ABSTRAK

Ruang linear bernorma N adalah ruang linear N, dimana setiap vektor x di dalam N berkorespondensi dengan sebuah bilangan real yang dinyatakan sebagai $\|x\|$ dan disebut norma dari x, sedemikian sehingga memenuhi :

(1) $\|x\| \geq 0$ dan $\|x\|=0$ bila dan hanya bila $x=0$.

(2) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

(3) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$, $\alpha\in\mathbb{K}$, dengan $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ atau $\mathbb{C}$.

Suatu barisan $\langle x_n\rangle$ dalam ruang linear bernorma N disebut barisan Cauchy, jika untuk $\forall\varepsilon>0$, terdapat $n_o\in\mathbb{N}$ sehingga $\|x_n-x_m\|<\varepsilon$, untuk $n,m>n_o$. Barisan $\langle x_n\rangle$ dalam ruang linear bernorma N adalah konvergen ke $x\in N$, jika untuk $\forall\varepsilon>0$, terdapat $n_o \in \mathbb{N}$, sehingga $\|x_n-x\|<\varepsilon$, untuk $n\geq n_o$. Ruang Banach adalah ruang linear bernorma yang lengkap, artinya setiap barisan Cauchy didalamnya adalah konvergen.

Ruang Euclides $\mathbb{R}^k$ adalah ruang linear bernorma, dengan norma untuk $x \in \mathbb{R}^k$ didefinisikan sebagai

$$\|x\|=\left(\sum_{j=1}^{k} x_j^2\right)^{1/2}$$

Di dalam $\mathbb{R}^k$ setiap barisan Cauchy adalah konvergen. Jadi $\mathbb{R}^k$ adalah ruang Banach. Suatu barisan fungsi-fungsi $\langle f_n\rangle$ dikatakan konvergen seragam pada himpunan E ke suatu fungsi $f\in E$, jika untuk $\forall\varepsilon>0$, terdapat suatu $p\in\mathbb{N}$ sehingga untuk semua $n\geq p$ dan semua $x\in E$ berlaku $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$. Andaikan C(X) adalah himpunan semua fungsi bernilai real atau kompleks yang kontinu dan terbatas yang didefinisikan pada X. Selanjutnya untuk setiap $f \in C(X)$ didefinisikan norma untuk f yang disebut *norma suprimum* sebagai $\|f\| = \sup_{x\in X} |f(x)|$. C(X) yang dilengkapi dengan norma suprimum merupakan ruang Banach.

Andaikan U dan V adalah ruang linear dan T adalah pemetaan dari U ke V. Maka T dikatakan pemetaan linear jika $T(\alpha x+\beta y)=\alpha T(x)+\beta T(y)$, $\forall x,y\in U$, $\forall \alpha,\beta\in \mathbb{K}$, $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ atau $\mathbb{C}$. Pemetaan linear disebut juga transformasi linear. Transformasi linear T dari ruang linear bernorma N ke linear bernorma N′ disebut *kontinu* bila dan hanya bila $\|x_n-x\| \longrightarrow 0 \Rightarrow \|T(x_n)-T(x)\| \longrightarrow 0$. Jika T kontinu pada suatu titik di dalam N, maka T kontinu pada N. Transformasi linear T dari ruang linear bernorma N ke ruang linear bernorma N′ dikatakan *terbatas* jika terdapat $M\in\mathbb{R}$, $M>0$ sedemikian sehingga $\|T(x)\| \le M$, untuk $\forall x\in N$. Norma untuk T ditulis dengan $\|T\|$ didefinisikan sebagai

$\|T\| = \sup\{\|T(x)\| : \|x\|\le 1\}$, yang ekuivalen dengan

$$\|T\| = \sup\{\|T(x)\| : \|x\|=1\}$$

$$= \sup\left\{ \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} : x\in N \text{ dan } x\neq 0 \right\}$$

$$= \inf\{K\ge 0 \text{ dan } \|T(x)\|\le K\|x\|,\ \forall x\in N\}$$

Transformasi linear T kontinu pada N bila dan hanya bila T terbatas. Selanjutnya jika $B(N,N')$ adalah himpunan semua transformasi linear kontinu dan dari suatu ruang linear bernorma N ke dalam ruang Banach N′. Maka $B(N,N')$ adalah ruang Banach.

Dalam ruang Banach berlaku tiga teorema fundamental, yakni :

(a) Teorema Hahn-Banach
(b) Teorema Pemetaan Terbuka
(c) Teorema Keterbatasan Seragam .

Andaikan f adalah fungsional linear terbatas pada N. Bilangan real tak negatif $\|f\|$ yang didefinisikan sebagai $\|f\|=\sup\{|f(x)|:\|x\|\le 1\}$ disebut *norma* dari f. Himpunan semua fungsional linear terbatas dari ruang linear bernorma N ke $\mathbb{K}$ ditulis sebagai $B(N,\mathbb{K})$, sering juga ditulis sebagai N^* dan disebut *ruang dual* dari N. N^* yang dilengkapi dengan norma yang didefinisikan di atas merupakan ruang Banach.

Lemma Hahn-Banach, menyatakan bahwa jika X adalah ruang linear real dan p adalah *fungsional sublinear* pada X, Y adalah subruang linear dari X dan f adalah fungsional linear pada Y yang memenuhi sifat

$$f(x) \le p(x), \text{ untuk semua } x \in Y.$$

Maka terdapat suatu fungsional linear F pada X sedemikian sehingga

(i) $F(x) = f(x)$, untuk semua $x \in Y$.

(ii) $F(x) \le p(x)$, untuk semua $x \in X-Y$.

Fungsional linear F disebut sebagai perluasan dari fungsional linear f. Lemma ini digunakan untuk membuktikan *Teorema Hahn-Banach* yang menyatakan bahwa jika X adalah ruang linear bernorma dan Y adalah subruang linear dari X dan jika $f \in Y^*$, maka terdapat suatu *fungsional* $g \in X^*$ sedemikian sehingga g merupakan perluasan dari f dan $\|g\| = \|f\|$.

Suatu himpunan bagian A dari ruang metrik (X,d) disebut *dense* dalam X jika $\bar{A}=X$. Suatu himpunan bagian A dari ruang metrik (X,d) dikatakan *nowhere dense* jika penutup A memuat interior yang kosong. Suatu himpunan bagian Y dari ruang metrik (X,ρ) disebut *kategori pertama* jika terdapat $\langle A_n \rangle$ barisan himpunan bagian yang nowhere dense sedemikian sehingga $Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Suatu ruang metrik disebut ruang Baire jika setiap himpunan terbuka yang tidak kosong bukan himpunan kategori pertama. Suatu ruang metrik adalah ruang Baire jika dan hanya jika setiap irisan terbilang himpunan terbuka yang dense adalah dense. Setiap ruang metrik yang lengkap adalah ruang Baire. Teorema Pemetaan Terbuka menyatakan bahwa jika B dan B′ adalah ruang Banach dan jika T adalah transformasi linear kontinu dari B kepada B′, maka T adalah pemetaan terbuka.

Teorema Arzela-Ascoli menyatakan bahwa jika K adalah ruang metrik yang kompak, dan jika f_n fungsi real atau kompleks yang kontinu pada K, dan $\langle f_n \rangle$ barisan terbatas titik demi titik dan ekuikontinu pada K, maka

(i) $\langle f_n \rangle$ terbatas seragam pada K

(ii) $\langle f_n \rangle$ memuat subbarisan yang konvergen seragam.

Teorema Keterbatasan Seragam menyatakan bahwa jika X adalah ruang Banach dan Y adalah ruang linear bernorma dan jika $\{T_\alpha\}$ adalah keluarga dari transformasi linear terbatas dari X ke Y, jika untuk setiap $x \in X$, $\{T_\alpha(x)\}$ adalah himpunan terbatas, maka $\{\|T_\alpha\|\}$ adalah himpunan terbatas.