENGESAHAN	iii
PERNYATAAN KEASLIAN KARYA	iv
ABSTRAK	v
ABSTRACT	vi
KATA PENGANTAR	vii
DAFTAR ISI	ix
BAB I PENDAHULUAN	1
1.1. Latar Belakang Masalah	2
1.2. Perumusan Masalah	3
1.3. Ruang Lingkup Penelitian	3
1.4. Metode Penelitian	3
1.5. Sistematika Pembahasan	3
BAB II TRANSFORMASI LAPLACE	5
2.1. Pengertian dan Sifat-sifat Dasar Transformasi Laplace	5
2.2. Pengertian dan Sifat-sifat Dasar Invers Transformasi Laplace	13
2.3. Komposisi Transformasi Laplace dengan Operasi Translasi	16
2.4. Transformasi Laplace dari Turunan Fungsi	19
2.5. Transformasi Laplace dari Konvolusi Fungsi	22

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

BAB III	TEKNIK TRANSFORMASI LAPLACE	27
3.1.	MNA	27
3.2.	Teknik Transformasi Laplace	32
BAB IV	TEKNIK FUNGSI GREEN	38
4.1.	Fungsi δ Dirac	39
4.2.	Fungsi Green	44
4.3.	Teknik Fungsi Green	48
4.4.	Keistimewaan dan Kelemahan Teknik Fungsi Green	57
BAB V	KESIMPULAN	59
DAFTAR PUSTAKA	61

BAB I
PENDAHULUAN

1.1. LATAR BELAKANG MASALAH

Misalkan $a \geq 0$. Pandang masalah nilai awal (MNA) berkoefisien konstan

$$c_n x^{(n)}(t) + c_{n-1} x^{(n-1)}(t) + \dots + c_1 x^{(1)}(t) + c_0 x(t) = f(t), \quad (1)$$

$$x(a) = x^{(1)}(a) = \dots = x^{(n-1)}(a) = 0, \quad (2)$$

dengan f berupa fungsi tak nol yang kontinu bagian demi bagian pada setiap interval berbentuk $[a, b]$. Penyelesaian persamaan diferensial linier biasa tak homogen (1) dapat ditulis sebagai $Y = Y_c + Y_p$. Dalam hal ini Y_c merupakan penyelesaian umum persamaan homogen

$$c_n x^{(n)}(t) + c_{n-1} x^{(n-1)}(t) + \dots + c_1 x^{(1)}(t) + c_0 x(t) = 0, \quad (3)$$

sedangkan Y_p merupakan penyelesaian khusus dari (1).

Terdapat tiga teknik untuk mencari Y_p , yaitu teknik koefisien tak tentu, teknik invers operator dan teknik variasi parameter. Teknik koefisien tak tentu melibatkan operasi penurunan fungsi, dan dapat digunakan bila fungsi sumber $f(t)$ berupa fungsi-fungsi dengan pola khusus, seperti fungsi-fungsi eksponensial, polinomial, kosinus, dan sinus maupun kombinasi linier atau hasil kali dari fungsi-fungsi tersebut. Teknik invers operator mengubah persamaan (1) menjadi persamaan-persamaan diferensial linier tak homogen orde satu berkoefisien konstan dengan menggunakan pemecahan parsial dari invers operator persamaan diferensial (1). Selain dapat digunakan pada $f(t)$ yang berupa fungsi-fungsi dengan pola khusus di atas, teknik ini dapat juga digunakan untuk

$f(t)$ yang berupa komposisi dari fungsi-fungsi tersebut. Teknik variasi parameter penggunaannya lebih umum lagi karena penggunaan teknik ini tidak terbatas hanya pada fungsi-fungsi sumber dengan pola-pola khusus tadi. Bila dibandingkan dengan kedua teknik ini, teknik variasi parameter cenderung lebih rumit karena melibatkan operasi penurunan dan pengintegralan fungsi.

Namun demikian, ketiga teknik di atas hanya dapat digunakan jika fungsi sumbernya kontinu. Dalam hal dimana fungsi sumbernya berupa fungsi kontinu bagian demi bagian, digunakan teknik transformasi Laplace. Teknik ini mempunyai keunggulan lain lagi, yaitu penyelesaian MNA (1), (2) dapat langsung diperoleh tanpa perlu menentukan terlebih dahulu penyelesaian umum bagi persamaan diferensial (1), seperti halnya yang terjadi pada pemakaian ketiga teknik di atas.

Meski pun bila dibandingkan dengan ketiga teknik sebelumnya, teknik transformasi Laplace memiliki beberapa keunggulan, namun ia ternyata masih mempunyai keterbatasan. Teknik ini hanya dapat digunakan untuk menyelesaikan MNA (1), (2), bila fungsi sumber $f(t)$ pada (1) mempunyai transform Laplace. Bahkan, walaupun transform Laplace bagi $f(t)$ ada, tetapi jika ia sulit dicari, maka teknik ini menjadi tidak nyaman lagi untuk dipakai.

Teknik fungsi Green merupakan salah satu teknik yang sangat berguna untuk mengatasi keterbatasan teknik transformasi Laplace di atas. Meskipun transform Laplace $f(t)$ pada (1) sulit ditemukan atau bahkan tidak ada sekali pun, teknik ini mampu menyelesaikan MNA (1), (2). Penggunaan teknik fungsi Green untuk menyelesaikan MNA tersebut inilah yang akan dibahas dalam skripsi ini.

1.2. PERUMUSAN MASALAH

Pokok permasalahan yang akan dibahas dalam skripsi ini adalah bagaimana cara menyelesaikan MNA (1), (2) dengan teknik fungsi Green.

1.3. RUANG LINGKUP PENELITIAN

Pembahasan tentang materi-materi prasyarat bagi teknik fungsi Green hanya meliputi tentang transformasi Laplace, teknik transformasi Laplace, dan fungsi δ Dirac. Sedangkan teknik-teknik koefisien tak tentu, invers operator dan teknik variasi parameter tidak akan dibahas.

Mengingat terdapat beberapa macam definisi fungsi Green, maka pembahasan tentang teknik fungsi Green nanti dibatasi untuk definisi yang melibatkan fungsi δ Dirac saja.

1.4. METODE PENELITIAN

Penulisan skripsi ini didasarkan pada penelitian dengan metode studi pustaka. Daftar kepustakaan yang dipakai sebagai acuan terlampir.

1.5. SISTEMATIKA PEMBAHASAN

Pembahasan skripsi ini diawali dengan bab II yang berisi uraian tentang transformasi Laplace beserta sifat-sifatnya. Dalam bab ini akan dibahas pula tentang operasi konvolusi fungsi.

Selanjutnya, bab III akan membicarakan tentang persamaan diferensial linier biasa tak homogen berkoefisien konstan beserta MNA yang berkaitan dengannya. Bab ini dilengkapi dengan pembahasan tentang teknik transformasi Laplace untuk menyelesaikan MNA tersebut.

Pembahasan tentang fungsi δ Dirac dan sifat-sifatnya, serta pendefinisian konsep fungsi Green akan dibicarakan secara rinci dalam bab IV. Dalam bab ini akan dibahas pula tentang teknik fungsi Green dan penerapannya untuk menyelesaikan MNA yang berkaitan dengan persamaan diferensial linier biasa tak homogen di atas. Sebagai suatu teknik, tentulah teknik fungsi Green mempunyai sejumlah keistimewaan maupun kelemahan, sehingga terasa belum lengkap apabila kedua hal tersebut tidak diungkapkan dalam bab ini.

Sebagai penutup skripsi ini, pada bab terakhir, yaitu bab V akan dipaparkan kesimpulan dari seluruh pembahasan sebelumnya. Saran-saran bagi penelitian lebih lanjut mengenai teknik fungsi Green akan diungkapkan pula pada bab ini.

BAB II

TRANSFORMASI LAPLACE

Penyelesaian MNA (1), (2) dengan teknik fungsi Green didasarkan pada apa yang disebut dengan fungsi Green. Fungsi Green ini merupakan penyelesaian suatu MNA khusus dengan operator diferensial dan syarat-syarat awal yang sejenis dengan (1), (2). Dalam hal ini, teknik transformasi Laplace digunakan untuk mendapatkan fungsi Green tersebut.

Bab ini akan memusatkan perhatian pada pembahasan tentang transformasi Laplace. Sedangkan teknik transformasi Laplace, yang merupakan penerapan dari konsep-konsep dan prinsip-prinsip transformasi Laplace, akan dibahas secara rinci dalam bab III.

Uraian tentang transformasi Laplace dibatasi pada sifat-sifat yang mengacu pada pembahasan mengenai teknik transformasi Laplace yang meliputi syarat eksistensi dan sifat-sifat dasar transformasi Laplace beserta inversnya, seperti sifat kelinieran, sifat translasi serta komposisi transformasi Laplace dengan operasi-operasi penurunan dan konvolusi fungsi.

2.1. PENGERTIAN DAN SIFAT-SIFAT DASAR TRANSFORMASI LAPLACE

Pengertian transformasi Laplace berkaitan dengan konsep transform Laplace, yang definisinya disajikan sebagai berikut.

Definisi 2.1. (Transform Laplace). Misalkan $f(t)$ suatu fungsi real dari variabel real t dengan $t \geq 0$. Pandang fungsi $F(s)$ dengan rumus

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt, \quad (4)$$

untuk setiap $s \in \mathbb{R}$ sedemikian hingga integral tak wajar (4) konvergen. $F(s)$ dinamakan transform Laplace dari $f(t)$.

Operasi yang mengawankan setiap fungsi $f(t)$ yang demikian kepada transform Laplacenya disebut transformasi Laplace. Notasi lain bagi transform Laplace $F(s)$ dari fungsi $f(t)$ adalah $\mathcal{L}(f)$ atau $\mathcal{L}\{f(t)\}$.

Contoh 2.1. Misalkan $f(t) = e^{kt}$, $t \geq 0$ dan $k \in \mathbb{R}$. Dengan melakukan pengintegralan tak wajar seperti pada (4) untuk $s > k$, diperoleh transform Laplace dari $f(t)$, yaitu

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{e^{kt}\} &= \int_0^{\infty} e^{-st} e^{kt} dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T e^{-(s-k)t} dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{-e^{-(s-k)T}}{s-k} + \frac{1}{s-k} \right] \\ &= \frac{1}{s-k}. \end{aligned}$$

Contoh 2.2. Diberikan fungsi tangga satuan yang didefinisikan sebagai

$$\mathbf{1}(t-a) = \begin{cases} 0, & \text{jika } t < a \\ 1, & \text{jika } t \geq a. \end{cases} \quad (5)$$

Dengan menggunakan Definisi 2.1, diperoleh transform Laplace dari $\mathbf{1}(t-a)$ adalah

$$\mathcal{L} \{1(t-a)\} = \int_0^{\infty} 1(t-a)e^{-st} dt = \int_a^{\infty} e^{-st} dt = \frac{1}{s}e^{-sa}, \text{ untuk } s > 0.$$

Contoh 2.3. Untuk setiap $k > 0$, misalkan

$$\delta_k(t) = \begin{cases} \frac{1}{k} & , \text{ jika } t \in [0, k] \\ 0 & , \text{ jika } t \notin [0, k] \end{cases} . \quad (6)$$

Transform Laplace dari $\delta_k(t)$ adalah

$$\mathcal{L} \{\delta_k(t)\} = \frac{1}{k} \int_0^k e^{-st} dt = \frac{1}{k} \left(-\frac{1}{s}e^{-sk} + \frac{1}{s} \right) = \frac{1}{sk} (1 - e^{-sk}),$$

untuk $s \neq 0$.

Dalam ketiga contoh di atas, transform Laplace dari fungsi-fungsi $f(t)$, $1(t-a)$ maupun $\delta_k(t)$ masing-masing dihitung dengan menggunakan Definisi 2.1 secara langsung. Ada cara lain untuk mendapatkan transform Laplace $\mathcal{L} \{f(t)\}$, yakni dengan menggunakan Tabel Transform Laplace, seperti terdapat pada Kreyszig (1993, h. 298-9) atau Goulomb & Shanks (1965, h. 249). Sebagian dari isi tabel tersebut disajikan dalam Tabel Transform Laplace di bawah ini. Tabel ini akan terasa berguna, terutama untuk menentukan dengan cepat transform Laplace dari fungsi-fungsi yang cukup rumit. Kegunaan tabel tersebut, juga akan tampak dalam menentukan invers transform Laplace, seperti yang akan dipaparkan pada subbab 2.2.

TABEL TRANSFORM LAPLACE

No	$f(t)$	$\mathcal{L}\{f(t)\}$	No	$f(t)$	$\mathcal{L}\{f(t)\}$
1.	1	$\frac{1}{s}$	5.	$\frac{1}{\omega} e^{at} \sin \omega t$	$\frac{1}{(s-a)^2 + \omega^2}$
2.	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	6.	$e^{at} \cos \omega t$	$\frac{s-a}{(s-a)^2 + \omega^2}$
3.	$\frac{1}{\omega} \sin \omega t$	$\frac{1}{s^2 + \omega^2}$	7.	$\cosh \omega t$	$\frac{s}{s^2 - \omega^2}$
4.	$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$			

Berikut ini akan dibahas syarat-syarat cukup agar transform Laplace dari suatu fungsi ada. Pembuktian validitas syarat-syarat tersebut didasarkan pada beberapa definisi dan lemma yang akan ditinjau terlebih dahulu di bawah ini.

Definisi 2.2. (Fungsi kontinu bagian demi bagian). Suatu fungsi real f dikatakan kontinu bagian demi bagian dalam interval $[a, b]$, jika f kontinu sepihak di a dan b , serta $[a, b]$ dapat dibagi menjadi sejumlah berhingga sub interval $[t_i, t_{i+1}]$, sedemikian hingga f kontinu pada (t_i, t_{i+1}) untuk $i = 1, 2, \dots, n-1$, dan limit-limit sepihak

$$f(t_i^+) = \lim_{t \rightarrow t_i^+} f(t) \text{ dan } f(t_{i+1}^-) = \lim_{t \rightarrow t_{i+1}^-} f(t) \text{ ada.}$$

Definisi 2.3. (Fungsi berorde eksponensial). Suatu fungsi real f dikatakan berorde eksponensial α jika ada bilangan-bilangan positif α, t_0 dan M sedemikian hingga

$$|f(t)| < M e^{\alpha t} \text{ untuk } t > t_0. \tag{7}$$

Contoh 2.4. Fungsi δ_k yang didefinisikan menurut (6) berorde eksponensial, karena untuk sembarang $k > 0$, dapat diambil $M = \frac{1}{k}$ sedemikian hingga

$$|\delta_k(t)| = \frac{1}{k} < \frac{1}{k} e^{\alpha t} = M e^{\alpha t},$$

untuk $t > t_0$, serta untuk sembarang $\alpha > 0$ dan $t_0 > 0$.

Contoh 2.5. Pandang fungsi $f(t) = e^{at} \sin bt$, dengan $a, b \in \mathbb{R}$. Jika $a > 0$, ambillah $M=1$ dan $\alpha > a$, dan jika $a < 0$ diambil $M=1$ dan $\alpha > 0$. Dengan demikian, untuk sembarang $t_0 > 0$ berlaku

$$|f(t)| \leq e^{at} < e^{\alpha t}, \quad t > t_0.$$

Tampak bahwa $f(t)$ mempunyai orde eksponensial α .

Contoh 2.6. Fungsi $g(t) = e^{t^2}$ tidak berorde eksponensial, karena untuk sembarang $\alpha > 0$ dan $M > 0$ selalu berlaku

$$e^{t^2} > M e^{\alpha t},$$

untuk $t > t_0$ dengan $t_0 = \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\sqrt{\alpha^2 + 4 \ln M}$.

Lemma 2.1. Andaikan f dan g fungsi-fungsi real pada $[a, \infty)$ yang kontinu bagian demi bagian dalam setiap sub interval tertutup berbentuk $[a, b]$. Jika $|g(t)| \leq f(t)$ untuk setiap $t \geq a$ dan $\int_a^\infty f(t) dt$ konvergen, maka $\int_a^\infty g(t) dt$ konvergen.

Bukti Lemma 2.1. Untuk setiap $t \in [a, \infty)$, misalkan

$$g^+(t) = \begin{cases} g(t), & \text{jika } g(t) \geq 0 \\ 0, & \text{jika } g(t) < 0 \end{cases}.$$

Karena untuk setiap $t \in [a, \infty)$ berlaku $0 \leq g^+(t) \leq |g(t)| \leq f(t)$, maka diperoleh

hubungan $\int_a^T g^+(t) dt \leq \int_a^T |g(t)| dt \leq \int_a^\infty f(t) dt$ untuk setiap $T > a$. Akibatnya,

dengan mengingat kekonvergenan $\int_a^\infty f(t) dt$, dapat disimpulkan bahwa $\int_a^\infty g^+(t) dt$

dan $\int_a^\infty |g(t)| dt$ keduanya konvergen, sehingga

$\int_a^\infty g(t) dt = 2 \int_a^\infty g^+(t) dt - \int_a^\infty |g(t)| dt$ juga konvergen. Bukti selesai.

Sekarang telah siap untuk membuktikan teorema mengenai eksistensi transform Laplace berikut ini.

Teorema 2.1. Jika fungsi real $f(t)$ mempunyai sifat-sifat

(i). $f(t)$ kontinu bagian demi bagian dalam setiap sub interval tertutup berbentuk $0 \leq t \leq b$;

(ii). $f(t)$ berorde eksponensial α ;

maka transform Laplace $F(s)$ dari $f(t)$ ada untuk setiap $s > \alpha$.

Bukti Teorema 2.1. Berdasarkan (ii), diambil $M > 0$ dan $t_0 > 0$ sedemikian hingga

$$e^{-st} |f(t)| < M e^{-(s-\alpha)t} \text{ untuk } t > t_0. \quad (8)$$

Perhatikan bahwa $F(s)$ dapat ditulis sebagai

$$F(s) = \int_0^{t_0} e^{-st} f(t) dt + \int_{t_0}^{\infty} e^{-st} f(t) dt.$$

Berdasarkan (i) maka integral pertama pada ruas kanan ada untuk sembarang $s \in \mathbb{R}$. Sekarang tinggal ditunjukkan bahwa $\int_{t_0}^{\infty} e^{-st} f(t) dt$ konvergen. Mula-

mula terdapat hubungan

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{\infty} e^{-(s-\alpha)t} dt &= \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{t_0}^T e^{-(s-\alpha)t} dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \left[-\frac{e^{-(s-\alpha)t}}{s-\alpha} \right]_{t_0}^T \\ &= \frac{1}{s-\alpha} e^{-(s-\alpha)t_0}, \text{ untuk } s > \alpha \end{aligned} \quad (9)$$

yang memperlihatkan kekonvergenan $\int_{t_0}^{\infty} e^{-(s-\alpha)t} dt$. Dengan demikian berdasarkan

Lemma 2.1, hubungan (8) dan (9) mengakibatkan $\int_{t_0}^{\infty} e^{-st} f(t) dt$ konvergen untuk

$s > \alpha$. Bukti selesai.

Contoh 2.7. Dalam Contoh 2.5 telah ditunjukkan bahwa fungsi $f(t) = e^{at} \sin bt$ berorde eksponensial α . Di samping itu, fungsi ini jelas kontinu pada $[0, \infty)$. Dengan demikian, Teorema 2.1 di atas memberikan jaminan bahwa transform Laplacinya pasti ada.

Perlu ditekankan bahwa syarat-syarat (i) dan (ii) pada Teorema 2.1 hanya merupakan syarat cukup tetapi tidak sekaligus sebagai syarat perlu bagi eksistensi

transform Laplace. Transform Laplace dapat ada atau tidak walaupun syarat (i) atau (ii) tidak dipenuhi. Hal ini tampak dalam contoh berikut ini.

Contoh 2.8. Diberikan $f(t) = t^{-\frac{1}{2}}$. Meskipun $f(t)$ berorde eksponensial α , tetapi $f(t)$ bukan fungsi kontinu bagian demi bagian, karena $\lim_{t \rightarrow 0^+} t^{-\frac{1}{2}}$ tidak ada.

Namun ternyata fungsi ini mempunyai transform Laplace yakni $\mathcal{L} \left\{ t^{-\frac{1}{2}} \right\} = \sqrt{\pi/s}$

untuk $s > 0$, seperti yang diperlihatkan oleh Kreyszig (1993, h.247). Di lain pihak,

pada Contoh 2.6 telah ditunjukkan bahwa fungsi $g(t) = e^{t^2}$ tidak berorde

eksponensial α manapun, jadi tidak memenuhi syarat (ii). Bertentangan dengan $f(t)$,

ternyata $g(t)$ ini tidak mempunyai transform Laplace, yang disebabkan karena integral

$\int_0^{\infty} e^{t^2 - st} dt$ tidak konvergen.

Berikut ini disajikan sifat kelinieran transformasi Laplace, yang buktinya langsung didasarkan pada definisi transform Laplace.

Teorema 2.2. Jika $f(t)$ dan $g(t)$ adalah fungsi-fungsi yang mempunyai transform Laplace, serta a dan b sembarang konstanta real, maka

$$\mathcal{L} \{ a f(t) + b g(t) \} = a \mathcal{L} \{ f(t) \} + b \mathcal{L} \{ g(t) \}.$$

Bukti Teorema 2.2. Berdasarkan Definisi 2.1 dan sifat kelinieran pengintegralan tak wajar diperoleh

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{a f(t) + b g(t)\} &= \int_0^{\infty} e^{-st} (a f(t) + b g(t)) dt \\ &= a \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt + b \int_0^{\infty} e^{-st} g(t) dt \\ &= a \mathcal{L}\{f(t)\} + b \mathcal{L}\{g(t)\}\end{aligned}$$

Bukti selesai.

2.2. PENGERTIAN DAN SIFAT-SIFAT DASAR INVERS TRANSFORMASI LAPLACE

Berikut ini akan dibahas tentang pengertian invers transformasi Laplace beserta sifat-sifat dasarnya.

Definisi 2.4. (Invers transform Laplace). Misal $f(t)$ suatu fungsi real dengan $t \geq 0$. Dalam hal $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, maka $f(t)$ disebut invers transform Laplace dari $F(s)$.

Invers transform Laplace bagi $F(s)$ tersebut ditulis sebagai $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$.

Operasi yang mengawankan setiap fungsi $F(s)$ dengan $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$ disebut invers transformasi Laplace.

Dengan asumsi tertentu, invers transform Laplace $F(s)$ dijamin ketunggalannya. Hal ini didasarkan pada teorema berikut.

Teorema 2.3. Jika $F(s)$ dan $G(s)$ adalah fungsi-fungsi yang mempunyai invers transform Laplace sedemikian sehingga $F(s) = G(s)$, maka

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} \text{ kecuali di sejumlah berhingga titik.}$$

Bukti Teorema 2.3. Katakan $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$ dan $g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}$.

Karena diketahui $F(s) = G(s)$, maka berdasarkan Definisi 2.1, diperoleh persamaan

$$\int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} g(t) e^{-st} dt.$$

Persamaan terakhir setara dengan persamaan

$$\int_0^{\infty} [f(t) - g(t)] e^{-st} dt = 0,$$

yang dipenuhi jika $f(t) = g(t)$ kecuali di sejumlah berhingga titik. Bukti selesai.

Dalam bukti Teorema 2.3 tampak bahwa $f(t) \neq g(t)$ hanya di sejumlah berhingga titik t dimana $f(t)$ atau $g(t)$ diskontinu. Dengan demikian, jika $f(t)$ dan $g(t)$ keduanya kontinu, maka $f(t) = g(t)$. Akibatnya, jika di dalam Tabel Transform Laplace disajikan transform Laplace $F(s)$ dari suatu fungsi $f(t)$ yang kontinu, maka $f(t)$ ini bukan satu-satunya invers transform Laplace dari $F(s)$, meskipun dia merupakan satu-satunya invers transform Laplace yang kontinu. Pernyataan ini diperjelas oleh contoh berikut.

Contoh 2.9. Jika diandaikan fungsi $F(s) = \frac{1}{s^2 + 1}$, maka menurut Tabel

Transform Laplace, invers transform Laplace dari $F(s)$ adalah $f(t) = \sin t$. Fungsi ini bukan satu-satunya invers transform Laplace dari $F(s)$, karena dapat ditemukan invers transform Laplace yang lain, misalnya

$$g(t) = \begin{cases} \sin t & , \text{ jika } t \neq 2\pi \\ 1 & , \text{ jika } t = 2\pi \end{cases} .$$

Seperti halnya transformasi Laplace, invers transformasi Laplace juga mempunyai sifat linier. Sifat kelinieran ini diberikan oleh teorema berikut.

Teorema 2.4. Jika c dan d adalah sembarang konstanta real, sedangkan $F(s)$, dan $G(s)$ berturut-turut adalah fungsi-fungsi yang mempunyai invers transform Laplace, maka

$$\mathcal{L}^{-1}\{c F(s) + d G(s)\} = c \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} + d \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} .$$

Bukti Teorema 2.4. Misalkan $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$ dan $g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}$.

Dengan menggunakan Teorema 2.2 dan Definisi 2.4 diperoleh

$$\mathcal{L}\{c f(t) + d g(t)\} = c \mathcal{L}\{f(t)\} + d \mathcal{L}\{g(t)\} = c F(s) + d G(s) .$$

Dengan demikian, berdasarkan Definisi 2.4 lagi, persamaan terakhir menunjukkan bahwa

$$\mathcal{L}^{-1}\{c F(s) + d G(s)\} = c f(t) + d g(t) = c \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} + d \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} .$$

Bukti selesai.

Contoh 2.10. Andaikata $F(s) = \frac{3s+1}{s^2+2s+10}$, dan akan ditentukan

$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$. Pertama-tama $F(s)$ diubah bentuknya sedemikian sehingga sesuai

dengan bentuk yang ada dalam Tabel Transform Laplace, yakni

$$\mathcal{L}\{e^{at} \sin bt\} = \frac{b}{(s-a)^2 + b^2}$$

dan

$$\mathcal{L} \{e^{at} \cos bt\} = \frac{s-a}{(s-a)^2 + b^2}.$$

Penyebut dari $F(s)$ diubah menjadi bentuk kuadrat sempurna, menjadi

$$F(s) = \frac{3s+1}{(s+1)^2 + 9}$$

Selanjutnya, $F(s)$ ditulis sebagai kombinasi linier dari $\mathcal{L} \{e^{at} \cos bt\}$ dan $\mathcal{L} \{e^{at} \sin bt\}$, menjadi

$$F(s) = 3 \frac{s+1}{(s+1)^2 + 9} - \frac{2}{3} \frac{3}{(s+1)^2 + 9}.$$

Dengan demikian, berdasarkan Teorema 2.4 diperoleh

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} &= 3\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{(s+1)^2 + 9}\right\} - \frac{2}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{(s+1)^2 + 9}\right\} \\ &= 3e^{-t} \cos 3t - \frac{2}{3}e^{-t} \sin 3t. \end{aligned}$$

2.3. KOMPOSISI TRANSFORMASI LAPLACE DENGAN OPERASI TRANSLASI

Untuk membahas sifat transformasi Laplace yang berkaitan dengan operasi translasi fungsi, terlebih dahulu akan disajikan pengertian operasi tersebut.

Definisi 2.5. (Translasi fungsi). Pandang fungsi $f : [c, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, dan misalkan $a \geq 0$. Translasi f sejauh a adalah fungsi $g : [c+a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, dengan $g(x) = f(x-a)$.

Operasi yang mengawankan setiap fungsi f yang demikian kepada translasinya disebut operasi translasi fungsi.

Berikut ini akan disajikan dua teorema mengenai translasi dari suatu transform Laplace dan transform Laplace dari suatu translasi fungsi. Dimulai dengan teorema berikut, yang sering disebut Teorema Translasi Pertama.

Teorema 2.5. Jika $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ untuk $s > \alpha$, maka untuk setiap $a \geq 0$ berlaku

$$\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\} = F(s - a) \text{ untuk } s > \alpha + a. \quad (10)$$

Bukti Teorema 2.5. Berdasarkan Definisi 2.1, maka

$$\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-(s-a)t} f(t) dt.$$

Jika ditulis $u = s - a$, maka

$$\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-ut} f(t) dt = F(u) \text{ untuk } u > \alpha,$$

sehingga (10) terbukti berlakunya. Bukti selesai.

Contoh 2.11. Dalam Contoh 2.7 telah diberikan jaminan bahwa fungsi $f(t) = e^{-at} \sin bt$ mempunyai transform Laplace. Dalam Tabel Transform Laplace dapat dilihat bahwa

$$\mathcal{L}\{\sin bt\} = \frac{b}{s^2 + b^2}, \quad s > 0.$$

Oleh karena itu, berdasarkan Teorema 2.5 diperoleh

$$\mathcal{L} \{e^{at} \sin bt\} = \frac{b}{(s-a)^2 + b^2} \quad \text{untuk } s > a.$$

Selanjutnya akan disajikan apa yang biasa disebut Teorema Translasi Kedua mengenai transform Laplace dari suatu translasi fungsi.

Teorema 2.6. Jika $\mathcal{L} \{f(t)\} = F(s)$ untuk $s > \alpha$, dan jika untuk setiap $a \geq 0$ didefinisikan fungsi $g_a(t)$ dengan rumus

$$g_a(t) = \begin{cases} 0 & , \text{ jika } 0 \leq t < a \\ f(t-a) & , \text{ jika } t \geq a \end{cases}$$

maka

$$\mathcal{L} \{g_a(t)\} = e^{-as} F(s). \tag{11}$$

Bukti Teorema 2.6. Berdasarkan Definisi 2.1 maka

$$\mathcal{L} \{g_a(t)\} = \int_a^\infty e^{-st} f(t-a) dt.$$

Dimisalkan $t - a = u$, sehingga diperoleh

$$\int_a^\infty e^{-st} f(t-a) dt = e^{-as} \int_0^\infty e^{-su} f(u) du = e^{-as} F(s),$$

yang memperlihatkan berlakunya (11). Bukti selesai.

Contoh 2.12. Akan ditentukan invers transform Laplace dari $f(t) = \frac{b e^{-\frac{a}{2}t}}{t^2 + b^2}$.

Karena dari Tabel Transform Laplace diketahui bahwa $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{b}{t^2 + b^2} \right\} = \sin bu$,

maka berdasarkan Teorema 2.6 diperoleh

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{b e^{-\frac{\pi}{2}t}}{t^2 + b^2} \right\} = \begin{cases} 0 & , \text{ jika } 0 \leq u < \frac{\pi}{2} \\ \sin b \left(u - \frac{\pi}{2} \right) & , \text{ jika } u \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

2.4. TRANSFORMASI LAPLACE DARI TURUNAN FUNGSI

Dalam pasal ini akan diuraikan sifat-sifat transformasi Laplace yang berkaitan dengan operasi penurunan fungsi. Keistimewaan sifat ini adalah jika $\mathcal{L} \{f(t)\} = F(s)$ untuk $s > \alpha$, dan jika $\mathcal{L} \{f^{(1)}(t)\}$ juga ada, maka $\mathcal{L} \{f^{(1)}(t)\}$ ini hanya berpautan dengan perkalian $F(s)$ dengan s . Berkat sifat ini, maka penggunaan transformasi Laplace pada suatu persamaan diferensial akan menghasilkan suatu persamaan aljabar.

Teorema 2.7. Andaikan fungsi $f(t)$ kontinu dan berorde eksponensial α untuk $t \geq 0$. Jika $f^{(1)}(t)$ kontinu bagian demi bagian untuk $t \geq 0$, maka $\mathcal{L} \{f^{(1)}(t)\}$ ada untuk $s > \alpha$, yakni

$$\mathcal{L} \{f^{(1)}(t)\} = s \mathcal{L} \{f(t)\} - f(0). \tag{12}$$

Bukti Teorema 2.7. Karena $f^{(1)}(t)$ kontinu bagian demi bagian, maka $f^{(1)}(t)$ mempunyai sejumlah berhingga titik diskontinu, misalnya t_1, t_2, \dots, t_n dengan $t_1 < t_2 < \dots < t_n$. Untuk sembarang $T > t_n$ berlaku

$$\int_0^T e^{-st} f^{(1)}(t) dt = \int_0^{t_1} e^{-st} f^{(1)}(t) dt + \int_{t_1}^{t_2} e^{-st} f^{(1)}(t) dt + \dots + \int_{t_n}^T e^{-st} f^{(1)}(t) dt.$$

Dengan pengintegralan parsial diperoleh

$$\int_0^T e^{-st} f^{(1)}(t) dt = e^{-st} f(t) \Big|_0^{t_1} + s \int_0^{t_1} e^{-st} f(t) dt + e^{-st} f(t) \Big|_{t_1}^{t_2} + s \int_{t_1}^{t_2} e^{-st} f(t) dt + \dots + e^{-st} f(t) \Big|_{t_n}^T + s \int_{t_n}^T e^{-st} f(t) dt.$$

Kekontinuan $f(t)$ mengakibatkan persamaan terakhir dapat ditulis menjadi

$$\int_0^T e^{-st} f^{(1)}(t) dt = -f(0) + e^{-sT} f(T) + s \int_0^T e^{-st} f(t) dt. \quad (13)$$

Mengingat $f(t)$ berorde eksponensial α , maka untuk $s > \alpha$ berlaku

$$\lim_{T \rightarrow \infty} e^{-sT} f(T) = 0, \quad (14)$$

dan

$$\lim_{T \rightarrow \infty} s \int_0^T e^{-st} f(t) dt = s \mathcal{L} \{f(t)\}. \quad (15)$$

Dengan demikian berkat (14) dan (15), dan dengan mengambil limit kedua ruas persamaan (13) untuk $T \rightarrow \infty$, terbukti bahwa $\mathcal{L} \{f^{(1)}(t)\}$ ada, dan rumus (12) diperoleh. Bukti selesai.

Teorema 2.7 dapat dikembangkan untuk $f(t)$ yang kontinu bagian demi bagian.

Jika $f(t)$ diskontinu di titik-titik a_1, a_2, \dots, a_m , maka berlaku rumus

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \{f^{(1)}(t)\} &= s \mathcal{L} \{f(t)\} - f(0) - [f(a_1^+) - f(a_1^-)]e^{-a_1 s} - [f(a_2^+) - f(a_2^-)]e^{-a_2 s} \\ &\quad - \dots - [f(a_m^+) - f(a_m^-)]e^{-a_m s}. \end{aligned}$$

Perluasan Teorema 2.7 untuk $f^{(n)}(t)$ diberikan oleh teorema berikut, yang buktinya didasarkan pada prinsip induksi matematika.

Teorema 2.8. Andaikan fungsi-fungsi $f(t), f^{(1)}(t), f^{(2)}(t), \dots, f^{(n-1)}(t)$

kontinu dan berorde eksponensial α untuk $t \geq 0$. Jika $f^{(n)}(t)$ kontinu bagian demi bagian untuk $t \geq 0$, maka

$$\mathcal{L} \{f^{(n)}(t)\} = s^{(n)} \mathcal{L} \{f(t)\} - s^{(n-1)} f(0) - s^{(n-2)} f^{(1)}(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$$

Contoh 2.13. Diberikan fungsi $f(t) = t \sin \omega t$. Akan ditentukan $\mathcal{L} \{f(t)\}$.

Dari $f(t) = t \sin \omega t$ didapat $f(0) = 0$, $f^{(1)}(t) = \sin \omega t + \omega t \cos \omega t$, $f^{(1)}(0) = 0$ dan

$f^{(2)}(t) = 2\omega \cos \omega t - \omega^2 f(t)$. Berdasarkan Teorema 2.8 diperoleh

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \{f^{(2)}(t)\} &= s^2 \mathcal{L} \{f(t)\} - s f(0) - f^{(1)}(0) \\ 2\omega \mathcal{L} \{\cos \omega t\} - \omega^2 \mathcal{L} \{f(t)\} &= s^2 \mathcal{L} \{f(t)\} \\ 2\omega \mathcal{L} \{\cos \omega t\} &= (s^2 + \omega^2) \mathcal{L} \{f(t)\}. \end{aligned}$$

Dari Tabel Transform Laplace diketahui bahwa

$$\mathcal{L} \{\cos \omega t\} = \frac{s}{s^2 + \omega^2},$$

sehingga

$$\mathcal{L} \{f(t)\} = \frac{2\omega s}{(s^2 + \omega^2)^2}.$$

2.5. TRANSFORMASI LAPLACE DARI KONVOLUSI FUNGSI

Salah satu sifat yang sangat berguna untuk menentukan invers transform Laplace adalah apa yang disebut Teorema Konvolusi Fungsi, seperti yang akan disajikan di bawah ini. Namun sebelumnya, akan didefinisikan terlebih dahulu konsep-konsep refleksi dan konvolusi fungsi.

Definisi 2.6. (Refleksi fungsi). Pandang fungsi $f: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ dan misalkan $a \geq 0$. Refleksi f dengan sumbu simetri $y = \frac{a}{2}$ adalah fungsi

$$g: [a - d, -c + a] \rightarrow \mathbb{R}, \text{ dengan } g(x) = f(a - x).$$

Definisi 2.7. (Konvolusi fungsi). Jika fungsi-fungsi $f(t)$ dan $g(t)$ kontinu bagian demi bagian dalam setiap interval tertutup berbentuk $[0, b]$, maka konvolusi dari fungsi-fungsi $f(t)$ dan $g(t)$ adalah fungsi $f(t) * g(t)$, dengan

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(\tau) g(t - \tau) d\tau. \tag{16}$$

Contoh 2.14. Diberikan fungsi-fungsi $f(t) = \cos \omega t$ dan $g(t) = \frac{1}{\omega} \sin \omega t$.

Dengan menggunakan Definisi 2.7, diperoleh konvolusi dari fungsi $f(t)$ dan $g(t)$, yaitu

$$\begin{aligned}
 f(t) * g(t) &= \frac{1}{\omega} \int_0^t \cos \omega \tau (\sin \omega t \cos \omega \tau - \cos \omega t \sin \omega \tau) d\tau \\
 &= \frac{1}{\omega} \sin \omega t \int_0^t \left(\frac{1 + \cos 2\omega \tau}{2} \right) d\tau - \frac{1}{\omega} \cos \omega t \int_0^t \left(\frac{\sin 2\omega \tau}{2} \right) d\tau \\
 &= \frac{1}{\omega} \sin \omega t \left(\frac{t}{2} + \frac{\sin 2\omega t}{4\omega} \right) - \frac{1}{\omega} \cos \omega t \left(\frac{1 - \cos 2\omega t}{4\omega} \right) \\
 &= \frac{1}{\omega} \sin \omega t \left(\frac{t}{2} + \frac{2 \sin \omega t \cos \omega t}{4\omega} \right) - \frac{1}{\omega} \cos \omega t \left(\frac{1 - (1 - 2 \sin^2 \omega t)}{4\omega} \right) \\
 &= \frac{t \sin \omega t}{2\omega} .
 \end{aligned}$$

Operasi konvolusi fungsi bersifat komutatif. Sifat ini diberikan oleh teorema berikut.

Teorema 2.9. Jika fungsi-fungsi $f(t)$ dan $g(t)$ kontinu bagian demi bagian dalam setiap interval tertutup berbentuk $[0, b]$, maka

$$f(t) * g(t) = g(t) * f(t) .$$

Bukti Teorema 2.9. Berdasarkan Definisi 2.7, jika diandaikan $u = t - \tau$ maka berlaku

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(\tau) g(t - \tau) d\tau = - \int_t^0 f(t - u) g(u) du = g(t) * f(t) .$$

Bukti selesai.

Sekarang telah siap untuk menyajikan Teorema Konvolusi Fungsi.

Teorema 2.10. Jika $\mathcal{L} \{f(t)\} = F(s)$ dan $\mathcal{L} \{g(t)\} = G(s)$ keduanya ada untuk $s > \alpha$, maka

$$\mathcal{L} \{f(t) * g(t)\} = F(s) G(s) .$$

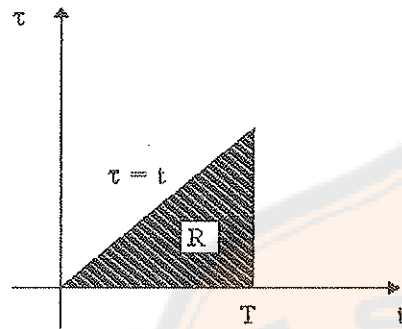
Bukti Teorema 2.10. Dengan menggunakan Definisi 2.1 dan Definisi 2.7 diperoleh

$$\mathcal{L} \{f(t) * g(t)\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T e^{-st} \left[\int_0^t f(\tau) g(t-\tau) d\tau \right] dt.$$

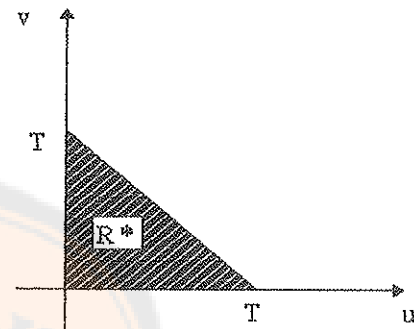
Integral berulang di atas diintegrasikan mula-mula terhadap τ dari 0 sampai t kemudian terhadap t dari 0 sampai T . Batas ini bersesuaian dengan daerah arsiran R pada bidang $t\tau$ yang diperlihatkan oleh Gambar 1. Dengan memisalkan $u = t - \tau$ dan $v = \tau$, maka dapat diperlihatkan bahwa daerah R ditransformasikan menjadi daerah R^* dalam bidang uv , seperti tampak dalam Gambar 2. Dengan demikian,

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \{f(t) * g(t)\} &= \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T \int_0^T e^{-s(v+u)} f(v) g(u) d v d u \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T e^{-su} g(u) \left[\int_0^T e^{-sv} f(v) d v \right] d u \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\int_0^T e^{-sv} f(v) d v \cdot \int_0^T e^{-su} g(u) d u \right] \\ &= \int_0^\infty e^{-sv} f(v) d v \cdot \int_0^\infty e^{-su} g(u) d u \\ &= F(s)G(s). \end{aligned}$$

Bukti selesai.



Gambar 1



Gambar 2

Contoh 2.15. Diberikan fungsi $F(s) = \frac{s}{(s^2 + a^2)^2}$. Akan ditentukan

$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$. $F(s)$ dapat ditulis sebagai $\left(\frac{s}{s^2 + a^2}\right)\left(\frac{1}{s^2 + a^2}\right)$.

Dari Tabel Transform Laplace diketahui bahwa

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2 + a^2}\right\} = \cos at$$

dan

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 + a^2}\right\} = \frac{1}{a} \sin at,$$



maka dengan menggunakan Teorema 2.10 diperoleh

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \cos at * \frac{1}{a} \sin at.$$

Dalam Contoh 2.14 diperoleh

$$\cos at * \frac{1}{a} \sin at = \frac{t \sin at}{2a}$$

Dengan demikian,

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{t \sin at}{2a} .$$



BAB III

TEKNIK TRANSFORMASI LAPLACE

Dalam bab II telah dibahas tentang transformasi Laplace beserta sifat-sifatnya. Selanjutnya pada bab III ini akan diuraikan tentang teknik transformasi Laplace yakni teknik untuk menyelesaikan suatu MNA dengan menggunakan transformasi Laplace.

MNA yang akan dibahas nanti dikhususkan berupa MNA yang berkaitan dengan persamaan diferensial linier biasa tak homogen berkoefisien konstan. Oleh karena itu, uraian tentang teknik transformasi Laplace akan didahului dengan pembahasan mengenai pengertian dan sifat-sifat dasar MNA tersebut.

3.1. MNA

Pembahasan MNA akan didahului dengan uraian tentang persamaan diferensial linier biasa tak homogen berkoefisien konstan, yang didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 3.1. (Persamaan diferensial linier biasa tak homogen berkoefisien konstan). Misalkan $a \geq 0$, dan f fungsi tak nol yang kontinu bagian demi bagian pada setiap interval berbentuk $[a, b]$. Persamaan diferensial yang berbentuk

$$c_n x^{(n)}(t) + c_{n-1} x^{(n-1)}(t) + \dots + c_1 x^{(1)}(t) + c_0 x(t) = f(t), \quad (17)$$

dimana $c_0, c_1, c_2, \dots, c_n$ berupa konstanta-konstanta real, dan $c_n \neq 0$, disebut persamaan diferensial linier biasa tak homogen berkoefisien konstan berorde n .

Untuk selanjutnya dalam skripsi ini, persamaan diferensial tersebut akan disebut dengan singkatan PDLBTH saja.

Definisi 3.2. (Penyelesaian PDLBTH). Misalkan $a \geq 0$ dan f fungsi tak nol yang kontinu bagian demi bagian pada setiap interval berbentuk $[a, b]$. Suatu fungsi $u(t)$ yang kontinu bagian demi bagian pada setiap interval berbentuk $[a, b]$ yang memenuhi persamaan diferensial (17), disebut penyelesaian persamaan diferensial itu.

Contoh 3.1. Diberikan PDLBTH berbentuk

$$x^{(2)}(t) - x^{(1)}(t) = e^t \sin t. \quad (18)$$

Akan ditunjukkan bahwa fungsi-fungsi $u(t) = 1 - \frac{1}{2}e^t(\sin t + \cos t)$ dan $v(t) = e^t - \frac{1}{2}e^t(\sin t + \cos t)$ merupakan penyelesaian-penyelesaian PDLBTH tersebut. Perhatikan bahwa $u^{(1)}(t) = -e^t \cos t$ dan $u^{(2)}(t) = -e^t \cos t + e^t \sin t$, sehingga dengan mensubstitusikannya ke dalam (18), diperoleh

$$u^{(2)}(t) - u^{(1)}(t) = e^t \sin t,$$

yang menunjukkan bahwa fungsi $u(t)$ memenuhi persamaan (18). Demikian juga dapat diperlihatkan secara analog bahwa $v(t)$ memenuhi (18) pula.

Jika dalam (17), $f(t) = 0$, maka (17) disebut sebagai persamaan diferensial linier biasa homogen berkoeffisien konstan (PDLBH). Pengertian penyelesaian umum PDLBH ini akan diberikan oleh definisi berikut, seperti yang dikemukakan dalam Ross (1984, h. 109).

Definisi 3.3. (Penyelesaian umum PDLBH). Jika w_1, w_2, \dots, w_n merupakan n buah penyelesain yang bebas linier dari PDLBH

$$c_n x^{(n)}(t) + c_{n-1} x^{(n-1)}(t) + \dots + c_1 x^{(1)}(t) + c_0 x(t) = 0, \quad (19)$$

maka kombinasi linier

$$k_1 w_1 + k_2 w_2 + \dots + k_n w_n,$$

dengan k_1, k_2, \dots, k_n konstanta-konstanta real, disebut penyelesaian umum PDLBH (19).

Terdapat hubungan antara penyelesaian umum persamaan (19) dan penyelesaian persamaan (17), yang akan diberikan oleh teorema berikut.

Teorema 3.1. Jika x_p suatu penyelesaian dari PDLBTH (17) dan x_h suatu penyelesaian umum dari PDLBH (19), maka $z = x_h + x_p$ juga merupakan penyelesaian PDLBTH (17).

Bukti Teorema 3.1. Jika x_p disubstitusikan ke (17), diperoleh

$$c_n x_p^{(n)}(t) + c_{n-1} x_p^{(n-1)}(t) + \dots + c_1 x_p^{(1)}(t) + c_0 x_p(t) = f(t),$$

dan jika x_h disubstitusikan ke (19) diperoleh

$$c_n x_h^{(n)}(t) + c_{n-1} x_h^{(n-1)}(t) + \dots + c_1 x_h^{(1)}(t) + c_0 x_h(t) = 0.$$

Dengan demikian berlaku hubungan

$$\begin{aligned} c_n (x_h + x_p)^{(n)}(t) + c_{n-1} (x_h + x_p)^{(n-1)}(t) + \dots \\ + c_1 (x_h + x_p)^{(1)}(t) + c_0 (x_h + x_p)(t) = f(t), \end{aligned}$$

yang memperlihatkan bahwa $x_h + x_p$ memenuhi (17). Bukti selesai.

Penyelesaian PDLBTH yang berbentuk $z = x_h + x_p$, seperti yang dikemukakan di atas, disebut penyelesaian umum PDLBTH (17). Berkaitan dengan ini, penyelesaian $u(t)$ pada Definisi 3.2 seringkali dinamakan penyelesaian khusus PDLBTH (17). Penyelesaian khusus PDLBTH (17) dapat ditentukan antara lain dengan menggunakan teknik-teknik koefisien tak tentu, invers operator dan variasi parameter (lihat misalnya dalam Wardiman, 1981, h. 127-91).

Contoh 3.2. Ditinjau kembali PDLBTH (18), yang berkaitan dengan PDLBH

$$x^{(2)}(t) - x^{(1)}(t) = 0. \quad (20)$$

Jelas bahwa 1 dan e^t merupakan penyelesaian-penyelesaian khusus (20) yang bebas linier. Maka menurut Definisi 3.3, $A + B e^t$ merupakan penyelesaian umum (20). Pada Contoh 3.1 telah diperoleh penyelesaian khusus PDLBTH (18), yang salah satunya adalah $u(t) = 1 - \frac{1}{2} e^t (\sin t + \cos t)$. Dengan demikian, berdasarkan Teorema 3.1 $z = A + B e^t + 1 - \frac{1}{2} e^t (\sin t + \cos t)$ merupakan penyelesaian umum PDLBTH (18).

Telah diketahui (misalnya dalam Boyce & Di Prima, 1986, h. 193) bahwa penyelesaian umum PDLBTH (17) dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier dari n buah penyelesaian khusus PDLBH (19) yang bebas linier. Dengan demikian

penyelesaian umum PDLBTH (17) mengandung n buah konstanta sembarang. Dari penyelesaian umum ini dapat ditentukan suatu penyelesaian khusus (17) yang unik, apabila diketahui n buah syarat yang antara lain berbentuk

$$x(a) = x^{(1)}(a) = \dots = x^{(n-1)}(a) = 0. \quad (21)$$

Syarat-syarat yang berbentuk seperti (21) disebut syarat-syarat awal PDLBTH (17).

Berikut ini akan disajikan definisi MNA yang berkaitan dengan PDLBTH (17). MNA bertipe khusus ini akan mendasari pembahasan pada bab-bab selanjutnya.

Definisi 3.4. (MNA). PDLBTH (17) yang dilengkapi dengan syarat-syarat awal (21) disebut MNA.

Contoh 3.3. Pandang MNA yang berkaitan dengan PDLBTH (18) dengan syarat-syarat

$$x(0) = x^{(1)}(0) = 0. \quad (22)$$

Dari Contoh 3.2 diketahui penyelesaian umum (18) adalah

$$z = A + B e^t + 1 - \frac{1}{2} e^t (\sin t + \cos t),$$

sehingga

$$z^{(1)} = B e^t - e^t \cos t.$$

Mengingat syarat-syarat (22) maka untuk $t = 0$, z maupun $z^{(1)}$ tersebut harus berharga nol, sehingga diperoleh $A = -1\frac{1}{2}$ dan $B = 1$. Dengan demikian, penyelesaian MNA (18), (22) adalah

$$z = -1\frac{1}{2} + e^t - \frac{1}{2}e^t(\sin t + \cos t).$$

Jaminan akan adanya penyelesaian bagi MNA (17), (21) dan keunikan penyelesaian ini diberikan oleh teorema berikut, yang biasa dikenal sebagai Teorema Eksistensi dan Ketunggalan. Bukti teorema ini tidak disajikan di sini karena melibatkan berbagai konsep di luar ruang lingkup skripsi ini, misalnya konvergensi seragam barisan fungsi dan syarat Lipschitz (lihat misalnya Kaplan, 1958, h. 473-6, atau Coddington, 1961, h. 250-1).

Teorema 3.2. Jika $a \geq 0$ dan f fungsi tak nol yang kontinu bagian demi bagian pada setiap interval berbentuk $[a, b]$, maka terdapat tepat sebuah penyelesaian bagi MNA (17), (21).

3.2. TEKNIK TRANSFORMASI LAPLACE

Dalam bab II telah dibahas tentang transformasi Laplace beserta sifat-sifatnya. Sekarang akan diperlihatkan peranan transformasi Laplace dalam menyelesaikan suatu MNA. Dalam hal ini transformasi Laplace mampu menyelesaikan MNA secara lebih

sederhana. Proses penyelesaian MNA dengan teknik ini dilakukan dalam tiga langkah utama. Pertama, dengan menggunakan transformasi Laplace persamaan diferensial beserta syarat-syarat awalnya yang diberikan diubah menjadi suatu persamaan aljabar. Kedua, persamaan aljabar ini diselesaikan semata-mata dengan manipulasi aljabar. Ketiga, penyelesaian persamaan aljabar itu dikenai operasi invers transformasi Laplace, yang menghasilkan penyelesaian dari MNA semula.

MNA yang akan diselesaikan dikhususkan untuk MNA yang berkaitan dengan PDLBTH seperti telah diuraikan dalam pasal 3.1. Untuk lebih jelasnya perhatikan contoh-contoh berikut ini.

Contoh 3.4. Pandang MNA (18), (22) pada Contoh 3.3. Akan ditentukan penyelesaiannya dengan menggunakan transformasi Laplace. Kenakan transformasi Laplace pada kedua ruas dari persamaan (18), sehingga dihasilkan hubungan

$$\mathcal{L} \{x^{(2)}(t)\} - \mathcal{L} \{x^{(1)}(t)\} = \mathcal{L} \{e^t \sin t\}. \quad (23)$$

Dengan menggunakan Teorema 2.8 dan syarat-syarat awal (22) diperoleh

$$\mathcal{L} \{x^{(1)}(t)\} = s X(s) \quad \text{dan} \quad \mathcal{L} \{x^{(2)}(t)\} = s^2 X(s).$$

Di samping itu, dari Contoh 2.11 diketahui bahwa

$$\mathcal{L} \{e^t \sin t\} = \frac{1}{(s-1)^2 + 1^2}, \quad \text{untuk } s > 1.$$

Dengan demikian persamaan (23) dapat dituliskan kembali menjadi persamaan aljabar

$$s^2 X(s) - sX(s) = \frac{1}{(s-1)^2 + 1}$$

$$X(s) = \frac{1}{((s-1)^2 + 1)s(s-1)}$$

Dengan menggunakan pecahan parsial diperoleh

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{1}{((s-1)^2 + 1)s(s-1)} \\ &= -\frac{\frac{1}{2}}{s} + \frac{1}{s-1} - \frac{\frac{1}{2}s}{(s-1)^2 + 1} \\ &= -\frac{1}{2s} + \frac{1}{s-1} - \frac{1}{2} \left[\frac{s-1}{(s-1)^2 + 1} + \frac{1}{(s-1)^2 + 1} \right]. \end{aligned}$$

Dengan demikian, berdasarkan Tabel Transform Laplace diperoleh

$$x(t) = -\frac{1}{2} + e^t - \frac{1}{2}(e^t \cos t + e^t \sin t).$$

Tampak bahwa penyelesaian ini persis sama dengan penyelesaian MNA (18), (22) seperti yang dikemukakan dalam Contoh 3.3. Hal ini tidak mengherankan mengingat ketunggalan penyelesaian MNA seperti yang dijamin oleh Teorema 3.2.

Contoh 3.5. Diberikan MNA

$$x^{(3)}(t) + x^{(1)}(t) - 10x(t) = \delta_k(t), \quad (24)$$

$$x(0) = x^{(1)}(0) = x^{(2)}(0) = 0, \quad (25)$$

dimana

$$\delta_k(t) = \begin{cases} \frac{1}{k} & , \text{ jika } 0 \leq t \leq k \\ 0 & , \text{ jika } t > k \end{cases}.$$

Berdasarkan Teorema 2.8 dan perhitungan transform Laplace dari $\delta_k(t)$ pada

Contoh 2.2, penerapan transformasi Laplace pada MNA di atas menghasilkan

$$s^{(3)}X(s) + sX(s) - 10X(s) = \frac{1}{sk}(1 - e^{-sk}), \quad s \neq 0.$$

Dengan menggunakan operasi-operasi aljabar, persamaan terakhir dapat dinyatakan kembali menjadi

$$X(s) = X_1(s) - X_2(s),$$

dimana $X_1(s) = \frac{1}{sk(s-2)((s+1)^2+4)}$, dan $X_2(s) = e^{-sk}X_1(s)$.

Penguraian pecahan parsial pada $X_1(s)$ menghasilkan

$$X_1(s) = \frac{1}{k} \left[-\frac{1}{10} \left(\frac{1}{s} \right) + \frac{1}{26} \left(\frac{1}{s-2} \right) + \frac{4}{65} \frac{s+1}{(s+1)^2+4} - \frac{4}{65} \frac{1}{(s+1)^2+4} \right],$$

sehingga dengan menggunakan Tabel Transform Laplace, diperoleh invers transform Laplacenya, yaitu

$$x_1(t) = \frac{1}{k} \left[-\frac{1}{10} + \frac{1}{26} e^{2t} + \frac{4}{65} e^{-t} \cos 2t - \frac{2}{65} e^{-t} \sin 2t \right].$$

Selanjutnya, berdasarkan Teorema Translasi Kedua, invers transform Laplace bagi $X_2(s)$ dapat ditemukan, yakni

$$x_2(t) = \begin{cases} 0 & , \text{ jika } 0 \leq t \leq k \\ x_1(t-k) & , \text{ jika } t > k \end{cases}.$$

Dengan demikian, menurut sifat kelinieran invers transformasi Laplace, maka

$\mathcal{L}^{-1} \{X(s)\}$ adalah

$$x(t) = x_1(t) - x_2(t),$$

yang merupakan penyelesaian bagi MNA di atas.

Contoh 3.6. Pandang MNA

$$\begin{aligned} x^{(2)}(t) + 2x(t) &= r(t), \\ x\left(\frac{\pi}{4\sqrt{2}}\right) &= x^{(1)}\left(\frac{\pi}{4\sqrt{2}}\right) = 0, \end{aligned}$$

dengan $r(t) = \begin{cases} 1, & \text{jika } 0 < t < 1 \\ 0, & \text{jika } t > 1 \end{cases}$.

Berdasarkan Tabel Transform Laplace, persamaan pembantu

$$(s^2 + 2)X(s) - sx(0) - x^{(1)}(0) = \mathcal{L}\{r(t)\}$$

mempunyai penyelesaian

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{\mathcal{L}\{r(t)\}}{s^2 + 2} + \frac{s}{s^2 + 2}x(0) + \frac{1}{s^2 + 2}x^{(1)}(0) \\ &= \mathcal{L}\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\sqrt{2}t\right\} \cdot \mathcal{L}\{r(t)\} + \frac{s}{s^2 + 2}x(0) + \frac{1}{s^2 + 2}x^{(1)}(0). \end{aligned}$$

Menurut Teorema Konvolusi Fungsi, dari persamaan terakhir diperoleh penyelesaian

MNA di atas, yang masih mengandung konstanta-konstanta $x(0)$ dan $x^{(1)}(0)$, yakni

$$x(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos\sqrt{2}t + \cos\sqrt{2}tx(0) + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\sqrt{2}tx^{(1)}(0), & \text{jika } 0 < t < 1 \\ \frac{1}{2}\cos(\sqrt{2}t - \sqrt{2}) - \frac{1}{2}\cos\sqrt{2}t + \cos\sqrt{2}tx(0) + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\sqrt{2}tx^{(1)}(0), & \text{jika } t > 1 \end{cases} \quad (26)$$

Mengingat syarat-syarat awal yang diberikan, maka untuk menentukan nilai-nilai $x(0)$

dan $x^{(1)}(0)$, cukup diperhatikan rumus $x(t)$ untuk $0 < t < 1$. Untuk $0 < t < 1$

berlaku

$$x^{(1)}(t) = \frac{1}{2}\sqrt{2} \sin \sqrt{2} t - \sqrt{2} \sin \sqrt{2} t x(0) + \cos \sqrt{2} t x^{(1)}(0) . \quad (27)$$

Dengan mensubstitusikan syarat-syarat awal ke dalam (26) dan (27) dihasilkan

$$\begin{cases} \sqrt{2} x(0) + x^{(1)}(0) = \frac{1}{2}\sqrt{2} - 1 \\ x(0) - \frac{1}{2}\sqrt{2} x^{(1)}(0) = \frac{1}{2} \end{cases} ,$$

sehingga $x(0) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\sqrt{2}$ dan $x^{(1)}(0) = -\frac{1}{2}$.

Dengan demikian, penyelesaian MNA di atas menjadi

$$x(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\sqrt{2}(\cos \sqrt{2} t + \sin \sqrt{2} t) & , \text{ jika } 0 < t < 1 \\ \frac{1}{2} \cos(\sqrt{2} t - \sqrt{2}) - \frac{1}{4}\sqrt{2}(\cos \sqrt{2} t + \sin \sqrt{2} t) & , \text{ jika } t > 1 \end{cases} .$$

BAB IV TEKNIK FUNGSI GREEN

Dalam bab III telah diuraikan tentang teknik transformasi Laplace. Teknik ini mampu menyelesaikan MNA yang melibatkan PDLBTH (17) dengan fungsi sumber berupa fungsi kontinu bagian demi bagian. Meskipun demikian, tidak semua MNA jenis ini dapat diselesaikan dengan teknik transformasi Laplace. Hal ini dikarenakan tidak semua fungsi sumbernya mudah dicari transform Laplacanya, atau bahkan ada yang tidak mempunyai transform Laplace sama sekali. Bertolak dari masalah inilah bab IV akan menguraikan suatu teknik yang mampu mengatasi keterbatasan teknik transformasi Laplace, yakni teknik fungsi Green.

Teknik fungsi Green didasarkan pada konsep fungsi Green. Terdapat berbagai definisi fungsi Green yang saling berlainan tetapi saling ekuivalen. Dengan dasar ekuivalensi berbagai definisi fungsi Green tersebut, skripsi ini hanya akan membahas salah satu definisi saja, yakni definisi yang melibatkan fungsi δ Dirac.

Bab ini akan diawali dengan uraian tentang fungsi δ Dirac. Selanjutnya akan dibahas pokok permasalahan skripsi yakni fungsi Green dan teknik fungsi Green. Di samping itu, akan dilengkapi pula dengan pemaparan beberapa keistimewaan dan kelemahan dari teknik ini.

4.1. FUNGSI δ DIRAC

Fungsi δ Dirac, yang sering juga disebut fungsi impuls satuan, telah lama dikenal oleh kalangan fisika dan keteknikan. Latar belakang pemunculan gagasan fungsi ini adalah untuk merepresentasikan gaya-gaya yang bersifat impulsif, yakni gaya yang cukup besar yang berlangsung dalam interval waktu yang sangat singkat, dengan impuls sebesar satu satuan (Finizio/Landas, 1988, h. 192). Misalnya untuk merepresentasikan gaya yang bekerja jika sebuah palu dipukulkan pada paku.

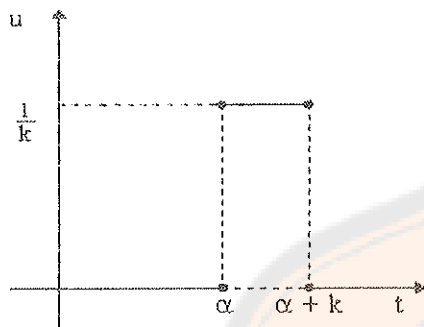
Tinjau kembali fungsi $\delta_k(t)$ seperti yang telah didefinisikan oleh (6) dalam bab II. $\delta_k(t)$ merupakan kasus khusus dari fungsi $\delta_k(t - \alpha)$ dengan $\alpha \geq 0$, yang didefinisikan oleh rumus

$$\delta_k(t - \alpha) = \begin{cases} \frac{1}{k}, & \text{jika } t \in [\alpha, \alpha + k] \\ 0, & \text{jika } t \notin [\alpha, \alpha + k] \end{cases} \quad (28)$$

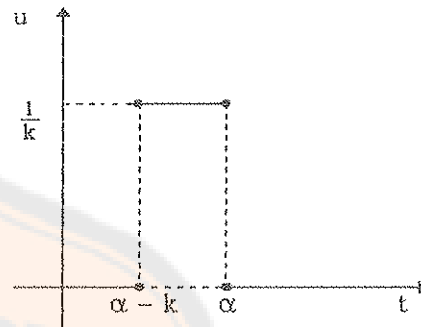
Akibatnya, fungsi $\delta_k(\alpha - t)$ menjadi

$$\delta_k(\alpha - t) = \begin{cases} \frac{1}{k}, & \text{jika } t \in [\alpha - k, \alpha] \\ 0, & \text{jika } t \notin [\alpha - k, \alpha] \end{cases} \quad (29)$$

Untuk setiap $k \geq 0$, grafik dari kedua fungsi ini berturut-turut disajikan oleh Gambar 3 dan Gambar 4.



Gambar 3



Gambar 4

Jika $\delta_k(t - \alpha)$ menyatakan besar gaya yang bekerja pada suatu sistem, maka gaya ini mempengaruhi sistem hanya pada interval waktu $\alpha \leq t \leq \alpha + k$. Besar impuls dari tiap-tiap gaya $\delta_k(t - \alpha)$ adalah

$$\int_0^{\infty} \delta_k(t - \alpha) dt = \int_{\alpha}^{\alpha+k} \frac{1}{k} dt = 1. \quad (30)$$

Untuk k yang sangat kecil, pengaruh gaya tersebut berlangsung pada waktu yang sangat singkat, tetapi gaya menjadi sangat besar, dengan impuls tetap sebesar satu satuan seperti yang ditunjukkan oleh (30). Jadi oleh kalangan fisika dan keteknikan, fungsi δ Dirac dibayangkan sebagai limit dari $\delta_k(t - \alpha)$ untuk $k \rightarrow 0$, yakni

$$\delta(t - \alpha) = \lim_{k \rightarrow 0} \delta_k(t - \alpha), \quad (31)$$

sedemikian hingga

$$\int_0^{\infty} \delta(t - \alpha) dt = 1. \quad (32)$$

Perhatikan bahwa berdasarkan definisi (28), untuk $k \rightarrow 0$, $\delta_k(t - \alpha)$ konvergen ke fungsi yang berharga nol di mana-mana kecuali di α . Jadi dari (31) tampak bahwa $\delta(t - \alpha)$ berharga nol di mana-mana kecuali di α , sehingga berdasarkan pengertian integral, haruslah berlaku

$$\int_0^{\infty} \delta(t - \alpha) dt = 0, \quad (33)$$

yang jelas bertentangan dengan asumsi (32). Dengan demikian, berdasarkan fakta dalam (32) dan (33) yang tidak konsisten, dapat disimpulkan bahwa pengertian tentang fungsi δ Dirac yang disyaratkan oleh (31), (32) tidak dapat dipertanggungjawabkan secara matematis.

Untuk mengatasi ketidakkonsistenan ini, dalam matematika telah dikenal apa yang disebut distribusi δ Dirac. Dibandingkan fungsi δ Dirac, konsep tersebut jauh lebih baik dalam rangka merepresentasikan gaya-gaya impulsif (Susento, 1996, h. 45-57).

Namun demikian, pengertian maupun penggunaan distribusi δ Dirac sengaja tidak akan dibahas dalam skripsi ini. Meskipun mengandung masalah ketidakkonsistenan, skripsi ini akan tetap menggunakan fungsi δ Dirac dalam pembahasan selanjutnya, yakni mengikuti kebiasaan kalangan fisika dan keteknikan dalam pemakaian teknik fungsi Green (Friedman, 1956, h. 156).

Gagasan impuls satuan bagi $\delta(t - \alpha)$ dalam (32) sebenarnya berkaitan dengan

$$\lim_{k \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \delta_k(t - \alpha) dt = 1, \quad (34)$$

yang diperoleh berdasarkan (30). Ternyata (34) ini merupakan kasus khusus dari salah satu sifat istimewa dari fungsi $\delta_k(t - \alpha)$ yang diberikan oleh Teorema 4.1 berikut ini.

Teorema 4.1. Misalkan $\alpha \geq 0$. Untuk setiap fungsi $f(t)$ yang kontinu bagian demi bagian pada setiap interval tutup, berlaku

$$\lim_{k \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \delta_k(t - \alpha) f(t) dt = f(\alpha). \quad (35)$$

Bukti Teorema 4.1. Tanpa mengurangi keumuman, pandanglah interval tutup $[\alpha, \alpha + 1]$. Misalkan t_1, t_2, \dots, t_n , dengan $\alpha < t_1 < t_2 < \dots < t_n < \alpha + 1$, adalah titik-titik diskontinu $f(t)$ pada $[\alpha, \alpha + 1]$. Perhatikan sembarang harga $k \in (0, t_1 - \alpha)$. Berdasarkan definisi (28) maka diperoleh

$$\int_0^{\infty} \delta_k(t - \alpha) f(t) dt = \frac{1}{k} \int_{\alpha}^{\alpha+k} f(t) dt. \quad (36)$$

Selanjutnya, dengan menggunakan Teorema Nilai Rata-rata Integral, (lihat Purcell & Varberg, 1997, h. 281), (36) menjadi

$$\frac{1}{k} \int_{\alpha}^{\alpha+k} f(t) dt = \frac{1}{k} \cdot k f(c) = f(c), \text{ untuk } c \in [\alpha, \alpha + k].$$

Dengan demikian, untuk $k \rightarrow 0$, maka $c \rightarrow \alpha$ dan $f(c) \rightarrow f(\alpha)$. Dengan kata lain,

$$\lim_{k \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \delta_k(t - \alpha) f(t) dt = f(\alpha).$$

Bukti selesai.

Misalkan $f(t)$ sembarang fungsi yang kontinu bagian demi bagian pada setiap interval tutup. Persamaan (35) mendasari timbulnya gagasan definisi integral $\delta(t - \alpha) f(t)$, yakni

$$\int_0^{\infty} \delta(t - \alpha) f(t) dt = f(\alpha). \quad (37)$$

Tampak bahwa (37) merupakan perluasan dari (32).

Sifat dalam Teorema 4.1 berlaku juga untuk $\delta_k(\alpha - t)$ dalam (29), yakni

$$\lim_{k \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \delta_k(\alpha - t) f(t) dt = f(\alpha). \quad (38)$$

Buktinya analog dengan bukti Teorema 4.1 di atas. Lebih lanjut, jika pada (38) diasumsikan $f(t) = 0$ untuk $t < a$, dimana $a \geq 0$, maka (38) mengakibatkan

$$\lim_{k \rightarrow 0} \int_a^{\infty} \delta_k(\alpha - t) f(t) dt = f(\alpha). \quad (39)$$

Seperti halnya pada pendefinisian (37) berdasarkan hubungan (35), persamaan (39) tersebut mendasari gagasan definisi pengintegralan $\delta(\alpha - t) f(t)$, yakni

$$\int_a^{\infty} \delta(\alpha - t) f(t) dt = f(\alpha). \quad (40)$$

Selanjutnya, dengan menggunakan (37), didefinisikan transform Laplace dari $\delta(t - \alpha)$, yakni

$$\mathcal{L} \{ \delta(t - \alpha) \} = e^{-s\alpha}. \quad (41)$$

Secara khusus, jika $\alpha = 0$ maka

$$\mathcal{L} \{ \delta(t) \} = 1. \quad (42)$$

4.2. FUNGSI GREEN

Penyelesaian MNA (17), (21) dengan teknik fungsi Green didasarkan pada konsep fungsi Green. Dalam berbagai literatur seperti Friedman (1956), Golomb & Shanks (1965), Birkhoff & Rota (1978) maupun Zauderer (1989) tampak bahwa terdapat paling tidak empat macam cara mendefinisikan fungsi Green. Dalam definisi pertama, fungsi Green didefinisikan sebagai penyelesaian dari suatu MNA yang berkaitan dengan PDLBTH (17) dimana fungsi sumbernya berupa apa yang biasa disebut dengan fungsi δ Dirac. Definisi kedua melibatkan fungsi $G_k(t)$ yang merupakan penyelesaian dari MNA yang sama, tetapi dengan fungsi sumber berupa fungsi $\delta_k(t)$ yang disajikan oleh (6). Menurut definisi ini, fungsi Green didefinisikan sebagai $\lim_{k \rightarrow 0} G_k(t)$. Definisi ketiga menyebutkan bahwa fungsi Green merupakan turunan dari penyelesaian MNA (17), (21) dengan fungsi sumber berupa fungsi tangga satuan (5) dalam bab II. Berbeda dengan ketiga definisi tadi yang melibatkan PDLBTH, definisi keempat mendefinisikan fungsi Green sebagai penyelesaian PDLBH (19) dengan syarat-syarat awal

$$x(0) = x^{(1)}(0) = x^{(2)}(0) = \dots = x^{(n-2)}(0) = 0, \quad x^{(n-1)}(0) = \frac{1}{c_n}.$$

Tampak bahwa keempat definisi fungsi Green di atas saling bertentangan. Akan tetapi, seperti yang telah diperlihatkan dalam Susento (1997), ternyata semua definisi tersebut ekuivalen satu sama lain. Atas dasar ini, maka pembahasan tentang teknik fungsi Green cukup mendasarkan diri pada salah satu definisi saja. Mengingat kesederhanaannya, maka konsep fungsi Green yang akan dipakai dalam pembahasan

selanjutnya didasarkan pada definisi pertama di atas. Definisi tersebut secara lengkap disajikan berikut ini.

Definisi 4.1. (Fungsi Green). Pandang MNA

$$c_n x^{(n)}(t) + c_{n-1} x^{(n-1)}(t) + \dots + c_1 x^{(1)}(t) + c_0 x(t) = \delta(t), \quad (43)$$

$$x(0) = x^{(1)}(0) = \dots = x^{(n-1)}(0) = 0. \quad (44)$$

Penyelesaian $G(t)$ dari MNA (43), (44) disebut fungsi Green.

Contoh 4.1. Perhatikan MNA berikut.

$$x^{(2)}(t) + x(t) = \delta(t), \quad (45)$$

$$x(0) = x^{(1)}(0) = 0. \quad (46)$$

Dengan menggunakan transformasi Laplace, akan ditentukan fungsi Green dari MNA (45), (46). Berdasarkan Teorema 2.8 dan pengertian transform Laplace dari $\delta(t)$, serta dengan mengingat syarat awal (46), maka diperoleh persamaan pembantu

$$s^2 X(s) + X(s) = 1,$$

sehingga

$$X(s) = \frac{1}{s^2 + 1}.$$

Dengan menggunakan Tabel Transform Laplace, diperoleh invers transform Laplace dari $X(s)$ yang sekaligus merupakan fungsi Green dari MNA tersebut yakni

$$G(t) = x(t) = \sin t.$$

Contoh 4.2. Akan ditentukan fungsi Green yang berkaitan dengan MNA (24), (25) dalam Contoh 3.5. Dengan mengganti fungsi sumbernya menjadi $\delta(t)$, penerapan transformasi Laplace pada MNA tersebut menghasilkan persamaan pembantu

$$s^3 X(s) + sX(s) - 10X(s) = 1.$$

Dengan pengoperasian aljabar diperoleh

$$X(s) = \frac{1}{(s-2)((s+1)^2+4)}.$$

Penguraian pecahan parsial pada $X(s)$ menghasilkan

$$X(s) = \frac{1}{13} \left(\frac{1}{s-2} \right) - \frac{1}{13} \left(\frac{s+1}{(s+1)^2+4} \right) - \frac{3}{13} \left(\frac{1}{(s+1)^2+4} \right).$$

Dengan demikian, fungsi Green yang dimaksud dapat diperoleh berdasarkan Tabel Transform Laplace, yakni

$$G(t) = x(t) = \frac{1}{13} e^{2t} - \frac{1}{13} e^{-t} \cos 2t - \frac{3}{26} e^{-t} \sin 2t.$$

Contoh 4.3. Pandang MNA

$$x^{(4)}(t) - 3x^{(3)}(t) + 7x^{(2)}(t) - 5x^{(1)}(t) = \delta(t), \quad (47)$$

$$x(0) = x^{(1)}(0) = x^{(2)}(0) = x^{(3)}(0) = 0. \quad (48)$$

Penerapan transformasi Laplace pada MNA di atas menghasilkan persamaan pembantu

$$s^4 X(s) - 3s^3 X(s) + 7s^2 X(s) - 5sX(s) = 1,$$

dengan penyelesaian

$$X(s) = \frac{1}{s(s-1)(s^2-2s+5)} .$$

Dengan pemecahan parsial pada $X(s)$, diperoleh

$$X(s) = -\frac{1}{5} \left(\frac{1}{s} \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{s-1} \right) - \frac{1}{20} \left(\frac{s-1}{(s-1)^2+4} \right) - \frac{1}{5} \left(\frac{1}{(s-1)^2+4} \right) .$$

Dengan demikian, berdasarkan Tabel Transform Laplace diperoleh fungsi Green dari MNA (47), (48), yakni

$$G(t) = x(t) = -\frac{1}{5} + \frac{1}{4} e^t - \frac{1}{20} e^t \cos 2t - \frac{1}{10} e^t \sin 2t .$$

Contoh 4.4. Perhatikan MNA berikut.

$$x^{(5)}(t) - 3x^{(3)}(t) - 4x^{(1)}(t) = \delta(t), \tag{49}$$

$$x(0) = x^{(1)}(0) = x^{(2)}(0) = x^{(3)}(0) = x^{(4)}(0) = 0. \tag{50}$$

Akan ditentukan fungsi Green dari MNA di atas dengan menggunakan transformasi Laplace. Persamaan pembantu

$$s^5 X(s) - 3s^3 X(s) - 4sX(s) = 1,$$

mempunyai penyelesaian

$$X(s) = \frac{1}{s(s^2+1)(s^2-4)} .$$

Bentuk pecahan parsial dari $X(s)$ adalah

$$X(s) = -\frac{1}{4} \left(\frac{1}{s} \right) + \frac{1}{5} \left(\frac{s}{s^2+1} \right) + \frac{1}{20} \left(\frac{s}{s^2-4} \right) .$$

Berdasarkan Tabel Transform Laplace, invers transform Laplace dari $X(s)$ yakni

$$x(t) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{5} \cos t + \frac{1}{20} \cosh 2t,$$

yang merupakan fungsi Green yang dicari.

4.3. TEKNIK FUNGSI GREEN

Langkah pertama penyelesaian MNA (17), (21) dengan memakai teknik fungsi Green tidak lain adalah penentuan fungsi Green itu sendiri. Dalam hal ini, fungsi Green dapat dicari dengan memakai teknik transformasi Laplace. Begitu fungsi Green telah ditemukan, maka langkah selanjutnya tinggal mengkonvolusikan fungsi Green ini dengan fungsi sumber pada (17). Hasil konvolusi inilah yang merupakan penyelesaian bagi MNA yang dicari. Pernyataan ini dipertegas oleh Teorema 4.2 berikut ini.

Teorema 4.2. Pandang MNA

$$c_n x^{(n)}(t) + c_{n-1} x^{(n-1)}(t) + \dots + c_1 x^{(1)}(t) + c_0 x(t) = f(t), \quad (51)$$

$$x(a) = x^{(1)}(a) = \dots = x^{(n-1)}(a) = 0. \quad (52)$$

Jika $G(t)$ fungsi Green menurut Definisi 4.1, maka $f(t) * G(t)$ merupakan penyelesaian dari MNA (51), (52).

Bukti Teorema 4.2. Misalkan $P(D)$ dan $P(\partial)$ masing-masing menyatakan operator

$$c_n \frac{d^n}{dt^n} + c_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \dots + c_1 \frac{d}{dt} + c_0$$

dan

$$c_n \frac{\partial^n}{\partial t^n} + c_{n-1} \frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}} + \dots + c_1 \frac{\partial}{\partial t} + c_0 .$$

Menurut Definisi 2.7 dan dengan mengasumsikan $f(t) = 0$ untuk $t < a$ pada (51), diperoleh hubungan

$$\begin{aligned} P(D)[f(t) * G(t)] &= P(D) \int_0^t f(\tau) G(t - \tau) d\tau \\ &= P(D) \int_a^t f(\tau) G(t - \tau) d\tau \\ &= \int_a^t f(\tau) P(D)G(t - \tau) d\tau . \end{aligned} \tag{53}$$

Kesamaan pada baris terakhir di atas didasarkan pada sifat pertukaran urutan operasi-operasi turunan dan konvolusi yang disajikan dalam Folland (1992, h. 207). Kalau ditelusuri lebih jauh, sifat ini merupakan akibat langsung dari sifat pertukaran urutan operasi-operasi turunan dan pengintegralan yang terdapat dalam Rudin (1976, h. 236). Bukti dari kedua sifat itu sengaja tidak dipaparkan di sini, karena melibatkan berbagai konsep di luar ruang lingkup skripsi, misalnya integral Riemann-Stieltjes, fungsi bervariasi terbatas, dan konvergensi seragam.

Selanjutnya, berdasarkan Definisi 4.1 dan dengan menerapkan rumus (40), maka (53) dapat ditulis menjadi

$$P(D)[f(t) * G(t)] = \int_a^t f(\tau) \delta(t - \tau) d\tau = f(t) .$$

Dengan demikian tampak bahwa $f(t) * G(t)$ merupakan penyelesaian dari persamaan diferensial (51). Di samping itu, jika $u(t) = f(t) * G(t)$ maka dari Definisi 2.7 jelas bahwa $u(a) = 0$, dan untuk $i = 1, 2, \dots, n - 1$ berlaku

$$u^{(i)}(t) = \frac{d^i}{dt^i} \int_a^t f(\tau) G(t-\tau) d\tau = \int_a^t f(\tau) \frac{\partial^i}{\partial t^i} G(t-\tau) d\tau,$$

sehingga $u^{(i)}(a) = 0$. Ini memperlihatkan bahwa $f(t) * G(t)$ memenuhi pula syarat-syarat awal (52). Bukti selesai.

Sekarang kita telah siap untuk menyajikan contoh-contoh pemakaian teknik fungsi Green.

Contoh 4.5. Perhatikan kembali MNA (24), (25) dalam Contoh 3.5 pada bab III. Akan ditentukan penyelesaian dari MNA tersebut dengan menggunakan teknik fungsi Green. Fungsi Green $G(t)$ dari MNA di atas telah diberikan oleh Contoh 4.2, sehingga penyelesaiannya merupakan konvolusi dari $G(t)$ dan fungsi sumber $f(t) = \delta_k(t)$, yakni

$$\begin{aligned} f(t) * G(t) &= \delta_k(t) * \left(\frac{1}{13} e^{2t} - \frac{1}{13} e^{-t} \cos 2t - \frac{3}{26} e^{-t} \sin 2t \right) \\ &= \frac{1}{13} \int_0^t \delta_k(\tau) e^{2(t-\tau)} d\tau \\ &\quad - \frac{1}{13} \int_0^t \delta_k(\tau) e^{-(t-\tau)} \cos 2(t-\tau) d\tau \\ &\quad - \frac{3}{13} \int_0^t \delta_k(\tau) e^{-(t-\tau)} \sin 2(t-\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Berdasarkan definisi $\delta_k(t)$ pada persamaan (6) dalam bab II dan rumus-rumus dasar trigonometri diperoleh



$$\begin{aligned}
 f(t) * G(t) &= \frac{1}{13k} e^{2t} \int_0^k e^{-2\tau} d\tau \\
 &- \frac{1}{13k} e^{-t} \left[\cos 2t \int_0^k e^{\tau} \cos 2\tau d\tau + \sin 2t \int_0^k e^{\tau} \sin 2\tau d\tau \right] \\
 &- \frac{3}{26k} e^{-t} \left[\sin 2t \int_0^k e^{\tau} \cos 2\tau d\tau - \cos 2t \int_0^k e^{\tau} \sin 2\tau d\tau \right].
 \end{aligned}$$

Penerapan pengintegralan parsial pada ruas kanan persamaan terakhir menghasilkan

$$\begin{aligned}
 f(t) * G(t) &= \frac{1}{13k} e^{2t} \left(-\frac{1}{2} e^{-2k} + \frac{1}{2} \right) \\
 &- \frac{1}{13k} e^{-t} \left[\cos 2t \left(\frac{2}{5} e^k \sin 2k + \frac{1}{5} e^k \cos 2k - \frac{1}{5} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \sin 2t \left(-\frac{2}{5} e^k \cos 2k + \frac{1}{5} e^k \sin 2k + \frac{2}{5} \right) \right] \\
 &- \frac{3}{26k} e^{-t} \left[\sin 2t \left(\frac{2}{5} e^k \sin 2k + \frac{1}{5} e^k \cos 2k - \frac{1}{5} \right) \right. \\
 &\quad \left. - \cos 2t \left(-\frac{2}{5} e^k \cos 2k + \frac{1}{5} e^k \sin 2k + \frac{2}{5} \right) \right].
 \end{aligned}$$

Selanjutnya dengan memakai rumus-rumus dasar trigonometri, hasil tersebut dapat diringkas menjadi

$$\begin{aligned}
 f(t) * G(t) &= \frac{1}{26k} e^{2t} \left(1 - e^{-2k} \right) + \frac{1}{130k} e^{-(t-k)} \left(\sin 2(t-k) - 8 \cos 2(t-k) \right) \\
 &+ \frac{1}{130k} e^{-t} \left(8 \cos 2t - \sin 2t \right),
 \end{aligned}$$

yang merupakan penyelesaian dari MNA yang dicari.

Contoh 4.6. Akan ditentukan penyelesaian dari MNA

$$x^{(3)}(t) + x^{(1)}(t) - 10x(t) = e^{5t}, \tag{54}$$

$$x(0) = x^{(1)}(0) = x^{(2)}(0) = 0, \tag{55}$$

dengan menggunakan teknik fungsi Green. Perhatikan bahwa MNA ini mirip dengan MNA (24), (25) pada Contoh 4.5, kecuali fungsi sumbernya. Dari Contoh 4.2 diketahui bahwa fungsi Green dari MNA tersebut adalah

$$G(t) = \frac{1}{13}e^{2t} - \frac{1}{13}e^{-t}\cos 2t - \frac{3}{26}e^{-t}\sin 2t.$$

Dengan menggunakan Teorema 4.2 dan Definisi 2.7, maka penyelesaian dari MNA di atas adalah $G(t) * f(t)$ dengan $f(t) = e^{5t}$, yakni

$$G(t) * f(t) = \frac{1}{13} \int_0^t e^{2\tau} e^{5(t-\tau)} d\tau - \frac{1}{13} \int_0^t e^{-\tau} \cos 2\tau e^{5(t-\tau)} d\tau - \frac{3}{26} \int_0^t e^{-\tau} \sin 2\tau e^{5(t-\tau)} d\tau,$$

atau

$$G(t) * f(t) = \frac{1}{26}e^{5t} \left(2 \int_0^t e^{-3\tau} d\tau - 2 \int_0^t e^{-6\tau} \cos 2\tau d\tau - 3 \int_0^t e^{-6\tau} \sin 2\tau d\tau \right).$$

Sehingga dengan pengintegralan parsial, persamaan terakhir menjadi

$$G(t) * f(t) = \frac{1}{1560} \left(21e^{-t} \sin 2t + 27e^{-t} \cos 2t + 13e^{5t} - 40e^{2t} \right).$$

Contoh 4.7. Pandang MNA yang melibatkan PDLBTH (52) dengan syarat-syarat awal

$$x(\pi) = x^{(1)}(\pi) = x^{(2)}(\pi) = 0. \tag{56}$$

Dibandingkan dengan Contoh 4.6, MNA (54), (56) tersebut hanya berbeda pada syarat-syarat awalnya saja. Dengan menggunakan teknik fungsi Green, penyelesaian MNA di atas merupakan konvolusi dari $G(t)$ dan $f(t)$ seperti pada Contoh 4.6, tetapi sekarang dengan titik awal π , yakni

$$G(t) * f(t) = \frac{1}{26}e^{5t} \left(2 \int_{\pi}^t e^{-3\tau} d\tau - 2 \int_{\pi}^t e^{-6\tau} \cos 2\tau d\tau - 3 \int_{\pi}^t e^{-6\tau} \sin 2\tau d\tau \right).$$

Pengintegralan parsial ruas kanan persamaan tersebut merupakan penyelesaian MNA

yang dimaksud, yakni

$$G(t) * f(t) = \frac{1}{1560} e^{-t} \left(-40 e^{3t} + 21 \sin 2t + 27 \cos 2t \right) + \frac{1}{1560} e^{5t - 3\pi} \left(40 - 27 e^{-3\pi} \right)$$

Contoh 4.8. Perhatikan MNA berikut.

$$x^{(5)}(t) - 3x^{(3)}(t) - 4x^{(1)}(t) = e^t + \delta(t-1), \quad (57)$$

$$x(0) = x^{(1)}(0) = x^{(2)}(0) = x^{(3)}(0) = x^{(4)}(0) = 0. \quad (58)$$

Fungsi Green $G(t)$ dari MNA ini telah diberikan oleh Contoh 4.4. Menurut teknik fungsi Green, penyelesaian dari MNA tersebut merupakan konvolusi dari $G(t)$ dan fungsi sumber $f(t) = e^t + \delta(t-1)$. Berdasarkan Definisi 2.7 dan sifat pengintegralan diperoleh

$$\begin{aligned} f(t) * G(t) &= -\frac{1}{4} \int_0^t e^\tau d\tau + \frac{1}{5} \int_0^t e^\tau \cos(t-\tau) d\tau + \frac{1}{20} \int_0^t e^\tau \cosh 2(t-\tau) d\tau \\ &\quad - \frac{1}{4} \int_0^t \delta(\tau-1) d\tau + \frac{1}{5} \int_0^t \delta(\tau-1) \cos(t-\tau) d\tau \\ &\quad + \frac{1}{20} \int_0^t \delta(\tau-1) \cosh 2(t-\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Dengan melakukan proses pengerjaan seperti yang dilakukan dalam pembuktian Teorema 4.1, diperoleh rumus

$$\int_0^t \delta(\tau-1) f(\tau) d\tau = \begin{cases} 0, & \text{jika } 0 \leq t < 1 \\ f(1), & \text{jika } t > 1 \end{cases}. \quad (59)$$

Dengan demikian, pengintegralan parsial pada suku-suku kedua dan ketiga, serta penerapan rumus (59) pada tiga suku terakhir dari persamaan di atas menghasilkan

$$f(t) * G(t) = \begin{cases} \frac{1}{60} (15 - 10e^t + 6 \sin t - 6 \cos t + 2 \sinh 2t - \cosh 2t), & \text{jika } 0 \leq t < 1 \\ \frac{1}{60} (-10e^t + 6 \sin t - 6 \cos t + 12 \cos(t-1) + 2 \sinh 2t + \cosh 2t + 3 \cosh 2(t-1)) & \text{jika } t > 1 \end{cases}$$

yang merupakan penyelesaian dari MNA yang dicari.

Contoh 4.9. Pandang MNA

$$x^{(2)}(t) + x(t) = e^{t^2}, \quad (60)$$

$$x(0) = x^{(1)}(0) = 0. \quad (61)$$

Perhatikan bahwa menurut Contoh 2.8 dalam bab II, fungsi e^{t^2} tidak mempunyai transform Laplace, sehingga MNA ini tidak dapat diselesaikan dengan teknik transformasi Laplace. Dalam contoh ini, akan ditentukan penyelesaian dari MNA tersebut dengan teknik fungsi Green. Fungsi Green $G(t) = \sin t$ dari MNA ini diberikan oleh Contoh 4.1. Penyelesaian MNA (60), (61) adalah

$$\begin{aligned} e^{t^2} * \sin t &= \int_0^t e^{\tau^2} \sin(t - \tau) d\tau \\ &= \sin t \int_0^t e^{\tau^2} \cos \tau d\tau - \cos t \int_0^t e^{\tau^2} \sin \tau d\tau. \end{aligned}$$

Dengan menggunakan deret Maclaurin bagi integran-integrannya di ruas kanan, persamaan di atas dapat ditulis kembali menjadi

$$e^{t^2} * \sin t = \sin t \int_0^t \left[1 + \frac{\tau^2}{2} + \frac{\tau^4}{24} + \dots \right] d\tau - \cos t \int_0^t \left[\tau + \frac{5\tau^3}{6} + \frac{41\tau^5}{120} + \dots \right] d\tau.$$

Pengintegralan suku demi suku pada deret Maclaurin tersebut menghasilkan penyelesaian dari MNA yang dicari, yakni

$$x(t) = \sin t \left(t + \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{120}t^5 + \dots \right) - \cos t \left(\frac{1}{2}t^2 + \frac{5}{24}t^4 + \frac{41}{720}t^6 + \dots \right)$$

Contoh 4.10. Pandang MNA

$$x^{(4)}(t) - 3x^{(3)}(t) + 7x^{(2)}(t) - 5x^{(1)}(t) = \operatorname{tg} 2t, \quad (62)$$

$$x(0) = x^{(1)}(0) = x^{(2)}(0) = x^{(3)}(0) = 0. \quad (63)$$

Dari Contoh 4.3. diketahui bahwa fungsi Green dari MNA ini adalah

$$G(t) = -\frac{1}{5} + \frac{1}{4}e^t - \frac{1}{20}e^t \cos 2t - \frac{1}{10}e^t \sin 2t.$$

Akan ditentukan penyelesaian dari MNA tersebut dengan mengkonvolusikan $G(t)$ dan fungsi sumber $\operatorname{tg} 2t$. Menurut Definisi 2.7 dan rumus-rumus dasar trigonometri diperoleh

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 2t * G(t) &= -\frac{1}{5} \int_0^t \operatorname{tg} 2\tau \, d\tau + \frac{1}{4} \int_0^t \operatorname{tg} 2\tau e^{t-\tau} \, d\tau \\ &\quad - \frac{1}{20} \int_0^t \operatorname{tg} 2\tau e^{t-\tau} \cos 2(t-\tau) \, d\tau \\ &\quad - \frac{1}{10} \int_0^t \operatorname{tg} 2\tau e^{t-\tau} \sin 2(t-\tau) \, d\tau \\ &= -\frac{1}{5} \int_0^t \operatorname{tg} 2\tau \, d\tau + \frac{1}{4} e^t \int_0^t e^{-\tau} \operatorname{tg} 2\tau \, d\tau \\ &\quad - \frac{1}{20} e^t (\cos 2t + 2 \sin 2t) \int_0^t e^{-\tau} \sin 2\tau \, d\tau \\ &\quad - \frac{1}{20} e^t (\sin 2t - 2 \cos 2t) \int_0^t e^{-\tau} \operatorname{tg} 2\tau \sin 2\tau \, d\tau. \quad (64) \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa pengintegralan parsial pada suku keempat di ruas terakhir (64) menghasilkan

$$\int e^{-\tau} \operatorname{tg} 2\tau \sin 2\tau d\tau = -e^{-\tau} \operatorname{tg} 2\tau \sin 2\tau + 2 \int e^{-\tau} \sec^2 2\tau \sin 2\tau d\tau + 2 \int e^{-\tau} \sin 2\tau d\tau. \quad (65)$$

Kita dapat melakukan pengintegralan parsial pada suku ketiga ruas terakhir (64) dan suku ketiga ruas kanan (65). Hal ini sukar dilakukan terhadap suku-suku pengintegralan yang lain. Oleh karena itu pada suku-suku tersebut, kita perlu mengubah integran masing-masing ke dalam deret Maclaurin. Jadi akhirnya akan didapatkan penyelesaian dari MNA (62), (63), yakni

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 2t * G(t) &= -\frac{1}{5} \int_0^t \operatorname{tg} 2\tau d\tau + \frac{1}{4} e^t \int_0^t \left(2\tau - 2\tau^2 + \frac{11\tau^3}{3} + \dots \right) d\tau \\ &\quad - \frac{1}{20} e^t (\cos 2t + 2\sin 2t) \int_0^t e^{-\tau} \sin 2\tau d\tau \\ &\quad - \frac{1}{20} e^t (\sin 2t - 2\cos 2t) \left[-e^{-t} \operatorname{tg} 2t \sin 2t \right. \\ &\quad \left. + 2 \int_0^t e^{-\tau} \sin 2\tau d\tau + 2 \int_0^t \left(2\tau - 2\tau^2 + \frac{23\tau^3}{3} + \dots \right) d\tau \right] \\ &= \frac{1}{10} \ln(\cos 2t) + \frac{1}{20} \operatorname{tg} 2t \sin^2 2t + \frac{1}{20} \sin 2t \cos 2t \\ &\quad - \frac{3}{50} \cos 4t - \frac{1}{50} e^t (4\sin 2t - 3\cos 2t) \\ &\quad + \frac{1}{4} e^t \left(t^2 - \frac{2}{3} t^3 + \frac{11}{12} t^4 + \dots \right) \\ &\quad - \frac{1}{20} e^t (\sin 2t - 2\cos 2t) \left(2t^2 - \frac{4}{3} t^3 + \frac{23}{6} t^4 + \dots \right). \end{aligned}$$

4.4. KEISTIMEWAAN DAN KELEMAHAN TEKNIK FUNGSI GREEN

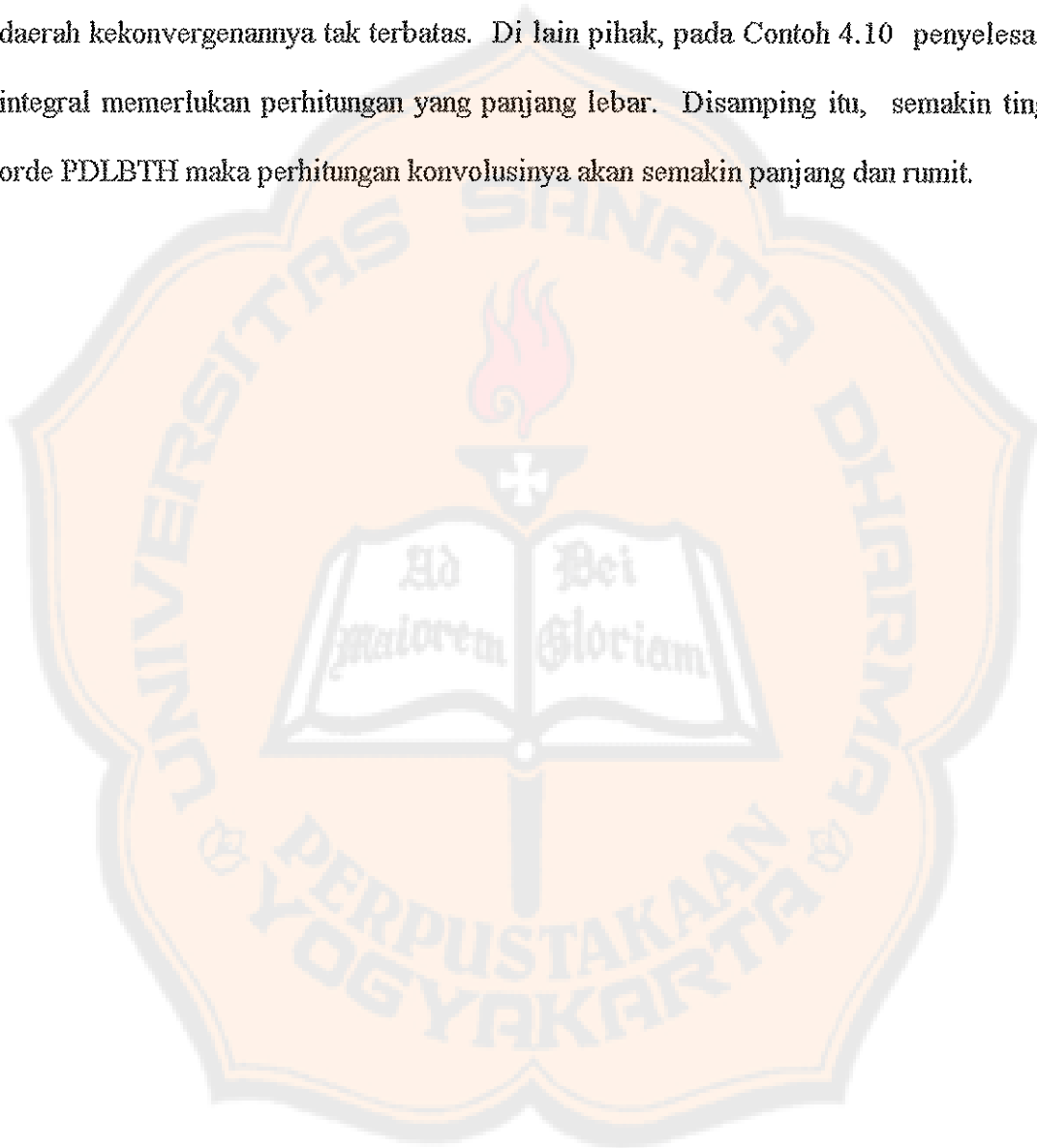
Dalam pasal 4.3 telah diuraikan beberapa contoh penerapan teknik fungsi Green untuk menyelesaikan MNA berbentuk (51), (52). Dalam contoh-contoh tersebut tampak berbagai keistimewaan maupun kelemahan teknik fungsi Green.

Keistimewaan-keistimewaan teknik fungsi Green adalah

1. Teknik fungsi Green merupakan suatu teknik penyelesaian MNA dengan fungsi sumber yang paling umum dibandingkan keempat teknik lain, yakni teknik koefisien tak tentu, teknik invers operator, teknik variasi parameter, dan teknik transformasi Laplace.
2. Teknik fungsi Green masih dapat digunakan untuk menyelesaikan suatu MNA meskipun fungsi sumbernya tidak mempunyai transform Laplace atau sukar dicari transform Laplacenya. Ini ditunjukkan oleh Contoh 4.9 dan Contoh 4.10.
3. Seperti halnya teknik transformasi Laplace, penyelesaian MNA dengan menggunakan teknik fungsi Green dapat langsung diperoleh tanpa perlu menentukan penyelesaian umumnya terlebih dahulu.
4. Fungsi Green yang sama dapat digunakan untuk menyelesaikan berbagai MNA yang berbeda hanya pada fungsi sumbernya saja. Ini tampak dalam Contoh 4.5 dan Contoh 4.6.
5. Contoh 4.6 dan Contoh 4.7 memperlihatkan bahwa perbedaan titik awal pada syarat-syarat awal MNA hanya mempengaruhi batas bawah pengintegralan pada konvolusinya saja.

Salah satu kelemahan praktis teknik fungsi Green adalah kesulitan untuk mengkonvolusikan fungsi Green dengan fungsi sumber. Hal ini disebabkan karena

proses konvolusi melibatkan operasi pengintegralan yang seringkali tidak mudah diselesaikan. Misalnya dalam Contoh 4.9 dan Contoh 4.10, penyelesaian konvolusi terpaksa menggunakan alat bantu deret Maclaurin yang hanya dimungkinkan apabila daerah kekonvergenannya tak terbatas. Di lain pihak, pada Contoh 4.10 penyelesaian integral memerlukan perhitungan yang panjang lebar. Disamping itu, semakin tinggi orde PDLETH maka perhitungan konvolusinya akan semakin panjang dan rumit.



BAB V KESIMPULAN

Beberapa pokok pikiran penting yang dapat disimpulkan dari pembahasan pada bab-bab sebelumnya, dapat dikemukakan di sini.

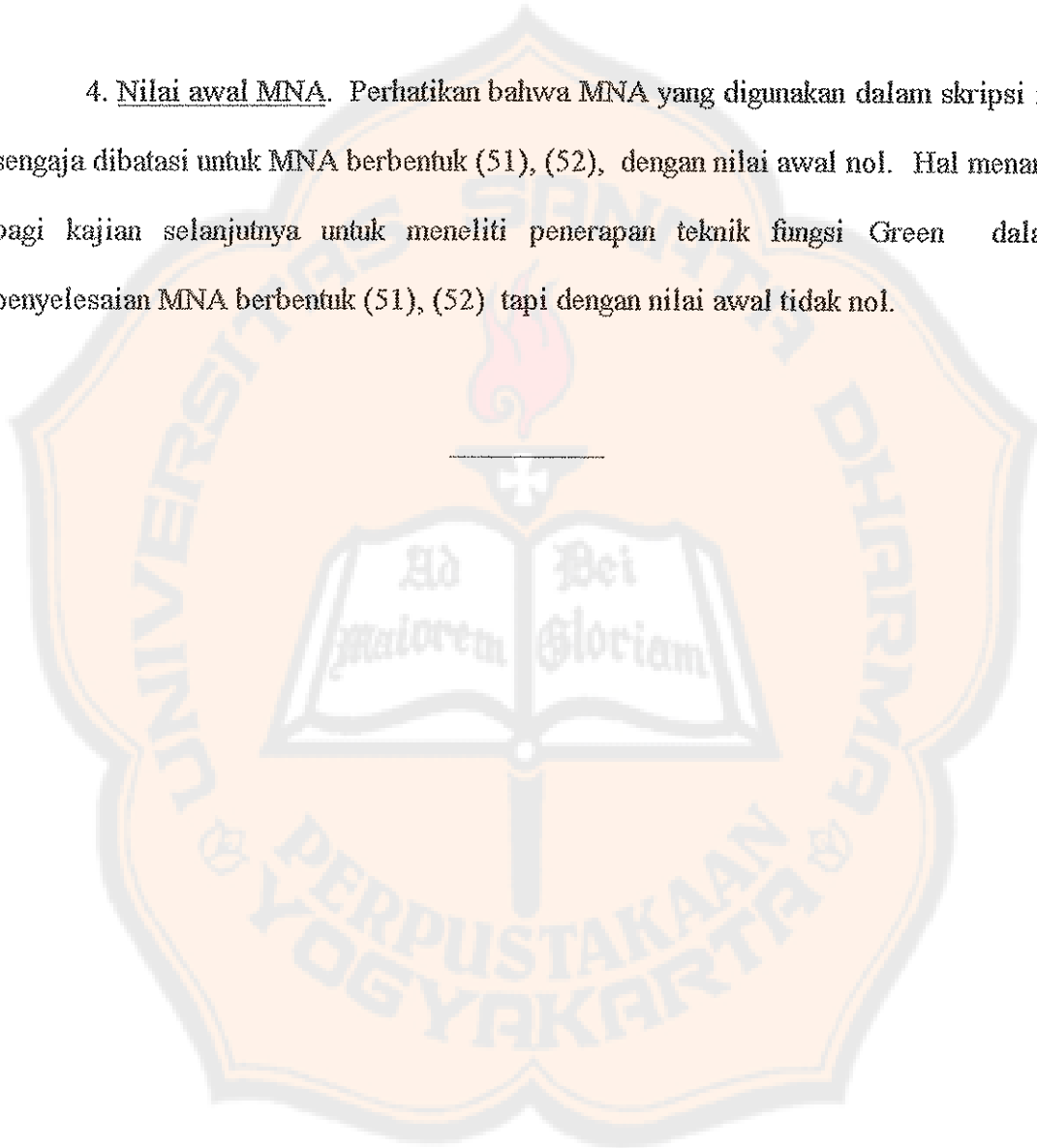
1. Tahap-tahap teknik fungsi Green. Penyelesaian MNA (51), (52) dengan teknik fungsi Green meliputi dua tahap. Tahap pertama adalah penentuan fungsi Green, yang merupakan penyelesaian dari MNA (43), (44). Tahap kedua adalah penentuan konvolusi $f(t) * G(t)$ dari fungsi sumber $f(t)$ pada (51) dan fungsi Green $G(t)$.

2. Fungsi δ Dirac. Terdapat beberapa macam definisi fungsi Green yang semuanya saling ekuivalen. Mengingat ekivalensi dan kesederhanaannya, dalam skripsi ini dipilih salah satunya saja yakni definisi yang melibatkan fungsi δ Dirac, seperti tampak dalam (43), (44). Di samping itu, definisi ini sengaja dipilih karena mengikuti kebiasaan kalangan fisika dan keteknikan dalam pemakaian teknik fungsi Green, meskipun secara matematis ada masalah ketidakkonsistenan dari fungsi δ Dirac. Dalam matematika, ketidakkonsistenan ini dapat diatasi dengan pendekatan distribusi δ Dirac. Namun pengertian maupun penggunaan distribusi ini sengaja tidak dibahas dalam skripsi.

3. Penggunaan Deret Maclaurin. Dalam Contoh 4.9 dan Contoh 4.10 tampak bahwa penyelesaian MNA dengan teknik fungsi Green menggunakan alat bantu deret

Maclaurin. Tapi deret ini hanya dapat digunakan bila kekonvergenannya tak terbatas. Untuk kekonvergenan yang terbatas tidak dibahas dalam skripsi, dan dapat menjadi sumber kajian lebih lanjut.

4. Nilai awal MNA. Perhatikan bahwa MNA yang digunakan dalam skripsi ini sengaja dibatasi untuk MNA berbentuk (51), (52), dengan nilai awal nol. Hal menarik bagi kajian selanjutnya untuk meneliti penerapan teknik fungsi Green dalam penyelesaian MNA berbentuk (51), (52) tapi dengan nilai awal tidak nol.



DAFTAR PUSTAKA

- Birkhoff, G., & Gian-Carlo Rota. (1978). *Ordinary Differential Equations*. (ed. 3). New York: John Wiley & Sons.
- Boyce, William, E., & Di Prima, R.C. (1986). *Elementary Differential Equations*. New York: John Wiley & Sons.
- Browder, Andrew. (1996). *Mathematical Analysis*. New York: Springer – Verlag.
- Coddington, E. A. (1961). *An Introduction to Ordinary Differential Equations*. New Jersey: Prentice – Hall.
- Friedman, B. (1956). *Principles and Techniques of Applied Mathematics*. New York: John Wiley & Sons.
- Finizio, N. & Ladas, G. (1988). *Persamaan Diferensial Biasa dengan Penerapan Modern*. (terj. oleh Dra. Widiarti Santoso). Jakarta: Erlangga.
- Folland, Gerald, B. (1992). *Fourier Analysis and Its Applications*. California: Wadsworth.
- Golomb, M. & Shanks, M. (1965). *Elements of Ordinary Differential Equations*. New York: McGraw - Hill.
- Kaplan, Wilfred. (1958). *Ordinary Differential Equations*. London: Addison – Wesley Publishing Company.
- Kreyszig, Erwin. (1993). *Advanced Engineering Mathematics*. (ed. 7). New York: John Wiley & Sons.
- Purcell, Edwin, J. & Varberg, Dale. (1997). *Calculus*. New Jersey: Prentice – Hall.

- Ross, Shepley, L. (1984). *Differential Equations*. New York: John Wiley & Sons.
- Rudin, Walter. (1976). *Principles of Mathematical Analysis*. New York: McGraw - Hill.
- Spiegel, Murray. R. (1985). *Transformasi Laplace*. (terj. oleh Pantur Silaban, Ph.D. dan Drs. Hans J. Wasparrik). Seri Buku. Schaum. Jakarta: Erlangga.
- Strange & Rice. (1986). *Ordinary Differential Equations with Applications*. Monterey: Brooks/Cole.
- Susento, St. (1996, April). *Persamaan Diferensial Distribusi dan Penerapannya dalam Penyelesaian Masalah-Masalah Nilai Awal yang Melibatkan Gaya-Gaya Impulsif*. Widya Dharma, Tahun VI, No. 2.
- _____. (1997, April). *Ekivalensi Berbagai Definisi Fungsi Green*. Widya Dharma, Tahun VII, No.2.
- Wardiman. (1981). *Persamaan Diferensial*. Yogyakarta: Citra Offset.
- Zauderer, E. (1989). *Partial Differential Equations of Applied Mathematics*. (ed. 2). Singapore: John Wiley & Sons.

