

RUANG BANACH

SKRIPSI

Diajukan Untuk Memenuhi Salah Satu Syarat
Memperoleh Gelar Sarjana Pendidikan
Program Studi Pendidikan Matematika



Oleh :

Paulus Wikatmo

N I M : 92414058

NIRM : 923052010501120065

Jurusan Pendidikan Matematika Dan Ilmu Pengetahuan Alam
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
UNIVERSITAS SANATA DHARMA
YOGYAKARTA

1994

SKRIPSI

RUANG BANACH

Oleh

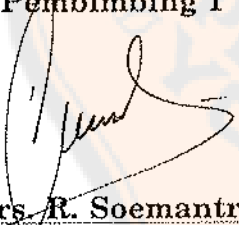
Paulus Wikatmo

N I M : 92414058

NIRM : 923052010501120065

Telah disetujui oleh :

Pembimbing I


Drs. R. Soemantri

tanggal 28 September 1994

Pembimbing II


Dra. A. Linda Yuliasuti

tanggal 28 September 1994

SKRIPSI

RUANG BANACH

Yang dipersiapkan dan disusun oleh

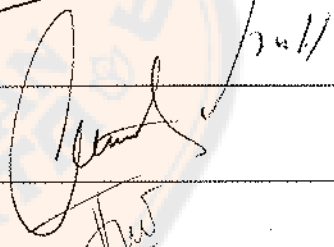
Paulus Wikatmo

N I M : 92414058

NIRM : 923052010501120065

Telah dipertahankan di depan Panitia Penguji
pada tanggal 15 Oktober 1994
dan dinyatakan telah memenuhi syarat

Susunan Panitia Penguji

	Nama lengkap	Tanda Tangan
Ketua	: Dr. St. Suwarsono	
Sekretaris	: Dr. Y. Marpaung	
Anggota I	: Drs. R. Soemantri	
Anggota II	: Dra. A. Linda Yuliasuti	
Anggota III	: Drs. A. Tutoyo, M.Sc	

Yogyakarta, 4/11/ 1994
Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan
Universitas Sanata Dharma
Dekan



Priyono Marwan
Dr. A. Priyono Marwan, S.J.

KATA PENGANTAR

Penulis panjatkan puji dan syukur kepada Tuhan Yang Maha Kasih yang telah melimpahkan rahmat dan kasihNya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.

Skripsi ini disusun sebagai salah satu syarat untuk menyelesaikan program Strata 1 dalam bidang Pendidikan Matematika pada Jurusan Pendidikan Matematika dan IPA, Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Universitas Sanata Dharma Yogyakarta.

Dengan selesainya penyusunan Skripsi ini, maka pada kesempatan ini penulis mengucapkan terima kasih kepada :

1. Bapak Drs. R. Soemantri selaku pembimbing I yang telah memberikan petunjuk dan saran-saran sehingga skripsi ini dapat diselesaikan.
2. Ibu Dra. A. Linda Yuliasuti selaku pembimbing II yang telah memberikan koreksi terhadap kesalahan yang ada dalam skripsi ini.
3. Bapak dan Ibu dosen pada JPMIPA Universitas Sanata Dharma atas segala bimbingan selama penulis menempuh kuliah.
4. Semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu atas bantuannya sehingga skripsi ini dapat diselesaikan.

Segala saran dan kritik yang membangun penulis terima dengan senang hati. Akhirnya penulis berharap semoga tulisan ini bermanfaat.

Yogyakarta, September 1994

Penulis

DAFTAR ISI

	Halaman
HALAMAN JUDUL	i
HALAMAN PERSETUJUAN PEMBIMBING	ii
HALAMAN PENGESAHAN	iii
KATA PENGANTAR	iv
DAFTAR ISI	v
ABSTRAK	vii
BAB I. PENDAHULUAN	1
BAB II. TEORI PENDUKUNG	3
2.1. Fungsi	3
2.2. Ruang Metrik	3
2.3. Batas Atas dan Bawah himpunan	4
2.4. Himpunan Terbuka dan Tertutup	6
2.5. Barisan konvergen dan ruang metrik lengkap	11
2.6. Pemetaan Kontinu	14
2.7. Ruang Linear	17
2.8. Ruang Topologi	17
2.9. Lemma Zorn	19
2.10. Penutup himpunan	20
BAB III. DEFINISI DAN CONTOH RUANG BANACH	22
3.1. Definisi Ruang Banach	22
3.2. Contoh Ruang Banach	26
3.3. Barisan Fungsi	42
3.4. Ruang Fungsi-fungsi	51

BAB IV.	TRANSFORMASI LINEAR KONTINU	55
4.1.	Transformasi Linear Kontinu	55
4.2.	Transformasi Linear Terbatas	56
4.3.	Himpunan Transformasi Linear Kontinu	58
BAB V.	TEOREMA HAHN-BANACH	68
5.1.	Lemma Hahn-Banach	68
5.2.	Teorema Hahn-Banach	73
BAB VI.	TEOREMA PEMETAAN TERBUKA	81
6.1.	Teorema Baire	81
6.2.	Teorema Pemetaan Terbuka	88
6.3.	Teorema Graph Tertutup	89
BAB VII.	TEOREMA KETERBATASAN SERAGAM	93
7.1.	Barisan Terbatas Seragam	93
7.2.	Keluarga Fungsi Ekuikontinu	97
7.3.	Teorema Keterbatasan Seragam	101
BAB VIII.	PENUTUP	105
	DAFTAR PUSTAKA	107

ABSTRAK

Ruang linear bernorma N adalah ruang linear N , dimana setiap vektor x di dalam N berkorespondensi dengan sebuah bilangan real yang dinyatakan sebagai $\|x\|$ dan disebut norma dari x , sedemikian sehingga memenuhi :

- (1) $\|x\| \geq 0$ dan $\|x\|=0$ bila dan hanya bila $x=0$.
- (2) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.
- (3) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$, $\alpha \in K$, dengan $K=\mathbb{R}$ atau $\mathbb{C}$.

Suatu barisan $\langle x_n \rangle$ dalam ruang linear bernorma N disebut barisan Cauchy, jika untuk $\forall \epsilon > 0$, terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$ sehingga $\|x_n - x_m\| < \epsilon$, untuk $n, m > n_0$. Barisan $\langle x_n \rangle$ dalam ruang linear bernorma N adalah konvergen ke $x \in N$, jika untuk $\forall \epsilon > 0$, terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$, sehingga $\|x_n - x\| < \epsilon$, untuk $n \geq n_0$. Ruang Banach adalah ruang linear bernorma yang lengkap, artinya setiap barisan Cauchy didalamnya adalah konvergen.

Ruang Euclides $\mathbb{R}^k$ adalah ruang linear bernorma, dengan norma untuk $x \in \mathbb{R}^k$ didefinisikan sebagai

$$\|x\| = \left(\sum_{j=1}^k x_j^2 \right)^{1/2}.$$

Di dalam $\mathbb{R}^k$ setiap barisan Cauchy adalah konvergen. Jadi $\mathbb{R}^k$ adalah ruang Banach. Suatu barisan fungsi-fungsi $\langle f_n \rangle$ dikatakan konvergen seragam pada himpunan E ke suatu fungsi $f \in E$, jika untuk $\forall \epsilon > 0$, terdapat suatu $p \in \mathbb{N}$ sehingga untuk semua $n \geq p$ dan semua $x \in E$ berlaku $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$. Andaikan $C(X)$ adalah himpunan semua fungsi bernilai real atau kompleks yang kontinu dan terbatas yang didefinisikan pada X . Selanjutnya untuk setiap $f \in C(X)$ didefinisikan norma untuk f yang disebut *norma suprimum* sebagai $\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$. $C(X)$ yang dilengkapi dengan norma suprimum merupakan ruang Banach.

Andaikan U dan V adalah ruang linear dan T adalah pemetaan dari U ke V . Maka T dikatakan pemetaan linear jika $T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$, $\forall x, y \in U$, $\forall \alpha, \beta \in K$, $K = \mathbb{R}$ atau $\mathbb{C}$. Pemetaan linear disebut juga transformasi linear. Transformasi linear T dari ruang linear bernorma N ke linear bernorma N' disebut *kontinu* bila dan hanya bila $\|x_n - x\| \rightarrow 0 \Rightarrow \|T(x_n) - T(x)\| \rightarrow 0$. Jika T kontinu pada suatu titik di dalam N , maka T kontinu pada N . Transformasi linear T dari ruang linear bernorma N ke ruang linear bernorma N' dikatakan *terbatas* jika terdapat $M \in \mathbb{R}$, $M > 0$ sedemikian sehingga $\|T(x)\| \leq M$, untuk $\forall x \in N$. Norma untuk T ditulis dengan $\|T\|$ didefinisikan sebagai

$$\begin{aligned} \|T\| &= \sup\{\|T(x)\| : \|x\| \leq 1\}, \text{ yang ekuivalen dengan} \\ \|T\| &= \sup\{\|T(x)\| : \|x\| = 1\} \\ &= \sup\left\{ \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} : x \in N \text{ dan } x \neq 0 \right\} \\ &= \inf\{K \geq 0 \text{ dan } \|T(x)\| \leq K\|x\|, \forall x \in N\} \end{aligned}$$

Transformasi linear T kontinu pada N bila dan hanya bila T terbatas. Selanjutnya jika $B(N, N')$ adalah himpunan semua transformasi linear kontinu dari suatu ruang linear bernorma N ke dalam ruang Banach N' . Maka $B(N, N')$ adalah ruang Banach.

Dalam ruang Banach berlaku tiga teorema fundamental, yakni :

- (a) Teorema Hahn-Banach
- (b) Teorema Pemetaan Terbuka
- (c) Teorema Keterbatasan Seragam .

Andaikan f adalah fungsional linear terbatas pada N . Bilangan real tak negatif $\|f\|$ yang didefinisikan sebagai $\|f\| = \sup\{|f(x)| : \|x\| \leq 1\}$ disebut *norma* dari f . Himpunan semua fungsional linear terbatas dari ruang linear bernorma N ke K ditulis sebagai $B(N, K)$, sering juga ditulis sebagai N^* dan disebut *ruang dual* dari N . N^* yang dilengkapi dengan norma yang didefinisikan di atas merupakan ruang Banach.

Lemma Hahn-Banach, menyatakan bahwa jika X adalah ruang linear real dan p adalah *funksional sublinear* pada X , Y adalah subruang linear dari X dan f adalah fungsional linear pada Y yang memenuhi sifat

$$f(x) \leq p(x), \text{ untuk semua } x \in Y.$$

Maka terdapat suatu fungsional linear F pada X sedemikian sehingga

$$(i) \quad F(x) = f(x), \text{ untuk semua } x \in Y.$$

$$(ii) \quad F(x) \leq p(x), \text{ untuk semua } x \in X-Y.$$

Fungsional linear F disebut sebagai perluasan dari fungsional linear f . Lemma ini digunakan untuk membuktikan *Teorema Hahn-Banach* yang menyatakan bahwa jika X adalah ruang linear bernorma dan Y adalah subruang linear dari X dan jika $f \in Y^*$, maka terdapat suatu *funksional* $g \in X^*$ sedemikian sehingga g merupakan perluasan dari f dan $\|g\| = \|f\|$.

Suatu himpunan bagian A dari ruang metrik (X, d) disebut *dense* dalam X jika $\bar{A} = X$. Suatu himpunan bagian A dari ruang metrik (X, d) dikatakan *nowhere dense* jika penutup A memuat interior yang kosong. Suatu himpunan bagian Y dari ruang metrik (X, ρ) disebut *kategori pertama* jika terdapat $\langle A_n \rangle$ barisan himpunan bagian yang *nowhere dense* sedemikian sehingga $Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Suatu ruang metrik disebut ruang Baire jika setiap himpunan terbuka yang tidak kosong bukan himpunan kategori pertama. Suatu ruang metrik adalah ruang Baire jika dan hanya jika setiap irisan terbilang himpunan terbuka yang *dense* adalah *dense*. Setiap ruang metrik yang lengkap adalah ruang Baire. Teorema Pemetaan Terbuka menyatakan bahwa jika B dan B' adalah ruang Banach dan jika T adalah transformasi linear kontinu dari B kepada B' , maka T adalah pemetaan terbuka.

Teorema Arzela-Ascoli menyatakan bahwa jika K adalah ruang metrik yang kompak, dan jika f_n fungsi real atau

kompleks yang kontinu pada K , dan $\langle f_n \rangle$ barisan terbatas titik demi titik dan ekuikontinu pada K , maka

- (i) $\langle f_n \rangle$ terbatas seragam pada K
- (ii) $\langle f_n \rangle$ memuat subbarisan yang konvergen seragam.

Teorema Keterbatasan Seragam menyatakan bahwa jika X adalah ruang Banach dan Y adalah ruang linear bernorma dan jika $\{T_\alpha\}$ adalah keluarga dari transformasi linear terbatas dari X ke Y , jika untuk setiap $x \in X$, $\{T_\alpha(x)\}$ adalah himpunan terbatas, maka $\{\|T_\alpha\|\}$ adalah himpunan terbatas.

BAB I

PENDAHULUAN

Pembahasan konsep ruang Banach dalam karya tulis ini, dipusatkan pada pembahasan contoh-contoh ruang Banach dan beberapa teorema yang berlaku dalam ruang Banach, yaitu : a) *Teorema Hahn-Banach*

b) *Teorema Pemetaan Terbuka*

c) *Teorema Keterbatasan Seragam*

Pembahasan konsep ruang Banach dalam karya tulis ini dimulai dengan membahas beberapa konsep pendukung. Konsep pendukung tersebut adalah definisi-definisi, lemma maupun teorema-teorema yang akan digunakan dalam pembahasan konsep ruang Banach beserta contoh dan sifat-sifatnya.

Konsep-konsep pendukung ini akan diuraikan secara lebih khusus dalam bab II. Hal-hal yang akan dibahas dalam bab II adalah fungsi, ruang metrik, batas atas dan batas bawah himpunan terurut, himpunan terbuka dan himpunan tertutup, barisan konvergen dan ruang metrik yang lengkap, pemetaan kontinu, ruang linear, ruang topologi, lemma Zorn dan penutup suatu himpunan.

Konsep-konsep pendukung yang dibahas dalam bab II, tidak akan diuraikan secara mendalam, tetapi hanya dibahas beberapa konsep dan sifat yang benar-benar penting dalam kaitannya dengan pembahasan konsep Ruang Banach .

Dalam bab III akan dibahas tentang definisi dan contoh ruang Banach, yang akan didahului dengan definisi ruang linear bernorma. Konsep konvergensi dari suatu barisan Cauchy amat berperanan dalam pembahasan konsep ruang Banach beserta contoh-contohnya. Oleh karena itu akan dibahas konsep konvergensi yang lebih kuat daripada konvergensi titik demi titik, yakni konvergensi seragam (uniform).

Dalam bab IV dibahas tentang konsep Transformasi Linear Kontinu dan beberapa sifatnya. Konsep ini akan banyak dipakai dalam pembahasan selanjutnya.

Dalam bab V dibahas tentang Teorema Hahn-Banach. Konsep fungsional linear amat berperanan dalam pembuktian teorema Hahn-Banach dan teorema lain yang diturunkan dari teorema ini. Pembuktian teorema Hahn-Banach diawali dengan pembuktian lemma Hahn-Banach dan disinilah Lemma Zorn digunakan.

Dalam bab VI dibahas tentang Teorema Pemetaan Terbuka (Open Mapping Theorem) dan teorema ini digunakan untuk membuktikan Teorema Graph Tertutup (Closed Graph Theorem). Untuk membuktikan Teorema Pemetaan Terbuka, diawali dengan membuktikan teorema Baire.

Dalam bab VII dibahas tentang Teorema Keterbatasan Seragam (Uniform Boundedness Theorem). Pembuktian teorema ini diawali dengan pembahasan konsep terbatas seragam dan pembuktian teorema Arzela-Ascoli.

BAB II

TEORI PENDUKUNG

Dalam bagian ini dibahas beberapa konsep yang diperlukan dalam pembahasan selanjutnya.

2.1. Fungsi

Definisi 2.1.1.:

Andaikan A dan B adalah himpunan yang tidak kosong. Suatu relasi f yang mengawankan setiap elemen $x \in A$, dengan tepat satu $f(x) \in B$ disebut fungsi dari A ke B , dinotasikan dengan $f : A \rightarrow B$. Himpunan A disebut daerah asal(domain) dan himpunan B disebut daerah kawan (kodomain), himpunan $C = f(A) \subseteq B$, disebut daerah hasil (range) dari f .

Istilah pemetaan juga digunakan sebagai pengganti istilah fungsi.

2.2. Ruang Metrik

Definisi 2.2.1.:

Andaikan X adalah sebarang himpunan yang tidak kosong. Didefinisikan $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$, dimana d adalah fungsi dari $X \times X$ ke dalam $\mathbb{R}$, yang memenuhi sifat :

- (i). $d(x,y) \geq 0$, $\forall x,y \in X$.
- (ii). $d(x,y) = 0$ bila dan hanya bila $x=y$, $\forall x,y \in X$.
- (iii). $d(x,y) = d(y,x)$, $\forall x,y \in X$.
- (iv) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$, $\forall x,y,z \in X$.

Sebarang fungsi d yang memenuhi sifat-sifat di atas disebut metrik pada X . Sebarang himpunan $X \neq \emptyset$ yang dilengkapi dengan suatu metrik d pada X disebut ruang metrik dan dinyatakan sebagai (X, d) , yang sering hanya disingkat sebagai ruang metrik X saja. Anggota X disebut titik .

Contoh 2.2.1.:

Garis real $\mathbb{R}$ dengan metrik biasa yaitu jarak antara x dan y yang didefinisikan sebagai $|x - y|$, adalah ruang metrik.

$$(i) d(x, y) = |x - y| \geq 0, \forall x, y \in \mathbb{R}$$

$$(ii) d(x, y) = |x - y| = 0 \text{ bhab } x - y = 0 \text{ bhab } x = y, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

$$(iii) d(x, y) = |x - y| \\ = |-(y - x)| = |y - x| = d(y, x), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

$$(iv) d(x, z) = |x - z| \\ = |(x - y) + (y - z)| \\ \leq |x - y| + |y - z| \\ = d(x, y) + d(y, z), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

2.3. Batas atas dan batas bawah himpunan terurut

Definisi 2.3.1 :

Diberikan himpunan S . Suatu urutan pada himpunan S adalah suatu relasi yang dinyatakan dengan $<$ dengan dua sifat berikut :

(i) jika $x \in S$ dan $y \in S$, maka satu dan hanya satu diantara tiga pernyataan berikut yang benar : $x < y$, $x = y$, $y < x$

(ii) jika x, y dan $z \in S$ dan jika $x < y$ dan $y < z$ maka $x < z$.

Jika pada suatu himpunan S telah didefinisikan suatu

urutan, maka S dinamakan *himpunan terurut*.

Contoh 2.3.1.:

Himpunan bilangan rasional adalah himpunan terurut.

Definisi 2.3.2.:

Diberikan himpunan terurut S dan $E \subset S$. Himpunan E dikatakan *terbatas ke atas* jika terdapat suatu elemen $p \in S$ sehingga untuk semua $x \in E$ berlaku $x \leq p$.

Elemen p semacam ini disebut suatu batas atas himpunan E . Jika terdapat suatu elemen $q \in S$ dan untuk semua $x \in E$ berlaku $x \geq q$, maka E dikatakan *terbatas ke bawah*. Elemen semacam q ini disebut batas bawah himpunan E .

Definisi 2.3.3.:

Andaikan S adalah suatu himpunan terurut dan $E \subset S$, dan E terbatas ke atas. Diandaikan bahwa terdapat suatu elemen $a \in S$ yang memenuhi sifat-sifat berikut :

- (i) a adalah batas atas E
 - (ii) jika p adalah batas atas dari E , maka $p \geq a$
- maka elemen a ini disebut batas atas terkecil (*suprimum*) himpunan E dan dinotasikan dengan $a = \sup E$.

Definisi 2.3.4 :

Batas bawah terbesar atau infimum suatu himpunan terbatas ke bawah E , didefinisikan sebagai elemen $b \in S$ dengan sifat bahwa : b adalah batas bawah E dan jika q adalah batas bawah E maka q lebih kecil atau sama dengan b dan dinotasikan dengan $b = \inf E$.

Contoh 2.3.2.:

Andaikan Q adalah himpunan semua bilangan rasional dan andaikan $F \subset Q$, dimana $F = \{-1, 2, 5, 7, 9\}$. Himpunan F

adalah terbatas ke atas dan terbatas ke bawah, dengan $\sup F = 9$ dan $\inf F = -1$.

2.4. Himpunan Terbuka (*open set*) dan himpunan tertutup (*closed set*).

Definisi 2.4.1.:

Andaikan X adalah sebarang ruang metrik dengan metrik d . Jika x_0 adalah titik dalam X dan r adalah bilangan real positif. Suatu bola terbuka (*open sphere*) $S_r(x_0)$ dengan pusat x_0 dan jari-jari r adalah himpunan bagian dari X yang didefinisikan sebagai

$$S_r(x_0) = \{x : d(x, x_0) < r\}$$

Definisi 2.4.2 :

Suatu himpunan G yang merupakan himpunan bagian dari ruang metrik X disebut *himpunan terbuka (open set)* jika diberikan sebarang titik $x \in G$, maka terdapat bilangan real positif r sedemikian sehingga $S_r(x) \subseteq G$, yaitu jika setiap titik dari G adalah pusat dari suatu bola terbuka yang termuat dalam G .

Definisi 2.4.3 :

Andaikan X adalah sebarang ruang metrik dan A adalah himpunan bagian dari X . Suatu titik $x \in X$ disebut *titik interior* dari A jika x adalah pusat suatu bola terbuka yang masih termuat dalam A dan interior dari A ditulis sebagai $\text{Int}(A)$, yaitu himpunan semua titik interior dari A . $\text{Int}(A) = \{x : x \in A \text{ dan } S_r(x) \subseteq A, r \in \mathbb{R}\}$

Definisi 2.4.4.:

Jika p adalah sebarang titik di dalam X , dan $r > 0$, maka himpunan $N_r(p) = \{x \in X : d(p, x) < r\}$ dinamakan daerah

kitar titik p dengan radius r , dan disingkat dengan kitar titik p dengan radius r . Titik p dinamakan pusat kitar $N_r(p)$. Jadi setiap titik mempunyai tak berhingga banyak kitar.

Jadi definisi kitar adalah definisi lain dari bola terbuka, artinya bola terbuka berpusat di p dengan radius r adalah kitar dari p dengan radius r .

Definisi 2.4.5 :

Titik $p \in X$ disebut titik limit E himpunan bagian X , bila setiap kitar titik p memuat paling sedikit satu titik $q \in E$ dan $q \neq p$. Titik anggota E yang bukan titik limit disebut titik terasing.

Di dalam sebarang ruang metrik, himpunan berhingga tidak mempunyai titik limit. Jadi himpunan yang mempunyai titik limit pastilah himpunan tak berhingga.

Definisi 2.4.6 :

Diberikan ruang metrik X dan andaikan E adalah himpunan bagian dari X . Himpunan E disebut tertutup jika semua titik limitnya termuat di dalam E .

Teorema 2.4.1.:

Dalam sebarang ruang metrik X , himpunan kosong dan X sendiri adalah terbuka .

Bukti :

Himpunan $G \subset X$ disebut tidak terbuka, jika terdapat suatu titik $p \in X$ dan p bukan titik interior G . Tetapi kita tidak dapat menemukan titik p semacam itu apabila $G = \emptyset$. Jadi tidak benar bahwa $\emptyset$ adalah himpunan yang tidak terbuka. Dengan demikian $\emptyset$ adalah terbuka. X jelas

terbuka karena setiap bola terbuka yang berpusat di dalam X termuat dalam X . ■

Teorema 2.4.2 :

Himpunan E terbuka jika dan hanya jika E^c tertutup.

Bukti :

Andaikan bahwa E^c tertutup, dibuktikan bahwa E terbuka. Diambil sebarang titik $x \in E$. Karena $x \notin E^c$ dan E^c tertutup maka x bukan titik limit E^c . Jadi terdapatlah $r > 0$ sehingga $N_r(x) \cap E^c = \emptyset$. Dengan demikian $N_r(x) \subset E$. (perhatikan bahwa $A \cap B = \emptyset$ jika dan hanya jika $A \subset B^c$). Hal ini berarti bahwa x adalah titik interior dari E . Jadi, jika $x \in E$ maka x titik interior E . Terbukti bahwa E terbuka.

Selanjutnya diandaikan E terbuka. Misalkan x adalah sebarang titik limit E^c . Jadi setiap $N_r(x)$ memuat tak berhingga banyak titik-titik anggota E^c , sehingga tidak ada kitar dari x yang menjadi subset dari E . Karena itu x bukan titik interior dari E . Karena diketahui E terbuka, ini berarti x bukan anggota dari E , atau $x \in E^c$. Jadi kita peroleh kesimpulan bahwa jika x titik limit E^c maka $x \in E^c$. Jadi E^c tertutup. ■

Teorema 2.4.3.:

Dalam sebarang ruang metrik X , setiap bola terbuka adalah himpunan terbuka.

Bukti :

Andaikan $S_r(x_0)$ adalah bola terbuka di dalam X , dan andaikan x adalah sebarang titik di dalam $S_r(x_0)$. Dibuat bola terbuka yang berpusat di x dan termuat di dalam

$S_r(x_0)$. Karena $d(x, x_0) < r$, maka terdapat $r_1 = r - d(x, x_0)$ adalah bilangan real positif. Akan ditunjukkan bahwa $S_{r_1}(x) \subseteq S_r(x_0)$. Jika y adalah titik di dalam $S_{r_1}(x)$, jadi $d(y, x) < r_1$, maka

$$\begin{aligned} d(y, x_0) &\leq d(y, x) + d(x, x_0) \\ &< r_1 + d(x, x_0) \\ &= [r - d(x, x_0) + d(x, x_0)] = r \end{aligned}$$

hal ini menunjukkan bahwa y berada di dalam $S_r(x_0)$. ■

Teorema 2.4.4.:

Andaikan X adalah ruang metrik dan andaikan G adalah himpunan bagian dari X . G adalah terbuka bila dan hanya bila G adalah gabungan dari bola terbuka.

Bukti :

($\Rightarrow$) Andaikan G adalah terbuka, akan ditunjukkan bahwa G adalah gabungan dari bola terbuka. Jika G kosong maka G adalah gabungan dari keluarga himpunan kosong dari bola terbuka. Jika G tidak kosong maka, karena G adalah terbuka, tiap titik dari G adalah pusat dari bola terbuka yang termuat dalam G dan G adalah gabungan dari semua bola terbuka yang berpusat di suatu titik dalam G dan termuat dalam G .

($\Leftarrow$) Andaikan G adalah gabungan dari suatu kelas S dari bola terbuka dalam G . Harus ditunjukkan bahwa G adalah terbuka. Jika S adalah kosong, maka G juga kosong dan menurut Teorema 2.4.1. G adalah terbuka. Andaikan S tidak kosong, maka G juga tidak kosong. Andaikan x adalah sebarang titik dalam G . Karena G adalah gabungan dari

bola terbuka, maka x berada dalam suatu bola terbuka misal $x \in S_r(x_0) \subseteq S$. Menurut teorema 2.4.3, x adalah pusat dari suatu bola terbuka $S_{r_1}(x) \subseteq S_r(x_0)$. Karena $S_r(x_0) \subseteq G$ maka $S_{r_1}(x) \subseteq G$ dan kita dapatkan suatu bola terbuka yang berpusat di x dan termuat dalam G . Jadi G adalah terbuka. ■

Sifat fundamental dari himpunan terbuka dalam ruang metrik dinyatakan dalam Teorema 2.4.5 .

Teorema 2.4.5 :

Andaikan X adalah sebarang ruang metrik. Maka berlaku :

- (i) gabungan dari sebarang himpunan terbuka dalam X adalah himpunan terbuka .
- (ii) irisan berhingga dari sebarang himpunan terbuka dalam X adalah himpunan terbuka .

Bukti :

(i) Andaikan $\{G_i\}$ adalah sebarang keluarga dari himpunan terbuka di dalam X . Harus ditunjukkan bahwa $G = \cup_i G_i$ adalah terbuka. Jika $\{G_i\}$ adalah kosong, maka G adalah kosong dan menurut teorema 2.4.1., maka G adalah terbuka. Andaikan bahwa G_i tidak kosong, maka menurut teorema 2.4.4. tiap G_i yang merupakan himpunan terbuka adalah gabungan dari bola terbuka, G adalah gabungan dari bola terbuka dan menurut teorema 2.4.4. G adalah terbuka .

(ii) Andaikan $\{G_i\}$ adalah keluarga berhingga himpunan terbuka dalam X . Harus ditunjukkan bahwa bahwa $G = \cap_i G_i$ adalah terbuka . Andaikan $\{G_i\}$ adalah kosong, maka $G = X$, dan

menurut teorema 2.4.1. G adalah terbuka. Andaikan $\{G_i\}$ tidak kosong dan bahwa $\{G_i\} = \{G_1, G_2, \dots, G_n\}$ untuk suatu bilangan bulat positif n . Andaikan x berada dalam tiap G_i . Maka x berada dalam tiap G_i dan karena G_i adalah terbuka, untuk tiap i terdapat bilangan real positif r_i sedemikian sehingga $S_{r_i}(x) \subseteq G_i$.

Andaikan r adalah bilangan real terkecil dalam $\{r_1, r_2, \dots, r_n\}$. Bilangan r adalah bilangan real positif sedemikian sehingga $S_r(x) \subseteq S_{r_i}(x)$ untuk setiap i , maka $S_r(x) \subseteq G_i$ untuk tiap i , dan oleh karena itu $S_r(x) \subseteq G$. Karena $S_r(x)$ adalah bola terbuka berpusat di x dan termuat di dalam G , sehingga G terbuka. ■

2.5. Barisan konvergen dan ruang metrik lengkap

Definisi 2.5.1 :

Andaikan X adalah sebarang ruang metrik dengan metrik d dan andaikan $\langle x_n \rangle = \langle x_1, x_2, \dots, x_n, \dots \rangle$ adalah barisan titik di dalam X . $\langle x_n \rangle$ disebut konvergen jika terdapat $x \in X$ sedemikian sehingga memenuhi salah satu sifat berikut :

- (i) untuk setiap $\epsilon > 0$, terdapat bilangan bulat positif n_0 sedemikian sehingga $d(x_n, x) < \epsilon$ bila $n \geq n_0$;
- (ii) untuk setiap bola terbuka $S_\epsilon(x)$ yang berpusat di x , terdapat bilangan bulat positif n_0 sedemikian sehingga $x_n \in S_\epsilon(x)$, untuk semua $n \geq n_0$.

Dalam hal ini juga, dikatakan bahwa barisan $\langle x_n \rangle$ konvergen ke x atau x adalah limit barisan $\langle x_n \rangle$ dan

ditulis sebagai $x_n \rightarrow x$ atau $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$.

Barisan yang tidak konvergen disebut divergen.

Selanjutnya akan didefinisikan konsep barisan Cauchy dan konsep suatu ruang metrik yang lengkap. Konsep barisan Cauchy dan konsep kelengkapan memegang peranan yang amat sentral dalam pembahasan konsep ruang Banach.

Definisi 2.5.2 :

Suatu barisan $\langle x_n \rangle$ dalam ruang metrik X dengan metrik d , disebut *barisan Cauchy* jika untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat bilangan bulat positif n_0 sedemikian sehingga

$$m, n \geq n_0 \rightarrow d(x_m, x_n) < \varepsilon.$$

Contoh 2.5.1 :

Diberikan $\langle s_n = 1/n \rangle$ barisan di dalam ruang metrik selang terbuka $(0, 2)$ dengan metrik biasa $d(x, y) = |x - y|$. Barisan ini adalah barisan Cauchy. Sebab jika diberikan $\varepsilon > 0$, terdapat p sehingga $1/p < \varepsilon/2$. Untuk semua m dan n yang lebih besar atau sama dengan p (kita ambil $m \leq n$) berlaku $1/m \leq 1/p < \varepsilon/2$ dan $1/n \leq 1/p < \varepsilon/2$. Jadi untuk $\forall m, n \in \mathbb{N}$, $m \geq p$, $n \geq p$ berlaku $|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}| \leq \frac{1}{m} + \frac{1}{n} < \varepsilon$.

Jika kita perhatikan maka tidak ada $s \in (0, 2)$ yang dapat menjadi $\lim s_n$. Jadi barisan ini adalah barisan Cauchy tetapi tidak konvergen di dalam ruang metrik selang terbuka $(0, 2)$.

Teorema 2.5.1 :

Di dalam sebarang ruang metrik (X, d) , barisan

konvergen adalah barisan Cauchy.

Bukti :

Andaikan $\langle x_n \rangle$ adalah barisan konvergen, $x_n \in (X, d)$, untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{N}$ = himpunan bilangan asli.

Misalkan $x_n \rightarrow x$.

Diberikan $\varepsilon > 0$, maka terdapat bilangan bulat positif n_0 sedemikian sehingga untuk tiap $n \geq n_0$ berlaku

$$d(x_n, x) < 1/2 \cdot \varepsilon.$$

Untuk tiap $m, n \geq n_0$ maka $d(x_n, x) < 1/2 \cdot \varepsilon$ dan $d(x_m, x) < 1/2 \cdot \varepsilon$.

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m)$$

Untuk tiap $m, n \geq n_0$ berlaku $d(x_n, x_m) < 1/2 \cdot \varepsilon + 1/2 \cdot \varepsilon = \varepsilon$.

Jadi untuk sebarang $\varepsilon > 0$ terdapat n_0 sedemikian sehingga untuk setiap $m, n \geq n_0$ berlaku $d(x_n, x_m) < \varepsilon$.

Jadi $\langle x_n \rangle$ adalah barisan Cauchy. ■

Definisi 2.5.3 :

Suatu ruang metrik dikatakan lengkap (complete) jika setiap barisan Cauchy di dalam ruang metrik itu adalah barisan yang konvergen.

Teorema 2.5.2 :

Andaikan X adalah ruang metrik yang lengkap dan andaikan Y adalah subruang dari X . Maka Y lengkap bila dan hanya bila Y tertutup.

Bukti :

Andaikan bahwa Y subruang lengkap dari X . Akan ditunjukkan bahwa Y tertutup. Diandaikan p adalah suatu titik limit Y . Dengan demikian untuk setiap bilangan asli n , sekitar $N_{1/n}(p)$ memuat suatu titik $y_n \in Y$ dan $y_n \neq p$. Terbentuklah barisan $\langle y_n \rangle$ di dalam Y . Untuk sebarang $\varepsilon > 0$,

terdapat P sehingga $1/P < \epsilon/2$.

Jadi untuk semua $n \geq P$, $y_n \in N_{\epsilon/2}(p)$. Jika $n \geq P$ dan $m \geq P$ maka

$$\begin{aligned} d(y_m, y_n) &\leq d(y_m, p) + d(p, y_n) \\ &< \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon. \end{aligned}$$

Jelas bahwa $\langle y_n \rangle$ adalah barisan Cauchy di dalam Y yang konvergen ke $p \in X$. Karena Y lengkap maka $p \in Y$ dan terbukti Y tertutup.

Sekarang diandaikan Y tertutup dan $\langle y_n \rangle$ adalah sebarang barisan Cauchy di dalam Y . Karena Y subruang dari X , maka $\langle y_n \rangle$ barisan Cauchy di dalam X . Diketahui bahwa X lengkap, jadi $\langle y_n \rangle$ konvergen ke suatu titik $x \in X$. Selanjutnya dibuktikan bahwa $x \in Y$. Jika $\langle y_n \rangle$ himpunan berhingga maka terdapat tak berhingga banyak indeks n sehingga $y_n = x$, jadi $x \in Y$. Jika daerah jangkauan $\langle y_n \rangle$ merupakan himpunan tak berhingga, maka x adalah titik limit $\langle y_n \rangle$ jadi juga titik limit Y . Karena Y tertutup maka $x \in Y$. Dengan demikian, sebarang barisan Cauchy di dalam Y konvergen ke suatu titik di dalam Y , jadi Y lengkap. ■

2.6. Pemetaan Kontinu

Definisi 2.6.1 :

Andaikan X adalah ruang metrik dengan metrik d_1 dan andaikan Y adalah ruang metrik dengan metrik d_2 dan andaikan f adalah pemetaan dari X ke Y . Pemetaan f dikatakan kontinu di titik x_0 dalam X , jika memenuhi salah satu sifat berikut :

(i) untuk setiap $\epsilon > 0$, terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga

$$d_1(x, x_0) < \delta \implies d_2(f(x), f(x_0)) < \varepsilon, \text{ atau}$$

(ii) untuk setiap bola terbuka $S_\varepsilon(f(x_0))$ yang berpusat di $f(x_0)$, terdapat suatu bola terbuka $S_\delta(x_0)$ berpusat di x_0 , sehingga $f(S_\delta(x_0)) \subseteq S_\varepsilon(f(x_0))$.

Teorema 2.6.1 :

Andaikan X dan Y adalah ruang metrik dan andaikan f adalah suatu pemetaan dari X ke Y . Maka f kontinu di x_0 bila dan hanya bila setiap $\langle x_n \rangle$ di dalam X konvergen ke x_0 maka $\langle f(x_n) \rangle$ konvergen ke $f(x_0)$.

Bukti :

Andaikan bahwa f kontinu di x_0 . Andaikan $\langle x_n \rangle$ adalah barisan di dalam X sedemikian sehingga $x_n \rightarrow x_0$. Harus ditunjukkan bahwa $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$. Andaikan $S_\varepsilon(f(x_0))$ adalah bola terbuka yang berpusat di $f(x_0)$. Dengan pengandaian kita bahwa f kontinu di x_0 , maka terdapat suatu bola terbuka $S_\delta(x_0)$ berpusat di x_0 sedemikian sehingga $f(S_\delta(x_0)) \subseteq S_\varepsilon(f(x_0))$. Karena $x_n \rightarrow x_0$, maka semua x_n berada di dalam $S_\delta(x_0)$. Karena $f(S_\delta(x_0)) \subseteq S_\varepsilon(f(x_0))$, maka $f(x_n)$ berada di dalam $S_\varepsilon(f(x_0))$. Jadi $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$.

Andaikan $x_n \rightarrow x_0 \implies f(x_n) \not\rightarrow f(x_0)$. Selanjutnya ditunjukkan f tidak kontinu. Andaikan bahwa f tidak kontinu di x_0 dan kita tunjukkan bahwa $x_n \rightarrow x_0 \implies f(x_n) \not\rightarrow f(x_0)$. Dengan asumsi ini, maka terdapat suatu bola terbuka $S_\varepsilon(f(x_0))$ dengan sifat bahwa bayangan f dari setiap bola terbuka yang berpusat di x_0 tidak termuat di dalam $S_\varepsilon(f(x_0))$. Andaikan $S_1(x_0)$, $S_{1/2}(x_0)$, ..., $S_{1/n}(x_0)$ adalah barisan dari bola terbuka. Bentuk barisan $\langle x_n \rangle$

sedemikian sehingga $x_n \in S_{1/n}(x_0)$ dan $f(x_n) \notin S_\epsilon(f(x_0))$. Jelas bahwa x_n konvergen ke x_0 dan $f(x_n)$ tidak konvergen ke $f(x_0)$. ■

Definisi 2.6.2 :

Suatu pemetaan dari suatu ruang metrik ke ruang metrik yang lain dikatakan kontinu jika pemetaan tersebut kontinu di setiap titik dalam domainnya.

Akibat dari Definisi 2.6.2 dan Teorema 2.6.1., diperoleh pernyataan berikut :

Andaikan X dan Y masing-masing adalah ruang metrik dan andaikan f adalah pemetaan dari X ke Y . Maka f kontinu pada x bila dan hanya bila $x_n \rightarrow x \implies f(x_n) \rightarrow f(x)$.

Definisi 2.6.3 :

Andaikan X adalah ruang metrik dengan metrik d_1 dan Y ruang metrik dengan metrik d_2 , maka pemetaan f dari X ke Y dikatakan *kontinu seragam (uniformly continuous)* jika untuk setiap $\epsilon > 0$, terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga $d_1(x, x') < \delta \implies d_2(f(x), f(x')) < \epsilon$, $\forall x, x' \in X$.

Contoh 2.6.1 :

Dibuktikan bahwa fungsi real $f(x)=x$ kontinu seragam pada $\mathbb{R}$.

Bukti :

Diberikan $\epsilon > 0$. Harus dibuktikan bahwa terdapat $\delta > 0$ sehingga untuk semua p dan q anggota $\mathbb{R}$ dengan $|p-q| < \delta$ berlaku $|f(p)-f(q)| < \epsilon$. Jika kita ambil $\delta = \epsilon$, maka jika $|p-q| < \delta$ berlaku $|f(p)-f(q)| = |p-q| < \epsilon$.

2.7. Ruang Linear

Selanjutnya akan dibahas konsep ruang linear lewat K dengan K adalah himpunan semua bilangan real $\mathbb{R}$ atau himpunan semua bilangan kompleks $\mathbb{C}$.

Definisi 2.7.1 :

Ruang linear lewat K adalah $(L, K, +, \cdot)$, dengan L adalah himpunan yang tidak kosong, $+$ adalah pemetaan $(x, y) \rightarrow x+y$ dari $L \times L$ ke L , dan $\cdot$ adalah pemetaan $(\alpha, x) \rightarrow \alpha \cdot x$ dari $K \times L$ ke L dan memenuhi sifat :

- (a) $x+(y+z) = (x+y)+z, \quad \forall x, y, z \in L$
- (b) $x+y = y+x, \quad \forall x, y \in L$
- (c) $\exists 0 \in L$, sehingga $x+0 = x = 0+x, \quad \forall x \in L$
- (d) $\forall x \in L, \exists -x \in L$, sehingga $x+(-x) = 0$.
- (e) $(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x, \quad \forall x \in L$ dan $\forall \alpha, \beta \in K$
- (f) $\alpha \cdot (x+y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y, \quad \forall x, y \in L$ dan $\alpha \in K$
- (g) $\alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha\beta) \cdot x, \quad \forall x \in L$ dan $\alpha, \beta \in K$
- (h) $1 \cdot x = x, \quad \forall x \in L$.

Dalam penulisan selanjutnya, ruang linear lewat K $(L, K, +, \cdot)$, ditulis sebagai ruang linear L saja atau ruang (L, K) . Ruang linear lewat lapangan $\mathbb{R}$ disebut ruang linear real dan ruang linear lewat lapangan kompleks $\mathbb{C}$ disebut ruang linear kompleks. Ruang linear disebut juga ruang vektor dan anggota-anggotanya disebut vektor.

2.8. Ruang Topologi

Definisi 2.8.1 :

Andaikan X adalah himpunan yang tidak kosong. Suatu keluarga τ yang merupakan himpunan dari himpunan bagian

X , disebut topologi pada X , jika memenuhi :

- (i) $\emptyset \in \tau$
- (ii) $X \in \tau$
- (iii) gabungan dari sebarang himpunan di dalam keluarga τ berada di dalam τ .
- (iv) irisan dari berhingga himpunan dalam keluarga τ berada di dalam τ

Himpunan X yang dilengkapi dengan suatu topologi pada X disebut *Ruang Topologi* dan dituliskan dengan notasi (X, τ) . Atau sering ditulis sebagai Ruang Topologi X saja.

Jadi suatu ruang topologi X memuat dua obyek, yakni himpunan tidak kosong X dan topologi τ pada X . Himpunan di dalam τ disebut himpunan terbuka dari ruang topologi (X, τ) dan anggota X disebut titik.

Contoh 2.8.1 :

Andaikan X adalah ruang metrik dan andaikan topologi pada X adalah keluarga dari semua himpunan bagian dari X yang terbuka dalam arti seperti dalam Definisi 2.4.2. Menurut Teorema 2.4.1., $\emptyset$ dan X sendiri adalah terbuka dan menurut Teorema 2.4.4., dalam sebarang ruang metrik, gabungan dari himpunan terbuka dalam X adalah terbuka dan irisan berhingga dari sebarang himpunan terbuka dalam X adalah terbuka.

Definisi 2.8.2.:

Andaikan X dan Y adalah ruang topologi dan andaikan f adalah pemetaan dari X ke Y . Pemetaan f dikatakan *kontinu* jika $f^{-1}(G)$ adalah terbuka dalam X bila G adalah

terbuka dalam Y . Pemetaan f dikatakan *terbuka* jika $f(G)$ adalah terbuka dalam Y bila G adalah terbuka di dalam X .

Definisi 2.8.3.:

Suatu *homeomorphisme* adalah pemetaan kontinu bijektif dari suatu ruang topologi kepada ruang topologi yang lain dan pemetaan tersebut juga merupakan pemetaan terbuka (open mapping). Dua ruang topologi X dan Y dikatakan homeomorphik jika terdapat suatu homeomorphisme dari X kepada Y .

2.9. Lemma Zorn

Definisi 2.9.1 :

Suatu himpunan terurut parsial (a partially ordered set) adalah himpunan M , dimana didefinisikan suatu urutan parsial (partial ordering) yaitu relasi biner yang ditulis sebagai " $\leq$ " dan memenuhi kondisi :

- (1) $a \leq a$, $\forall a \in M$.
- (2) Jika $a \leq b$ dan $b \leq a$, maka $a = b$, $a, b \in M$.
- (3) Jika $a \leq b$ dan $b \leq c$ maka $a \leq c$, $a, b, c \in M$.

Definisi 2.9.2 :

Andaikan A dengan relasi " $\leq$ " terurut parsial dan $B \subseteq A$. Himpunan B dikatakan terurut total jika untuk setiap $x, y \in B$ berlaku $x \leq y$ atau $y \leq x$.

Lemma 2.9.1 : (Lemma Zorn)

Jika A adalah himpunan yang tidak kosong dan jika setiap subhimpunan terurut total dari A mempunyai batas atas di A , maka A mempunyai unsur maksimal .

2.10. Penutup (closure) dari suatu himpunan

Andaikan A adalah himpunan bagian dari ruang metrik X dan jika A' menyatakan himpunan semua titik limit A , maka penutup A (closure of A) adalah himpunan $\bar{A} = A \cup A'$

Contoh 2.10.1 :

Di dalam $\mathbb{R}$, penutup selang terbuka (a,b) adalah selang tertutup $[a,b]$.

Karena setiap bilangan real adalah titik limit $\mathbb{Q}$ (karena di antara dua bilangan real selalu terdapat bilangan rasional), maka $\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$.

Jika X adalah ruang metrik dan $E \subset X$, maka

- (a) $\bar{E}$ tertutup,
- (b) $E = \bar{E}$ jika dan hanya jika E tertutup,
- (c) $\bar{E}$ merupakan himpunan tertutup yang terkecil yang memuat E .

Bukti :

(a) Akan kita buktikan bahwa $(\bar{E})^c$ terbuka. Diandaikan $p \in X$ dan $p \notin \bar{E}$. Jadi $p \notin E$ dan $p \notin E'$, maka dapat dibuat kitar $N_r(p)$ tanpa titik anggota E di dalamnya. Di dalam $N_r(p)$ ini tentu tidak terdapat titik limit E , sebab jika demikian maka $N_r(p)$ akan memuat tak berhingga banyak titik-titik anggota E . Jadi $N_r(p) \cap \bar{E} = \emptyset$ atau $N_r(p) \subset (\bar{E})^c$. Jadi, kita telah menurunkan pernyataan : "Jika $p \in (\bar{E})^c$ maka terdapat suatu kitar p yang merupakan subset $(\bar{E})^c$ ".

Hal ini berarti bahwa $(\bar{E})^c$ terbuka. Jadi $\bar{E}$ tertutup.

(b) Jika E tertutup maka $E' \subset E$, jadi $\bar{E} = E \cup E' = E$. Jika $E = \bar{E}$ maka menurut (a) E tertutup.

(c) Menurut definisi penutup, $\bar{E}$ adalah himpunan tertutup

yang memuat E . Jika dapat dibuktikan bahwa sebarang himpunan tertutup F yang memuat E juga memuat $\bar{E}$, maka terbuktiilah (c). Jelas bahwa setiap titik limit E adalah titik limit F , jadi $E' \subset F'$. Karena F tertutup maka $F' \subset F$. Dengan demikian F memuat E dan E' sehingga F memuat $\bar{E}$. ■



BAB III

DEFINISI DAN CONTOH RUANG BANACH

Dalam bagian ini akan dibahas definisi ruang Banach dan beberapa contoh ruang Banach. Kita mulai dengan mendefinisikan konsep ruang linear bernorma. Ruang linear bernorma dapat dipandang sebagai ruang metrik dengan metrik yang dihasilkan oleh norma ruang itu. Selanjutnya didefinisikan ruang fungsi kontinu.

Pembahasan contoh-contoh ruang Banach diawali dengan pembahasan konsep barisan fungsi yang konvergen seragam. Juga akan dibuktikan bahwa setiap barisan Cauchy dalam $\mathbb{R}^k$ adalah konvergen. Untuk ini perlu dibahas konsep himpunan kompak. Pembahasan konsep barisan Cauchy yang konvergen menjadi amat penting dalam kaitannya dengan pembahasan contoh ruang Banach.

Dalam bagian ini $\mathbb{K}$ adalah himpunan semua bilangan real $\mathbb{R}$ atau himpunan semua bilangan kompleks $\mathbb{C}$.

3.1. Definisi Ruang Banach

Akan didefinisikan terlebih dahulu ruang linear bernorma lewat $\mathbb{K}$. Konsep ruang linear bernorma banyak digunakan dalam pembahasan selanjutnya.

Definisi 3.1.1 :

Ruang linear bernorma (normed linear space) N lewat

$\mathbb{K}$ adalah ruang linear N lewat $\mathbb{K}$ dimana setiap vektor x di dalam N berkorespondensi dengan sebuah bilangan real, yang dinyatakan sebagai $\|x\|$ dan disebut *norma* dari x , sedemikian sehingga :

$$(1) \|x\| \geq 0 \text{ dan } \|x\| = 0 \text{ bhab } x = 0$$

$$(2) \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

$$(3) \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|, \text{ dengan } \alpha \in \mathbb{K}$$

Bilangan real tak negatif $\|x\|$ dapat dianggap sebagai panjang vektor x .

Lemma 3.1.1 :

Andaikan x dan y adalah anggota ruang linear bernorma maka $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$

Bukti :

$$\text{Harus ditunjukkan bahwa } |\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\| \dots\dots(1)$$

$$\text{Akan ditunjukkan terlebih dulu } \|x\| - \|y\| \leq \|x - y\| \dots\dots(2)$$

$\|x\| = \|(x - y) + y\| \leq \|x - y\| + \|y\|$, maka

$$\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\| \dots\dots\dots(3)$$

$$-(\|x\| - \|y\|) = \|y\| - \|x\| \leq \|y - x\| = \|-(x - y)\| = \|x - y\| \dots\dots\dots(4)$$

Dari (3) dan (4) maka

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$$

■

Teorema 3.1.1 :

Andaikan N adalah ruang linear bernorma. Maka N adalah ruang metrik dengan metrik d yang didefinisikan sebagai :

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

Bukti :

Ambil sebarang $x, y \in N$.

$$(1) d(x,y) = \|x - y\| \geq 0$$

$$\text{jadi } d(x,y) \geq 0$$

$$d(x,y) = \|x - y\| = 0 \text{ bbb } x-y = 0$$

$$x-y = 0 \text{ bbb } x=y$$

$$\text{jadi } d(x,y) = 0 \text{ bbb } x=y$$

$$(2) d(x,y) = \|x - y\|$$

$$= \|-1(y-x)\|$$

$$= \{-1\} \|y - x\|$$

$$= \|y - x\|$$

$$= d(y,x)$$

$$(3) d(x,y) = \|x - y\|$$

$$= \|(x-z) + (z-y)\|$$

$$\leq \|x - z\| + \|z - y\|$$

$$= d(x,z) + d(z,y).$$

Jadi suatu ruang linear bernorma dapat dipandang sebagai ruang metrik dengan metrik yang dihasilkan oleh suatu norma. Suatu barisan dalam ruang linear bernorma dikatakan konvergen bila barisan itu konvergen dalam ruang metrik (N, d) .

Definisi 3.1.2 :

Suatu barisan $\langle x_n \rangle$ dalam ruang linear bernorma N disebut barisan Cauchy jika untuk $\forall \varepsilon > 0$, terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$, untuk $n, m \geq n_0$.

Barisan $\langle x_n \rangle$ di dalam ruang linear bernorma N adalah konvergen ke $x \in N$, jika untuk $\forall \varepsilon > 0$ terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $\|x_n - x\| < \varepsilon$ untuk $n \geq n_0$.

Suatu deret $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, a_n \in \mathbb{N}$ dikatakan konvergen ke s jika barisan jumlah parsial $\langle s_n \rangle$, dengan $s_n = \sum_{i=1}^n a_i$ konvergen ke s , yaitu jika untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $\|s_n - s\| < \varepsilon$ untuk $n \geq n_0$.

Definisi 3.1.3 : (Ruang Banach)

Ruang Banach adalah ruang linear bernorma yang lengkap, yaitu ruang linear bernorma dimana setiap barisan Cauchy di dalamnya konvergen.

Suatu fungsi f dari ruang metrik (X, d) ke ruang metrik (Y, ρ) dikatakan kontinu di x_0 jika dan hanya jika $x_n \rightarrow x_0$ maka $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$.

Dari Lemma 3.1.1 (1) dapat ditarik kesimpulan bahwa pemetaan $x \rightarrow \|x\|$ adalah kontinu artinya

$$x_n \rightarrow x \implies \|x_n\| \rightarrow \|x\|$$

Ini jelas dari (1) bahwa $|\|x_n\| - \|x\|| \leq \|x_n - x\|$, $x_n \rightarrow x$ berarti bahwa $x_n - x \rightarrow 0$ yang mengakibatkan $\|x_n - x\| \rightarrow 0$.

Dengan langkah yang sama dapat ditunjukkan bahwa jumlahan dan perkalian skalar adalah kontinu,

$$x_n \rightarrow x \text{ dan } y_n \rightarrow y \implies x_n + y_n \rightarrow x + y \text{ dan } \alpha_n \rightarrow \alpha \text{ dan } x_n \rightarrow x \implies \alpha_n x_n \rightarrow \alpha x.$$

sebab

$$\begin{aligned} \|(x_n + y_n) - (x + y)\| &\leq \|(x_n - x) + (y_n - y)\| \\ &\leq \|x_n - x\| + \|y_n - y\| \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} \|\alpha_n x_n - \alpha x\| &= \|\alpha_n (x_n - x) + (\alpha_n - \alpha)x\| \\ &\leq |\alpha_n| \|x_n - x\| + |\alpha_n - \alpha| \|x\| \end{aligned}$$



3.2. Contoh Ruang Banach

Selanjutnya akan dibahas contoh ruang Banach. Pembahasan contoh ruang Banach diawali dengan membuktikan suatu teorema, yakni bahwa setiap barisan Cauchy dalam $\mathbb{R}^k$ adalah konvergen. Selanjutnya dibahas konvergensi yang lebih kuat dari pada konvergensi titik demi titik.

3.2.1. Ruang Euclides

Akan dibahas terlebih dahulu konsep ruang Euclides (Euclidean Space).

Definisi 3.2.1.1 :

Untuk setiap bilangan bulat positif k , himpunan $\mathbb{R}^k$ adalah himpunan semua kelompok k buah bilangan real berurutan $x = (x_1, x_2, \dots, x_k)$, dengan $x_1, x_2, \dots, x_k$ adalah bilangan-bilangan real, selanjutnya disebut koordinat dari x . Elemen-elemen $\mathbb{R}^k$ dinamakan *titik* atau *vektor* terutama untuk $k > 1$. Kadang-kadang untuk membedakan dengan bilangan real, elemen $\mathbb{R}^k$ dinyatakan dengan huruf kecil yang bergaris dibawahnya.

Selanjutnya didefinisikan operai-operasi berikut :

(1) Operasi penjumlahan

Jika $x = (x_1, x_2, \dots, x_k)$ dan $y = (y_1, y_2, \dots, y_k)$ anggota $\mathbb{R}^k$ maka $x+y$ didefinisikan sebagai :

$$x+y = (x_1+y_1, x_2+y_2, \dots, x_k+y_k)$$

(2) Perkalian dengan skalar

Jika α suatu bilangan real (skalar) maka αx didefinisikan sebagai $\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_k)$

Tampak bahwa baik $x+y$ maupun αx merupakan kelompok k buah bilangan real yang berurutan, jadi keduanya merupakan vektor anggota $\mathbb{R}^k$.

Selanjutnya pada vektor x dan y didefinisikan suatu operasi yang disebut hasil kali skalar (hasil kali titik atau inner product) $x \cdot y$ yang merupakan suatu bilangan real, jadi suatu skalar, yaitu :

$$x \cdot y = \sum_{j=1}^k x_j y_j.$$

Jadi hasil kali skalar $x \cdot x = \sum_{j=1}^k x_j^2$, yaitu suatu bilangan real non negatif.

Definisi 3.2.1.2.:

Norma suatu vektor $x=(x_1, x_2, \dots, x_k)$ didalam $\mathbb{R}^k$ yakni $\|x\|$ didefinisikan sebagai

$$\|x\| = \left(\sum_{j=1}^k x_j^2 \right)^{1/2}$$

Himpunan $\mathbb{R}^k$ dengan operasi penjumlahan dan perkalian skalar, jelas merupakan suatu ruang vektor (ruang linear). Ruang vektor $\mathbb{R}^k$ yang dilengkapi dengan hasil kali skalar dan norma yang didefinisikan diatas membentuk suatu struktur yang dinamakan *ruang Euclides berdimensi k*.

Jika $\mathbb{R}^k$ terdiri atas fungsi real yang didefinisikan pada $\{1, 2, \dots, k\}$ maka norma dari $f \in \mathbb{R}^k$ didefinisikan sebagai $\|f\| = \left(\sum_{i=1}^k |f(i)|^2 \right)^{1/2}$.

Lemma : (Pertidaksamaan Cauchy)

Andaikan $x=(x_1, x_2, \dots, x_k)$ dan $y=(y_1, y_2, \dots, y_k)$ adalah kelompok k buah bilangan real atau kompleks, maka

$$\sum_{i=1}^k |x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^k |x_i|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^k |y_i|^2 \right)^{1/2}$$

atau ditulis sebagai $\sum_{i=1}^k |x_i y_i| \leq \|x\| \|y\|$.

Bukti :

Kita perhatikan bahwa jika a dan b adalah sebarang dua bilangan real yang non-negatif maka berlaku $a^{1/2} b^{1/2} \leq (a+b)/2$.

$$\Leftrightarrow (a^{1/2} b^{1/2})^2 \leq (a+b/2)^2 \Leftrightarrow ab \leq (a+b)^2/4 \Leftrightarrow 4ab \leq (a+b)^2$$

$$\Leftrightarrow 4ab \leq a^2 + b^2 + 2ab \Leftrightarrow 0 \leq a^2 + b^2 + 2ab - 4ab \Leftrightarrow 0 \leq a^2 + b^2 - 2ab$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq (a-b)^2$$

Jika $x=0$ dan $y=0$ maka lemma jelas benar. Selanjutnya kita buktikan lemma ini untuk $x \neq 0$ dan $y \neq 0$. Kita definisikan a_i dan b_i dengan $a_i = (|x_i|/\|x\|)^2$ dan $b_i = (|y_i|/\|y\|)^2$.

Maka

$$\frac{|x_i y_i|}{\|x\| \|y\|} \leq \frac{|x_i|^2/\|x\|^2 + |y_i|^2/\|y\|^2}{2}$$

Jika diambil i mulai dari 1 sampai dengan k , didapat :

$$\frac{\sum_{i=1}^k |x_i y_i|}{\|x\| \|y\|} \leq \frac{1 + 1}{2} = 1$$

$$\text{Jadi } \sum_{i=1}^k |x_i y_i| \leq \|x\| \|y\| \quad \blacksquare$$

Lemma : (Pertidaksamaan Minkowski)

Andaikan $x = (x_1, x_2, \dots, x_k)$ dan $y = (y_1, y_2, \dots, y_k)$ adalah kelompok k buah bilangan real atau kompleks yang berurutan, maka

$$\left(\sum_{i=1}^k |x_i + y_i|^2 \right)^{1/2} \leq \left(\sum_{i=1}^k |x_i|^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{i=1}^k |y_i|^2 \right)^{1/2}$$

atau sering ditulis sebagai $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Bukti :

Dengan menggunakan pertidaksamaan Cauchy, maka :

$$\begin{aligned}
 \|x+y\|^2 &= \sum_{i=1}^k |x_i + y_i| |x_i + y_i| \\
 &\leq \sum_{i=1}^k |x_i + y_i| (|x_i| + |y_i|) \\
 &= \sum_{i=1}^k |x_i + y_i| |x_i| + \sum_{i=1}^k |x_i + y_i| |y_i| \\
 &\leq \|x+y\| \|x\| + \|x+y\| \|y\| \\
 &= \|x+y\| (\|x\| + \|y\|).
 \end{aligned}$$

atau

$$\begin{aligned}
 \|x+y\|^2 &\leq \|x+y\| (\|x\| + \|y\|) \\
 \|x+y\| &\leq \|x\| + \|y\|. \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

3.2.2. Himpunan kompak

Selanjutnya akan dibahas konsep konvergensi barisan Cauchy dalam $\mathbb{R}^k$. Dibahas terlebih dahulu definisi himpunan kompak.

Definisi 3.2.2.1 :

Himpunan E dalam ruang metrik (X, d) disebut terbatas jika terdapat titik $p \in (X, d)$ dan bilangan $M > 0$ sehingga untuk setiap $x \in E$ maka $d(x, p) \leq M$.

Definisi 3.2.2.2. :

Jika $E = \{x : x = (x_1, x_2, \dots, x_k), a_j \leq x_j \leq b_j\}$, dengan a_j dan b_j tertentu, $j=1, 2, \dots, k$. Himpunan E di dalam $\mathbb{R}^k$ disebut suatu sel- k .

Definisi 3.2.2.3 :

Selimut terbuka (open cover) suatu himpunan E di dalam ruang metrik X dimaksudkan adalah suatu keluarga himpunan-himpunan terbuka $\{G_\alpha\}$ yang merupakan himpunan bagian dari X sedemikian sehingga $E \subset \bigcup_\alpha G_\alpha$.

Definisi ini menunjukkan bahwa untuk setiap $x \in E$

terdapat suatu G_α sehingga $x \in G_\alpha$.

Definisi 3.2.2.4 :

Suatu himpunan bagian K dalam ruang metrik X disebut *kompak* jika setiap selimut terbuka untuk K memuat sub-selimut berhingga yang masih menyelimuti K .

Jadi apabila keluarga himpunan terbuka $\{G_\alpha\}$ suatu selimut terbuka untuk himpunan kompak K , maka dapat dicari indeks $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ yang cacahnya berhingga sehingga

$$K \subset \bigcup_{i=1}^n G_{\alpha_i}$$

Teorema 3.2.2.1 :

Di dalam sebarang ruang metrik, himpunan berhingga adalah kompak. Jadi himpunan kosong adalah kompak.

Bukti :

Andaikan $K = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ dan $\{G_\alpha\}$ sebarang selimut terbuka untuk K . Karena $\{G_\alpha\}$ selimut terbuka untuk K , maka setiap anggota K merupakan anggota G_α untuk paling sedikit satu α . Untuk setiap anggota x_j ($1 \leq j \leq n$) dipilih satu G_{α_j} saja yang memuat x_j , kita sebut G_{α_j} . Jadi $G_{\alpha_1}, G_{\alpha_2}, \dots, G_{\alpha_n}$ merupakan sub-selimut berhingga untuk K . Hal ini berarti bahwa sebarang selimut terbuka untuk K memuat sub-selimut berhingga untuk K . Jadi K kompak. ■

Teorema 3.2.2.2 :

Jika K adalah himpunan bagian yang kompak dalam sebarang ruang metrik, maka K tertutup dan terbatas.

Bukti :

Andaikan K himpunan bagian kompak ruang metrik X .

(a). Akan dibuktikan bahwa K tertutup dengan membuktikan bahwa K^c terbuka. Diandaikan $p \in X$ dan $p \in K^c$. Untuk setiap titik $x \in K$ dibuat sekitar V_x dengan pusat x dan sekitar W_x dengan pusat p dan radiusnya kurang dari $\frac{1}{2}d(x,p)$. Jadi $V_x \cap W_x = \emptyset$ untuk semua $x \in K$. Jelas bahwa keluarga $\{V_x : x \in K\}$ adalah selimut terbuka untuk K . Karena K kompak maka dapat ditentukan $x_1, x_2, \dots, x_n$ anggota K sehingga

$$K \subset (V_{x_1} \cup V_{x_2} \cup \dots \cup V_{x_n}) = V.$$

Kita perhatikan himpunan $W = W_{x_1} \cap W_{x_2} \cap W_{x_3} \cap \dots \cap W_{x_n}$

Himpunan W merupakan suatu sekitar titik p dan himpunan bagian semua W_{x_i} untuk $i=1,2, \dots, n$. Jadi $W \cap V_{x_i} = \emptyset$ untuk semua $i=1,2, \dots, n$, sehingga $W \cap V_x = \emptyset$. Dengan demikian $W \cap K = \emptyset$ atau $W \subset K^c$. Terbukti p titik interior K^c dan K^c terbuka. Jadi K tertutup.

(b). Untuk setiap $x \in K$ dibentuk sekitar $N_1(x)$ dengan pusat x dan radius 1. Keluarga $\{N_1(x) : x \in K\}$ merupakan selimut terbuka untuk K . Karena K kompak maka terdapat $x_1, x_2, \dots, x_m \in K$ sehingga $K \subset N_1(x_1) \cup \dots \cup N_1(x_m)$. Kita tentukan bilangan $M-1 = \max\{d(x_1, x_2), d(x_1, x_3), \dots, d(x_1, x_m)\}$. Untuk sebarang $y \in K$ terdapat x_p dengan $1 \leq p \leq m$ sehingga $y \in N_1(x_p)$.

$$\text{Jadi } d(x_1, y) \leq d(x_1, x_p) + d(x_p, y) \leq (M-1) + d(x_p, y) \leq M.$$

Terbukti untuk semua $y \in K$ berlaku $d(x_1, y) \leq M$, jadi K terbatas. ■

Definisi yang ekuivalen untuk himpunan kompak.

Himpunan yang mempunyai sifat bahwa setiap selimut terbuka mempunyai sub-selimut berhingga, disebut himpunan yang mempunyai sifat *Heine-Borel*. Jadi himpunan kompak adalah himpunan yang mempunyai sifat *Heine-Borel*. Suatu himpunan dalam suatu ruang metrik disebut mempunyai sifat *Bolzano-Weierstrass* jika setiap himpunan bagian tak berhingga, mempunyai titik limit di dalam himpunan itu.

Contoh 3.2.2.1 :

Di dalam $\mathbb{R}$ himpunan $E = \{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$ mempunyai sifat Bolzano-Weierstrass (B-W), sebab setiap himpunan bagian tak berhingganya mempunyai titik limit $0 \in E$. Hal ini dapat kita lihat bahwa jika 0 bukan titik limit himpunan $F \subset E$, maka F pasti berhingga. Jadi E mempunyai sifat B-W.

Teorema 3.2.2.3 :

Di dalam sebarang ruang metrik, himpunan kompak mempunyai sifat Bolzano-Weierstrass, yakni setiap himpunan bagian tak berhingga mempunyai titik limit di dalam himpunan itu.

Bukti :

Diberikan himpunan kompak K di dalam ruang metrik X . Jika K berhingga, maka pernyataan "Jika E himpunan bagian tak berhingga K maka E mempunyai titik limit di dalam K ", adalah pernyataan benar, sebab jika pernyataan itu ditulis sebagai $p \Rightarrow q$, pernyataan p selalu salah. Jadi K mempunyai sifat Bolzano-Weierstrass. Selanjutnya ditinjau

untuk K tak berhingga. Diandaikan K tidak mempunyai sifat B-W. Jadi terdapat suatu himpunan tak berhingga $E \subset K$ dan E tidak mempunyai titik limit di dalam K . Dengan demikian setiap anggota K bukan titik limit E , dan setiap titik anggota E adalah titik terasing untuk E . Jadi untuk setiap $x \in E$ dapat dibuat kitar $V(x)$ sehingga $V(x) \cap E = \{x\}$ dan untuk setiap $y \in K - E$ dapat dibuat kitar $W(y)$ dan $W(y) \cap E = \emptyset$. Karena E tak berhingga, maka keluarga $\{V(x)\} \cup \{W(y)\}$ merupakan keluarga takberhingga himpunan - himpunan terbuka yang menyelimuti K . Tetapi selimut terbuka ini tidak memuat subselimut berhingga, sebab dengan menghilangkan satu $V(x)$ saja titik $x \in E$ tidak lagi terselimuti. Hal ini kontradiksi dengan K adalah kompak. Terbukti bahwa K mempunyai sifat B-W.

Lemma 3.2.2.1 :

Jika E sub-himpunan ruang metrik X dan E mempunyai sifat B-W, maka untuk setiap $\delta > 0$ himpunan E dapat diselimuti oleh keluarga kitar-kitar berradius δ yang banyaknya berhingga.

Bukti :

Diberikan $\delta > 0$. Pertama kali ambil titik $x_1 \in E$. Selanjutnya diambil titik $x_2 \in E$ sehingga $d(x_1, x_2) > \delta$. Setelah diambil x_2 maka diambil $x_3 \in E$ dan $d(x_3, x_1) > \delta$ dan $d(x_3, x_2) > \delta$. Demikian setelah diambil $x_1, x_2, \dots, x_k$ di dalam E , kemudian diambil $x_{k+1} \in E$ sedemikian sehingga $d(x_{k+1}, x_j) > \delta$ untuk semua $j=1, 2, \dots, k$. Tentu saja hal ini tidak mungkin dikerjakan terus menerus. Sebab jika dapat

dikerjakan, berarti dapat dibuat himpunan bagian $\{x_n : n=1,2,\dots\}$ yang anggota-anggotanya hanya titik terasing yang merupakan himpunan tak berhingga E , bertentangan dengan E mempunyai sifat B-W. Jadi untuk setiap $\delta > 0$ yang diberikan terdapat $x_1, x_2, \dots, x_n$ anggota E sehingga tidak ada lagi $x \in E$ dan $x \in \bigcup_{1 \leq i \leq n} N_\delta(x_i)$, atau $E \subset \bigcup_{1 \leq i \leq n} N_\delta(x_i)$.

Lemma 3.2.2.2 :

Jika E adalah sub-himpunan yang mempunyai sifat B-W dalam ruang metrik X , maka terdapat sub-himpunan yang terbilang H dari E sehingga $\bar{H} = E$.

Bukti :

Menurut lemma 3.2.2.1 untuk setiap n bulat positif terdapat titik $x_{n1}, x_{n2}, \dots, x_{nk_n}$ yang banyaknya berhingga dan $x_{nj} \in E$ untuk $1 \leq j \leq k_n$ sehingga

$E \subset N_{1/n}(x_{n1}) \cup N_{1/n}(x_{n2}) \cup \dots \cup N_{1/n}(x_{nk_n})$ kita namakan $H = \{x_{nj} : 1 \leq j \leq k_n\}$, dan kita tunjukkan bahwa himpunan H yang dicari adalah $H = \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n$.

Jelas bahwa H terbilang.

Selanjutnya dibuktikan $\bar{H} = E$. Jadi harus dibuktikan untuk setiap $x \in E$, x adalah anggota H atau titik limit H . Ini cukup dibuktikan untuk setiap $x \in E$ dan setiap $r > 0$, irisan $N_r(x)$ dan H tidak kosong. Terdapatlah m bulat positif sehingga $r > 1/m$.

$$x \in E \subset N_{1/m}(x_{m1}) \cup \dots \cup N_{1/m}(x_{mk_m}).$$

Jadi terdapat p dan $1 \leq p \leq k_m$ sehingga $x \in N_{1/m}(x_{mp})$. Kita tahu bahwa $x_{mj} \in H_m$ untuk $1 \leq j \leq k_m$, jadi $x_p \in H_m$. Karena $x \in N_{1/m}(x_p)$ dan $1/m < r$, maka $d(x, x_p) < 1/m < r$ sehingga $x_p \in N_r(x)$. Terbukti bahwa $N_r(x) \cap E$ tidak kosong dan $\bar{H} = E$. ■

Lemma 3.2.2.3 :

Suatu selimut terbuka yang tak terbilang untuk himpunan E yang mempunyai sifat B-W dalam ruang metrik X , memuat sub-selimut yang paling banyak terbilang untuk E .

Bukti :

Dimisalkan $\{G_\alpha\}$ suatu selimut terbuka tak terbilang untuk E . Untuk setiap $x \in E$ dikawankan dengan tepat satu himpunan $G_\alpha(x)$ dari selimut tersebut memuat x . Jadi keluarga $\{G_\alpha(x)\}$ ini merupakan sub-selimut $\{G_\alpha\}$ yang menyelimuti E . Ditinjau himpunan H dalam lemma 3.2.2.2 yang terbilang dan $\bar{H} = E$. Selanjutnya dibentuk keluarga kitar-kitar $N_{1/n}(p)$ dengan $p \in H$ dan $n \in \mathbb{N}$. Keluarga $V = \{N_{1/n}(p) : p \in H, n \in \mathbb{N}\}$ adalah keluarga terbilang. Untuk setiap $G_\alpha(x)$ yang terbuka ini, terdapatlah $r > 0$ sehingga $x \in N_r(x) \subset G_\alpha(x)$. Karena $E = \bar{H}$ dan $x \in E$, maka untuk sebarang $h > 0$, irisan $N_h(x) \cap H$ tidak kosong. Diambil $h = 1/m < r/3$ dengan m bulat positif dan terdapat $q \in N_{1/m}(x) \cap H$, jadi $d(x, q) < 1/m$. Jika $y \in N_{1/m}(q)$, maka $d(x, y) \leq d(x, q) + d(q, y) < 1/m + 1/m = 2/m < 2r/3 < r$, jadi $y \in N_r(x)$. Karena $d(x, q) < 1/m$, maka diperoleh

$$x \in N_{1/m}(q) \subset N_r(x) \subset G_\alpha(x).$$

Untuk setiap $x \in E$ terdapatlah suatu $n \in \mathbb{N}$ dan suatu $p \in H$, jadi $N_{1/n}(p)$ anggota V , sehingga

$$x \in H_{1/n}(p) \subset G_\alpha(x).$$

Mungkin $G_\alpha(x) = G_\alpha(y)$, yakni dua titik x dan y anggota E berkawankan satu himpunan G_α . Dalam hal ini terdapat m dan n bulat positif dan p dan q anggota H sehingga

$$x \in N_{1/n}(p) \subset G_\alpha(x) \text{ dan } y \in N_{1/m}(q) \subset G_\alpha(y) = G_\alpha(x).$$

Selanjutnya untuk setiap $G_\alpha(x)$ kita kawankan dengan tepat satu $N_{1/n}(p) \subset V$ sehingga $x \in N_{1/n}(p) \subset G_\alpha(x)$. Dengan demikian keluarga $\{G_\alpha(x)\}$ ini ekuivalen dengan suatu sub-keluarga dari V . Karena V terbilang maka $\{G_\alpha(x)\}$ paling banyak terbilang. Terbuktilah lemma diatas. ■

Lemma 3.2.2.4 :

Setiap selimut terbuka yang terbilang untuk himpunan E yang mempunyai sifat B-W di dalam ruang metrik X , memuat sub-selimut berhingga yang menyelimuti E .

Bukti :

Diandaikan $\{G_n : n \in \mathbb{N}\}$ suatu selimut terbuka terbilang untuk E , dan $\{G_n\}$ tidak memuat sub-selimut berhingga yang menyelimuti E . Dibentuk himpunan $F_n = G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_n$ dan $H_n = F_n^c$. Jadi untuk setiap n keluarga berhingga $\{G_i : 1 \leq i \leq n\}$ tidak menyelimuti E , jadi

$$H_n \cap E \neq \emptyset \text{ untuk setiap } n \in \mathbb{N}. \quad \dots\dots\dots(1)$$

Karena $E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, maka $E \cap (\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n)^c = \emptyset$

$$\text{atau } E \cap (\bigcap_{n=1}^{\infty} H_n) = \emptyset \quad \dots\dots\dots(2)$$

Karena $F_1 \subset F_2 \subset F_3 \dots$ maka $H_1 \supset H_2 \supset H_3 \supset \dots$

Mengingat (1) untuk setiap n dapat diambil satu titik $x_n \in H_n \cap E$. Titik-titik x_n ini dapat diambil berlainan karena E tak berhingga. Terjadilah himpunan tak berhingga

$P=\{x_n\}$ yang merupakan sub-himpunan E . Jadi P mempunyai titik limit di dalam E , kita namakan p . Karena $P \subset H_1$ maka p titik limit H_1 . Karena H_1 tertutup (F_1^c terbuka) maka $p \in H_1$. Untuk setiap n , kecuali mungkin hanya berhingga banyak titik anggota P (yakni $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$), semua titik P di dalam H_n , jadi p titik limit H_n . Karena H_n tertutup, maka $p \in H_n$. Jadi untuk setiap n , titik $p \in H_n$. Dengan demikian $p \in E$ dan $p \in \bigcap_{n=1}^{\infty} H_n$, kontradiksi dengan (2). Jadi pengandaian kita salah, dan terbukti bahwa setiap selimut terbuka yang terbilang untuk himpunan dengan sifat B-W pasti memuat sub-selimut berhingga. ■

Dengan memperhatikan lemma 3.2.2.3 dan lemma 3.2.2.4 kita telah membuktikan Teorema berikut:

Teorema 3.2.2.4 :

Jika E suatu himpunan yang mempunyai sifat Bolzano-Weierstrass di dalam suatu ruang metrik X , maka E kompak.

Dari lemma 3.2.2.3 dan teorema 3.2.2.4 kita peroleh teorema berikut :

Teorema 3.2.2.5 :

Di dalam sebarang ruang metrik X , himpunan E adalah kompak jika dan hanya jika setiap himpunan bagian tak berhingga dari E mempunyai titik limit di dalam E .

Teorema ini juga dapat dinyatakan sebagai:

Di dalam sebarang ruang metrik, suatu himpunan mempunyai sifat Heine-Borel (H-B) jika dan hanya jika himpunan itu mempunyai sifat Bolzano-Weierstrass (B-W).

Teorema 3.2.2.6 :

Jika E adalah himpunan bagian dari ruang metrik X dan p adalah titik limit E , maka terdapat suatu barisan $\langle p_n \rangle$ di dalam E sedemikian sehingga $\lim p_n = p$.

Bukti :

Karena p adalah titik limit E , maka untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat suatu titik $x \in E$ sedemikian sehingga $d(p, x) < \varepsilon$. Ambil $\varepsilon = 1/n$, maka terdapat suatu titik anggota E , misal kita sebut p_n sehingga $d(p_n, p) < \frac{1}{n}$, jika diambil untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, maka terbentuklah barisan $\langle p_n \rangle$ dengan $p_n \in E$ dan $d(p_n, p) < 1/n$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Inilah barisan yang kita cari. Sebab jika diberikan sebarang $\varepsilon > 0$, maka terdapat $p \in \mathbb{N}$, sehingga $p > 1/\varepsilon$. Jadi untuk semua $n \geq p$ berlaku $d(p_n, p) < 1/n \leq 1/p < \varepsilon$.

Jadi $p_n \rightarrow p$. ■

Teorema 3.2.2.7 :

Barisan $\langle s_n \rangle$ konvergen ke s jika dan hanya jika setiap sub-barisan dari $\langle s_n \rangle$ juga konvergen ke s .

Bukti :

Andaikan $\langle s_n \rangle$ konvergen ke s dan $\langle s_{n_k} \rangle$ suatu sub-barisan dari $\langle s_n \rangle$. Diberikan sebarang $\varepsilon > 0$, maka terdapat p sehingga untuk semua $n \geq p$ berlaku $d(s_n, s) < \varepsilon$. Dalam barisan bilangan asli $\langle n_k \rangle$ dari indeks-indeks sub-barisan di atas berlaku $n_k \geq k$ untuk semua $k = 1, 2, \dots$. Jadi untuk semua $k \geq p$ berlaku $n_k > p$ sehingga $d(s_{n_k}, s) < \varepsilon$. Dengan demikian sub-barisan $\langle s_{n_k} : k \in \mathbb{N} \rangle$ mempunyai sifat

bahwa untuk $\varepsilon > 0$ yang diberikan terdapat $p \in \mathbb{N}$ sehingga untuk semua $k \geq p$ berlaku $d(s_{n_k}, s) < \varepsilon$. Ini berarti $s_{n_k} \rightarrow s$ untuk $k \rightarrow \infty$ atau $\lim_{k \rightarrow \infty} s_{n_k} = s$.

Jika setiap sub-barisan dari $\langle s_n \rangle$ konvergen ke s , maka $\langle s_n \rangle$ sebagai salah satu sub-barisan tentu juga konvergen ke s . ■

Teorema 3.2.2.8 :

Jika $\langle s_n \rangle$ adalah suatu barisan dalam ruang metrik X yang kompak, maka $\langle s_n \rangle$ memuat suatu subbarisan yang konvergen ke suatu titik di dalam X .

Bukti :

Dibedakan untuk daerah jangkauan $E = \langle s_n \rangle$ berhingga dan tak berhingga .

(a) Andaikan daerah jangkauan E berhingga. Maka paling sedikit ada satu elemen $s \in E$, sehingga $s = s_{n_k}$ untuk tak berhingga banyak indeks n , sebab s_n merupakan fungsi dengan domain himpunan tak berhingga $\mathbb{N}$. Dengan demikian kita dapat membentuk suatu barisan $\langle n_k : k \in \mathbb{N} \rangle$ sedemikian sehingga $n_1 < n_2 < n_3 \dots$ dan $s_{n_1} = s_{n_2} = \dots = s$.

Jadi yang kita peroleh ini merupakan suatu subbarisan yang konvergen ke $s \in E \subset X$.

(b) Selanjutnya andaikan E tak berhingga. Karena E adalah himpunan bagian ruang metrik X yang kompak, maka menurut Teorema 3.2.2.5, E mempunyai titik limit p di dalam E . Selanjutnya berdasarkan Teorema 3.2.2.7, kita dapat membentuk suatu barisan di dalam E yang konvergen ke p .

Dipilih n_1 sedemikian sehingga $d(s_{n_1}, p) < 1$. Selanjutnya

dipilih n_2 sedemikian sehingga $n_1 < n_2$ dan $d(s_{n_2}, p) < 1/2$.

Setelah dipilih $n_1 < n_2 < \dots < n_{k-1}$, maka n_k dipilih sedemikian sehingga $n_k > n_{k-1}$ dan $d(s_{n_k}, p) < 1/k$.

Terbentuklah sub-barisan $\langle s_{n_k} \rangle$ yang konvergen ke p untuk

$k \rightarrow \infty$. Sebab jika diberikan sebarang $\varepsilon > 0$, dapat

ditemukan p sedemikian sehingga untuk semua $k \geq p$ berlaku

$1/k < \varepsilon$. Jadi $d(s_{n_k}, p) < 1/k < \varepsilon$.

Dengan demikian maka $\lim_{n \rightarrow \infty} s_{n_k} = p$. ■

Teorema 3.2.2.9 :

Jika X adalah suatu ruang metrik kompak dan $\langle s_n \rangle$ adalah suatu barisan Cauchy di dalam X , maka $\langle s_n \rangle$ konvergen ke suatu titik di dalam X .

Bukti :

Menurut Teorema 3.2.2.8, karena $\langle s_n \rangle$ adalah suatu barisan di dalam ruang metrik kompak X , maka $\langle s_n \rangle$ memuat suatu subbarisan $\langle s_{n_k} \rangle$ yang konvergen ke suatu titik $s \in X$. Karena suatu barisan konvergen ke suatu titik bila dan hanya bila semua subbarisannya juga konvergen ke titik tersebut, maka tinggal dibuktikan bahwa $\langle s_n \rangle$ konvergen ke s . Diberikan $\varepsilon > 0$ sebarang. Karena $\langle s_{n_k} \rangle$ konvergen ke $s \in X$, maka terdapat suatu q , sehingga $d(s, s_{n_k}) < \varepsilon/2$ untuk $k > q$. Karena $\langle s_n \rangle$ suatu barisan Cauchy, maka terdapat p_1 sedemikian sehingga untuk $m > p_1$ dan $n > p_1$, maka berlaku

$d(s_m, s_n) < \epsilon/2$. Selanjutnya diambil $P = \max\{q, p_1\}$, maka $P \geq q$ sehingga $d(s, s_{n_p}) < \epsilon/2$.

Jadi untuk semua $n \geq P \geq p_1$ dan untuk $m = n_p$ dimana $n_p \geq P \geq p_1$, berlaku $d(s_n, s) \leq d(s_n, s_{n_p}) + d(s_{n_p}, s) < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$. ■

Teorema 3.2.2.10 :

Di dalam $\mathbb{R}^k$ setiap barisan Cauchy adalah konvergen.

Bukti :

Lebih dahulu akan dibuktikan bahwa setiap barisan Cauchy adalah terbatas. Dengan demikian daerah jangkauan barisan Cauchy di dalam $\mathbb{R}^k$ merupakan subhimpunan kompak yaitu suatu sel- k . Selanjutnya teorema diatas dibuktikan berdasarkan Teorema 3.2.2.9.

Andaikan barisan Cauchy tersebut adalah $\langle s_n \rangle$, maka terdapatlah suatu bilangan bulat p sedemikian sehingga untuk semua $m \geq p$ dan semua $n \geq p$ berlaku $|s_m - s_n| < 1$, khususnya $|s_p - s_n| < 1$, untuk semua $n \geq p$.

Diambil $M = \max\{1, |s_p - s_1|, |s_p - s_2|, \dots, |s_p - s_{p-1}|\}$.

Dengan demikian diperoleh hasil bahwa $|s_p - s_n| \leq M$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$, dan terbukti bahwa $\langle s_n \rangle$ adalah barisan terbatas. Jadi terdapatlah suatu sel I di dalam $\mathbb{R}^k$ sehingga daerah jangkauan $\{s_n\} \subset I$. Jadi $\langle s_n \rangle$ adalah barisan Cauchy di dalam sub ruang kompak I , menurut Teorema 3.2.2.9 $\langle s_n \rangle$ konvergen. ■

Berdasarkan Teorema 3.2.2.9 dan 3.2.2.10, maka setiap ruang metrik kompak dan setiap ruang Euclides adalah lengkap. Jika pada $\mathbb{R}^k$ diambil $k=1$, maka $\mathbb{R}$ yaitu

himpunan semua bilangan real adalah lengkap dan dengan cara yang sama dapat diturunkan bahwa $\mathbb{C}$ yaitu himpunan semua bilangan kompleks adalah lengkap. Selanjutnya jika dalam $\mathbb{R}$ didefinisikan norma untuk $x \in \mathbb{R}$ sebagai $\|x\| = |x|$ dan di dalam $\mathbb{C}$ didefinisikan norma untuk $z \in \mathbb{C}$, maka $\mathbb{R}$ maupun $\mathbb{C}$ adalah *ruang Banach*.

Jika di dalam $\mathbb{R}^k$ didefinisikan norma untuk $x \in \mathbb{R}^k$ sebagai $\|x\| = \left(\sum_{i=1}^k |x_i|^2 \right)^{1/2}$, maka dengan menggunakan pertidaksamaan Minkowski, maka norma di atas adalah well define. Dan menurut Teorema 3.2.2.10, maka $\mathbb{R}^k$ adalah *ruang Banach*. Dan jika di dalam $\mathbb{C}^k$ yaitu himpunan semua kelompok k buah bilangan kompleks yang berurutan didefinisikan norma untuk $z \in \mathbb{C}^k$ dengan $\|z\| = \left(\sum_{i=1}^k |z_i|^2 \right)^{1/2}$, maka $\mathbb{C}^k$ adalah *ruang Banach*.

3.3. Barisan Fungsi

Selanjutnya akan dibahas konsep kekonvergenan seragam suatu barisan fungsi dalam ruang metrik. Dalam pembahasan konsep kekonvergenan seragam ini, fungsi-fungsi yang ditinjau adalah fungsi-fungsi bernilai real atau kompleks yang didefinisikan pada suatu himpunan bagian dalam suatu ruang metrik. Seperti halnya pada barisan titik-titik, ditinjau juga tentang eksistensi suatu subbarisan yang konvergen seragam dalam suatu barisan fungsi yang konvergen titik demi titik pada suatu himpunan, untuk ini diperlukan konsep barisan fungsi

ekuikontinu.

Definisi 3.3.1a :

Diberikan barisan fungsi $\langle f_n \rangle$, $n=1,2, \dots$, yang didefinisikan pada suatu himpunan E , dan andaikan bahwa barisan bilangan-bilangan $\langle f_n(x) \rangle$ adalah konvergen untuk setiap $x \in E$. Dengan demikian kita dapat mendefinisikan suatu fungsi f pada E dengan

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x), \text{ dengan } x \in E \quad \dots\dots\dots(1)$$

Dalam hal ini dikatakan bahwa $\langle f_n \rangle$ konvergen pada E dan f adalah *limit* atau *fungsi limit* barisan $\langle f_n \rangle$. Kadang-kadang digunakan istilah yang lebih menggambarkan keadaan yang terjadi, yakni dengan mengatakan bahwa "barisan fungsi $\langle f_n \rangle$ konvergen ke fungsi f titik demi titik pada E ".

Untuk deret fungsi didefinisikan sebagai berikut :

Definisi 3.3.1b :

Deret fungsi $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ dikatakan konvergen ke fungsi f dalam E , jika deret bilangan $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konvergen ke bilangan $f(x)$ di setiap titik $x \in E$, jadi $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, $x \in E$ (2)

Fungsi f ini dinamakan *fungsi jumlah deret* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$.

Kita tahu bahwa jika $s_n = f_1 + f_2 + \dots + f_n$, fungsi jumlah f untuk deret $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ didefinisikan dengan $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x)$. Fungsi s_n dinamakan *fungsi jumlah parsial* deret tersebut.

Masalah utama yang kita hadapi adalah apakah sifat

penting yang dimiliki oleh fungsi-fungsi f_n tetap dimiliki oleh fungsi f setelah diadakan proses pengambilan limit (1) maupun (2). Masalah utama tersebut antara lain apakah jika masing-masing fungsi f_n kontinu pada E , maka f juga kontinu pada E .

Jadi, masalahnya adalah syarat apa yang harus ditambahkan kepada barisan atau deret fungsi itu agar kekontinuan tetap dimiliki oleh fungsi limit atau fungsi jumlah, apabila sifat-sifat itu dimiliki oleh fungsi-fungsi suku barisan atau deret. Untuk tujuan ini akan didefinisikan kekonvergenan yang lebih kuat dari pada kekonvergenan titik demi titik.

3.3.1. Kekonvergenan seragam

Definisi 3.3.1.1 :

Suatu barisan fungsi-fungsi $\langle f_n \rangle$ dikatakan *konvergen seragam* pada himpunan E ke suatu fungsi f , jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat suatu bilangan bulat positif p sehingga untuk semua $n \geq p$ dan semua $x \in E$ berlaku

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \dots\dots\dots (1)$$

Untuk lebih jelasnya, kita tuliskan definisi ini dalam bentuk lambang

$$(\langle f_n \rangle \rightarrow f \text{ seragam pada } E) \Leftrightarrow ((\forall \varepsilon > 0)(\exists p \in \mathbb{N})(\forall n \geq p, \forall x \in E) \rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon)).$$

Perlu diingat bahwa ketaksamaan dalam definisi diatas harus berlaku untuk semua $n \geq p$ dan untuk semua $x \in E$. Jadi jika diberikan $\varepsilon > 0$ harus dapat dicari suatu bilangan

bulat p yang hanya bergantung pada ϵ tetapi tidak bergantung pada x dengan ketaksamaan (1) berlaku untuk semua $n \geq p$.

Berbeda dengan barisan fungsi yang hanya konvergen titik demi titik pada E ke fungsi f , yakni pada setiap $\epsilon > 0$ terdapat bilangan bulat positif p sehingga untuk sesuatu titik $t \in E$ yang diberikan, berlaku $|f_n(t) - f(t)| < \epsilon$, untuk semua $n \geq p$. Dalam hal ini p kecuali bergantung pada ϵ , masih juga bergantung pada t . Jelasnya, pada suatu $\epsilon > 0$ yang diberikan, bilangan p yang diperoleh untuk suatu $t \in E$, mungkin tidak dapat digunakan untuk titik yang lain $s \in E$, sehingga (1) berlaku untuk $x = s$ dan untuk semua $n \geq p$. Tetapi pada kekonvergenan seragam, pada $\epsilon > 0$ yang diberikan kita dapat memperoleh p yang dapat digunakan untuk semua $x \in E$ sehingga (1) berlaku apabila $n \geq p$.

Untuk barisan $\langle f_n \rangle$ yang konvergen seragam ke f pada E ditulis " $f_n \rightarrow f$ seragam pada E ", sedangkan untuk barisan $\langle f_n \rangle$ yang hanya konvergen titik demi titik pada E ditulis " $f_n \rightarrow f$ pada E " dan bilamana perlu untuk lebih memperjelas dapat ditulis " $f_n \rightarrow f$ titik demi titik pada E ".

Dari pembahasan diatas, jelas kita mempunyai pernyataan berikut :

$(f_n \rightarrow f \text{ seragam pada } E) \Rightarrow (f_n \rightarrow f \text{ pada } E)$, tetapi sebaliknya tidak benar.

Definisi kekonvergenan seragam untuk suatu deret fungsi pada himpunan E dapat dikembalikan ke definisi

kekonvergenan seragam untuk barisan fungsi yakni dengan mengambil barisan jumlah parsialnya.

Definisi 3.3.1.2 :

Jika $s_n = f_1 + f_2 + \dots + f_n$ maka deret $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ adalah konvergen seragam ke f pada E jika dan hanya jika barisan $\langle s_n \rangle$ konvergen seragam ke f pada E .

Teorema-teorema berikut ini bermanfaat untuk menyelidiki tentang kekonvergenan seragam barisan atau deret fungsi.

Teorema 3.3.1.1 : (Kriteria Cauchy)

Barisan fungsi $\langle f_n \rangle$ yang didefinisikan pada himpunan E , konvergen seragam pada E jika dan hanya jika untuk setiap $\epsilon > 0$ terdapat suatu bilangan positif p sedemikian sehingga untuk semua $n \geq p$ dan $m \geq p$ dan semua $x \in E$ berlaku :

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon.$$

Bukti :

Diandaikan $\langle f_n \rangle$ konvergen seragam pada E dan dimisalkan f adalah fungsi limitnya. Diberikan $\epsilon > 0$. Maka terdapat suatu p sehingga untuk semua $n \geq p$ dan semua $x \in E$ berlaku $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon/2$

Jadi jika $n \geq p$ dan $m \geq p$ dan $x \in E$, maka berlaku

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.$$

Diandaikan syarat Cauchy berlaku, yakni terdapat suatu p sehingga untuk semua $n \geq p$ dan semua $m \geq p$ dan semua $x \in E$

berlaku $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon/2$ (1)

Menurut Teorema 3.2.2.10, (dengan $\mathbb{R}^k$ diambil $\mathbb{R}^1$ atau $\mathbb{R}^2$), barisan bilangan $\langle f_n(x) \rangle$ adalah konvergen untuk setiap $x \in E$ ke suatu limit yang boleh kita namakan $f(x)$. Jadi barisan fungsi $\langle f_n \rangle$ konvergen titik demi titik ke fungsi f pada E . Selanjutnya akan dibuktikan bahwa $f_n \rightarrow f$ pada E .

Diberikan $\varepsilon > 0$ dan dipilih P sedemikian sehingga (1) berlaku. Kita ambil n tetap dan dalam (1) jika $m \rightarrow \infty$ maka hal ini menghasilkan

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon/2 < \varepsilon \text{(2)}$$

untuk setiap $n \geq P$ dan setiap $x \in E$, yang berarti $f_n \rightarrow f$ seragam pada E . ■

Teorema 3.3.1.2 :

Andaikan $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$, untuk semua $x \in E$ dan

$$M_n = \sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)|.$$

Maka $f_n \rightarrow f$ seragam pada E jika dan hanya jika $M_n \rightarrow 0$ untuk $n \rightarrow \infty$.

Bukti :

Jika $f_n \rightarrow f$ seragam pada E , maka jika diberikan $\varepsilon > 0$, terdapat P sehingga untuk $\forall n \geq P$ dan $\forall x \in E$ berlaku $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/2$. Jadi untuk $\forall n \geq P$ berlaku

$$0 \leq M_n = \sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon/2 < \varepsilon \text{ sehingga } \lim_{n \rightarrow \infty} M_n = 0.$$

Jika $\lim M_n = 0$, maka terdapatlah P sehingga untuk $\forall n \geq P$ berlaku $M_n < \varepsilon$. Ini berarti $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ untuk $\forall n \geq P$ dan $\forall x \in E$, sehingga $f_n \rightarrow f$ seragam pada E . ■

Teorema 3.3.1.3 : (Uji M Weierstrass)

Diberikan barisan fungsi $\langle f_n \rangle$ yang didefinisikan pada E , dan diketahui bahwa terdapat barisan bilangan $\langle M_n \rangle$ sehingga $|f_n(x)| \leq M_n$, ($x \in E$, $n=1,2, \dots$)

Jika deret bilangan $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ konvergen, maka deret fungsi $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konvergen seragam pada E .

Bukti :

Andaikan $s_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)$, $x \in E$,
 $n=1,2,\dots$ dan $T_n = M_1 + M_2 + \dots + M_n$, $n=1,2, \dots$. Jika $\sum M_n$ konvergen, maka untuk $\epsilon > 0$ sebarang, terdapat bilangan bulat positif p sehingga $\forall n \geq p$, $\forall m \geq p$ dan $n > m$ berlaku

$$|T_n - T_m| = \sum_{i=m+1}^n M_i < \epsilon.$$

Jadi untuk semua $x \in E$, dan n dan m tersebut berlaku

$$|s_n(x) - s_m(x)| = \left| \sum_{i=m+1}^n f_i(x) \right| \leq \sum_{i=m+1}^n |f_i(x)| \leq \sum_{i=m+1}^n M_i < \epsilon.$$

Sehingga deret $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konvergen seragam pada E . ■

Contoh 3.3.1.1 :

Jika $\langle f_n \rangle$ barisan fungsi-fungsi yang terbatas pada E dan yang konvergen seragam pada E , maka terdapat suatu bilangan positif M sehingga untuk semua $n \in \mathbb{N}$ dan semua $x \in E$ berlaku $|f_n(x)| \leq M$.

Bukti :

Menurut kriteria Cauchy, untuk $n=1$ terdapat p sehingga untuk semua $n \geq p$, semua $m \geq p$ dan semua $x \in E$ berlaku $|f_n(x) - f_m(x)| < 1$. Khususnya untuk $m=p$ berlaku

$$|f_n(x)| < |f_p(x)| + 1 \leq M_p + 1,$$

untuk semua $n \geq p$ dan semua $x \in E$, dengan M_p adalah suatu

bilangan sedemikian sehingga $|f_p(x)| \leq M_p$ karena diketahui f_p terbatas pada E . Demikian juga karena $\langle f_n \rangle$ barisan fungsi terbatas pada E , terdapat $M_1, M_2, \dots, M_{p-1}$ sehingga $|f_n(x)| \leq M_n$ untuk $x \in E$ dan $n=1, 2, \dots, p-1$.

Jika $M = \max\{M_1, M_2, \dots, M_{p-1}, M_p\}$ maka $|f_n(x)| \leq M$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$ dan semua $x \in E$. ■

3.3.3. Konvergen seragam dan kekontinuan

Akan ditinjau masalah urutan pengambilan limit, yakni bilamana $\lim_{x \rightarrow p} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow p} f_n(x)$

Teorema 3.3.2.1 :

Andaikan bahwa $f_n \rightarrow f$ seragam pada himpunan E subhimpunan suatu ruang metrik. Dimisalkan bahwa p suatu titik limit E , dan $\lim_{x \rightarrow p} f_n(x) = A_n$, $n = 1, 2, \dots$

Maka $\langle A_n \rangle$ konvergen, dan

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$$

Dengan kata lain, kesimpulannya adalah

$$\lim_{x \rightarrow p} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow p} f_n(x)$$

Bukti :

Diberikan $\epsilon > 0$. Karena $\langle f_n \rangle$ konvergen seragam, maka terdapat P sehingga untuk semua n dan m yang lebih besar atau sama dengan P dan untuk semua $x \in E$ berlaku :

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon/2.$$

Dengan membawa $x \rightarrow p$, maka untuk $n \geq P$ dan $m \geq P$ berlaku

$$|A_n - A_m| \leq \epsilon/2 < \epsilon.$$

Dengan demikian barisan bilangan $\langle A_n \rangle$ adalah suatu

barisan Cauchy, jadi konvergen, kita sebut saja ke limit A. ■

Kita harus membuktikan bahwa dapat dicari suatu sekitar V dari p sehingga untuk semua $x \in V \cap E$ dan $x \neq p$ berlaku $|f(x) - A| < \varepsilon$, yakni untuk memperlihatkan bahwa

$$\lim_{x \rightarrow p} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n.$$

Kita perhatikan ketaksamaan

$$|f(x) - A| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - A_n| + |A_n - A| \dots\dots\dots(1)$$

Kita dapat memilih n yang cukup besar sehingga sekaligus

$$\text{berlaku } |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon/3 \dots\dots\dots(2)$$

yang berlaku untuk semua $x \in E$ karena $f_n \rightarrow f$ seragam pada

$$E \text{ dan } |A_n - A| < \varepsilon/3 \dots\dots\dots(3)$$

karena $\lim A_n = A$.

Untuk nilai n ini dipilih suatu sekitar V dari p sehingga

$$|f_n(x) - A_n| < \varepsilon/3, \text{ untuk } x \in V \cap E \text{ dan } x \neq p \dots\dots(4)$$

hal ini mungkin dilakukan karena $\lim_{x \rightarrow p} f_n(x) = A_n$.

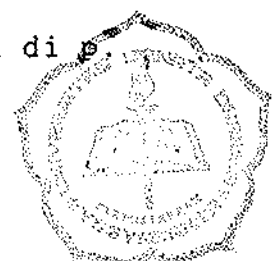
Dengan mensubstitusikan (2), (3) dan (4) ke dalam (1) diperoleh $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Untuk semua $x \in V \cap E$ dan $x \neq p$ dan dengan demikian terbukti bahwa

$$\lim_{x \rightarrow p} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow p} f_n(x)$$

Sebagai akibat penting dari Teorema diatas, jika diketahui bahwa $\langle f_n \rangle$ adalah barisan fungsi yang kontinu di titik p, maka $\lim_{x \rightarrow p} f_n(x) = f_n(p)$, untuk $n=1, 2, \dots$

Jadi $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(p) = f(p)$ sehingga f kontinu di p.



kita peroleh teorema berikut :

Teorema 3.3.2.2 :

Jika $\langle f_n \rangle$ suatu barisan fungsi-fungsi yang kontinu pada E , dan jika $f_n \rightarrow f$ seragam pada E , maka f kontinu pada E .

Bukti :

Karena $\langle f_n \rangle$ konvergen seragam pada E , maka untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat bilangan n_0 sedemikian sehingga untuk $\forall n \geq n_0$ dan untuk $\forall x \in E$ berlaku $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon/3$.

Karena fungsi f_{n_0} kontinu di setiap titik $x_0 \in E$, maka terdapat sekitar V dari x_0 , sedemikian sehingga untuk semua $x \in E$ yang berada dalam V berlaku

$$|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| < \varepsilon/3.$$

Jadi untuk semua titik $x \in E$ yang terletak di dalam V berlaku

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &\leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| + \\ &\quad |f_{n_0}(x_0) - f(x_0)| \\ &< \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon. \end{aligned}$$

Hal ini menunjukkan bahwa f kontinu di x_0 . ■

3.4. Ruang Fungsi-fungsi

Kita tahu bahwa barisan fungsi-fungsi kontinu yang konvergen seragam pada suatu himpunan, maka fungsi limitnya juga kontinu pada himpunan tersebut.

Andaikan X adalah sebarang ruang metrik. X dapat

dipandang sebagai ruang fungsi-fungsi dalam arti bahwa X adalah ruang linear yang anggota-anggotanya adalah fungsi yang didefinisikan pada X dengan operasi penjumlahan dan perkalian skalar titik demi titik yaitu

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x) \text{ dan } (\alpha f)(x)=\alpha f(x).$$

Selanjutnya dibentuk $C(X)$ yaitu himpunan semua fungsi bernilai real atau kompleks yang kontinu dan terbatas yang didefinisikan pada X . Untuk mempertegas, $C(X)$ terdiri atas $C(X, \mathbb{R})$ yaitu himpunan semua fungsi bernilai real yang kontinu dan terbatas yang didefinisikan pada X dan $C(X, \mathbb{C})$ yaitu himpunan semua fungsi bernilai kompleks yang kontinu dan terbatas yang didefinisikan pada X .

Untuk setiap $f \in C(X)$ didefinisikan norma untuk f yang disebut *norma supremum* dengan :

$$\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

Karena f diasumsikan terbatas pada X , maka $\|f\| < \infty$. Jelas bahwa $\|f\| \geq 0$ dan $\|f\|=0$ jika dan hanya jika $f(x)=0$, untuk setiap $x \in X$, yakni hanya jika $f=0$.

Jika $h=f+g$, maka untuk setiap $x \in X$, berlaku :

$$|h(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \|f\| + \|g\|,$$

sehingga $\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|$

Dengan demikian pada $C(X)$ dapat didefinisikan metrik atau jarak antara f dan g anggota $C(X)$ dengan $\|f-g\|$. Dapat diperiksa bahwa untuk f, g dan h di dalam $C(X)$ berlaku :

$$(a) \|f-g\| \geq 0, \|f-g\|=0 \iff f=g$$

$$(b) \|f-g\| = \|g-f\|$$

$$(c) \|f-g\| \leq \|f-h\| + \|h-g\|.$$

Dengan demikian $C(X)$ telah kita jadikan suatu ruang metrik. Metrik yang kita gunakan ini dinamakan metrik supremum atau metrik seragam. Alasan bahwa metrik dari $C(X)$ tersebut dinamakan metrik seragam dapat dilihat pada teorema berikut :

Teorema 3.4.1 :

Suatu barisan $\langle f_n \rangle$ di dalam ruang metrik $C(X)$ adalah konvergen ke suatu titik (fungsi) $f \in C(X)$ jika dan hanya jika $f_n \rightarrow f$ seragam pada X .

Bukti :

Barisan $\langle f_n \rangle$ di dalam ruang metrik $C(X)$ konvergen ke f bila dan hanya bila

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists p \in \mathbb{N})(\forall n \geq p) \text{ maka } \|f_n - f\| = \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \dots (1)$$

$f_n \rightarrow f$ seragam pada X , menurut Teorema 3.3.1.2, bila dan hanya bila

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists p \in \mathbb{N})(\forall n \geq p), \text{ maka } M_n = \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \dots (2)$$

Tampak (1) bila dan hanya bila (2). ■

Teorema 3.4.2 :

Ruang metrik $C(X)$ dengan metrik seragam di atas adalah lengkap.

Bukti :

Harus dibuktikan bahwa setiap barisan Cauchy di dalam $C(X)$ adalah konvergen ke suatu titik di dalam $C(X)$, yakni suatu fungsi yang kontinu dan terbatas pada X .

Andaikan $\langle f_n \rangle$ adalah suatu barisan Cauchy di dalam $C(X)$. Jadi untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat suatu bilangan p sehingga untuk $n \geq p, m \geq p$, berlaku $\|f_n - f_m\| < \varepsilon$. Menurut Kriteria Cauchy (Teorema 3.3.1.1), hal ini berarti bahwa terdapat suatu fungsi f sehingga $f_n \rightarrow f$ seragam pada X , dan menurut Teorema 3.3.2.2., fungsi f ini kontinu pada X . Karena terdapat suatu indeks n sehingga $|f_n(x) - f(x)| < 1$ untuk semua $x \in X$, maka $|f(x)| < |f_n(x)| + 1$. Karena f_n terbatas pada X , maka f juga terbatas pada X . Jadi $f \in C(X)$. Karena $f_n \rightarrow f$ seragam pada X , menurut Teorema 3.4.1., maka barisan $\langle f_n \rangle$ sebagai barisan di dalam ruang metrik $C(X)$ konvergen ke suatu titik $f \in C(X)$. ■

Berdasarkan hasil tersebut di atas, maka jelas bahwa $C(X, \mathbb{R})$ maupun $C(X, \mathbb{C})$ yang dilengkapi dengan norma suprimum merupakan *Ruang Banach*.

BAB IV

TRANSFORMASI LINEAR KONTINU

Pada bagian ini akan dibahas tentang transformasi linear dan fungsional linear serta syarat perlu dan cukup untuk kekontinuan suatu transformasi linear.

4.1. Transformasi Linear Kontinu

Definisi 4.1.1 :

Andaikan U dan V adalah ruang linear dan andaikan T adalah pemetaan dari U ke V . Maka T dikatakan pemetaan linear jika :

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y), \quad \forall x, y \in U \text{ dan } \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K},$$

dengan $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ atau $\mathbb{C}$.

Pemetaan linear dari U ke V disebut juga sebagai transformasi linear dari ruang linear U ke V . Sedangkan transformasi linear dari ruang linear bernorma N ke $\mathbb{K}$ disebut *fungsional linear* pada N . Jika f fungsional linear pada N ke $\mathbb{K}$, maka $f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$,

$$\forall x, y \in N \text{ dan } \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}.$$

Definisi 4.1.2 :

Andaikan N dan N' adalah ruang linear bernorma lewat $\mathbb{K}$ dengan skalar yang sama, dan andaikan T adalah transformasi linear dari N ke N' . Bila kita mengatakan T adalah kontinu, kita artikan kontinu sebagai pemetaan dari ruang metrik N ke ruang metrik N' .

Menurut definisi 2.6.3, definisi ini ekuivalen dengan pernyataan bahwa $x_n \rightarrow x$ dalam N maka $T(x_n) \rightarrow T(x)$ dalam N' .

Definisi 4.1.3 :

$T: N \rightarrow N'$ adalah kontinu bila dan hanya bila

$$\|x_n - x\| \rightarrow 0 \implies \|T(x_n) - T(x)\| \rightarrow 0.$$

Lemma 4.1.1 :

Andaikan T adalah transformasi linear dari ruang linear U ke ruang linear V . Jika T kontinu di suatu titik di U maka T kontinu pada U .

Bukti :

Andaikan T kontinu di $x_0 \in U$ dan diberikan sebarang $\varepsilon > 0$. Maka terdapat $\delta > 0$ sehingga :

$$\|T(x_0) - T(x)\| < \varepsilon \text{ bila } \|x_0 - x\| < \delta$$

Ambil sebarang $x_1 \in U$, maka untuk semua $x \in U$, sehingga $\|x_1 - x\| < \delta$ berlaku :

$$\|x_0 - (x - x_1 + x_0)\| = \|x_1 - x\| < \delta$$

dan

$$\|T(x_1) - T(x)\| = \|T(x_0) - T(x - x_1 + x_0)\| < \varepsilon.$$

Ini berarti T kontinu di x_1 . Karena x_1 sebarang titik di U maka T kontinu pada U . ■

4.2. Transformasi Linear Terbatas

Definisi 4.2.1 :

Transformasi linear T dari ruang linear bernorma N ke ruang linear bernorma N' dikatakan *terbatas* jika :
terdapat $M \in \mathbb{R}$, $M > 0$ sedemikian sehingga $\|T(x)\| \leq M$,

untuk setiap $x \in N$.

Definisi 4.2.2 :

Andaikan N dan N' adalah ruang linear bernorma lewat K dan andaikan T adalah transformasi linear dari N ke N' . Maka *norma* T ditulis dengan notasi $\|T\|$ dan didefinisikan sebagai : $\|T\| = \sup \{ \|T(x)\| : \|x\| \leq 1 \}$.

Berikut ini merupakan wujud lain dari norma T yang sering digunakan yakni :

$$(a) \|T\| = \sup \{ \|T(x)\| : \|x\| = 1 \}$$

$$(b) \|T\| = \sup \left\{ \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} : x \in N \text{ dan } x \neq 0 \right\}.$$

$$(c) \|T\| = \inf \{ K \geq 0 \text{ dan } \|T(x)\| \leq K \|x\|, \text{ untuk semua } x \in N \}$$

$$\text{Misalkan : } p = \sup \{ \|T(x)\| : \|x\| = 1 \}$$

$$q = \sup \left\{ \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} : x \in N \text{ dan } x \neq 0 \right\}.$$

$$r = \inf \{ K \geq 0 : \|T(x)\| \leq K \|x\| \text{ untuk semua } x \in N \}.$$

Akan ditunjukkan $\|T\| = p = q = r$.

Untuk membuktikan ini, cukup ditunjukkan ketaksamaan berikut : $\|T\| \geq p = q \geq r \geq \|T\|$.

Jelas bahwa $\{ x \in N : \|x\| = 1 \} \subseteq \{ x \in N : \|x\| \leq 1 \}$

Jadi $\|T\| \geq p$.

Misal $P = \{ \|T(x)\| : \|x\| = 1 \}$ dan

$$Q = \left\{ \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} : x \in N \text{ dan } x \neq 0 \right\}$$

Misalkan $y \in P$. Maka $y = \|T(x)\|$, untuk suatu $x \in N$,

dengan $\|x\| = 1$. Akibatnya $y = \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} \in Q$, sehingga

$P \subseteq Q$. Jadi $p \leq q$. Sebaliknya apabila $z \in Q$, maka

$z = \frac{\|T(x)\|}{\|x\|}$ dengan $x \in N$ dan $x \neq 0$ dan karena T linear

maka $z = \|T(\|x\|^{-1}x)\|$. Jelas $\|(\|x\|^{-1}x)\| = 1$ sehingga $z \in P$. Karena itu $Q \subseteq P$ dan $p \geq q$.

Dengan demikian $p = q$.

Dari (b) diperoleh $\|T(x)\| \leq q\|x\|$, untuk semua $x \in N$. Akibatnya $q \geq r$.

Misalkan :

$$B = \{K \geq 0 : \|T(x)\| \leq K \|x\|, \text{ untuk semua } x \in N\}$$

Maka untuk $K \in B$ berlaku $\|T(x)\| \leq K\|x\|$. Oleh karena itu $\|T(x)\| \leq K$ apabila $\|x\| \leq 1$, $x \in N$.

Jadi $\|T(x)\| \leq K$, untuk semua $K \in B$. Dengan demikian diperoleh $\|T\| = \sup \{ \|T(x)\| : \|x\| \leq 1 \} \leq r$.

Jadi telah ditunjukkan bahwa $\|T\| = p = q = r$. ■

Dari definisi (b) diperoleh ketaksamaan yang cukup penting yakni : untuk setiap $x \in N$ berlaku :

$$\|T(x)\| \leq \|T\| \|x\| \dots\dots\dots (4.1.1)$$

Teorema 4.2.1 :

Andaikan N dan N' adalah ruang linear bernorma .
Andaikan T adalah transformasi linear dari N ke N' .
 T kontinu pada N jika dan hanya jika T terbatas .

Bukti :

($\implies$)

Andaikan T kontinu . Maka T kontinu di $0 \in N$.

Ambil $\delta > 0$ sehingga $\|T(x)\| \leq 1$ bila $\|x\| < \delta$.

Misalkan $\|x\| \leq 1$.

$$\text{Maka } \left\| \frac{1}{2} \delta x \right\| = \frac{1}{2} \delta \|x\| \leq \frac{1}{2} \delta < \delta \text{ dan}$$

$$\|T(\frac{1}{2} \delta x)\| \leq 1$$

Akan tetapi :

$$T(\frac{1}{2} \delta x) = \frac{1}{2} \delta T(x) .$$

Jadi :

$$\begin{aligned}\|T(x)\| &= \left\| \frac{2}{\delta} T\left(\frac{1}{2}\delta x\right) \right\| \\ &= \frac{2}{\delta} \|T\left(\frac{1}{2}\delta x\right)\| \\ &\leq \frac{2}{\delta} .\end{aligned}$$

Ini menunjukkan bahwa T adalah terbatas .

($\longleftarrow$)

Andaikan T terbatas . Untuk membuktikan T kontinu pada N berdasarkan LEMMA 4.1.1, cukup ditunjukkan bahwa T kontinu pada $0 \in N$. Misalkan diberikan sebarang $\varepsilon > 0$ dan $M \in \mathbb{R}$ sehingga $\|T(x)\| \leq M$ bila $\|x\| \leq 1$. Ambil $\delta > 0$ sedemikian sehingga $\delta M < \varepsilon$. Misalkan $\|x\| < \delta$, jadi

$$\begin{aligned}\|\delta^{-1}x\| &= \delta^{-1}\|x\| \\ &\leq \delta^{-1}\delta \\ &= 1 .\end{aligned}$$

Akibatnya :

$$\|T(\delta^{-1}x)\| \leq M , \quad \forall \|x\| < \delta .$$

Jadi :

$$\begin{aligned}\|T(x)\| &= \|\delta T(\delta^{-1}x)\| \\ &= \delta \|T(\delta^{-1}x)\| \\ &\leq \delta M \\ &< \varepsilon\end{aligned}$$

Ini berarti T kontinu di $0 \in N$. ■

4.3. Himpunan Transformasi Linear Kontinu

Definisi 4.3.1 :

Andaikan E dan F masing-masing adalah ruang linear . Pemetaan S dan T masing - masing merupakan transformasi

linear dari E ke F dan $\alpha \in \mathbb{K}$. Didefinisikan pemetaan $S + T$ dan αT dari E ke F sebagai berikut :

$$[S + T](x) = S(x) + T(x) \text{ dan}$$

$$[\alpha T](x) = \alpha [T(x)], \forall x \in E \text{ dan } \forall \alpha \in \mathbb{K}.$$

Dengan mudah dapat diperiksa bahwa $S + T$ dan αT merupakan transformasi linear melalui operasi yang telah didefinisikan. Himpunan semua transformasi linear dari ruang linear E ke ruang linear F merupakan ruang linear.

Definisi 4.3.2 :

Andaikan N dan N' masing-masing adalah ruang linear bernorma. Himpunan semua transformasi linear kontinu dan terbatas dari N ke N' dinotasikan sebagai $B(N, N')$ catatan : B singkatan dari "bounded" (terbatas).

Teorema 4.3.1 :

Andaikan N dan N' masing - masing adalah ruang linear bernorma. Andaikan $B(N, N')$ adalah himpunan semua transformasi linear terbatas dari N ke dalam N' . Maka $B(N, N')$ adalah ruang linear dan $\|T\|$ adalah norma pada $B(N, N')$. Selanjutnya jika N' adalah ruang Banach, maka $B(N, N')$ juga ruang Banach.

Bukti :

Untuk membuktikan bahwa $B(N, N')$ adalah ruang linear, cukup ditunjukkan bahwa $S + T \in B(N, N')$ dan $\alpha T \in B(N, N')$ untuk setiap $S, T \in B(N, N')$ dan $\alpha \in \mathbb{K}$. Jika S dan T masing-masing merupakan transformasi linear dari N ke N' dan $\alpha \in \mathbb{K}$, maka $(S+T)$ dan αT masing-masing

merupakan transformasi linear dari N ke N' .

Selanjutnya dari ketaksamaan (4.1.1), diperoleh bahwa untuk $\|x\| \leq 1$ berlaku :

$$\begin{aligned}\|(S + T)(x)\| &= \|S(x) + T(x)\| \\ &\leq \|S(x)\| + \|T(x)\| \\ &\leq \|S\| \|x\| + \|T\| \|x\| \\ &\leq \|S\| + \|T\|.\end{aligned}$$

Hal ini menunjukkan kepada kita bahwa $(S+T) \in B(N, N')$

$$\text{dan } \|S + T\| \leq \|S\| + \|T\|.$$

Misalkan $x \in N$ sembarang dengan $\|x\| \leq 1$. Maka

$$\begin{aligned}\|(\alpha T)(x)\| &= \|\alpha T(x)\| = |\alpha| \|T(x)\| \\ &\leq |\alpha| \|T\| \|x\| \\ &\leq |\alpha| \|T\|.\end{aligned}$$

Hal ini berarti bahwa $\alpha T \in B(N, N')$ dan $\|\alpha T\| = |\alpha| \|T\|$.

Misalkan $T \in B(N, N')$ dan $\|T\| = 0$. Maka dari ketaksamaan (4.1.1) diperoleh $\|T(x)\| = 0$.

Akibatnya $T(x)=0, \forall x \in N$. Jadi $T=0$.

Dengan demikian terbukti bahwa $B(N, N')$ adalah ruang linear $\|T\|$ adalah norma pada $B(N, N')$.

Andaikan N' adalah ruang Banach dan andaikan pula bahwa $\langle T_n \rangle$ adalah barisan Cauchy pada $B(N, N')$. Maka terdapat bilangan asli A sedemikian sehingga

$$\|T_m - T_n\| < \varepsilon, \text{ untuk } n, m \geq A$$

Ambil sebarang $x \in N$. Maka untuk $n, m \geq A$, berlaku

$$\begin{aligned}\|T_m(x) - T_n(x)\| &= \|(T_m - T_n)(x)\| \leq \|T_m - T_n\| \|x\| \\ &\leq \varepsilon \|x\| \dots\dots\dots (4.3.1)\end{aligned}$$

Hal ini menunjukkan bahwa $\langle T_n(x) \rangle$ barisan Cauchy dalam

N' . Oleh karena N' adalah lengkap, maka $\langle T_n(x) \rangle$ konvergen. Misalkan $T(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x) \dots\dots\dots (4.3.2)$
Oleh karena $x \in N$ sebarang, maka T mendefinisikan sebuah pemetaan dari N ke dalam N' .

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $T \in B(N, N')$ dan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = T.$$

Ambil sebarang $x, y \in N$ dan sebarang $\alpha, \beta \in K$. Maka dari (4.3.2) diperoleh :

$$\begin{aligned} T(\alpha x + \beta y) &= \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(\alpha x + \beta y) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha T_n(x) + \beta T_n(y)) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha T_n(x) + \lim_{n \rightarrow \infty} \beta T_n(y) . \\ &= \alpha \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x) + \beta \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(y) . \\ &= \alpha T(x) + \beta T(y) . \end{aligned}$$

Hal ini menunjukkan bahwa T linear .

Selain itu untuk semua $x \in N$ dan untuk semua bilangan bulat positif n berlaku :

$$\begin{aligned} T(x) - T_n(x) &= [\lim_{m \rightarrow \infty} T_m(x)] - T_n(x) . \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} [T_m(x) - T_n(x)] \\ \|T(x) - T_n(x)\| &= \| \lim_{m \rightarrow \infty} T_m(x) - T_n(x) \| . \end{aligned}$$

Dari (4.3.1) diperoleh bahwa untuk setiap $x \in N$ dan $n \geq A$, berlaku

$$\|T(x) - T_n(x)\| \leq \epsilon \|x\| \dots\dots\dots (4.3.3)$$

Dari (4.1.1) dan (4.3.3) didapat :

$$\begin{aligned} \|T(x)\| &= \|T(x) - T_n(x) + T_n(x)\| \\ &\leq \|T(x) - T_n(x)\| + \|T_n(x)\| \end{aligned}$$

$$\leq \varepsilon \|x\| + \|T_N\| \|x\|, \forall x \in N.$$

Hal ini berarti bahwa $T \in B(N, N')$.

Selanjutnya dari (4.3.3) berakibat bahwa

$$\|T(x) - T_n(x)\| \leq \sup \{\|T(x) - T_n(x)\| : \|x\| \leq 1\} \leq \varepsilon$$

untuk setiap $n \in A$.

Jadi $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = T$. ■

Selanjutnya dibuktikan untuk kejadian bahwa $B(N, N')$ adalah himpunan semua transformasi linear kontinu dari N ke N' . Bukti dari teorema berikut analog dengan bukti pada teorema 4.3.1.

Teorema 4.3.2 :

Andaikan N dan N' masing-masing adalah ruang linear bernorma. Dan andaikan $B(N, N')$ adalah himpunan semua transformasi linear kontinu dari N ke dalam N' .

Maka $B(N, N')$ adalah ruang linear bernorma dengan norma T didefinisikan sebagai $\|T\| = \sup \{\|T(x)\| : \|x\| < 1\}$.

Selanjutnya jika N' adalah ruang Banach, maka $B(N, N')$ juga ruang Banach.

Bukti :

Akan ditunjukkan bahwa $S + T \in B(N, N')$ dan $\alpha T \in B(N, N')$ untuk setiap $S, T \in B(N, N')$ dan $\alpha \in \mathbb{K}$. Jika S dan T masing-masing merupakan transformasi linear dari N ke N' dan $\alpha \in \mathbb{K}$, maka $(S + T)$ dan αT masing-masing merupakan transformasi linear dari N ke N' . Selanjutnya dari ketaksamaan (4.1.1) diperoleh bahwa untuk $\|x\| < 1$

berlaku : $\|(S + T)(x)\| = \|S(x) + T(x)\|$

$$\leq \|S(x)\| + \|T(x)\|$$

$$\leq \|S\| \|x\| + \|T\| \|x\|$$

$$\leq \|S\| + \|T\|$$

Hal ini menunjukkan bahwa $(S + T) \in B(N, N')$ dan

$$\|S + T\| \leq \|S\| + \|T\|$$

Andaikan $x \in N$ sebarang dengan $\|x\| \leq 1$, Maka

$$\|(\alpha T)(x)\| = \|\alpha T(x)\| = |\alpha| \|x\|$$

$$\leq |\alpha| \|T\| \|x\|$$

$$\leq |\alpha| \|T\|$$

Hal ini berarti bahwa $\alpha T \in B(N, N')$ dan $\|\alpha T\| = |\alpha| \|T\|$.

Misalkan $T \in B(N, N')$ dan $\|T\| = 0$, Maka dari ketaksamaan (4.1.1), diperoleh $\|T(x)\| = 0$.

Akibatnya $T(x) = 0$, $\forall x \in N$. Jadi $T = 0$.

Dengan demikian terbukti bahwa $B(N, N')$ adalah ruang linear bernorma.

Andaikan N' adalah ruang Banach dan andaikan pula bahwa $\langle T_n \rangle$ adalah barisan Cauchy di dalam $B(N, N')$.

Maka terdapat bilangan asli A sehingga :

$$\|T_m - T_n\| < \varepsilon, \text{ untuk } n, m \geq A.$$

Ambil sebarang $x \in N$, maka untuk $m, n \geq A$ berlaku

$$\begin{aligned} \|T_m(x) - T_n(x)\| &= \|(T_m - T_n)(x)\| = \|T_m - T_n\| \|x\| \\ &\leq \varepsilon \|x\| \quad \dots\dots (4.2.1) \end{aligned}$$

Ini menunjukkan bahwa $\langle T_n(x) \rangle$ barisan Cauchy dalam N' .

Oleh karena N' lengkap, maka $\langle T_n(x) \rangle$ adalah konvergen

Misalkan $T(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x) \dots\dots\dots (4.2.2)$

Oleh karena $x \in N$ sebarang, maka T mendefinisikan sebuah pemetaan dari N ke dalam N' .

Melengkapi bukti Teorema ini, ditunjukkan bahwa

$$T \in B(N, N') \text{ dan } \lim_{n \rightarrow \infty} T_n = T.$$

$$\begin{aligned} \|T(x)\| &= \|\lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x)\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n(x)\| \\ &\leq \sup (\|T_n\| \|x\|) \\ &= \sup \|T_n\| \|x\|. \end{aligned}$$

menunjukkan bahwa T mempunyai batas dan oleh karena itu T kontinu. Dibuktikan bahwa $\|T_n - T\| \rightarrow 0$. Andaikan diberikan sebarang $\varepsilon > 0$ dan andaikan A adalah bilangan bulat positif sedemikian sehingga

$$m, n \geq A \implies \|T_m - T_n\| < \varepsilon.$$

Jika $\|x\| \leq 1$ dan $m, n \geq A$, maka :

$$\begin{aligned} \|T_m(x) - T_n(x)\| &= \|(T_m - T_n)(x)\| \leq \|T_m - T_n\| \|x\| \\ &\leq \|T_m - T_n\| \|x\| < \varepsilon \end{aligned}$$

Ditentukan m tetap dan $n \rightarrow \infty$, maka :

$$\begin{aligned} \|T_m(x) - T_n(x)\| &\longrightarrow \|T_m(x) - T(x)\|, \text{ maka} \\ \|T_m(x) - T(x)\| &\leq \varepsilon, \text{ untuk semua } m \geq A \text{ dan} \\ &\text{untuk semua } x \text{ dengan } \|x\| \leq 1 \end{aligned}$$

Hal ini menunjukkan bahwa $\|T_m - T\| \leq \varepsilon$ untuk semua $m \geq A$.

$$\text{Jadi } \lim_{n \rightarrow \infty} T_n = T \quad \blacksquare$$

Dalam definisi (4.3.2) telah disinggung bahwa $B(N, N')$ adalah himpunan semua transformasi linear terbatas dan kontinu dari ruang linear bernorma N ke dalam ruang linear bernorma N' .

Selanjutnya jika $N = N'$, maka $B(N,N)$ merupakan himpunan semua *operator linear terbatas* pada N . $B(N,N)$ sering disingkat dengan notasi $B(N)$. Untuk lebih jelasnya berikut ini akan diberikan definisi dan contoh tentang *operator linear* .

Definisi 4.3.3 :

Andaikan N adalah ruang linear bernorma. *Operator linear* pada N adalah transformasi linear dari N ke dalam N .

Contoh 4.3.1 :

Andaikan $\mathbb{R}^2$ adalah ruang linear bernorma . Maka $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dengan $T(x_1, y_1) = (x_1 + y_1, x_1)$, untuk semua $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$, merupakan operator linear terbatas .

Bukti :

$$\begin{aligned} \text{Ambil } (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2 \text{ dan } \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \text{ Maka :} \\ T[\alpha(x_1, y_1) + \beta(x_2, y_2)] &= T[(\alpha x_1, \alpha y_1) + (\beta x_2, \beta y_2)] \\ &= T[\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2] \\ &= (\alpha x_1 + \beta x_2 + \alpha y_1 + \beta y_2, \alpha x_1 + \beta x_2) \\ &= (\alpha x_1 + \alpha y_1, \alpha x_1) + (\beta x_2 + \beta y_2, \beta x_2) \\ &= \alpha(x_1 + y_1, x_1) + \beta(x_2 + y_2, x_2) \\ &= \alpha T(x_1, y_1) + \beta T(x_2, y_2) . \end{aligned}$$

Hal ini berarti bahwa T adalah linear .

Untuk $\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1$, berlaku :

$$\begin{aligned} \|T(x,y)\| &= \|(x+y, x)\| = \sqrt{(x+y)^2 + x^2} \\ &\leq \sqrt{(x+y)^2 + y^2 + x^2} \\ &= \sqrt{2x^2 + 2y^2 + 2xy} \\ &\leq \sqrt{2(x^2 + y^2) + 2(x^2 + y^2)} \end{aligned}$$

$$\leq \sqrt{4(x^2 + y^2)} \leq 2.$$

Jadi ada $M = 2$, sehingga $\|T(x, y)\| \leq M$, untuk semua $\|(x, y)\| \leq 1$. Hal ini menunjukkan bahwa T terbatas.

Menurut teorema 4.3.2, $B(N)$ adalah ruang Banach jika N adalah ruang Banach.

Definisi 4.3.4 :

Andaikan N dan N' masing - masing adalah ruang linear bernorma. Suatu *isomorphisme isometrik* dari N ke N' adalah suatu transformasi linear bijektif (one-one) dari N ke N' sedemikian sehingga $\|T(x)\| = \|x\|$, untuk setiap $x \in N$; dan N disebut *isomorphik secara isometrik* dengan N' jika terdapat suatu *isomorphisme isometrik* dari N ke N' .

BAB V

TEOREMA HAHN-BANACH

Dalam bab IV telah disinggung konsep fungsional linear. Karena $\mathbb{R}$ maupun $\mathbb{C}$ masing-masing adalah ruang linear bernorma, maka sifat kontinu dan terbatas yang dimiliki oleh transformasi linear T yang didefinisikan dalam Bab IV berlaku juga untuk fungsional linear. Jadi fungsional linear f kontinu bila dan hanya bila terbatas.

Dalam bab ini $\mathbb{K}$ adalah himpunan semua bilangan real $\mathbb{R}$ atau himpunan semua bilangan kompleks $\mathbb{C}$.

5.1. Lemma Hahn-Banach

Definisi 5.1.1 :

Andaikan N adalah ruang linear bernorma lewat $\mathbb{K}$. Andaikan f adalah fungsional linear terbatas pada N . Bilangan real tak negatif $\|f\|$ yang didefinisikan sebagai:

$$\|f\| = \sup \{ |f(x)| : \|x\| \leq 1 \}$$

disebut norma dari f .

Berikut ini adalah bentuk lain untuk norm yang sering digunakan :

$$(a) \|f\| = \sup \{ |f(x)| : \|x\| = 1 \} ;$$

$$(b) \|f\| = \sup \left\{ \frac{|f(x)|}{\|x\|} : x \in N, x \neq 0 \right\} ;$$

$$(c) \|f\| = \sup \{ M \geq 0 : |f(x)| \leq M \|x\|, \forall x \in N \} .$$

Misalkan :

$$A = \sup \{ |f(x)| : \|x\| = 1 \}$$

$$B = \sup \left\{ \frac{|f(x)|}{\|x\|} : x \in N, x \neq 0 \right\} \text{ dan}$$

$$C = \inf\{M \geq 0 : |f(x)| \leq M \|x\|, \forall x \in N\}.$$

Akan ditunjukkan $\|f\| = A = B = C$. Untuk membuktikan ini cukup ditunjukkan ketaksamaan $\|f\| \geq A = B \geq C \geq \|f\|$.

(i) Karena $\{x \in N : \|x\|=1\} \subset \{x \in N : \|x\| \leq 1\}$, maka $\|f\| \geq A$.

(ii) Karena f linear, B dapat dinyatakan sebagai

$$\sup\{|f(\|x\|^{-1}x)| : x \in N, x \neq 0\}$$

Karena $\|\|x\|^{-1}x\| = \|x\|^{-1}\|x\| = 1$, maka $A = B$

(iii) Dari definisi (b), didapat $|f(x)| \leq B\|x\|$ untuk semua $x \in N$. Jadi $B \geq C$.

(iv) Misalkan $D = \{M \geq 0 : |f(x)| \leq M\|x\|, \forall x \in N\}$

Ambil sebarang $M_0 \in D$. Jelas bahwa $|f(x)| \leq M_0\|x\|$, $\forall M_0 \in D$

Jadi $|f(x)| \leq M_0$, $\forall M_0 \in D$ dan $\|x\| \leq 1$, yang mengakibatkan $\|f\| = \sup\{|f(x)| : \|x\| \leq 1\} \leq C$

Hal ini menunjukkan bahwa $C \geq \|f\|$

Dengan demikian terbukti bahwa $\|f\| = A = B = C$.

Andaikan N adalah ruang linear bernorma lewat K . Himpunan semua fungsional linear terbatas dari N ke K ditulis dengan notasi $B(N, K)$.

Didefinisikan operasi-operasi pada $B(N, K)$ sebagai:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \forall x \in N \text{ dan}$$

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x), \forall x \in N \text{ dan } \forall \alpha \in K.$$

$B(N, K)$ dilengkapi dengan operasi diatas dan norma yang didefinisikan pada Definisi 5.1.1, merupakan ruang linear bernorma.

Selanjutnya $B(N, K)$ ditulis N^* dan disebut *ruang dual* atau *ruang konjugat (conjugate space)* dari N . Menurut Teorema 4.3.1., N^* adalah ruang Banach

Definisi S.1.2 :

Andaikan N adalah ruang linear lewat $\mathbb{R}$. Fungsi bernilai real ρ yang didefinisikan pada N disebut *fungsional sublinear* jika memenuhi syarat berikut :

$$(a) \rho(x) \geq 0$$

$$(b) \rho(x + y) \leq \rho(x) + \rho(y), \forall x, y \in N, \text{ dan}$$

$$(c) \rho(\alpha x) = \alpha \rho(x), \forall x \in N \text{ dan } \forall \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \geq 0$$

Definisi S.1.3 :

Andaikan N adalah ruang linear lewat K , $F \subset N$ dan $F \neq \emptyset$ disebut *subruang linear* dari N jika $x+y \in F$ dan $\alpha x \in F$ untuk $\forall x, y \in F$, dan $\alpha \in K$.

Teorema berikut adalah salah satu hasil penting dari analisis fungsional. Teorema yang akan menunjukkan bahwa N^* "cukup kaya" dengan fungsional linear. Teorema berikut disebut "*Teorema Hahn-Banach*". Akan dibuktikan terlebih dahulu "*Lemma Hahn-Banach*".

Teorema 5.1.1 : (Lemma Hahn - Banach)

Diberikan X adalah ruang linear real dan andaikan p adalah fungsional sublinear pada X . Y adalah subruang linear dari X dan f adalah fungsional linear pada Y yang memenuhi sifat

$$f(x) \leq p(x), \text{ untuk semua } x \in Y.$$

Maka terdapat suatu fungsional linear F pada X sedemikian sehingga

$$(i) F(x) = f(x), \text{ untuk semua } x \in Y.$$

$$(ii) F(x) \leq p(x), \text{ untuk semua } x \in X-Y.$$

Fungsional linear F disebut sebagai perluasan dari fungsional linear f .

Bukti :

Andaikan $\mathcal{X}$ adalah himpunan semua pasangan $(Y_\alpha, \theta_\alpha)$ dengan Y_α adalah subruang linear dari X yang memuat Y dan θ_α adalah fungsional linear real pada Y_α yang memenuhi

$$\theta_\alpha(x) = f(x) \text{ , untuk semua } x \in Y, \text{ dan}$$

$$\theta_\alpha(x) \leq p(x) \text{ , untuk semua } x \in Y_\alpha$$

Didefinisikan relasi " $\leq$ " pada $\mathcal{X}$ sebagai berikut :

$(Y_1, \theta_1) \leq (Y_2, \theta_2)$ jika dan hanya jika $Y_1 \subset Y_2$ dan $\theta_1(x) = \theta_2(x)$, untuk semua $x \in Y_1$. Akan ditunjukkan bahwa relasi " $\leq$ " merupakan relasi terurut parsial .

Ambil sebarang $(Y_1, \theta_1), (Y_2, \theta_2), (Y_3, \theta_3) \in \mathcal{X}$.

(i) $Y_1 \subset Y_1$ dan $\theta_1(x) = \theta_1(x)$ untuk semua $x \in Y_1$.

Jadi $(Y_1, \theta_1) \leq (Y_1, \theta_1)$ untuk semua $(Y_1, \theta_1) \in \mathcal{X}$

(ii) Andaikan $(Y_1, \theta_1) \leq (Y_2, \theta_2)$ dan $(Y_2, \theta_2) \leq (Y_3, \theta_3)$

Dengan demikian $Y_1 \subset Y_2$ dan $Y_2 \subset Y_3$, jadi $Y_1 \subset Y_3$ (1)

dan $\theta_1(x) = \theta_2(x)$, untuk semua $x \in Y_1$. Karena $Y_1 \subset Y_2$, maka

$$\theta_1 = \theta_2 \text{(2)}$$

Dari (1) dan (2) diperoleh $(Y_1, \theta_1) = (Y_3, \theta_3)$

(iii) Misalkan $(Y_1, \theta_1) \leq (Y_2, \theta_2)$ dan $(Y_2, \theta_2) \leq (Y_3, \theta_3)$

Maka $Y_1 \subset Y_2$ dan $\theta_1(x) = \theta_2(x)$ untuk semua $x \in Y_1$ dan

$Y_2 \subset Y_3$ dan $\theta_2(x) = \theta_3(x)$ untuk semua $x \in Y_2$.

Jadi $Y_1 \subset Y_3$ dan $\theta_1(x) = \theta_3(x)$ untuk semua $x \in Y_1$.

Hal ini memberikan pernyataan $(Y_1, \theta_1) \leq (Y_3, \theta_3)$.

Yang berarti bahwa jika $(Y_1, \theta_1) \leq (Y_2, \theta_2)$ dan

$(Y_2, \theta_2) \leq (Y_3, \theta_3)$ maka $(Y_1, \theta_1) \leq (Y_3, \theta_3)$.

Dari butir (i), (ii) dan (iii), menunjukkan bahwa " $\leq$ " adalah relasi terurut parsial. Sehingga $\mathcal{X}$ adalah himpunan

terurut parsial. Setiap subhimpunan yang terurut total $\{(Y_\beta, g_\beta)\}$ jelas mempunyai batas atas (Y', g') diberikan dengan $Y' = \cup Y_\beta$, $g' = g_\beta$ pada Y_β . Oleh karena itu, dengan menggunakan Lemma Zorn, terdapat suatu elemen maksimal (Y_0, g_0) . Jika kita dapat menunjukkan $Y_0 = X$, maka Teorema terbukti (dengan $F = g_0$). Kita andaikan $Y_0 \neq X$ dan kita turunkan suatu kontradiksi. Andaikan $y_1 \in X$, $y_1 \notin Y_0$ dan dibentuk Y_1 subruang linear merentang (spanned) Y_0 dan y_1 . Jadi $Y_1 = Y_0 + [y_1]$. Tiap elemen $x \in Y_1$ mempunyai bentuk $x = y + \lambda y_1$, $y \in Y_0$ dan $\lambda \in \mathbb{R}$ adalah tertentu dengan tunggal.

Didefinisikan fungsional linear g_1 pada Y_1 dengan

$$g_1(y + \lambda y_1) = g_0(y) + \lambda c.$$

Jika kita dapat memilih konstanta c sedemikian sehingga

$$g_0(y) + \lambda c \leq p(y + \lambda y_1) \dots\dots\dots (5.1).$$

untuk semua $\lambda \in \mathbb{R}$, $y \in Y_0$, maka $(Y_1, g_1) \in \mathcal{K}$ dan $(Y_0, g_0) \leq (Y_1, g_1)$, $Y_0 \neq Y_1$. Hal ini kontradiksi dengan pernyataan bahwa (Y_0, g_0) unsur maksimal di $\mathcal{K}$.

Untuk memilih c yang memenuhi (5.1), ambil sebarang titik x, y dalam Y_0 ,

$$g_0(y) - g_0(x) = g_0(y - x) \leq p(y - x) \leq p(y + y_1) + p(-y_1 - x)$$

Sehingga

$$-p(-y - x) - g_0(x) \leq p(y + y_1) - g_0(y)$$

Hal ini berakibat bahwa :

$$A \equiv \sup_{x \in Y_0} \{-p(-y_1 - x) - g_0(x)\} \leq \inf_{y \in Y_0} \{p(y + y_1) - g_0(y)\} \equiv B$$

Andaikan c adalah sebarang bilangan yang memenuhi $A \leq c \leq B$

maka $c \leq p(y + y_1) - g_0(y)$, untuk semua $y \in Y_0$ (5.2)

$$-p(-y_1 - y) - g_0(y) \leq c, \text{ untuk semua } y \in Y_0 \dots\dots (5.3)$$

Jika kedua ruas pada (5.2) digandakan dengan λ , $\lambda > 0$ dan y diganti dengan y/λ , kita dapatkan :

$$\lambda c \leq p(y + \lambda y_1) - \vartheta_0(y) \quad \dots\dots\dots (5.4)$$

Jika kedua ruas pada (5.3) digandakan dengan λ , $\lambda < 0$ dan y diganti dengan y/λ , kita dapatkan :

$$\begin{aligned} -p(-\lambda y_1 - y) - \vartheta_0(y) &\leq \lambda c. \\ \Leftrightarrow p(-\lambda y_1 - y) + \vartheta_0(y) &\geq \lambda c. \\ \Leftrightarrow p(\lambda y_1 + y) - \vartheta_0(y) &\geq \lambda c. \end{aligned}$$

Ketaksamaan (5.4) juga berlaku jika $\lambda = 0$.

Karena (5.4) berakibat (5.1), maka terbukti Teorema di atas. ■

5.2. Teorema Hahn-Banach

Teorema berikut dibuktikan berdasarkan Teorema 5.1.1 dan disebut *Teorema Hahn-Banach*.

Teorema 5.2.1 : (Teorema Hahn-Banach)

Andaikan X adalah ruang linear bernorma dan andaikan Y adalah subruang linear dari X . Jika $f \in Y^*$, maka terdapat suatu $g \in X^*$ sedemikian sehingga g merupakan perluasan dari f dan $\|g\| = \|f\|$.

Bukti :

Didefinisikan p pada X dengan $p(x) = \|f\| \|x\|$. Maka jelas p adalah fungsional sublinear pada X sebab

$$\begin{aligned} (a) \quad p(x) &\geq 0, \text{ sebab } \|f\| \geq 0, \|x\| \geq 0 \\ (b) \quad p(\alpha x) &= \|f\| \|\alpha x\| \\ &= \|f\| |\alpha| \|x\| \\ &= |\alpha| \|f\| \|x\| \end{aligned}$$

$$= \alpha p(x), \alpha \geq 0$$

$$\begin{aligned} (c) \quad p(x+y) &= \|f\| \|x+y\| \\ &\leq \|f\| (\|x\| + \|y\|) \\ &= \|f\| \|x\| + \|f\| \|y\| \\ &= p(x) + p(y) \end{aligned}$$

sedemikian sehingga $f(x) \leq p(x)$ untuk semua $x \in Y$, sebab $f(x) = |f(x)| \leq \|f\| \|x\| = p(x)$. Menurut Teorema 5.1.1 (*Lemma Hahn-Banach*), maka terdapat suatu fungsional linear g yang merupakan perluasan dari f sedemikian sehingga $g(x) \leq p(x)$, untuk semua $x \in X$.

$|g(x)| \leq \|f\| \|x\|$, untuk semua $x \in X$, oleh karena itu $\|g\| \leq \|f\|$, sebaliknya :

$$\begin{aligned} \|f\| &= \sup \{|f(x)| : x \in Y, \|x\| \leq 1\} \\ &= \sup \{|g(x)| : x \in Y, \|x\| \leq 1\} \\ &\leq \sup \{|g(x)| : x \in X, \|x\| \leq 1\} \\ &= \|g\| \end{aligned}$$

sehingga $\|g\| = \|f\|$. ■

Teorema 5.2.2 :

Jika N adalah ruang linear bernorma dan x_0 adalah vektor dalam N dengan $x_0 \neq 0$, maka terdapat fungsional $f_0 \in N^*$ sedemikian sehingga $f_0(x_0) = \|x_0\|$ dan $\|f_0\| = 1$.

Bukti :

Andaikan $M = \{\alpha x_0\}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ adalah subruang linear dari N yang dihasilkan oleh (spanned by) x_0 dan didefinisikan f pada M dengan $f(\alpha x_0) = \alpha \|x_0\|$.

Akan ditunjukkan bahwa f adalah fungsional linear pada M . Misalkan $x, y \in M$, maka $x = \alpha x_0$, $y = \beta x_0$ dengan $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ dan $\delta, \gamma \in \mathbb{R}$. Maka $f(\delta x + \gamma y) = f(\delta \alpha x_0 + \gamma \beta x_0)$

$$\begin{aligned}
 &= f((\delta\alpha + \gamma\beta)x_0) \\
 &= (\delta\alpha + \gamma\beta)\|x_0\| \\
 &= \delta\alpha\|x_0\| + \gamma\beta\|x_0\| \\
 &= \delta(\alpha\|x_0\|) + \gamma(\beta\|x_0\|) \\
 &= \delta f(\alpha x_0) + \gamma f(\beta x_0) \\
 &= \delta f(x) + \gamma f(y).
 \end{aligned}$$

Jadi f merupakan fungsional linear pada M .

$$f(x_0) = f(1 \cdot x_0) = 1 \cdot \|x_0\| = \|x_0\| \text{ dan } \|f\| = 1.$$

Dengan menggunakan Teorema 5.2.1, maka f dapat diperluas menjadi suatu fungsional f_0 dalam N^* sedemikian sehingga

$$f_0(x_0) = \|x_0\| \text{ dan } \|f_0\| = 1. \blacksquare$$

Himpunan L yang terdiri atas fungsi bernilai real yang didefinisikan pada himpunan X dikatakan *memisahkan titik* (*separates point*) dari X , jika untuk setiap pasang titik $x, y \in X$ dengan $x \neq y$, terdapat fungsi $f \in L$ sedemikian sehingga $f(x) \neq f(y)$.

Berdasarkan Teorema 5.2.2, nampak bahwa N^* memisahkan titik-titik pada N , sebab andaikan $x, y \in N$ dengan $x \neq y$, menurut bukti Teorema 5.2.2, terdapat suatu $f \in N^*$ sedemikian sehingga $f(x) - f(y) = f(x - y) = \|x - y\| \neq 0$, oleh karena itu $f(x) \neq f(y)$.

Teorema 5.1.1 juga berakibat bahwa jika $p(x)$ adalah fungsional linear pada X sehingga

$$(i) \quad p(x+y) \leq p(x) + p(y), \quad \forall x, y \in X$$

$$(ii) \quad p(\alpha x) = \alpha p(x), \quad \forall x \in X, \alpha \geq 0$$

Maka terdapat fungsional linear f pada X sedemikian



sehingga

$$-p(-x) \leq f(x) \leq p(x).$$

Bukti :

Ambil sebarang $x_0 \in X$ dan didefinisikan

$$M = \{ x | x = \alpha x_0, \alpha \in \mathbb{R} \}$$

Dan didefinisikan

$$f_0(x) = f_0(\alpha x_0) = \alpha p(x_0).$$

Misalkan $x, y \in M$ dan $\delta, \gamma \in \mathbb{R}$, dan $x = \alpha x_0$ dan $y = \beta x_0$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Maka :

$$\begin{aligned} f_0(\delta x + \gamma y) &= f_0(\delta \alpha x_0 + \gamma \beta x_0) \\ &= f_0((\delta \alpha + \gamma \beta) x_0) \\ &= (\delta \alpha + \gamma \beta) p(x_0) \\ &= \delta \alpha p(x_0) + \gamma \beta p(x_0) \\ &= \delta (\alpha p(x_0)) + \gamma (\beta p(x_0)) \\ &= \delta f_0(\alpha x_0) + \gamma f_0(\beta x_0) \\ &= \delta f_0(x) + \gamma f_0(y), \quad \forall x, y \in M. \end{aligned}$$

Jadi f_0 merupakan fungsional linear pada M .

Karena untuk $\alpha \geq 0$ berlaku

$$\alpha p(x_0) = p(\alpha x_0) \dots \dots \dots (1).$$

Dan dari $0 = p(0) \leq p(x_0) + p(-x_0)$ maka

$-p(-x_0) \leq p(x_0)$. Jadi bila $\alpha < 0$ berlaku

$$\alpha p(x_0) \leq -\alpha p(-x_0) = p(\alpha x_0) \dots \dots \dots (2)$$

Maka dari (1) dan (2) dan dari definisi f_0 diperoleh

$$f_0(x) \leq p(x), \quad \forall x \in M.$$

Berdasarkan Teorema 5.1.1, terdapat fungsional linear f pada N sehingga :

$$f(x) = f_0(x), \quad \forall x \in M$$

dan

$$f(x) \leq p(x), \quad \forall x \in N.$$

Jadi dari $-f(x) = f(-x) \leq p(-x)$, kita peroleh $-p(-x) \leq f(x)$, sehingga $-p(-x) \leq f(x) \leq p(x)$. ■

Teorema 5.2.3 :

Andaikan Y adalah subruang linear dari ruang linear bernorma X , dan andaikan $x_0 \notin \bar{Y}$. Maka terdapat $f \in X^*$ sedemikian sehingga $f(x) = 0$ untuk semua $x \in Y$ dan $f(x_0) = 1$.

Bukti :

Karena $x_0 \notin \bar{Y}$, terdapat suatu $r > 0$ sedemikian sehingga $\|x - x_0\| > r$, untuk semua $x \in Y$. Andaikan $Z = \{x + \alpha x_0 : x \in Y \text{ dan } \alpha \in \mathbb{R}\}$ adalah subruang linear yang dihasilkan (generated) oleh Y dan x_0 .

Didefinisikan $f: Z \rightarrow \mathbb{R}$ dengan $f(x + \alpha x_0) = \alpha$. Maka f adalah fungsional linear dan

$$r|f(x + \alpha x_0)| = r|\alpha| \leq |\alpha| \|\alpha^{-1}x + x_0\| = \|x + \alpha x_0\|$$

untuk semua $x \in Y$ dan $\alpha \in \mathbb{R}$. Sehingga f adalah fungsional linear pada Z dengan norma yang tidak melebihi r^{-1} .

$$f(x) = f(x + 0 \cdot x_0) = 0, \quad \forall x \in Y \text{ dan}$$

$$f(x_0) = f(0 + 1 \cdot x_0) = 1.$$

Teorema 5.2.4 :

Andaikan N adalah ruang linear kompleks dan p adalah fungsional sublinear pada N . Andaikan pula M adalah subruang linear kompleks dari N dan f_0 adalah fungsional linear kompleks yang didefinisikan pada M sedemikian sehingga

$$|f_0(x)| \leq p(x), \quad \forall x \in M$$

Maka terdapat fungsional linear kompleks f pada N sehingga

$$f(x) = f_0(x) , \forall x \in M \dots\dots(5.5.1)$$

dan

$$|f(x)| \leq p(x) , \forall x \in N \dots\dots(5.5.2)$$

yaitu f adalah perluasan dari f_0 pada N .

Bukti :

Misalkan $f_0(x) = g_0(x) + ih_0(x)$, dimana masing-masing g_0 dan h_0 merupakan bagian real dan bagian imajiner dari f_0 . Akan ditunjukkan g_0 merupakan fungsional linear pada M . Misalkan $x, y \in M$ dan $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, maka

$$\begin{aligned} g_0(\alpha x + \beta y) &= \operatorname{Re} [f_0(\alpha x + \beta y)] \\ &= \operatorname{Re} [\alpha f_0(x) + \beta f_0(y)] \\ &= \alpha \operatorname{Re} f_0(x) + \beta \operatorname{Re} f_0(y) \\ &= \alpha g_0(x) + \beta g_0(y) . \end{aligned}$$

Maka g_0 merupakan fungsional linear real pada M , dan dengan langkah yang sama h_0 juga merupakan fungsional linear real pada M . Jadi

$$|g_0(x)| \leq |f_0(x)| \leq p(x) , \forall x \in M .$$

dan

$$|h_0(x)| \leq |f_0(x)| \leq p(x) , \forall x \in M .$$

Selanjutnya untuk $\forall x \in M$, berlaku :

$$\begin{aligned} g_0(ix) + ih_0(ix) &= f_0(ix) \\ &= if_0(x) \\ &= i(g_0(x) + ih_0(x)) \\ &= -h_0(x) + ig_0(x) . \end{aligned}$$

$$\text{Jadi } h_0(x) = -g_0(ix) , \forall x \in M \dots\dots\dots(5.5.3)$$

Berdasarkan Teorema 5.1.1, terdapat fungsional linear real g pada N yang merupakan perluasan dari g_0 , dengan sifat $g(x) \leq p(x)$, $\forall x \in N$ dan $g(x) = g_0(x)$, $\forall x \in M$. Karena $-g(x) = g(-x) \leq p(-x) = p(x)$, maka $|g(x)| \leq p(x)$.

Selanjutnya didefinisikan

$$f(x) = g(x) - ig(ix) \text{ untuk } \forall x \in N.$$

Akan ditunjukkan bahwa $f(x)$ merupakan fungsional linear kompleks pada N . Ambil sebarang $x, y \in N$.

Maka :

$$\begin{aligned} f(x + y) &= g(x + y) - ig(ix + iy) \\ &= g(x) + g(y) - i[g(ix) + g(iy)] \\ &= \{g(x) - ig(ix)\} + \{g(y) - ig(iy)\} \\ &= f(x) + f(y). \end{aligned}$$

Selanjutnya akan diperlihatkan bahwa $f(\alpha x) = \alpha f(x)$, $\forall \alpha \in \mathbb{C}$. Pertama-tama, andaikan $\alpha \in \mathbb{R}$, maka

$$\begin{aligned} f(\alpha x) &= g(\alpha x) - ig(\alpha ix) \\ &= \alpha g(x) - i\alpha g(ix) \\ &= \alpha \{g(x) - ig(ix)\} \\ &= \alpha f(x), \quad \forall x \in N. \end{aligned}$$

Untuk $\alpha = i$ diperoleh :

$$\begin{aligned} f(ix) &= g(ix) - ig(-x) \\ &= g(ix) + ig(x) \\ &= i(g(x) + g(ix)) \\ &= i(g(x) - ig(ix)) \\ &= if(x), \quad \forall x \in N. \end{aligned}$$

Selanjutnya ambil sebarang $x \in N$ dan $\alpha \in \mathbb{C}$, dengan $\alpha = \beta + i\gamma$ dimana $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$, maka

$$\begin{aligned}
 f(\alpha x) &= f(\beta x + i\gamma x) \\
 &= f(\beta x) + f(i\gamma x) \\
 &= \beta f(x) + \gamma f(ix) \\
 &= \beta f(x) + i\gamma f(x) \\
 &= (\beta + i\gamma)f(x) \\
 &= \alpha f(x), \quad \forall x \in N.
 \end{aligned}$$

Hal ini berarti bahwa f adalah fungsional linear kompleks pada N . Selanjutnya akan diperlihatkan

$$f(x) = f_0(x), \quad \forall x \in M \quad (5.5.4)$$

dan

$$f(x) \leq p(x), \quad \forall x \in N \quad (5.5.5)$$

Ambil sebarang $x \in M$. Karena g merupakan perluasan dari g_0 , maka dari (5.5.3) diperoleh :

$$\begin{aligned}
 f(x) &= g(x) - ig(ix) \\
 &= g_0(x) - ig_0(x) \\
 &= g_0(x) + ih_0(x) \\
 &= f_0(x), \quad \forall x \in M.
 \end{aligned}$$

Untuk menunjukkan $f(x)$ memenuhi keadaan (5.5.5), pandang fungsi berikut :

$$f(x) = r e^{-i\theta}, \quad \text{dimana } e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta$$

Maka

$$|f(x)| = e^{i\theta} f(x) = f(e^{i\theta} x)$$

Yang adalah merupakan bilangan real positif, akibatnya

$$\begin{aligned}
 |f(x)| &= |g(e^{i\theta} x)| \\
 &\leq p(e^{i\theta} x) \\
 &= |e^{i\theta}| p(x) \\
 &= p(x), \quad \forall x \in N.
 \end{aligned}$$

BAB VI

TEOREMA PEMETAAN TERBUKA

Pembuktian Teorema Pemetaan Terbuka (Open Mapping Theorem), diawali dengan pembahasan Teorema Baire. Selanjutnya Teorema Pemetaan Terbuka ini digunakan untuk membuktikan Teorema Graph Tertutup.

6.1. Teorema Baire

Definisi 6.1.1 :

Andaikan X adalah ruang metrik dengan metrik d dan jika A adalah himpunan bagian dari X . Jika x adalah suatu titik dalam X , maka jarak dari x ke A didefinisikan sebagai

$$d(x, A) = \inf\{d(x, a) : a \in A\}$$

yaitu batas bawah terbesar jarak dari x ke titik-titik dalam A .

Diameter dari himpunan A didefinisikan sebagai

$$d(A) = \sup\{d(a_1, a_2) : a_1, a_2 \in A\}.$$

Jadi diameter himpunan A adalah batas atas terkecil dari jarak antara pasangan dua titik dari A . A dikatakan berdiameter berhingga jika $d(A) \in \mathbb{R}$ dan A dikatakan berdiameter tak berhingga jika $d(A) = +\infty$.

$$d(\emptyset) = -\infty \text{ sebab ,}$$

z adalah batas atas dari E bila dan hanya bila $x \in E \Rightarrow x \leq z$ untuk $\forall x \in E$. Jadi z batas atas dari $\emptyset$ bila dan hanya

bila $\forall x \in \emptyset \Rightarrow x \leq z$, untuk setiap $z \in \mathbb{R}$.

Jadi, jika $z \in \mathbb{R}$, maka z batas atas $\emptyset$.

Jadi $d(\emptyset) = \inf \{z : z \in \mathbb{R}\} = -\infty$.

Suatu himpunan tidak kosong dan terbatas adalah himpunan yang mempunyai diameter berhingga.

Suatu pemetaan f dari himpunan tidak kosong X ke suatu ruang metrik dikatakan pemetaan terbatas jika daerah hasil (range) dari f adalah himpunan terbatas, yaitu $d(f(x)) \in \mathbb{R}$. Hal ini berakibat bahwa

Jika X adalah himpunan tidak kosong dan jika f adalah fungsi real yang didefinisikan pada X , maka Fungsi f adalah terbatas $\Leftrightarrow \exists K \in \mathbb{R} \ni |f(x)| \leq K, \forall x \in X$.

Definisi 6.1.2 :

Diberikan ruang metrik X . Dibentuk $\langle A_n \rangle$ yaitu barisan himpunan bagian-himpunan bagian dari X . $\langle A_n \rangle$ dikatakan barisan turun (decreasing) jika

$$A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \dots$$

Selanjutnya akan dibuktikan teorema yang menjamin bahwa $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots$, tidak kosong.

Teorema 6.1.1 : (Teorema Irisan Cantor)

Diberikan (X, ρ) adalah ruang metrik lengkap dan $\langle A_n \rangle$ adalah barisan himpunan bagian tertutup dari X sedemikian sehingga $A_{n+1} \subseteq A_n$ untuk tiap n dan diketahui $\lim d(A_n) = 0$. Maka $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ memuat tepat satu titik.

Bukti :

Ambil $x, y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, maka $x, y \in A_n$ untuk tiap n . Oleh karena itu $\rho(x, y) \leq d(A_n)$ untuk tiap n . Karena $\lim d(A_n) = 0$, maka $\rho(x, y) = 0$, sehingga $x = y$. Hal ini berarti

bahwa $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ memuat paling banyak satu titik.

Selanjutnya ditunjukkan bahwa $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \neq \emptyset$. Untuk menunjukkan bahwa $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \neq \emptyset$, untuk tiap n , pilih $x_n \in A_n$. Maka $\rho(x_{n+p}, x_n) \leq d(A_n)$ untuk tiap n dan p dan dari hal ini kita dapatkan bahwa $\langle x_n \rangle$ adalah barisan Cauchy dalam X . Jadi terdapat $x \in X$ sedemikian sehingga $\lim x_n = x$.

Selanjutnya harus ditunjukkan bahwa $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$. Karena $x_m \in A_n$ untuk $m \geq n$, kita peroleh $x \in \overline{A_n}$ untuk tiap n . Tetapi, karena tiap A_n adalah tertutup maka $\overline{A_n} = A_n$, oleh karena itu $x \in A_n$ untuk tiap n . ■

Contoh 6.1.1 :

Jika $\langle I_n \rangle$ barisan interval tertutup dalam $\mathbb{R}$ dengan sifat $I_n \supset I_{n+1}$, maka $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \emptyset$.

Bukti :

Misalkan $I_n = [a_n, b_n]$ dan $E = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Maka E tidak kosong dan terbatas ke atas, untuk semua n bilangan $a_n \leq b_1$. Karena $\mathbb{R}$ mempunyai sifat batas atas terkecil maka terdapat x di dalam $\mathbb{R}$ sehingga $x = \sup E$. Mengingat $I_n \supset I_{n+1}$ untuk semua n , maka untuk sebarang p dan $q \in \mathbb{N}$, berlaku

$$a_p \leq a_{p+q} \leq b_{p+q} \leq b_q.$$

Jadi untuk sebarang $p \in \mathbb{N}$ dan sebarang $q \in \mathbb{N}$ berlaku $a_p \leq b_q$ sehingga b_q merupakan batas atas untuk E . Dengan demikian maka $\sup E = x \leq b_n$, untuk semua $n \in \mathbb{N}$.

Karena $x = \sup E$ jelas bahwa $a_n \leq x$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$.

Jadi untuk semua n berlaku $a_n \leq x \leq b_n$, sehingga

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$$

Terbukti bahwa $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \emptyset$. ■

Suatu himpunan bagian A dari ruang metrik (X, d) disebut *dense* dalam X jika $\bar{A} = X$.

Andaikan A adalah suatu himpunan bagian dari suatu ruang metrik. A dikatakan *nowhere dense* jika penutup A memuat interior yang kosong. Jadi A *nowhere dense* $\iff \bar{A}$ tidak memuat sebarang himpunan terbuka yang tidak kosong $\iff$ tiap himpunan terbuka yang tidak kosong memuat suatu subset terbuka yang tidak kosong saling asing dengan $\bar{A}$ $\iff$ tiap himpunan terbuka yang tidak kosong memuat suatu bola terbuka yang saling asing dengan A .

Suatu himpunan bagian Y dari ruang metrik (X, ρ) disebut *kategori pertama* jika terdapat suatu $\langle A_n \rangle$ barisan himpunan bagian yang *nowhere dense* sedemikian sehingga $Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

Suatu ruang metrik disebut *ruang Baire* jika setiap himpunan terbuka yang tidak kosong bukan himpunan *kategori pertama*.

Lemma 6.1.2 :

Suatu ruang metrik adalah *ruang Baire* jika dan hanya jika setiap irisan terbilang himpunan terbuka yang *dense* adalah *dense*.

Bukti :

Misalkan ruang metrik tersebut adalah (X, d) . Andaikan bahwa (X, d) adalah ruang Baire. Andaikan pula bahwa $\langle A_n \rangle$ adalah barisan himpunan bagian terbuka yang *dense* dari X .

Harus ditunjukkan bahwa $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ *dense* dalam X . Untuk menunjukkan bahwa $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ adalah *dense* dalam X , kita

harus menunjukkan bahwa $A \cap \mathcal{V} \neq \emptyset$ untuk tiap himpunan terbuka tidak kosong $\mathcal{V}$ dari X . Kita andaikan, jika mungkin bahwa $A \cap \mathcal{V} = \emptyset$ untuk suatu himpunan terbuka tidak kosong $\mathcal{V}$.

Maka $X = (A \cap \mathcal{V})^c = A^c \cup \mathcal{V}^c$, sehingga

$$\mathcal{V} = X \cap \mathcal{V} = A^c \cap \mathcal{V} = \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \right)^c \cap \mathcal{V} = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n^c \cap \mathcal{V}).$$

Hal ini berarti bahwa $\mathcal{V}$ adalah himpunan kategori pertama karena (X, d) adalah ruang Baire, berarti $\mathcal{V}$ adalah kosong. Hal ini bertentangan (kontradiksi) dengan pemilihan $\mathcal{V}$ yang tidak kosong. Jadi A dense dalam X .

Untuk sebaliknya, andaikan bahwa tiap irisan terbilang himpunan terbuka yang dense juga dense. Misalkan $\mathcal{V}$ adalah himpunan terbuka kategori pertama dari X . Untuk melengkapi bukti, kita harus menunjukkan bahwa $\mathcal{V} = \emptyset$. Kita pilih $\langle A_n \rangle$ barisan himpunan yang *nowhere dense* sedemikian sehingga $\mathcal{V} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Maka $\langle (\overline{A_n})^c \rangle$ membentuk barisan himpunan bagian terbuka yang dense dari X , jadi menurut pengandaian $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} (\overline{A_n})^c$ adalah dense dalam X . Hal ini berakibat

$$\mathcal{V} \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{A_n} \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} (\overline{A_n})^c = A \subseteq \mathcal{V}^c \Rightarrow X = \overline{A} \subseteq \overline{\mathcal{V}^c} = \mathcal{V}^c$$

hal ini menunjukkan bahwa $\mathcal{V} = \emptyset$. ■

Teorema 6.1.2 : (Teorema Baire)

Setiap ruang metrik lengkap adalah ruang Baire.

Bukti :

Andaikan $\langle A_n \rangle$ barisan himpunan bagian terbuka dan dense dari X . Menurut Lemma 6.1.2, kita harus menunjukkan

bahwa $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ adalah dense dalam X . Jadi, jika $x \in X$ dan $r > 0$, kita perlihatkan bahwa $B(x, r) = \{y \in X : d(x, y) < r\} \cap A \neq \emptyset$.
Andaikan $C(a, r) = \{x \in X : d(x, a) \leq r\}$.

Karena A_1 open dan dense dalam X , terdapat $x_1 \in X$ dan $0 < r_1 \leq 1$ sedemikian sehingga $C(x_1, r_1) \subseteq B(x, r) \cap A_1$. Karena A_2 open dan dense dalam X , terdapat $x_2 \in X$ dan $0 < r_2 \leq 1/2$ sedemikian sehingga $C(x_2, r_2) \subseteq B(x_1, r_1) \cap A_2$. Jika cara ini diteruskan kita dapat menentukan $x_1, x_2, \dots, x_n$ dan $r_1, r_2, \dots, r_n$. Sehingga kita dapat memilih $x_{n+1} \in X$ dan $0 < r_{n+1} \leq 1/(n+1)$ sedemikian sehingga $C(x_{n+1}, r_{n+1}) \subseteq B(x_n, r_n) \cap A_{n+1}$. Jadi, terdapat $\langle x_n \rangle$ barisan titik dalam X dan $\langle r_n \rangle$ barisan bilangan real sedemikian sehingga $0 < r_n \leq 1/n$, dan $C(x_{n+1}, r_{n+1}) \subseteq B(x_n, r_n) \cap A_{n+1}$ untuk tiap n .
Misalkan $C_n = C(x_n, r_n)$ untuk tiap n . Maka tiap C_n tidak kosong dan tertutup, dan $C_{n+1} \subseteq C_n$, untuk tiap n .
Selanjutnya, $d(C_n) \leq 2r_n \leq 2/n$, hal ini berakibat bahwa $\lim d(C_n) = 0$. Menurut Teorema 6.1.1., terdapat $y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$, sehingga $y \in B(x, r) \cap A$, jadi $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$. ■

Teorema 6.1.2 tersebut di atas membawa akibat yang akan dinyatakan dalam Teorema berikut :

Teorema 6.1.3 :

Jika (X, d) adalah ruang metrik yang lengkap dan $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, maka $\text{Int}(\overline{A_n}) \neq \emptyset$, untuk suatu n .

Selanjutnya akan dibahas Teorema Pemetaan Terbuka, yang diawali dengan suatu lemma.

Lemma 6.1.3 :

Andaikan X dan Y adalah ruang Banach dan andaikan $T, T: X \rightarrow Y$ adalah transformasi linear kontinu. Jika n_0 adalah titik interior dari himpunan bagian A dari X , maka n_0 juga titik interior dari $T(A)$.

Bukti :

Dibentuk $V = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ dan ditinjau $rV = \{rx : x \in V\}$ adalah bola tertutup dengan pusat n_0 dan radius r . Karena n_0 diandaikan adalah titik interior dari A , terdapat suatu $r > 0$ dengan $rV \subseteq A$. Karena T adalah linear, maka berlaku

$$T(rV) = rT(V) \subseteq T(A).$$

Selanjutnya ditunjukkan bahwa n_0 adalah titik interior dari $T(V)$.

Jelas bahwa $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} nV$, dan karena T adalah transformasi linear dari X kepada Y , maka Y dapat dinyatakan sebagai

$$Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} nT(V).$$

Menurut Teorema 6.1.3., terdapat k sedemikian sehingga $\overline{kT(V)}$ memuat suatu titik interior. Karena $\overline{kT(V)} = k\overline{T(V)}$, maka $T(V)$ memuat titik interior. Yaitu terdapat $y_0 \in \overline{T(V)}$ dan $r > 0$ sedemikian sehingga $B(y_0, 2r) \subseteq \overline{T(V)}$. Jika diambil $y \in Y$ yang memenuhi $\|y\| < 2r$, maka $y - y_0 \in \overline{T(V)}$. Oleh karena itu, $y = (y - y_0) + y_0 \in \overline{T(V)} + \overline{T(V)} \subseteq 2\overline{T(V)}$, dimana $V + V = 2V$. Sehingga $\{y \in Y : \|y\| < r\} \subseteq \overline{T(V)}$. Karena T linear, maka

$$\{y \in Y : \|y\| < r2^{-n}\} \subseteq 2^{-n}\overline{T(V)} = \overline{T(2^{-n}V)}$$

berlaku untuk tiap n .

Selanjutnya, andaikan $y \in Y$ tertentu, sedemikian

sehingga $\|y\| < r2^{-1}$. Karena $y \in \overline{T(2^{-1}V)}$, maka terdapat $x_1 \in 2^{-1}V$ sedemikian sehingga $\|y - T(x_1)\| < r2^{-1}$, sehingga kita dapat memilih $x_n \in 2^{-n}V$ dan $\|y - \sum_{i=1}^n T(x_i)\| < r2^{-n-1}$. Jelas bahwa $y - \sum_{i=1}^n T(x_i) \in \overline{T(2^{-n-1}V)}$, sehingga terdapat x_{n+1} dengan $\|y - \sum_{i=1}^{n+1} T(x_i)\| < r2^{-n-2}$. Jadi $\langle x_n \rangle$ dipilih sedemikian sehingga $\|x_n\| \leq 2^{-n}$ dan

$$\|y - \sum_{i=1}^n T(x_i)\| = \|y - T[\sum_{i=1}^n x_i]\| < r2^{-n-1}$$

berlaku untuk semua n .

Selanjutnya didefinisikan $s_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n$ untuk tiap n dan kita perhatikan bahwa

$$\|s_{n+p} - s_n\| = \left\| \sum_{i=n+1}^{n+p} x_i \right\| \leq \sum_{i=n+1}^{n+p} \|x_i\| \leq 2^{-n}$$

untuk semua n dan p menunjukkan bahwa $\langle s_n \rangle$ adalah barisan Cauchy. Misalkan $\lim s_n = x$, dengan $x \in X$.

Maka $\|x\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| \leq 1$, ini berarti $x \in V$. Karena T linear dan kontinu, maka

$$T(x) = \lim T(s_n) = \lim \sum_{i=1}^n T(x_i) = y$$

yaitu $y \in T(V)$, maka $\{y \in Y : \|y\| < r/2\} \subseteq T(V)$. ■

6.2. Teorema Pemetaan Terbuka

Teorema 6.2.1 : (Teorema Pemetaan Terbuka)

Jika B dan B' adalah ruang Banach dan jika T adalah transformasi linear kontinu dari B kepada B' . Maka T adalah pemetaan terbuka.

Bukti :

Kita harus menunjukkan bahwa jika G adalah himpunan terbuka di dalam B maka $T(G)$ adalah juga himpunan terbuka

di dalam B' . Andaikan y adalah suatu titik di dalam $T(G)$, maka terdapat suatu bola terbuka yang berpusat di y dan termuat di dalam $T(G)$. Selanjutnya, andaikan x adalah titik di dalam G sedemikian sehingga $T(x)=y$. Karena G adalah terbuka, maka x adalah pusat dari bola terbuka yang dapat ditulis dalam bentuk $x+S_r$ yang termuat di dalam G . Menurut Lemma 6.1.3. diatas, berakibat bahwa $T(S_r)$ memuat suatu S'_{r_1} . Selanjutnya jelas bahwa $y+S'_{r_1}$ adalah suatu bola terbuka yang berpusat di dalam $T(G)$, karena

$$y+S'_{r_1} \subseteq y+T(S_r) = T(x)+T(S_r) = T(x+S_r) \subseteq T(G) \quad \blacksquare$$

Hal yang penting dari penerapan Teorema Pemetaan Terbuka, dinyatakan dalam teorema berikut .

Teorema 6.2.2 :

Suatu transformasi linear kontinu bijektif dari suatu ruang Banach kepada ruang Banach yang lain adalah suatu homeomorfisme. Khususnya, jika T transformasi linear bijektif dari ruang Banach kepada dirinya sendiri adalah kontinu, maka invers dari T yaitu T^{-1} otomatis kontinu.

6.3. Teorema Graph Tertutup.

Selanjutnya akan dibahas *Teorema Graph Tertutup (Closed-Graph Theorem)*.

Andaikan T adalah transformasi linear yang bijektif dari ruang vektor X ke ruang vektor Y . Invers dari T yang ditulis dengan T^{-1} didefinisikan sebagai

$T^{-1}(y) = x$ jika $T(x) = y$.

Teorema 6.3.1 :

Diberikan ruang Banach X dan Y dan T adalah transformasi linear terbatas yang bijektif dari X kepada Y . Maka T^{-1} adalah pemetaan yang terbatas.

Bukti :

Karena T^{-1} adalah transformasi linear, kita tunjukkan bahwa T^{-1} adalah kontinu. Menurut Teorema 6.2.1 (Teorema Pemetaan Terbuka) $(T^{-1})^{-1} = T$ memetakan himpunan terbuka di X kepada himpunan terbuka di Y . Jadi T^{-1} mempunyai sifat sebagai berikut : inverse bayangan dari himpunan terbuka adalah himpunan terbuka. Oleh karena itu, menurut definisi dari pemetaan kontinu, T^{-1} adalah kontinu. ■

Corollary :

Andaikan X adalah ruang Banach dengan sebarang satu dari dua norma $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$. Andaikan bahwa terdapat suatu konstanta K sedemikian sehingga

$$\|x\|_1 \leq K\|x\|_2, \text{ untuk semua } x \in X \quad \dots\dots\dots(1)$$

Maka dua norma adalah ekuivalen, yaitu terdapat suatu konstanta K' sedemikian sehingga

$$\|x\|_2 \leq K'\|x\|_1, \text{ untuk semua } x \in X \quad \dots\dots\dots(2).$$

Bukti :

Kita nyatakan X_1 adalah ruang Banach dengan norma $\|\cdot\|_1$ dan X_2 adalah ruang Banach dengan norma $\|\cdot\|_2$. Kita tinjau pemetaan $T(x)=x$ dari X_2 kepada X_1 . Menurut (1), T adalah terbatas. Oleh karena itu, menurut Teorema 6.3.1, maka T^{-1} juga terbatas. Jadi (2) terbukti. ■

Definisi 6.3.1 :

Diberikan T suatu transformasi linear dari ruang linear X ke ruang linear Y , dengan daerah asal (domain) D_T . *Graph* dari T yang ditulis sebagai G_T adalah himpunan semua titik $(x, T(x))$ dalam $X \times Y$, dimana $x \in D_T$. Jika G_T adalah himpunan bagian tertutup dalam produk Cartesien $X \times Y$ maka kita katakan bahwa T adalah *operator tertutup*.

Kita perhatikan bahwa G_T adalah subruang linear dalam $X \times Y$. Jadi T adalah tertutup jika dan hanya jika G_T adalah subruang linear tertutup. Kita perhatikan juga bahwa T adalah tertutup jika dan hanya jika $x_n \in D_T$, $x_n \rightarrow x$, $T(x_n) \rightarrow y$ berakibat bahwa $x \in D_T$ dan $T(x) = y$.

Suatu ruang topologi disebut *ruang Hausdorff* jika setiap dua titik yang berbeda termuat dalam himpunan terbuka yang saling asing.

Lemma 6.3.1 :

Jika X adalah ruang topologi dan Y adalah ruang Hausdorff dan $T: X \rightarrow Y$ adalah kontinu, maka *graph* G_T dari T adalah tertutup.

Bukti :

Andaikan S adalah komplemen dari G_T dalam $X \times Y$. Ditentukan $(x_0, y_0) \in S$. Maka $y_0 \neq T(x_0)$. Jadi y_0 dan $T(x_0)$ masing-masing mempunyai kitar yang saling asing, kita namakan V dan W dalam Y . Karena T kontinu, maka x_0 mempunyai kitar U sedemikian sehingga $T(U) \subset W$. Kita perhatikan bahwa $U \times V$ adalah kitar dari (x_0, y_0) , berada di dalam S . Hal ini berarti bahwa S terbuka. Jadi G_T tertutup.

Teorema 6.3.2 : (Teorema Graph Tertutup)

Diberikan ruang Banach X dan Y dan T adalah transformasi linear dari X ke Y . Jika T tertutup, maka T kontinu.

Bukti :

Graph dari T yaitu G_T adalah subruang linear tertutup dalam produk Cartesian $X \times Y$ (dengan $\|(x,y)\| = \|x\| + \|y\|$). Oleh karena itu G_T sendiri adalah ruang Banach. Kita tinjau transformasi linear terbatas J dari G_T kepada X dengan $J(x, T(x)) = x$. Karena J adalah bijektif, menurut Teorema 6.3.1, maka J^{-1} adalah transformasi linear terbatas dari X ke Y .

Sehingga

$\|(x, T(x))\| = \|J^{-1}x\| \leq K\|x\|$, untuk semua $x \in X$ untuk suatu konstanta K . Akibatnya, $\|x\| + \|T(x)\| \leq K\|x\|$, dan oleh karena itu T terbatas. ■

BAB VII

TEOREMA KETERBATASAN SERAGAM

Dalam bab ini akan dibahas Teorema Keterbatasan seragam (*Uniform Boundedness Theorem*). Teorema Keterbatasan seragam sering disebut sebagai Teorema Banach-Steinhaus atau sering juga disebut sebagai Prinsip Keterbatasan Seragam (*Principle of uniform boundedness*). Akan dibahas terlebih dahulu pengertian keterbatasan (boundedness) dalam barisan fungsi-fungsi.

Dalam pembahasan barisan fungsi $\langle f_n \rangle$ untuk $n \in \mathbb{N}$ dan $x \in$ himpunan E , kita berhadapan dengan dua variabel n dan x . Selanjutnya akan dibahas pengertian keterbatasan (boundedness) dalam barisan fungsi-fungsi ini.

7.1. Barisan Terbatas Seragam

Jika untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, fungsi f_n adalah fungsi terbatas pada E , maka $\langle f_n \rangle$ disebut barisan dari fungsi-fungsi yang terbatas pada E . Jika untuk setiap titik p di dalam E yang diberikan, barisan bilangan $\langle f_n(p) \rangle$ merupakan barisan yang terbatas, maka $\langle f_n \rangle$ dinamakan *terbatas titik demi titik* pada E , jadi dalam hal ini terdapat fungsi H yang bernilai berhingga pada E sedemikian sehingga

$$|f_n(x)| \leq H(x), \text{ untuk } x \in E, n=1, 2, \dots$$

Jika dapat ditemukan suatu bilangan M sedemikian

sehingga $|f_n(x)| \leq M$, untuk $x \in E$ dan $n=1, 2, \dots$

maka barisan $\langle f_n \rangle$ disebut *terbatas seragam pada E*.

Contoh 7.1.1 :

Barisan $\langle f_n \rangle$ dengan $f_n(x) = \frac{1}{nx}$ untuk $0 < x < 1$, $n=1, 2, \dots$ adalah terbatas titik demi titik pada $(0,1)$ tetapi tidak terbatas seragam pada $(0,1)$. Sebab terdapat $h(x) = \frac{1}{x}$ sehingga berlaku $|f_n(x)| \leq \frac{1}{x}$ untuk $0 < x < 1$, $n=1, 2, \dots$, tetapi tidak dapat ditemukan bilangan M sehingga ketidaksamaan dalam definisi di atas dipenuhi, karena masing-masing f_n merupakan fungsi tak terbatas.

Tetapi barisan $\langle g_n \rangle$ dengan $g_n(x) = \frac{1}{n}(x^2 - x)$ adalah terbatas seragam pada $[0,1]$ sebab $0 \leq |g_n(x)| \leq 1$, $n=1, 2, \dots$. Barisan fungsi yang terbatas seragam tentu terbatas titik demi titik.

Teorema 7.1.1 : (Proses Diagonal Cantor)

Diberikan barisan fungsi $\langle f_n \rangle$ dengan f_n ($n=1, 2, \dots$) adalah fungsi dari ruang metrik X ke dalam ruang metrik kompak Y . Jika $E = \{x_1, x_2, \dots\}$ adalah suatu subhimpunan terbilang di dalam X , maka terdapatlah suatu subbarisan $\langle g_n \rangle$ dari $\langle f_n \rangle$, sedemikian sehingga $\langle g_n \rangle$ konvergen di setiap titik anggota E .

Bukti :

Karena Y adalah ruang metrik yang kompak, maka menurut Teorema 3.2.2.8, setiap barisan titik di dalam Y memuat subbarisan yang konvergen ke suatu titik di dalam Y . Ditinjau barisan titik $\langle f_n(x_1) \rangle$ di dalam Y . Barisan

ini memuat subbarisan titik $\langle f_{n_k}(x_1) \rangle$ (dengan $n_1 < n_2 < \dots$) yang konvergen ke suatu titik, misalkan y_1 di dalam Y . Untuk $k=1,2, \dots$ agar mudah f_{n_k} kita tulis sebagai $f_{1k}(x_1)$, jadi $f_{n_k}(x_1) = f_{1k}(x_1)$ dengan 1 berkaitan dengan indeks pada x_1 dan k berkaitan dengan nomor urut pada n_k . Kalau k diganti dengan n , maka kita mempunyai barisan titik $\langle f_{1n}(x_1) \rangle$ yang konvergen ke y_1 , sebagai subbarisan dari barisan titik $\langle f_n(x_1) \rangle$. Dengan demikian barisan fungsi $\langle f_{1n} \rangle$ adalah subbarisan dari barisan $\langle f_n \rangle$ yang diberikan.

Kita tinjau barisan titik di dalam ruang metrik kompak Y , yakni $\langle f_{1n}(x_2) \rangle$. Barisan titik ini memuat subbarisan, kita sebut $\langle f_{2n}(x_2) \rangle$ yang konvergen ke y_2 di dalam Y . Barisan fungsi $\langle f_{2n} \rangle$ ini adalah subbarisan dari $\langle f_{1n} \rangle$ yang juga suatu subbarisan dari fungsi $\langle f_n \rangle$. ($2n$ bukan berarti 2 kali n , melainkan n dikaitkan dengan indeks x_2 dan n nomor urut sehingga indeks $2n$ pada f_{2n} adalah bilangan asli p_n dengan sifat $p_1 < p_2 < p_3 < \dots$). Selanjutnya $\langle f_{2n}(x_3) \rangle$ memuat suatu subbarisan $\langle f_{3n}(x_3) \rangle$ yang konvergen ke suatu titik y_3 di dalam Y . Jika proses ini diteruskan, kita akan mempunyai barisan-barisan fungsi: barisan B_1 , barisan B_2 , ..., barisan B_k , ... sebagai berikut

- $B_1 : f_{11}, f_{12}, f_{13}, f_{14}, \dots$ untuk x_1 konvergen ke y_1 ;
- $B_2 : f_{21}, f_{22}, f_{23}, f_{24}, \dots$ untuk x_2 konvergen ke y_2 ;
- $B_3 : f_{31}, f_{32}, f_{33}, f_{34}, \dots$ untuk x_3 konvergen ke y_3 ;
- $B_4 : f_{41}, f_{42}, f_{43}, f_{44}, \dots$ untuk x_4 konvergen ke y_4 ;

.....

 $B_k : f_{k1}, f_{k2}, f_{k3}, f_{k4}, \dots$ untuk x_k konvergen ke y_k ;

Untuk setiap bilangan asli s berlaku B_s subbarisan dari B_r untuk semua $r < s$, dan untuk semua bilangan asli k , jelas bahwa barisan B_k merupakan subbarisan dari barisan fungsi $\langle f_n \rangle$. Selanjutnya kita lihat barisan B hasil proses diagonal berikut :

$$B : f_{11}, f_{22}, f_{33}, f_{44}, \dots, f_{kk}, \dots$$

Barisan B ini adalah subbarisan dari barisan yang diberikan $\langle f_n \rangle$. Untuk setiap k , mulai suku ke k , jadi f_{kk} dan seterusnya dalam B adalah suku-suku dari B_k . Jadi

$$f_{kk}, f_{k+1, k+1}, f_{k+2k+2}, \dots$$

adalah subbarisan dari B_k .

Kita buktikan bahwa barisan fungsi B ini konvergen di setiap titik anggota E . Diambil sebarang titik x_p anggota E . Kita tinjau subbarisan dari B :

$$f_{pp}, f_{p+1p+1}, f_{p+2p+2}, \dots \quad (1)$$

yang merupakan subbarisan dari barisan fungsi B_p . Karena barisan B_p untuk x_p konvergen ke y_p , maka barisan (1) untuk x_p juga konvergen ke y_p . Karena B hanyalah barisan yang dapat diperoleh dari (1) dengan menaruhkan berhingga banyak fungsi-fungsi

$$f_{11}, f_{22}, f_{33}, \dots, f_{p-1p-1},$$

di depannya, maka B untuk x_p juga konvergen ke titik y_p . Jadi B konvergen untuk sebarang titik x_p anggota E , sehingga B konvergen di setiap titik anggota E . ■

Akibat dari Teorema di atas jika $\langle f_n \rangle$ suatu barisan yang terbatas titik demi titik pada E dan E_1 suatu subhimpunan terbilang dari himpunan E , maka selalu mungkin dicari suatu subbarisan $\langle f_{n_k} \rangle$ yang konvergen di setiap titik $x \in E_1$, karena dalam hal ini untuk setiap x yang diberikan dalam E_1 , barisan bilangan $\langle f_n(x) \rangle$ yang terbatas ini memuat subbarisan yang konvergen. Hasil ini ditulis dalam Teorema berikut

Teorema 7.1.2 :

Jika $\langle f_n \rangle$ suatu barisan fungsi yang bernilai real atau kompleks dan terbatas titik demi titik pada himpunan E , dan E_1 suatu subhimpunan terbilang dari E , maka $\langle f_n \rangle$ memuat subbarisan $\langle f_{n_k} \rangle$ sedemikian sehingga $\langle f_{n_k}(x) \rangle$ konvergen di setiap $x \in E_1$.

7.2. Keluarga Fungsi-fungsi Ekuikontinu

Selanjutnya didefinisikan konsep barisan fungsi ekuikontinu .

Suatu keluarga $\mathcal{F}$ dari fungsi-fungsi bernilai real atau kompleks yang didefinisikan pada suatu himpunan E subhimpunan dari ruang metrik (X, d) dikatakan *ekuikontinu* pada E , jika untuk setiap $\epsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sehingga untuk semua x dan y dalam E dengan $d(x, y) < \delta$ dan untuk semua fungsi $f \in \mathcal{F}$ berlaku

$$|f(x) - f(y)| < \epsilon .$$

Jadi ekuikontinu adalah sifat suatu keluarga fungsi, bukan sifat suatu fungsi. Setiap fungsi anggota keluarga fungsi yang ekuikontinu pada suatu himpunan, adalah

kontinu seragam pada himpunan tersebut.

Definisi di atas ditulis dalam bentuk lambang sebagai berikut

$\mathcal{F}$ ekuikontinu pada E

jika dan hanya jika

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)[(\forall x \in E, \forall y \in E, d(x, y) < \delta, \forall f \in \mathcal{F}) \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon].$$

Untuk barisan $\langle f_n \rangle$ definisi diatas menjadi

$\langle f_n \rangle$ ekuikontinu pada E

jika dan hanya jika

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)[(\forall x \in E, \forall y \in E, d(x, y) < \delta, \forall n \in \mathbb{N}) \Rightarrow |f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon].$$

Barisan $\langle f_n \rangle$ tidak ekuikontinu pada E , jika

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)[(\forall x \in E, \forall y \in E, d(x, y) < \delta, \forall n \in \mathbb{N}) \wedge |f_n(x) - f_n(y)| \geq \varepsilon].$$

Teorema 7.2.1 dan 7.2.2. berikut ini menunjukkan bahwa terdapat kaitan yang sangat erat antara konsep ekuikontinu dengan barisan fungsi kontinu yang konvergen seragam

Teorema 7.2.1 :

Jika K suatu ruang metrik kompak, dan jika f_n fungsi bernilai real atau kompleks yang didefinisikan dan kontinu pada K untuk $n=1, 2, \dots$, dan jika $\langle f_n \rangle$ konvergen seragam pada K , maka $\langle f_n \rangle$ ekuikontinu pada K .

Bukti :

Diberikan $\varepsilon > 0$. Karena $\langle f_n \rangle$ konvergen seragam pada K , menurut kriteria Cauchy terdapat suatu P sedemikian sehingga

$$|f_n(x) - f_p(x)| < \varepsilon/3 \quad \dots\dots\dots (1)$$

untuk semua $n \geq p$ dan semua $x \in K$.

Karena fungsi yang kontinu adalah kontinu seragam pada suatu himpunan yang kompak, maka untuk $f_1, f_2, \dots, f_p$ dapat dicari suatu $\delta > 0$ sehingga :

$$|f_i(x) - f_i(y)| < \varepsilon/3 \quad \dots\dots\dots (2)$$

untuk $i=1, 2, \dots, p$ dan untuk semua x dan y anggota K dengan $d(x,y) < \delta$.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa untuk δ ini $|f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon$, berlaku untuk semua $n \in \mathbb{N}$ dan semua x dan y di atas.

Jika $n \geq p$ dan $d(x,y) < \delta$,maka mengingat (1) dan (2) berlaku

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f_n(y)| &\leq |f_n(x) - f_p(x)| + |f_p(x) - f_p(y)| + \\ &\quad |f_p(y) - f_n(y)| \\ &< \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon . \end{aligned}$$

Ketidaksamaan ini bersama-sama dengan (2) memperlihatkan bahwa $\langle f_n \rangle$ ekuikontinu pada K .

Teorema 7.2.2 : *(Teorema Arzela-Ascoli)*

Jika K suatu ruang metrik kompak, dan jika f_n fungsi real atau kompleks yang kontinu pada K , dan $\langle f_n \rangle$ barisan terbatas titik demi titik dan ekuikontinu pada K , maka

- (i) $\langle f_n \rangle$ terbatas seragam pada K ;
- (ii) $\langle f_n \rangle$ memuat suatu subbarisan yang konvergen seragam

Bukti :

(i) Diberikan $\varepsilon > 0$. Karena $\langle f_n \rangle$ ekuikontinu pada K , terdapat $\delta > 0$ sehingga untuk semua x dan y di dalam K dengan $d(x,y) < \delta$ dan semua $n \in \mathbb{N}$ berlaku

$$|f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon \quad \dots\dots\dots (1)$$

Karena K kompak, terdapatlah titik-titik yang cacahnya

berhingga $p_1, p_2, \dots, p_r$ anggota K sehingga

$$K \subset \bigcup_{i=1}^r N_\delta(p_i)$$

dengan $N_\delta(p_i) = \{x : d(p_i, x) < \delta\}$, $i=1, 2, \dots, r$. Karena $\langle f_n \rangle$ terbatas titik demi titik pada K , maka terdapatlah bilangan real M_i sehingga $|f_n(p_i)| < M_i$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$. Diambil $M = \max \{M_1, M_2, \dots, M_r\}$. Untuk sebarang $x \in K$, terdapat suatu i dengan $1 \leq i \leq r$ sehingga $x \in N_\delta(p_i)$. Jadi menurut (1) berlaku $|f_n(x) - f_n(p_i)| < \varepsilon$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$. Dengan demikian untuk sebarang $x \in K$ dan sebarang $n \in \mathbb{N}$ berlaku $|f_n(x)| < |f_n(p_i)| + \varepsilon < M + \varepsilon$. Terbuktilah (i).

(ii) Diketahui bahwa K adalah kompak. Oleh karena K kompak maka K memuat subhimpunan terbilang E yang rapat (dense) pada K .

Menurut Teorema 7.1.2, karena $\langle f_n \rangle$ terbatas titik demi titik pada K dan E subhimpunan terbilang di dalam K , maka $\langle f_n \rangle$ memuat suatu subbarisan $\langle f_{n_k} \rangle$ sehingga $\langle f_{n_k}(x) \rangle$ konvergen di setiap $x \in E$.

Dimisalkan $\varepsilon > 0$ dan ambil $\delta > 0$ seperti pada awal bukti ini. Karena E rapat dalam K , dan K kompak, maka terdapat titik-titik anggota E yang cacahnya berhingga $x_1, x_2, \dots, x_s$ sehingga

$$K \subset \bigcup_{i=1}^s N_\delta(x_i) \dots \dots \dots (2)$$

Untuk memudahkan penulisan kita nyatakan $f_{n_k} = g_k$ dan akan dibuktikan bahwa $\langle g_k \rangle$ konvergen seragam pada K . Karena $\langle g_k \rangle$ konvergen seragam di setiap titik anggota E , jadi masing-masing barisan bilangan



$\langle g_k(x_1) \rangle, \langle g_k(x_2) \rangle, \dots, \langle g_k(x_s) \rangle$ adalah konvergen.

Menurut Cauchy, sesuai dengan $\varepsilon > 0$ diatas terdapat p sehingga untuk $n \geq p$ dan $m \geq p$ berlaku

$$|g_n(x_j) - g_m(x_j)| < \varepsilon, \text{ untuk } j=1, 2, \dots, s \quad \dots(3)$$

Untuk sebarang $x \in K$, (2) menunjukkan bahwa terdapat suatu q dengan $1 \leq q \leq s$ sehingga $x \in N_\delta(x_q)$, dan mengingat (1) berlaku

$$|g_k(x) - g_k(x_q)| < \varepsilon \text{ untuk semua } k \in \mathbb{N}, \quad \dots\dots\dots(4)$$

sebab g_k adalah suatu fungsi anggota barisan $\langle f_n \rangle$. Jika $n \geq p$ dan $m \geq p$ dengan memperhatikan (3) dan (4) diperoleh

$$\begin{aligned} |g_n(x) - g_m(x)| &\leq |g_n(x) - g_n(x_q)| + |g_n(x_q) - g_m(x_q)| + \\ &\quad |g_m(x_q) - g_m(x)| < 3\varepsilon \end{aligned}$$

Dengan demikian untuk setiap $\varepsilon > 0$ yang diberikan, terdapat p sehingga untuk semua $n \geq p$ dan semua $m \geq p$, dan semua $x \in K$ berlaku $|g_n(x) - g_m(x)| < 3\varepsilon$, menurut kriteria Cauchy $\langle g_k \rangle$ konvergen seragam pada K .

Jadi $\langle f_{nk} \rangle$ konvergen seragam pada K . ■

7.3. Teorema Keterbatasan Seragam

Selanjutnya akan dibuktikan Teorema Keterbatasan Seragam (*Uniform Boundedness Theorem*).

Teorema 7.3.1 : (Teorema Keterbatasan Seragam)

Diberikan ruang Banach X dan ruang linear bernorma Y . Andaikan $\{T_\alpha\}$ adalah keluarga dari transformasi linear terbatas dari X ke Y . Jika untuk setiap $x \in X$, $\{T_\alpha(x)\}$ adalah himpunan terbatas, maka $\{\|T_\alpha\|\}$ adalah himpunan terbatas.

Bukti :

Jika terdapat suatu bola terbuka $B_\varepsilon(x_0)$ dimana $\{T_\alpha(x)\}$ adalah terbatas seragam yaitu, untuk suatu konstanta K ,

$$\|T_\alpha(x)\| \leq K \text{ jika } \|x-x_0\| < \varepsilon \dots (7.3.1)$$

maka kita dapat dengan mudah melengkapi bukti Teorema ini. Selanjutnya untuk $y \neq 0$ didefinisikan

$$z = \frac{\varepsilon}{\|y\|} y + x_0.$$

Karena $\|z-x_0\| \leq \varepsilon$, menurut (7.3.1) maka $\|T_\alpha(z)\| \leq K$

Sehingga

$$\frac{\varepsilon}{\|y\|} \|T_\alpha y\| - \|T_\alpha(x_0)\| \leq \left\| \frac{\varepsilon}{\|y\|} T_\alpha(y) + T_\alpha(x_0) \right\| = \|T_\alpha(z)\| \leq K$$

Kita dapatkan :

$$\|T_\alpha y\| \leq \frac{K + \|T_\alpha(x_0)\|}{\varepsilon} \|y\| \leq \frac{K + K'}{\varepsilon} \|y\|,$$

dengan $K' = \sup \|T_\alpha(x_0)\| < \infty$.

Kita simpulkan bahwa $\|T_\alpha\| \leq (K+K')/\varepsilon$.

Selanjutnya, untuk melengkapi bukti Teorema ini kita tunjukkan bahwa terdapat suatu bola terbuka dimana $\{T_\alpha(x)\}$ adalah terbatas seragam. Kita andaikan bahwa tidak terdapat bola terbuka dengan sifat tersebut, kemudian diturunkan suatu kontradiksi.

Bentuk bola terbuka B_0 . Maka terdapat suatu titik x_1 dalam B_0 sedemikian sehingga $\|T_{\alpha_1}(x_1)\| > 1$ untuk suatu indeks α_1 . Dengan kontinuitas kita mempunyai $\|T_{\alpha_1}(x)\| > 1$ dalam suatu bola $B_{\varepsilon_1}(x_1)$ berada dalam B_0 . Kita ambil $\varepsilon_1 < 1$. Dalam bola yang baru ini, $\{T_\alpha(x)\}$ tidak terbatas seragam. Oleh karena itu terdapat titik $x_2 \in B_{\varepsilon_1}(x_1)$ sedemikian sehingga

$$\|T_{\alpha_2}(x_2)\| > 2$$

untuk suatu indeks α_2 , $\alpha_2 \neq \alpha_1$. Dengan kontinuitas, $\|T_{\alpha_2}(x)\| > 2$ dalam suatu bola terbuka $B_{\varepsilon_2}(x_2)$ berada dalam $B_{\varepsilon_1}(x_1)$. Kita ambil $\varepsilon_2 < \frac{1}{2}$. Kita dapat melanjutkan cara ini untuk mendefinisikan titik-titik $x_3, x_4, \dots, x_n, \dots$, dengan indeks $\alpha_3, \alpha_4, \dots, \alpha_n, \dots$ dan bilangan positif $\varepsilon_3, \varepsilon_4, \dots, \varepsilon_n, \dots$, sedemikian sehingga

$$B_{\varepsilon_n}(x_n) \subset B_{\varepsilon_{n-1}}(x_{n-1}), \quad \varepsilon_n < 1/n, \quad \alpha_n \neq \alpha_j, \quad \text{jika } 1 \leq j \leq n,$$

dan $\|T_{\alpha_n}(x)\| > n$, untuk semua $x \in B_{\varepsilon_n}(x_n)$.

Menurut Teorema 6.1.1, terdapat titik $z \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{B_{\varepsilon_n}}(x_n)$.

Karena $\|T_{\alpha_n}(z)\| \geq n$, untuk semua $n \geq 1$, kita peroleh suatu kontradiksi, yakni kontradiksi dengan asumsi bahwa $\{T_{\alpha}(z)\}$ adalah himpunan terbatas. ■

Suatu barisan $\langle T_n \rangle$ yang terdiri atas operator linear terbatas dari ruang linear bernorma X ke ruang linear bernorma Y , dikatakan konvergen kuat (*strongly konvergent*) jika untuk sebarang $x \in X$, $\lim T_n(x)$ ada. Jika terdapat suatu operator linear terbatas T sedemikian sehingga $\lim T_n(x) = T(x)$, maka kita katakan $\langle T_n \rangle$ konvergen kuat ke T .

Teorema 7.3.2 :

Diberikan ruang Banach X dan ruang linear bernorma Y . Jika $\langle T_n \rangle$ adalah barisan operator linear terbatas dari X ke Y adalah konvergen, maka terdapat operator linear terbatas T sedemikian sehingga $\langle T_n \rangle$ konvergen kuat ke T .

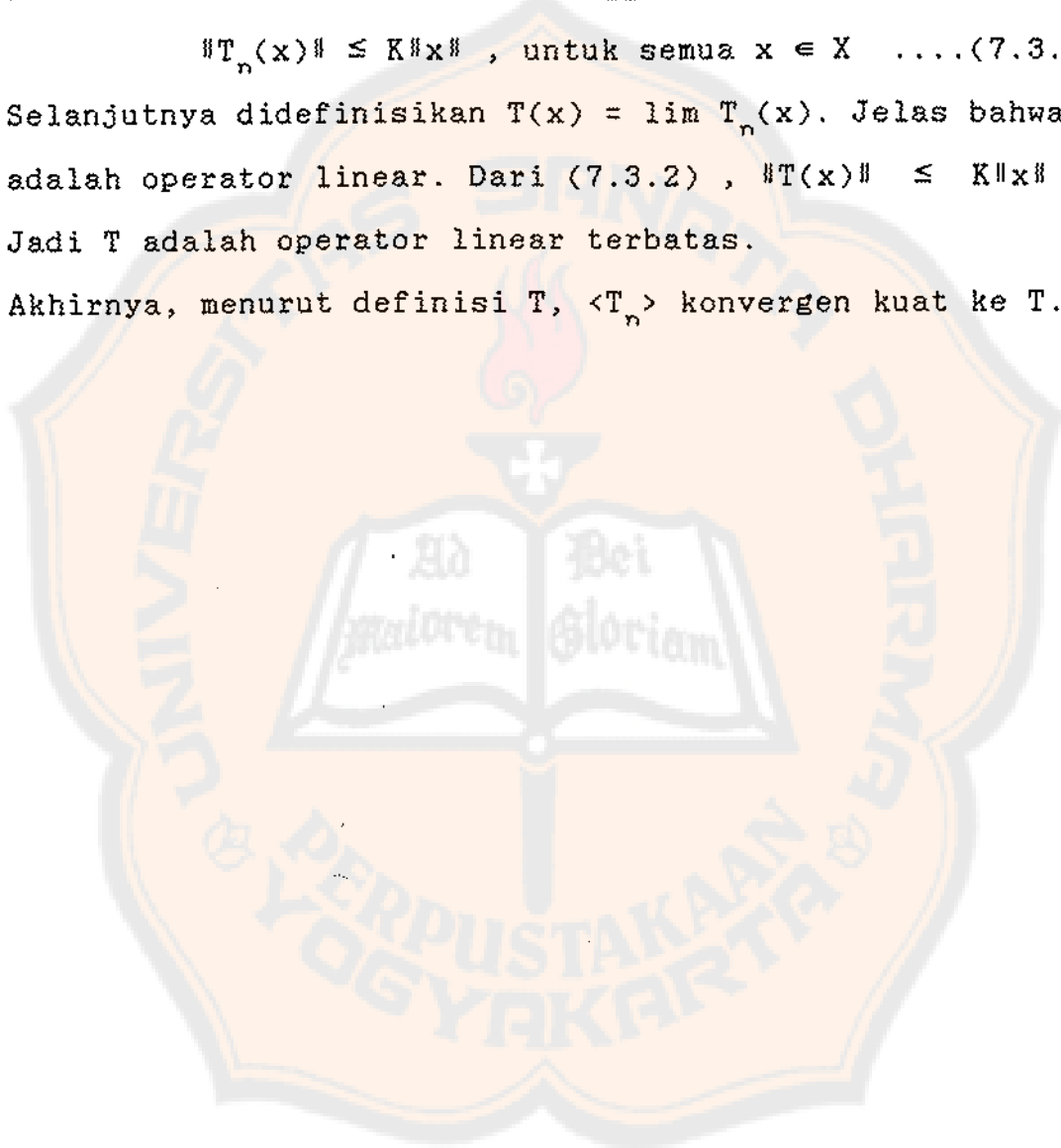
Bukti :

Untuk sebarang $x \in X$ $\langle T_n(x) \rangle$ adalah barisan terbatas, karena konvergen. Menurut Teorema Keterbatasan seragam berakibat bahwa $\|T_n\| \leq K$, untuk semua $n \geq 1$, dengan K adalah suatu konstanta. Sehingga

$$\|T_n(x)\| \leq K\|x\|, \text{ untuk semua } x \in X \quad \dots(7.3.2)$$

Selanjutnya didefinisikan $T(x) = \lim T_n(x)$. Jelas bahwa T adalah operator linear. Dari (7.3.2), $\|T(x)\| \leq K\|x\|$. Jadi T adalah operator linear terbatas.

Akhirnya, menurut definisi T , $\langle T_n \rangle$ konvergen kuat ke T . ■



BAB VIII

PENUTUP

Karya tulis tentang ruang Banach ini diakhiri dengan ikhtisar tentang hal-hal yang dibahas didalamnya, yaitu :

- (a) Topik-topik pendukung untuk membahas ruang Banach yang terdiri atas : fungsi, ruang metrik, batas atas dan bawah himpunan terurut, himpunan terbuka dan tertutup, barisan konvergen dan ruang metrik lengkap, pemetaan kontinu, ruang linear, ruang topologi, lemma Zorn, penutup himpunan.
- (b) Konsep - konsep yang berkaitan langsung dalam pembahasan ruang Banach, seperti barisan Cauchy yang konvergen, transformasi linear kontinu dan terbatas, fungsional linear, kekonvergenan seragam dan terbatas seragam .
- (c) Contoh - contoh ruang Banach yang terdiri atas :
 - (i) Ruang Euclides $\mathbb{R}^k$
 - (ii) Himpunan semua fungsi bernilai real atau kompleks kontinu dan terbatas $C(X)$.
 - (iii) Himpunan semua transformasi linear kontinu dan terbatas dari ruang linear bernorma N ke ruang Banach N' .
 - (iv) Himpunan semua fungsional linear terbatas dari N ke $\mathbb{K}$ ditulis dengan notasi $B(N, \mathbb{K})$ atau disingkat sebagai N^* dan disebut *ruang dual* dari N .

(d) Beberapa teorema yang berlaku dalam ruang Banach,
yaitu :

- (i) *Teorema Hahn-Banach*
- (ii) *Teorema Pemetaan Terbuka*
- (iii) *Teorema Keterbatasan Seragam*



DAFTAR PUSTAKA

- George F. Simmons
1983 Introduction to Topology and Modern Analysis .
Malabar, Florida: Robert E. Krieger Publishing
Company, Inc .
- Soemantri, R
1983 Materi Pokok Analisis Real I . Jakarta : Karunika,
Universitas Terbuka .
- Avner Friedman
1982 Foundations of Modern Analysis . New York : Dover
Publications, Inc.
- Kolmogorov, A.N dan Fomin, S.V
1970 Introductory Real Analysis . New York : Dover Publi-
cations, Inc .
- Aliprantis, C.D dan Owen Burkinshaw
1990 Principles of Real Analysis . Ed. ke-2. San Diego :
Academics Press, Inc.
- Walter Rudin
1977 Functional Analysis . New Delhi : Tata McGraw-Hill
Publishing Company, Ltd.
- Kosaku Yosida
1965 Functional Analysis . Ed. ke-4. New York : Toppan
Company (Singapore) Pte Ltd.
- Coudhary, B dan Sudarsan Nanda
1989 Functional Analysis with Applications . Singapore :
John Wiley & Sons, (Pte) Ltd.
- Erwin Kreyszig
1989 Introductory Functional Analysis with Applications .
Malabar, Florida : Robert E, Krieger Publishing
Company, Inc.

