PEMETAAN KONFORMAL

SKRIPSI

Oleh :

CLARA IKA SARI BUDHAYANTI

NIM : S1 / 92 414 052 / PMAT
NIRM : 920052010501120048

PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA
JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
UNIVERSITAS SANATA DHARMA
YOGYAKARTA
1997

PEMETAAN KONFORMAL

SKRIPSI

Diajukan untuk memenuhi salah satu syarat
memperoleh gelar Sarjana Pendidikan
Program Studi Pendidikan Matematika

oleh:

CLARA IKA SARI BUDHAYANTI

NIM : S1 / 92 414 052 / PMAT

NIRM : 920052010501120048

PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA
JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
UNIVERSITAS SANATA DHARMA
YOGYAKARTA

1997

kupersembahkan untuk......
Papi, Ibu,
Mas Iwan,
Dik Nanung, Dik Nining

SKRIPSI

PEMETAAN KONFORMAL

oleh :

CLARA IKA SARI BUDHAYANTI

NIM : S1/92 414 052/PMAT

NIRM : 920052010501120048

Telah disetujui oleh :

Pembimbing

Prof. Drs. R. Soemantri

tanggal : 17-12-1997

SKRIPSI

PEMETAAN KONFORMAL

Yang dipersiapkan dan disusun oleh :

CLARA IKA SARI BUDHAYANTI

NIM : 92 414 052

NIRM : 920052010501120048

Telah dipertahankan didepan panitia penguji
pada tanggal 28 Oktober 1997
dan dinyatakan telah memenuhi syarat.

SUSUNAN PANITIA

	nama lengkap	tanda tangan
Ketua	: Drs. F. Kartika Budi, M.Pd	
Sekretaris	: Dr. St. Suwarsono	
Anggota	: Prof. Drs. R. Soemantri	
	Drs. A. Tutoyo, M.Sc	
	Prof. Dra. Moeharti. Hw, MA	

Yogyakarta, Desember 1997
Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan
Universitas Sanata Dharma

Dekan FKIP

Dr. Paulus Suparno, S.J.,MST

KATA PENGANTAR

Dengan pujian dan ucapan syukur kepada Allah Bapa dan Tuhan Yesus Kristus, skripsi dengan judul "PEMETAAN KONFORMAL" ini dapat selesai sesuai rencana-Nya, kendati dengan waktu yang cukup lama. Skripsi ini disusun untuk memenuhi salah satu persyaratan untuk mencapai gelar Sarjana Pendidikan pada Program Studi Pendidikan Matematika di Universitas Sanata Dharma Yogyakarta.

Banyak hambatan dan rintangan yang dialami penulis selama proses pembuatan skripsi ini. Tetapi dengan keterlibatan berbagai pihak, akhirnya skripsi ini dapat diselesaikan. Untuk itu pada kesempatan ini, dengan penuh rasa syukur penulis mengucapkan terimakasih atas segala perhatian, dorongan dan dukungan baik secara moril maupun spirituil kepada semua pihak, antara lain :

1. Prof. Drs. R. Soemantri selaku dosen pembimbing yang telah memberikan dorongan dan bimbingan selama proses penyusunan skripsi ini dengan sabar dan bijaksana.
2. Drs.St. Susento, M.Si selaku dosen wali yang telah memberi saran dan membimbing selama pelaksanaan studi.
3. Pihak staf perpustakaan Universitas Sanata Dharma yang telah membantu dalam proses peminjaman buku-buku penunjang.
4. Kedua orang tua dan saudara-saudara terkasih yang te-

lah mendoakan, memahami dan menganjurkan penulis menyelesaikan skripsi ini.

5. Sahabat terkasih Purnawan Wibisana yang telah memberi semangat dan bantuan dalam penulisan skripsi ini.
6. Dan semua pihak yang terlibat langsung maupun tidak langsung dalam proses pembuatan skripsi ini yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu.

Penulis yakin dan percaya bahwa semua kebaikan, bantuan dan pengorbanan yang diberikan untuk menyelesaikan skripsi ini, tidaklah sia-sia dan akan mendapatkan penghargaan yang sepadan dari Tuhan Yamg Maha Kuasa.

Akhirnya seluruh tanggungjawab skripsi ini ada pada penulis. Oleh karena itu penulis mengharapkan saran dan kritik yang membangun dari para pembaca demi perbaikan dan perkembangan selanjutnya.

Yogayakarta, Oktober 1997

Penulis

DAFTAR ISI

ABTRAK

Tulisan ini merupakan penelahaan mengenai sebagian kecil pemetaan konformal. Pemetaan yang juga disebut transformasi dalam teori variabel kompleks, dikatakan konformal jika transformasi itu mempertahankan sudut yang dibuat oleh dua kurva mulus yang berpotongan pada sebuah titik, baik besar maupun arahnya.

Sifat konformal adalah salah satu sifat paling penting dari fungsi analitik, sebab pemetaan oleh fungsi analitik bersifat konformal di suatu titik yang derivatifnya tidak sama dengan nol.

Hasil penting yang mengatakan bahwa pemetaan bersifat konformal jika dan hanya jika pemetaan itu oleh fungsi analitik , dibuktikan dalam tulisan ini.

Pemetaan oleh fungsi elementer dibahas untuk menunjukan sifat-sifat sederhana pemetaan konformal. Transformasi bilinear dibicarakan secara khusus, terutama sifat yang menyatakan bahwa fungsi ini membawa lingkaran ke lingkaran dengan garis lurus di pandang sebagai lingkaran, dan bahwa perbandingan silang invariant terhadap transformasi bilinear. Fungsi $w = z + 1/z$ dan $w = z + e^z$ dipilih sebagai contoh aplikasi pemetaan konformal.

ABSTRACT

This thesis is a study about a part of conformal mappings. A mapping, which is also called a transformation in complex variable theory, is said to be conformal if it preserves the magnitude and the sense of an angle made by two smooth curves intersecting at a point.

Conformal property is one of the most important properties of analitic function, because a mapping by an analitic function is conformal at a point where its derivative is not zero.

The important result, that a mapping is conformal if and only if it given by an analitic function is proved there. Mappings by elementary functions are discussed to show the simple conformal properties. Bilinear transformations are specially discussed, especially their properties that they transform circles onto circles with a straight line considered as a circle, and that cross ratios are invariant with respect to bilinear transformations. The functions $w = z + 1/z$ and $w = z + e^{z}$ are chosen to show the applications of conformal mappings.

BAB I

PENDAHULUAN

Fungsi adalah konsep yang sangat penting dalam matematika. Istilah pemetaan atau transformasi juga digunakan untuk istilah fungsi. Lebih-lebih untuk fungsi variabel kompleks, penggunaan istilah pemetaan atau transformasi lebih sering digunakan daripada istilah fungsi. Sebab hubungan antara daerah definisi suatu fungsi variabel kompleks dengan daerah hasilnya, lebih banyak ditinjau sebagai suatu transformasi dari kedua daerah itu.

Di dalam karya tulis ini, akan dibahas suatu pemetaan khusus di dalam analisis kompleks yaitu PEMETAAN KONFORMAL. Untuk membahas hal ini, sebelumnya akan diuraikan terlebih dahulu beberapa konsep dasar sebagai pendukung pembahasan topik pemetaan konformal ini. Konsep-konsep dasar ini akan diuraikan dalam bab II. Dalam bab II ini, hal-hal yang akan diuraikan adalah konsep himpunan di bidang kompleks, yang memuat konsep dasar dalam topologi di bidang kompleks. Kemudian diuraikan juga mengenai konsep fungsi dan limit. Selanjutnya diuraikan konsep kekontinyuan dan fungsi terdiferensial. Dan yang paling penting adalah konsep mengenai fungsi analitik. Konsep-konsep pendukung dalam bab II ini tidak diuraikan secara mendalam, melainkan hanya dibahas beberapa konsep yang benar-benar diperlukan dalam pembahasan.

Pembahasan yang diuraikan dalam bab III, dimulai dengan definisi pemetaan konformal. Kemudian disusul dengan teorema penting yang mengatakan bahwa suatu pemetaan yang didefinisikan oleh fungsi analitik $f(z)$ bersifat konformal kecuali di titik kritisnya, yang menjadikan $f'(z) = 0$. Selain itu diuraikan juga bahwa suatu pemetaan oleh fungsi $f(z)$ bersifat konformal jika dan hanya jika fungsi $f(z)$ tersebut analitik. Untuk memperjelas hal ini diberikan beberapa contoh transformasi konformal oleh fungsi analitik. Antara lain fungsi-fungsi elementer, dua contoh fungsi berturutan dan dua contoh fungsi khusus. Pada pembahasan fungsi -fungsi elementer, selain membahas sifat konformal fungsi-fungsi itu, juga dibahas beberapa hal penting seperti penyajian geometris dan beberapa teorema penting.

Dua contoh fungsi berturutan dalam karya tulis ini dibahas, karena gagasan bahwa suatu fungsi dapat diperoleh melalui komposisi fungsi-fungsi yang lain, sangat membantu dalam mempelajari fungsi atau pemetaan dari satu daerah ke daerah lain. Namun demikian dalam karya tulis ini hanya diambil dua contoh saja untuk menunjukkan hal itu.

Sedangkan dua contoh fungsi khusus yaitu fungsi $w = z + 1/z$ dan $w = z + e^z$ diuraikan untuk melengkapi keseluruhan karya tulis ini. Fungsi-fungsi tersebut dibicarakan secara khusus mengingat penerapannya, meskipun penerapan itu tidak dibahas dalam tulisan ini.

Karya tulis ini akan diakhiri dengan ikhtisar yang akan diuraikan pada bab IV yaitu bab penutup.

Karena karya tulis ini merupakan tinjauan pustaka dari berbagai buku acuan, maka beberapa bagian di dalamnya mungkin akan memunculkan permasalahan, yang tidak dibahas dalam tulisan ini.

Penulis menyadari bahwa yang disajikan dalam tulisan ini hanya merupakan sebagian kecil dari topik tentang pemetaan konformal dan hanya merupakan kelanjutan dan penerapan dari teori fungsi variabel kompleks yang pernah diperoleh pada mata kuliah analisis kompleks.

BAB II

TEORI PENDUKUNG

2.1 HIMPUNAN DI BIDANG KOMPLEKS

Daerah asal dan daerah hasil suatu fungsi kompleks merupakan suatu himpunan bilangan kompleks. Oleh karena itu dalam mempelajari fungsi kompleks, akan diperlukan pengertian-pengertian dasar dalam topologi di bidang kompleks. Pengertian-pengertian itu akan dinyatakan oleh beberapa definisi berikut.

DEFINISI 2.1.1 : Kitar titik z_o dengan radius r adalah himpunan titik z yang jaraknya dari z_o kurang dari r.

Jika ditulis dalam lambang menjadi :

$$N(z_o, r) = \{z \mid |z - z_o| < r\}$$

DEFINISI 2.1.2 : Suatu himpunan D disebut terbuka jika untuk setiap titik $z_o \in D$ maka ada $r > 0$ sehingga $N(z_o,r)$ merupakan himpunan bagian dari D.

Definisi tersebut akan lebih jelas jika ditulis dalam lambang seperti berikut :

$$D \text{ terbuka} \Leftrightarrow (\ z_o \in D \Rightarrow (\exists r > 0)\ \ N(z_o,r) \subset D\ )$$

DEFINISI 2.1.3 : Titik z_0 disebut titik limit himpunan E jika setiap kitar titik z_0 memuat paling sedikit satu titik z_1 dengan $z_1 \neq z_0$ dan $z_1 \in E$.

DEFINISI 2.1.4 : Titik z_0 disebut titik perbatasan himpunan E jika setiap kitarnya memuat baik titik anggota E maupun titik bukan anggota E.

DEFINISI 2.1.5 : Daerah adalah suatu himpunan terbuka yang tidak kosong atau himpunan ini disertai sebagian atau seluruh titik-titik perbatasannya.

DEFINISI 2.1.6 : Himpunan terbuka E disebut terhubung jika setiap dua titik di dalam E dapat dihubungkan oleh garis patah poligonal yang seluruhnya di dalam E.

DEFINISI 2.1.7 : Domain adalah suatu himpunan tidak kosong yang terbuka dan terhubung.

2.2 FUNGSI DAN LIMIT

Jika diberikan sebarang dua himpunan bilangan kompleks yang tidak kosong A dan B. Maka fungsi f

dari himpunan A ke himpunan B didefinisikan sebagai suatu aturan yang mengawankan secara tunggal setiap elemen z dalam himpunan A dengan tepat satu elemen w di dalam himpunan B. Elemen $w \in B$ yang berkawankan dengan $z \in A$ dinyatakan dengan $w = f(z)$.
Sehingga fungsi ini sering ditulis :

$$w = f(z) \quad , \quad z \in A.$$

Elemen w disebut nilai fungsi f di z atau bayangan z oleh fungsi f. Himpunan A disebut daerah asal yang berupa domain, sedangkan himpunan semua nilai fungsi f dinamakan daerah hasil (range) fungsi f.
Fungsi sering juga disebut pemetaan atau transformasi.

Menurut definisi di atas, fungsi selalu dimaksudkan mempunyai nilai tunggal tetapi dalam fungsi kompleks dikenal juga fungsi bernilai banyak. Misalnya $w = z^{1/4}$, untuk setiap z dalam himpunan yang tidak memuat titik nol. Fungsi ini mempunyai empat nilai. Menurut definisi fungsi diatas, fungsi bernilai banyak bukan suatu fungsi sebab tidak bernilai tunggal. Namun demikian $w = z^{1/4}$ ini terdiri atas empat fungsi yang masing-masing bernilai tunggal, yang disebut cabang dari fungsi yang bernilai empat ini. Dalam teori fungsi kompleks, jika ditemui suatu fungsi bernilai banyak, maka kita hanya bekerja dalam cabangnya saja. Oleh karena itu definisi fungsi diatas tetap digunakan.

Cabang fungsi bernilai banyak didefinisikan sebagai berikut :

DEFINISI 2.2.1 : Cabang F suatu fungsi bernilai banyak f adalah fungsi bernilai tunggal yang analitik dalam suatu domain D dan di setiap titik di dalam domain D, F(z) adalah salah satu dari nilai f(z).

Sedangkan untuk definisi fungsi yang analitik akan diuraikan pada sub bab berikutnya.

DEFINISI 2.2.2 : Diberikan fungsi f dengan domain D dan z_o titik limit D. Suatu bilangan L disebut limit fungsi f untuk z mendekati z_o, ditulis

$$\lim_{z \to z_o} f(z) = L$$

jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ yang diberikan, terdapat $\delta > 0$ sehingga untuk $\forall z \in D$ dan $0 < |z - z_o| < \delta$ berlaku $|f(z) - L| < \varepsilon$.

Atau jika ditulis dalam bentuk lambang, diperoleh :

$\lim_{z \to z_o} f(z) = L \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall z \in D,\ 0<|z - z_o|<\delta$
$\Rightarrow |f(z) - L| < \varepsilon).$

Dalam definisi limit fungsi ini, titik z_o tidak diperhatikan bahkan fungsi f tidak perlu didefinisikan di titik z_o.
Bisa jadi z tidak di dalam domain D ($z \notin D$).
Kalaupun $f(z_o)$ didefinisikan, nilainya tidak perlu sama dengan nilai limit L.

TEOREMA 2.2.1 : Jika $\lim_{z \to z_o} f(z)$ ada, maka limit ini tunggal.

Mengingat teorema di atas, ada kemungkinan bahwa limit suatu fungsi tidak ada.
Untuk membahas hal ini akan diberikan suatu fungsi yang didefinisikan pada suatu kurva.

Jika pada definisi limit fungsi domain D diganti dengan kurva k yang mempunyai titik limit z_o, maka akan diperoleh definisi limit fungsi untuk z mendekati z_o sepanjang kurva k, ditulis

$$\lim_{\substack{z \to z_o \\ z \in k}} f(z)$$

TEOREMA 2.2.2 : Diberikan fungsi f dengan domain D dan z_o suatu titik limit D. Jika $\lim_{z \to z_o} f(z)$ ada dan sama dengan L maka

$$\lim_{\substack{z \to z_o \\ z \in k}} f(z) = L$$

untuk semua kurva $k \subset D$ yang mempunyai titik limit z_o.

Teorema ini akan berakibat bahwa jika dapat dicari dua kurva yang mempunyai titik limit z_o, yang menghasilkan limit yang berlainan untuk $z \to z_o$, maka $\lim_{z \to z_o} f(z)$ tidak ada.

TEOREMA 2.2.3 : 1. Jika $h(z) = c$ dan c suatu konstanta kompleks, maka $\lim_{z \to z_o} h(z) = c$.

2. Jika f dan g fungsi dengan domain yang sama dan $\lim f(z) = L$ dan $\lim g(z) = M$ untuk $z \to z_o$, maka:

   a. $\lim [f(z)+g(z)] = L+M$

   b. $\lim c\, f(z) = cL$

   c. $\lim f(z)\, g(z) = LM$

   d. $\lim 1/f(z) = 1/L$, asal $L \neq 0$

   e. $\lim f(z)/g(z) = L/M$, asal $M \neq 0$.

   dengan semua limit diambil untuk $z \to z_o$.

2.3 KEKONTINYUAN

DEFINISI 2.3.1 : Diberikan fungsi f dengan domain D dan titik $z_o \in D$. Fungsi f dikatakan kontinu di z_o jika nilai limit $f(z)$ untuk $z \to z_o$ sama dengan nilai fungsi $f(z_o)$.

Suatu fungsi f dikatakan kontinyu pada domainnya jika f kontinu di setiap titik dalam domain itu.

TEOREMA 2.3.1 : Jika $f(z)$ dan $g(z)$ kontinu pada domain D maka $f(z) \pm g(z)$ dan $f(z).g(z)$ juga kontinu pada domain D. Demikian juga $\frac{f(z)}{g(z)}$ kontinyu pada domain D kecuali di titik z_o dimana $g(z_o) = 0$.

TEOREMA 2.3.2 : Jika diberikan fungsi f yang kontinyu pada domain D dan fungsi g kontinyu pada daerah E dan $E \supset f(D)$ maka fungsi h dengan $h(z) = g \circ f\ (z)$ untuk $z \in D$, kontinyu pada D.

Jika suatu fungsi f kontinyu pada daerah tertutup dan terbatas E, maka f terbatas pada E (himpunan f(E) terbatas). Artinya terdapat bilangan $M > 0$ sehingga untuk semua $z \in E$ berlaku $|f(z)| \leq M$.

2.4 FUNGSI TERDIFERENSIAL

DEFINISI 2.4.1 : Diberikan fungsi f yang didefinisikan pada domain D dan titik z_o di dalam D.

Fungsi f dikatakan terdiferensial jika

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_o + \Delta z) - f(z_o)}{\Delta z}$$

ada.

Nilai limit di atas disebut turunan atau derivatif fungsi f di titik z_o dan dinyatakan dengan $f'(z_o)$. Jadi

$$f'(z_o) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_o + \Delta z) - f(z_o)}{\Delta z}$$

Jika fungsi f terdiferensial di semua titik di dalam D maka fungsi f dikatakan terdiferensial pada D.

TEOREMA 2.4.1 : Jika fungsi f terdiferensial di z_o maka f kontinyu di z_o.

Kekontinyuan suatu fungsi merupakan syarat perlu agar fungsi f terdiferensial, tetapi kekontinyuan ini tidak menjamin bahwa fungsi f terdiferensial. Jadi kekontinyuan suatu fungsi di suatu titik bukan syarat cukup agar fungsi f terdiferensial di titik itu.

TEOREMA 2.4.2 : Jika fungsi $f(z) = u(x,y) + i\ v(x,y)$ terdiferensial di titik $z_o = x_o + iy_o$ maka u dan v mempunyai derivatif parsial pertama di (x_o,y_o) dan persamaan Cauchy-Riemann

$$u_x = v_y \quad \text{dan} \quad u_y = -v_x$$

dipenuhi di titik $z_o = x_o + i\ y_o$.

Dari teorema di atas jelas tampak bahwa apabila di suatu titik z_o syarat Cauchy-Riemann tidak dipenuhi maka fungsi f tidak terdiferensial di titik itu. Meskipun syarat Cauchy-Riemann dipenuhi di z_o, hal ini tidak menjamin bahwa fungsi f akan terdiferensial di titik itu. Bisa jadi syarat Cauchy-Riemann dipenuhi di z_o tetapi fungsi f tidak terdiferensial di z_o ($f'(z_o)$ tidak ada).

Berikut ini , syarat cukup agar fungsi f terdiferensial di suatu titik z_o.

TEOREMA 2.4.3 : Diberikan fungsi

$$f(z) = u(x,y) + i\ v(x,y)$$

yang didefinisikan pada domain D dan z_o di dalam D. Jika turunan Parsial pertama dari u dan v ada di dalam D dan kontinyu di z_o, serta memenuhi syarat Cauchy-Riemann di z_o maka fungsi f terdiferensial di z_o.

2.5 FUNGSI ANALITIK

DEFINISI 2.5.1 : Diberikan fungsi f yang didefinisikan pada suatu domain D. Fungsi f dikatakan analitik di titik $z_o \in D$ jika ada $h > 0$ sedemikian hingga $f'(z)$ ada di setiap titik z di dalam kitar

$$N(z_o,h) = (z \in C \mid |z - z_o| < h)$$

Fungsi f dikatakan analitik pada domain D jika fungsi f analitik di setiap titik di dalam D.

Maka dapat juga dikatakan bahwa jika f analitik di titik z_o maka f analitik pada suatu kitar z_o.

Dan untuk dapat mengatakan bahwa f analitik pada daerah E yang tidak terbuka, harus ada himpunan terbuka $H \supset E$ dan f analitik pada H.

Fungsi analitik juga sering di sebut fungsi holomorfik atau regular.

Melihat DEFINISI 2.5.1, jika f analitik di z_o maka f terdiferensial di z_o dan pasti kontinyu di z_o. Kekontinyuan adalah syarat perlu tetapi tidak cukup agar suatu fungsi terdiferensial di suatu titik atau domain D. Demikian juga dipenuhinya syarat Cauchy-Riemann di suatu titik hanya perlu agar fungsi f terdiferensial di titik itu.

Dengan mengingat definisi di atas, kekontinyuan dan dipenuhinya syarat Cauchy-Rieman merupakan syarat perlu tetapi tidak cukup agar suatu fungsi bersifat analitik.
Syarat perlu dan syarat cukup agar suatu fungsi f analitik dalam domain D diberikan oleh teorema 2.4.2 dan 2.4.3, jika hipotesa dalam teorema-teorema tersebut di penuhi di setiap titik didalam D.

Fungsi yang analitik di seluruh bidang kompleks di sebut fungsi utuh. Dan titik dalam domain definisi fungsi f di mana f analitik di sebut titik analitik fungsi f.

DEFINISI 2.5.2 : Titik z_o di mana fungsi f tidak analitik, tetapi setiap kitar dari z_o memuat suatu titik dimana f analitik, disebut titik singular atau singularitas fungsi f.

TEOREMA 2.5.1 : Jika f dan g didefinisikan dan analitik dalam daerah definisi yang sama D, maka demikian juga $f + g$, $f - g$ dan fg. Hasil bagi f/g juga analitik pada D kecuali di titik didalam D dimana nilai fungsi g menjadi nol.

TEOREMA 2.5.2 : Jika f didefinisikan dan analitik pada daerah D dan g analitik pada daerah E yang memuat $f(D)$, maka $h = g \circ f$ analitik pada D.

Atau dengan kata lain komposisi fungsi analitik dengan fungsi analitik adalah analitik.

TEOREMA 2.5.3 : Diberikan domain $D \subset \mathbb{C}$, dan fungsi analitik f pada D. Jika $f'(z) = 0$ untuk setiap $z \in D$, maka f konstan pada D.

TEOREMA 2.5.4 : Jika $w = f(z)$ adalah fungsi analitik pada z_o dan $f'(z_o) \neq 0$ maka fungsi itu mempunyai invers $z = f^{-1}(w)$ yang analitik di $w_o = f(z_o)$. Dan untuk setiap w di dalam kitar w_o berlaku

$$\frac{dz}{dw} = \frac{1}{dw/dz}$$

BAB III

PEMBAHASAN

3.1 PEMETAAN KONFORMAL

DEFINISI 3.1.1 : Suatu pemetaan oleh fungsi kompleks di bidang datar dikatakan konformal jika pemetaan ini mempertahankan sudut antara dua kurva yang melalui sebuah titik, baik besar maupun arahnya.

Fungsi analitik mempunyai sifat yang paling penting yaitu sifat konformal yang dengan lengkap dinyatakan oleh teorema berikut.

TEOREMA 3.1.1 : Pemetaan yang didefinisikan oleh fungsi analitik $f(z)$ bersifat konformal kecuali di titik kritis yang menjadikan $f'(z) = 0$.

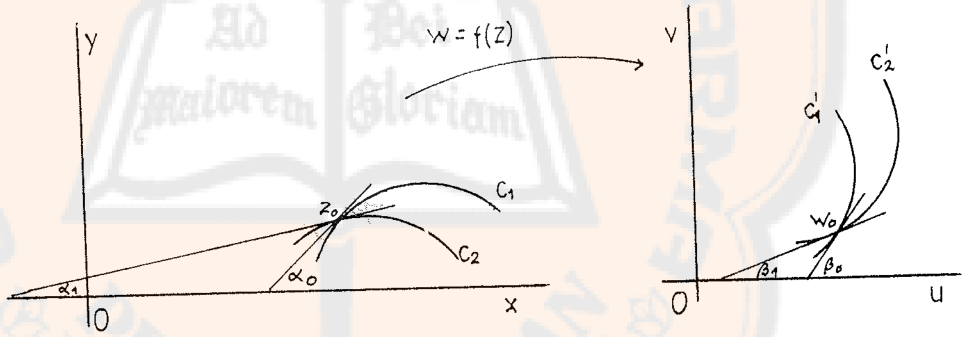
BUKTI: Diberikan fungsi f yang analitik pada domain D dan z_o suatu titik di dalam D di mana $f'(z_o) \neq 0$. Diberikan juga kurva mulus C_1 dalam domain D yang melalui z_o.

Kurva $C_1 : z(t) = x(t) + i\, y(t)$,

dengan t parameter real dan

$$z_o = z(t_o) = x(t_o) + i\, y(t_o).$$

Akan ditunjukkan bahwa pemetaan $w = f(z)$ memutar garis singgung terhadap C_1 di sebarang titik z_0 di C_1 (asalkan $f'(z_0) \neq 0$) sebesar sudut yang tidak tergantung C_1. Dari sini dapat ditunjukkan bahwa garis singgung terhadap dua kurva C_1 dan C_2 yang melalui titik z_0, diputar sebesar sudut yang sama. Sehingga bayangan kedua kurva itu membuat sudut yang sama dengan sudut yang dibentuk C_1 dan C_2, baik besar maupun arahnya.



Gambar 3.1.1

Misalkan α_0 adalah sudut antara sumbu OX dan garis singgung pada C_1 di z_0. Karena untuk z pada C_1 berlaku $z'(t) = x'(t) + i\, y'(t)$

maka $z'(t_0) = x'(t_0) + i\, y'(t_0)$

sehingga $\alpha_0 = \arg\,[z'(t_0)]$.

Kurva C_1' melalui w_0 dimana

$$w_o = w(t_o) = f(z(t_o)).$$

Jika β_o adalah sudut antara sumbu real di bidang w dengan garis singgung pada C_1' di w_o, maka dengan uraian di atas diperoleh $\beta_o = \arg [w'(t_o)]$.

Menurut aturan rantai :

$$w'(t) = f'(z(t)).\ z'(t)$$

Maka $\qquad w'(t_o) = f'(z(t_o)).z'(t_o)$

Karena $f'(z_o) = f'(z(t_o)) \neq 0$ maka tampak bahwa $w'(t_o) \neq 0$. Lebih lanjut karena argumen suatu hasil kali sama dengan jumlah masing-masing argumennya, maka diperoleh

$\arg [w'(t_o)] = \arg [f'(z(t_o)] + \arg [z'(t_o)]$

$$\beta_o = \arg [f'(z(t_o))] + \alpha_o.$$

Jadi oleh pemetaan $w = f(z)$, arah garis singgung di w_o pada C_1' diperoleh dari arah garis singgung pada C_1 di z_o yang diputar sebesar $\gamma = \arg [f'(z(t_o))]$.

Jadi $\qquad \beta_o = \gamma + \alpha_o$ ....(1)

Sekarang dilukis sebarang kurva mulus C_2 yang melalui z_o. Dimisalkan α_1 adalah sudut antara garis singgung pada C_2 di z_o dengan sumbu real positif. Bayangan C_2 oleh

$w = f(z)$ adalah C_2' yang tentu saja melalui w_o. Sudut antara garis singgung pada C_2' di w_o dengan sumbu real adalah β_1. Maka dengan cara di atas diperoleh

$$\beta_1 = \gamma + \alpha_1 \qquad (2)$$

Dari (1) dan (2) akan diperoleh

$$\alpha_1 - \beta_o = \alpha_1 - \alpha_o \qquad (3)$$

Maka $(\beta_1 - \beta_o)$ menyatakan sudut yang dibentuk oleh kurva C_1' dan C_2'. Sedangkan $(\alpha_1 - \alpha_o)$ menyatakan sudut yang dibentuk oleh kurva C_1 dan C_2. Dua kurva mulus dikatakan berpotongan pada sudut λ, jika λ adalah besar sudut antara garis-garis singgung mereka di titik potong tersebut. Dengan demikian oleh $w = f(z)$ kurva C_1 dan C_2 ditransformasikan menjadi kurva mulus C_1' dan C_2' yang berpotongan pada sudut yang besar dan arahnya sama seperti pada C_1 dan C_2. Jadi teorema terbukti.□

Tranformasi yang hanya mempertahankan sudut tetapi tidak mempertahankan arahnya dinamakan transformasi isogonal. Misalnya $g(z) = \bar{z}$, yang secara geometris mudah dilihat bahwa oleh transformasi ini besar sudut dipertahankan, tetapi arahnya menjadi berlawanan.

Contoh 1 : Fungsi $w = e^z$. Transformasi ini bersifat konformal di setiap titik z, sebab

$w' = e^z$, sehingga $w'(z) \neq 0$ di semua titik z.

Contoh 2 : Fungsi $w = z^2$. Karena $w' = 2z$ maka $w' = 0$ di $z = 0$. Jadi pemetaan $w = z^2$ tidak konformal di titik $z = 0$.

TEOREMA 3.1.2 : Satu-satunya tranformasi konformal dari suatu domain di bidang z ke dalam domain di bidang w adalah berbentuk $w = f(z)$ dengan f suatu fungsi analitik.

BUKTI : Diberikan dua fungsi terdiferensial $u = u(x,y)$ dan $v = v(x,y)$ maka u, v, u_x, u_y, v_x, dan v_y kontinu dalam domain yang diberikan.

Andaikan ds dan $d\sigma$ elemen panjang busur di bidang z dan w, maka

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 \quad \text{dan} \quad d\sigma^2 = du^2 + dv^2$$

Karena $du = u_x\, dx + u_y\, dy$

dan $dv = v_x\, dx + v_y\, dy$

maka diperoleh

$$d\sigma^2 = (u_x\, dx + u_y\, dy)^2 + (v_x\, dx + v_y\, dy)^2.$$

Sehingga $d\sigma^2 = A\, dx^2 + B\, dy^2 + 2C\, dx\, dy$

dimana $A = u_x^2 + v_x^2$, $B = u_y^2 + v_y^2$, dan $C = u_x\, u_y + v_x\, v_y$.

Agar perbandingan $d\sigma:ds$ tidak tergantung kepada arah tetapi hanya tergantung kepada x dan y saja, maka syarat berikut harus dipenuhi, yaitu :

$$A/1 = B/1 \quad \text{dan} \quad C = 0.$$

Misalkan $A = B = h^2$, dengan h hanya tergantung pada x dan y saja dan $h \neq 0$, maka menurut syarat di atas (syarat diatas, agar transformasi itu isogonal) diperoleh :

$$u_x^2 + v_x^2 = u_y^2 + v_y^2 = h^2 \quad \text{dan}$$

$$u_x\, u_y + v_x\, v_y = 0.$$

Syarat yang pertama dipenuhi oleh $u_x = h \cos \alpha$, $v_x = h \sin \alpha$, $u_y = h \cos \beta$ dan $v_y = h \sin \beta$.

Maka $\quad h^2 \cos \alpha \cos \beta + h^2 \sin \alpha \sin \beta = 0$

Sehingga $\quad h^2 (\cos (\alpha - \beta)) = 0$

Dan

$$\alpha - \beta = \pm \pi/2$$

i). Untuk $\alpha - \beta = -\pi/2$, $\beta = \alpha + \pi/2$ sehingga

$$u_y = h \cos (\alpha + \pi/2) = -h \sin \alpha = -v_x$$

dan $v_y = h \sin (\alpha + \pi/2) = h \cos \alpha = u_x$.

Sehingga diperoleh persamaan Cauchy-Riemann. Karena u, v, u_x, v_x u_y dan v_y kontinu maka $w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ analitik.

ii). Untuk $\alpha - \beta = \pi/2$, $\alpha = \beta + \pi/2$ sehingga

$$u_x = h \cos (\beta + \pi/2) = -h \sin \beta = -v_y$$

dan $v_x = h \sin (\beta + \pi/2) = h \cos \beta = u_y$

Jika v diganti dengan $-v$ maka akan diperoleh

$$u_x = v_y \text{ dan } u_y = -v_x$$

Jadi persamaan Cauchy-Riemann dipenuhi, dan u, v, u_x, u_y, v_x, v_y kontinu maka

$g(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ analitik.

Sehingga g tranformasi konformal.

Karena $f(z) = \overline{g(z)}$ maka bayangan oleh f dapat diperoleh dengan mencerminkan bayangan oleh g terhadap sumbu real di bidang w, sehingga f merupakan transformasi isogonal saja.

Jadi terbuktilah teorema di atas. □

Dalam teori fungsi analitik, jika $w = f(z)$ analitik pada kitar z_o dan $f'(z_o) \neq 0$, maka fungsi ini mempunyai invers $z = g(w)$ yang analitik pada $w_o = f(z_o)$. Jika fungsi $w = f(z)$ bersifat konformal di z_o, akan diselidiki apakah fungsi $z = g(w)$ ini bersifat konformal atau tidak.

Telah diketahui bahwa $z = g(w)$ analitik. Maka

$$g'(w) = 1/(f'(z))$$

Sehingga untuk titik $z = z_o$ diperoleh

$$g'(w_o) = 1/(f'(z_o)).$$

Karena $f'(z_o) \neq 0$ maka $g'(w_o) \neq 0$. Jadi fungsi invers $z = g(w)$ konformal di $w_o = f(z_o)$.

Hasil ini dapat dirangkum dalam teorema berikut ini.

TEOREMA 3.1.3 : Jika fungsi analitik $w = f(z)$ konformal di z_o, maka pada suatu kitar dari z_o, fungsi ini mempunyai invers $z = g(w)$ yang analitik di $w_o = f(z_o)$ dan transformasi g konformal di titik itu.

3.1.1 FAKTOR SKALA

Menurut definisi turunan :

$$|f'(z_o)| = \left| \lim_{z \to z_o} \frac{f(z) - f(z_o)}{z - z_o} \right|$$

$$= \lim_{z \to z_o} \frac{|f(z) - f(z_o)|}{|z - z_o|}$$

Tampak jika z mendekati z_o, maka perbandingan

$$\frac{|f(z) - f(z_o)|}{|z - z_o|}$$

akan mendekati $|f'(z_o)|$.

Nilai mutlak $|z - z_o|$ menyatakan panjang penggal garis dari z ke z_o dan $|f(z)-f(z_o)|$ menyatakan panjang penggal garis dari f(z) ke $f(z_o)$. Oleh karena itu nilai $|f'(z_o)| \neq 0$ menyatakan pembesaran atau pengecilan bayangan penggal garisnya. $|f'(z_o)|$ ini dinamakan FAKTOR SKALA transformasi konformal f di z_o.

Walaupun nilai f'(z) berubah-ubah untuk z pada suatu kitar kecil z_o, mengingat kekontinuan dari f', nilai arg [f'(z)] dan |f'(z)| masih dekat dengan nilai arg $[f'(z_o)]$ dan $|f'(z_o)|$. Maka rotasi dan faktor skala di titik-titik pada kitar z_o dipandang sebagai arg $[f'(z_o)]$ dan $|f'(z_o)|$. Akibatnya bayangan suatu bangun di kitar kecil z_o akan sebangun dengan bangun semula.

3.1.2 KASUS $f'(z_o) = 0$

Selanjutnya akan dibahas tentang transformasi oleh fungsi analitik f dengan $f'(z_o) = 0$, yang hasilnya dinyatakan oleh teorema berikut.

TEOREMA 3.1.4 : Diberikan fungsi $f(z)$ analitik dalam domain D yang memuat titik z_o. Jika $f'(z_o) = f''(z_o) = \ldots = f^{(m-1)}(z_o) = 0$, tetapi $f^{(m)}(z_o) \neq 0$ maka pemetaan oleh $w = f(z)$ membesarkan sudut di z_o sebesar m kali lipat.

BUKTI: Diketahui $f(z)$ analitik dalam domain D dan $f'(z_o) = f''(z_o) = \ldots = f^{(m-1)}(z_o) = 0$ dan $f^{(m)}(z_o) \neq 0$. Jika f diekspansikan ke dalam deret Taylor di suatu kitar z_o, maka diperoleh

$$f(z) = f(z_o) + a(z-z_o)^m + \ldots$$

dengan $a = \dfrac{f^{(m)}(z_o)}{m!} \neq 0$

Bentuk ini dapat ditulis :

$f(z) - f(z_o) = a\,(z-z_o)^m + g(z)$.........(1)

dengan $g(z)$ analitik di suatu kitar kecil dari z_o dan $g(z_o) = 0$.

Ditinjau kurva mulus C_1 yang melalui z_o seperti gambar 3.1.1, yang oleh $w = f(z)$ ditransformasikan menjadi kurva mulus C_1' yang melalui $w_o = f(z_o)$ di bidang w.

Dimisalkan α_o menyatakan sudut arah garis singgung pada C_1 di z_o dan β_o menyatakan sudut arah garis singgung pada C_1' di $w_o = f(z_o)$.

Andaikan $f(z) - f(z_o) = \rho e^{i\beta}$, $z - z_o = re^{i\alpha}$ dan $a = |a|e^{i\lambda}$, maka (1) akan menjadi

$$\rho e^{i\beta} = |a|r^m\, e^{i(\lambda+m\alpha)} + g(z).$$

Karena $g(z_o) = 0$, maka dalam suatu kitar z_o nilai $\rho e^{i\beta}$ dekat dengan nilai $|a|r^m e^{i(\lambda+m\alpha)}$

Sehingga $\arg\,[\rho e^{i\beta}] \approx \arg\,[|a|r^m e^{i(\lambda+m\alpha)}]$.

Jadi $\beta \approx \lambda + m\alpha$.

Untuk $z \to z_o$, β akan mendekati β_o dan $\alpha \to \alpha_o$.

Diperoleh $\beta_o = \lambda + m\,\alpha_o$. . . ..(2)

Kemudian dilukis sebarang kurva mulus C_2

yang melalui z_o. Bayangan C_2 di bidang w adalah C_2' yang pasti melalui $w_o = f(z_o)$. Bilangan α_1 dan β_1 berturut-turut menyatakan sudut arah garis singgung di z_o dan di w_o pada kurva-kurva tersebut. Dengan cara yang sama akan diperoleh hubungan

$$\beta_1 = \lambda + m\ \alpha_1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

Dari (2) dan (3) diperoleh

$$(\beta_o - m\alpha_o) = (\beta_1 - m\alpha_1)$$

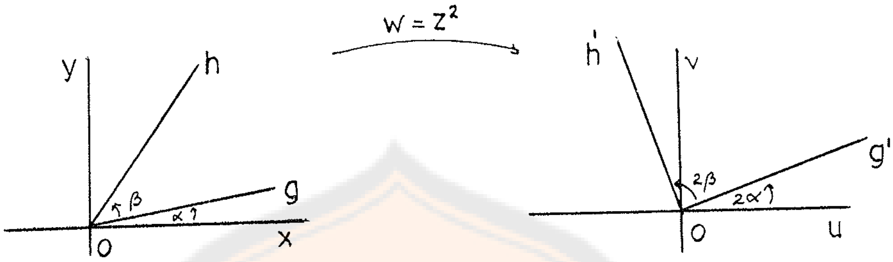
Sehingga $\beta_o - \beta_1 = m(\alpha_o - \alpha_1)$

Maka $(\beta_o - \beta_1)$ menyatakan sudut antara kurva C_1' dan C_2' yang mempunyai besar m kali besar sudut antara kurva C_1 dan C_2 yang dinyatakan oleh $(\alpha_o - \alpha_1)$. Jadi teorema terbukti.□

Contoh : Fungsi $w = f(z) = z^2$ mempunyai titik kritis $z = 0$, sebab $f'(0) = 0$.

Karena $f'(z) = 2z$ dan $f''(z) = 2$, maka $f''(0) \neq 0$. Sehingga $m = 2$, maka fungsi f tidak konformal di $z = 0$.

Dua kurva di bidang z yang berpotongan di $z = 0$ ditransformasikan menjadi dua kurva di bidang w yang berpotongan di $w = 0$, pada sudut yang besarnya dua kali besar sudut antara dua kurva yang diberikan.



gambar 3.1.2

3.2 PEMETAAN OLEH FUNGSI-FUNGSI ELEMENTER

3.2.1 TRANSFORMASI/FUNGSI LINEAR

Contoh sederhana dari pemetaan konformal oleh fungsi analitik adalah fungsi linear yang berbentuk

$$w = Az + B$$

dimana $A \neq 0$ dan A,B adalah konstanta kompleks.

Transformasi ini terbagi atas dua kasus yang istimewa yaitu :

i) Translasi

Transformasi ini berbentuk $w = z + B$, $B \neq 0$. Dengan transformasi ini titik w dapat diperoleh dengan cara menggeser titik z sejauh vektor yang diwakili oleh B.

ii) Rotasi

Secara umum transformasi ini berbentuk $w = Az$, dengan $A \neq 0$.

Andaikan $A = |a|e^{i\alpha}$, $z = re^{i\theta}$ dan $w = \rho e^{i\phi}$ maka

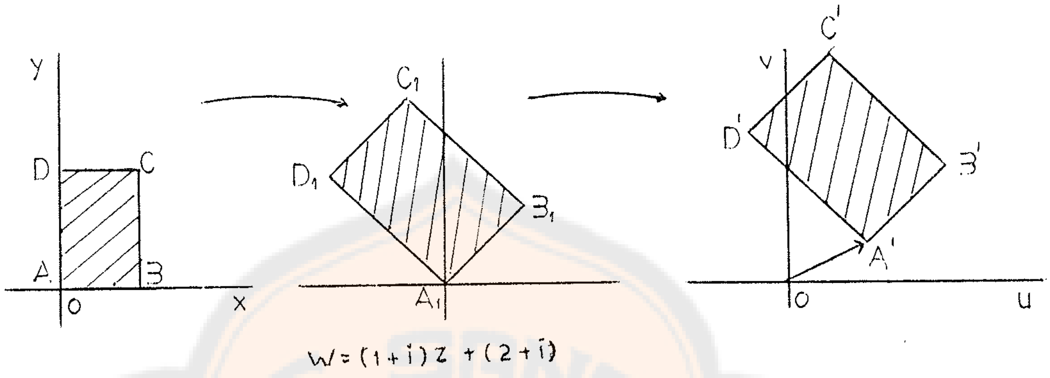
$$\rho e^{i\phi} = |a|r\ e^{i(\alpha+\theta)}.$$

Sehingga $\rho = |a|r$ dan $\phi = \alpha + \theta$.

Secara geometris bayangan w dari titik z yang bukan nol diperoleh dengan memutar titik z yang pusat putarnya di 0 ke arah positif sebesar α dan hasilnya dikalikan dengan faktor $|a|$ terhadap 0.

Tranformasi linear $w = Az + B$ dapat dipandang sebagai dua transformasi yang berturutan yaitu $\sigma = Az$ dan $w = \sigma + B$.

Contoh : Transformasi $w = (1 + i)z + (2 + i)$ dengan domain D_z seperti pada gambar 3.2.1. Tranformasi ini dapat dipikirkan sebagai dua transformasi yang berturutan yaitu $\sigma = (1 + i)z$ dan $w = \sigma + (2 + i)$. Bilangan $(1 + i) = \sqrt{2}\ e^{i\pi/4}$, maka oleh transformasi $\sigma = (1 + i)z$ setiap titik z diputar dengan pusat putar 0 sebesar $\pi/4$ dan hasilnya dikalikan dengan faktor $\sqrt{2}$ terhadap 0. Kemudian oleh transformasi kedua setiap titik σ digeser ke kanan sejauh dua satuan dan satu satuan ke atas.



Gambar 3.2.1

3.2.2 FUNGSI $w = 1/z$

Oleh fungsi $w = 1/z$ ini, bayangan titik z dapat diperoleh melalui inversi terhadap lingkaran satuan yang diikuti oleh refleksi terhadap sumbu real.

DEFINISI 3.2.1 : Inversi titik A terhadap lingkaran yang terpusat di M dan mempunyai radius R adalah titik B yang terletak pada sinar MA sehingga

$$MA \times MB = R^2.$$

Sekarang dimisalkan $A = re^{i\theta}$ dan $w = \rho e^{i\phi}$, sehingga fungsi $w = 1/z$ akan menjadi

$$\rho e^{i\phi} = 1/r \ e^{-i\theta}$$

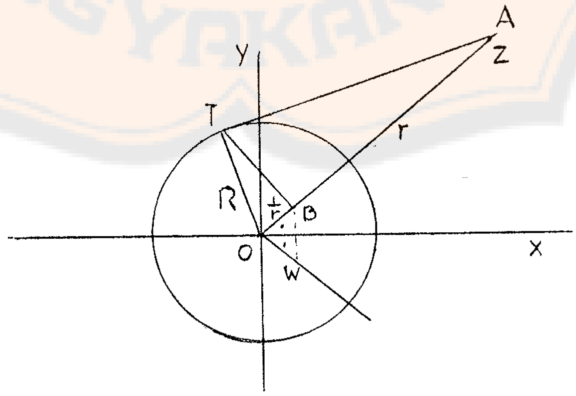
sehingga diperoleh $\rho = 1/r$ dan $\phi = -\theta$.

Untuk mencari titik B yang merupakan inversi titik A dapat dilakukan dengan cara sebagai berikut. Dilukis lingkaran L di bidang z dengan radius R = 1. Ditarik garis melalui titik A dengan menyinggung lingkaran L di T, kemudian ditarik garis melalui T dan tegak lurus OA. Sehingga tampak bahwa

$$\Delta \text{ OTB sebangun dengan } \Delta \text{ OAT}$$

Maka $$OB : OT = OT : OA$$

Panjang OT = R = 1 dan OA = |A| = r maka OB = 1/r. Karena OB.OA = 1/r.r = 1, maka tampak bahwa titik B adalah inversi titik A terhadap lingkaran satuan L. Dengan demikian bayangan titik A oleh fungsi w = 1/z dapat ditentukan dengan cara merefleksikan titik B terhadap sumbu real.



Gambar 3.2.2

Fungsi $w = 1/z$ tidak analitik di $z = 0$, maka fungsi ini bersifat konformal kecuali di titik $z = 0$.

TEOREMA 3.2.1: Fungsi $w = 1/z$ memetakan setiap garis lurus atau lingkaran kepada sebuah lingkaran atau garis lurus (garis lurus dipandang sebagai lingkaran dengan jari-jari tak hingga).

Bukti : Diberikan persamaan umum lingkaran

$$A\,(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0$$

dengan A,B,C,D bilangan real.

Jika $A = 0$, maka akan diperoleh persamaan garis lurus. Andaikan $w = u + iv$ dan $z = x + iy$ maka

$$w = 1/z \quad \text{atau} \quad z = 1/w.$$

Sehingga diperoleh

$$x = \frac{u}{(u^2 + v^2)} \quad \text{dan} \quad y = \frac{-v}{(u^2 + v^2)}$$

Kedua rumus ini dimasukkan ke dalam persamaan lingkaran di atas. Maka akan diperoleh

$$D\,(u^2 + v^2) + Bu - Cv + A = 0$$

Persamaan ini merepresentasikan sebuah

lingkaran jika $D \neq 0$ atau sebuah garis lurus jika $D = 0$, pada bidang w.

Akan diselidiki fungsi $w = 1/z$ ini di bidang kompleks diperluas. Bidang kompleks diperluas terdiri atas bidang kompleks dan satu titik tak hingga (∞).

Jikalau titik $z = 0$ berpadanan dengan titik $w = \infty$ dan $z = \infty$ berpadanan dengan titik $w = 0$ maka fungsi $w = 1/z$ merupakan fungsi berkorespondensi satu-satu dari bidang z diperluas ($\mathbb{C}_z{}^*$) kepada bidang w diperluas ($\mathbb{C}_w{}^*$).

Sekarang diperhatikan persamaan umum lingkaran

$$A\,(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0.$$

Oleh fungsi $w = 1/z$, keadaan yang mungkin terjadi adalah sebagai berikut :

i) Jika $A \neq 0$ dan $D \neq 0$, maka lingkaran di bidang z yang tidak melalui 0 dipetakan kepada lingkaran yang juga tidak melalui 0 di bidang w.

ii) Jika $A \neq 0$ dan $D = 0$, maka lingkaran yang melalui 0 akan dipetakan kepada garis lurus yang tidak melalui O.

iii) Jika $A = 0$ dan $D \neq 0$, maka garis lurus yang tidak melalui O dipetakan kepada lingkaran yang melalui O.

iv) Dan yang terakhir, jika $A = 0$ dan $D = 0$ maka garis lurus yang melalui O dipetakan kepada garis lurus melalui O juga.

3.2.2 FUNGSI $w = e^z$

Untuk $z = x + iy$ dan $w = u + iv$, persamaan $w = e^z$ dapat diubah dalam bentuk

$$u + iv = e^x\ (\cos y + i \sin y).$$

Maka diperoleh $u = e^x \cos y$ dan $v = e^x \sin y$.
Jika $x = 0$, maka $u = \cos y$ dan $v = \sin y$.
Mengingat bahwa $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ maka $u^2 + v^2 = 1$.
Jadi sumbu y dipetakan kepada lingkaran dengan radius satu satuan. Secara umum, garis $x = x_o$ dipetakan kepada lingkaran

$$u^2 + v^2 = e^{2x_o}$$

Jika $y = 0$ maka $u = e^x$ dan $v = 0$.
Ini berarti sumbu x dipetakan kepada sumbu u

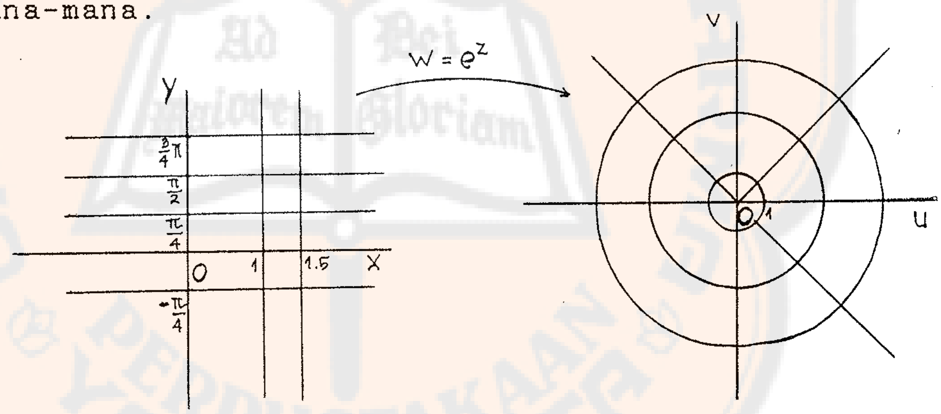
positif.

Jika $y = y_o$ maka $u = e^x \cos y_o$ dan $v = e^x \sin y_o$, maka

$$v = u \operatorname{tg} y_o$$

Persamaan ini adalah persamaan sinar garis $\theta = y_o$, di bidang w.

Karena turunan pertama $w = e^z$ adalah $w' = e^z$ yang tidak pernah bernilai nol di mana-mana, maka pemetaan oleh $w = e^z$ ini bersifat konformal di mana-mana.



Gambar 3.2.3

3.2.4 FUNGSI $w = \ln z$

Untuk $z \neq 0$ dapat dicari w sedemikian sehingga $z = e^w$. Andaikan $z = re^{i\theta}$ dan $w = u + iv$, diperoleh hubungan $re^{i\theta} = e^u e^{iv}$ atau

$$r(\cos \theta + i \sin \theta) = e^u(\cos v + i \sin v)$$

Maka akan diperoleh $u = \ln r$ dan $v = \theta + 2k\pi$.

Sehingga $w = \ln r + i(\theta + 2k\pi)$ dengan k sebarang bilangan bulat. Bilangan w ini disebut logaritma dari z dan ditulis ln z. Jadi ln z adalah fungsi yang bernilai banyak.

Akan ditinjau sebarang cabang fungsi logaritma

$$w = \ln z = \ln r + i\theta \qquad (r>0,\ \alpha<\theta<\alpha+2\pi).$$

Jika $z = re^{i\theta_0}$, dengan $r > 0$ yang terletak pada sinar $\theta = \theta_0$ dengan θ_0 suatu konstanta di antara α dan $\alpha + 2\pi$ bergerak menjauhi titik pangkal 0, maka bayangannya $w = \ln r + i\theta_0$ bergerak sepanjang seluruh garis horisontal $v = \theta_0$ ke arah kanan. Jadi sinar $\theta = \theta_0$ (tidak termasuk titik pangkal) oleh fungsi $w = \ln z$ dipetakan kepada garis horisontal $v = \theta_0$.

Jika sinar $\theta = \theta_0$ diputar dengan θ_0 bergerak menjalani semua bilangan di antara α dan $\alpha + 2\pi$, maka seluruh domain $(r>0,\ \alpha<\theta<\alpha+2\pi)$ dipetakan satu-satu ke dalam daerah lajur terbuka $\alpha<v<\alpha+2\pi$ di bidang w.

Turunan pertama dari $w = \ln z$ adalah $w' = 1/z$. Karena $w = \ln z$ analitik kecuali di $z = 0$ dan $w' = 1/z \neq 0$ untuk setiap nilai $z \neq 0$, maka pemetaan $w = \ln z$ konformal di titik $z \neq 0$.

3.2.5 FUNGSI $w = \sin z$

Andaikan $w = u + iv$ dan $z = x + iy$

maka $w = \sin z$ dapat ditulis

$w = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$

Akan diperoleh

$$u = \sin x \cosh y \quad \text{dan} \quad v = \cos x \sinh y \text{ .}$$

Pemetaan ini akan dibatasi untuk z pada lajur vertikal tak hingga S yang didefinisikan oleh $-\pi/2 \le x \le \pi/2$.

Karena $w' = \cos z$ sehingga $w' = 0$ di $z = \pm\,\pi/2$, maka pemetaan ini tidak konformal di kedua titik kritis itu.

Jika $x = 0$ maka $u = 0$ dan $v = \sinh y$. Ini berarti sumbu y dipetakan kepada sumbu v.

Jika $x = \pm\,\pi/2$ maka $u = \pm \cosh y$ dan $v = 0$ sehingga $\cosh y \ge 1$ maka $u \le -1$ dan $u \ge 1$. Jadi garis batas vertikal $x = \pm\,\pi/2$ dipetakan kepada bagian $u \le -1$ dan $u \ge 1$ pada sumbu u.

Jika $x \neq 0, \pm\,\pi/2$, dengan menggunakan

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

akan diperoleh

$$\frac{u^2}{\sin^2 x} - \frac{v^2}{\cos^2 x} = 1$$

Ini adalah persamaan hiperbola. Jadi garis-garis vertikal x = konstanta dipetakan kepada hiperbola-hiperbola dengan persamaan di atas.

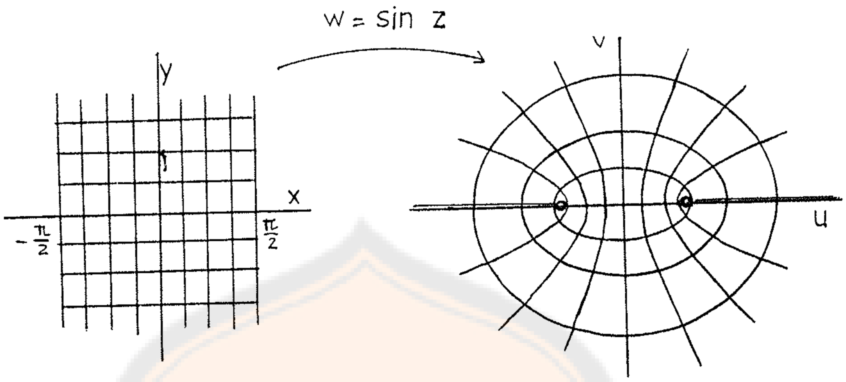
Jika $y = 0$ maka $\sinh y = 0$ dan $\cosh y = 1$, sehingga $u = \sin x$ dan $v = 0$. Ini berarti sumbu x dipetakan kepada ruas garis $-1 \leq u \leq 1$ pada sumbu u.

Jika $y \neq 0$ dengan menggunakan $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, akan diperoleh

$$\frac{u^2}{\sinh^2 y} + \frac{v^2}{\cosh^2 y} = 1$$

Persamaan ini mewakili ellips-ellips yang fokusnya sama yaitu di $z = \pm 1$ (karena $\cosh^2 y - \sinh^2 y = 1$, tidak tergantung pada y). Jadi itulah bayangan garis-garis horisontal y = konstanta.

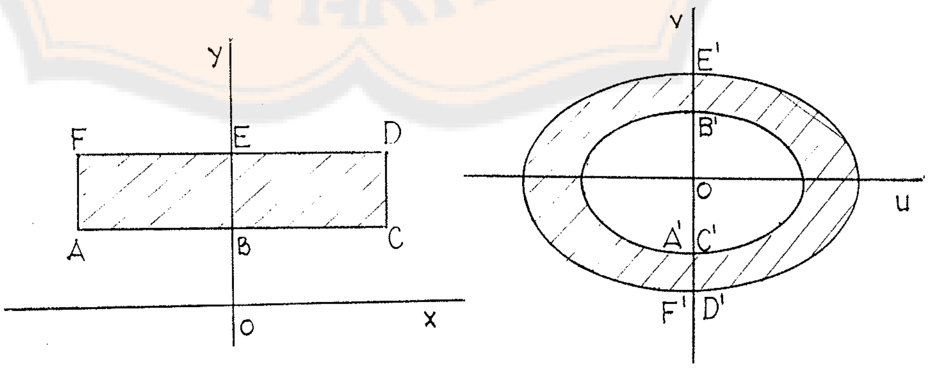
Kurva bayangan x = konstanta dan y = konstanta membentuk jaringan ortogonal (berpotongan tegak lurus) sebagai akibat kekonformalannya, kecuali di titik kritis $z = \pm \pi/2$.



Gambar 3.2.4

Contoh : Tentukan bayangan persegi panjang R: $-\pi<x<\pi$, $1/2<y<1$ oleh pemetaan $w = \sin z$.

Jawab : Sisi bagian atas $y = 1$ dipetakan kepada ellips dengan setengah sumbunya cosh 1 dan sinh 1. Sedangkan sisi bawahnya dipetakan kepada ellips dengan setengah sumbunya cosh 1/2 dan sinh 1/2. Untuk $x = \pm\,\pi$ diperoleh $u = 0$ dan $v = -\sinh y$. Jadi garis vertikal $x = \pm\,\pi$ dipetakan ke atas ruas garis $-\sinh 1 \leq v \leq -\sinh 1/2$ pada sumbu v.



Gambar 3.2.5

3.2.6 FUNGSI $w = \cos z$

Pemetaan $w = \cos z$ dapat dilihat melalui kaitannya dengan $w = \sin z$, sehingga diperoleh

$$w = \cos z = \sin (z + \pi/2).$$

Tampak bahwa pemetaan ini sama dengan $w = \sin z$ yang didahului dengan translasi ke kanan sejauh $\pi/2$ satuan.

Karena $w' = -\sin z$ sehingga $w' = 0$ di $z = \pm \pi$ maka pemetaan $w = \cos z$ tidak konformal di titik kritis $z = \pm \pi$.

3.2.7 FUNGSI-FUNGSI HIPERBOLIK

Fungsi-fungsi hiperbolik ini dapat dibahas secara tersendiri atau direduksi menjadi fungsi trigonometri seperti yang telah dibahas sebelumnya.

FUNGSI SINUS HIPERBOLIK

Fungsi $w = \sinh z = -i \sin (iz)$.

Diandaikan $Z = iz$ dan $Z^* = \sin Z$ maka akan diperoleh

$$w = -iZ^*$$

Jadi fungsi $w = \sinh z$ mendefinisikan suatu pemetaan yang berupa rotasi $Z = iz$ yang diikuti dengan $Z^* = \sin z$ dan rotasi $w = -iZ^*$.

Karena $w' = \cos (iz)$ sehingga $w' = 0$ di $z = -i(\pi/2 + k\pi)$ dengan $k = 0, 1,2,3,...$

maka fungsi sinus hiperbolik tidak konformal di titik $z = -i(\pi/2 + k\pi)$, dengan $k = 0,1,2,3,...$

FUNGSI COSINUS HIPERBOLIK

Fungsi $w = \cosh z = \cos(iz)$.

Diandaikan $Z = iz$ maka $w = \cos Z$. Berarti $w = \cosh z$ adalah rotasi $Z = iz$ yang diikuti oleh pemetaan $w = \cos Z$.

Turunan pertama fungsi ini adalah $w' = -i \sin(iz)$.

Maka $w' = 0$ di $z = -ik\pi$ dengan $k = 0, 1, 2, 3,...$

Jadi pemetaan $w = \cosh z$ tidak konformal di titik $z = -ik\pi$ dengan $k = 0, 1, 2, 3,...$

3.2.8 FUNGSI BILINEAR

Fungsi linear dan fungsi $w = 1/z$ merupakan kasus khusus dari fungsi bilinear ini. Bentuk umum fungsi ini adalah

$$w = \frac{az + b}{cz + d}$$

dengan a,b,c dan d adalah konstanta kompleks dan $ad - bc \neq 0$.

Fungsi ini juga sering disebut transformasi Möbius.

$$w' = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2}$$

Tampak bahwa jika $ad-bc \neq 0$ maka w' tidak pernah sama dengan nol. Ini berarti bahwa fungsi bilinear bersifat konformal di mana-mana. Akan diperoleh kasus yang tidak menarik jikalau ad-bc = 0. Jika ad-bc = 0, maka $\frac{a}{c} = \frac{b}{d} = \lambda$, sehingga fungsi $w = \frac{az + b}{cz + d} = \lambda$, yaitu fungsi konstan.

TEOREMA 3.2.2 : Setiap fungsi bilinear memetakan seluruh lingkaran dan garis lurus pada bidang z kepada seluruh lingkaran dan garis lurus di bidang w.

BUKTI : Teorema ini jelas berlaku untuk fungsi linear dan w = 1/z. Dengan demikian, teorema juga berlaku untuk komposisi fungsi-fungsi tersebut.

Akan ditunjukkan bahwa fungsi bilinear dapat diperoleh melalui komposisi dari fungsi linear dan w = 1/z.

Bila $c \neq 0$, fungsi bilinear dapat ditulis

$$w = k \frac{1}{cz + d} + \frac{a}{c}$$

dengan $k = -\frac{ad - bc}{c}$

Sekarang diandaikan

$w_1 = cz$, $w_2 = w_1 + d$, $w_3 = 1/w_2$, $w_4 = kw_3$ dan $w = w_4 + a/c$.

Dari sini jelas bahwa fungsi bilinear merupakan komposisi dari fungsi-fungsi khusus. Jadi teorema terbukti.□

Akan diselidiki fungsi bilinear di bidang kompleks diperluas ($\mathbb{C}^*$).

Dengan memperhatikan bentuk umum fungsi bilinear, dapat dilihat bahwa untuk setiap z, dengan $cz + d \neq 0$ berpadanan dengan tepat satu bilangan kompleks w. Jika $c \neq 0$, untuk setiap $z = -d/c$ sehingga $cz + d = 0$ tidak berpadanan dengan bilangan kompleks w manapun. Maka $z = -d/c$ dipadankan dengan $w = \infty$ sebagai bayangannya.

Jika $c = 0$, maka haruslah $a \neq 0$ dan $d \neq 0$, sehingga $w = \infty$ diambil sebagai bayangan dari $z = \infty$.

Sekarang perhatikan kebalikan dari fungsi bilinear di bawah ini.

$$z = \frac{-dw + b}{cw - a}$$

Ternyata fungsi ini merupakan fungsi bilinear juga. Jika $c \neq 0$, maka titik $w = a/c$ sehingga $cw - a = 0$ merupakan bayangan $z = \infty$.

Dengan uraian di atas tampak bahwa fungsi bilinear merupakan pemetaan konformal satu-satu di bidang z diperluas ($\mathbb{C}_z^*$) kepada bidang w diperluas ($\mathbb{C}_w^*$). Dengan kata lain setiap fungsi bilinear memetakan bidang kompleks diperluas kepada bidang itu sendiri secara konformal dan satu-satu.

Untuk mendukung pembahasan selanjutnya,

diperlukan definisi dan teorema berikut ini.

DEFINISI 3.2.1 :Titik tetap pemetaan $w = f(z)$ adalah titik yang dipetakan ke dirinya sendiri.

DEFINISI 3.2.2 : Suatu pemetaan disebut pemetaan identitas jika pemetaan itu menghasilkan setiap titik sebagai titik tetap.

TEOREMA 3.2.3 : Setiap fungsi bilinear yang bukan pemetaan identitas memiliki sebanyak-banyaknya dua titik tetap. Jika suatu fungsi bilinear memiliki tiga atau lebih titik tetap, pemetaan itu merupakan pemetaan identitas $w = z$.

BUKTI : Fungsi $w = \dfrac{az + b}{cz + d}$

Syarat titik tetap adalah $w = z$.

Jadi $z = \dfrac{az + b}{cz + d}$

sehingga diperoleh $cz^2 + (d-a)z - b = 0$

Ternyata diperoleh persamaan kuadratik dalam z. Maka akan diperoleh dua titik tetap.

Semua koefisiennya sama dengan nol jika dan hanya jika pemetaannya adalah pemetaan identitas $w = z$ $(a = d \neq 0,\ b = c = 0)$.

Jadi teorema terbukti. □

3.2.8.1 PERBANDINGAN SILANG

Dari tiga titik yang berlainan z_1, z_2, z_3 di bidang z dapat ditentukan secara tunggal suatu fungsi bilinear yang memetakan ketiga titik itu berturut-turut ke w_1, w_2, w_3 yang berlainan di bidang w. Fungsi bilinear ini dapat ditentukan melalui perbandingan silang diantara titik-titik tersebut.

Untuk itu akan dibahas terlebih dahulu definisi perbandingan silang (cross-ratio)

DEFINISI 3.2.3 : Untuk z_1, z_2, z_3, z_4 yang berlainan di bidang kompleks dalam urutan $[z_1, z_2, z_3, z_4]$ didefinisikan suatu perbandingan silang sebagai berikut:

$$[z_1, z_2, z_3, z_4] = \frac{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}{(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)}$$

Definisi ini dapat diperluas lagi, jika terdapat suatu kasus dimana salah satu titik adalah titik tak hingga (∞).

Sebagai contoh perbandingan silang $[\infty, z_2, z_3, z_4]$ didefinisikan sebagai

$$\lim_{z_1 \to \infty} [z_1, z_2, z_3, z_4]$$

Sehingga akan diperoleh

$$[\infty, z_2, z_3, z_4] = \frac{(z_2 - z_4)}{(z_3 - z_4)}$$

Hal yang sama juga akan terjadi jika z_2, z_3, atau z_4 adalah titik tak hingga.

TEOREMA 3.2.4 : Diketahui z_1, z_2, z_3, z_4 yang berlainan di bidang kompleks. Kemudian diberikan titik z_5 di bidang kompleks. Perbandingan silang

$[z_1, z_2, z_3, z_4] = [z_1, z_2, z_3, z_5]$

bila dan hanya bila $z_4 = z_5$.

BUKTI : Jikalau $z_4 = z_5$ maka perbandingan silang

$$[z_1, z_2, z_3, z_4] = [z_1, z_2, z_3, z_5] .$$

Sekarang diandaikan perbandingan silang di atas dipenuhi.

Dari kesamaan perbandingan silang

$$[z_1, z_2, z_3, z_4] = [z_1, z_2, z_3, z_5]$$

diperoleh $(z_2 - z_3)(z_4 - z_5) = 0$.

Karena z_1, z_2, z_3, dan z_4 berlainan maka

$$(z_2 - z_3) \neq 0.$$

Jadi $\qquad (z_4 - z_5) = 0.$

Sehingga $\qquad z_4 = z_5.$

Dengan demikian teorema 3.2.4 terbukti.□

TEOREMA 3.2.5 : Perbandingan silang $[z_1,z_2,z_3,z_4]$ invarian terhadap suatu fungsi bilinear.

BUKTI : Diberikan z_1, z_2, z_3, z_4 yang berlainan di bidang z. sebarang fungsi bilinear

$$w = \frac{az + b}{cz + d} \qquad \text{dengan } ad - bc \neq 0$$

Fungsi ini juga dapat ditulis

$$w = A\left(1 + \frac{B}{z + C}\right)$$

dengan $A = a/c$, $B = b/a - d/c$ dan $C = d/c$.

Dengan sedikit perhitungan diperoleh

$$w_1 - w_3 = AB\,\frac{(z_3 - z_1)}{(z_1 + C)(z_3 + C)}$$

Dan dengan cara yang sama diperoleh nilai untuk $(w_1 - w_2)$, $(w_2 - w_4)$, dan $(w_3 - w_4)$ sehingga akan diperoleh perbandingan silang

$$[w_1, w_2, w_3, w_4] = [z_1, z_2, z_3, z_4].$$

Jadi teorema 3.2.5 terbukti.□

Teorema 3.2.5 ini dengan tepat menggambarkan fungsi bilinear yang memetakan tiga titik z_1, z_2, z_3 yang berlainan di bidang z ke w_1, w_2, w_3 yang berlainan di bidang w. Katakanlah untuk $z \neq z_1, z_2, z_3$, maka nilai w ditunjukkan oleh perbandingan silang $[z_1,z_2,z_3,z] = [w_1,w_2,w_3,w]$. Dapat dibuktikan bahwa w dalam perbandingan silang itu akan menentukan secara tunggal fungsi $w = f(z)$ dengan f suatu fungsi bilinear.

TEOREMA 3.2.6 : Tiga titik z_1, z_2, z_3 yang berbeda selalu dapat dipetakan kepada tiga titik w_1, w_2, w_3 yang berbeda oleh satu dan hanya satu fungsi bilinear

$$w = f(z).$$

Pemetaan ini diberikan secara implisit oleh perbandingan silang

$$[z_1,z_2,z_3,z] = [w_1,w_2,w_3,w].$$

BUKTI : Perbandingan silang

$$[z_1, z_2, z_3, z] = [w_1, w_2, w_3, w]$$

akan menghasilkan suatu fungsi bilinear, misalnya $w = f(z)$.

Untuk $z = z_1$ akan diperoleh

$$[z_1, z_2, z_3, z_1] = 1$$

sehingga

$$[w_1, w_2, w_3, w] = 1 .$$

Agar perbandingan silang $[w_1,w_2,w_3,w] = 1$ maka w harus sama dengan w_1.

Jadi titik $z = z_1$ oleh fungsi bilinear $w = f(z)$ dipetakan kepada titik $w = w_1$.

Dengan cara yang sama, titik-titik z_2 dan z_3 akan dipetakan kepada titik w_2 dan w_3, oleh fungsi $w = f(z)$.

Jadi ada fungsi bilinear $w = f(z)$ yang memetakan tiga titik z_1, z_2, z_3 yang berlainan di bidang z kepada tiga titik w_1, w_2, w_3 yang berlainan di bidang w.

Sekarang akan dibuktikan bahwa fungsi $w = f(z)$ tunggal.

Andaikan terdapat fungsi bilinear $w = g(z)$ yang juga memetakan z_1, z_2, z_3 ke w_1, w_2, w_3.

Jika diberikan suatu titik σ yang sebarang di bidang kompleks, maka akan diperoleh

$$[z_1, z_2, z_3, \sigma] = [w_1, w_2, w_3, g(\sigma)].$$

Karena $[z_1, z_2, z_3, \sigma] = [w_1, w_2, w_3, f(\sigma)]$ maka $[w_1,w_2,w_3,f(\sigma)] = [w_1,w_2,w_3,g(\sigma)]$. Menurut teorema 3.2.4, $f(\sigma) = g(\sigma)$. Karena titik σ sebarang dibidang kompleks maka fungsi $f(z) \equiv g(z)$.

Jadi terbukti bahwa fungsi bilinear $w = f(z)$ di atas tunggal.□

3.2.8.2 PEMETAAN SEPARUH BIDANG ATAS KEPADA CAKRAM SATUAN

Selanjutnya akan diberi sebuah contoh fungsi bilinear yang memetakan daerah setengah bidang atas kepada cakram satuan. Fungsi bilinear ini akan memetakan daerah bidang atas $\mathrm{Im}(z) > 0$ kepada daerah cakram terbuka $|w| < 1$ dan perbatasan $\mathrm{Im}(z) = 0$ kepada perbatasan $|w| = 1$.

Andaikan fungsi bilinear itu

$$w = \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{dengan } ad - bc \neq 0 \quad \ldots\ldots 1)$$

Diberikan titik-titik $z = 0$, $z = 1$, $z = \infty$ yang terletak pada perbatasan $\mathrm{Im}(z) = 0$. Maka ketiga titik itu akan dipetakan ke titik w dengan modulus 1.

Untuk $z = \infty$ berpadanan dengan $w = a/c$ maka

$$|w| = |a/c| = 1$$

sehingga a/c dapat ditulis e^{iq} dengan q konstanta real, dan karena b, d tidak nol, maka bentuk (1) dapat ditulis

$$w = e^{iq}\,\frac{z - z_o}{z - z_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Jika z = 0 maka harga mutlak

$|w| = \left|e^{iq}\frac{z_o}{z_1}\right| = 1$, sehingga diperoleh hubungan $|z_o| = |z_1|$.

Maka diperoleh $z_1 = z_o$ atau $z_1 = \overline{z_o}$

Jikalau $z_1 = z_o$ maka (2) akan menghasilkan $w = e^{iq}$ yang merupakan fungsi konstan. Jadi harus diambil $z_1 = \overline{z_o}$ yang akan menghasilkan fungsi bilinear

$$w = e^{iq}\,\frac{z - z_o}{z - \overline{z_o}}$$

Untuk z = 1, diperoleh

$$|w| = |e^{iq}|\,\frac{|1 - z_o|}{|1 - \overline{z_o}|} = 1$$

Karena yang dicari adalah fungsi bilinear yang membawa separuh bidang atas kepada cakram satuan maka z_o diberi syarat $Im(z_o) > 0$.

Jadi diperoleh fungsi bilinear

$$w = e^{iq}\,\frac{z - z_0}{z - \overline{z_0}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

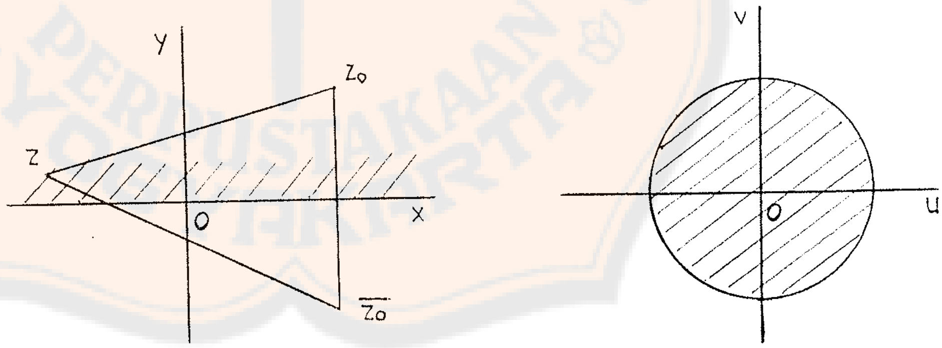
dengan q real dan $\mathrm{Im}(z_0) > 0$

Dari sini masih akan diperlihatkan bahwa setiap fungsi bilinear dengan bentuk (3) memetakan separuh bidang atas kepada cakram satuan.

Untuk sekarang z di bidang kompleks, diperoleh harga mutlak

$$|w| = \frac{|z - z_0|}{|z - \overline{z_0}|}$$

Secara geometris akan tampak bahwa jika titik z terletak pada separuh bidang atas maka $|z - z_0| < |z - \overline{z_0}|$, sehingga $|w| < 1$.



Gambar 3.2.6

Sedangkan jika titik z terletak pada separuh bidang bawah maka

$|z - z_0| > |z - \overline{z_0}|$ sehingga $|w| > 1$.

Jadi fungsi (3) hanya memetakan daerah separuh bidang atas kepada cakram satuan.

Contoh: Tentukan transformasi bilinear yang memetakan $z_1 = -1$, $z_2 = 0$, $z_3 = 1$ masing-masing ke $w_1 = -1$, $w_2 = -i$, $w_3 = 1$.

Jawab: Dengan teorema 3.2.6 akan diperoleh

$$\frac{(w + i)(-1 - 1)}{(w + i)(-i - 1)} = \frac{(z - 0)(-1 - 1)}{(z + 1)(0 - 1)}$$

Sehingga diperoleh :

$$w = \frac{z - i}{-iz + 1}$$

Fungsi ini dapat juga ditulis dalam bentuk

$$w = e^{i\pi/2}\,\frac{z - i}{z + i}$$

Fungsi ini memetakan separuh bidang atas kepada cakram satuan karena berbentuk

$$w = e^{i\phi}\,\frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0}$$

dengan $\phi = \pi/2$ dan $z_0 = i$

3.3 TRANSFORMASI BERTURUTAN

Pada awal pembahasan sub bab 3.2, telah dikemukakan bahwa fungsi linear dapat dipandang sebagai dua transformasi yang berturutan. Demikian juga telah dibuktikan bahwa fungsi bilinear dapat diperoleh melalui komposisi dari fungsi linear dan fungsi $w = 1/z$.

Berikut ini akan diberikan dua contoh sederhana dari transformasi berturutan.

3.3.1 FUNGSI w = tg z

Fungsi $w = \text{tg } z$ dapat ditulis sebagai :

$$w = \frac{\sin z}{\cos z}$$

Sehingga akan diperoleh

$$w = -i\,\frac{e^{2iz} - 1}{e^{2iz} + 1}$$

Jika diandaikan $Z = e^{2iz}$, $Z^* = \dfrac{Z - 1}{Z + 1}$ dan $w = -iZ^*$, maka fungsi $w = \text{tg } z$ merupakan transformasi bilinear yang didahului oleh transformasi eksponensial dan kemudian diikuti oleh rotasi sebesar $\pi/2$ searah jarum jam.

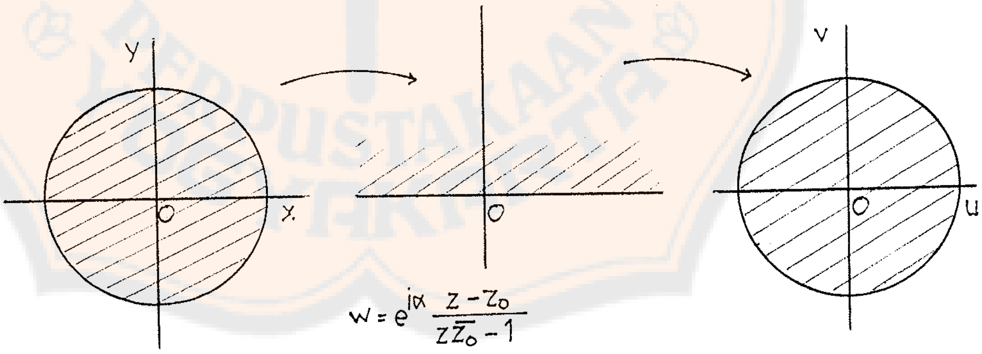
Turunan pertama fungsi $w = \text{tg } z$ adalah $w' = \sec^2 z$. Karena $w' \neq 0$ dan fungsi $w = \text{tg } z$ tidak analitik di $z = \pi/2 + k\pi$, dengan

$k = 0,1,2,...,$ maka fungsi $w = \text{tg } z$ bersifat konformal kecuali di titik $z = \pi/2 + k\pi$ dengan $k = 0, 1, 2, ...$

3.3.2 TRANSFORMASI CAKRAM SATUAN KEPADA CAKRAM SATUAN

Untuk contoh kedua ini dicari fungsi bilinear yang memetakan cakram satuan $|z| \leq 1$ kepada cakram satuan $|w| \leq 1$.

Dengan menggunakan gagasan transformasi berturutan, untuk mencari fungsi bilinear ini dapat dicapai dengan dua transformasi. Transformasi pertama memetakan cakram satuan $|z| \leq 1$ kepada separuh bidang atas σ. Kemudian transformasi kedua memetakan separuh bidang atas kepada cakram satuan $|w| \leq 1$.



Gambar 3.3.1

Pada pembahasan 3.2.8.2, telah dipunyai fungsi bilinear yang memetakan separuh bidang atas kepada cakram satuan. Dengan demikian invers dari fungsi bilinear itu memetakan cakram satuan kepada separuh bidang atas.

Jika diambil fungsi bilinear tertentu, yaitu

$$z = \frac{\sigma - i}{\sigma + i} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

maka fungsi ini memetakan separuh bidang atas kepada cakram satuan, karena fungsi ini berbentuk

$$w = e^{i\phi}\,\frac{z - z_o}{z - \overline{z_o}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

dengan ϕ real dalam hal ini $\phi = 0$ dan $z_o = i$.

Sehingga invers fungsi (1) adalah

$$\sigma = -i\,\frac{z + 1}{z - 1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

yang akan memetakan cakram satuan $|z| \leq 1$ kepada separuh bidang atas.

Untuk memperoleh fungsi yang memetakan separuh bidang atas kepada cakram satuan, fungsi (3) disubstitusikan ke dalam fungsi (2) dengan mengambil titik tertentu di bidang σ yaitu σ_o.

Maka akan diperoleh

$$w = e^{i\phi}\,\frac{-i\frac{z + 1}{z - 1} - \sigma_o}{-i\frac{z + 1}{z - 1} - \overline{\sigma_o}}$$

Dengan sedikit perhitungan diperoleh :

$$w = \frac{e^{i\phi}}{\dfrac{\overline{\sigma_o} - i}{\sigma_o + i}} \cdot \frac{z - \dfrac{\sigma_o - i}{\sigma_o + i}}{z\,\dfrac{\overline{\sigma_o} + i}{\overline{\sigma_o} - i} - 1}$$

Jika diandaikan $z_o = \dfrac{\sigma_o - i}{\sigma_o + i}$ dan karena $\dfrac{|\overline{\sigma_o} - i|}{|\sigma_o + i|} = 1$, sehingga

$$\frac{\overline{\sigma_o} - i}{\sigma_o + i} = e^{i\theta}$$

Maka diperoleh $w = \dfrac{e^{i\phi}}{e^{i\theta}} \cdot \dfrac{z - z_o}{z\,\overline{z_o} - 1}$

Jika diandaikan $\phi - \theta = \alpha$ maka secara umum fungsi bilinear yang memetakan cakram satuan kepada cakram satuan adalah sebagai berikut :

$$w = e^{i\alpha} \frac{z - z_o}{z\,\overline{z_o} - 1} \qquad \text{...........(4)}$$

dengan α real.

Dengan mengingat transformasi separuh bidang atas kepada cakram satuan, jelas bahwa fungsi bilinear (4) hanya akan memetakan cakram satuan kepada cakram satuan.

Tetapi akan lebih baik jika diselidiki apakah fungsi bilinear di atas benar-benarmemetakan cakram satuan $|z| \leq 1$ kepada cakram satuan $|w| \leq 1$.

Jika z terletak pada lingkaran $|z| = 1$, maka $z = e^{i\theta}$ sehingga diperoleh

$$w = -e^{i(\alpha + \theta)} \frac{1 - z_o e^{-i\theta}}{1 - \overline{z_o} e^{i\theta}}$$

yang mempunyai modulus 1, sehingga terletak pada lingkaran $|w| = 1$.

Jika $z = re^{i\theta}$ dan $z_o = \rho e^{i\alpha}$ dengan $\rho = |z_o| < 1$,

maka

$$\begin{aligned} |z-z_o|^2 - |z\,\overline{z_o}-1|^2 &= [r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos(\theta-\alpha)] - \\ &\quad [r^2\rho^2 + 1 - 2r\rho \cos(\theta-\alpha) + 1] \\ &= (r^2 - 1)(1 - \rho^2) \end{aligned}$$

Karena $(1 - \rho^2) > 0$, maka hasil ini memperlihatkan bahwa jika $r < 1$ maka $|z - z_o| < |z\,\overline{z_o} - 1|$ sehingga titik $z = re^{i\theta}$ berpadanan dengan titik w di mana $|w| < 1$. Sedangkan jika $r > 1$ maka $|z - z_o| > |z\,\overline{z_o} - 1|$ sehingga titik z berpadanan dengan w di mana $|w| > 1$.

Jadi terbukti bahwa fungsi bilinear di atas memetakan cakram satuan $|z| \leq 1$ kepada cakram satuan $|w| \leq 1$.

3.4 TRANSFORMASI KHUSUS

Berikut akan diberikan dua contoh transformasi khusus.

3.4.1 FUNGSI $w = z + 1/z$

Fungsi ini mempunyai turunan sebagai berikut

$$w' = \frac{(z + 1)(z - 1)}{z^2}$$

Ini berarti pemetaan $w = z + 1/z$ konformal kecuali di titik kritis, $z = -1$ dan $z = 1$, yang masing-masing berpadanan dengan titik $w = -2$ dan $w = 2$ dibidang w.

Diandaikan $w = u + iv$ dan $z = r(\cos t + i \sin t)$. Dalam bentuk polar akan diperoleh

$$u + iv = (r + 1/r) \cos t + i\,(r - 1/r) \sin t.$$

Maka $u = (r + 1/r) \cos t$ dan $v = (r - 1/r) \cos t$. Dengan menggunakan $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$, diperoleh

$$\frac{u^2}{(r + 1/r)^2} + \frac{v^2}{(r - 1/r)^2} = 1$$

Persamaan ini adalah persamaan ellips. Jadi lingkaran-lingkaran $|z| = r$ dipetakan kepada ellips-ellips yang sumbu utamanya terletak pada sumbu u dan v, dengan panjang masing-masing $2(r + 1/r)$ dan $2(r - 1/r)$.

Karena $[(r + 1/r)^2 - (r - 1/r)^2] = 4$ tidak tergantung pada besarnya r, maka ini berarti ellips-ellips tersebut mempunyai fokus yang sama yaitu di $w = -2$ dan $w = 2$. Khusus untuk lingkaran dengan jari-jari $r = 1$ dan berpusat di 0 dipetakan kepada ruas garis $-2 \leq u \leq 2$.

Perhatikan bahwa dari $w = z + 1/z$ dapat diperoleh

$$z = 1/2 \, [\, w \pm (\, (w+2)\,(w-2)\,)^{1/2}]$$

Tampak bahwa $w = -2$ dan $w = 2$ adalah titik cabang dari $z = z(w)$. Ini berarti setiap titik di bidang w kecuali $w = \pm 2$ adalah bayangan dari tepat dua titik di bidang z.

Perhatikan

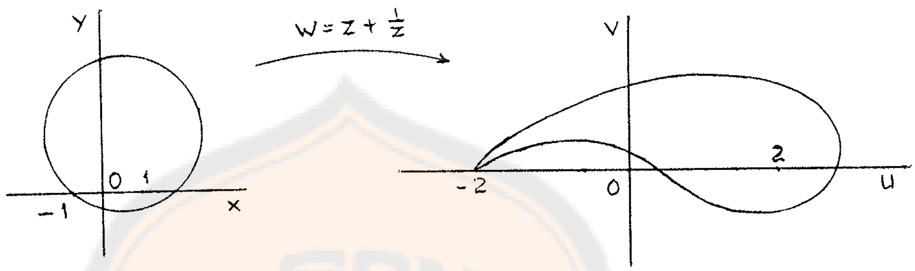
$$w(1/z) = 1/z + z = w(z)$$

Ini berarti bahwa dua lingkaran yang berpusat di 0 di bidang z dengan jari-jari r dan 1/r dipetakan kepada ellips yang sama di bidang w.

Selain apa yang telah dibahas di atas, masih ada satu hal yang perlu dikemukakan berkaitan dengan pemetaan ini, yaitu mengenai JOUKOWSKI AIRFOIL.

Oleh pemetaan $w = z + 1/z$ lingkaran yang melalui z

$z = -1$ dan memuat $z = 1$ dalam interiornya akan ditunjukkan oleh gambar berikut :



Gambar 3.4.1

Bayangan lingkaran itu sering dinamakan JOUKOWSKI AIRFOIL.

Cara termudah untuk menentukan bayangan suatu titik z di bidang w adalah melalui penjumlahan vektor-vektor yang menjadi padanan dari z dan 1/z.

Karena titik $z = -1$ adalah titik kritis maka fungsi $w = z + 1/z$ tidak konformal di titik tersebut, sehingga bayangan lingkaran pada gambar 3.4.1 akan menjadi runcing di titik $w = -2$ yang merupakan padanan dari titik $z = -1$.

3.4.2 FUNGSI $w = z + e^z$

Untuk fungsi $w = z + e^z$ ini akan di batasi untuk z pada daerah tak hingga S dimana

$$S : \{ z = x + iy,\ -\pi \le y \le \pi,\ -\infty < x < \infty \}.$$

Diandaikan $w = u + iv$ dan $z = x + iy$, maka

$$u + iv = x + iy + e^x (\cos y + i \sin y).$$

Sehingga diperoleh

$$u = x + e^x \cos y \text{ dan } v = y + e^x \sin y.$$

Jika $y = 0$, akan diperoleh $u = x + e^x$ dan $v = 0$. Maka sumbu x di bidang z dipetakan kepada sumbu u di bidang w.

Jika $y = \pi$, maka diperoleh $u = x - e^x$ dan $v = \pi$. Secara geometris akan tampak bahwa $u \le -1$. Sehingga garis $y = \pi$ dipetakan kepada garis

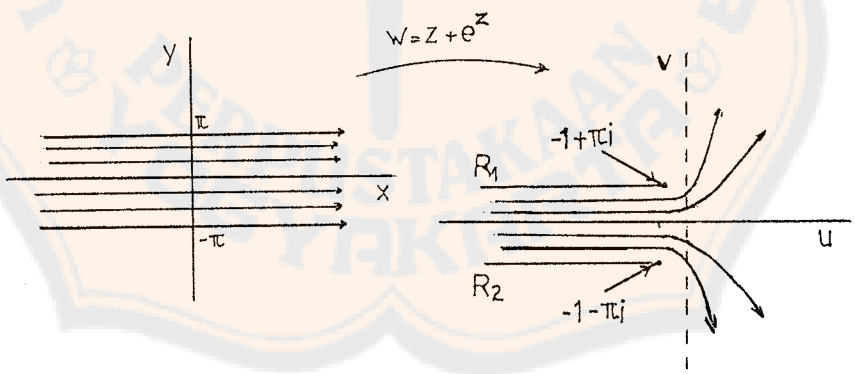
$$R_1 : u \le -1, v = \pi$$

di bidang w.

Jika $y = -\pi$, diperoleh $u = x - e^x$ dan $v = -\pi$. Maka garis $y = -\pi$ dipetakan kepada garis

$$R_2 : u \le -1, v = -\pi.$$

Sedangkan bayangan y = konstanta di dalam daerah S akan tergantung pada nilai x dan y = konstanta.



Gambar 3.4.2

BAB IV

PENUTUP

Sebagai penutup karya tulis ini, akan diakhiri dengan ikhitisar sebagai berikut :

1. Suatu pemetaan oleh fungsi kompleks di bidang datar dikatakan konformal jika pemetaan ini mempertahankan sudut antara dua kurva yang melalui dua titik, baik besar maupun arahnya.

2. Pemetaan yang didefinisikan oleh fungsi analitik $f(z)$ bersifat konformal kecuali di titik kritis yang menjadikan $f'(z) = 0$.

3. Satu-satunya transformasi konformal dari suatu domain di bidang z ke dalam domain di bidang w adalah berbentuk $w = f(z)$ dengan f suatu fungsi analitik.

4. Bayangan suatu bangun di kitar kecil z_o akan sebangun dengan bangun semula.

5. Jika diberikan suatu fungsi $f(z)$ yang analitik dalam domain D yang memuat titik z_o dan $f'(z_o) = f''(z_o) = \ldots = f^{(m-1)}(z_o) = 0$, tetapi $f^{(m)}(z_o) \neq 0$ maka pemetaan oleh fungsi $f(z)$ membesarkan sudut di z_o sebesar m kali lipat.

DAFTAR PUSTAKA

1. Churchill, Ruel V, Complex Variables and Aplications, New York, Mc Graww-Hill Publishing Co, 1990.
2. Kreyzyg, Erwin, Advanced Engineering Mathematics, Canada, John Wiley & Sons,Inc, 1988.
3. Narayan, Shanti, Theory Of Functions of a Complex Variable, Ram Nagar, New Delhi,S. Chand & Company Ltd, 1979.
4. Paliouras, John.D, Complex Variables for Scientists and Engineers, New York, Macmillan Publishing Co, Inc, 1975.
5. Palka, Bruce D, An Introduction to Complex Function Theory, New York, Springer-Verlag,Inc, 1991.
6. Soemantri, R., Fungsi Variabel Kompleks, Yogyakarta, 1994.
7. Saff, E. B, Snider, A.D., Fundamentals of Complex Analysis for Mathematics Science and Engineering, New Jersey, Prentice-Hall, Inc, 1988.