KETAKSAMAAN

SKRIPSI

Diajukan untuk Memenuhi Salah Satu Syarat
Memperoleh Gelar Sarjana Pendidikan
Program Studi Pendidikan Matematika

Oleh :

Ong Kwee Hong

NIM : 92414048
NIRM : 920052010501120044

PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA
JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
UNIVERSITAS SANATA DHARMA
YOGYAKARTA
1998

SKRIPSI

KETAKSAMAAN

Oleh :

Ong Kwee Hong

NIM : 92414048

NIRM : 920052010501120044

Telah disetujui oleh :

Pembimbing

Prof. Drs. R. Soemantri

tanggal 12-8-1998

SKRIPSI

KETAKSMAAN

Dipersiapkan dan ditulis oleh
Ong Kwee Hong
NIM : 92414048
NIRM : 920052010501120044

Telah dipertahankan di depan Panitia Penguji
pada tanggal 27 Juli 1998
dan dinyatakan memenuhi syarat

Susunan Panitia Penguji

Ketua	: Drs. F. Kartika Budi, M.Pd	....
Sekretaris	: Dr. St. Suwarsono	....
Anggota	: Prof. Drs. R. Soemantri	....
Anggota	: Dr. Y. Marpaung	....
Anggota	: Drs. A. Tutoyo, M.Sc	....

Yogyakarta, Agustus 1998
Fakultas Keguruan Dan Ilmu Pendidikan
Universitas Sanata Dharma
Dekan

Dr. Paul Suparno, S.J.,M.S.T.

Skripsi ini kupersembahkan untuk
Alm Papa dan Almh Mama tercinta
juga untuk ketiga kakakku terkasih

ABSTRAK

Skripsi tentang ketaksamaan ini ditulis sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Pendidikan Matematika, Fakultas Keguruan dan Pendidikan, Universitas Sanata Dharma.

Empat topik akan dibahas, yang pertama adalah ketaksamaan tentang hubungan antara rata-rata aritmetika dan geometri yang merupakan ketaksamaan lama, dan tiga ketaksamaan penting lain, yaitu ketaksamaan Cauchy, Hoelder, dan Minkowski.

Setiap ketaksamaan akan dibuktikan. Dan untuk ketaksamaan Cauchy, Hoelder, dan Minkowski akan dibuktikan baik untuk variabel berhingga, variabel tak hingga maupun bentuk integral.

Beberapa contoh penggunaan ketaksamaan tentang hubungan antara rata-rata aritmetika dan geometri akan diberikan disini. Dan satu topik yang lebih ditekankan dan merupakan penggunaan dari ketaksamaan Cauchy, Hoelder, dan Minkowski adalah teori ruang metrik, dimana teori ini mempunyai arti penting dalam analisis modern.

ABSTRACT

This thesis about inequalities is written to satisfy one of the requirements for achieving Sarjana degree in Education of Mathematics, Faculty of Teaching and Education, Sanata Dharma University.

Four topics are to discuss, first the ancient one i.e. the relation between arithmetic and geometric means, and the others are the important inequalities of Cauchy, Hoelder, and Minkowski.

The proofs of the above inequalities are taken up carefully. The Cauchy, Hoelder, and Minkowski inequalities will be proved in their finite forms, or in their series, and integral ones.

Some selected example of the applications of the arithmetic and geometric means are exposed here. The applications and the roles of the inequlities of Cauchy, Hoelder, and Minkowski are specially discussed in their connections with various examples of abstract metric spaces, which are very important in modern analysis.

KATA PENGANTAR

Syukur dan terimakasih penulis panjatkan ke hadirat Allah yang Maha Kasih karena telah melimpahkan anugerah yang begitu besar sehingga penulis dapat menyelesaikan kuliah dan penulisan skripsi ini.

Semua kegiatan perkuliahan dan skripsi ini dapat terlaksana berkat bantuan dan bimbingan dari semua pihak yang terkait. Pada kesempatan ini penulis mengucapkan terimakasih yang begitu besar kepada :

1. Bapak Prof. Drs. R. Soemantri, selaku pembimbing skripsi penulis yang telah memberikan masukan yang sangat berharga,
2. Bapak Drs. St. Susento, M.Si., selaku Ketua Program Studi Pendidikan Matematika,
3. Bapak Drs. F. Kartika Budi, M.Pd., selaku Ketua Jurusan PMIPA,
4. Seluruh Bapak dan Ibu dosen serta karyawan JPMIPA yang telah membantu selama penulis menempuh kuliah hingga terselesaikannya skripsi ini,
5. Teman - teman Prodi Pendidikan Matematikayang telah memberikan dorongan dan spirit serta kerjasama yang baik,
6. Semua pihak yang tidak dapat disebutkan satu per satu yang telah memberikan dukungan dan bantuan yang begitu besar.

Akhirnya dengan lapang dada penulis menyadari bahwa skripsi ini tidaklah sempurna dan masih banyak kekurangan. Oleh karena itu, saran dan kritik yang bersifat membangun sangat penulis harapkan. Disamping itu, penulis juga berharap agar skripsi ini dapat bermanfaat bagi semua pihak yang berkepentingan dan dapat digunakan sebagaimana mestinya.

Yogyakarta, Agustus 1998

Penulis

DAFTAR PUSTAKA

BAB I

PENDAHULUAN

A. LATAR BELAKANG MASALAH

Dalam dunia matematika, banyak dijumpai dengan apa yang disebut kesamaan, yaitu suatu hubungan antara dua bilangan atau kalimat matematika yang ditandai dengan tanda "sama dengan" dan ditulis "=". Ada banyak kesamaan, antara lain kesamaan dua bilangan, kesamaan dua himpunan dan sebagainya.

Pada skripsi ini, akan dibahas sesuatu yang berbeda dari kesamaan, yaitu ketaksamaan. Dalam matematika, ketaksamaan mempunyai beberapa notasi, yaitu "lebih dari" ditulis ">", "kurang dari" ditulis "<", "lebih dari atau sama dengan" atau "tidak kurang dari" ditulis "≥", dan "kurang dari atau sama dengan" atau "tidak lebih dari" ditulis "≤".

Ketaksamaan yang mempunyai notasi diatas, sangat berperan penting dalam matematika. Pentingnya ketaksamaan dapat dilihat bahwa ketaksamaan timbul dalam setiap cabang matematika.

Misalnya dalam analisis jelas bahwa ketaksamaan timbul dalam konsep-konsep dasar seperti konsep limit, kekontinuan, keterdiferensialan, keintegralan, dan kekonvergenan barisan atau deret. Peran lain ketaksamaan terlihat dalam pembuktian suatu kesamaan.Untuk membuktikan benarnya a=b sering dibuktikan dengan menunjukkan benarnya dua ketaksamaan $a \leq b$ dan $a \geq b$. Dengan demikian, penelaahan ketaksamaan sangat penting dalam matematika.

Bentuk ketaksamaan tidak hanya satu, tetapi ada berbagai bentuk. Ada beberapa ketaksamaan yang diberi nama sesuai dengan nama penemunya, antara lain ketaksamaan Hoelder, ketaksamaan Cauchy, ketaksamaan Minkowski, ketaksamaan Tchebychef,dan ketaksamaan Bunyakovskii. Sedang ketaksamaan nilai rata-rata aritmetika dan nilai rata-rata geometri adalah ketaksamaan yang berkaitan dengan masing-masing rata-rata itu. Segibanyak yang diketahui kelilingnya menimbulkan ketaksamaan yang membatasi luasnya. Ketaksamaan yang ditimbulkan oleh keadaan ini dinamakan ketaksamaan isoperimetrik.

Karena begitu banyaknya jenis ketaksamaan, maka ketaksamaan-ketaksamaan yang akan dibahas dalam skripsi ini terpaksa dibatasi, yaitu ketaksamaan tentang nilai rata-rata aritmetika dan nilai rata-rata geometri, dan tiga bentuk ketaksamaan lainnya, yakni ketaksamaan Cauchy, ketaksamaan Hoelder dan ketaksamaan Minkowski, serta perluasannya dalam bentuk ketaksamaan deret tak hingga dan ketaksamaan integral.

Masing-masing ketaksamaan mempunyai perbedaan. Perbedaan tersebut akan nampak dalam dua hal, yaitu perbedaan dalam penurunan rumus dan perbedaan dalam penggunaannya.

Pembuktian teorema-teorema sebagian besar secara aljabar dan sebagian yang lain secara analisis dengan menggunakan konsep limit atau kontinuitas. Hal lain yang perlu ditegaskan di sini adalah pembahasan hanya dalam lingkup semesta bilangan-bilangan real.

B. TINJAUAN PUSTAKA

Dalam buku yang berjudul "Inequalities" yang dipersiapkanoleh Hardy, Polya, dan Littlewood sejak tahun 1929 dan diterbitkan pada tahun 1934 oleh Cambridge University Press dinyatakan bahwa topik ketaksamaan yang sangat banyak pemakaiannya dalam setiap cabang matematika belum pernah dikembangkan secara sistematik. Buku ini merupakan buku yang menjadi acuan hampir setiap buku tentang ketaksamaan. Dalam bukunya, Hardy, Polya, dan Littlewood membagi ketaksamaan menjadi tiga jenis, yaitu ketaksamaan berhingga, ketaksamaan tak hingga dan ketaksamaan integral.

Ketaksamaan berhingga adalah ketaksamaan yang menyangkut variabel yang berhingga. Selanjutnya perluasan dari ketaksamaan ini dalam bentuk jumlah variabel menjadi tak hingga sehingga terjadi ketaksamaan tentang deret tak hingga dan ketaksamaan integral.

Dalam buku ini pengertian yang tidak didefinisikan adalah pengertian bilangan positif dan sebagai aksioma diambil dua proposisi:

1. Tiga kemungkinan yang tidak dapat terjadi bersama-sama, yaitu $a=0$, $a>0$, $-a>0$.
2. Jumlah dan hasil kali dua bilangan positif adalah

positif.

Masalah yang dibahas dalam skripsi ini diuraikan panjang lebar dalam buku ini.

Buku lain yang mengulas tentang ketaksamaan adalah buku yang disusun oleh Nicholas D. Kazarinof dengan judul "Analytic Inequalities". Buku ini menbahas tentang dasar-dasar ketaksamaan serta teorema-teorema penting ketaksamaan yang meliputi teorema tentang nilai rata-rata aritmetika dan nilai rata-rata geometri, teorema isoperimetrik, ketaksamaan Cauchy, ketaksamaan Bunyakovskii, ketaksamaan Hoelder, dan ketaksamaan Minkowski. Disamping itu, dibahas pula tentang hubungan antara ketaksamaan dan kalkulus, yaitu mengenai bilangan e beserta penggunaannya.

"Algebra" adalah buku lain yangmenguraikan tentang ketaksamaan walaupun hanya beberapa bagian kecil dari berbagai bentuk ketaksamaan yang ada. Buku ini disusun oleh J. W. Archbold dan memuat tentang dasar-dasar ketaksamaan, ketaksamaan Weierstrass, ketaksamaan nilai rata-rata aritmetika dan nilai rata-rata geometri, ketaksamaan Cauchy, ketaksamaan Tchebychef serta ketaksamaan Hoelder dan ketaksamaan Minkowski.

C. RUMUSAN PERMASALAHAN

Dalam penulisan skripsi ini akan dipermasalahkan tentang apa yang dimaksud dengan ketaksamaan, bagaimana pembuktian dan penggunaan dari teorema-teorema yang akan dibahas.

Teorema-teorema tersebut adalah:

1. Rata-rata Aritmetika dan Rata-rata Geometri
2. Ketaksamaan Cauchy
3. Ketaksamaan Hoelder
4. Ketaksamaan Minkowski
5. Ketaksamaan Deret Tak Hingga dan Ketaksamaan Integral

D. TUJUAN PENULISAN SKRIPSI

Skripsi ini diharapkan dapat berguna bagi:

1. penelaahan masalah ketaksamaan yang lebih lanjut
2. pemahaman konsep - konsep dan topik - topik matematika lanjut

E. METODE PENULISAN

Dalam mempersiapkan penulisan skripsi ini dilakukan dengan menelaah buku-buku pustaka yang digunakan sebagai acuan, membuktikan teorema-teorema dan memberikan contoh-contoh penggunaannya.

F. SISTEMATIKA PENULISAN

Adapun sistematika penulisan skripsi iani adalah sebagai berikut :

BAB I PENDAHULUAN

A. Latar Belakang Masalah

B. Tinjauan Pustaka

C. Rumusan Permasalahan

D. Tujuan Penulisan Skripsi

E. Metode Penulisan

F. Sistematika Penulisan

BAB II DASAR-DASAR KETAKSAMAAN

BAB III BENTUK-BENTUK KETAKSAMAAN

A. Rata-rata Aritmetika dan Rata-rata Geometri

B. Ketaksamaan Cauchy

C. Ketaksamaan Hoelder

BAB II

DASAR-DASAR KETAKSAMAAN

Salah satu lambang aljabar adalah lambang lebih besar dari atau lebih kecil dari yang disebut ketaksamaan. Dan dalam ketaksamaan ini, lingkup bilangan yang digunakan adalah bilangan real, yang secara matematis ditulis $\mathbb{R}$.

Bilangan real memiliki sifat-sifat yang begitu banyak. Tetapi berkaitan dengan ketaksamaan, bilangan real memberikan 3 postulat penting, dimana ketiga postulat tersebut merupakan landasan untuk mempelajari ketaksamaan.

Postulat 2.1 :

Sistem bilangan real $\mathbb{R}$ memuat sub himpunan P, yaitu himpunan yang terdiri atas elemen yang disebut real positif dan yang mempunyai sifat yang dinyatakan dalam postulat 2.2 dan 2.3.

Postulat 2.2 :

Jika a bilangan real, maka hanya satu dari tiga pernyataan berikut yang bernilai benar, yaitu $a \in P$, $-a \in P$, $a = 0$.

Postulat 2.3 :

Jika a dan b anggota P, maka $a+b \in P$ dan $ab \in P$.

Definisi 2.1 :

Ditulis $a>b$ (ekuivalen dengan $b<a$) jika dan hanya jika $a-b=h \in P$.

Jadi terdapat $h \in P$ dan $a=b+h$.

Definisi 2.2 :

Jika $a \in P$ ditulis $a>0$.

Jadi $a>b$ jika terdapat $h>0$ dan $a=b+h$.

Bilangan real x dengan $x \notin P$ dan $x \neq 0$ dinamakan bilangan negatif. Jadi jika $x \neq 0$ dan $x \notin P$ maka $0>x$ atau $x<0$.

Pernyataan "a>b" dibaca "a lebih besar dari b", dan pernyataan tersebut disebut ketaksamaan. Secara geometri, $a>b$ digambarkan melalui letak titik a yang berada disebelah kanan titik b dalam garis bilangan real.

Lemma 2.1 :

Bilangan-bilangan real 1,2,3,4,.. semuanya anggota P.

Bukti :

Akan dibuktikan $1 \in P$.

Andaikan $1 \notin P$.

Jadi menurut postulat 2.2, maka salah satu dari pernyataan berikut harus benar, yaitu

$-1 \in P$ atau $1 = 0$.

Karena $1 \neq 0$, maka menurut teorema dalam bilangan real dan postulat 2.3,

$(-1)(-1) = 1 \in P$.

Kontradiksi.

Jadi terbukti $1 \in P$.

Dengan induksi matematika, menurut postulat 2.3, jika n bilangan asli dan diandaikan $n \in P$, maka $n+1 \in P$ ∎

Lemma 2.2:

Jika $a<b<0$, maka $ab>0$.

Bukti :

Andaikan $a<0$ dan $b<0$.

Maka

$$a+(-a) < 0+(-a)$$

$$b+(-b) < 0+(-b).$$

Jadi $0<-a$ (1) dan $0<-b$ (2)

Dengan mengalikan $(-b)$ pada (1), didapat

$$0.(-b) < (-a)(-b)$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 < (-a)(-b).$$

Karena menurut teorema dalam bilangan real

$$(-a)(-b) = ab.$$

Maka $0 < ab$.

Lemma 2.3 :

Jika $a<0<b$, maka $ab<0$.

Bukti :

Andaikan $a<0$ dan $b<0$.

Maka $a+(-a) < 0+(-a)$

$$\Leftrightarrow \quad 0 < -a.$$

Jadi $0<-a$ (1) dan $0<b$ (2)

Dengan mengalikan b pada (1), didapat

$$0.b < (-a)b$$
$$\Leftrightarrow 0 < -(ab).$$

Karena $-(ab)>0$, maka dengan mengadisi ab dikedua ruas didapat $0+ab < -(ab)+ab$

$$\Leftrightarrow ab < 0. \qquad \blacksquare$$

Berikut akan dibahas tentang teorema dasar ketaksamaan yang dalam pembuktiannya menggunakan postulat yang telah diketahui dan teeorema-teorema dalam bilangan real.

Teorema 2.1 :

Diberikana dan b bilangan real, maka satu dan hanya satu diantara tiga pernyataan berikut benar, yaitu $a>b$, $a=b$, $a<b$.

Bukti :

Diberikan a,b sembarang $\in \mathbb{R}$.

Dengan menggunakan postulat 2.3, maka tepat satu dari pernyataan $a-b>0$, $-(a-b)>0$, $a-b=0$ dipenuhi.

a). Jika $a-b>0$, maka menurut definisi $a>b$.

b). Jika $-(a-b)>0$, maka

menurut lemma 2.1 $-1(a-b)=b-a>0$.

Jadi menurut definisi $b>a$.

c). Jika $a-b=0$, maka

tidak benar $a-b \in P$, berarti tidak benar $a>b$

dan tidak benar $-(a-b) \in P$, berarti tidak benar

$b>a$ menurut b). Jadi $a=b$.

Jadi teorema 2.1 terbukti. ∎

Definisi 2.3:

Ditulis $a \leq b$, dibaca "a kurang dari atau sama dengan b" atau "a tidak lebih dari b", merupakan ketaksamaan yang memenuhi $a<b$ atau $a=b$.

Teorema 2.2 :

Jika $a>b$ dan $b>c$, maka $a>c$.

Bukti :

Diberikan $a,b,c \in \mathbb{R}$.

Maka dapat ditemukan suatu bilangan positif h dan k sedemikian sehingga $a=b+h$ dan $b=c+k$.

Jadi $a = b+h$

$a = (c+k)+h$

$a = c+(k+h)$

$a = c+m$, $m = k+h$.

Menurut postulat 2.3, $h+k=m$ adalah positif.

Jadi, karena $a=c+m$, maka menurut definisi $a>c$. ∎

Teorema 2.3 :

Jika $a>b$ dan $c>d$, maka $a+c>b+d$.

Bukti :

Diberikan $a>b$ dan $c>d$.

Maka dapat ditemukan bilangan positif h dan k sedemikian sehingga $a=b+h$ dan $c=d+k$.

Jadi $a+c = (b+h)+(d+k)$

$a+c = (b+d)+(h+k)$

$a+c = (b+d)+m$, $m = h+k$.

Menurut postulat 2.3, $h+k=m$ adalah positif.

Jadi, karena $a+c = (b+d)+m$, maka menurut definisi $a+c>b+d$. ∎

Teorema 2.4 :

a). Jika $a>b$ dan $c>0$, maka (1). $ac>bc$,

dan (2). $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$.

b). Jika $a>b$ dan $c<0$, maka (1). $ac<bc$,

dan (2). $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$.

Bukti :

a). Diberikan $a>b$ dan $c>0$.

Maka untuk suatu h positif,

berlaku $a=b+h$.

(1) Kedua ruas dikalikan c, didapat

$$ac = bc+hc.$$

Menurut postulat 2.3, jika h dan positif, maka hc positif. Jadi $ac>bc$.

(2). Kedua ruas dibagi c, didapat

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{c} + \frac{h}{c} .$$

Karena h dan c positif, maka $\frac{h}{c}$ positif.

Jadi $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$.

b). Diberikan $a>b$ dan $c<0$.

Maka untuk suatu h positif,

berlaku $a=b+h$.

(1). Kedua ruas dikalikan c, didapat

$ac = bc+hc$.

Karena h positif dan c negatif, maka hc negatif. Jadi $bc = ac-hc$

$bc = ac+(-hc)$.

Karena hc negatif, maka (-hc) positif.

Jadi menurut definisi $bc>ac$ atau $ac<bc$.

(2). Dari b).(1). telah terbukti $ac<bc$.

Kedua ruas dibagi c^2, didapat

$$\frac{ac}{c^2} < \frac{bc}{c^2}$$

$$\frac{a}{c} < \frac{b}{c}.$$

Akibat :

a. Jika $a>b>0$, maka $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

b. Jika $a>0>b$, maka $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

c. Jika $a<b<0$, maka $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$.

Bukti :

a. Andaikan $a>b>0$ dan $c = ab$.

Menurut teorema 2.4.a). $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$.

Maka $\frac{a}{ab} > \frac{b}{ab}$

$$\frac{1}{b} > \frac{1}{a}.$$

b. Andaikan $a>0>b$ dan $c = ab$.

Karena $b<0$, maka c negatif.

Menurut teorema 2.4.b). $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$.

Maka $\frac{a}{(ab)} < \frac{b}{(ab)}$

$$\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$$

c. Andaikan $a<b<0$ dan $c = ab$, c positif.

Menurut teorema 2.4.a). $\frac{b}{c} > \frac{a}{c}$.

Maka $\frac{b}{ab} > \frac{a}{ab}$

$$\frac{1}{a} > \frac{1}{b}.$$

Jadi $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$.

Teorema 2.5 :

Jika $a>b>0$ dan $c>d>0$, maka a). $ac > bd$,

dan b). $\frac{a}{d} > \frac{b}{c}$.

Bukti :

Diberikan $a>b>0$ dan $c>d>0$.

Maka dapat ditemukan bilangan positif h dan k sedemikian sehingga $a=b+h$ dan $c=d+k$.

a). $ac = (b+h).(d+k)$

$= bd+bk+hd+hk$.

Karena semuanya bilangan positif, maka bk,hd,hk bernilai positif.

Jadi menurut definisi 2.1 ac > bd.

b). Dari pembuktian a). telah diketahui ac>bd.

Kedua ruas dibagi cd, didapat

$$\frac{ac}{cd} > \frac{bd}{cd}.$$

Jadi $\frac{a}{d} > \frac{b}{c}$. ∎

BAB III

BENTUK-BENTUK KETAKSAMAAN

Pada bab ini akan dibahas empat bentuk ketaksamaan, yaitu ketaksamaan mengenai rata-rata aritmetika dan rata-rata geometri yang merupakan teorema ketaksamaan lama dan tiga bentuk ketaksamaan modern, meliputi ketaksamaan Cauchy, ketaksamaan Hoelder, dan ketaksamaan Minkowski, beserta perluasannya dalam bentuk ketaksamaan deret tak hingga dan ketaksamaan integral.

A. Rata-Rata Aritmetika dan Rata-Rata Geometri

Definisi 3.1 :

Rata-rata aritmetika A_n dengan n bilangan positif $x_1, x_2, \ldots, x_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ adalah jumlah dari n bilangan positif tersebut dibagi n.

$$A_n = \frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}$$

$$= \frac{\sum_{1}^{n} x_i}{n} .$$

Definisi 3.2 :

Rata-rata geometri G_n dari n bilangan positif $x_1, x_2, \ldots, x_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ adalah akar pangkat n dari hasilkali n bilangan positif tersebut.

$$G_n = (x_1 . x_2 \ldots x_n)^{1/n}$$

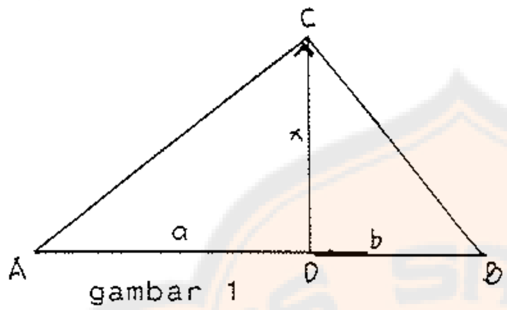
$$= \left[\prod_{1}^{n} x_i \right]^{1/n} .$$

Secara geometri, rata-rata geometri untuk dua bilangan positif dapat dilihat pada suatu segitiga siku-siku ABC dengan sisi miring AB dan tinggi CD=x, maka untuk segitiga ACD dan segitiga BCD yang sebangun

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{b} \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = ab$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \sqrt{ab} .$$

Bilangan x disebut rata-rata geometri.



gambar 1

Rata-rata aritmetika dan rata-rata geometri biasanya digunakan dalam aproksimasi dan estimasi, karena suatu masalah lebih mudah dibicarakan dengan melihat rata-rata dari data yang disajikan daripada melihat data tersebut satu persatu.

Teorema 3.1 :

Rata-rata aritmetika A_n dan rata-rata geometri G_n keduanya berada diantara bilangan terkecil dan terbesar.

Bukti :

Nilai A_n dan G_n tidak tergantung pada pengurutan n bilangan yang dibentuk.

Andaikan bilangan-bilangan diambil dalam urutan yang tidak turun, yaitu $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n$, maka

$$x_1 = \frac{nx_1}{n} \le \frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n} \le \frac{nx_n}{n}$$

dan

$$x_1 = \left(x_1{}^n\right)^{1/n} \le \left(x_1.x_2\ldots x_n\right)^{1/n} \le \left(x_n{}^n\right)^{1/n} .$$

Jadi

$$x_1 \le A_n \le x_n .$$

$$x_1 \le G_n \le x_n .$$

Pada suatu kejadian khusus, yaitu $x_1=x_2=\ldots=x_n$, maka $A_n = G_n$. ∎

Berbicara tentang rata-rata aritmetika dan rata-rata geometri, biasanya muncul pertanyaan mengenai hubungan antara kedua rata-rata tersebut untuk suatu himpunan n bilangan positif. Jawaban dari pertanyaan tersebut dapat dilihat pada uraian dan teorema 3.2 di bawah ini.

Untuk dua bilangan positif berlaku hubungan $A_2 \ge G_2$ atau $\frac{x_1+x_2}{2} \ge \sqrt{x_1x_2}$ yang dapat dibuktikan sebagai berikut :

Karena kuadrat suatu bilangan real selalu non-negatif, maka untuk p dan g bilangan real berlaku

$$(p-q)^2 \geq 0.$$

Dan ketaksamaan di atas dapat diturunkan

$$(p-q)^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow p^2+q^2-2pq \geq 0$$

$$\Leftrightarrow p^2+q^2 \geq 2pq.$$

Jika $p^2 = x_1$ dan $q^2 = x_2$, maka

$$\frac{x_1+x_2}{2} \geq \sqrt{x_1x_2}.$$

Kesamaan dipenuhi jika dan hanya jika $x_1 = x_2$.

Hasil ini dapat diperluas menjadi teorema berikut.

Teorema 3.2 :

Rata-rata geometri dari n bilangan real positif selalu kurang dari atau sama dengan rata-rata aritmetikanya, dan kesamaan dipenuhi jika dan hanya jika semua bilangan sama.

Bukti 1 :

Seorang matematikawan berkebangsaan Perancis, *Augustin Cauchy* (1789-1857) meneliti bahwa jika dapat dibuktikan $G_n \leq A_n$, bilamana $n = 2^k$, $k=1,2,3,\ldots$, maka teorema ini juga berlaku untuk n yang lain.

Cauchy membuktikan teorema ini dengan induksi matematik.

a. Untuk n=2, yaitu k=1, maka

$$x_1x_2 = \left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2 - \left(\frac{x_1-x_2}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow x_1x_2 + \left(\frac{x_1-x_2}{2}\right)^2 = \left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2 .$$

Karena $\left(\frac{x_1-x_2}{2}\right)^2 \geq 0$, maka

$$x_1x_2 \leq \left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2 . \qquad (*)$$

Kesamaan dipenuhi jika dan hanya jika $(x_1-x_2)^2=0$, yaitu jika dan hanya jika $x_1 = x_2$.

b. Untuk n=4, yaitu k=2, maka

$$(x_1x_2)(x_3x_4) \leq \left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2 \left(\frac{x_3+x_4}{2}\right)^2$$

$$\leq \left(\frac{\sum_{1}^{4} x_i}{n}\right)^4 .$$

Menurut (*) diperoleh

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\left(\frac{x_3+x_4}{2}\right) \leq \left[\frac{\frac{x_1+x_2}{2}+\frac{x_3+x_4}{2}}{2}\right]^2 .$$

Jadi

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2\left(\frac{x_3+x_4}{2}\right)^2 = \left[\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\left(\frac{x_3+x_4}{2}\right)\right]^2$$

$$\leq \left[\left(\frac{\frac{x_1+x_2}{2}+\frac{x_3+x_4}{2}}{2}\right)^2\right]^2$$

$$= \left(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}\right)^4$$

$$= \left(\frac{\sum_{1}^{4} x_i}{4}\right)^4 .$$

c. Diasumsikan teorema benar untuk $n=2^k$.

d. Akan dibuktikan benar untuk $n=2^{k+1}$.

Bilangan-bilangan $x_1,\ldots,x_{2^{k+1}}$ dapat dipecah menjadi dua himpunan bilangan yang masing-masing beranggotakan 2^k bilangan , yaitu $x_1,\ldots,x_{2^k}$ dan $x_{2^k+1},\ldots,x_{2^{k+1}}$.

Jadi

$$\prod_{1}^{2^{k+1}} x_i = \left(\prod_{1}^{2^k} x_i\right)\left(\prod_{2^k+1}^{2^{k+1}} x_i\right)$$

$$\leq \left(\frac{\sum_{1}^{2^k} x_i}{2^k}\right)^{2^k}\left(\frac{\sum_{2^k+1}^{2^{k+1}} x_i}{2^k}\right)^{2^k} \qquad \text{(menurut asumsi)}$$

Dengan menggunakan (*) diperoleh

$$\left(\frac{\sum_{1}^{2^k} x_i}{2^k}\right)^{2^k}\left(\frac{\sum_{2^k+1}^{2^{k+1}} x_i}{2^k}\right)^{2^k} \leq \left(\frac{\sum_{1}^{2^{k+1}} x_i}{2^{k+1}}\right)^{2^k}.$$

Jadi

$$\prod_{1}^{2^{k+1}} x_i \leq \left(\frac{\sum_{1}^{2^{k+1}} x_i}{2^{k+1}}\right)^{2^{k+1}}.$$

Telah dibuktikan teorema berlaku untuk $n = 2^k$.

Jika $n \neq 2^k$, dimisalkan $2^m > n$ sedemikian sehingga $2^m - n = p$, maka dapat ditinjau 2^m bilangan positif.

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \underbrace{A_n, \ldots, A_n}_{p \text{ faktor}}$$

dengan $A_n = \dfrac{\sum_{1}^{n} x_i}{n}$.

Untuk 2^m bilangan ini telah dibuktikan $A_{2^m} \geq G_{2^m}$, jadi

$$\left(\prod_{1}^{n} x_i\right).(A_n)^p \leq \left(\frac{\sum_{1}^{n} x_i + p.A_n}{2^m}\right)^{2^m} = \left(\frac{n.A_n + p.A_n}{2^m}\right)^{2^m}$$

$$= (A_n)^{2^m} .$$

Jadi $(G_n)^n.(A_n)^p \leq (A_n)^{2^m}$.

Karena $(A_n)^{2^m} = (A_n)^n.(A_n)^p$.

Maka $(G_n)^n.(A_n)^p \leq (A_n)^n.(A_n)^p$

$\Leftrightarrow$ $(G_n)^n \leq (A_n)^n$.

Jadi $G_n \leq A_n$ untuk sembarang n bilangan positif, karena untuk $G_n>0$, $A_n>0$ dan untuk $\forall n \in \mathbb{R}$ berlaku $(G_n)^n \leq (A_n)^n \Leftrightarrow G_n \leq A_n$. ∎

Bukti 2 :

Harus terdapat s bilangan (mungkin s=0) diantara n bilangan dalam himpunan yang diberikan yang tidak sama dengan rata-rata geometri G_n. Teorema akan dibuktikan dengan induksi matematik dalam s.

a. Andaikan diberikan sembarang himpunan bilangan positif $x_1, x_2, \ldots, x_n$, dengan $s=0$. Maka $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = G_n$, sehingga $A_n = \frac{nG_n}{n} = G_n$.

   Jadi teorema dipenuhi jika $s=0$.

b. Diandaikan teorema dipenuhi untuk setiap himpunan n bilangan positif, dimana diantaranya paling banyak k $(0 \leq k \leq n-1)$ bilangan yang tidak sama dengan rata-rata geometri.

c. Akan dibuktikan teorema dipenuhi untuk sembarang himpunan n bilangan positif $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dengan rata-rata geometri G_n, dan $s=k+1$, dan diandaikan bilangan-bilangan yang diketahui $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n$.

   Untuk $s>0$, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tidak semuanya sama. Menurut teorema 3.1, telah ditunjukkan bahwa $x_1 \leq G_n \leq x_n$. Oleh karena itu,

$$(G_n - x_1)(G_n - x_n) < 0. \qquad **)$$

   Akan ditinjau untuk himpunan n bilangan $x_1', x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n'$, dimana $x_1' = G_n$ dan $x_n' = \frac{x_1 x_n}{G_n}$.

Untuk himpunan bilangan ini, rata-rata geometrinya jelas G_n dan bilangan yang tidak sama dengan G_n paling banyak k bilangan.

Jadi, menurut hipotesis induksi matematik, haruslah

$$\frac{x_1'+x_2+\ldots+x_{n-1}+x_n'}{n} \geq G_n .$$

Jadi

$$\begin{aligned}
A_n &= \frac{x_1+x_2+\ldots+x_{n-1}+x_n}{n} \\
&= \left(\frac{x_1'\ x_2+\ldots+x_{n-1}+x_n'}{n}\right)+\left(\frac{x_1-x_1'}{n}\right)+\left(\frac{x_n-x_n'}{n}\right) \\
&\geq G_n + \left(\frac{x_1-G_n}{n}\right)+\left(\frac{x_n-\dfrac{x_1x_n}{G_n}}{n}\right) \\
&= G_n - \frac{(G_n-x_1)(G_n-x_n)}{G_n} \\
&> G_n, \qquad\qquad \text{karena **)}
\end{aligned}$$

Jadi, jika teorema dipenuhi untuk $s\leq k$, maka teorema juga dipenuhi untuk $s=k+1$. Dengan prinsip induksi matematik, teorema dipenuhi untuk semua kemungkinan s, yaitu untuk $0\leq s\leq n$. ■

Contoh 3.A.1 :

Buktikan bahwa $n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$, $n = 2,3,\ldots$

Bukti :

Menurut teorema 3.2, rata-rata aritmetika lebih besar atau sama dengan rata-rata geometri, sehingga

$$(1.2.3\ldots n)^{1/n} < \frac{1+2+\ldots+n}{n}$$

$$= \frac{\frac{(n+1)n}{2}}{n} = \frac{n+1}{2}.$$

$$1.2.3\ldots n < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n.$$

Jadi $$n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n.$$

Contoh 3.A.2 :

Diberikan segitiga ABC dengan keliling P dan luas L, dan $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$, $\overline{BC} = a$.

Bentuk Heron :

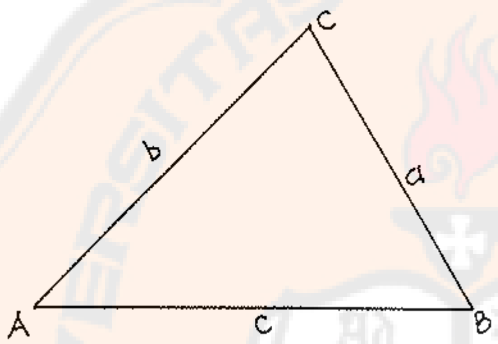
$16L^2 = P(P-2a)(P-2b)(P-2c)$, atau

$L = (s(s-a)(s-b)(s-c))^{1/2}$, dengan $s = P/2$.

Buktikan bahwa untuk semua segitiga dengan alas tetap dan diketahui kelilingnya, segitiga samakaki mempunyai luas yang terbesar.

Bukti :

Sebelum membuktikan bahwa segitiga samakaki mempunyai luas terbesar, akan dibuktikan terlebih dahulu bahwa luas segitiga menurut Heron adalah $L = (s(s-a)(s-b)(s-c))^{1/2}$, dengan $s = P/2$.



gambar 2

Menurut rumus identitas trigonometri,

$\mathrm{Sin}^2\ C + \mathrm{Cos}^2\ C = 1.$

$$\mathrm{Sin}^2\ C = 1 - \mathrm{Cos}^2\ C$$

$$= (1 + \mathrm{Cos}\ C)(1 - \mathrm{Cos}\ C)$$

$$= \left(1 + \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)\left(1 - \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right).$$

$$\mathrm{Sin}^2\ C = \left(\frac{2ab+a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)\left(\frac{2ab-a^2-b^2+c^2}{2ab}\right)$$

$$= \left(\frac{(a+b)^2-c^2}{2ab}\right)\left(\frac{c^2-(a-b)^2}{2ab}\right)$$

$$= \frac{(a+b+c)(a+b-c)(c+a-b)(c-a+b)}{4a^2b^2}.$$

$$L = \frac{1}{2} ab \operatorname{Sin} C$$

$$= \frac{1}{2} ab \frac{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(c+a-b)(c-a+b)}}{2ab}$$

$$= \frac{1}{4} \sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(c+a-b)(c-a+b)}.$$

Misal $a+b+c=2s$,

maka $a+b+c-2a = b+c-a = 2s-2a$.

Jadi $c-a+b = 2(s-a)$.

Analog $c+a-b = 2(s-b)$ dan $a+b-c = 2(s-c)$.

Jadi $L = \frac{1}{4} \sqrt{2s.2(s-a).2(s-b).2(s-c)}$

$= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$.

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa segitiga mempunyai luas terbesar.

Menurut bentuk Heron,

$$16L^2 = P(P-2a)(P-2b)(P-2c).$$

$$4L = \sqrt{P(P-2a)}\ \sqrt{(P-2b)(P-2c)}.$$

Menurut teorema 3.2,

$$\sqrt{(P-2b)(P-2c)} \le \left(\frac{(P-2b)+(P-2c)}{2}\right).$$

Maka

$$4L \le \sqrt{P(P-2a)} \left(\frac{(P-2b)+(P-2c)}{2}\right)$$

$$= \sqrt{P(P-2a)}\ (P-b-c).$$

Jika $P-2b = P-2c$, maka $b = c$.

Berarti segitiga ABC akan mempunyai luas yang terbesar. ■

Teorema berikut merupakan penerapan dari teorema 3.2 yang digunakan dalam penyelaesaian beberapa masalah.

Teorema 3.3 :

Jika $x \geq -1$ dan $0<\alpha<1$, maka

(1) $(1+x)^{\alpha} \leq 1+\alpha x$.

Jika $\alpha<0$ atau $\alpha>1$ dan $x \geq -1$, maka

(2) $(1+x)^{\alpha} \geq 1+\alpha x$.

Kesamaan dipenuhi jika dan hanya jika $x=0$.

Bukti :

Akan dibuktikan untuk α bilangan rasional dan α bilangan irrasional.

a. Untuk α bilangan rasional.

Andaikan $\alpha=\frac{m}{n}$ dan $0<\alpha<1$, dengan $m,n \in \mathbb{Z}^{+}$.

Agar dapat mempergunakan teorema 3.2, maka $(1+x)^{m/n}$ dapat ditulis

$$\Big(\underbrace{(1+x)\ldots(1+x)}_{m\ \text{faktor}}.\ \underbrace{1.1\ldots1}_{n-m\ \text{faktor}}\Big)^{1/n}.$$

Maka menurut teorema 3.2,

$$(1+x)^{m/n} \le \frac{m(1+x)+n-m}{n} = 1 + \frac{m}{n}x.$$

Jadi $(1+x)^{\alpha} \le 1+\alpha x$.

Kesamaan dipenuhi jika dan hanya jika $1+x=1$, yaitu jika $x=0$.

Selanjutnya akan ditinjau untuk $\alpha>1$.

Jika $(1+\alpha x)$ negatif, ketaksamaan (2) jelas dipenuhi.

Jika $(1+\alpha x) \ge 0$, maka $\alpha x \ge -1$.

Dan dengan menggunakan ketaksamaan (1),

$$(1+\alpha x)^{1/\alpha} \le 1 + \frac{1}{\alpha}.\alpha x = 1+x, \text{ untuk } 0<\frac{1}{\alpha}<1.$$

Jadi $(1+\alpha x) \le (1+x)^{\alpha}$.

Kesamaan dipenuhi jika dan hanya jika $\alpha x=0$, yaitu jika dan hanya jika $x=0$.

Dan terakhir akan ditinjau untuk $\alpha<0$.

Jika $(1+\alpha x)$ juga negatif, maka ketaksamaan (2) dipenuhi.

Jika $(1+\alpha x) \ge 0$, dipilih suatu bilangan bulat positif n, sehingga $0<-\frac{\alpha}{n}<1$, dan kita tinjau

$[(1+x)^{\alpha}]^{-1/n}$ yang sama dengan $(1+x)^{-\alpha/n}$.

Maka dengan ketaksamaan (1),

$(1+x)^{-\alpha/n} \leq 1-\frac{\alpha}{n}x$.

Oleh karena itu,

$$(1+x)^{\alpha/n} \geq \frac{1}{1-\frac{\alpha}{n}x}.$$

Tetapi,

$$\frac{1}{1-\frac{\alpha}{n}x} = \frac{1+\frac{\alpha}{n}x}{(1-\frac{\alpha}{n}x)(1+\frac{\alpha}{n}x)}$$

$$= \frac{1+\frac{\alpha}{n}x}{1-\left(\frac{\alpha x}{n}\right)^2} \geq 1+\frac{\alpha}{n}x.$$

Jadi,

$(1+x)^{\alpha/n} \geq 1+\frac{\alpha}{n}x$ atau $(1+x)^{\alpha} \geq (1+\frac{\alpha}{n}x)^n$.

Dengan dimisalkan n sangat besar dan $\frac{\alpha x}{n} \geq -1$,

maka dapat disimpulkan bahwa

$(1+x)^{\alpha} \geq (1+\frac{\alpha}{n}x)^n \geq 1+n.\frac{\alpha x}{n} = 1+\alpha x$.

Kesamaan dipenuhi hanya jika x=0. ∎

b. Untuk α bilangan irrasional.

Akan dibuktikan $(1+x)^{\alpha} \leq 1+\alpha x$, dengan $x \geq -1$ dan

$0<\alpha<1$, α irrasional.

Ditinjau untuk $x>0$. Dapat dibuat barisan rasional $\langle\beta_n\rangle$ dengan $0<\alpha<\beta_n<1$ dan $\beta_n \longrightarrow \alpha$. Maka diperoleh

$(1+x)^{\alpha} < (1+x)^{\beta_n} \leq 1+\beta_n x$.

Jadi untuk $\forall n \in \mathbb{N}$ berlaku $(1+x)^{\alpha} \leq 1+\beta_n x$.

Ini berakibat

$$(1+x)^{\alpha} \leq \lim_{n \longrightarrow \infty} 1+\beta_n x = 1+\alpha x$$

Terbukti bahwa $(1+x)^{\alpha} \leq 1+\alpha x$ untuk $x>0$.

Sekarang ditinjau untuk $-1\leq x<0$. Terdapat barisan rasional $\langle\gamma_n\rangle$ dengan $0<\gamma_n<\alpha<0$ dan $\gamma_n \longrightarrow \alpha$. Maka $0\leq 1+x<1$. Jadi $(1+x)^{\alpha} < (1+x)^{\gamma_n} \leq 1+\gamma_n x$.

Jadi $\forall n \in \mathbb{N}$ berlaku $(1+x)^{\alpha} \leq 1+\gamma_n x$, sehingga

$$(1+x)^{\alpha} \leq \lim_{n \longrightarrow \infty} 1+\gamma_n x = 1+\alpha x.$$

Jadi $(1+x)^{\alpha} \leq 1+\alpha x$ untuk $0\leq x<1$.

Terbukti $(1+x)^{\alpha} \leq 1+\alpha x$ untuk $x\geq -1$, dengan α irrasional dan $0<\alpha<1$.

Pada kasus kedua akan dibuktikan $(1+x)^{\alpha} \geq 1+\alpha x$ untuk $x\geq -1$, $\alpha<0$, dan α irrasional.

Ditinjau untuk $x>0$. Dapat dibuat barisan rasional

$<\delta_n>$ dengan $\delta_n<\alpha<0$ dan $\delta_n \longrightarrow \alpha$. Maka diperoleh

$(1+x)^{\alpha} > (1+x)^{\delta_n} \geq 1+\delta_n x$.

Jadi untuk $\forall n \in \mathbb{N}$ berlaku $(1+x)^{\alpha} \geq 1+\delta_n x$.

Ini berakibat

$$(1+x)^{\alpha} \geq \lim_{n \to \infty} 1+\delta_n x = 1+\alpha x$$

Terbukti bahwa $(1+x)^{\alpha} \geq 1+\alpha x$ untuk $x>0$.

Sekarang ditinjau untuk $-1 \leq x<0$. Terdapat barisan rasional $<\varepsilon_n>$ dengan $\alpha<\varepsilon_n<0$ dan $\varepsilon_n \longrightarrow \alpha$. Maka $0 \leq 1+x<1$. Jadi $(1+x)^{\alpha} > (1+x)^{\varepsilon_n} \geq 1+\varepsilon_n x$.

Jadi $\forall n \in \mathbb{N}$ berlaku $(1+x)^{\alpha} \geq 1+\varepsilon_n x$, sehingga

$$(1+x)^{\alpha} \geq \lim_{n \to \infty} 1+\varepsilon_n x = 1+\alpha x.$$

Jadi $(1+x)^{\alpha} \geq 1+\alpha x$ untuk $0 \leq x<1$.

Terbukti $(1+x)^{\alpha} \geq 1+\alpha x$ untuk $x \geq -1$, dengan α irrasional dan $\alpha>1$.

Dan terakhir akan dibuktikan $(1+x)^{\alpha} \geq 1+\alpha x$ untuk $x \geq -1$, $\alpha>1$, dan α irrasional.

Ditinjau untuk $x>0$. Dapat dibuat barisan rasional $<\xi_n>$ dengan $\alpha>\xi_n>1$ dan $\xi_n \longrightarrow \alpha$. Maka diperoleh

$(1+x)^{\alpha} > (1+x)^{\xi_n} \geq 1+\xi_n x$.

Jadi untuk $\forall n \in \mathbb{N}$ berlaku $(1+x)^{\alpha} \geq 1+\xi_n x$.

Ini berakibat

$$(1+x)^{\alpha} \geq \lim_{n \to \infty} 1+\xi_n x = 1+\xi x$$

Terbukti bahwa $(1+x)^{\alpha} \geq 1+\alpha x$ untuk $x>0$.

Sekarang ditinjau untuk $-1 \leq x<0$. Terdapat barisan rasional $\langle \vartheta_n \rangle$ dengan $\vartheta_n > \alpha > 1$ dan $\vartheta_n \longrightarrow \alpha$. Maka $0 \leq 1+x<1$. Jadi $(1+x)^{\alpha} > (1+x)^{\vartheta_n} \geq 1+\vartheta_n x$.

Jadi $\forall n \in \mathbb{N}$ berlaku $(1+x)^{\alpha} \geq 1+\vartheta_n x$, sehingga

$$(1+x)^{\alpha} \geq \lim_{n \to \infty} 1+\vartheta_n x = 1+\alpha x.$$

Jadi $(1+x)^{\alpha} \geq 1+\alpha x$ untuk $0 \leq x<1$.

Terbukti $(1+x)^{\alpha} \leq 1+\alpha x$ untuk $x \geq -1$, dengan α irrasional dan $\alpha>1$. ∎

Jika kita mengganti x dengan $y-1$, maka (1) dan (2) akan berbentuk

(3) $y^{\alpha}-\alpha y \leq 1-\alpha$, jika $y \geq 0$ dan $0<\alpha<1$.

(4) $y^{\alpha}-\alpha y \geq 1-\alpha$, jika $y \geq 0$ dan $\alpha>1$ atau $\alpha<0$.

Kesamaan dipenuhi jika dan hanya jika $y=1$.

B. KETAKSAMAAN CAUCHY

Augustin Cauchy (1789-1857), mempublikasikan ketaksamaan ini pada tahun 1821. Ketaksamaan Cauchy ini biasa disebut juga sebagai ketaksamaan Schwarz.

Teorema 3.4 :

Jika $a_1, a_2, \ldots, a_n$ dan $b_1, b_2, \ldots, b_n$ bilangan-bilangan real, maka berlaku ketaksamaan

$$(5) \quad \left(\sum_{1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{1}^{n} b_i^2\right).$$

Kesamaan dipenuhi jika dan hanya jika $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n} = \lambda$.

Bukti :

Andaikan f(t) adalah fungsi kuadrat dari t, sedemikian sehingga

$$f(t) = \sum_{1}^{n} (a_i - tb_i)^2$$

$(a_i - tb_i)^2 \geq 0$, untuk $\forall t \in \mathbb{R}$.

Jadi f(t) fungsi kuadrat yang lebih besar atau sama dengan nol untuk setiap t anggota $\mathbb{R}$.

$$f(t) = \sum_{1}^{n} (a_i - tb_i)^2$$

$$= \sum_{1}^{n} a_i^2 - 2t\sum_{1}^{n} a_i b_i + t^2 \sum_{1}^{n} b_i^2 .$$

(i) Jika semua $b_i = 0$, maka

$$\left[\sum_{1}^{n} a_i \,.\, 0\right]^2 \le \left[\sum_{1}^{n} a_i^2\right].(0)$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 \le \sum_{1}^{n} a_i^2 \,.\, 0 .$$

Jadi teorema dipenuhi.

(ii) Jika tidak semua $b_i = 0$, maka

ada i, sedemikian sehingga $b_i \neq 0$

Jadi $\sum_{1}^{n} b_i^2 > 0$.

Karena f(t) fungsi kuadrat yang ≥ 0, maka diskriminan dari f(t)

$$D = 4\left[\sum_{1}^{n} a_i b_i\right]^2 - 4\left[\sum_{1}^{n} b_i^2\right]\left[\sum_{1}^{n} a_i^2\right] \le 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 4\left(\sum_{1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq 4\left(\sum_{1}^{n} b_i^2\right)\left(\sum_{1}^{n} a_i^2\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\sum_{1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{1}^{n} b_i^2\right)\left(\sum_{1}^{n} a_i^2\right).$$

Kesamaan dari ketaksamaan Cauchy ini adalah

$$\left(\sum_{1}^{n} a_i b_i\right)^2 = \left(\sum_{1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{1}^{n} b_i^2\right).$$

Atau

$$\left(\sum_{1}^{n} a_i b_i\right)^2 - \left(\sum_{1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{1}^{n} b_i^2\right) = 0.$$

Berarti diskriminan dari persamaan kuadrat $f(t)$ sama dengan nol, atau $D=0$.

Jika $D=0$, maka $f(t)=0$ dan mempunyai dua akar sama.

Jika akar tersebut $t_1=t_2=\lambda$, maka

$$f(\lambda)=0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{1}^{n}(a_i-\lambda b_i)^2=0.$$

Jadi $\forall i$, $a_i=\lambda b_i$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{a_i}{b_i} = \lambda .$$

Jadi kesamaan dipenuhi jika dan hanya jika $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n} = \lambda$.

Contoh 3.B.1 :

Jika $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ dan $y_1, \ldots, y_n, \ldots$ dua himpunan berhingga bilangan, dan jika

$$D_n = \left[\sum_1^n x_i^2\right]\left[\sum_1^n y_i^2\right] - \left[\sum_1^n x_i y_i\right]^2 .$$

Buktikan bahwa $D_n \leq D_{n+1}$.

Bukti :

$$D_n = \left[\sum_1^n x_i^2\right]\left[\sum_1^n y_i^2\right] - \left[\sum_1^n x_i y_i\right]^2 .$$

$$D_{n+1} = \left[\sum_1^{n+1} x_i^2\right]\left[\sum_1^{n+1} y_i^2\right] - \left[\sum_1^{n+1} x_i y_i\right]^2$$

$$= \left[\sum_1^n x_i^2 + x_{n+1}^2\right]\left[\sum_1^n y_i^2 + y_{n+1}^2\right] - \left[\sum_1^n x_i y_i + x_{n+1} y_{n+1}\right]^2$$

$$= \left[\sum_{1}^{n} x_i^2\right]\left[\sum_{1}^{n} y_i^2\right] + x_{n+1}^2\sum_{1}^{n} y_i^2 +$$

$$y_{n+1}^2\sum_{1}^{n} x_i^2 + x_{n+1}^2 y_{n+1}^2 -$$

$$\left[\left[\sum_{1}^{n} x_i y_i\right]^2 + 2x_{i+1}y_{n+1}\sum_{1}^{n} x_i y_i + x_{n+1}^2 y_{n+1}^2\right]$$

$$= \left[\sum_{1}^{n} x_i^2\right]\left[\sum_{1}^{n} y_i^2\right] - \left[\sum_{1}^{n} x_i y_i\right]^2 + x_{n+1}^2\sum_{1}^{n} y_i^2 +$$

$$y_{n+1}^2\sum_{1}^{n} x_i^2 - 2x_{n+1}y_{n+1}\sum_{1}^{n} x_i y_i$$

$$= D_n + x_{n+1}^2\sum_{1}^{n} y_i^2 + y_{n+1}^2\sum_{1}^{n} x_i^2 - 2x_{n+1}y_{n+1}\sum_{1}^{n} x_i y_i .$$

Akan dibuktikan bahwa

$$x_{n+1}^2\sum_{1}^{n} y_i^2 + y_{n+1}^2\sum_{1}^{n} x_i^2 - 2x_{n+1}y_{n+1}\sum_{1}^{n} x_i y_i \geq 0$$

atau

$$x_{n+1}^2\sum_{1}^{n} y_i^2 + y_{n+1}^2\sum_{1}^{n} x_i^2 \geq 2x_{n+1}y_{n+1}\sum_{1}^{n} x_i y_i .$$

Menurut teorema 3.2,

$$\frac{x_{n+1}^2\sum_1^n y_i^2 + y_{n+1}^2\sum_1^n x_i^2}{2} \geq \sqrt{x_{n+1}^2 y_{n+1}^2 \sum_1^n x_i^2 \sum_1^n y_i^2}$$

$$= |x_{n+1}|\,|y_{n+1}| \sqrt{\left(\sum_1^n x_i^2\right)\left(\sum_1^n y_i^2\right)}$$

$$= x_{n+1}\cdot y_{n+1} \sqrt{\left(\sum_1^n x_i^2\right)\left(\sum_1^n y_i^2\right)}$$

$$\geq x_{n+1}\cdot y_{n+1} \sum_1^n x_i y_i \quad \text{, menurut teorema 3.4.}$$

Jadi $D_n \geq D_{n+1}$. ∎

Contoh 3.B.2 :

Buktikan bahwa

$$\left[\left(\sum_1^n x_i\right)^2 + \left(\sum_1^n y_i\right)^2\right]^{1/2} \leq \sum_1^n \sqrt{x_i^2 + y_i^2} \quad , \; n=2,3,\ldots$$

<u>Bukti</u> :

Ketaksamaan di atas akan dibuktikan dengan induksi matematik.

1. Untuk n=2.

$$\sqrt{(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2}$$

$$= \sqrt{(x_1^2+2x_1x_2+x_2^2) + (y_1^2+2y_1y_2+y_2^2)}$$

$$= \sqrt{(x_1^2+y_1^2) + (x_2^2+y_2^2) + 2(x_1x_2+y_1y_2)}$$

$$= \left\{\left(\sqrt{(x_1^2+y_1^2)}\right)^2 + \left(\sqrt{(x_2^2+y_2^2)}\right)^2 + 2\sqrt{(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2)^2} + 2(x_1x_2+y_1y_2) - 2\sqrt{(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)}\right\}^{1/2}$$

$$\le \sqrt{(x_1^2+y_1^2)} + \sqrt{(x_2^2+y_2^2)},$$

jika $2(x_1x_2+y_1y_2) - 2\sqrt{(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)} \le 0$

atau $(x_1x_2+y_1y_2) \le \sqrt{(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)}$

$$\sqrt{(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2} \le \sqrt{(x_1^2+y_1^2)} + \sqrt{(x_2^2+y_2^2)}$$

$$\Leftrightarrow (x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2$$

$$\le (x_1^2+y_1^2) + (x_2^2+y_2^2) + 2\sqrt{(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)}$$

$$\Leftrightarrow (x_1^2+2x_1x_2+x_2^2) + (y_1^2+2y_1y_2+y_2^2)$$

$$\le (x_1^2+y_1^2) + (x_2^2+y_2^2) + 2\sqrt{(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)}$$

$$\Leftrightarrow 2(x_1x_2+y_1y_2) \le 2\sqrt{(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)}$$

$$\Leftrightarrow (x_1x_2+y_1y_2) \le \sqrt{(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)}.$$

2. Diasumsikan benar untuk n=k, yaitu

$$\left[\left(\sum_{1}^{k} x_i\right)^2 + \left(\sum_{1}^{k} y_i\right)^2\right]^{1/2} \leq \sum_{1}^{k} \sqrt{x_i^2 + y_i^2}\ .$$

3. Akan dibuktikan ketaksamaan benar untuk n=k+1.

$$\left[\left(\sum_{1}^{k+1} x_i\right)^2 + \left(\sum_{1}^{k+1} y_i\right)^2\right]^{1/2}$$

$$= \left[\left(\sum_{1}^{k} x_i + x_{k+1}\right)^2 + \left(\sum_{1}^{k} y_i + y_{k+1}\right)^2\right]^{1/2}$$

$$= \left[\left(\sum_{1}^{k} x_i\right)^2 + 2x_{k+1}\sum_{1}^{k} x_i + x_{k+1}{}^2 + \left(\sum_{1}^{k} y_i\right)^2 + 2y_{k+1}\sum_{1}^{k} y_i + y_{k+1}{}^2\right]^{1/2}$$

$$= \left[\left(\sum_{1}^{k} x_i\right)^2 + \left(\sum_{1}^{k} y_i\right)^2 + x_{k+1}{}^2 + y_{k+1}{}^2 + 2\left(x_{k+1}\sum_{1}^{k} x_i + y_{k+1}\sum_{1}^{k} y_i\right)\right]^{1/2}$$

$$= \left\{\left[\left(\sum_{1}^{k} x_i\right)^2 + \left(\sum_{1}^{k} y_i\right)^2\right] + \left(x_{k+1}{}^2 + y_{k+1}{}^2\right) + \right.$$

$$2\sqrt{\left[\left(\sum_{1}^{k}x_i\right)^2+\left(\sum_{1}^{k}y_i\right)^2\right]\cdot\left(x_{k+1}^2+y_{k+1}^2\right)}\ +$$

$$2\left(x_{k+1}\sum_{1}^{k}x_i+y_{k+1}\sum_{1}^{k}y_i\right)\ +$$

$$\left.2\sqrt{\left[\left(\sum_{1}^{k}x_i\right)^2+\left(\sum_{1}^{k}y_i\right)^2\right]\cdot\left(x_{k+1}^2+y_{k+1}^2\right)}\ \right\}^{1/2}$$

$$\leq \sqrt{\left(\sum_{1}^{k}x_i\right)^2+\left(\sum_{1}^{k}y_i\right)^2}\ +\ \sqrt{x_{k+1}^2+y_{k+1}^2}$$

$$\leq \sum_{1}^{k}\sqrt{x_i^2+y_i^2}\ +\ \sqrt{x_{k+1}^2+y_{k+1}^2}$$

$$= \sum_{1}^{k+1}\sqrt{x_i^2+y_i^2}\ ,$$

jika

$$2\left(x_{k+1}\sum_{1}^{k}x_i+y_{k+1}\sum_{1}^{k}y_i\right)+2\sqrt{\left[\left(\sum_{1}^{k}x_i\right)^2+\left(\sum_{1}^{k}y_i\right)^2\right]\left(x_{k+1}^2+y_{k+1}^2\right)}\leq 0$$

atau

$$\left(x_{k+1}\sum_{1}^{k}x_i + y_{k+1}\sum_{1}^{k}y_i\right) \le \sqrt{\left[\left(\sum_{1}^{k}x_i\right)^2 + \left(\sum_{1}^{k}y_i\right)^2\right]\left(x_{k+1}^2 + y_{k+1}^2\right)}$$

$$\left[\left(\sum_{1}^{k}x_i + x_{k+1}\right)^2 + \left(\sum_{1}^{k}y_i + y_{k+1}\right)^2\right]^{1/2} \le \sum_{1}^{k}\sqrt{x_i^2 + y_i^2} + \sqrt{x_{k+1}^2 + y_{k+1}^2}$$

$$\Leftrightarrow \left(\sum_{1}^{k}x_i + x_{k+1}\right)^2 + \left(\sum_{1}^{k}y_i + y_{k+1}\right)^2 \le \left[\left(\sum_{1}^{k}x_i\right)^2 + \left(\sum_{1}^{k}y_i\right)^2\right] + \left(x_{k+1}^2 + y_{k+1}\right.$$

$$+2\sqrt{\left[\left(\sum_{1}^{k}x_i\right)^2 + \left(\sum_{1}^{k}y_i\right)^2\right]\left(x_{k+1}^2 + y_{k+1}^2\right)}$$

$$\Leftrightarrow \left(\sum_{1}^{k}x_i\right)^2 + 2x_{k+1}\sum_{1}^{k}x_i + x_{k+1}^2 + \left(\sum_{1}^{k}y_i\right)^2 + 2y_{k+1}\sum_{1}^{k}y_i + y_{k+1}^2$$

$$\le \left[\left(\sum_{1}^{k}x_i\right)^2 + \left(\sum_{1}^{k}y_i\right)^2\right] + \left(x_{k+1}^2 + y_{k+1}^2\right)$$

$$+2\sqrt{\left[\left(\sum_{1}^{k}x_i\right)^2 + \left(\sum_{1}^{k}y_i\right)^2\right]\left(x_{k+1}^2 + y_{k+1}^2\right)}$$

$$\Leftrightarrow 2\left(x_{k+1}\sum_{1}^{k}x_i + y_{k+1}\sum_{1}^{k}y_i\right) \leq 2\sqrt{\left(\left(\sum_{1}^{k}x_i\right)^2 + \left(\sum_{1}^{k}y_i\right)^2\right)\left(x_{k+1}^2 + y_{k+1}^2\right)}$$

$$\Leftrightarrow \left(x_{k+1}\sum_{1}^{k}x_i + y_{k+1}\sum_{1}^{k}y_i\right) \leq \sqrt{\left(\left(\sum_{1}^{k}x_i\right)^2 + \left(\sum_{1}^{k}y_i\right)^2\right)\left(x_{k+1}^2 + y_{k+1}^2\right)} \blacksquare$$

C. KETAKSAMAAN HOELDER

Seorang matematikawan abad XIX menemukan suatu bentuk ketaksamaan yang disebut dengan ketaksamaan Hoelder, sesuai dengan namanya, yaitu *O. Hoelder*. Ketaksamaan tersebut dapat dilihat pada teorema 3.5 di bawah ini.

Teorema 3.5 :

Jika x dan y positif, x+y=1 dan bilangan-bilangan a_i dan b_i, i=1,2,...,n adalah bilangan real tak negatif, maka

$$(6)\quad \sum_{1}^{n} a_i^x b_i^y \leq \left(\sum_{1}^{n} a_i\right)^x \left(\sum_{1}^{n} b_i\right)^y$$

ekuivalen dengan

$$(7)\quad \sum_{1}^{n} a_i b_i \leq \left[\sum_{1}^{n} a_i^{1/x}\right]^x \left[\sum_{1}^{n} b_i^{1/y}\right]^y .$$

Kesamaan dipenuhi jika dan hanya jika $b_i=0$ atau

$$\frac{a_1}{b_1} = \ldots = \frac{a_n}{b_n} = \lambda$$

Bukti 1:

Akan dibuktikan (7) dipenuhi.

Jika semua $a_i=0$ atau semua $b_i=0$, (7) jelas dipenuhi.

Misalkan kita tulis ketaksamaan (3) dalam bentuk

$$(8)\quad z^m \leq 1+m(z-1) \quad , \ z>0 \text{ dan } 0<m<1.$$

Andaikan $z = \frac{A}{B}$, A dan B positif.

Maka menurut (8),

$$A^m B^{1-m} \leq B+m(A-B) \quad , \ 0<m<1.$$

Jika m diganti x dan i-m diganti y, maka

$$(9)\quad A^x B^y \leq xA + yB.$$

Misalkan

$$A_i = \frac{a_i^{1/x}}{\sum_{1}^{n} a_i^{1/x}} \quad \text{dan} \quad B_i = \frac{b_i^{1/y}}{\sum_{1}^{n} b_i^{1/y}} .$$

Akan ditinjau $\sum_{1}^{n} A^x B^y$.

Menurut (9),

$$\sum_{1}^{n} A_i^x B_i^y \leq x\sum_{1}^{n} A_i + y\sum_{1}^{n} B_i$$

$$= x\,\frac{\sum_{1}^{n} a_i^{1/x}}{\sum_{1}^{n} a_i^{1/x}} + y\,\frac{\sum_{1}^{n} b_i^{1/y}}{\sum_{1}^{n} b_i^{1/y}} = x+y = 1.$$

Jadi,

$$\sum_{1}^{n} a_i b_i \leq \left(\sum_{1}^{n} a_i^{1/x}\right)^x \left(\sum_{1}^{n} b_i^{1/y}\right)^y .$$

Kesamaan dipenuhi jika dan hanya jika

$$\frac{a_i^{1/x}}{\sum_{1}^{n} a_i^{1/x}} = \frac{b_i^{1/y}}{\sum_{1}^{n} b_i^{1/y}}, \quad i=1,2,\ldots,n.$$

$$\frac{a_i^{1/x}}{b_i^{1/y}} = \frac{\sum_{1}^{n} a_i^{1/x}}{\sum_{1}^{n} b_i^{1/y}} = \frac{\alpha}{\beta}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a_i^{1/x}}{b_i^{1/y}} = \frac{\alpha}{\beta}.$$

Kedua ruas dikalikan dengan $\dfrac{a_i^{x}}{b_i^{y}}$.

Maka $\dfrac{a_i}{b_i} = \dfrac{\alpha}{\beta}\dfrac{a_i^{x}}{b_i^{y}} = \lambda.$

Jadi $\dfrac{a_i}{b_i} = \lambda.$

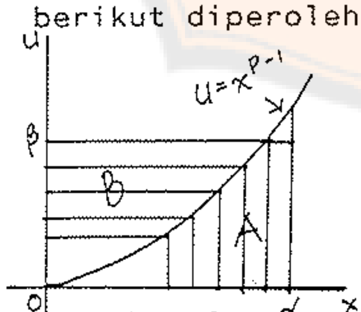
Kesamaan (6) dapat dibentuk dari ketaksamaan (7) dengan mengganti a_i dengan a_i^{x} dan b_i dengan b_i^{y}. ■

Bukti 2 :

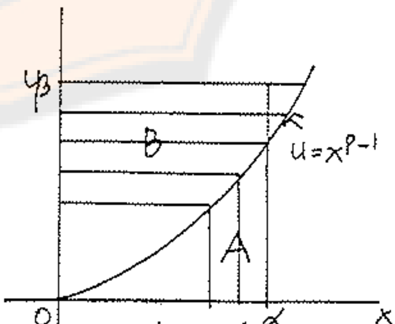
Pada pembuktian kedua ini, x diganti dengan 1/p dan y dengan 1/q.

Untuk semua $a_i=0$ atau semua $b_i=0$, maka ketaksamaan (7) menjadi suatu kesamaan.

Karena p>1 dan q>1, maka fungsi $u=x^p$ dan $v=x^q$ dengan $x \geq 0$ keduanya naik. Untuk $\alpha>0$ dan $\beta>0$ dari gambar berikut diperoleh



gambar 3



gambar 4

$$\alpha\beta \leq \int_0^{\alpha} x^{p-1}\,dx + \int_0^{\beta} u^{q-1}\,du = \frac{\alpha^p}{p} + \frac{\beta^q}{q},$$

dan oleh karena grafik fungsi $u=x^{p-1}$ juga merupakan grafik fungsi $x=u^{q-1}$, $(1/p+1/q=1 \Rightarrow pq=p+q \Rightarrow (p-1)(q-1)=1 \Rightarrow q-1=\frac{1}{p-1})$, maka luas daerah A sesuai dengan integral yang pertama dan daerah B sesuai dengan integral yang kedua. Untuk $\alpha=0$ dan $\beta=0$ ketaksamaan yang kita peroleh ini menjadi kesamaan.

Jadi, $\alpha\beta \leq \frac{\alpha^p}{p} + \frac{\beta^q}{q}$, untuk $\alpha\geq 0$ dan $\beta\geq 0$.

Sekarang dimisalkan $\sum_{1}^{n}|a_i|^p = R>0$ dan $\sum_{1}^{n}|b_i|^q = S>0$,

maka untuk $\alpha=a_iR^{-1/p}$ dan $\beta=b_iS^{-1/q}$ diperoleh

$$\frac{1}{R^{1/p}\;S^{1/q}}\sum_{1}^{n}\left|a_ib_i\right| \leq \frac{1}{p}\sum_{1}^{n}\left|a_i\right|^p / R + \sum_{1}^{n}\left|b_i\right|^q / S$$

$$= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Jadi $\sum_{1}^{n}\left|a_ib_i\right| \leq R^{1/p}\;S^{1/q}$

$$= \left(\sum_{1}^{n}\left|a_i\right|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{1}^{n}\left|b_i\right|^q\right)^{1/q}. \qquad \blacksquare$$

Contoh 3.C.1 :

Buktikan bahwa ketaksamaan Hoelder merupakan ketaksamaan Cauchy jika $x = 1/2$.

Bukti :

Menurut teorema 3.5,

jika $x,y > 0$, $x+y=1$, dan $a_i, b_i \in \mathbb{R}^+$, $i=1,2,\ldots,n$,

$$\text{maka} \quad \sum_{1}^{n} a_i b_i \le \left[\sum_{1}^{n} a_i^{1/x}\right]^x \left[\sum_{1}^{n} b_i^{1/y}\right]^y .$$

Jika $x=1/2$, maka $y=1/2$, karena $x+y=1$.

Jadi diperoleh

$$\sum_{1}^{n} a_i b_i \le \left[\sum_{1}^{n} a_i^2\right]^{1/2} \left[\sum_{1}^{n} b_i^2\right]^{1/2}$$

ekuivalen dengan

$$\sum_{1}^{n} a_i b_i \le \left[\left[\sum_{1}^{n} a_i^2\right] \left[\sum_{1}^{n} b_i^2\right]\right]^{1/2} .$$

Jadi, ketaksamaan Cauchy merupakan kejadian khusus dari ketaksamaan Hoelder. ∎

Contoh 3.C.2 :

Jika a_i, b_i himpunan bilangan positif dan $x,y \geq 0$, dimana $x+y=1$, maka

$$\left[\sum_{1}^{n} a_i^x b_i^y\right]^{1/xy} \leq \left[\sum_{1}^{n} a_i\right]^{1/y} \left[\sum_{1}^{n} b_i\right]^{1/x} .$$

Bukti :

Menurut teorema 3.5, ketaksamaan Hoelder berbentuk

$$\sum_{1}^{n} a_i b_i \leq \left[\sum_{1}^{n} a_i^{1/x}\right]^{x} \left[\sum_{1}^{n} b_i^{1/y}\right]^{y} .$$

Maka

$$\sum_{1}^{n} a_i^x b_i^y \leq \left[\sum_{1}^{n} a_i\right]^{x} \left[\sum_{1}^{n} b_i\right]^{y} .$$

$$\left[\sum_{1}^{n} a_i^x b_i^y\right]^{1/xy} \leq \left[\sum_{1}^{n} a_i\right]^{1/y} \left[\sum_{1}^{n} b_i\right]^{1/x} . \qquad \blacksquare$$

D. KETAKSAMAAN MINKOWSKI

Ketaksamaan ini merupakan suatu bentuk ketaksamaan yang ditemukan oleh *Hermann Minkowski* (1864-1909).

Teorema 3.6 :

Jika $p \geq 1$ dan untuk $a_1, a_2, \ldots, a_n$ dan $b_1, b_2, \ldots, b_n$ bilangan-bilangan real, maka

$$\left[\sum_1^n \left|a_i + b_i\right|^p\right]^{1/p} \leq \left[\sum_1^n \left|a_i\right|^p\right]^{1/p} + \left[\sum_1^n \left|b_i\right|^p\right]^{1/p}.$$

Kesamaan dipenuhi jika dan hanya jika $b_i = 0$ atau

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n}$$

Bukti :

Untuk $p=1$, ketaksamaan jelas berlaku.

Sekarang akan dibuktikan untuk $p>1$.

$$\left(\left|a_i\right| + \left|b_i\right|\right)^p = \left(\left|a_i\right| + \left|b_i\right|\right)^{p-1}\left|a\right| + \left(\left|a_i\right| + \left|b_i\right|\right)^{p-1}\left|b\right|.$$

Jika a diganti dengan a_i dab b diganti dengan b_i, dan dikenakan operasi penjumlahan untuk i dari 1 sampai n, didapat

$$\sum_1^n \left(\left|a_i\right| + \left|b_i\right|\right)^p = \sum_1^n \left(\left|a_i\right| + \left|b_i\right|\right)^{p-1}\left|a\right| + \sum_1^n \left(\left|a_i\right| + \left|b_i\right|\right)^{p-1}\left|b\right|.$$

Dengan mengambil $q = \frac{p}{p-1}$, maka berlaku

$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{p-1}{p} = 1$. Dan dengan diketahui $p>1$, $q>1$, maka menurut teorema 3.5, diperoleh

$$\sum_1^n |a_i| \left(|a_i + b_i| \right)^{p-1} \le \left[\sum_1^n |a_i|^p \right]^{1/p} \left[\sum_1^n \left(|a_i| + |b_i| \right)^p \right]^{1/q}$$

dan

$$\sum_1^n |b_i| \left(|a_i + b_i| \right)^{p-1} \le \left[\sum_1^n |b_i|^p \right]^{1/p} \left[\sum_1^n \left(|a_i| + |b_i| \right)^p \right]^{1/q} .$$

Setelah diadakan penjumlahan diperoleh

$$\sum_1^n \left(|a_i| + |b_i| \right)^p \le \left[\sum_1^n \left(|a_i| + |b_i| \right)^p \right]^{1/q} \left[\left[\sum_1^n |a_i|^p \right]^{1/p} + \left[\sum_1^n |b_i|^p \right]^{1/p} \right] .$$

Selanjutnya kedua ruas dibagi dengan

$\left[\sum_1^n \left(|a_i| + |b_i| \right)^p \right]^{1/q}$, dan mengingat $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, maka

diperoleh

$$\left[\sum_1^n |a_i + b_i|^p \right]^{1/p} \le \left[\sum_1^n |a_i|^p \right]^{1/p} + \left[\sum_1^n |b_i|^p \right]^{1/p} .$$

Setelah kita membuktikan bentuk ketaksamaannya, sekarang akan ditinjau kapan kesamaan akan dipenuhi. Menurut teorema 3.6, bentuk

$$\sum_{1}^{n} |a_i| \left(|a_i + b_i| \right)^{p-1} \leq \left[\sum_{1}^{n} |a_i|^p \right]^{1/p} \left[\sum_{1}^{n} \left(|a_i| + |b_i| \right)^p \right]^{1/q}$$

dan

$$\sum_{1}^{n} |b_i| \left(|a_i + b_i| \right)^{p-1} \leq \left[\sum_{1}^{n} |b_i|^p \right]^{1/p} \left[\sum_{1}^{n} \left(|a_i| + |b_i| \right)^p \right]^{1/q}$$

kesamaannya akan dipenuhi jika

1). $\dfrac{|a_i|}{\left(|a_i + b_i| \right)^{p-1}} = \alpha$, dan

2). $\dfrac{|b_i|}{\left(|a_i + b_i| \right)^{p-1}} = \beta$.

Dari 1) dan 2) didapat

$$\frac{|a_i|}{\beta |b_i|} = \alpha \Leftrightarrow \frac{|a_i|}{|b_i|} = \alpha\beta = \lambda.$$

Jadi kesamaan dipenuhi jika dan hanya jika $\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = \ldots = \dfrac{a_n}{b_n}$. ∎

Contoh 3.D.1:(Modulus suatu matriks)

Diandaikan A dan B matriks bujursangkar berordo n dengan elemen a_{ij} dan b_{ij}, dan elemen tersebut mungkin merupakan bilangan kompleks. Matriks A+B didefinisikan sebagai $a_{ij}+b_{ij}$. Nilai real non-negatif dinamakan modulus matriks A, ditulis $|A|$. Jika $|A| = \left\{\sum |a_{ij}|^2\right\}^{1/2}$, maka akan dibuktikan bahwa $|A+B| \leq |A| + |B|$, jadi modulus ini memenuhi ketaksamaan segitiga.

<u>Bukti</u> :

$|A| = \left\{\sum |a_{ij}|^2\right\}^{1/2}$ dan

$|B| = \left\{\sum |b_{ij}|^2\right\}^{1/2}$,

maka $|A+B| = \left\{\sum |a_{ij}+b_{ij}|^2\right\}^{1/2}$.

Menurut teorema 3.6, maka

$$\begin{aligned} |A+B| &= \left\{\sum |a_{ij}+b_{ij}|^2\right\}^{1/2} \\ &\leq \left\{\sum |a_{ij}|^2\right\}^{1/2} + \left\{\sum |b_{ij}|^2\right\}^{1/2} \\ &= |A| + |B|. \end{aligned}$$

Jadi $|A+B| \leq |A| + |B|$. ∎

E. KETAKSAMAAN DERET TAK HINGGA DAN KETAKSAMAAN INTEGRAL

Pada tiga subbab sebelumnya telah dibahas tentang tiga bentuk ketaksamaan berhingga, yaitu ketaksamaan Cauchy, ketaksamaan Hoelder, dan ketaksamaan Minkowski. Dari ketiga bentuk ketaksamaan diatas, masing-masing dapat dikembangkan menjadi ketaksamaan deret tak hingga dan ketaksamaan integral.

1. Ketaksamaan Deret Tak Hingga

Teorema 3.7 :(Ketaksamaan Cauchy)

Jika a_i dan b_i, $i=1,2,...$ bilangan-bilangan real, maka berlaku ketaksamaan

$$\left(\sum_{1}^{\infty} a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{1}^{\infty} a_i^2\right)\left(\sum_{1}^{\infty} b_i^2\right),$$

dimana $\left(\sum_{1}^{\infty} a_i^2\right)$ dan $\left(\sum_{1}^{\infty} b_i^2\right)$ konvergen.

Bukti :

Misalkan $\sum_{1}^{\infty} a_i^2 = A$ dan $\sum_{1}^{\infty} b_i^2 = B$, maka $\forall n$, $\sum_{1}^{\infty} a_i^2 \leq A$ dan $\sum_{1}^{\infty} b_i^2 \leq B$.

Menurut teorema 3.4., $\forall n \in \mathbb{N}$ berlaku

$$\left[\sum_{1}^{n} a_i b_i\right]^2 \leq \left[\sum_{1}^{n} a_i^2\right]\left[\sum_{1}^{n} b_i^2\right].$$

$$\forall n \in \mathbb{N} : \left|\sum_{1}^{n} a_i b_i\right|^2 \leq \left[\sum_{1}^{n} |a_i||b_i|\right]^2 \leq \left[\sum_{1}^{n}|a_i|^2\right]\left[\sum_{1}^{n}|b_i|^2\right]$$

$$= \sum_{1}^{n} a_i^2 \sum_{1}^{n} b_i^2.$$

Jadi $\left|\sum_{1}^{n} a_i b_i\right|^2 \leq \sum_{1}^{n} a_i^2 \sum_{1}^{n} b_i^2 \leq AB$

Andaikan diambil $S_n = \left[\sum_{1}^{n} |a_i||b_i|\right]^2$,

maka $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n \leq AB$, dan karena $\langle S_n \rangle$ barisan monoton naik dan terbatas ke atas, maka limit S_n untuk

$n \longrightarrow \infty$ ada dan $\left(\sum_{1}^{\infty} |a_i||b_i|\right)^2 \leq AB.$

Karena $\left(\sum_{1}^{\infty} |a_i||b_i|\right)^2$ konvergen, maka $\left(\sum_{1}^{\infty} a_i b_i\right)^2$ konvergen.

Jadi

$$\left(\sum_{1}^{\infty} a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{1}^{\infty} a_i^2\right)\left(\sum_{1}^{\infty} b_i^2\right). \qquad \blacksquare$$

Teorema 3.8 :(Ketaksamaan Hoelder)

Jika x dan y positif, x+y=1 dan bilangan-bilangan a_i dan b_i, i=1,2,... adalah bilangan real tak negatif, maka

$$\sum_{1}^{\infty} a_i b_i \leq \left(\sum_{1}^{\infty} a_i^{1/x}\right)^x \left(\sum_{1}^{\infty} b_i^{1/y}\right)^y ,$$

dimana $\left(\sum_{1}^{\infty} a_i^{1/x}\right)^x$ dan $\left(\sum_{1}^{\infty} b_i^{1/y}\right)^y$ konvergen.

Bukti :

Misalkan $\left(\sum_{1}^{\infty} a_i^{1/x}\right)^x = A$ dan $\left(\sum_{1}^{\infty} b_i^{1/y}\right)^y = B$, maka

$\forall n$, $\left(\sum_{1}^{\infty} a_i^{1/x}\right)^x \le A$ dan $\left(\sum_{1}^{\infty} b_i^{1/y}\right)^y \le B$.

Menurut teorema 3.5 , $\forall n \in \mathbb{N}$ berlaku

$$\sum_{1}^{n} a_i b_i \le \left(\sum_{1}^{n} a_i^{1/x}\right)^x \left(\sum_{1}^{n} b_i^{1/y}\right)^y .$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \; : \; \left|\sum_{1}^{n} a_i b_i\right| \le \sum_{1}^{n} |a_i|\,|b_i| \le \left(\sum_{1}^{n} |a_i|^{1/x}\right)^x \left(\sum_{1}^{n} |b_i|^{1/y}\right)^y$$

$$= \left(\sum_{1}^{n} a_i^{1/x}\right)^x \left(\sum_{1}^{n} b_i^{1/y}\right)^y \le AB.$$

Andaikan diambil $T_n = \sum_{1}^{n} |a_i||b_i|$,

maka $\forall n \in \mathbb{N}$, $T_n \leq AB$, dan karena $\langle T_n \rangle$ barisan monoton naik dan terbatas ke atas, maka limit T_n untuk $n \longrightarrow \infty$ ada dan $\left(\sum_{1}^{\infty} |a_i||b_i| \right) \leq AB$.

Karena $\left(\sum_{1}^{\infty} |a_i||b_i| \right)$ konvergen, maka $\sum_{1}^{\infty} a_i b_i$ konvergen.

Jadi

$$\sum_{1}^{\infty} a_i b_i \leq \left(\sum_{1}^{\infty} a_i^{1/x} \right)^{x} \left(\sum_{1}^{\infty} b_i^{1/y} \right)^{y} . \qquad \blacksquare$$

Teorema 3.9 :(Ketaksamaan Minkowski)

Jika $p \geq 1$ dan untuk a_i dan b_i, $i=1,2,...$ bilangan-bilangan real, maka

$$\left(\sum_{1}^{\infty} |a_i + b_i|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{1}^{\infty} |a_i|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{1}^{\infty} |b_i|^p \right)^{1/p},$$

dimana $\left[\sum_{1}^{\infty} |a_i|^p\right]^{1/p}$ dan $\left[\sum_{1}^{\infty} |b_i|^p\right]^{1/p}$ konvergen.

Bukti :

Misalkan $\left[\sum_{1}^{\infty} |a_i|^p\right]^{1/p} = A$ dan $\left[\sum_{1}^{\infty} |b_i|^p\right]^{1/p} = B$, maka

$\forall n$, $\left[\sum_{1}^{\infty} |a_i|^p\right]^{1/p} \leq A$ dan $\left[\sum_{1}^{\infty} |b_i|^p\right]^{1/p} \leq B$.

Menurut teorema 3.6., $\forall n \in \mathbb{N}$ berlaku

$$\left[\sum_{1}^{n} |a_i+b_i|^p\right]^{1/p} \leq \left[\sum_{1}^{n} |a_i|^p\right]^{1/p} + \left[\sum_{1}^{n} |b_i|^p\right]^{1/p}.$$

$$\leq A+B.$$

Andaiakn diambil $U_n = \left[\sum_{1}^{n} |a_i+b_i|^p\right]^{1/p}$,

maka $U_n \leq A+B$, $\forall n \in \mathbb{N}$, dan karena $\langle U_n \rangle$ barisan monoton naik dan terbatas ke atas, maka limit U_n untuk $n \longrightarrow \infty$ ada dan $\left[\sum_{1}^{\infty} |a_i+b_i|^p\right]^{1/p} \leq A+B$.

Jadi

$$\left[\sum_{1}^{\infty} \left|a_i+b_i\right|^p\right]^{1/p} \le \left[\sum_{1}^{\infty} \left|a_i\right|^p\right]^{1/p} + \left[\sum_{1}^{\infty} \left|b_i\right|^p\right]^{1/p}. \qquad \blacksquare$$

2. Ketaksamaan Integral

Teorema 3.10 :(Ketaksamaan Cauchy)

Jika f dan g fungsi kontinu dan terintegral pada interval [a,b], maka

$$(10)\ \left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| \le \left[\int_a^b f^2(x)dx\right]^{1/2}\left[\int_a^b g^2(x)dx\right]^{1/2}.$$

Kesamaan dipenuhi jika dan hanya jika $\frac{f(x)}{g(x)} = \lambda$.

Bukti :

Jelas bahwa untuk setiap bilangan real y,

$$F(y) \equiv \int_a^b [yf(x)+g(x)]^2\ dx \ge 0.$$

Jika $\int_a^b f^2(x)dx \equiv 0$, maka $f \equiv 0$, dan (10) dipenuhi.

Disisi lain,

$$F(y) = \int_a^b [yf(x)+g(x)]^2\ dx$$

$$= \int_a^b [y^2 f^2(x)+2y\int_a^b f(x)g(x)+\int_a^b g^2(x)]\ dx.$$

Jika $y = \dfrac{-\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b f^2(x)dx}$,

maka

$$F(y) = \frac{-\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b f^2(x)dx} \int_a^b f(x)dx -$$

$$2\frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b f^2(x)dx} \int_a^b f(x)g(x)dx + \int_a^b g^2(x)]\ dx.$$

Misalkan $\int_a^b f(x)g(x)dx = A.$

$\int_a^b f^2(x)\ dx = B > 0.$

$\int_a^b g^2(x)]\ dx = C \geq 0.$

Maka

$$F(y) = \frac{A^2}{B^2} B - 2\frac{A}{B} A + C$$

$$= \frac{A^2 - 2A^2 + BC}{B}$$

$$= \frac{-A^2 + BC}{B} \geq 0.$$

Karena $\frac{-A^2+BC}{B} \geq 0$, maka $A^2 \leq BC$.

Jadi

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| \leq \left(\int_a^b f^2(x)dx\right)^{1/2} \left(\int_a^b g^2(x)dx\right)^{1/2}.$$

Kesamaan dipenuhi jika dan hanya jika terdapat $y \in \mathbb{R}$ sehingga

$$F(y) \equiv \int_a^b [yf(x)+g(x)]^2\ dx = 0.$$

$$\Leftrightarrow [yf(x)+g(x)]^2 = 0$$

$\Leftrightarrow$ $yf(x)+g(x) = 0$

$\Leftrightarrow$ $yf(x) = -g(x)$

$\Leftrightarrow$ $\dfrac{f(x)}{g(x)} = -y = \lambda.$ ∎

Teorema 3.11 :(Ketaksamaan Hoelder)

Jika f dan g fungsi kontinu pada [a,b], p>1 dan $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, maka

(11) $\left|\int_a^b f(t)g(t)dt\right| \leq \int_a^b |f(t)g(t)|dt$

$$\leq \left[\int_a^b |f(t)|^p dt\right]^{1/p} \left[\int_a^b |g(t)|^q dt\right]^{1/q}.$$

Kesamaan dipenuhi jika dan hanya jika salah satu dari f dan g identik dengan nol atau f.g tidak berubah tanda pada [a,b] dan ada bilangan konstan positif α dan β dimana $\beta|f|^p \equiv \alpha|g|^q$ pada [a,b].

Bukti :

Jika f dan g identik dengan nol, maka (11) dipenuhi.

Jika tidak satupun f dan g identik dengan nol, diambil $x=\frac{1}{p}$ dan $y=\frac{1}{q}$,

$$A = \frac{|f(t)|^p}{\int_a^b |f(t)|^p} \quad \text{dan} \quad B = \frac{|g(t)|^q}{\int_a^b |g(t)|^q}$$

dalam hubungan (9) $A^x B^y \leq xA + yB$, diperoleh

$$\left[\frac{|f(t)|^p}{{}_a\int^b |f(t)|^p}\right]^{1/p}\left[\frac{|g(t)|^q}{{}_a\int^b |g(t)|^q}\right]^{1/p} \leq$$

$$\frac{1}{p}\left[\frac{|f(t)|^p}{{}_a\int^b |f(t)|^p}\right] + \frac{1}{q}\left[\frac{|g(t)|^q}{{}_a\int^b |g(t)|^q}\right]$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{|f(t)|}{\left[{}_a\int^b |f(t)|^p dt\right]^{1/p}}\right]\left[\frac{|g(t)|}{\left[{}_a\int^b |g(t)|^q dt\right]^{1/q}}\right] \leq$$

$$\frac{1}{p}\left[\frac{|f(t)|^p}{{}_a\int^b |f(t)|^p}\right] + \frac{1}{q}\left[\frac{|g(t)|^q}{{}_a\int^b |g(t)|^q}\right].$$

Kedua ruas diintegralkan dari a ke b, maka

$$\frac{{}_a\int^b |f(t)g(t)|dt}{\left[{}_a\int^b |f(t)|^p dt\right]^{1/p}\left[{}_a\int^b |g(t)|^q dt\right]^{1/q}} \leq$$

$$\frac{1}{p}\left[\frac{{}_a\int^b |f(t)|^p}{{}_a\int^b |f(t)|^p}\right] + \frac{1}{q}\left[\frac{{}_a\int^b |g(t)|^q}{{}_a\int^b |g(t)|^q}\right]$$

$$\leq \frac{1}{p}.1 + \frac{1}{q}.1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

$$\frac{{}_a\int^b |f(t)g(t)|dt}{\left[{}_a\int^b |f(t)|^p dt\right]^{1/p}\left[{}_a\int^b |g(t)|^q dt\right]^{1/q}} \leq 1.$$

Jadi

$$\int_a^b |f(t)g(t)|dt \le \left[\int_a^b |f(t)|^p dt\right]^{1/p} \left[\int_a^b |g(t)|^q dt\right]^{1/q}.$$

Kesamaan dipenuhi jika dan hanya jika salah satu f dan g identik dengan nol atau f.g tidak berubah tanda dan ada bilangan konstan positif sehingga

$$\frac{A}{B} = \frac{|f(t)|^p}{\int_a^b |f(t)|^p} \cdot \frac{\int_a^b |g(t)|^q dt}{|g(t)|^q} = \lambda$$

$$\frac{|f(t)|^p}{|g(t)|^q} = \lambda \frac{\int_a^b |f(t)|^p dt}{\int_a^b |g(t)|^q dt} = \frac{\alpha}{\beta}$$

Jadi $\dfrac{|f(t)|^p}{|g(t)|^q} = \dfrac{\alpha}{\beta} \Leftrightarrow \beta|f(t)|^p \equiv \alpha|g(t)|^q.$ ∎

Teorema 3.12 :(Ketaksamaan Minkowski)

Jika f dan g fungsi kontinu pada [a,b] dan $p \ge 1$, maka

$$\left[\int_a^b |f(t)+g(t)|^p dt\right]^{1/p} \le \left[\int_a^b |f(t)|^p dt\right]^{1/p} + \left[\int_a^b |g(t)|^p dt\right]^{1/p}.$$

Kesamaan dipenuhi jika dan hanya jika

$\alpha|f(t)|^p \equiv \gamma|g(t)|^p$.

Bukti :

Jika p=1, maka ketaksamaan jelas berlaku.

Akan dibuktikan untuk p>1.

$$\int_a^b |f(t)+g(t)|^p dt =$$

$$\int_a^b \left[|f(t)+g(t)|^{p-1}|f(t)| + |f(t)+g(t)|^{p-1}|g(t)| \right] dt =$$

$$\left[\int_a^b |f(t)+g(t)|^{p-1}|f(t)|dt \right] + \left[\int_a^b |f(t)+g(t)|^{p-1}|f(t)| \right.$$

Dengan mengambil $q=\frac{p}{p-1}$, maka $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{p-1}{p} = 1$, dan

menurut teorema 3.11,

$$\int_a^b |f(t)||f(t)+g(t)|^{p-1}dt \le \left[\int_a^b |f(t)|^p dt \right]^{1/p} + \left[\int_a^b |f(t)+g(t)|^p dt \right]^{1/q}$$

dan

$$\int_a^b |g(t)||f(t)+g(t)|^{p-1}dt \le \left[\int_a^b |g(t)|^p dt \right]^{1/p} + \left[\int_a^b |f(t)+g(t)|^p dt \right]^{1/q}.$$

Setelah diadakan penjumlahan, diperoleh

$$\int_a^b |f(t)+g(t)|^p dt \le \left[\int_a^b |f(t)+g(t)|^p dt \right]^{1/q} \left[\left[\int_a^b |f(t)|^p dt \right]^{1/p} + \left[\int_a^b |g(t)|^p dt \right]^{1/p} \right].$$

Kedua ruas dibagi dengan $\left[\int_a^b |f(t)+g(t)|^p dt \right]^{1/q}$,

maka diperoleh

$$\frac{\int_a^b |f(t)+g(t)|^p dt}{\left[\int_a^b |f(t)+g(t)|^p dt\right]^{1/q}} \le$$

$$\left[\int_a^b |f(t)|^p dt\right]^{1/p} + \left[\int_a^b |g(t)|^p dt\right]^{1/p}.$$

Dengan mengingat $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, maka

$$\left[\int_a^b |f(t)+g(t)|^p dt\right]^{1/p} \le \left[\int_a^b |f(t)|^p dt\right]^{1/p} + \left[\int_a^b |g(t)|^p dt\right]^{1/p}.$$

Selanjutnya akan kita cari dimana kesamaan akan dipenuhi.

Menurut teorema 3.11, bentuk

$$\int_a^b |f(t)||f(t)+g(t)|^{p-1} dt \le \left[\int_a^b |f(t)|^p dt\right]^{1/p} + \left[\int_a^b |f(t)+g(t)|^p dt\right]^{1/q}$$

dan

$$\int_a^b |g(t)||f(t)+g(t)|^{p-1} dt \le \left[\int_a^b |g(t)|^p dt\right]^{1/p} + \left[\int_a^b |f(t)+g(t)|^p dt\right]^{1/q}$$

akan dipenuhi kesamaannya jika

1). $\alpha|f(t)|^p \equiv \beta|f(t)+g(t)|^p$, dan

2). $\gamma|g(t)|^p \equiv \beta|f(t)+g(t)|^p$.

Dari 1) dan 2) diperoleh

$$\alpha|f(t)|^p \equiv \gamma|g(t)|^p.$$

Jadi kesamaan dipenuhi jika dan hanya jika

$\alpha|f(t)|^p \equiv \gamma|g(t)|^p$.

F. PENGGUNAAN KETAKSAMAAN DALAM TEORI RUANG METRIK

Seperti telah dikemukakan pada bab I, bahwa ketaksamaan sangat berperan dalam matematika karena ketaksamaan timbul hampir disetiap cabang matematika. Dan pada skripsi ini akan sedikit dibahas ketaksamaan yang digunakan pada pembahasan teori ruang metrik.

Definisi 3.3 :

Diberikan himpunan $X \neq \phi$, dimana setiap elemennya disebut titik. Dibentuk fungsi $d: X \times X \to \mathbb{R}$ sehingga $d(x,y)$ yang didefinisikan untuk semua $x,y,z \in X$ memenuhi

1. $d(x,y) \geq 0$,
2. $d(x,y) = 0$ jika dan hanya jika $x=y$,
3. simetri : $d(x,y) = d(y,x)$,

4. Ketaksamaan segitiga : $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$.

Fungsi $d(x,y)$ yang dibentuk merupakan fungsi jarak dari titik x ke titik y. Dan ruang metrik dengan himpunan X dan jarak d biasanya dinyatakan sebagai pasangan (X,d). Jadi X merupakan suatu himpunan yang dilengkapi dengan jarak d.

Pada himpunan kita mengenal yang disebut dengan subhimpunan. Dan dalam ruang metrik ini kita juga mengenal adanya subruang metrik. Jika (X,d) adalah ruang metrik dan M adalah subhimpunan dar X, maka (M,d) juga merupakan ruang metrik dan disebut subruang metrik (X,d).

Dalam pembahasan ruang metrik, kita sebenarnya akan mencari suatu fungsi d yang dapat memenuhi keempat sifat yang telah disebutkan diatas pada suatu himpunan X yang diberikan. Dan ketaksamaan yang telah dibahas di muka sangat bermanfaat untuk menunjukkan fungsi jarak yang telah didefinisikan memenuhi sifat ketaksamaan segitiga.

Penggunaan ketaksamaan dalam ruang metrik tersebut dapat kita lihat pada contoh-contoh dibawah ini.

Contoh 3.F.1:

Himpunan semua kelompok n bilangan terurut (n-tuple)

$$X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

dari bilangan real $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dengan jarak

$$(12)\quad d(x,y) = \left[\sum_1^n (x_k - y_k)^2\right]^{1/2}$$

adalah ruang metrik yang dinotasikan dengan R^n dan disebut "ruang Euclides dimensi n". Jarak (12) jelas memenuhi sifat 1,2, dan 3 pada definisi. Selain itu, mudah memperlihatkan (12) memenuhi sifat keempat, yaitu ketaksamaan segitiga.

Jika diberikan

$X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, dan

$Z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ adalah tiga titik dalam R^n, dan

$a_k = x_k - z_k$, $b_k = z_k - y_k$, $(k=1,2,\ldots,n)$.

Akan dibuktikan

$$\left[\sum_1^n (x_k - y_k)^2\right]^{1/2} \le \left[\sum_1^n (x_k - z_k)^2\right]^{1/2} + \left[\sum_1^n (z_k - y_k)^2\right]^{1/2}$$

ekuivalen dengan

$$\left[\sum_{1}^{n}(a_k+b_k)^2\right]^{1/2} \le \left[\sum_{1}^{n}a_k^2\right]^{1/2} + \left[\sum_{1}^{n}b_k^2\right]^{1/2} .$$

Menurut ketaksamaan Cauchy

$$\left[\sum_{1}^{n}(a_kb_k)^2\right] \le \left[\sum_{1}^{n}a_k^2\right]\left[\sum_{1}^{n}b_k^2\right] .$$

Jika kita bentuk $\sum_{1}^{n}(a_k+b_k)^2$, maka

$$\begin{aligned}
\sum_{1}^{n}(a_k+b_k)^2 &= \sum_{1}^{n}(a_k^2+2a_kb_k+b_k^2) \\
&= \sum_{1}^{n}a_k^2 + 2\sum_{1}^{n}a_kb_k + \sum_{1}^{n}b_k^2 \\
&\le \sum_{1}^{n}a_k^2 + \sum_{1}^{n}b_k^2 + 2\left[\sum_{1}^{n}a_k^2\sum_{1}^{n}b_k^2\right]^{1/2} \\
&= \left[\left[\sum_{1}^{n}a_k^2\right]^{1/2} + \left[\sum_{1}^{n}b_k^2\right]^{1/2}\right]^2 .
\end{aligned}$$

Jadi, jika kedua ruas ditarik akarnya, didapat

$$\left[\sum_{1}^{n}(a_k-b_k)^2\right]^{1/2} \le \left[\sum_{1}^{n}a_k^2\right]^{1/2} + \left[\sum_{1}^{n}b_k^2\right]^{1/2} . \qquad \blacksquare$$

Contoh 3.F.2 :

Himpunan semua kelompok n bilangan terurut (n-tuple)

$$X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

dari bilangan real $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dengan jarak

$$d_p(x,y) = \left[\sum_{1}^{n} |x_k - y_k|^p\right]^{1/p}, \text{ dimama } p \geq 1,$$

merupakan ruang metrik yang dinotasikan dengan R_p^n. Sifat pertama, kedua, dan ketiga jelas dipenuhi untuk fungsi jarak yang didefinisikan. Sedangkan sifat ketaksamaan segitiga juga dipenuhi karena jika kita membentuk $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ akan sama dengan ketaksamaan Minkowski yang telah kita bahas pada teorema 3.6.

Contoh 3.F.3 :

Diberikan $C_{[a,b]}$ dari semua fungsi kontinu yang didefinisikan pada interval tertutup [a,b] dengan jarak

$$d(x,y) = \left[\int_a^b [x(t) - y(t)]^2 dt\right]^{1/2}.$$

Sifat 1,2, dan 3 jelas dipenuhi oleh fungsi jarak di atas. Dan bukti bahwa jarak d(x,y) memenuhi sifat ketaksamaan segitiga dapat dikerjakan berdasarkan ketaksamaan integral Cauchy

$$\left[\int_a^b x(t)y(t)dt\right]^2 \le \int_a^b x^2(t)dt \int_a^b y^2(t)dt.$$

Andaikan $f(t)=x(t)-z(t)$ dan $g(t)=z(t)-y(t)$, akan dibuktikan

$$\left[\int_a^b [f(t)+g(t)]^2 dt\right]^{1/2} \le \left[\int_a^b f^2(t)dt\right]^{1/2} + \left[\int_a^b g^2(t)dt\right]^{1/2}.$$

Jika kita bentuk $\int_a^b [f(t)+g(t)]^2 dt$, maka

$$\begin{aligned}
\int_a^b [f(t)+g(t)]^2 dt &= \int_a^b [f^2(t)+2f(t)g(t)+g^2(t)]\,dt \\
&= \int_a^b f^2(t)dt + \int_a^b g^2(t)dt + 2\int_a^b f(t)g(t)dt \\
&\le \int_a^b f^2(t)dt + \int_a^b g^2(t)dt + 2\left[\int_a^b f^2(t)dt\right]^{1/2}\left[\int_a^b g^2(t)dt\right]^{1/2} \\
&= \left[\left[\int_a^b f^2(t)dt\right]^{1/2} + \left[\int_a^b g^2(t)dt\right]^{1/2}\right]^2.
\end{aligned}$$

Jika kedua ruas ditarik akarnya, didapat

$$\left[\int_a^b [f(t)+g(t)]^2 dt\right]^{1/2} \le \left[\int_a^b f^2(t)dt\right]^{1/2} + \left[\int_a^b g^2(t)dt\right]^{1/2}. \blacksquare$$

Contoh 3.F.4 :

Misalkan l_2 adalah himpunan semua barisan takhingga

$$X = \langle x_n \rangle$$

dari bilangan real yang memenuhi syarat $\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 < \infty$

dimana jarak antara 2 titik didefinisikan

$$(13)\quad d(x,y) = \left[\sum_{1}^{\infty}(x_k-y_k)^2\right]^{1/2}.$$

Sebelum kita membuktikan bahwa (13) merupakan ruang metrik, akan diperlihatkan dahulu bahwa $\sum_{1}^{\infty}(x_k-y_k)^2<\infty$.

Persamaan (13) berlaku untuk setiap $x,y \in l_2$, dan kita tahu bahwa berlaku suatu ketaksamaan

$$(x_k \pm y_k)^2 \leq 2(x^2+y^2).$$

Jika $\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 < \infty$ dan $\sum_{k=1}^{\infty} y_k^2 < \infty$, maka akan mengakibatkan $\sum_{1}^{\infty}(x_k-y_k)^2<\infty$.

Dalam hal ini, kita mendapatkan bahwa jika titik-titik $\langle x_n \rangle$ dan $\langle y_n \rangle$ keduanya dalam l_2, maka $\langle x_n+y_n \rangle$ juga merupakan suatu titik.

Dan sekarang akan diperlihatkan bahwa l_2 merupakan suatu ruang metrik.

Jelas bahwa (13) memenuhi sifat 1, 2, dan 3 pada definisi. Dan akan dibuktikan bahwa jarak yang didefinisikan memenuhi sifat ketaksamaan segitiga.

Akan dibuktikan

$$(14) \quad \left[\sum_{1}^{\infty}(x_k-y_k)^2\right]^{1/2} \leq \left[\sum_{1}^{\infty}(x_k-z_k)^2\right]^{1/2} + \left[\sum_{1}^{\infty}(z_k-y_k)^2\right]^{1/2} .$$

Andaikan $a_k=x_k-z_k$ dan $b_k=z_k-y_k$, maka (14) ekuivalen dengan

$$\left[\sum_{1}^{\infty}(a_k-b_k)^2\right]^{1/2} \leq \left[\sum_{1}^{\infty}a_k^2\right]^{1/2} + \left[\sum_{1}^{\infty}b_k^2\right]^{1/2} .$$

Pada contoh 3.F.1 telah diperlihatkan ketaksamaan segitiga untuk setiap n berhingga. Dengan mengambil $n \longrightarrow \infty$, maka diperoleh

$$\left[\sum_{1}^{\infty}(x_k-y_k)^2\right]^{1/2} \leq \left[\sum_{1}^{\infty}(x_k-z_k)^2\right]^{1/2} + \left[\sum_{1}^{\infty}(z_k-y_k)^2\right]^{1/2} .$$

Jadi l_2 merupakan ruang metrik ∎

Contoh 3.F.5 :

Diberikan l_p himpunan dari semua barisan takhingga

$$X = \langle x_n \rangle$$

dari bilangan real yang memenuhi syarat $\sum_{k=1}^{\infty} x_k^p < \infty$ untuk bilangan $p \geq 1$, dimana jarak antara 2 titik didefinisikan

$$(15) \qquad d(x,y) = \left[\sum_{1}^{\infty} |x_k - y_k|^p \right]^{1/p} .$$

Sifat 1,2, dan 3 jelas dipenuhi oleh fungsi jarak yang didefinisikan. Dan terakhir akan dibuktikan bahwa fungsi jarak tersebut memenuhi sifat ketaksamaan segitiga.

Menurut ketaksamaan Minkowski, maka

$$\left[\sum_{1}^{n} |x_k - y_k|^p \right]^{1/p} \leq \left[\sum_{1}^{n} |x_k|^p \right]^{1/p} + \left[\sum_{1}^{n} |y_k|^p \right]^{1/p} , \ \forall n \in \mathbb{N} .$$

Jika $\left[\sum_{1}^{\infty} |x_k|^p \right]^{1/p}$, $\left[\sum_{1}^{\infty} |y_k|^p \right]^{1/p}$ konvergen, kita dapat mengambil limit $n \longrightarrow \infty$, maka

$$(16)\quad \left[\sum_{1}^{\infty}|x_k-y_k|^p\right]^{1/p} \le \left[\sum_{1}^{\infty}|x_k|^p\right]^{1/p} + \left[\sum_{1}^{\infty}|y_k|^p\right]^{1/p} < \infty.$$

Pada contoh 3.F.2, fungsi jarak yang didefinisikan di sana memenuhi ketaksamaan segitiga untuk n berhingga. Dan karena telah diperlihatkan bahwa ketaksamaan Minkowski juga berlaku untuk n takhingga, maka (15) juga memenuhi ketaksamaan segitiga. Jadi l_p merupakan ruang metrik. ∎

BAB IV

PENUTUP

Ketaksamaan yang telah dibahas pada skripsi ini merupakan bentuk ketaksamaan yang lebih banyak digunakan dibandingkan dengan bentuk-bentuk ketaksamaan yang lain.

Pada pembahasan benda-benda geometri, ketaksamaan yang berkaitan dengan rata-rata aritmetika dan geometri lebih banyak digunakan. Misalkan pada suatu bidang datar yang diberikan, dapat dicari luas maksimum dan luas minimum dari bidang datar tersebut. Juga digunakan untuk mencari volume terbesar dan terkecil dari suatu benda ruang yang diberikan. Tetapi sebenarnya penggunaan dari ketaksamaan rata-rata aritmetika dan geometri tidak hanya sebatas pada bidang-bidang geometri saja. Terkadang akan ditemukan pula penggunaannya pada pembahasan deret. Selain pada ketaksmaan rata-rata aritmetika dan geometri, pembahasan deret juga ditemukan pada penggunaan ketaksamaan yang lain.

Sedangkan pada pembahasan ruang metrik lebih banyak menggunakan ketaksamaan Cauchy, ketaksamaan Hoelder, dan ketaksamaan Minkowski, baik untuk ketaksamaan berhingga, ketaksamaan takhingga, maupun ketaksamaan integral.

Khususnya dalam pembicaraan tentang ruang metrik, seperti yang telah dikatakan di muka, ketaksamaan sangat bermanfaat untuk menunjukkan bahwa fungsi jarak yang telah didefinisikan memenuhi sifat ketaksamaan segitiga.

Pada contoh 3.D.1 diperkenalkan pengertian modulus matriks bujursangkar berordo n. Di sini ditunjukkan bahwa modulus suatu matriks memenuhi ketaksamaan segitiga.

Bentuk ketaksamaan yang telah diuraikan di muka merupakan bentuk ketaksamaan yang mendasar. Ketaksamaan-ketaksamaan tersebut juga digunakan untuk mempelajari dan menelaah masalah ketaksamaan yang lebih lanjut, serta dapat dijadikan sebagai daar pemahaman konsep-konsep dan topik-topik matematika lanjut.

DAFTAR PUSTAKA

Archbold, J.W., M.A.(Camb). (1970). *Algebra.* The English Language Book Society and Pitman Publishing.

Hardy,G.H., Littlewood, J.E., & Polya, G. (1959). *Inequalities.* London : Cambridge University Press.

Kazarinof, Nicholas.D. (1964). *Analytic Inequalities* New York : Hott, Rineheart and Winston.

Kolmogorov, A.N. & Fomin, S.V. (1970). *Introductory Real Analysis.* New York: Dover Publication,Inc.

Soemantri, R., Prof. Drs. (1993). *Analisis Real I.* Departemen Pendidikan dan Kebudayaan Universitas Terbuka.

Soemantri,R., Prof. Drs. (1998). *Analisis Real III.* Naskah yang didokumentasikan.