GRUP
ABELIAN BERHINGGA

Skripsi

Diajukan untuk Memenuhi Salah Satu Syarat
Memperoleh Gelar Sarjana Pendidikan
Program Studi Pendidikan Matematika

Disusun oleh:

DAMIANUS MUKTIADJI
NIM : 93 1414 011
NIRM : 930052010501120010

PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA
JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
UNIVERSITAS SANATA DHARMA
YOGYAKARTA
1999

Skripsi

GRUP ABELIAN BERHINGGA

Disusun oleh

Damianus Muktiadji

NIM: 931414011
NIRM: 930052010501120010

telah disetujui oleh:

Pembimbing I

Prof. Dra. Moeharti, Hw. MA

Tanggal 29-Juli-1999

Pembimbing II

Dra. Maria Agustiani, M.Si

Tanggal 29 Juli 1999

Skripsi

GRUP
ABELIAN BERHINGGA

Yang dipersiapkan dan disusun oleh:

Damianus Muktiadji

NIM: 931414011
NIRM: 930052010501120010

Telah dipertahankan didepan Panitia Penguji
pada tanggal 31 - Mei - 1999
dan dinyatakan telah memenuhi syarat

Susunan Panitia Penguji

Prof. Dra. Moeharti, HW. MA ....

Dra. Maria Agustiani, M.Si ....

Dr. J. Marpaung ....

Yogyakarta, 29 - Juni - 1999
Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan
Universitas Sanata Dharma
Dekan FKIP

Dr. Paul Suparno, S.J., M.S.T

Biarlah hari kemarin itu pergi
berlalu bersama kegagalan terdahulu
tak sedikitpun aku gundah, sedih apalagi
putus asa

Walau kerikil berbaris dimataku
tak satupun yang kurasakan,
kakiku tetap kokoh
maju menggilas tajamnya

Dan ketika mataku terpejam
mentari membakar seluruh ragaku
Aku segera bangkit,
menjemput cerahnya hari

Bak bergulir sang waktu
tak ada kata berhenti mewujud hasrat
Cita dan gemerlapnya masa depan
bersama keberhasilan ini

kupersembahkan untuk keluargaku,
Bapak Saptohardjo, Ibu Ch. Rustinah,
mBak Anna, mBak Bertha, mas Kris
Nora, Abi, Noli dan dhik Rina tersayang

KATA PENGANTAR

Sudah layak dan sepantasnya puji dan syukur kepada Tuhan Yang Maha Baik, oleh karena segala rencan-Nya dalam penulisan skripsi ini. Skripsi ini disusun sebagai prasyarat memperoleh gelar Sarjana pendidikan pada program studi pendidikan matematika, jurusan Pendidikan Matematikan dan Ilmu Pengetahuan Alam, Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Universitas Sanata Dharma.

Pada kesempatan yang baik ini, penulis ingin mengucapkan terima kasih kepada berbagai pihak yang telah membantu penulis sejak perencanaan, pelaksanaan hingga terbentuknya skripsi ini. Ucapan terima kasih dan penghargaan setinggi-tingginya kepada:

1. Prof. Dra. Moeharti, Hw.MA selaku Pembimbing I yang dengan teliti membimbing dan memberikan masukan yang berharga.
2. Ibu Dra. Maria Agustiani, M.Si selaku Pembimbing II yang dengan penuh kesabaran membimbing penulis dalam perencanaan, pelaksanaan hinga akhir dari penyelesaian skripsi ini.
3. Bapak Drs. Fr. Y. Kartika Budi, M.Pd selaku Ketua Jurusan Pendidikan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam.
4. Bapak Dr. St. Suwarno dan sekaligus sebagai dosen pembimbing akademik penulis yang selalu memberikan arahan dan bimbingan selama menempuh kuliah.

5. Bapak Drs. Susento, M.Si selaku Ketua Program studi Pendidikan Matematika Universitas Sanata Dharma yang juga selalu memperhatikan perkembangan penulis dalam penulisan skripsi ini.
6. Bapak M. Andy Rudhito S.Pd. dan Ibu Wanty Widjaja, S.Pd. yang turut membimbing dan membantu penulis selama menyelesaikan skripsi ini.
7. Ibu Atik, Ibu Warni dan Bapak Narjo, Bapak Sugeng yang telah banyak membantu penulis dalam penyelesaikan skripsi ini.
8. Rekan-rekan Mahasiswa Pendidikan Matematika angkatan 93 yang telah memberi dukungan semangat dan doa.
9. Sahabat-sahabatku yang telah dengan setia memberi dorongan semangat serta doa.

Penyusun menyadari bahwa masih terdapat kekurangan dalam skripsi ini karenanya segala masukan dan saran yang membangun akan diterima dengan senang hati. Akhirnya harapan penulis semoga skripsi ini dapat berguna bagi para pembaca.

Penyusun

DAFTAR ISI

Abstract

The definition of a group in abstract algebra is the most important concept and has a fundamental function. One of the group categories is finite abelian groups. A Finite Abelian Group is a group that has finite elements and the defined operation is commutative.

If let G be any finite abelian group, then G is the direct product of its subgroups $P_1, P_2, \ldots, P_n$ or annotated $G = P_1 x \ldots x P_k$. Subgroups' $P_1, P_2, \ldots, P_n$ are the Sylow subgroup of G. Each p_i-Sylow Subgroup is then the direct product of cyclic group. If G is a finite abelian group, then $G = A_1 x \ldots x A_n x B_1 x \ldots B_n x \ldots x C_1 x \ldots x C_n$, where A_i, B_i, C_i are individually the cyclic subgroups of G.

If G and G' are abelian groups of order p^n and $G = A_1 x \ldots x A_k$, where each A_i is a cyclic group of order p^{n_i}, $n_1 \geq \ldots \geq n_k > 0$, and $G' = B_1 x \ldots x B_s$, where B_i is a cyclic group of order p^{h_i}, $h_1 \geq \ldots \geq h_s > 0$, then G and G' are isomorphic if and only if $k = s$ and for i, $n_i = h_i$. Therefore, if G is an abelian group of order p^n, p a prime then number of nonisomorphic group with G, equals the number of partitions of n are known.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Grup abelian berhingga merupakan salah satu bagian dari topik grup. Grup abelian berhingga adalah grup yang elemen-elemenya berhingga dan operasi yang didefinisikan bersifat komutatif. Kedua sifat inilah yang membedakan dengan bagian dari teori grup yang lain. Oleh karenanya keberadaan grup abelian berhingga sangat penting kedudukannya dalam teori grup.

Pembahasan tentang grup abelian berhingga perlu dikaji lebih dalam guna menunjang akan pemahaman tentang teori grup secara lebih lengkap dan menyeluruh. Grup abelian berhingga memiliki karakteristik yang tidak dimiliki oleh grup-grup lain. Sebagai gambaran bahwa dalam teorema fundamental grup abelian berhingga dikatakan grup abelian berhingga pasti isomorfis dengan tepat satu hasil kali langsung dari grup-grup siklik yang berorder kuasa dari bilangan prima. Pemahaman akan grup abelian berhingga secara utuh dengan sendirinya akan mempermudah dalam penguasaan materi-materi grup yang terkait dengan grup abelian berhingga secara langsung.

1.2 Rumusan Masalah

Dalam tulisan ini dapat dirumuskan masalah pokok yang akan dibahas dan dikembangkan yaitu: Bagaimanakah sifat-sifat yang berlaku dalam grup abelian berhingga?

1.3 Tujuan Penulisan

Tujuan penulisan ini adalah untuk memahami pengertian yang lengkap tentang grup abelian berhingga, termasuk sifat-sifat yang berlaku dalam grup abelian serta dapat menggunakannya untuk menyelesaikan persoalan-persoalan secara lebih mudah dan mengetahui hubungan grup abelian berhingga dengan konsep-konsep grup lainnya terutama dengan hasil kali langsung dalam (*internal direct product*) dengan hasil kali langsung luar (*external direct product*).

Manfaat dari mempelajari grup abelian berhingga adalah dapat menggunakan sifat-sifat yang belaku dalam grup abelian berhingga untuk menyelesaikan persoalan secara lebih mudah. Salah satu sifat yang penting dalam grup abelian berhingga bahwa grup abelian berhingga merupakan hasil kali langsung dalam dari grup-grup siklik. Sifat lainnya yang juga penting yaitu dapat diketahui banyaknya grup abelian yang tidak isomorfis bila diketahui order dari grup abelian berhingga. Jadi dengan mempelajari grup abelian berhingga dapat melihat struktur order dari grup abelian tersebut.

1.5 Metode Penulisan

Metode yang digunakan dalam penulisan adalah metode studi pustaka.

BAB II

GRUP

Dalam Bab II ini akan dibahas beberapa pengertian dasar yang perlu dikuasai untuk mempelajari bab-bab selanjutnya. Definisi-definisi, teorema-teorema dan beberapa contoh ini dibagi dalam dua subbab. Subbab yang pertama akan membahas tentang grup, subgrup serta dilanjutkan dengan pembahasan teori pendukung yang lain. Subbab yang kedua akan membahas mengenai homomorfisma, isomorfisma serta subgrup normal. Definisi-definisi serta teorema-teorema yang ditulis disini mengacu pada buku-buku yang dipakai sebagai pustaka.

2.1. Grup dan Subgrup

Definisi 2.1.1

Grup adalah suatu himpunan G yang tidak kosong dan dilengkapi dengan operasi "$\circ$" yang memenuhi aksioma-aksioma di bawah ini:

1. $(\forall a,b \in G)(a \circ b) \in G$
2. $(\forall a,b,c \in G)\ a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$
3. $(\exists e \in G)\ (\forall a \in G)\ a \circ e = e \circ a = a$
4. $(\forall a \in G)\ (\exists a^{-1} \in G)\ a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e$

Untuk selanjutnya grup G ditulis $(G,\circ)$

Teorema 2.1.1

Jika $(G,\bullet)$ grup, maka elemen identitas dari G tunggal, yaitu jika e dan f adalah elemen-elemen dari G sedemikian hingga:

a. $e \bullet a = a \bullet e = a$, $\forall a \in G$ dan $f \bullet a = a \bullet f = a$, $\forall a \in G$, maka $e = f$

b. Setiap elemen dalam grup mempunyai invers tunggal.

Bukti:

a. Andaikan e dan f elemen identitas dalam G, maka $e \bullet a = a \bullet e = a$, $\forall a \in G$, karena $f \in G$, maka $e \bullet f = f \bullet e = f$. Dengan menggunakan $a = e$ dalam persamaan $a \bullet f = f \bullet a = a$, diperoleh $e \bullet f = e$ sehingga $e = f$.

b. Ambil sebarang $a \in G$ dan misalkan x dan y invers dari a serta e elemen identitas dari G. Akan ditunjukkan $x = y$. Karena x dan y invers dari a, maka berlaku $a \bullet x = x \bullet a = e$ dan $a \bullet y = y \bullet a = e$ sehingga diperoleh persamaan berikut:

$x = x \bullet e$

$= x \bullet (a \bullet y)$ (y invers dari a)

$= (x \bullet a) \bullet y$ (asosiatif dalam G)

$= e \bullet y$ (x invers dari a)

$x = y$ ■

Definisi 2.1.2

Jika $(G,\bullet)$ grup dan $\forall a,b \in G$ berlaku $a \bullet b = b \bullet a$, maka $(G,\bullet)$ disebut *Grup Abelian*.

Teorema 2.1.2

Jika $(G,\bullet)$ grup, maka $\forall a, b \in G$ berlaku

a. $(a^{-1})^{-1} = a$

b. $(a \bullet b)^{-1} = b^{-1} \bullet a^{-1}$

Bukti

a. Akan ditunjukkan $(a^{-1})^{-1} = a$. Ambil sebarang $a \in G$, maka $\exists a^{-1} \in G \ni a^{-1} \bullet a = a \bullet a^{-1} = e$. Dapat dipandang a merupakan invers dari a^{-1}, dilain pihak $(a^{-1})^{-1}$ merupakan invers dari a^{-1}. Oleh karena invers dari setiap elemen dalam grup selalu tunggal, maka dapat disimpulkan $(a^{-1})^{-1} = a$.

b. Ambil sebarang $a, b \in (G,\bullet)$ akan ditunjukkan $(a \bullet b)^{-1} = b^{-1} \bullet a^{-1}$. Karena $a, b \in G$ maka $(a \bullet b) \in G$ dan $(a \bullet b)^{-1} \in G$ dan berlaku $(a \bullet b) \bullet (a \bullet b)^{-1} = e$. Oleh karena $a, b \in G$, maka ada $a^{-1}, b^{-1} \in G$. Dari sini diperoleh:

$a^{-1} \bullet (a \bullet b) \bullet (a \bullet b)^{-1} = a^{-1} \bullet e$

$(a^{-1} \bullet a) \bullet b \bullet (a \bullet b)^{-1} = a^{-1}$ (asosiatif dalam G)

$e \bullet b \bullet (a \bullet b)^{-1} = a^{-1}$

$b^{-1} \bullet b \bullet (a \bullet b)^{-1} = b^{-1} \bullet a^{-1}$

$e \bullet (a \bullet b)^{-1} = b^{-1} \bullet a^{-1}$

$(a \bullet b)^{-1} = b^{-1} \bullet a^{-1}$ ■

Teorema 2.1.3

Jika $(G, \bullet)$ grup, maka $\forall a, b, c \in G$ berlaku:

1. Jika $a \bullet b = a \bullet c$, maka $b = c$ (kanselasi kiri)
2. Jika $b \bullet a = c \bullet a$, maka $b = c$ (kanselasi kanan)

Bukti:

1. Ambil $a, b, c \in G$ sedemikian sehingga $a \bullet b = a \bullet c$, akan ditunjukkan $b = c$. Karena $a \in G$, maka $\exists a^{-1} \in G$ sedemikian sehingga $a \bullet a^{-1} = a^{-1} \bullet a = e$. Karena $a \bullet b = a \bullet c$,

   maka $a^{-1} \bullet (a \bullet b) = a^{-1} \bullet (a \bullet c)$ (sifat tertutup)

   $(a^{-1} \bullet a) \bullet b = (a^{-1} \bullet a) \bullet c$ (sifat assosiatif)

   $e \bullet b = e \bullet c$ (sifat invers)

   $b = c$

2. Ambil a, b dan $c \in G$ sedemikian sehingga $b \bullet a = c \bullet a$, akan ditunjukkan $b = c$. Karena $a \in G$, maka $(\exists a^{-1} \in G)$ sedemikian sehingga $a \bullet a^{-1} = a^{-1} \bullet a = e$. Karena $b \bullet a = c \bullet a$,

   maka $(b \bullet a) \bullet a^{-1} = (c \bullet a) \bullet a^{-1}$ (sifat tertutup dalam G)

   $b \bullet (a \bullet a^{-1}) = c \bullet (a \bullet a^{-1})$ (sifat assosiatif dalam G)

   $b \bullet e = c \bullet e$ (sifat invers)

   $b = c$ ■

Definisi 2.1.3

Diketahui $(G, \bullet)$ grup dan $b \in G$, $n \in Z$ maka didefinisikan bentuk eksponen berikut

1. untuk $0 < n$

$$b^n = \underbrace{b \bullet b \bullet b \bullet \ldots\ldots\ldots \bullet b}_{n\ faktor}.$$

2. untuk $n < 0$, maka misal $n = (-p), p \in Z^+$

$$b^n = b^{-p} = (b^{-1})^p = \underbrace{b^{-1} \bullet b^{-1} \bullet \ldots \bullet b^{-1}}_{p \text{ faktor}}$$

3. untuk $n = 0$, maka $b^n = b^0 = e$

Dalam definisi ini tampak bahwa untuk bentuk $a^2 = a \bullet a, a^3 = a^2 \bullet a = a \bullet a \bullet a, \ldots\ldots, a^m = a^{m-1} \bullet a$.

Teorema 2.1.4

Jika $(G,\bullet)$ grup dan $a, b \in G$ dan untuk $n,m \in Z$, maka

1. $a^n \bullet a^m = a^{n+m}$
2. $(a^n)^m = a^{n\,m}$

Bukti:

Perhatikan bahwa untuk $m,n \in Z^+$ atau $m,n \in Z^-$ dapat ditunjukkan dengan induksi matematika sebab untuk $m,n \in Z^-$, maka $(a^{-n}) = (a^{-1})^n, n \in N$

1. Akan ditunjukkan dengan induksi matematika pada n.
   - untuk $n = 1$, maka $a^m \bullet a = a^{m+1}$ dan benar menurut definisi a^{m+1}
   - Andaikan teorema benar untuk $n = k$, maka berlaku $a^m \bullet a^k = a^{m+k}$
   - Akan ditunjukkan benar untuk $n = k + 1$. Perhatikan bahwa

     $a^m \bullet a^{k+1} = a^m \bullet (a^k \bullet a)$ (dengan definisi a^{k+1})

$= (a^m \bullet a^k) \bullet a$ (assosiatif dalam G)

$= (a^{m+k}) \bullet a$ (dengan pengandaian)

$= a^{m+k+1}$ (dengan definisi a^{m+k+1})

berarti benar untuk $n = k + 1$.

Terbukti teorema benar menurut induksi matematika.

2. Ambil sebarang $a \in G$ dan untuk $m, n \in Z$ akan ditunjukkan $(a^n)^m = a^{nm}$

- untuk kasus $n < 0$, $m > 0$ dan misalkan $n = -p, p \in Z^+$

$$(a^n)^m = (a^{-p})^m = \underbrace{(a^{-p} \bullet a^{-p} \bullet \ldots \bullet a^{-p})}_{m \text{ faktor}}$$

$$= \underbrace{\underbrace{(a^{-1} \bullet a^{-1} \bullet \ldots \bullet a^{-1})}_{p \text{ faktor}} \bullet \underbrace{(a^{-1} \bullet a^{-1} \bullet \ldots \bullet a^{-1})}_{p \text{ faktor}} \bullet \ldots \bullet \underbrace{(a^{-1} \bullet a^{-1} \bullet \ldots \bullet a^{-1})}_{p \text{ faktor}}}_{m \text{ faktor}}$$

$$= \underbrace{(a^{-1} \bullet a^{-1} \bullet a^{-1} \bullet \ldots\ldots a^{-1})}_{mp \text{ faktor}} = (a^{-p})^m = a^{mn}$$

- untuk kasus $n = 0$ dan $m > 0$

$$(a^n)^m = (a^0)^m = e^m = e = a^0 = a^{0m} = a^{nm}$$

- untuk kasus $m > 0$ dan $n > 0$

$$(a^n)^m = \underbrace{(a^n \bullet a^n \bullet \ldots \bullet a^n)}_{m \text{ faktor}}$$

$$= \underbrace{\underbrace{(a * a * \ldots * a)}_{n\ faktor} * \underbrace{(a * a * \ldots * a)}_{n\ faktor} * \ldots * \underbrace{(a * a * \ldots * a)}_{n\ faktor}}_{m\ faktor}$$

$$= \underbrace{(a * a * \ldots * a)}_{mn\ faktor} = a^{mn}$$

- Untuk kasus $m = 0$ dan $n = 0$, maka $(a^m)^n = (a^0)^0 = e = a^0 = a^{00} = a^{mn}$

- Untuk kasus, $m = 0$ dan $n < 0$, misal $n = -p$, jadi $(a^n)^m$, menjadi:

$$(a^n)^m = (\underbrace{a^{-1} * a^{-1} * \ldots\ldots\ldots * a^{-1}}_{p\ faktor})^0$$

$$= \underbrace{(a^{-1})^0 * (a^{-1})^0 * \ldots * (a^{-1})^0}_{p\ faktor}$$

$$= \underbrace{(e * e. * \ldots\ldots * .e)}_{p\ faktor} = a^0 = (a^0)^{-p} = (a^m)^{-p} = a^{-pm}$$

- Untuk kasus $m < 0$ dan $n < 0$, maka $m = -p$ dan $n = -k$, dengan $p, k \in Z^+$

$$(a^n)^m = (a^{-k})^{-p} = (\underbrace{a^{-1} * a^{-1} * \ldots * a^{-1}}_{k\ faktor})^{-p}$$

$$= \underbrace{\underbrace{(a^{-1} * \ldots * a^{-1} * a^{-1})^{-1}}_{k\ faktor} * \underbrace{(a^{-1} * a.^{-1} * \ldots * a^{-1})^{-1}}_{k\ faktor} * \ldots\ldots * \underbrace{(a^{-1} * a.^{-1} * \ldots * a^{-1})^{-1}}_{k\ faktor}}_{p\ faktor}$$

$$= \underbrace{(a * a * a * \ldots * a)}_{kp\ faktor} = a^{kp} = a^{(-k)(-p)} = a^{mn}$$

Definisi 2.1.4

Order dari grup G adalah banyaknya elemen dalam himpunan G dan dinotasikan dengan $|G|$. Jika banyak elemen dalam G tak hingga, maka G disebut grup tak hingga (*infinite Grup*). Jika banyak elemen G berhingga, maka G disebut grup berhingga (*finite Grup*).

Definisi 2.1.5

Jika $(G,*)$ grup dan $b \in G$, maka yang dimaksud order dari b adalah bilangan bulat positif terkecil m sedemikian sehingga $b^m = e$

Selanjutnya order dari b dinotasikan dengan $o(b)$. Perhatikan bahwa dari definisi tampak order elemen identitas dari suatu grup adalah satu.

Suatu himpunan bagian yang tidak kosong dari suatu grup mungkin akan membentuk grup juga terhadap operasi yang sama dengan operasi dalam G. Apabila hal ini terjadi maka himpunan bagian ini disebut subgrup. Berikut ini akan dibahas subgrup dan sifat-sifat yang terkait dengan subgrup yang tertuang dalam beberapa teorema di bawah ini.

Definisi 2.1.6

Jika $(G,\bullet)$ grup dan $H \subseteq G$ dan $H \neq \emptyset$, maka H disebut subgrup dari G jika H terhadap operasi "$\bullet$" juga merupakan grup.

Jika $(G,\bullet)$ grup dan $H \subseteq G$ dengan $H \neq \emptyset$, maka operasi "$\bullet$" dalam H tentu juga bersifat assosiatif. Oleh karena itu untuk menyelidiki suatu subgrup cukup dibuktikan sifat ketertutupan dan invers dari setiap elemen dalam H juga berada dalam H. Seperti tertuang pada teorema berikut.

Teorema 2.1.5

Jika $(G,\bullet)$ grup dan $H \subseteq G$, maka H subgrup dari G bila dan hanya bila :

a. $H \neq \emptyset$

b. Jika $a \in H$ dan $b \in H$ maka $(a \bullet b) \in H$

c. Jika $a \in H$, maka $a^{-1} \in H$

Bukti:

$(\Rightarrow)$

H subgrup dari G sehingga memenuhi aksioma berikut:

1. $\forall a,b \in H,\ (a \bullet b) \in H$

2. $\forall a,b,c \in H,\ (a \bullet b) \bullet c = (a \bullet b) \bullet c$

3. $\exists e \in H, \forall a \in H,\ a \bullet e = e \bullet a = a$

4. $\forall a \in H, \exists a^{-1} \in H,\ a \bullet a^{-1} = a^{-1} \bullet a = e.$

Karena (3) berlaku maka $H \neq \emptyset$. Demikian juga karena (1) dan (4) dipenuhi maka (b) dan (c) jelas dipenuhi.

($\Leftarrow$)

Diketahui $H \subseteq G$, maka dengan demikian sifat asosiatif dalam H dipenuhi. Karena H juga memenuhi:

1. $H \neq \emptyset$
2. Jika $a \in H$ dan $b \in H$, maka $(a * b) \in H$.
3. Jika $a \in H$, maka $a^{-1} \in H$ sehingga didapat $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$, $e \in H$, sehingga H mempunyai elemen identitas.

Terbukti H merupakan subgrup dari G. ∎

Teorema 2.1.6

Ditentukan $(G, *)$ adalah grup dan H subgrup dari G maka:

a. Jika f adalah identitas dari H dan e adalah identitas dari G, maka $f = e$.

b. Jika $a \in H$, maka inversnya dalam H adalah sama dengan inversnya dalam G.

Bukti:

a. Ambil sebarang $a \in H$, maka karena H subgrup G didapat $a \in G$. Karena f elemen identitas dalam H, maka berlaku $a * f = f * a = a$ selain itu karena e elemen identitas dari G, maka berlaku $a * e = e * a = a$. Sehingga diperoleh $a * f = a * e$ atau $f * a = e * a$ menurut Teorema 2.1.3 $f = e$.

b. Diambil sebarang $a \in H$. Misal invers a dalam G adalah a^{-1} dan invers a dalam H adalah c, maka $a \bullet a^{-1} = a^{-1} \bullet a = e$ dan $a \bullet c = c \bullet a = e$. Jadi $a \bullet c = a \bullet a^{-1}$ menurut Teorema 2.1.3 didapat $a^{-1} = c$. ■

Teorema 2.1.7

Jika $(G, \bullet)$ grup dan $a \in G$, maka $H = \{ a^n \mid n \in Z \}$ merupakan subgrup dari G.

Bukti:

1. $H \neq \varnothing$ karena $e \in G$ dan $e = a^0 \in H$
2. Ambil sebarang $x, y \in H$, maka $\exists m, n \in Z$ sedemikian sehingga $x = a^m$ dan $y = a^n$.

$x \bullet y = a^m \bullet a^n$

$= a^{m+n}$, dengan $(m + n) \in Z$, jadi diperoleh $(x \bullet y) \in H$

3. Diambil sebarang $x \in H$, maka $x = a^m$, $m \in Z$, sehingga

$x^{-1} = (a^m)^{-1}$

$= a^{m(-1)}$

$= a^{-m}$ dengan $(-m) \in Z$, jadi didapat $x^{-1} \in H$.

Menurut Teorema 2.1.5, maka H subgrup dari G. ■

Definisi 2.1.7

Jika H, K masing-masing subgrup dari grup $(G, \bullet)$, maka HK didefinisikan sebagai $\{ x \in G \mid x = h \bullet k, h \in H \wedge k \in K \}$

Teorema 2.1.8

Diketahui H dan K subgrup $(G,\bullet)$. HK subgrup dari $(G,\bullet)$ bila hanya bila $HK = KH$

Bukti

$(\Leftarrow)$

Diketahui $HK = KH$. Ini berarti jika $h \in H$ dan $k \in K$, maka $h \bullet k = k_1 \bullet h_1$ untuk suatu $k_1 \in K$, $h_1 \in H$. Akan ditunjukkan HK subgrup dari G.

- Diketahui H, K subgrup dari G, maka $e_G \in H \cap K$. Dengan demikian $HK \neq \emptyset$, sebab $e_G \bullet e_G = e_G \in HK$.
- Ambil sebarang x, y elemen HK, misal $x = h_1 \bullet k_1$ dan $y = h_2 \bullet k_2$, maka $x \bullet y = h_1 \bullet k_1 \bullet h_2 \bullet k_2 = h_1 \bullet (k_1 \bullet h_2) \bullet k_2$. Perhatikan bahwa $(k_1 \bullet h_2) \in KH$, namakan $(k_1 \bullet h_2)$ dengan $(h_3 \bullet k_3)$, $h_3 \in H$ dan $k_3 \in K$. Sehingga didapat $x \bullet y = h_1 \bullet (h_3 \bullet k_3) \bullet k_2 = (h_1 \bullet h_3)(k_3 \bullet k_2) \in HK$.

  Jadi sifat tertutup dipenuhi dalam HK.
- Misal $x = h_1 \bullet k_1$, maka $x^{-1} = (h_1 \bullet k_1)^{-1} = k_1^{-1} \bullet h_1^{-1} \in HK$, jadi $x^{-1} \in HK$.

Terbukti bahwa HK subgrup dari G.

$(\Rightarrow)$

Diketahui HK subgrup dari G, akan ditunjukkan $HK = KH$.

- Ambil sebarang $x \in HK$, maka $x^{-1} \in HK$. Ini berarti $x^{-1} = h \bullet k$, untuk suatu $h \in H$ dan $k \in K$. Karena $x = (x^{-1})^{-1}$ maka didapat $x = (h \bullet k)^{-1} = (k^{-1} \bullet h^{-1}) \in KH$.

  Jadi $HK \subseteq KH$.

- Ambil sebarang $y \in KH$, maka $y = (k*h) \in KH$ untuk suatu $k \in K$ dan $h \in H$. Perhatikan bahwa $y = (h^{-1}*k^{-1})^{-1}$ dengan $(h^{-1}*k^{-1}) \in HK$. Oleh karena HK subgrup berarti $(h^{-1}*k^{-1})^{-1} \in HK$. Jadi $y \in HK$ dan $KH \subseteq HK$.

Dengan demikian terbukti $HK = KH$. ∎

Definisi 2.1.8

Subgrup siklik dari G yang dibangun oleh $a \in G$ adalah $\{ a^i \mid i \in Z \}$. Subgrup siklik ini dinotasikan dengan $\langle a \rangle$.

Teorema 2.1.9

Jika $(G,*)$ grup dan $a \in G$ dan $\exists r, s \in Z \wedge r \neq s$, sedemikian hingga $a^r = a^s$, maka

a. Ada bilangan bulat positif terkecil n sedemikian hingga $a^n = e$.

b. Jika t adalah suatu bilangan bulat maka $a^t = e$ bila dan hanya bila n adalah faktor dari t.

c. Elemen-elemen $e = a^0, a, a^2, \ldots, a^{n-1}$ adalah elemen-elemen yang semuanya berbeda dan $\langle a \rangle = \{ e = a^0, a, a^2, \ldots, a^{n-1} \}$

Bukti:

a. Untuk membuktikan bagian (a) cukup ditunjukkan bahwa $a^t = e$, dengan t bilangan bulat positif, sebab prinsip dari himpunan bilangan bulat positif pasti memuat elemen terkecil n.

- Andaikan $r > s$, maka $(r-s) > 0$

  Dari persamaan $a^r = a^s$ bila kedua ruas dioperasikan dengan a^{-s} menjadi :

  $a^r * a^{-s} = a^s * a^{-s}$

  $a^{r-s} = e$

  Menurut prinsip di atas ada bilangan bulat positif terkecil n sedemikian hingga $a^n = e$.

- Andaikan $r < s$, maka $(s-r) > 0$

  kedua ruas dari persamaan $a^r = a^s$ dioperasikan dengan a^{-r}, maka

  $a^r * a^{-r} = a^s * a^{-r}$

  $e = a^s * a^{-r}$

  $e = a^{s-r}$

  Menurut prinsip di atas ada bilangan bulat positif terkecil n sedemikian hingga $a^n = e$.

b. ($\Leftarrow$)

Diketahui n adalah faktor dari bilangan bulat t. Akan ditunjukkan $a^t = e$.

Jika n membagi t, maka $t = nv$, dengan $n, v \in Z$ sehingga $(a^t) = (a^n)^v = e^v = e$

$(\Rightarrow)$

Diketahui $a^t = e$. Menurut algoritma pembagian $\exists p, r \in Z$ sedemikian sehingga $t = pn + r$, dengan $0 \leq r \leq n$. Maka dengan demikian diperoleh persamaan berikut $a^t = a^{pn+r} = a^{pn} * a^r = (a^n)^p * a^r = e * a^r = a^r$ jadi $a^t = a^r = e$.

Oleh karena $0 \leq r \leq n$ dan n bilangan bulat positif terkecil sedemikian hingga $a^n = e$, maka haruslah $r = 0$. Jadi $t = pn, p \in Z$ Terbukti n faktor dari t.

c. Untuk selanjutnya akan dibuktikan bahwa elemen-elemen $e = a^0, a, a^2, \ldots, a^{n-1}$ semuanya berbeda. Andaikan $a^u = a^v$, dengan $u, v \in Z$, $0 \leq u < n$ dan $0 \leq v < n$. Akan dibuktikan $u = v$. Misal $u \geq v$ maka untuk $a^u = a^v$ bila kedua ruas dioperasikan dengan a^{-v} diperoleh

$$a^u * a^{-v} = a^v * a^{-v}$$

$$a^{u-v} = e$$ dan menurut b), $n \mid (u-v)$. Akan tetapi $0 \leq (u-v) < n$, karena $0 \leq u < n$ dan $0 \leq v < n$. Jadi $n \mid (u-v)$ dan $0 \leq (u-v) < n$. Hal ini terjadi jika $(u-v) = 0$ atau $u = v$. Kemudian akan ditunjukkan $\langle a \rangle = \{e = a^0, a, a^2, \ldots, a^{n-1}\}$. Untuk sebarang perpangkatan dari a pasti berada dalam $\langle a \rangle$. Andaikan diberikan a^k, dengan k sebarang bilangan bulat. Menurut Algoritma Pembagian $\exists p, q \in Z$ sedemikian sehingga $k = pn + q$, $0 \leq q < n$ sehingga diperoleh $a^k = a^{pn+q} = a^{np} * a^q$

$= (a^n)^p \bullet a^q = (e^p) \bullet a^q = a^q$ dengan $0 \leq q < n$ yang berarti $a^k \in \{e = a^0, a, a^2, \ldots, a^{n-1}\}$. ■

Teorema 2.1.10

Diketahui $(G,\bullet)$ grup dan H himpunan berhingga yang merupakan himpunan bagian dari G, $H \neq \varnothing$. Jika sifat tertutup dalam H dipenuhi, maka H merupakan subgrup dari $(G,\bullet)$.

Bukti

Diketahui $H \subset G \wedge H \neq \varnothing$ dan sifat tertutup dipenuhi dalam H, dengan demikian menurut Teorema 2.1.5 tinggal ditunjukkan jika $a \in H$, maka $a^{-1} \in H$. Andaikan $a \in H$, perhatikan bahwa $a^2 = a \bullet a \in H$, $a^3 = a^2 \bullet a \in H$, ..., $a^m \in H$, karena sifat tertutup dipenuhi dalam H. Bila untuk sebarang bilangan bulat r,s dengan $r > s > 0$, diketahui $a^r = a^s$ maka menurut hukum kanselasi dalam G diperoleh $a^{r-s} = e$. Hal ini berarti $e \in H$.

Oleh karena r-s-1 ≥ 0, maka $a^{r-s-1} \in H$ dan diperoleh $a^{-1} = a^{r-s-1}$ sebab $a \bullet a^{r-s-1} = a^{r-s} = e$. Jadi $a^{-1} \in H$. ■

Akibat 2.1.10

Jika G grup berhingga, $H \subset G$, $H \neq \varnothing$ dan sifat tertutup dipenuhi dalam H, maka H subgrup G.

Teorema 2.1.11

Jika $(G,\bullet)$ grup dan $a \in G$, maka order dari elemen $a = |\langle a \rangle|$.

Bukti:

Andaikan o(a) berhingga yaitu o(a) = n, maka menurut Teorema 2.1.9 (3) $\langle a \rangle$ = $\{e = a^0, a, a^2, \ldots, a^{n-1}\}$. Andaikan o($a$) takhingga, a pangkat sebarang bilangan bulat positif atau negatif menjadi elemen-elemen yang berbeda dan $|\langle a \rangle|$ takhingga. ∎

Keterangan : Perhatikan bahwa kata order telah digunakan dua kali, yang pertama dalam grup dan yang kedua pada suatu elemen.

Teorema Lagrange akan memperlihatkan relasi antara kedua bilangan bulat positif itu.

Definisi 2.1.9

Diberikan H adalah suatu subgrup dari grup $(G,\bullet)$ dan $a \in G$, himpunan Ha = $\{h \bullet a \mid h \in H\}$ disebut koset kanan dari H dalam G dan himpunan aH = $\{a \bullet h \mid h \in H\}$ disebut koset kiri dari H dalam G.

Berikut ini akan diberikan teorema untuk mengetahui order dari suatu koset dalam grup berhingga. Seperti terlihat dalam teorema di bawah.

Teorema 2.1.12

Jika H adalah suatu subgrup berhingga dari grup $(G,\bullet)$ dan $a \in G$, maka $|H| = |Ha|$

Bukti :

Untuk membuktikan teorema di atas cukup dibuktikan adanya pemetaan bijektif dari H ke Ha. Didefinisikan pemetaan $\psi : H \rightarrow Ha$ dengan aturan $\psi(h) = h\bullet a$, $\forall h \in H$.

Akan dibuktikan bahwa ψ bijektif.

- Pemetaan ψ terdefinisi dengan baik sebab bila diambil sebarang h_1 dan h_2 dengan $h_1 = h_2$, maka $h_1 \bullet a = h_2 \bullet a$ sehingga $\psi(h_1) = \psi(h_2)$
- Diambil sebarang elemen $h_1, h_2 \in H \ni \psi(h_1) = \psi(h_2)$, maka $h_1\bullet a = h_2\bullet a$. Menurut hukum kansalasi dalam H diperoleh $h_1 = h_2$. Jadi ψ injektif.
- Diambil sebarang $x \in Ha$, maka $x = h\bullet a$ dengan $h \in H$. Oleh karena $h \in H$, maka $\psi(h) = h\bullet a = x$. Jadi $\forall x \in Ha, \exists h \in H$ $\psi(h) = x$ sehingga ψ pemetaan yang surjektif.
- Jadi terbukti ψ bijektif sehingga $|H| = |Ha|$. ■

Teorema 2.1.13

Diberikan $(G,\bullet)$ grup dan H subgrup dari G. Untuk $a, c \in G$, jika $aH \cap cH \neq \varnothing$, maka $aH = cH$.

Bukti:

Diketahui $aH \cap cH \neq \varnothing$, berarti $\exists d \in aH \cap cH$. Hal ini berarti $d \in aH$ dan $d \in cH$ sehingga $d = a\bullet h_1$, $h_1 \in H$ dan $d = c\bullet h_2$, $h_2 \in H$. Diperoleh persamaan $a\bullet h_1 = c\bullet h_2$ dan dari sini didapat $a \bullet h_1 \bullet h_1^{-1} = c \bullet h_2 \bullet h_1^{-1}$ sehingga $a = (c \bullet h_2 \bullet h_1^{-1})$, dengan $(h_2 \bullet h_1^{-1}) \in H$. Dengan cara sama yang didapat $c = a \bullet h_1 \bullet h_2^{-1}$, dengan $(h_1 \bullet h_2^{-1}) \in H$. Ambil sebarang $x \in aH$, maka $x = (a \bullet h_3)$, $h_3 \in H$, x ini dapat ditulis sebagai $x = (c \bullet h_2 \bullet h_1^{-1}) \bullet h_3 = (c \bullet h_5)$, $h_5 = (h_2 \bullet h_1^{-1} \bullet h_3) \in H$, didapat $x \in cH$ jadi $aH \subset cH$.

Ambil sebarang $x \in cH$, maka $x = c \bullet h_3$, $h_3 \in H$. Padahal $x = c \bullet h_3 = (a \bullet h_1 \bullet h_2^{-1} \bullet h_3)$, dengan $(h_2 \bullet h_1^{-1} \bullet h_3) \in H$, didapat $x \in aH$. Jadi $cH \subset aH$.

Terbukti bahwa $aH = cH$. ■

Teorema 2.1.14

Jika H subgrup dari grup $(G, \bullet)$ dan $a, b \in G$, maka keempat pernyataan berikut ekuivalen:

1. $(a \bullet b^{-1}) \in H$
2. $a = h \bullet b$, untuk suatu $h \in H$
3. $a \in Hb$
4. $Ha = Hb$

Bukti:

Cara membuktikan teorema ini dengan cara: (1) ⇒ (2), (2) ⇒ (3), (3) ⇒ (4), (4) ⇒ (1)

(1) ⇒ (2)

Diketahui $(a \bullet b^{-1}) \in H$, akan ditunjukkan $a = (h \bullet b)$ dengan suatu $h \in H$. Oleh karena $a \bullet b^{-1} \in H$, maka $a \bullet b^{-1} = h$, untuk suatu $h \in H$.

Didapat $(a \bullet b^{-1}) \bullet b = h \bullet b$ dari sini diperoleh

$(a \bullet b^{-1}) \bullet b = h \bullet b$

$a \bullet (b \bullet b^{-1}) = h \bullet b$ (assosiatif dalam H)

$a = h \bullet b$

$(2) \Rightarrow (3)$

Perhatikan $Hb = \{h \bullet b \mid h \in H\}$. Karena $a = h \bullet b$, maka $a \in Hb$

$(3) \Rightarrow (4)$

- Terlebih dahulu dibuktikan $Ha \subseteq Hb$.

  Ambil sebarang $x \in Ha$, maka $x = h \bullet a$, untuk suatu $h \in H$. Karena $a \in Hb$, maka $a = h_1 \bullet b$, untuk suatu $h_1 \in H$ sehingga diperoleh $x = h \bullet a = h \bullet h_1 \bullet b = (h \bullet h_1) \bullet b = h_2 \bullet b$, dengan $h_2 = (h \bullet h_1) \in H$. Jadi $x \in Hb$ sehingga terbukti $Ha \subset Hb$

- Selanjutnya dibuktikan $Hb \subseteq Ha$. Ambil sebarang $x \in Hb$, maka $x = h_1 \bullet b$ untuk suatu $h_1 \in H$, jadi $b = h_1^{-1} \bullet a$ didapat $x = h \bullet (h_1 \bullet a) = (h \bullet h_1) \bullet a = h_3 \bullet a$ dengan $h_3 = h \bullet h_1$. Jadi $x \in Ha$ sehingga didapat pula $Hb \subseteq Ha$.

Terbukti bahwa $Hb = Ha$.

$(4) \Rightarrow (1)$

Perhatikan bahwa $a \in Ha$, padahal diketahui $Ha = Hb$, jadi $a \in Hb$ sehingga $a = h \bullet b$, untuk suatu $h \in H$. Karena $a = (h \bullet b)$ maka $h = (a \bullet b^{-1})$. Jadi $(a \bullet b^{-1}) \in H$. ∎

Teorema 2.1.15

Jika $(G,\bullet)$ grup dan H subgrup dari G, maka $Ha = H$ bila dan hanya bila $a \in H$

Bukti:

($\Rightarrow$)

Diketahui $Ha = H$. Akan ditunjukkan $a \in H$. Karena $Ha = H$, maka $(h \circ a) \in H$ $\forall h \in H$. Padahal $e \in H$ sehingga $e \circ a = a \in H$.

($\Leftarrow$)

Diketahui $a \in H$. Akan ditunjukkan $Ha = H$. Hal ini berarti membuktikan $Ha \subseteq H$ dan $H \subseteq Ha$.

- Ambil sebarang $x \in Ha$, berarti $\exists h_1 \in H$ sedemikian sehingga $x = h_1 \circ a$. Karena $a \in H$ dan H subgrup maka sifat tertutup dipenuhi, jadi $x = (h_1 \circ a) \in H$. Terbukti $Ha \subset H$.
- Ambil sebarang $a \in H$. Karena H subgrup maka $\exists e \in H$ $\forall a \in H$ sedemikian sehingga $a = a \circ e = e \circ a$. Jadi $a = e \circ a$ anggota Ha. Terbukti $H \subset Ha$. ∎

Teorema 2.1.16

Jika $(G, \circ)$ dan H subgrup dari G, untuk $a, b \in G$ didefinisikan $a \sim b$ jika $a \circ b^{-1} \in H$, maka "~" merupakan relasi ekuivalensi.

Bukti

Diketahui $(G, \circ)$ grup dan H subgrup dari G. Untuk $a, b \in G$ didefinisikan $a \sim b$ jika $a \circ b^{-1} \in H$. Karena $e \in H$ dan $e = a \circ a^{-1}$, yang berarti $a \sim a$, sifat refleksif dipenuhi.

Jika $(a \circ b^{-1}) \in H$, karena H subgrup, maka $(a \circ b^{-1})^{-1} \in H$, padahal $(a \circ b^{-1})^{-1} = (b^{-1})^{-1} \circ (a)^{-1} = b \circ a^{-1}$. Jadi $b \circ a^{-1} \in H$ dan $b \sim a$ sifat simetri dipenuhi. Jika $a \sim b$ dan $b \sim c$, maka $a \circ b^{-1} \in H$

dan $b \bullet c^{-1} \in H$. Diperoleh $(a \bullet b^{-1}) \bullet (b \bullet c^{-1}) = a \bullet c^{-1}$, dengan $(a \bullet c^{-1}) \in H$, oleh karenanya $a \sim c$ sifat transitif dipenuhi. Terbukti "~" relasi ekuivalensi pada G. ■

Jika "~" adalah relasi ekuivalensi pada G, maka $[a]$ klas dari a didefinisikan dengan $[a] = \{ b \in G \mid b \sim a \}$.

Teorema 2.1.17

Diberikan $(G, \bullet)$ grup, H subgrup G dan untuk $a, b \in G$ didefinisikan $a \sim b$ jika $(a \bullet b^{-1}) \in H$ dan bila $Hb = \{h \bullet b \mid h \in H\}$, maka $[b] = Hb$.

Bukti

- Pertama akan ditunjukkan $[b] \subset Hb$. Ambil sebarang $a \in [b]$, maka $a \sim b$ berlaku $a \bullet b^{-1} \in H$. Sehingga $\exists h \in H$ sedemikian sehingga $a \bullet b^{-1} = h$. Perhatikan bahwa $a = h \bullet b$. Tampak bahwa $a \sim b$, maka $a = h \bullet b$. Terbukti $[b] \subset Hb$.
- Selanjutnya akan ditunjukkan $Hb \subset [b]$. Ambil sebarang $a \in Hb$, maka $a = k \bullet b$, $k \in H$. Perhatikan bahwa $a \bullet b^{-1} = (k \bullet b) \bullet b^{-1} = k$. Tampak bahwa $a \sim b$ bila $a \in Hb$. Terbukti $Hb \subset [b]$.

Dengan demikian didapat $[b] = Hb$.

Perhatikan bahwa berdasarkan atas teorema-teorema di atas yaitu koset-koset dari H dalam G membentuk partisi dari G. Dengan kata lain $G = \bigcup_{a \in G} Ha$ dan juga jika

$Ha \neq Hc$, maka Ha dan Hc merupakan dua himpunan yang saling asing. Dengan demikian sudah dapat dibuktikan *Teorema Lagrange* di bawah ini.

Teorema 2.1.18 (*Teorema Lagrange*)

Order dari setiap subgrup dalam sebuah grup berhingga selalu merupakan faktor dari order grupnya.

Bukti:

Andaikan G grup berhingga, H subgrup dari G. Menurut Teorema 2.1.17 koset-koset kanan dari H dalam G merupakan partisi dalam G, yaitu $P = \{ Ha \mid a \in G \}$. Karena G berhingga maka P juga berhingga, misalkan $P = \{ Ha_1, Ha_2, Ha_3, \ldots, Ha_k \}$. P partisi dari G, maka $G = Ha_1 \cup Ha_2 \cup Ha_3 \cup \ldots \cup Ha_k$ sehingga order dari G ini dapat diturunkan menjadi

$$|G| = |Ha_1 \cup Ha_2 \cup Ha_3 \cup \ldots \cup Ha_k|$$

$$= |Ha_1| + |Ha_2| + |Ha_3| + \ldots + |Ha_k|$$

$$= |H| + |H| + |H| + |H| + \ldots + |H| \qquad \text{(menurut Teorema 2.1.12)}$$

$$= k\,|H|.$$

Jadi $|G| = k\,|H|$ ■

Bilangan bulat positif k di atas disebut indeks dari H dalam G dan dinotasikan dengan $[G : H]$. Dengan demikian indeks H dalam G menyatakan banyaknya koset-

koset yang terbentuk dan perhatikan bahwa $[G: H] = \frac{|G|}{|H|}$. Akibat dari Teorema Lagrange ini ialah teorema-teorema berikut ini:

Teorema 2.1.19

1. Jika G adalah grup berhingga dan $a \in G$, maka $o(a)$ merupakan faktor dari $|G|$.
2. Grup G dengan order prima tidak mempunyai subgrup lain kecuali $\{e\}$ dan G sendiri.
3. Setiap grup dengan order bilangan prima adalah grup siklik.

Bukti:

1. Menurut Teorema 2.1.7 himpunan $H = \langle a \rangle$ merupakan subgrup dari G dan menurut Teorema 2.1.11 $o(a) = |\langle a \rangle|$. Menurut Teorema Lagrange $|\langle a \rangle|$ merupakan faktor dari $|G|$. Jadi $o(a)$ merupakan faktor dari $|G|$.
2. Misalkan G dengan order prima p atau $|G| = p$. Maka p tidak punya faktor lain kecuali 1 dan p sendiri. Jadi G tidak punya subgrup kecuali yang berorder satu, yaitu $\{e_g\}$ dan berorder p yaitu G sendiri.
3. Jika H subgrup G, maka menurut Teorema Lagrange $|H|$ membagi $|G|$. Oleh karena $|G| = p$ adalah prima, maka $|H|$ yang mungkin 1 atau p. Sehingga berakibat jika $H \neq \{e\}$, maka $H=G$. Jika $a \in G$, $a \neq e$, maka perpangkatan dari a membentuk subgrup terhadap grup G dan tidak sama dengan $\{e\}$. Sehingga subgrup ini tidak lain adalah

G sendiri. Dengan kata lain $\forall x \in G$ berbentuk $x = a^i$. Oleh karena itu G adalah siklik. ■

Teorema 2.1.20

Jika H dan K subgrup berhingga dari grup $(G,\bullet)$, maka $|HK| = \dfrac{|H||K|}{|H \cap K|}$

Bukti

Perhatikan bahwa HK merupakan gabungan dari koset-koset kiri dari K, yaitu $HK = \bigcup_{h \in H} hK$. Karena setiap koset dari K mempunyai $|K|$ elemen, maka hal ini cukup untuk menemukan jumlah koset yang berbeda yang berbentuk hK, $h \in H$. Namun $h_1K = h_2K$ dengan $h_1, h_2 \in H$ bila dan hanya bila $(h_2^{-1} \bullet h_1) \in K$. Jadi $h_1K = h_2K$ bila dan hanya bila $(h_2^{-1} \bullet h_1) \in H \cap K$. Sehingga $(h_2^{-1} \bullet h_1) \in H \cap K$ bila hanya bila $h_1(H \cap K) = h_2(H \cap K)$. Jadi banyaknya koset-koset yang berbeda dan berbentuk $(h \bullet k)$, $h \in H$ merupakan banyaknya koset-koset yang berbeda $h(H \cap K)$, $h \in H$. Menurut Teorema Lagrange, jumlah seluruhanya akan memenuhi persamaan $\dfrac{|H|}{|H \cap K|}$. Jadi HK terdiri dari $\dfrac{|H|}{|H \cap K|}$ koset-koset yang berbeda dari K dan masing-masing mempunyai $|K|$ elemen. Sehingga $|HK| = \dfrac{|K||H|}{|H \cap K|}$. ■

2. 2 Subgrup Normal, Grup Faktor dan Homomorfisma

Pada subbab ke-dua ini akan dibahas tentang subgrup normal, grup faktor dan homomorfisma. Definisi-definisi serta teorema-teorema untuk masing-masing topik di atas tidak semuanya dibahas disini. Pembahasan tentang topik-topik homomorfisma, subgrup normal dan grup faktor mengacu pada materi-materi yang berkaitan dengan bab selanjutnya.

Definisi 2.2.1

Diberikan $(G, \bullet)$ grup dan H subgrup dari G, maka H disebut subgrup normal G bila dan hanya bila $xH = Hx$, $\forall x \in G$ dan dinotasikan dengan $H \triangleleft G$.

Teorema 2.2.1

Diberikan $(G,\bullet)$ grup dan H subgrup dari G, maka $H \triangleleft G$ bila hanya bila $(\forall x \in G)(\forall h \in H)\ (x \bullet h \bullet x^{-1}) \in H$

Bukti:

$(\Rightarrow)$

Diketahui $(G,\bullet)$ grup dan $H \triangleleft G$, akan ditunjukkan $(\forall x \in G)(\forall h \in H)(x \bullet h \bullet x^{-1}) \in H$.

Ambil sebarang $x \in G$ dan $h \in H$. Perhatikan bahwa $(x \bullet h) \in xH$, karena $H \triangleleft G$, maka $x \bullet h \in Hx$. Sehingga $\exists h_1 \in H$ sedemikian hingga $x \bullet h = h_1 \bullet x$. Bila kedua ruas dioperasikan dengan x^{-1} dari kanan, maka diperoleh $(x \bullet h) \bullet x^{-1} = (h_1 \bullet x) \bullet x^{-1}$.

$$(x \bullet h \bullet x^{-1}) = h_1 \bullet (x \bullet x^{-1})$$

$$x \bullet h \bullet x^{-1} = h_1 .$$

Terbukti $(\forall x \in G)(\forall h \in H)(x \bullet h \bullet x^{-1}) \in H$ ▩

$(\Leftarrow)$

Diketahui $(\forall x \in G)(\forall h \in H)(x \bullet h \bullet x^{-1}) \in H$. Akan ditunjukkan $H \triangleleft G$.

- Ambil sebarang $t \in (xH)$, maka $(\exists h_1 \in H)$ sedemikian sehingga $t = x \bullet h_1$.

  Bila dioperasikan dengan x^{-1} dalam persamaan $t = x \bullet h_1$, maka $t \bullet x^{-1} = (x \bullet h_1) \bullet x^{-1} = x \bullet h_1 \bullet x^{-1} \in H$. Tampak bahwa $(t \bullet x^{-1}) \in H$ namakan $h_2 = t \bullet x^{-1}$.

  Padahal $h_2 \bullet x = t \bullet x^{-1} \bullet x = t \in Hx$. Jadi $t \in Hx$ dan berakibat $xH \subset Hx$.

- Ambil sebarang $m \in Hx$, maka $\exists h_2 \in H$ sedemikian hingga $m = h_2 \bullet x$. Akan ditunjukkan $m \in xH$. Bila dioperasikan dengan x^{-1} dari kiri dalam persamaan $m = h_2 \bullet x$, maka diperoleh $x^{-1} \bullet m = x^{-1} \bullet h_2 \bullet x$. Sebut saja $x^{-1} \bullet m$ dengan h_3. Padahal $x \bullet h_3 = (x \bullet x^{-1}) \bullet m = m$, berarti $m \in xH$. Jadi $Hx \subset xH$.

Terbukti $Hx = xH$. ▩

Teorema 2.2.2

Diberikan G suatu grup dan A subgrup G. Jika $b \in G$ adalah elemen berorder p, untuk p bilangan prima dan $b \notin A$, maka $A \cap \langle b \rangle = \{e\}$

Bukti

Diketahui $b \in G$ dan $b^p = e$ sehingga dapat dibentuk subgrup siklik yang dibangun oleh b, misal B. Oleh karena order dari elemen b berhingga yaitu p, maka menurut Teorema 2.1.11 $|B| = p$. Diketahui A, B subgrup dari G, maka $A \cap B$ juga subgrup dari B. Sehingga menurut Teorema Lagrange $|A \cap B| \,\big|\, |B|$. Oleh karena $|B| = p$, p bilangan prima, maka order dari $|A \cap B| = p$ dan $A \cap B \subseteq B$. Akan tetapi jika $|A \cap B| = p$, maka $A \cap B = B$ dan elemen $b \in A$. Hal ini bertentangan dengan yang diketahui bahwa $b \notin A$.

Jadi yang mungkin $|A \cap B| = 1$ dan didapat $A \cap B = \{e\}$ ∎

Teorema 2.2.3

Jika $(G,\circ)$ grup, $N \triangleleft G$ dan $G/N = \{Na \mid a \in G\}$ menyatakan himpunan semua koset kanan N dalam G, maka G/N merupakan grup terhadap operasi yang didefinisikan sebagai berikut: $(Na)\circ(Nb) = N(a\circ b)$, $\forall Na, Nb \in G/N$.

Bukti:

- Terlebih dahulu akan ditunjukkan bahwa operasi dalam G/N terdefinisi dengan baik. Berarti jika $Na_1 = Na_2$ dan $Nb_1 = Nb_2$, maka akan ditunjukkan $N(a_1\circ b_1) = N(a_2\circ b_2)$. Menurut Teorema 2.1.14 $Na = Nb$ bila hanya bila $a = n\circ b$, untuk $n \in N$. Dengan demikian jika $Na_1 = Na_2$, maka $a_1 = n_1\circ a_2$, $n_1 \in N$ dan jika $Nb_1 = Nb_2$, maka $b_1 = n_2\circ b_2$, $n_2 \in N$. Perhatikan bahwa $a_1\circ b_1 = (n_1\circ a_2)\circ(n_2\circ b_2)$

$$= (n_1\circ(a_2\circ n_2)\circ b_2)$$

$$= (n_1 \bullet (n_3 \bullet a_2) \bullet b_2)$$

$$= (n_1 \bullet n_3) \bullet (a_2 \bullet b_2)$$

$$= n_4 \bullet (a_2 \bullet b_2)$$

Tampak bahwa $(a_1 \bullet b_1) \in N(a_2 \bullet b_2)$, maka $N(a_1 \bullet b_1) = N(a_2 \bullet b_2)$

- Akan dibuktikan sifat tertutup dipenuhi dalam G/N. Ambil sebarang Na, $Nb \in (G/N)$, untuk suatu $a,b \in G$. Perhatikan bahwa $(Na) \bullet (Nb) = N(a \bullet b)$. Karena G grup, maka $(a \bullet b) \in G$ dan didapat $N(a \bullet b) \in (G/N)$.
- Akan ditunjukkan sifat assosiatif. Ambil sebarang $Na, Nb, Nc \in G/N$ untuk a, b, $c \in G$. Perhatikan bahwa $((Na) \bullet (Nb)) \bullet Nc = (N(a \bullet b)) \bullet Nc = N(a \bullet b \bullet c)$.

  Karena G grup, maka $N(a \bullet b \bullet c) = N(a \bullet (b \bullet c)) = (Na) \bullet (N(b \bullet c)) = Na \bullet (Nb \bullet Nc)$. Terbukti bahwa sifat asosiatif dipenuhi dalam G/N.
- Pandang $N = Ne \in G/N$, jika sebarang $Na \in G/N$, $a \in G$, maka $(Na) \bullet (Ne) = N(a \bullet e) = Na$ dan juga $(Ne) \bullet (Na) = N(e \bullet a) = Na$. Berarti Ne merupakan elemen identitas dalam G/N.
- Ambil sebarang $Na \in (G/N)$ dengan $a \in G$. Karena G grup, maka $a^{-1} \in G$ dan $Na^{-1} \in (G/N)$. Padahal $(Na) \bullet (Na^{-1}) = N(a \bullet a^{-1}) = Ne$ dan $(Na^{-1}) \bullet (Na) = N(a^{-1} \bullet a) = Ne$. Oleh karena itu Na^{-1} invers dari Na dalam G/N.

Terbukti G/N adalah grup. ■

Teorema 2.2.4

Jika G grup berhingga dan $N \lhd G$, maka $|G/N| = \dfrac{|G|}{|N|}$

Bukti

Diketahui G grup berhingga dan $N \lhd G$, maka banyaknya koset-koset kanan dari N dalam G menurut Teorema Lagrange diberikan dengan $|G/N| = \dfrac{|G|}{|N|}$. Padahal ini merupakan order dari G/N, yaitu menyatakan banyaknya koset kanan dari N dalam G.

Jadi $|G/N| = \dfrac{|G|}{|N|}$. ■

Definisi 2.2.2

Jika $(G,\bullet)$ dan (H,o) grup, maka suatu fungsi $\phi : G \to H$ dikatakan suatu homomorfisma bila dan hanya bila $\phi(a \bullet b) = \phi(a) o \phi(b), \forall a,b \in G$

Contoh 2.2.2

Diberikan $(A,\bullet)$ dan (B,o) grup dan $(AxB,*)$ dengan operasi "*" yang didefinisikan $(a_1,b_1)*(a_2,b_2) = (a_1 \bullet a_2, b_1 \text{o} b_2)$ untuk $(a_1,b_1),(a_2,b_2) \in AxB$, juga grup dan didefinisikan $\pi_1 : AxB \to A$ dengan $\pi_1[(a,b)] = a$. Ambil $(a_1,b_1),(a_2,b_2) \in AxB$, maka $\pi_1[(a_1,b_1)] = a_1$ dan $\pi_1[(a_2,b_2)] = a_2$. Akan dibuktikan $\pi_1[(a_1,b_1)*(a_2,b_2)] = \pi_1[(a_1,b_1)] \bullet \pi_1[(a_2,b_2)]$. Perhatikan bahwa: $\pi_1[(a_1,b_1)*(a_2,b_2)] = \pi_1[(a_1 \bullet a_2, b_1 \text{o} b_2)]$

$$= a_1 \bullet a_2 = \pi_1[(a_1,b_1)] \bullet \pi_1[(a_2,b_2)]$$

Terbukti π_1 suatu homomorfisma.

Definisi 2.2.3

Jika $(G,*)$, $(H,\circledast)$ adalah grup dan diberikan $\delta :(G,*) \rightarrow (H,\circledast)$ suatu homomorfisma, maka

a. Jika δ merupakan fungsi surjektif, maka δ disebut epimorfisme.

b. Jika δ merupakan fungsi injektif, maka δ disebut monomorfisme.

c. Jika δ sekaligus epimorfisme dan monomorfisme, maka δ disebut isomorfisme.

Apabila $\delta:(G,*) \rightarrow (H,\circledast)$ isomorfisme, maka G dikatakan isomorfik dengan H dan dinotasikan dengan $(G,*) \approx (H,\circledast)$.

Teorema 2.2.5

Jika $(G,*)$ dan $(H,\circledast)$ grup dan e_G elemen identitas dari G dan e_H elemen identitas dari H serta $\delta:(G,*)\rightarrow (H,\circledast)$ homomorfisme, maka akan berlaku:

a. $\delta(e_G) = e_H$

b. $\delta(a^{-1}) = (\delta(a))^{-1}$

c. $\delta(a^k) = (\delta(a))^k$, untuk suatu $k \in Z$

d. $\delta(G)$ subgrup dalam H.

e. Jika δ injektif, maka $G \approx \delta(G)$.

Bukti:

a. Diketahui $(G,*)$ grup dan $e_G \in G$ sehingga $e_G * e_G = e_G$. Karena δ merupakan homomorfisma dari G ke H didapat $\delta(e_G * e_G) = \delta(e_G)$ dan $\delta(e_G * e_G) = \delta(e_G) \circ \delta(e_G)$. Dari persamaan di atas diperoleh $\delta(e_G) \circ \delta(e_G) = \delta(e_G)$. Perhatikan bahwa $\delta(e_G) \in H$, maka didapat $\delta(e_G) \circ e_H = \delta(e_G)$. Menurut hukum kansalasi untuk persamaan $\delta(e_G) \circ \delta(e_G) = \delta(e_G) \circ e_H$, maka diperoleh $\delta(e_G) = e_H$.

b. Ambil sebarang $a \in G$, maka $\exists a^{-1} \in G$ sedemikian sehingga $\delta(a * a^{-1}) = \delta(e_G) = e_H$.

Oleh karena δ homomorfisma berlaku pula:

$$\begin{aligned}\delta(a * a^{-1}) &= \delta(a) \circ \delta(a^{-1}) \\ &= \delta(a) \circ (\delta(a))^{-1} \\ &= e_H\end{aligned}$$

Padahal $a \in G$ sehingga $\delta(a) \in H$ dan berarti $(\delta(a))^{-1} \in H$, sehingga dengan hukum kansalasi dalam persamaan $\delta(a) \circ \delta(a^{-1}) = \delta(a) \circ (\delta(a))^{-1}$ diperoleh $\delta(a^{-1}) = (\delta(a))^{-1}$.

c. Untuk membuktikan $\delta(a^k) = (\delta(a))^k$, untuk suatu $k \in Z$, akan dibuktikan untuk kasus $k > 0$ dan $k < 0$

- Untuk kasus : $k > 0$. Ambil $a \in G$, dibuktikan $\delta(a^k) = (\delta(a))^k$

$$\begin{aligned}\delta(a^k) &= \delta(\underbrace{a * a * a * \ldots * a}_{k \textit{ faktor}}) \\ &= \underbrace{\delta(a) \circ \delta(a) \circ \ldots\ldots \delta(a)}_{k \textit{ faktor}} \\ &= (\delta(a))^k\end{aligned}$$

- Untuk kasus : $k < 0$, maka misal $k = (-p), p \in Z^+$.

  Ambil sebarang $a \in G$, maka $\delta(a^k) = \delta(a^{-p})$

$$= \delta(a^{-p})$$

$$= \delta(\underbrace{a^{-1} * a^{-1} * a^{-1} * \ldots * a^{-1}}_{p\ faktor}) \qquad \text{(homomorfisma)}$$

$$= \underbrace{\delta(a^{-1}) \circledast \delta(a^{-1}) \circledast \ldots \circledast \delta(a^{-1})}_{p\ faktor}$$

$$= \underbrace{(\delta(a))^{-1} \circledast (\delta(a))^{-1} \circledast \ldots \circledast (\delta(a))^{-1}}_{p\ faktor} = (\delta(a)^{-1})^p$$

$$= (\delta(a))^{-p} = (\delta(a))^k$$

d. $\delta(G) = \{y \in H \mid \exists x \in G, y = \delta(x)\}$. Perhatikan bahwa $\delta(G) \neq \varnothing$, sebab $\delta(e_G) = e_H \in H$ sehingga menurut a) $e_H = \delta(e_G)$ dengan $e_G \in G$. Jadi $e_H \in \delta(G)$. Ambil sebarang x, $y \in \delta(G)$, maka $\exists a, b \in G$ sedemikian sehingga $x = \delta(a)$ dan $\delta(b) = y$. Akan dibuktikan $(x \circledast y) \in \delta(G)$. Perhatikan bahwa $x \circledast y = \delta(a) \circledast \delta(b)$, oleh karena δ homomorfisma di dapat $x \circledast y = \delta(a * b)$ dengan $(a * b) \in G$. Sehingga dapat ditemukan $\delta(a * b) \in \delta(G)$.

Jadi terbukti bahwa $(x \circledast y) \in \delta(G)$.

Ambil sebarang $x \in \delta(G)$, maka $x = \delta(a)$ untuk suatu $a \in G$. Akan dibuktikan $x^{-1} \in \delta(G)$ yaitu harus ditunjukkan $(\exists b \in G)$, $x^{-1} = \delta(b)$. Oleh karena $x = \delta(a)$, maka $x^{-1} = (\delta(a))^{-1} = \delta(a^{-1})$. Perhatikan G grup dan $a \in G$, maka $a^{-1} \in G$. Jadi dapat ditemukan $b \in G$ dengan $b = a^{-1}$ sedemikian sehingga $\delta(b) = x^{-1}$, hal ini berarti $x^{-1} \in \delta(G)$ dan $\delta(G)$ disebut bayangan homomorfisma dari G.

e. Telah diketahui bahwa δ adalah homomorfisme yang injektif dari G ke $\delta(G)$. Ambil sebarang $y \in \delta(G)$. Oleh karena $\delta(G) \subset H$, $\exists g_1 \in G$ sedemikian sehingga $y = \delta(g_1)$ sehingga δ merupakan pemetaan yang surjektif. Oleh karena itu $\delta: G \to \delta(G)$ merupakan suatu isomorfisma. ■

Teorema 2.2.6

Jika $(G, \bullet)$ isomorfik dengan $(H, *)$ dan G Abelian maka H juga Abelian

Bukti:

Misal $\delta: G \to H$ adalah isomorfisma. Akan ditunjukkan bahwa $x*y = y*x$, $\forall x, y \in H$.

Ambil sebarang $x, y \in H$ maka $(\exists g_1, g_2 \in G)$ $x = \delta(g_1)$ dan $y = \delta(g_2)$.

Kemudian perhatikan bahwa
$$\begin{aligned} x * y &= \delta(g_1) * \delta(g_2) \\ &= \delta(g_1 \bullet g_2) \\ &= \delta(g_2 \bullet g_1) \\ &= \delta(g_2) * \delta(g_1) = y * x. \end{aligned}$$

Oleh karena $x * y = y * x$, $\forall x, y \in H$ maka H abelian. ■

Definisi 2.2.4

Jika $(G, \bullet)$ dan $(H, *)$ grup dan $\beta: G \to H$ suatu homomorfisma, maka kernel dari β adalah himpunan semua $a \in G$ sehingga $\beta(a) = e_H$. Kernel dari β dinotasikan dengan $ker\beta$. Jadi $ker\beta = \{ a \in G \mid \beta(a) = e_H \}$.

Teorema 2.2.7

Diketahui $(G,\bullet)$ dan $(H,*)$ grup jika $\delta: G \to H$ homomorfisme, maka $ker\delta \lhd G$

Bukti

Dari Definisi 2.2.4 $Ker\delta = \{x \in G \mid \delta(x) = e_H\}$

- Perhatikan bahwa $ker\delta \neq \varnothing$, sebab $e_G \in G$ dengan $\delta(e_G) = e_H$ sehingga $e_G \in ker\delta$.
- Kemudian akan ditunjukkan sifat tertutup dipenuhi dalam $ker\delta$.

  Ambil sebarang $x, y \in ker\delta$, maka $\delta(x) = e_H$ dan $\delta(y) = e_H$. Perhatikan bahwa $\delta(x \bullet y) = \delta(x) * \delta(y) = e_H * e_H = e_H$ dengan $x \bullet y \in G$. Jadi terbukti bahwa $(x \bullet y) \in ker\ \delta$
- Langkah berikutnya akan ditunjukkan jika $x \in ker\delta$, maka $x^{-1} \in ker\delta$

  Ambil sebarang $x \in ker\delta$, maka $\delta(x) = e_H$.

  Karena G grup, maka $x^{-1} \in G$ dan $\delta(x^{-1}) = (\delta(x))^{-1} = (e_H)^{-1} = e_H$. Jadi $x^{-1} \in ker\delta$

  Dengan demikian terbukti $ker\delta$ subgrup dari G menurut Teorema 2.1.5.
- Terakhir akan ditunjukkan kenormalannya.

  Ambil sebarang $g \in G$ dan $k \in ker\delta$. Karena $k \in ker\delta$, maka $\delta(k) = e_H$ dengan $k \in G$.

  Perhatikan bahwa $\delta(g \bullet k \bullet g^{-1}) = \delta(g) * \delta(k) * \delta(g^{-1})$

  $= \delta(g) * e_H * \delta(g^{-1})$

  $= \delta(g) * (\delta(g))^{-1} = e_H$

  Oleh karena $g \bullet k \bullet g^{-1} \in G$ dan $\delta(g \bullet k \bullet g^{-1}) = e_H$, maka $g \bullet k \bullet g^{-1} \in ker\delta$.

Terbukti bahwa $ker\delta \lhd G$. ■

Teorema 2.2.8

Diberikan $(G,\bullet)$ grup dan $N \lhd G$, maka grup faktor G/N merupakan bayangan homomorfisme dari grup G, yaitu pemetaan $\eta : G \to G/N$ dengan aturan $\eta(a) = Na$, $\forall a \in G$ dan $ker\ \eta = N$.

Bukti

- Akan ditunjukkan bahwa pemetaan η terdefinisi dengan baik. Ambil sebarang a_1, $a_2 \in G$ sedemikian sehingga $a_1 = a_2$. Oleh karena $a_1 = a_2$ padahal $a_1 \in Na_1$, maka diperoleh $a_2 \in Na_1$. Sehingga $Na_1 = Na_2$ atau $\eta(a_1) = \eta(a_2)$.
- Ambil sebarang $a,b \in G$ sedemikian sehingga $\eta(a) = Na$ dan $\eta(b) = Nb$ dengan Na, $Nb \in G/N$. Perhatikan bahwa $\eta(a \bullet b) = N(a \bullet b) = (Na)\bullet(Nb) = \eta(a)\bullet\eta(b)$.

  Terbukti bahwa η homomorfisma dari G ke G/N.
- Untuk sebarang $Na \in G/N$, maka $\exists a \in G$ dan $\eta(a) = Na$. Jadi η surjektif. Terbukti bahwa G/N merupakan bayangan homomorfisma.
- $Ker\ \eta = \{x \in G \mid \eta(x) = e_{G/N}\} = \{x \in G \mid \eta(x) = N\} = \{x \in G \mid Nx = N\} = \{x \in G \mid x \in N\}$.

  Jadi terbukti $ker\ \eta = N$. ■

Teorema 2.2.9 (*Teorema Fundamental Homomorfisma*)

Diberikan δ homomorfisma surjektif dari $(G,\bullet)$ ke $(H,*)$ dengan $Ker\delta = K$, maka pemetaan $\beta: G/K \to H$ dengan aturan $\beta(Ka) = \delta(a)$, $\forall Ka \in G/K$ merupakan homomorfisma . Dengan kata lain $H \approx G/K$

Bukti

Diketahui pemetaan $\beta: G/K \to H$ dengan $\beta(Ka) = \delta(a)$, $\forall (Ka) \in G/K$

- Pertama akan ditunjukkan β terdefinisi dengan baik.

  Ambil sebarang Ka, $Kb \in G/K$ sedemikian sehingga $Ka = Kb$. Oleh karena $Ka = Kb$, maka $a = k \bullet b$, untuk suatu $k \in K$. Sehingga didapat $\delta(a) = \delta(k \bullet b) = \delta(k) * \delta(b)$. Karena $k \in ker\,\delta$, maka $\delta(k) = e_H$. Jadi didapat $\delta(a) = \delta(b)$, terbukti pemetaan β terdefinisi dengan baik.

- Akan ditunjukkan β surjektif dari G/K ke H, ambil sebarang $x \in H$. Oleh karena $\delta : G \to H$ surjektif, maka $\exists a \in G$ sedemikian sehingga $\delta(a) = x$. Perhatikan bahwa $a \in G$, maka dapat dibentuk $Ka \in G/K$ sedemikian sehingga $\beta(Ka) = \delta(a) = x$.

  Terbukti β surjektif dari G/K ke H.

- Langkah selanjutnya akan ditunjukkan β injektif.

  Ambil sebarang Ka, $Kb \in G/K$ sedemikian sehingga $\beta(Ka) = \beta(Kb)$, maka berlaku $\delta(a) = \delta(b)$. Sehingga $e_H = \delta(a) * (\delta(b))^{-1} = \delta(a) * \delta(b^{-1}) = \delta(a \bullet b^{-1})$.

  Akibatnya $(a \bullet b^{-1}) \in K$ sehingga didapat $Ka = Kb$. Terbukti β injektif dari G/K ke H.

- Akhirnya akan ditunjukkan β homomorfisma.

  Ambil sebarang Ka, $Kb \in G/K$, maka $\beta((Ka) \bullet (Kb)) = \beta(K(a \bullet b)) = \delta(a \bullet b)$. Pemetaan δ homomorfisma sehingga didapat $\delta(a \bullet b) = \delta(a) * \delta(b) = \beta(Ka) * \beta(Kb)$.

  Terbukti bahwa β pemetaan homomorfisma dari G/K ke H. ∎

Teorema 2.2.10

Diberikan $(G,\bullet)$ grup, $N \triangleleft G$ dan $a \in G$ berorder berhingga. Jika Na dalam G/N mempunyai order m maka $m \mid o(a)$.

Bukti

Andaikan $o(a) = n$. Didefinisikan pemetaan $\pi : G \to G/N$ dengan aturan $\pi(a) = Na$, $\forall a \in G$. Menurut Teorema 2.2.5 berlaku $\pi(a^n) = [\pi(a)]^n$ dan didapat

$$= \underbrace{\pi(a) \bullet \ldots \bullet \pi(a)}_{n}$$

$$= \underbrace{Na \bullet \ldots \bullet Na}_{n} = (Na)^n$$

Dipihak lain $\pi(a^n) = \pi(e) = N$. Sehingga dari kedua persamaan di atas diperoleh $(Na)^n = N$ dengan N elemen satuan dalam G/N.

Jadi bila $|Na| = m$, maka $m \mid n$. ∎

Teorema 2.2.11 (*Teorema Homomorfisma Kedua*)

Diberikan δ suatu homomorfisma dari $(G,\bullet)$ ke $(G',*)$ dengan $ker\,\delta = K$ dan H' subgrup G'.

1. Jika $H = \{a \in G \mid \delta(a) \in H'\}$, maka H subgrup G dengan $K \subset H$, $H/K \approx H'$
2. Jika $H' \triangleleft G'$, maka $H \triangleleft G$.

Bukti

1. Akan ditunjukkan H subgrup G, $K \subset H$ serta $H/K \approx H'$

   - Karena δ adalah homomorfisma dan $e_G \in G$, maka $\delta(e_G) = e_{G'}$. Perhatikan bahwa H' subgrup G', maka $e_{G'} \in H'$. Jadi $\delta(e_G) \in H'$.Oleh karena $\delta(e_G) \in H'$, maka $e_G \in H$. Terbukti $H \neq \varnothing$

   - Akan ditunjukkan sifat tertutup dipenuhi dalam H. Ambil sebarang $x,y \in H$, maka $\delta(x),\delta(y) \in H'$. Oleh karena H' subgrup G' maka $(\delta(x) * \delta(y)) \in H'$. Padahal diketahui δ homomorfisma sehingga $\delta(x) * \delta(y) = \delta(x \circledast y) \in H'$. Jadi $(x \circledast y) \in H$. Terbukti sifat tertutup dipenuhi dalam H.

   - Langkah berikutnya akan ditunjukkan untuk sebarang $x \in H$, maka $x^{-1} \in H$. Ambil sebarang $x \in H$, maka $\delta(x) \in H'$. Oleh karena H' subgrup, maka $(\delta(x))^{-1} \in H'$. Padahal $(\delta(x))^{-1} = \delta(x^{-1})$. Jadi untuk $\delta(x^{-1}) \in H'$ dengan $x^{-1} \in G$. Terbukti $x^{-1} \in H$.

   - Diketahui H' subgrup G' maka $e_{G'} \in H'$ sehingga $Ker\,\delta = \{x \in G \mid \delta(x) = e_{G'}\}$ $= \{x \in G \mid \delta(x) \in H'\}$. terbukti $K \subset H$.

   - Langkah selanjutnya akan ditunjukkan $H/K \approx H'$. Perhatikan bahwa $K \lhd G$ dan $K \subset H$, maka $K \lhd H$. Oleh karena δ merupakan homomorfisma surjektif dari H ke H' dengan $ker\,\delta = K$, maka menurut Teorema Fundamental Homomorfisma didapat $H/K \approx H'$.

2. Akan ditunjukkan $H \triangleleft G$.

- Diketahui $H' \triangleleft G'$. Ambil $a \in G$, maka $\delta(a), (\delta(a))^{-1} \in G'$ dan untuk suatu $h \in H'$ berlaku $\delta(a) * h * (\delta(a))^{-1} \in H'$. Perhatikan bahwa $\delta(a) * h * (\delta(a))^{-1}$ $= \delta(a) * h * (\delta(a^{-1}))$. Oleh karena $h \in H'$, maka $\exists x \in H$ sedemikian sehingga $h = \delta(x)$. Akan ditunjukkan $a \circ x \circ a^{-1} \in H$.

  Dengan demikian $\delta(a) * \delta(x) * (\delta(a))^{-1} = \delta(a) * \delta(x) * \delta(a^{-1})$

  $= \delta(a \circ x \circ a^{-1}) \in H'$

Jadi $a \circ x \circ a^{-1} \in H$ dan menurut teorema 2.2.1 $H \triangleleft G$. ■

BAB III

Hasil Kali Langsung

Dalam bab III ini akan dibahas tentang pengertian hasil kali langsung luar (*eksternal direct product*) dan hasil kali langsung dalam (*internal direct product*). Hal ini mengingat konsep-konsep tentang hasil kali langsung (*direct product*) banyak dipergunakan dalam pembahasan tentang grup abelian berhingga.

3.1 Hasil Kali Langsung

Pembahasan grup abelian berhingga dari grup siklik yang berorder perpangkatan bilangan prima akan dimulai dengan pengertian hasil kali langsung. Jadi pada bagian ini yang menjadi perhatiaan pembicaraan adalah kasil kali Cartesius dari dua atau lebih himpunan, yang sudah diperkenalkan dalam teori grup elementer. Definisi selanjutnya mengenai hasil kali langsung dalam yang merupakan kejadian khusus dari hasil kali langsung.

Jika diberikan dua grup $(G_1,\circ)$,$(G_2,*)$, maka dapat disusun $G = G_1 \text{ x } G_2 = \{(a,b) \mid a \in G_1 \wedge b \in G_2\}$. Untuk selanjutnya, jika dalam G didefinisikan operasi # dengan aturan $\forall (a_1, b_1),(a_2, b_2) \in G$, $(a_1,b_1)\#(a_2, b_2) = (a_1 \circ a_2, b_1 * b_2)$, maka $(G,\#)$ dapat ditunjukkan sebagai suatu grup. Untuk memperjelas berikut ini akan dibuktikan bahwa $(G,\#)$ merupakan grup.

- Akan ditunjukkan operasi # terdefinisi dengan baik. Operasi # merupakan suatu fungsi #: $GxG \to G$. Ambil sebarang elemen $((a_1,b_1),(a_2,b_2)),((a_3,b_3),(a_4,b_4)) \in G$ dengan $a_1, a_2, a_3, a_4 \in G_1$ dan $b_1, b_2, b_3, b_4 \in G_2$, $((a_1,b_1),(a_2,b_2)) = ((a_3,b_3),(a_4,b_4))$. Dengan demikian diperoleh $(a_1,b_1) = (a_3,b_3)$ dan $(a_2,b_2) = (a_4,b_4)$ yang berarti, $a_1 = a_3$, $b_1 = b_3$, $a_2 = a_4$, $b_2 = b_4$.

  Oleh karena itu $(a_1 \circ a_2) = (a_3 \circ a_4)$, $(b_1 * b_2) = (b_3 * b_4)$, sehingga diperoleh :

  $(a_1 \circ a_2, b_1 * b_2) = (a_3 \circ a_4, b_3 * b_4)$

  $(a_1,b_1)\#(a_2,b_2) = (a_3,b_3)\#(a_4,b_4)$

  Perhatikan $(a_1 \circ a_2, b_1 * b_2) \in G$, jadi terbukti bahwa operasi # terdefinisi dengan baik.

- Ambil sebarang $(a_1,b_1),(a_2,b_2),(a_3,b_3) \in G$, akan ditunjukkan sifat asosiatif dipenuhi:

$$
\begin{aligned}
((a_1,b_1)\#(a_2,b_2))\#(a_3,b_3) &= ((a_1 \circ a_2, b_1 * b_2))\#(a_3,b_3) \\
&= (a_1 \circ a_2 \circ a_3, b_1 * b_2 * b_3) \\
&= (a_1 \circ (a_2 \circ a_3), b_1 * (b_2 * b_3)) \\
&= (a_1,b_1)\#(a_2 \circ a_3, b_2 * b_3) \\
&= (a_1,b_1)\#((a_2,b_2)\#(a_3,b_3)).
\end{aligned}
$$

  Jadi sifat asosiatif dipenuhi dalam G.

- Diketahui G_1 dan G_2 merupakan grup, maka $(\exists e_{G1} \in G_1)(\forall a \in G_1)$, $e_{G1} \circ a = a \circ e_{G1} = a$ dan $\exists e_{G2} \in G_2$ sedemikian sehingga $\forall b \in G_2$, $b * e_{G2} = e_{G2} * b = b$ dan $(e_{G1}, e_{G2}) \in G$.

Ambil sebarang $(a_1,b_1)\in G$, maka $(a_1,b_1)\#(e_{G1},e_{G2}) = (a_1 \circledast e_{G1}, b_1 * e_{G2}) = (a_1,b_1)$ dan $(e_{G1},e_{G2})\#(a_1,b_1) = (a_1 \circledast e_{G1}, b_1 * e_{G2}) = (a_1,b_1)$. Jadi $(e_{G1},e_{G2})\in G$, merupakan elemen identitas dari $(G,\#)$.

- Ambil sebarang $(a_1,b_1)\in G$ dengan $a_1\in G_1$, $b_1\in G_2$ karena G_1, G_2 merupakan grup maka $a_1^{-1}\in G_1$ dan $b_1^{-1}\in G_2$ dan $(a_1^{-1}, b_1^{-1})\in G$ sedemikian sehingga:

  $(a_1,b_1)\#(a_1^{-1}, b_1^{-1}) = (a_1^{-1}, b_1^{-1})\#(a_1^{-1},b_1^{-1}) = (e_{G1},e_{G2})$.

  Jadi $\forall(a_1,b_1)\in G, \exists(a_1^{-1},b_1^{-1})\in G.(a_1,b_1)\#(a_1^{-1}, b_1^{-1}) = (a_1^{-1}, b_1^{-1})\#(a_1, b_1) = (e_{G1},e_{G2})$. Dengan demikian terbukti $(G,\#)$ grup.

Setelah dapat dibuktikan $G = G_1 \times G_2$ merupakan grup terhadap operasi #, hasil ini dapat diperluas untuk hasil kali Cartesius dari grup-grup $G_1, G_2,\ldots, G_n$. Namun sebelum didefinisikan tentang hasil kali langsung perlu terlebih dahulu didefinisikan beberapa pengertian yang diperlukan untuk pembahasan selanjutnya.

Definisi 3.1.1

Hasil kali Cartesius dari himpunan-himpunan G_1, G_2, ... , G_n yang dinotasikan dengan $G = G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_n$ adalah himpunan semua n-tuple berurutan atau dapat ditulis $G = \{(a_1,a_2,\ldots,a_n) \mid a_i\in G_i, \forall i = 1,2,\ldots,n\}$.

Pada pembahasan selanjutnya perlu dijelaskan bahwa penulisan operasi biner untuk grup-grup G_1 ,G_2, ... ,G_n dan G tidak akan dituliskan secara eksplisit. Hal ini dilakukan guna mempermudah dalam penulisan supaya tidak terlalu banyak operasi biner dengan notasi yang berbeda.

Teorema 3.1.1

Jika G merupakan hasil kali Cartesius dari grup-grup G_1, G_2, G_3, ... , G_n maka G merupakan grup terhadap operasi yang didefinisikan sebagai berikut:

$(a_1,a_2,a_3, \ldots ,a_n)(b_1,b_2,b_3, \ldots ,b_n) = (a_1b_1,a_2b_2,a_3b_3, \ldots ,a_nb_n)$, $\forall(a_1,a_2,\ldots,a_n)$, $(b_1,b_2,\ldots,b_n)\in G$.

Bukti :

- Akan ditunjukkan operasi yang didefinisikan di atas terdefinisi dengan baik.

  Ambil sebarang $((a_1 ,a_2 ,\ldots, a_n),(b_1 ,b_2 ,\ldots, b_n))$, $((c_1 ,c_2 ,\ldots, c_n),(d_1 ,d_2 ,\ldots ,d_n))\in G$ dengan $((a_1,a_2,a_3, \ldots ,a_n),(b_1,b_2,b_3, \ldots ,b_n)) = ((c_1,c_2,c_3, \ldots ,c_n),(d_1,d_2,d_3 \ldots ,d_n))$, maka didapat $(a_1,a_2, \ldots ,a_n) = (c_1,c_2, \ldots ,c_n)$ serta $(b_1,b_2, \ldots ,b_n) = (d_1,d_2, \ldots ,d_n)$.

  Sehingga $a_1 = c_1$, $a_2 = c_2$, ... , $a_n = c_n$ dan $b_1 = d_1$, $b_2 = d_2$, $b_3 = d_3$, ... , $b_n = d_n$.

  Oleh karena itu $a_1b_1 = c_1d_1$, $a_2b_2 = c_2d_2$, ... ,$a_nb_n = c_nd_n$ sehingga didapat :

  $(a_1b_1,a_2b_2,\ldots,a_nb_n) = (c_1d_1,c_2d_2,\ldots,c_nd_n)$

  $(a_1 ,a_2 ,\ldots,a_n)(b_1,b_2 ,\ldots,b_n) = (c_1,c_2 ,\ldots,c_n)(d_1,d_2,\ldots,d_n)$.

Perhatikan bahwa $(a_1b_1, a_2b_2, \ldots, a_nb_n) \in G$, terbukti operasi yang didefinisikan di atas terdefinisi dengan baik.

- Ambil sebarang $(a_1, a_2, \ldots, a_n), (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ dan $(c_1, c_2, \ldots, c_n) \in G$, maka:

$$\begin{aligned}
[(a_1,a_2,\ldots,a_n)\,(b_1,b_2,\ldots,b_n)](c_1,c_2,\ldots,c_n) &= (a_1b_1, a_2b_2, \ldots, a_nb_n)(c_1,c_2,\ldots,c_n). \\
&= (a_1b_1c_1, a_2b_2c_2, \ldots, a_nb_nc_n). \\
&= (a_1(b_1c_1), a_2(b_2c_2), \ldots, a_n(b_nc_n)). \\
&= (a_1,a_2,\ldots,a_n)(b_1c_1, b_2c_2, \ldots, b_nc_n). \\
&= (a_1,a_2,\ldots,a_n)[(b_1,b_2,\ldots,b_n)(c_1,c_2,\ldots,c_n)].
\end{aligned}$$

Jadi sifat assosiatif dipenuhi dalam G.

- $G_1, G_2, \ldots, G_n$, merupakan grup maka $\exists e_1, e_2, \ldots, e_n$ dengan $e_i \in G_i$ merupakan elemen identitas masing-masing G_i. Oleh karenanya $(e_1, e_2, e_3, e_4, \ldots, e_n) \in G$ dan untuk sebarang $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in G$ berlaku :

$(a_1,a_2,\ldots,a_n)(e_1,e_2,\ldots,e_n) = (e_1,e_2,\ldots,e_n)(a_1,a_2,\ldots,a_n) = (a_1e_1, a_2e_2,\ldots,a_ne_n) = (a_1,a_2,\ldots,a_n)$.

Jadi $\exists (e_1, e_2, \ldots, e_n) \in G$, $\forall (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in G$ sedemikian hingga:

$(a_1,a_2,\ldots,a_n)(e_1,e_2,\ldots,e_n) = (e_1,e_2,\ldots,e_n)(a_1,a_2,\ldots,a_n)$

$= (a_1e_1, a_2e_2, \ldots, a_ne_n) = (a_1,a_2,\ldots,a_n)$.

Ambil $(a_1,a_2,\ldots,a_n) \in G$, karena $G_1, G_2, \ldots, G_{n-1}, G_n$, merupakan grup maka $\exists a_i^{-1} \in G_i$ $i = 1,2,\ldots,n$ sehingga $(a_1^{-1}, a_2^{-1}, \ldots, a_n^{-1}) \in G$ berlaku $(a_1, a_2, \ldots, a_n)(a_1^{-1}, a_2^{-1}, \ldots, a_n^{-1}) =$

$(a_1^{-1}, a_2^{-1}, \ldots, a_n^{-1})(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (e_1, e_2, \ldots, e_n) \in G$, untuk setiap $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in G$.

Terbukti G merupakan grup dengan operasi yang didefinisikan di atas. ■

Grup G yang terbentuk dalam Teorema 3.1.1 di atas disebut <u>hasil kali langsung luar</u> (*eksternal direct product*). Dalam pembahasan selanjutnya jika ditulis hasil kali langsung grup maka yang dimaksud adalah hasil kali langsung luar grup.

Selanjutnya dibentuk $G_i^* \subseteq G_1 \times G_2 \times G_3 \times G_4 \times \ldots \times G_n = G$ dengan $G_i^* = \{(e_1, \ldots, e_{i-1}, a_i, e_{i+1}, \ldots, e_n) | a_i \in G_i,\ i = 1, 2, .., n\}$, G_i^* yaitu himpunan semua n-tupple dengan elemen ke-i merupakan sebarang elemen dari G_i dan elemen-elemen lainnya merupakan elemen identitas. Dimana ternyata G_i^* merupakan subgrup normal dari G dan G_i^* isomorfis dengan G_i, $\forall i = 1, 2, \ldots, n$.

Teorema 3.1.2

Jika G merupakan hasil kali langsung dari grup-grup $G_1, G_2, G_3, \ldots, G_n$ dan $G_i^* \subseteq G$, maka

a. $G_i^* \lhd G$.

b. Jika didefinisikan pemetaan $\xi: G_i^* \to G_i$ dengan aturan:

$\xi((e_1, \ldots, e_{i-1}, a_i, e_{i+1}, \ldots, e_n)) = a_i, \forall (e_1, \ldots, e_{i-1}, a_i, e_{i+1}, \ldots, e_n) \in G_i^*$, maka $G_i^* \approx G_i$

Bukti:

a. Diketahui $G = G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_n$ grup dan $G_i^* = \{(e_1, \ldots, e_{i-1}, a_i, e_{i+1}, \ldots, e_n) \mid a_i \in G_i\}$, $G_i^* \subseteq G$. Akan ditunjukkan G_i^* subgrup normal dari G

- $G_i^* \neq \varnothing$, sebab G_i merupakan grup, untuk $i = 1,2,.., n$ sehingga $\exists e_i \in G_i$, yang berakibat $(e_1, \ldots, e_{i-1}, e_i, e_{i+1}, \ldots, e_n) \in G_i^*$.

- Ambil sebarang $(e_1, \ldots, e_{i-1}, a_i, e_{i+1}, \ldots, e_n), (e_1, \ldots, e_{i-1}, b_i, e_{i+1}, \ldots, e_n) \in G_i^*$ dengan $a_i, b_i \in G_i$, maka didapat:

  $(e_1, \ldots, e_{i-1}, a_i, e_{i+1}, \ldots, e_n)(e_1, \ldots, e_{i-1}, b_i, e_{i+1}, \ldots, e_n) = (e_1, \ldots, e_{i-1}, a_i b_i, e_{i+1}, \ldots, e_n)$.

  Karena G_i merupakan grup maka sifat tertutup dipenuhi dalam G_i sehingga $a_i b_i \in G_i$ jadi $(e_1, \ldots, e_{i-1}, a_i b_i, e_{i+1}, \ldots, e_n)$ elemen G_i^*.

  Ambil sebarang elemen $(e_1, \ldots, e_{i-1}, a_i, e_{i+1}, \ldots, e_n) \in G_i^*$ dengan $a_i \in G_i$, karena G_i grup, maka $\exists a_i^{-1} \in G_i$ sehingga $(e_1, e_2, e_3, \ldots, e_{i-1}, a_i^{-1}, e_{i+1}, \ldots, e_n) \in G_i^*$ dan memenuhi :

  $(e_1, e_2, \ldots, e_{i-1}, a_i, e_{i+1}, \ldots, e_n)(e_1, e_2, \ldots, e_{i-1}, a_i^{-1}, e_{i+1}, \ldots, e_n) = (e_1, \ldots, e_{i-1}, a_i^{-1}, e_{i+1}, \ldots, e_n)$
  $(e_1, \ldots, e_{i-1}, a_i, e_{i+1}, \ldots, e_n) = (e_1, \ldots, e_i, \ldots, e_n)$.

  Jadi setiap elemen G_i^*, inversnya juga dalam G_i^*. Menurut Teorema 2.1.5, maka G_i^* merupakan subgrup dari G.

  Kemudian akan ditunjukkan kenormalannya.

Ambil sebarang $(e_1, \ldots, e_{i-1}, h_i, e_{i+1}, \ldots, e_n) \in G_i^*$ dan $(g_1, \ldots, g_i, \ldots, g_n) \in G$, karena G grup $(g_1, \ldots, g_i, \ldots, g_n)^{-1} \in G$. Dari sini diperoleh:

$(g_1, \ldots, g_i, \ldots, g_n)(e_1, \ldots, e_{i-1}, h_i, e_{i+1}, \ldots, e_n)(g_1, \ldots, g_i, \ldots, g_n)^{-1} =$

$(g_1, \ldots, g_i, \ldots, g_n)(e_1 g_1^{-1}, \ldots, h_i g_i^{-1}, \ldots, e_n g_n^{-1}) = (g_1, \ldots, g_i, \ldots, g_n)(g_1^{-1}, \ldots, h_i g_i^{-1}, \ldots, g_n^{-1})$

$= (g_1 g_1^{-1}, \ldots, g_i h_i g_i^{-1}, \ldots, g_n g_n^{-1})$

$= (e_1, \ldots e_{i-1}, g_i h_i g_i^{-1}, e_{i+1} \ldots, e_n)$

Karena G_i merupakan grup, maka $(g_i h_i g_i^{-1}) \in G_i$ sehingga diperoleh:

$(e_1, \ldots e_{i-1}, g_i h_i g_i^{-1}, e_{i+1} \ldots, e_n) \in G_i^*$. Menurut Teorema 2.2.1, maka G_i^* subgrup normal dari G.

b. Diketahui pemetaan $\xi: G_i^* \to G_i$ dengan aturan $\xi((e_1, e_2, \ldots, e_{i-1}, a_i, e_{i+1}, \ldots, e_n)) = a_i$ $\forall (e_1, \ldots e_{i-1}, g_i h_i g_i^{-1}, e_{i+1} \ldots, e_n) \in G_i$ akan ditunjukkan $G_i^* \approx G_i$

- Pemetaan ξ terdefinisi dengan baik sebab bila diambil sebarang $(e_1, e_2, \ldots, e_{i-1}, a_i, e_{i+1}, \ldots, e_n), (e_1, e_2, \ldots, e_{i-1}, b_i, e_{i+1}, \ldots, e_n) \in G_i^*$ dengan $(e_1, \ldots, e_{i-1}, a_i, e_{i+1}, \ldots, e_n) = (e_1, \ldots, e_{i-1}, b_i, e_{i+1}, \ldots, e_n)$ maka diperoleh $a_i = b_i$ padahal $a_i = \xi((e_1, e_2, \ldots, e_{i-1}, a_i, e_{i+1}, \ldots, e_n))$ dan $b_i = \xi((e_1, e_2, \ldots, e_{i-1}, b_i, e_{i+1}, \ldots, e_n))$. Akibatnya $\xi((e_1, e_2, \ldots, e_{i-1}, a_i, e_{i+1}, \ldots, e_n)) = \xi((e_1, e_2, \ldots, e_{i-1}, b_i, e_{i+1}, \ldots, e_n))$.

Jadi $\forall(e_1,e_2,\ \ldots\ ,e_{i-1},a_i\ ,e_{i+1},\ \ldots,e_n\ ) = (e_1,e_2,\ \ldots\ ,e_{i-1},b_i\ ,e_{i+1},\ \ldots,e_n\ )\in G_i^*$, berlaku:

$\xi((e_1,e_2,\ldots\ ,e_{i-1},a_i,e_{i+1},\ldots,e_n\ )) = \xi((e_1,e_2,\ldots\ ,e_{i-1},b_i,e_{i+1},\ldots,e_n\ ))$.

- Pemetaan ξ merupakan homomorfisma, sebab bila diambil sebarang

  $(e_1,e_2,\ldots\ ,e_{i-1},a_i,e_{i+1},\ldots,e_n\ ),(e_1,e_2,\ldots\ ,e_{i-1},b_i,e_{i+1},\ldots,e_n\ )\in G_i^*$, maka

  $\xi((e_1,\ \ldots\ ,e_{i-1},a_i,e_{i+1},\ldots,e_n)(e_1,\ldots,e_{i-1},b_i,e_{i+1},\ldots,e_n\ )) = \xi((\ e_1,\ \ldots\ ,e_{i-1},a_ib_i,e_{i+1},\ldots,e_n)$

  $= a_ib_i$

  $= \xi((e_1,e_2,\ldots\ ,e_{i-1},a_i,e_{i+1},\ldots,e_n))\xi((e_1,e_2,\ldots\ ,e_{i-1},b_i,e_{i+1},\ldots,e_n))$

- Selanjutnya akan dibuktikan ξ pemetaan yang injektif.

  Ambil sebarang $(e_1,e_2,\ldots\ ,e_{i-1},a_i,e_{i+1},\ldots,e_n),(e_1,e_2,\ldots\ ,e_{i-1},b_i,e_{i+1},\ldots\ ,e_n)$ anggota G_i^* dengan $\xi((e_1,e_2,\ \ldots\ ,e_{i-1},a_i\ ,e_{i+1},\ \ldots,e_n)) = \xi((e_1,e_2,\ \ldots\ ,e_{i-1},b_i\ ,e_{i+1},\ \ldots,e_n))$, maka diperoleh persamaan $a_i = b_i$, $i = 1, 2, \ldots , n$ menurut definisi kesamaan hasil kali Cartesius didapat $(e_1,e_2,\ldots\ ,e_{i-1},a_i,e_{i+1},\ldots,e_n) = (e_1,e_2,\ldots\ ,e_{i-1},b_i,e_{i+1},\ldots,e_n)$.

  Jadi ξ merupakan pemetaan injektif.

- Pemetaan ξ surjektif, sebab $\forall a_i\in G_i$, pasti ada $(e_1,e_2,\ \ldots\ ,e_{i-1},a_i\ ,e_{i+1},\ \ldots,e_n)\in G_i^*$ sedemikian sehingga $\xi((e_1,e_2,\ldots\ ,e_{i-1},a_i,e_{i+1},\ldots,e_n)) = a_i$.

  Jadi ξ merupakan pemetaan yang surjektif

Terbukti bahwa ξ merupakan isomorfisma. Jadi $G_i^* \approx G_i$ ∎

Apa yang sudah dibicarakan di atas akhirnya menuntun pada definisi hasil kali langsung. Pembicaraan akan hasil kali langsung akan tertuang pada beberapa definisi dan teorema-teorema di bawah ini.

Definisi 3.1.2

Jika $N_1, N_2, \ldots, N_n$ subgrup normal-subgrup normal G dan

1. $G = N_1N_2 \ldots\ldots N_n$
2. untuk setiap $a \in G$ dapat dinyatakan secara tunggal $a = n_1n_2\ldots n_n$, $n_i \in N_i$, $i = 1,2, \ldots, n$, maka G disebut hasil kali langsung dalam (*internal direct product*).

Teorema 3.1.3

Jika $G = G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_n$ merupakan hasil kali langsung dari $G_1, \ldots, G_2, \ldots, G_n$, maka G merupakan hasil kali langsung dalam subgrup normal-subgrup normal G_i^*, untuk $i = 1,2,\ldots, n$.

Bukti:

Diketahui $G = G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_n$ hasil kali langsung grup maka menurut Teorema 3.1.2, $G_i^* \lhd G$. Ambil sebarang $a \in G$, maka $a = (a_1,\ldots,a_i,\ldots,a_n)$, dengan $a_i \in G_i$. Perhatikan bahwa $a \in G$ ini dapat dinyatakan sebagai:

$$(a_1,\ldots,a_i,\ldots,a_n) = (a_1,\ldots,e_i,\ldots,e_n)(e_1,a_2,\ldots,e_i,\ldots,e_n)\ldots(e_1,e_2,\ldots,a_i,\ldots,e_n)\ldots(e_1,\ldots,e_i,\ldots,a_n)$$

Dengan demikian $a \in G$ dapat ditulis sebagai $a = p_1 p_2 p_3 p_4 \ldots p_{n-1} p_n$ dengan $p_i = (e_1, \ldots, a_i, \ldots, e_n) \in G_i^*$.

Untuk selanjutnya akan dibuktikan ketunggalannya.

Jika $a = p_1 p_2 \ldots p_n$ dan $a = q_1 q_2 \ldots q_n$ dengan $p_i = (e_1, \ldots, a_i, \ldots, e_n) \in G_i^*$, dengan $a_i \in G_i$ dan $q_i = (e_1, \ldots, b_i, \ldots, e_n) \in G_i^*$ dengan $b_i \in G_i$, maka diperoleh:

$a = (a_1, e_2, \ldots, e_i, \ldots, e_n)(e_1, a_2, \ldots, e_i, \ldots, e_n) \ldots (e_1, e_2, e_3, \ldots, a_i, \ldots, e_n) \ldots (e_1, \ldots, e_i, \ldots, a_n)$

$= (b_1, \ldots, e_i, \ldots, e_n)(e_1, b_2, \ldots, e_i, \ldots, e_n) \ldots (e_1, e_2, e_3, \ldots b_i, \ldots, e_n) \ldots (e_1, \ldots, e_i, \ldots, b_n)$ dan

didapat $(a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_n) = (b_1, \ldots, b_i, \ldots, b_n) \wedge a_1 = b_1, a_2 = b_2, \ldots, a_n = b_n, \forall a_i, b_i \in G_i$

Sehingga diperoleh: $p_1 = q_1, p_2 = q_2, \ldots, p_n = q_n$ terbukti $a = p_1 p_2 \ldots p_n = q_1 . q_2 \ldots q_n$.

Jadi G dibangun atas subgrup normal-subgrup normalnya yaitu G_i^* atau dalam bentuk lain dapat ditulis sebagai $G = G_1^* G_2^* G_3^* \ldots G_i^*$ dan $\forall a \in G$ mempunyai bentuk tunggal yaitu $a = p_1 p_2 \ldots p_n$ dengan $p_i = (e_1, \ldots, a_i, \ldots, e_n)$ dengan $a_i \in G_i$. Terbukti G merupakan hasil kali langsung dalam dari subgrup normal-subgrup normal $G_1^*, G_2^*, G_3^*, \ldots, G_n^*$. ∎

Teorema 3.1.4

Jika G grup dan M, N subgrup normal dari G dengan $M \cap N = \{e\}$, maka $mn = nm$ dengan $n \in N$, $m \in M$.

Bukti:

Perhatikan elemen yang berbentuk $mnm^{-1}n^{-1}$, sebut elemen ini a sehingga $a = mnm^{-1}n^{-1}$. Disatu pihak $a = (mnm^{-1})n^{-1}$ dan karena $N \triangleleft G$, maka $(mnm^{-1}) \in N$, didapat $a \in N$. Dilain pihak $a = m(nm^{-1}n^{-1})$ dan karena $M \triangleleft G$, maka $(nm^{-1}n^{-1}) \in M$. Didapat $a \in M$. Tampak bahwa $a \in M \cap N = \{e\}$. Jadi $a = e$ sehingga didapat $mnm^{-1}(n^{-1}n) = en$

$$mn(m^{-1}m) = nm$$

$$mn = nm$$

Jadi terbukti $mn = nm$ dengan $n \in N$ dan $m \in M$. ■

Teorema 3.1.5

Jika G hasil kali langsung dalam dari subgrup normal $N_1, N_2, \ldots, N_n$, maka $N_i \cap N_j = \{e\}$, untuk $i \neq j$.

Bukti:

Ambil sebarang $a \in (N_i \cap N_j)$, $i \neq j$, berarti $a \in N_i \wedge a \in N_j$ dengan N_i, N_j subgrup normal G, sehinggga diperoleh $a \in G$. Karena G hasil kali langsung dalam maka a dapat dinyatakan sebagai $a = e.....eae.....e$ dengan a sebagai faktor ke-i, tetapi dilain pihak a juga dapat dinyatakan sebagai $a = e.......eae.....e$ dengan a sebagai faktor ke-j. Berdasarkan sifat ketunggalannya maka $a = e.....eae.....e$ (dengan a sebagai faktor ke-i) $= e \ldots eae \ldots e$ (dengan a sebagai faktor ke-j). Sehingga diperoleh $a = e$.

Jadi terbukti $N_i \cap N_j = \{e\}$. ■

Sebagai penjelasan dari teorema di atas akan diberikan untuk kasus $n = 2$. Andaikan $N_1 \lhd G$, $N_2 \lhd G$ dan $a \in G$ mempunyai bentuk tunggal sebagai $a = a_1 a_2$ dengan $a_1 \in N_1$ dan $a_2 \in N_2$. Padahal a dapat ditulis sebagai $a = ae$. Hal ini terjadi bila dan hanya bila $a_1 = a \in N_1$, $a_2 = e \in N_2$. Selain itu a dapat dinyatakan sebagai $a = ea$, misalkan $a = b_1 b_2$ dengan $b_1 = e \in N_1$, $b_2 = a \in N_2$. Dengan sifat ketunggalannya maka $a_1 = b_1$ dan $a = e$, jadi $N_1 \cap N_2 = \{e\}$

Akibat 3.1.5

Misalkan G hasil kali langsung dalam dari subgrup normal N_1, N_2 ,... , N_n.

Jika $a_i \in N_i$, $a_j \in N_j$, untuk $i \neq j$, maka $a_i\, a_j = a_j\, a_i$.

Bukti

Karena G hasil kali langsung dalam, maka menurut Teorema 3.1.5 $N_i \cap N_j = \{e\}$ untuk $i \neq j$. Oleh karena $N_1, N_2, \ldots, N_n$ subgrup normal-subgrup normal G dan menurut Teorema 3.1.4 untuk sebarang $a_i \in N_i$ komutatif dengan sebarang $a_j \in N_j$, untuk $i \neq j$, atau $a_i\, a_j = a_j\, a_i$. ∎

Teorema 3.1.6

Diberikan G grup dan $N_1, N_2, \ldots, N_n$ subgrup normal-subgrup normal G, maka $G \approx N_1 \times N_2 \times \ldots \times N_n$ bila dan hanya bila G hasil kali langsung dalam $N_1, \ldots, N_n$

Bukti:

($\Leftarrow$)

Diketahui G hasil kali langsung dalam subgrup normal-subgrup normal N_1, N_2, ... ,N_n dan didefinisikan pemetaan $\zeta : N_1 \times N_2 \times \ldots \times N_n \rightarrow G$ dengan aturan,

$\zeta((m_1, m_2, \ldots, m_n)) = m_1 m_2 \ldots m_n, \forall (m_1, m_2, \ldots, m_n) \in (N_1 \times N_2 \times \ldots \times N_n)$

- Akan ditunjukkan pemetaan ζ terdefinisi dengan baik.

  Ambil sebarang $(m_1, m_2, \ldots, m_n), (n_1, n_2, \ldots, n_n) \in (N_1 \times N_2 \times N_3 \times \ldots \times N_n)$ dengan $(m_1, m_2, \ldots, m_n) = (n_1, n_2, \ldots, n_n)$, maka didapat $m_i = n_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, oleh karena itu $m_1 m_2 \ldots m_n = n_1 n_2 \ldots n_n$ sehingga $\zeta((m_1, m_2, \ldots, m_n)) = \zeta((n_1, n_2, \ldots, n_n))$.

  Jadi terbukti pemetaan ζ terdefinisi dengan baik.

- Ambil sebarang $a \in G$, karena G hasil kali langsung dalam, maka a dapat dinyatakan sebagai $a = m_1 m_2 \ldots m_n$, $m_i \in N_i$ dengan tunggal sehingga $(m_1, m_2, \ldots, m_n)$ elemen $(N_1 \times \ldots \times N_n)$ dan $\zeta((m_1, m_2, \ldots, m_n)) = m_1 m_2 \ldots m_n$.

  Jadi untuk setiap $a \in G$, $\exists (m_1, m_2, \ldots, m_n) \in (N_1 \times N_2 \times \ldots \times N_n)$ sedemikian sehingga $\zeta((m_1, m_2, \ldots, m_n)) = m_1 m_2 \ldots m_n$. Terbukti pemetaan ζ surjektif.

- Ambil sebarang $(m_1, m_2, \ldots, m_n)$, $(n_1, n_2, \ldots, n_n) \in (N_1 \times N_2 \times \ldots \times N_n)$ sedemikian sehingga $\zeta((m_1, m_2, \ldots, m_n)) = \zeta((n_1, n_2, \ldots, n_n))$. Pehatikan bahwa

  $\zeta((m_1, m_2, \ldots, m_n)) = m_1 m_2 \ldots m_n$ dan $\zeta((n_1, n_2, \ldots, n_n)) = n_1 n_2 \ldots n_n$.

  Jadi diperoleh $(m_1 m_2 \ldots m_n) = (n_1 n_2 \ldots n_n)$ dan karena G hasil kali langsung dalam didapat $n_1 = m_1$, $n_2 = m_2$, ... , $n_n = m_n$ dengan $m_i, n_i \in N_i$.

  Sehingga $(m_1, m_2, \ldots, m_n) = (n_1, n_2, \ldots, n_n)$. Terbukti pemetaan ζ injektif.

Bila dalam Teorema 3.1.6 disederhanakan hanya untuk N_1 dan N_2 saja, maka akan diperoleh Akibat 3.1.6 di bawah ini.

Akibat 3.1.6

G grup dan N_1, N_2 subgrup normal-subgrup normal G, maka G adalah hasil kali langsung dalam dari N_1 dan N_2 bila dan hanya bila $G = N_1N_2$ dan $N_1 \cap N_2 = \{e\}$.

Bukti:

($\Rightarrow$)

Diketahui G grup dan N_1, N_2 subgrup normal-subgrup normal G. Menurut Teorema 3.1.6 diketahui $G \approx N_1 \text{x} N_2$ bila dan hanya bila G merupakan hasil kali langsung dalam N_1, N_2. Oleh karena G hasil kali langsung dalam N_1, N_2 maka $G = N_1N_2$ dan menurut Teorema 3.1.5 didapat $N_1 \cap N_2 = \{e\}$.

($\Leftarrow$)

Diketahui $G = N_1N_2$ dan $N_1 \cap N_2 = \{e\}$. Diberikan pemetaan $\zeta : N_1 \text{x} N_2 \to G = N_1N_2$ dengan aturan $\zeta((n_1, n_2)) = n_1n_2$, $\forall n_1, n_2 \in N_1 \text{x} N_2$. Langkah berikutnya akan ditunjukkan pemetaan ζ merupakan isomorfisma.

- Akan ditunjukkan ζ terdefinisi dengan baik.

  Ambil sebarang $(n_1, n_2), (m_1, m_2) \in N_1 \text{x} N_2$ dengan $(n_1, n_2) = (m_1, m_2)$ maka didapat $n_1 = m_1$, $n_2 = m_2$. Oleh karena itu $n_1 n_2 = m_1 m_2$ sehingga didapat $(n_1, n_2) = (m_1, m_2)$.

  Jadi terbukti pemetaan ζ terdefinisi dengan baik.

- Ambil sebarang $x \in G$, oleh karena $G = N_1N_2$, maka x dapat dinyatakan sebagai $x = n_1n_2$ dengan $n_1 \in N_1$, $n_2 \in N_2$. Dengan demikian $(n_1, n_2) \in N_1 \mathrm{x} N_2$. Jadi untuk setiap $x \in G$, $\exists (n_1, n_2) \in N_1 \mathrm{x} N_2$ sedemikian sehingga $\zeta((n_1, n_2)) = n_1n_2$.

  Terbukti pemetaan ζ surjektif.

- Ambil sebarang $(n_1,n_2),(m_1,m_2) \in N_1 \mathrm{x} N_2$ sedemikian sehingga $\zeta((n_1,n_2)) = \zeta((m_1,m_2))$. Perhatikan bahwa $\zeta((n_1,n_2)) = n_1n_2$ dan $\zeta((m_1,m_2)) = m_1m_2$.

  Jadi didapat $n_1 n_2 = m_1 m_2$.

  Perhatikan bahwa $m_1 = n_1(n_2m_2^{-1})$ dengan $n_2m_2^{-1} \in N_2$ dan $(n_1^{-1}m_1) = (n_2m_2^{-1})$ dengan $n_1^{-1}m_1 \in N_1$. Jadi $(n_1^{-1}m_1) = (n_2m_2^{-1}) \in N_1 \cap N_2$. Oleh karena $N_1 \cap N_2 = \{e\}$, maka didapat $(n_1^{-1}m_1) = e, (n_2m_2^{-1}) = e$. Dengan demikian didapat $m_1 = n_1$ dan $m_2 = n_2$. Jadi didapat $(n_1,n_2) = (m_1, m_2)$. Terbukti pemetaan ζ injektif.

- Selanjutnya akan ditunjukkan ζ homomorfisma.

  Ambil sebarang (n_1,n_2), $(m_1,m_2) \in N_1 \mathrm{x}\, N_2$, maka diperoleh :

$$
\begin{aligned}
\zeta((n_1,n_2)(m_1,m_2)) &= \zeta(n_1m_1, n_2m_2) \\
&= n_1m_1n_2m_2 \\
&= n_1n_2\, m_1m_2 \\
&= \zeta(n_1,n_2)\, \zeta(m_1,m_2)
\end{aligned}
$$

- Jadi ζ merupakan suatu homomorfisma. Terbukti $N_1 \mathrm{x} N_2 \approx G$.

Dengan demikian G merupakan hasil kali langsung dalam N_1, N_2. ■

Teorema 3.1.7

Diberikan G grup berhingga dan $N_1, N_2, \ldots, N_{k-1}, N_k$ subgrup normal-subgrup-normal G sedemikian sehingga memenuhi $G = N_1N_2N_3N_4 \ldots N_{k-1}N_k$ dan $|G| = |N_1||N_2|\ldots|N_k|$, maka G merupakan hasil kali langsung dalam $N_1, \ldots, N_k$.

Bukti

Menurut Akibat 3.1.6 karena grup G memenuhi $G = N_1N_2 \ldots N_k$, maka tinggal ditunjukkan $N_i \cap N_j = \{e\}$ untuk $i \neq j$. Perhatikan bahwa $|G| = |N_1||N_2|\ldots|N_k|$, padahal di satu sisi $G = N_1N_2 \ldots N_{k-1}N_k$ sehingga $|G| = |N_1N_2 \ldots N_k| = |N_1||N_2|\ldots|N_k|$. Menurut Teorema 2.1.20 diperoleh persamaan $|N_1N_2 \ldots N_k| = \dfrac{|N_1||N_2|\ldots|N_k|}{|N_1 \cap N_2 \cap \ldots \cap N_k|}$.

Dengan demikian $|G| = |N_1||N_2|\ldots|N_k|$ bila dan hanya bila $|N_1 \cap N_2 \cap \ldots \cap N_k| = 1$. Oleh karena $|N_1 \cap N_2 \cap \ldots \cap N_k| = 1$ maka $N_i \cap N_j = \{e\}$, untuk $i \neq j$. Terbukti bahwa G merupakan hasil kali langsung dalam dari $N_1, N_2, \ldots, N_k$. ■

Teorema 3.1.8

Diberikan G grup dan $N_1, N_2, \ldots, N_k$ subgrup normal-subgrup normal G sedemikian sehingga memenuhi $G = N_1N_2N_3N_4 \ldots N_k$ dan untuk setiap i, $N_i \cap (N_1 \ldots N_{i-1}\ N_{i+1} \ldots N_k) = \{e\}$, maka G merupakan hasil kali langsung dalam dari $N_1, N_2, \ldots, N_k$

Bukti

Diketahui $G = N_1N_2 \ldots N_k$, maka untuk $x \in G$ dapat dinyatakan sebagai $x = n_1n_2 \ldots n_k$ dengan $n_i \in N_i$, $i = 1,2, \ldots,k$. Menurut Definisi 3.1.2 tinggal ditunjukkan sifat ketunggalannya. Ambil sebarang $x \in G$, maka $x = n_1n_2 \ldots n_k$. Misal x juga dapat dinyatakan dengan $x = m_1m_2 \ldots m_k$ untuk $m_i, n_i \in N_i$, $\forall i = 1,2, \ldots ,k$ akan ditunjukkan $n_i = m_i$. Andaikan $\exists i_0$ sedemikian sehingga $n_{i0} \neq m_{i0}$. Perhatikan persamaan $n_1n_2 \ldots n_{i0} \ldots n_k = m_1m_2 \ldots m_{i0} \ldots m_k$ bila dioperasikan dengan n_{i0}^{-1} dari kiri, maka didapat: $n_{i0}^{-1}(n_1n_2 \ldots n_{i0} \ldots n_k) = n_{i0}^{-1}(m_1m_2 \ldots m_{i0} \ldots m_k)$

$$(n_{i0}^{-1}n_1n_2 \ldots n_{i0} \ldots n_k) = (n_{i0}^{-1}m_1m_2 \ldots m_{i0} \ldots m_k)$$

$$(n_1n_2 \ldots n_{i0}^{-1}n_{i0} \ldots n_k) = (m_1m_2 \ldots n_{i0}^{-1}m_{i0} \ldots m_k)$$

$$(n_1n_2 \ldots (n_{i0}^{-1}n_{i0}) \ldots n_k) = (m_1m_2 \ldots (n_{i0}^{-1}m_{i0}) \ldots m_k)$$

$$(n_1n_2 \ldots n_{i0-1}n_{i0+1} \ldots n_k) = (m_1m_2 \ldots m'_{i0} \ldots m_k)$$

Karena $n_{i0}^{-1}, m_{i0} \in N_{i0}$ dan N_{i0} subgrup G, maka $\exists m'_{i0} = (n_{i0}^{-1}m_{i0}) \in N_{i0}$.

Selanjutnya bila dioperasikan dengan $m_k^{-1}, m_{k-1}^{-1}, \ldots, m_{i0-1}^{-1}m_{i0+1}^{-1} \ldots, m_2^{-1}m_1^{-1}$ berturut-turut dari kanan, maka akan diperoleh:

$$m'_{i0} = (n_1n_2 \ldots n_{i0-1}n_{i0+1} \ldots n_k)(m_k^{-1}m_{k-1}^{-1}\ m_{i0-1}^{-1}m_{i0+1}^{-1} \ldots m_2^{-1}m_1^{-1})$$

$$m'_{i0} = (n_1m_1^{-1})(n_2m_2^{-1}) \ldots (n_{i0-1}m_{i0}^{-1})(n_{i0+1}m_{i0+1}^{-1}) \ldots (n_km_k^{-1}).$$

Tampak bahwa $m'_{i0} \in N_{i0}$ dan $m'_{i0} \in (N_2 \ldots N_{i0-1} N_{i0+1} \ldots N_k)$ yang berarti $m'_{i0} \in (N_{i0} \cap (N_2 \ldots N_{i0-1} N_{i0+1} \ldots N_k)) = \{e\}$.

Dengan demikian $m'_{i0} = e$ atau $n_{i0}^{-1} m_{i0} = e$. Jadi $m_{i0} = n_{i0}$ sehingga kontradiksi dengan yang diandaikan . Terbukti bahwa G merupakan hasil kali langsung dalam dari $N_1, N_2, \ldots, N_k$. ■

Teorema 3.1.9

Diberikan grup G dan $K_1, K_2, \ldots, K_n$ subgrup normal-subgrup normal G.

Jika $K_1 \cap K_2 \cap \ldots \cap K_n = \{e\}$ dan $V_i = G/K_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, maka ada suatu isomorfisma dari G ke $\prod_{i=1}^{n} V_i$

Bukti

Diketahui $\prod_{i=1}^{n} V_i = \{(K_1x, \ldots, K_nx) | x \in G\}$ selanjutnya didefinisikan pemetaan $\delta : G \to \prod_{i=1}^{n} V_i$ dengan aturan $\delta(x) = (K_1x, \ldots, K_nx)$, $\forall x \in G$.

- Pertama akan ditunjukkan δ terdefinisi dengan baik.

  Ambil sebarang $x, y \in G$ dengan $x = y$, kemudian akan ditunjukkan $\delta(x) = \delta(y)$. Perhatikan untuk $x = y$, maka $K_ix = K_iy$, $\forall i = 1, 2, \ldots, n$ sehingga didapat :

  $(K_1x, \ldots, K_nx) = (K_1y, \ldots, K_ny)$. Tampak bahwa $\delta(x) = \delta(y)$, terbukti δ terdefinisi dengan baik.

- Selanjutnya akan ditunjukkan δ suatu homomorfisma.

  Ambil sebarang $x,y \in G$. Oleh karena G grup, maka $(xy) \in G$ dan didapat:

  $\delta(xy) = (K_1xy, \dots , K_nxy)$

  $= (K_1xK_1y, \dots , K_nxK_ny)$

  $= (K_1x, \dots , K_nx) (K_1y, \dots , K_ny)$

  $= \delta(x)\ \delta(y)$.

  Terbukti δ homomorfisma.

- Langkah selanjutnya ditunjukkan δ pemetaan injektif.

  Ambil sebarang $x,y \in G$ sedemikian sehingga $\delta(x) = \delta(y)$. Karena $\delta(x) = \delta(y)$, maka $(K_1x, \dots , K_nx) = (K_1x, \dots , K_nx)$ didapat:

  $K_1 x = K_1 y \wedge K_2 x = K_2 y \wedge \dots \wedge K_n x = K_n y$ menurut Teorema 2.1.14, maka

  $x \in K_1 y \wedge x \in K_2 y \wedge \dots \wedge x \in K_n y$

  $x = k_1 y \wedge x = k_2 y \wedge \dots \wedge x = k_n y$ dengan $k_1 \in K_1,\ k_2 \in K_2, \dots ,\ k_n \in K_n$.

  $xy^{-1} = k_1 \wedge xy^{-1} = k_2 \wedge \dots \wedge xy^{-1} = k_n$.

  Perhatikan bahwa $xy^{-1} \in K_1 \wedge xy^{-1} \in K_2 \wedge \dots \wedge xy^{-1} \in K_n$ sebagai akibatnya $(xy^{-1}) \in K_1 \cap K_2 \cap \dots \cap K_n$. Oleh karena $K_1 \cap K_2 \cap \dots \cap K_n = \{e\}$, maka

  $xy^{-1} = e$

  $x = y$.

  Terbukti bahwa δ injektif.

- Akan ditunjukkan δ surjektif..

Perhatikan untuk $\underline{g} \in \prod_{i=1}^{n} V_i = \{(K_1x, \ldots, K_nx) | x \in G\}$, maka $\underline{g} = (K_1x, \ldots, K_nx)$

untuk suatu $x \in G$. Jadi $\exists x \in G$ sedemikian sehingga $\delta(x) = \underline{g}$.

Terbukti δ surjektif.

Terbukti dipenuhi ada isomorfisma dari G ke $\prod_{i=1}^{n} V_i = \{(K_1x, \ldots, K_nx) | x \in G\}$. ■

Perlu dijelaskan disini bila istilah eksternal maupun internal dalam pengertian hasil kali langsung dihilangkan, maka pembicaraan tentang hasil kali langsung dalam ataupun hasil kali langsung luar hanya akan disebut sebagai hasil kali langsung dan dinotasikan $G = N_1 \times N_2$.

BAB IV

Grup Abelian Berhingga

Dalam teorema fundamental grup abelian berhingga dikatakan bahwa setiap grup abelian berhingga pasti isomorfis dengan tepat satu hasil kali langsung dari grup siklik yang berorder perpangkatan bilangan prima. Grup-grup siklik tersebut disebut faktor invarian.

Sebelum dibahas mengenai grup abelian berhingga terlebih dahulu akan dibahas mengenai pengertian *p-Grup*, *Teorema Cauchy* dan *Teorema Sylow* untuk grup abelian. Teorema Cauchy mengatakan bahwa jika p membagi order dari grup G, dengan p suatu bilangan prima, maka G memuat elemen berorder p.

Definisi 4.1.1

Grup G disebut *p-Grup* jika setiap elemen G mempunyai order perpangkatan bilangan prima p.

Suatu subgrup H dari grup G disebut *p-Subgrup* dari G jika H adalah *p-Grup*.

Keterangan: Pada pembahasan selanjutnya p menyatakan suatu bilangan prima.

Definisi 4.1.2

Jika H subgrup dari grup G, maka H adalah *p-Subgrup Sylow* dari G bila hanya bila $|H| = p^n$ dengan $p^{n+1} \nmid |G|$.

Teorema 4.1.1 (*Teorema Cauchy untuk Grup Abelian Berhingga*)

Jika G grup abelian berhingga dan $p \mid |G|$, maka G mempunyai elemen berorder p.

Bukti

Akan dibuktikan dengan induksi pada $|G|$.

- Jika $|G| = 1$, maka tidak ada bilangan p sedemikian sehingga $p \mid |G|$, sehingga dengan sendirinya teorema benar.
- Andaikan teorema benar untuk grup abelian yang berorder lebih kecil dari $|G|$ dan akan ditunjukkan teorema benar untuk grup G dengan order $|G|$.

  Andaikan ada subgrup $N \neq G$ dan $N \neq \{e\}$ dengan $|N| < |G|$.

  1. Jika $p \mid |N|$ maka dengan hipotesis induksi diatas $\exists b \neq e \in N$ dengan $o(b) = p$. Oleh karena $N \subset G$, maka $b \in G$ dengan $b^p = e$.
  2. Untuk $p \nmid |N|$. Karena N subgrup dari grup abelian G, maka $N \lhd G$ sehingga dapat dibentuk G/N. Diketahui $p \mid |G|$ dan $p \nmid |N|$ dan menurut Teorema Lagrange $|G/N| = \dfrac{|G|}{|N|}$ didapat $p \mid |G/N|$. Selanjutnya karena G abelian, maka G/N abelian. Perhatikan $|N| > 1$, karena $N \neq \{e\}$ sehingga diperoleh $\dfrac{|G|}{|N|} < |G|$.

     Menurut induksi diatas $\exists Na \in G/N$ yang berorder p dengan $Na \neq N$ dan N elemen satuan dalam G/N. Hal ini berarti $\exists a \in G$ sedemikian hingga

$(Na)^p = Na^p = N$. Karena $Na^p = N$, maka $a^p \in N$ tetapi $a \notin N$. Misal $m = |N|$, maka $(a^p)^m = e$ yang berarti $(a^{pm}) = e$ atau $(a^m)^p = e$

Selanjutnya jika dapat ditunjukkan $b = a^m \neq e$, maka b merupakan elemen dalam G yang berorder p. Andaikan $a^m = e$, maka $(Na)^m = N$ dan karena Na berorder p, maka $p|m$. Tetapi kontradiksi dengan $p \nmid m = |N|$. Dengan demikian $a^m \neq e$ dan terbukti $\exists b \in G$ dan $b^p = e$. ■

Akibat 4.1.1

Diketahui G grup berhingga, maka G merupakan *p-Grup* bila dan hanya bila $|G| = p^n$, $n \in N$.

Bukti

($\Rightarrow$)

Diketahui G merupakan *p-Grup,* maka order dari setiap elemen G adalah perpangkatan bilangan prima p. Akan dibuktikan dengan mengandaikan $|G| \neq p^n$.

Andaikan $|G| = m\,p^n$, $m > 1$ dan $p \nmid m$. Karena $m > 1$, maka ada bilangan prima q sedemikian hingga $q|m$. Menurut Teorema Cauchy, maka $\exists a \in G$ dengan $o(a) = q$. Akibatnya bertentangan dengan G merupakan *p-Grup*. Jadi haruslah $|G| = p^n$, untuk $n \in N$.

($\Leftarrow$)

Diketahui $|G| = p^n$, maka menurut akibat Teorema Lagrange $\forall a \in G$, $o(a) \,|\, |G|$ atau $o(a) \,|\, p^n$. Hal ini berarti $o(a) = p^k$, untuk $k \leq n$ dan $k, n \in N$. Jadi $\forall a \in G$, $o(a) = p^k$.

Terbukti bahwa G adalah *p-Grup*. ■

Teorema 4.1.2. (***Teorema Sylow untuk Grup Abelian***)

Jika G merupakan grup abelian yang berorder $|G|$ sedemikian sehingga $p^\alpha \,|\, |G|$ dan $p^{\alpha+1} \nmid |G|$, maka G mempunyai subgrup yang berorder p^α.

Bukti

- Jika $\alpha = 0$, maka himpunan $\{e\}$ merupakan subgrup yang memenuhi teorema tersebut.
- Jika $\alpha \neq 0$, maka $p \,|\, |G|$. Menurut Teorema Cauchy $\exists a \neq e \in G$ sedemikian hingga $a^p = e$. Dibentuk himpunan $S = \{\, x \in G \,|\, x^{p^n} = e$, untuk suatu $n \in Z\}$. Nampak bahwa $a \in S$, berarti $S \neq \{e\}$. Kemudian akan ditunjukkan S subgrup dari G. Karena G berhingga, maka hanya akan dibuktikan ketertutupan pada himpunan S. Ambil sebarang $x, y \in S$, maka $x^{p^n} = e$ dan $y^{p^m} = e$, $m, n \in Z$.

  Perhatikan $(xy)^{p^{n+m}} = x^{p^{n+m}} y^{p^{n+m}} = e$ terbukti bahwa $(xy) \in S$.
- Misal $|S| = p^\beta$, $\beta \in Z$ dan $0 < \beta \leq \alpha$.

Andaikan ada bilangan prima q dan $q \mid |S|$, $q \neq p$, maka menurut Teorema Cauchy $\exists c \in S$, $c \neq e$ dengan $c^q = e$. Dilain pihak $c^{p^n} = e$, untuk sebarang n. Karena p^n dan q prima relatif, maka $\exists r, s \in Z$ sedemikian hingga $rp^n + sq = 1$, sehingga diperoleh $c^1 = c^{rp^n + sq} = c^{rp^n} c^{sq} = (c^{p^n})^r (c^q)^s = e$, kontradiksi dengan $c \neq e$. Karena S subgrup dari grup G, maka $S \lhd G$ sehingga dapat dibentuk grup G/S yang juga abelian. Andaikan $\beta < \alpha$, maka $|G/S| = \dfrac{|G|}{|S|} = \dfrac{p^\alpha}{p^\beta} = p^{\alpha-\beta}$ dengan α-β >0 Diperoleh $p \mid |G/S|$ dan menurut Teorema Cauchy $\exists Sx \in (G/S)$ dengan $Sx \neq S$ sedemikian sehingga $(Sx)^{p^n} = S$ untuk suatu bilangan bulat $n > 0$. Akan tetapi perhatikan bahwa $S = (Sx)^{p^n} = Sx^{p^n}$ sehingga $x^{p^n} \in S$. Akibatnya $(x^{p^n})^{|S|} = e$. Karena $(x^{p^n})^{|S|} = (x^{p^n})^{p^\beta} = x^{p^{n+\beta}}$, maka $x^{p^{n+\beta}} = e$. Didapat $x \in S$, sehingga $Sx = S$. Kontradiksi dengan $Sx \neq S$. Jadi yang benar $\alpha = \beta$. Terbukti S merupakan subgrup G yang berorder p^α. ■

Akibat 4.1.2

Jika G grup abelian dengan $p^n \mid |G|$, $p^{n+1} \nmid |G|$, maka ada dengan tunggal subgrup G yang berorder p^n.

Bukti:

Ini berarti harus dibuktikan subgrup S dalam Teorema 4.1.2 tunggal. Andaikan ada subgrup T dari G dengan $T \neq S$ dan $|T| = p^n$. Karena G abelian maka ST merupakan subgrup dari G dan menurut Teorema 2.1.20 diperoleh:

$$|ST| = \frac{|S||T|}{|S \cap T|}$$

$$= \frac{p^n p^n}{|S \cap T|}$$

Oleh karena $S \neq T$, maka $|S \cap T| < p^n$. Andaikan $|ST| = p^m$ dengan $m > n$. Karena ST subgrup G, maka menurut Teorema Lagrange $|ST| \mid |G|$. Jadi $p^m \mid |G|$. Padahal $m > n$ sehingga $p^m > p^n$. Akibatnya $p^m \nmid |G|$. Timbul kontradiksi. Jadi tidak ada Subgrup T yang berorder p^n. ∎

Struktur grup abelian berhingga merupakan kejadian khusus dari banyak sekali teorema grup yang cukup luas dan mendalam. Dalam tulisan ini pembahasan akan difokuskan pada sebarang grup abelian berhingga yang memiliki order p^n.

Pada bagian ini akan dibuktikan suatu teorema yang sangat penting dalam grup abelian berhingga yang disebut <u>*Teorema Fundamental Grup Abelian Berhingga*</u>. Dalam teorema ini dikatakan bahwa sebarang grup abelian berhingga merupakan hasil kali langsung dari subgrup-subgrup sikliknya. Namun untuk pembuktian teorema tersebut terlebih dahulu akan diberikan beberapa teorema pendukung.

Teorema 4.1.3

Diberikan G grup abelian berorder mn, dengan m dan n prima relative

a. jika $M = \{x \in G \mid x^m = e\}$ dan $N = \{x \in G \mid x^n = e\}$, maka $G = M \times N$.

b. Jika m dan n tidak sama dengan 1, maka $M \neq \{e\}$ dan $N \neq \{e\}$.

Bukti

a. Untuk menunjukkan $G = M \times N$ digunakan Teorema 3.1.8 yaitu harus ditunjukkan $G = MN$ dan $M \cap N = \{e\}$.

- Oleh karena $M \cap N$ merupakan subgrup dari M, N, maka menurut Teorema Lagrange $|M \cap N| \mid |M|$ dan $|M \cap N| \mid |N|$. Perhatikan bahwa m dan n relative prima sehingga diperoleh $|M \cap N| = 1$. Jadi didapat $M \cap N = \{e\}$.
- Kemudian akan ditunjukkan $G = MN$. Karena $(m,n) = 1$, maka $\exists r,s \in Z$ sedemikian sehingga $rm + sn = 1$. Ambil sebarang $a \in G$, maka $a = a^1 = a^{rm+sn} = a^{rm}\ a^{sn}$, perhatikan bahwa $(a^{sn})^m = a^{snm} = e$ sehingga diperoleh $a^{sn} \in M$ dan $(a^{rm})^n = a^{rmn} = e$, sehingga didapat $a^{rm} \in N$. Jadi untuk sebarang elemen a ini dapat dinyatakan sebagai $a = a^{sn}\ a^{rm}$. Dengan demikian $G = MN$ dan menurut Teorema 3.1.8 terbukti bahwa $G = MxN$.

b. Akan ditunjukkan $M \neq \{e\}$ dan $N \neq \{e\}$. Diketahui $|G| = mn$, $(m,n) = 1$. Perhatikan bahwa M dan N adalah subgrup dari G dan menurut *Teorema Cauchy* jika $m \neq 1$, maka $M \neq \{e\}$ demikian pula jika $n \neq 1$, maka $N \neq \{e\}$. ■

Contoh 4.1.3

Diberikan grup $G = (Z/6Z, +) = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5 \}$ dan $M = \{x \in 6Z \mid 2x = 0 \} = \{0, 3 \}$ $N = \{ x \in 6Z \mid 3x = 0 \} = \{ 0, 2, 4 \}$, maka $M \cap N = \{0\}$ dan untuk setiap eleman $6Z$ dapat dibentuk $0 = 0 + 0$; $1 = 4 + 3$; $2 = 0 + 2$; $3 = 0 + 3$; $4 = 0 + 4$; $5 = 2 + 3$

Akibat 4.1.3

Diberikan G grup abelian berhingga sedemikian hingga $p \mid |G|$, maka $G = P \times T$ untuk sebarang subgrup P dan T dengan $|P| = p^m$, $m > 0$ dan p tidak membagi habis $|T|$.

Bukti

Dibentuk $P = \{ x \in G \mid x^{p^s} = e, s \in Z \}$ dan $T = \{x \in G \mid x^t = e, (p,t) = 1\}$. Menurut Teorema 4.1.3, $G = P \times T$ dan karena $p^s \neq 1$ maka $P \neq \{e\}$. Oleh karena setiap elemen dalam P mempunyai order pangkat p, maka menurut Teorema Cauchy diperoleh $|P| = p^m$, $m \in N$. Kemudian akan ditunjukkan bilangan p tidak membagi habis $|T|$. Andaikan $p \mid |T|$, maka menurut Teorema Cauchy $\exists a \in T$ sedemikian sehingga $a^p = e$. Padahal untuk $a \in T$ berlaku $a^t = e$ sehingga didapat $p \mid t$, timbul kontradiksi $(p,t) = 1$. Jadi bilangan $p \nmid |T|$. ■

Perhatikan bahwa subgrup P dalam teorema diatas tidak hanya sekedar sebarang subgrup dari G akan tetapi P merupakan p-Sylow subgrup dari G.

Teorema 4.1.4

Diberikan G grup abelian dan $|G| = p^n$. Jika $a \in G$ adalah elemen yang mempunyai order tertinggi diantara semua elemen dalam G, maka $G = A \times Q$ dengan A subgrup siklik yang dibangun oleh a dan Q suatu subgrup G.

Bukti

Akan dibuktikan dengan induksi pada n.

- Jika $n = 1$, maka $|G| = p$ dan menurut Teorema 2.1.17, maka G merupakan grup siklik yang dibangun oleh elemen $a \in G$ dan $a \neq e$.
- Andaikan teorema benar untuk $m < n$. Akan ditunjukkan teorema benar untuk kasus berikut.

1. Setiap elemen dalam G berada dalam A sedemikian sehingga $b \notin A$ dan $b^p = e$. Berarti akan ditunjukkan $G = A = \langle a \rangle$, yang dalam hal ini G merupakan grup siklik dibangun oleh $a \in G$. Andaikan $G \neq A$ dan ambil $x \in G \wedge x \notin A$ yang

mempunyai order terkecil dalam G. Karena $o(x^p) < o(x)$, maka $x^p \in A$ sehingga didapat $x^p = a^i$, untuk suatu $i \in Z$.

Selanjutnya akan ditunjukkan $p | i$. Andaikan o(a) $= p^s$ dan diketahui bahwa order a adalah paling tinggi maka didapat $x^{p^s} = e$. Padahal $x^{p^s} = (x^p)^{p^{s-1}} = (a^i)^{p^{s-1}} = (a)^{i(p^{s-1})}$ sehingga diperoleh $p | i$.

Jadi $x^p = a^i$ dengan $p | i$. Kemudian diberikan elemen $y = a^{\frac{-i}{p}} x$. Perhatikan bahwa $y^p = (a^{\frac{-i}{p}} x)^p = a^{-i} x^p = a^{-i} a^i = e$ dan $y \notin A$ karena $x \notin A$. Jadi dengan demikian $\exists b = y \in G$ sedemikian sehingga $b^p = e$ tetapi $b \notin A$ timbul kontradiksi dengan asumsi yang diberikan. Dalam hal ini teorema menjadi benar $G = \langle a \rangle$, yaitu G merupakan grup siklik yang dibangun oleh $a \in G$.

2. Ada $b \in G$ sehingga $b \notin A = \langle a \rangle$ dan $b^p = e$. Misal $B = \langle b \rangle$. Karena B subgrup dalam G, maka $B \triangleleft G$ sehingga dapat dibentuk G/B. Karena $B \neq \langle e \rangle$, maka $|B| > 1$ sehingga $|G/B| = \dfrac{|G|}{|B|} < |G|$. Akan ditunjukkan bahwa o(a) = o(Ba).

   Karena $a^{o(a)} = e$, maka $(Ba)^{o(a)} = Ba^{o(a)} = Be = B$. Padahal order dari Ba adalah o(Ba) sehingga o(Ba) | o(a). Dilain pihak karena $(Ba)^{o(Ba)} = B$ maka didapat $(Ba)^{o(Ba)} = B(a^{o(Ba)}) = B$ sehingga $a^{o(Ba)} \in B$. Akan tetapi

$a^{o(Ba)} \in A$ sehingga $a^{o(Ba)} \in A \cap B = \langle e \rangle$ didapat $a^{o(Ba)} = e$ yang berarti o(a)|o(Ba). Karena o(Ba) | o(a) dan o(a)| | o(Ba) maka o(a) = o(Ba).

Oleh karena Ba suatu elemen dalam G/B yang berorder paling tinggi dalam G/B, maka menurut hipotesa induksi didapat $G/B = \langle Ba \rangle$ x T, untuk suatu subgrup T dari G/B. Menurut Teorema Homomorfisme Kedua didapat $T = Q/B$, untuk suatu subgrup Q dari G. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $G = A$ x Q. Karena Q, dan A subgrup normal dalam G maka menurut Teorema 3.1.8 akan didapat $G = A$ x Q bila $A \cap Q = \{e\}$ dan $G = AQ$.

Terlebih dahulu akan ditunjukkan bahwa $A \cap Q = \{e\}$. Andaikan $A \cap Q \neq \{e\}$ maka $\exists x \in A \cap Q$ dengan $x \neq e$. Karena $x \in A$ maka $x = a^i$, untuk suatu $i \in Z$. Didapat $a^i \in Q$. Akibatnya $Ba^i \in Q/B = T$. Karena $\langle Ba \rangle \cap T = B$, maka didapat $(Ba)^i = B(a)^i = B$. Didapat $a^i \in B$. Jadi $a^i \in A \cap B$, padahal $A \cap B = \{e\}$ maka $x = a^i = e$ timbul kontradiksi. Terbukti $A \cap Q = \{e\}$.

Kemudian akan ditunjukkan $G = AQ$. Ambil sebarang $x \in G$, maka $Bx \in G/B$. Perhatikan bahwa $G/B = \langle Ba \rangle$ x T dengan $T = Q/B$. Sebagai akibatnya $\exists c \in Q$ sedemikian hingga $Bx = BaBc = Bac$. Berarti $x \in Bac$, maka $\exists b_1 \in B$ sedemikian sehingga $x = b_1ac = ab_1c$. Karena $b_1 \in B$, maka $b_1 \in Q$, sebab B subgrup Q sehingga $b_1c \in Q$, namakan $b_1c = q_1$. Jadi untuk sebarang $x \in G$ dapat dinyatakan sebagai $x = aq_1$ dengan $a \in A \wedge q_1 \in Q$ sehingga G dapat dinyatakan sebagai $G = AQ$. Menurut Teorema 3.1.8 diperoleh $G = A$ x Q. ■

Teorema 4.1.5 (*Teorema Fundamental Grup Abelian Berhingga*)

Setiap grup abelian berhingga merupakan hasil kali langsung dari grup-grup siklik.

Bukti :

Diberikan H grup abelian berhingga, maka dapat dimisalkan $|H| = m$. Menurut Teorema Fundamental Aritmatika bilangan m ini dapat dinyatakan sebagai perkalian bilangan prima. Oleh karena itu ada p bilangan prima sedemikian sehingga $p \mid |H|$. Selanjutnya menurut Akibat 4.1.3 maka $H = G \times T$, untuk suatu subgrup G dan T dengan $|G| = p^k, k > 0$, $p \nmid |T|$. Selanjutnya akan ditunjukkan G merupakan hasil kali langsung dalam dari subgrup siklik.-subgrup siklik.

- Andaikan $a_1 \in G$ berorder paling tinggi dalam G, misal $o(a_1) = p^{n_1}$ dan andaikan $A_1 = \langle a_1 \rangle$. Oleh karena A_1 subgrup dalam G, maka $A_1 \triangleleft G$ sehingga dapat dibentuk G/A_1. Selanjutnya didefinisikan pemetaan $\eta : G \to G/A_1$ dengan aturan $\eta(x) = A_1 x$, $\forall x \in G$. Ambil $A_1 b_2 \in G/A_1$ yang memiliki order paling tinggi diantara elemen-elemen dalam G/A_1 dan misal $o(A_1 b_2) = p^{n_2}$. Menurut Teorema 2.2.8 η surjektif, maka $\exists b_2 \in G$ sedemikan sehingga $\eta(b_2) = A_1 b_2$. Menurut Teorema 2.2.10 diperoleh $o(A_1 b_2) \mid o(b_2)$. Oleh karena order a_1 paling tinggi dalam G, maka didapat $n_2 \leq n_1$. Agar diperoleh G hasil kali langsung dalam dari A_1 dan $\langle b_2 \rangle$

haruslah $A_1 \cap \langle b_2 \rangle = \{e\}$. Tetapi $A_1 \cap \langle b_2 \rangle \neq \{e\}$, sebab menurut Teorema 2.2.3 diketahui G/A_1 merupakan grup dengan elemen satuan A_1, maka didapat:

$(A_1 b_2)^{p^{n_2}} = A_1 b_2^{p^{n_2}} = A_1$ sehingga $b_2^{p^{n_2}} \neq e \in A_1$.

Dengan demikian harus dipilih elemen lain yang berfungsi sebagai elemen pembangun.

Oleh karena $b_2^{p^{n_2}} \in A_1$ maka $b_2^{p^{n_2}} = a_1^i$, untuk suatu $i \in Z$. Kemudian

perhatikan bahwa $\left(a_1^{\,i}\right)^{p^{n_1 - n_2}} = (b_2^{\,p^{n_2}})^{p^{n_1-n_2}}$

$$= b_2^{\,p^{n_1}}$$

$$= e$$

didapat $p^{n_1} \,\big|\, ip^{n_1 - n_2}$ yang berarti $\exists j \in Z$ sedemikian sehingga

$$ip^{n_1 - n_2} = jp^{n_1}$$

$$ip^{-n_2} = j$$

$i = jp^{n_2}$ sehingga $p^{n_2} \,\big|\, i$. Jadi berlaku persamaan $b_2^{p^{n_2}} = a_1^i = a_1^{jp^{n_2}}$.

Perhatikan bila dipilih $a_2 = a_1^{-j} b_2$, maka akan didapat $a_2^{p^{n_2}} = \left(a_1^{-j} b_2\right)^{p^{n_2}}$

$$= a_1^{-jp^{n_2}} b_2^{p^{n_2}}$$

$$= a_1^{-jp^{n_2}} a_1^{jp^{n_2}}$$

$$= e$$

Dibentuk grup $A_2 = \langle a_2 \rangle$. Akhirnya dapat ditunjukkan G merupakan hasil kali langsung dari A_1, A_2 yaitu dengan ditunjukkan $A_1 \cap A_2 = \{e\}$.

Andaikan $A_1 \cap A_2 \neq \{e\}$ maka ada $x \in A_1 \cap A_2$ dengan $x \neq e$. Karena $x \in A_2$ maka $x = a_2^t$, untuk suatu $t \in Z$. Didapat $a_2^t \in A_1$. Akibatnya $a_2^t = a_1^{-it} b_2^t$ atau $b_2^t = a_1^{it} a_2^t$ diperoleh $b_2^t \in A_1$. Perhatikan bahwa untuk $b_2^t \in A_1$, maka diperoleh $p^{n_2} \mid t$ sebab $b_2^{p^{n_2}} \in A_1$. Oleh karena $a_2^{p^{n_2}} = e$ sehingga diperoleh $a_2^t = e$. Timbul kontradiksi. Terbukti $A_1 \cap A_2 = \{e\}$.

- Langkah berikutnya dibentuk G/A_1A_2 dan didefinisikan pemetaan $\delta : G \rightarrow G/A_1A_2$ dengan aturan $\delta(x) = A_1A_2x$, $\forall x \in G$.

Ambil elemen $A_1A_2b_3 \in G/A_1A_2$ yang berorder paling tinggi dalam G/A_1A_2 yaitu p^{n_3}. Oleh karena δ surjektif, maka $\exists b_3 \in G$ sedemikian sehingga $\delta(b_3) = A_1A_2b_3$.

Dengan memilih n_2, maka diperoleh $(A_1b_3)^{p^{n_2}} = A_1 b_3^{p^{n_2}} = A_1$.

Jadi $b_3^{p^{n_2}} \in A_1$. Perhatikan pula bahwa:

$$(A_1A_2b_3)^{p^{n_2}} = (A_1A_2)b_3^{p^{n_2}}$$

$$= (A_2A_1)b_3^{p^{n_2}}$$

$$= A_2 A_1 \text{ (sebab } b_3^{p^{n_2}} \in A_1 \text{)}$$

Dengan demikian demikian $b_3^{p^{n_2}} \in A_1 A_2$ yang berakibat $n_3 \le n_2$ dan $n_3 \le n_2 \le n_1$.

Langkah selanjutnya akan dipilih suatu elemen dalam G/A_1A_2 sedemikian sehingga menjadi elemen pembangun. Perhatikan bahwa G/A_1A_2 merupakan grup dengan elemen identitas A_1A_2 sehingga akan diperoleh:

$(A_1 A_2 b_3)^{p^{n_3}} = A_1 A_2 b_3^{p^{n_3}} = A_1 A_2$, yang berarti $b_3^{p^{n_3}} \in A_1 A_2$.

Kemudian andaikan $b_3^{p^{n_3}} = a_1^{i_1} a_2^{i_2}$, untuk suatu $i_1, i_2 \in Z$.

Langkah selanjutnya akan ditunjukkan $p^{n_3} \mid i_1$ dan $p^{n_3} \mid i_2$. Telah diketahui bahwa $b_3^{p^{n_3}} \in A_1 A_2$ dengan $b_3^{p^{n_3}} = a_1^{i_1} a_2^{i_2}$ dari sini didapat:

$(a_1^{i_1} a_2^{i_2})^{p^{n_2 - n_3}} = (b_3^{p^{n_3}})^{p^{n_2 - n_3}} = (b_3^{p^{n_2}})$ dimana $(b_3^{p^{n_2}}) \in A_1$.

Hal ini berarti $a_2^{i_2 p^{n_2 - n_3}} \in A_1$ dan berarti pula $p^{n_2} \mid i_2 p^{n_2 - n_3}$. Sehingga $\exists m \in Z$ sedemikian sehingga $i_2 p^{n_2 - n_3} = m\, p^{n_2}$

$$i_2 p^{-n_3} = m$$

$i_2 = m\, p^{n_3}$. Jadi didapat $p^{n_3} \mid i_2$.

- Perhatikan bahwa $b_3^{p^{n_1}} = e$, sehingga untuk $b_3^{p^{n_3}} = a_1^{i_1} a_2^{i_2}$ maka didapat $(a_1^{i_1} a_2^{i_2})^{p^{n_1 - n_3}} = b_3^{p^{n_1}} = e$. Sehingga nampak bahwa:

$$(a_1^{i_1 p^{n_1 - n_3}} a_2^{i_2 p^{n_1 - n_3}}) = e$$

$a_1^{i_1 p^{n_1 - n_3}} = a_2^{-i_2 p^{n_1 - n_3}}$ yang berarti

$a_1^{i_1 p^{n_1 - n_3}} \in A_1 \cap A_2 = \{e\}$. Dengan demikian $a_1^{i_1 p^{n_1 - n_3}} = e$.

Oleh karena order dari a_1 adalah p^{n_1}, maka $p^{n_1} \mid i_1 p^{n_1 - n_3}$. Berarti $\exists j_1 \in Z$ sedemikian sehingga $i_1 p^{n_1 - n_3} = j_1 p^{n_1}$

$$i_1 = j_1 p^{n_3}, \text{ yang berarti } p^{n_3} \mid i_1.$$

Dengan diketahui $p^{n_3} \mid i_1$. dan $p^{n_3} \mid i_2$. , maka dapat dimisalkan $i_1 = j_1 p^{n_3}$ dan $i_2 = j_2 p^{n_3}$, untuk $j_1, j_2 \in Z$. Sehingga $b_3^{p^{n_3}} = a_1^{i_1} a_2^{i_2}$

$$= a_1^{j_1 p^{n_3}} a_2^{j_2 p^{n_3}}$$

$$= (a_1^{j_1} a_2^{j_2})^{p^{n_3}}$$

Jadi bila dipilih elemen $a_3 = a_1^{-j_1} a_2^{-j_2} b_3$ dan dibentuk $A_3 = \langle a_3 \rangle$, maka

$$a_3^{p^{n_3}} = e.$$

Akhirnya dapat ditunjukkan G merupakan hasil kali langsung dalam dari A_1, A_2, A_3, yaitu dengan ditunjukkan $A_3 \cap (A_1A_2) = \{e\}$.

Andaikan $A_3 \cap (A_1A_2) \neq \{e\}$ maka ada $x \in A_3 \cap A_1A_2$ dengan $x \neq e$. Karena $x \in A_3$ maka $x = a_3^t$, untuk suatu $t \in Z$. Didapat $a_3^t \in A_1A_2$.

Jadi $a_3^t = (a_1^{-j_1}a_2^{-j_2}b_3)^t = (a_1^{-j_1t}a_2^{-j_2t}b_3^t)$. Perhatikan bahwa untuk $b_3^t \in A_1A_2$ didapat $p^{n_3} \mid t$. Oleh karena $a_3^{p^{n_3}} = e$ maka $a_3^t = e$.

Timbul kontradiksi. Terbukti $A_3 \cap (A_1A_2) = \{e\}$. Dengan demikian diperoleh G merupakan hasil kali langsung dari A_1, A_2 dan A_3.

Bila proses diatas dilanjutkan akan diperoleh $A_1 = \langle a_1 \rangle$, $A_2 = \langle a_2 \rangle$, ... , $A_k = \langle a_k \rangle$, yang berorder $p^{n_1}, p^{n_2}, \ldots, p^{n_k}$ dengan $n_1 \geq n_2 \geq \ldots \geq n_k$ sedemikian sehingga $G = A_1A_2\ldots A_k$ dan $A_k \cap (A_1A_2 \ldots A_{k-1}) = \{e\}$. Dengan cara yang sama dapat dilakukan untuk subgrup T. Terbukti G merupakan hasil kali langsung dalam dari subgrup siklik- subgrup siklik . ■

Definisi 4.1.3

Jika G grup abelian beroder p^n dan $G = A_1xA_2x\ldots xA_k$ dengan A_i subgrup siklik berorder p^{n_i} dengan $n_1 \geq n_2 \geq \ldots \geq n_k > 0$, maka bilangan-bilangan bulat $n_1, n_2, \ldots, n_k$ disebut faktor invarian dari G.

Definisi 4.1.4

Jika G grup abelian dan $s \in Z$, maka $G(s) = \{x \in G \mid x^s = e\}$.

Teorema 4.1.6

Jika G grup abelian, maka $G(s) = \{ x \in G \mid x^s = e, s \in Z\}$ merupakan subgrup.

Bukti

- Oleh karena $e \in G$ sedemikian sehingga $e^s = e$ untuk $s \in Z$, maka $e \in G(s)$.

  Jadi $G(s) \neq \varnothing$.

- Kemudian akan ditunjukkan sifat tertutup dipenuhi dalam $G(s)$. Ambil sebarang $x, y \in G(s)$, maka perhatikan bahwa $x^s = e$ dan $y^s = e$. Perhatikan bahwa $(xy)^s = x^s y^s = e$. Dengan demikian $(xy)^s = e$. Terbukti bahwa $(xy) \in G(s)$.

- Ambil sebarang $x \in G(s)$, maka $x^s = e$.

  Perhatikan bahwa $(x^{-1})^s = x^{-s} = (x^s)^{-1} = e^{-1} = e$. Jadi $x^{-1} \in G(s)$.

Terbukti $G(s)$ merupakan subgrup dari G. ■

Teorema 4.1.7

Jika G dan G' grup-grup abelian dan $G \approx G'$, maka $G(s) \approx G'(s)$, $\forall s \in Z$.

Bukti

Diberikan pemetaan $\xi : G \to G'$ suatu isomorfisma. Untuk menunjukkan bahwa ξ isomorfisma dari $G(s)$ ke $G'(s)$ cukup dibuktikan ξ pemetaan surjektif dari $G(s)$ ke G' (s). Dengan demikian cara yang ditempuh dengan menunjukkan $\xi(G(s)) = G'(s)$.

- Pertama akan ditunjukkan $\xi(G(s)) \subset G'(s)$.

  Ambil sebarang $y \in \xi(G(s))$, maka $\exists x \in G(s)$ sedemikian sehingga $y = \xi(x)$. Jika $x \in G(s)$, maka $x^s = e$ dan perhatikan bahwa $\xi(x^s) = \xi(e) = e'$, dengan e' elemen satuan dari $G'(s)$. Padahal $\xi(x^s) = (\xi(x))^s$, maka didapat $(\xi(x))^s = e'$ oleh karena itu $\xi(x) = y \in G'(s)$. Jadi terbukti $\xi(G(s)) \subset G'(s)$.

- Langkah berikutnya ditunjukkan $G'(s) \subset \xi(G(s))$. Ambil sebarang $u' \in G'(s)$, maka $u' \in G'$ dan $(u')^s = e'$. Karena ξ pemetaan surjektif dari G ke G', maka $\exists y \in G$ sedemikian sehingga $u' = \xi(y)$. Perhatikan bahwa $(u')^s = (\xi(y))^s = \xi(y^s) = e'$. Karena ξ pemetaan yang injektif , maka didapat $y^s = e$. Karena $y \in G(s)$ maka $\xi(y) = u' \in \xi(G(s))$. Jadi terbukti $G'(s) \subset \xi(G(s))$.

Dengan demikian ξ pemetaan yang surjektif dari $G(s)$ ke $G'(s)$.

Oleh karena ξ injektif, surjektif dan homomorfisme dari $G(s)$ ke $G'(s)$ diperoleh $G(s) \approx G'(s)$. ■

Teorema 4.1.8

Diberikan G grup abelian berorder p^n. Andaikan $G = A_1 x A_2 x \ldots x A_k$ dengan setiap $A_i = \langle a_i \rangle$ subgrup siklik yang berorder p^{n_i} dan $n_1 \geq n_2 \geq \ldots \geq n_k > 0$. Jika $m \in Z$ dan $n_t > m \geq n_{t+1}$, maka $G(p^m) = B_1 x B_2 x \ldots x B_t x A_{t+1} x \ldots x A_k$, dengan $B_i = \langle a_i^{p^{n_i - m}} \rangle$ dan $|B_i| = p^m$, untuk $i \leq t$. Order dari $G(p^m)$ adalah p^u dengan $u = mt + \sum_{i=t+1}^{k} n_i$.

Bukti

Akan ditunjukkan $G(p^m) = B_1 x B_2 x \ldots x B_t x A_{t+1} x \ldots x A_k$, dengan A_i dan B_i seperti yang dijelaskan diatas. Pertama ditunjukkan $A_{t+1}, A_{t+2}, A_{t+3}, \ldots, A_k$ semuanya dalam $G(p^m) = \{x \in G \mid x^{p^m} = e\}$.

- Karena $m \geq n_{t+1} \geq n_{t+2} \geq \ldots \geq n_k > 0$, maka A_j dengan $j \geq t+1$ terletak dalam $G(p^m)$. Hal ini dapat ditunjukkan demikian, jika $j \geq t+1$, $m \geq n_j$ maka $p^m \geq p^{n_j}$ dan $a_j^{p^m} = (a_j^{p^{n_j}})^{p^{m-n_j}} = e$. Selanjutnya, jika $i \leq t$, $n_i > m$, maka $p^m < p^{n_i}$ dan perhatikan bahwa $a_i^{p^{n_i}} = (a_i^{p^{n_i - m}})^{p^m} = e$ sehingga setiap $a_i^{p^{n_i - m}}$ dalam $G(p^m)$ dan akibatnya subgrup yang dibangun oleh $a_i^{p^{n_i - m}}$ yaitu B_i juga dalam $G(p^m)$.

Terbukti bahwa $B_1, B_2, \ldots, B_t, A_{t+1}, \ldots, A_k$ semuanya dalam $G(p^m)$, maka hasil kali langsungnya juga dalam $G(p^m)$ sehingga didapat

$G(p^m) \supset B_1 \, x \, B_2 \, x \ldots x \, B_t \, x \, A_{t+1} \, x \ldots x \, A_k$.

- Kemudian perhatikan untuk sebarang $x \in G$ dapat dinyatakan sebagai $x = a_1^{\beta_1} a_2^{\beta_2} \cdots a_k^{\beta_k}$. Jika x dalam $G(p^m)$, maka $x^{p^m} = e$ sehingga didapat

$e = x^{p^m} = a_1^{\beta_1 p^m} \cdots a_k^{\beta_k p^m}$.

Perhatikan bahwa hasil kali dari subgrup-subgrup $A_1, A_2, \ldots, A_k$ menyatakan hasil kali langsung sehingga diperoleh persamaan:

$a_1^{\beta_1 p^m} = e,\ a_2^{\beta_2 p^m} = e,\ \ldots,\ a_k^{\beta_k p^m} = e$. Oleh karena $o(a_i) = p^{n_i}$, maka $p^{n_i} \mid \beta_i p^m$ untuk $i = 1, 2, \ldots, k$. Jika $i \geq t+1$, maka $m \geq n_{t+1} \geq n_{t+2} \geq \ldots \geq n_k > 0$ dan $p^{n_i} \leq p^m$ sehingga $p^{n_i} \mid p^m$. Sedangkan untuk $i \leq t$, diperoleh $p^{n_i} \mid \beta_i p^m$ atau $p^{n_i - m} \mid \beta_i$, dengan demikian $\exists u_i \in Z$ sedemikian sehingga $\beta_i = u_i p^{n_i - m}$, dari yang didapat kemudian disubstitusikan dalam persamaan $x = a_1^{\beta_1} a_2^{\beta_2} \cdots a_k^{\beta_k}$

sehingga diperoleh persamaan sebagai berikut:

$x = a_1^{u_1 p^{n_1 - m}} a_2^{u_2 p^{n_2 - m}} \cdots a_t^{u_t p^{n_t - m}} a_{t+1}^{\beta_{t+1}} \cdots a_k^{\beta_k}$. Hal ini berarti bahwa $x \in B_1 x B_2 x \ldots x B_t x A_{t+1} x \ldots x A_k$.

Terbukti bahwa $G(p^m) = B_1 x B_2 x \ldots x B_t x A_{t+1} x \ldots x A_k$

- Kemudian akan ditunjukkan $|G(p^m)| = p^u$ dengan $u = mt + \sum_{i=t+1}^{k} n_i$. Perhatikan bahwa $G = B_1 x B_2 x \ldots x B_t x A_{t+1} x \ldots x A_k$, maka $|G| = |B_1||B_2|\ldots|B_t||A_{t+1}|\ldots|A_k|$. Oleh karena setiap $|B_i| = p^m$ dan setiap $|A_i| = p^{n_i}$ sehingga didapat persamaan:

$|G(p^m)| = \underbrace{p^m p^m \ldots p^m}_{t\ kali} p^{n_{t+1}} \ldots p^{n_k}$. Jika $|G(p^m)| = p^u$ dengan $u = mt + \sum_{i=t+1}^{k} n_i$.

■

Akibat 4.1.8

Diberikan G grup abelian dan $|G| = p^n$. Andaikan $G = A_1 x A_2 x \ldots x A_k$ dengan setiap $A_i = \langle a_i \rangle$ dan $|A_i| = p^{n_i}$, $n_1 \geq n_2 \geq \ldots \geq n_k > 1$.

Jika $G(p) = B_1 x B_2 x \ldots x B_k$ dengan $B_i = \langle a_i^{p^{n_i - 1}} \rangle$ dan $|B_i| = p$, untuk $i = 1, 2, .., k$, maka $|G(p)| = p^k$.

Bukti

Sama seperti bukti teorema 4.1.7 dengan nilai $m = 1$. Berarti $n_i \geq m = 1$ dan $p^{n_i} \geq p$ untuk setiap i. Sehingga didapat $[a_i^{p^{n_i-1}}]^p = a_i^{p^{n_i}} = e$ sehingga subgrup yang dibangun oleh $a_i^{p^{n_i-1}}$ yaitu B_i terletak dalam $G(p)$. Akhirnya karena order dari setiap B_i adalah p dan karena $G = B_1 \, x \, B_2 \, x ... x \, B_k$, maka $|G| = \underbrace{pp.....p}_{k\ kali} = p^k$. ■

Teorema 4.1.9

Jika G dan G' grup-grup abelian dan masing-masing berorder p^n dan $G = A_1 \, x \, A_2 \, x ... x \, A_k$ dengan setiap A_i grup siklik dan $|A_i| = p^{n_i}$ dengan $n_1 \geq n_2 \geq n_3 \geq .. \geq n_k > 0$ dan $G' = B_1 \, x \, B_2 \, x ... x \, B_s$ dengan setiap B_i grup siklik dan $|B_i| = p^{h_i}$ dengan $h_1 \geq h_2 \geq .... \geq h_s > 0$, maka $G \approx G'$ bila dan hanya bila $k = s$ dan $n_i = h_i$ untuk setiap i,.

Bukti

($\Leftarrow$)

Diberikan pemetaan $\eta : G \to G'$ dengan aturan $\eta(a_1^{m_1} a_2^{m_2} \dots a_k^{m_k}) = b_1^{m_1} b_2^{m_2} \dots b_k^{m_k}$ untuk setiap $(a_1^{m_1} a_2^{m_2} \dots a_k^{m_k}) \in G$ dengan $m_i \in Z$. Kemudian akan ditunjukkan $G \approx G'$.

- Akan ditunjukkan η terdefinisi dengan baik. Ambil sebarang $x, y \in G$, karena $G = A_1 \, x \, A_2 \, x ... x \, A_k$, maka x dan y dapat dinyatakan sebagai:

$x = a_1^{m_1} a_2^{m_2} \dots a_k^{m_k}$ dan $y = a_1^{n_1} a_2^{n_2} \dots a_k^{n_k}$. Perhatikan bahwa G merupakan hasil kali langsung sehingga untuk $x = y$, maka $a_1^{m_1} \dots a_k^{m_k} = a_1^{n_1} \dots a_k^{n_k}$ diperoleh $m_1 = n_1, m_2 = n_2, \dots, m_k = n_k$. Sehingga didapat

$b_1^{m_1} = b_1^{n_1}, \dots, b_k^{m_k} = b_k^{n_k}$ dan $b_1^{m_1} b_2^{m_2} \dots b_k^{m_k} = b_1^{n_1} b_2^{n_2} \dots b_k^{n_k}$ Jadi $\eta(x) = \eta(y)$.

Terbukti pemetaan η terdefinisi dengan baik.

- Akan ditunjukkan η homomorfisma. Ambil sebarang $x, y \in G$ maka $x = a_1^{m_1} a_2^{m_2} a_3^{m_3} \dots a_k^{m_k}$ dan $y = a_1^{n_1} a_2^{n_2} a_3^{n_3} \dots a_k^{n_k}$. Selanjutnya perhatikan bahwa $\eta(xy) = \eta(a_1^{m_1} \dots a_k^{m_k}\ a_1^{n_1} \dots a_k^{n_k})$. Oleh karena G grup abelian didapat

$\eta(a_1^{m_1} a_1^{n_1} \dots a_k^{m_k} a_k^{n_k}) = \eta(a_1^{m_1+n_1} a_2^{m_2+n_2} \dots a_k^{m_k+n_k}) =$

$(b_1)^{m_1+n_1} (b_2)^{m_2+n_2} \dots (b_k)^{m_k+n_k} = (b_1)^{m_1} (b_1)^{n_1} \dots (b_k)^{m_k} (b_k)^{n_k} =$

$(b_1)^{m_1} \dots (b_k)^{m_k} (b_1)^{n_1} \dots (b_k)^{n_k} = \eta(x)\eta(y)$.

Terbukti pemetaan η homomorfisma.

- Akan ditunjukkan η injektif. Ambil sebarang $x, y \in G$ dengan $\eta(x) = \eta(y)$.

Misal $x = a_1^{m_1} \dots a_k^{m_k}$ dan $y = a_1^{n_1} \dots a_k^{n_k}$, maka

$$\eta(a_1^{m_1} a_2^{m_2} \dots a_k^{m_k}) = \eta(a_1^{n_1} a_2^{n_2} \dots a_k^{n_k})$$

$$(b_1)^{m_1} \dots (b_k)^{m_k} = (b_1)^{n_1} \dots (b_k)^{n_k}.$$

Karena G' merupakan hasil kali langsung dalam dari $B_1, B_2, \ldots, B_k$ diperoleh $m_1 = n_1, m_2 = n_2, \ldots, m_k = n_k$.

Sehingga diperoleh $x = a_1^{m_1} \ldots a_k^{m_k} = a_1^{n_1} \ldots a_k^{n_k} = y$.

Jadi terbukti $x = y$ dan pemetaan η injektif.

- Ambil sebarang $y \in G'$, oleh karena $G' = B_1 x B_2 x \ldots x B_s$, maka y dapat dinyatakan sebagai $y = b_1^{n_1} \ldots b_k^{n_k}, n_i \in Z$ dan perhatikan bahwa untuk $n_i \in Z$ maka $a^{n_1} \ldots a^{n_k}$ elemen dalam G. Dengan demikian $b_1^{n_1} \ldots b_k^{n_k} = \eta(a_1^{n_1} \ldots a_k^{n_k})$.

  Jadi $\exists x \in G$, $x = a_1^{m_1} \ldots a_k^{m_k}$ sedemikian sehingga $\eta(x) = y$.

  Terbukti η surjektif.

Dengan demikian terbukti $G \approx G'$.

($\Rightarrow$)

Diketahui $G \approx G'$ dan andaikan $G = A_1 x A_2 x \ldots x A_k$ dengan A_i grup siklik berorder p^{n_i}, $n_1 \geq n_2 \geq n_3 \geq \ldots \geq n_k > 0$ dan $G' = B_1 x B_2 x \ldots x B_s$ dengan B_i grup siklik berorder p^{h_i} dengan $h_1 \geq h_2 \geq \ldots \geq h_s > 0$. Akan ditunjukkan $k = s$ dan $n_i = h_i, \forall i$.

- Diketahui $G \approx G'$, maka menurut Teorema 4.1.7 $G(p^m) \approx G'(p^m)$ untuk sebarang $m \geq 0$, $m \in Z$, sehingga $G(p^m)$ dan $G'(p^m)$ mempunyai order yang sama. Hal ini akan diperjelas untuk kasus $m = 1$, $|G(p)| = |G'(p)|$, kemudian menurut akibat

Teorema 4.1.7 diketahui bahwa $|G(p)| = p^k$ dan $|G'(p)| = p^s$ sehingga $p^k = p^s$ terjadi bila $k = s$.

- Andaikan $n_i \neq h_i$ untuk beberapa i, dan t adalah i pertama sedemikian sehingga $n_t \neq h_t$ dan diandaikan $n_t > h_t$. Sebut $m = h_t$. Perhatikan $H = \{x^{p^m} \mid x \in G\}$ dan $H' : \{(x')^{p^m} \mid x' \in G'\}$ berturut-turut adalah subgrup dari grup G dan G'. Oleh karena $G \approx G'$, maka $H \approx H'$. Langkah selanjutnya dijelaskan faktor invarian dari H dan H'. Karena $G = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_k$ dengan $A_i = \langle a_i \rangle$ berorder p^{n_i} sehingga diperoleh $H = C_1 \times \ldots \times C_t \times \ldots \times C_r$ dengan $C_i = \langle a_i^{p^m} \rangle$ berorder $p^{n_i - m}$ dan $n_r > m = h_t \geq n_{r-1}$. Jadi faktor invarian dari H adalah $n_1 - m, n_2 - m, \ldots, n_r - m$ dan banyaknya faktor invarian dari H adalah $r \geq t$. Kemudian perhatikan bahwa $G' = B_1 \times B_2 \times \ldots \times B_k$ dengan $B_i = \langle b_i \rangle$ grup siklik berorder p^{h_i} sehingga untuk $m = h_t$, $h_1 \geq h_2 \geq \ldots \geq h_t = m > 0$, maka diperoleh $H' = D_1 \times D_2 \times \ldots \times D_{t-1}$ dengan $D_i = \langle (b_i)^{p^m} \rangle$ grup siklik berorder $p^{h_i - m}$. Jadi faktor invarian H' adalah $h_1 - m, h_2 - m, \ldots, h_{t-1} - m$ sehingga banyaknya keseluruhan faktor invarian dari H' adalah t-1. Hal ini kontradiksi dengan $H \approx H'$, sehingga H dan H' mempunyai banyak faktor invarian yang sama.

Jadi akibatnya $n_i = h_i$. ■

Teorema 4.1.10

Banyaknya grup abelian yang tidak isomorfis berorder p^n sama dengan banyaknya partisi dari n.

Bukti

Perhatikan bahwa $G = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_k$, dengan A_i grup siklik berorder p^{n_i}. Jika $n_1 \geq n_2 \geq n_3 \geq \ldots \geq n_k > 0$, maka $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$, partisi dari n, sebab G merupakan hasil kali langsung dalam dari $A_1, A_2, \ldots, A_k$. Kemudian dengan definisi hasil kali langsung dalam, maka invarian-invarian dari G adalah $n_1 \geq n_2 \geq n_3 \geq \ldots \geq n_k > 0$ tunggal. Dengan demikian dua partisi yang berbeda dari sebarang grup abelian memberikan grup-grup abelian yang berbeda.

Akibat 4.1.10

Banyaknya grup abelian yang tidak isomorfis yang berorder $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$ dengan p_i merupakan bilangan prima yang berbeda dengan setiap $\alpha_i \geq 0$, $\alpha_i \in Z$ adalah $p(\alpha_1)p(\alpha_2)\ldots p(\alpha_k)$ dengan $p(u)$ menyatakan banyaknya partisi dari u.

Contoh 4.1.10

Banyaknya grup abelian yang berorder p^5 diperoleh dari banyaknya partisi dari 5.

Jika Z_p menyatakan grup siklik berorder p, maka

Partisi dari 5	Grup Abelian
5	Z_{p^5}
4, 1	$Z_{p^4} x\ Z_p$
3, 2	$Z_{p^3} x\ Z_{p^2}$
3,1,1	$Z_{p^3} x\ Z_p x\ Z_p$
2, 2, 1	$Z_{p^2} x\ Z_{p^2} x\ Z_p$
2, 1, 1, 1	$Z_{p^2} x\ Z_p x\ Z_p x\ Z_p$
1, 1, 1, 1, 1	$Z_p x\ Z_p x\ Z_p x\ Z_p x\ Z_p$

Contoh 4.1.11

Banyaknya grup abelian yang berorder 1800 didapat dengan cara menyatakan bilangan 1800 sebagai perkalian bilangan prima yaitu1800 = $2^3\ 3^2\ 5^2$. Sehingga diperoleh:

order p^n	Partisi dari n	Grup Abelian
2^3	3	Z_{2^3}
	2, 1	$Z_{2^2} x\ Z_2$
	1, 1, 1	$Z_2 x\ Z_2 x\ Z_2$
3^2	2	Z_{3^2}
	1, 1	$Z_3 x\ Z_3$
5^2	2	Z_{5^2}
	1, 1	$Z_5 x\ Z_5$

Jadi kemungkinan grup abelian berhingga diatas adalah:

$Z_{2^3} x\ Z_{3^2} x\ Z_{5^2}$; $Z_{2^3} x\ Z_{3^2} x\ Z_5 x\ Z_5$; $Z_{2^3} x\ Z_3 x\ Z_3 x\ Z_{5^2}$

$Z_{2^3} x\ Z_3 x\ Z_3 x\ Z_5 x\ Z_5$; $Z_{2^2} x\ Z_2 x\ Z_{3^2} x\ Z_{5^2}$;

$Z_{2^2} x\ Z_2 x\ Z_3 x\ Z_3 x\ Z_5 x\ Z_5$; $Z_{2^2} x\ Z_2 x\ Z_3 x\ Z_3 x\ Z_{5^2}$;

$Z_2 x\ Z_2 x\ Z_2 x\ Z_{3^2} x\ Z_{5^2}$

$Z_2 x\ Z_2 x\ Z_2 x\ Z_{3^2} x\ Z_5 x\ Z_5$; $Z_2 x\ Z_2 x\ Z_2 x\ Z_3 x\ Z_3 x\ Z_{5^2}$

$Z_2 x\ Z_2 x\ Z_2 x\ Z_3 x\ Z_3 x\ Z_5 x\ Z_5$

BAB V

KESIMPULAN

Berdasarkan uraian pada bab-bab sebelumnya, maka banyak sifat-sifat grup abelian berhingga yang tidak dimiliki oleh grup-grup lain. Sifat-sifat yang hanya dimiliki oleh grup abelian berhingga menjadi pijakan yang sangat penting ketika mempelajari konsep-konsep grup abelian berhingga. Akhirnya beberapa sifat yang dapat dirangkum disini adalah:

1. Grup abelian berhingga adalah grup yang dibangun dengan elemen-elemen yang berhingga serta di dalamnya berlaku hukum komutatif.
2. Grup abelian berhingga merupakan hasil kali langsung dalam dari grup-grup siklik.
3. Dua buah grup abelian berhingga akan isomorfik bila dan hanya bila mempunyai faktor invarian yang sama.
4. Bila grup abelian berhingga berorder p^n, p bilangan prima dan $n \in Z$, maka banyaknya grup abelian yang tidak isomorfik yang berorder p^n sama dengan banyaknya partisi dari bilangan bulat n.
5. Bila grup abelian berhingga berorder $p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_i^{n_k}$ dengan p_i merupakan bilangan prima yang berbeda serta untuk setiap $n_i > 0$, maka banyaknya grup abelian yang tidak isomorfik yang berorder $p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_i^{n_k}$ adalah $p(n_1)p(n_2)\ldots p(n_k)$ dengan $p(u)$ menyatakan partisi dari u

Daftar Pustaka

1. Dummit, Davit S and Richard M. Foote, 1991, *Abstract Algebra*, Anglewood cliffs.N.J: Prentice Hall
2. Durbin, John R., 1985, *Modern Algebra*, An Introduction, Reading Massachusetts, John Wiley and Son
3. Fraleigh. John., 1989, *A First Course in Abstract Algebra*, Reading, Massachusetts: Addison-Wesley Publishing Company Inc.,
4. Herstein, I.N., 1964, *Topics in Algebra*, New York: Blaisdell,
5. Herstein, I.N., 1996, *Abstract Algebra*, New Jersey: Prentice Hall,
6. Pedersen, Fanklin.D., 1993, *Modern Algebra*, A Conceptual Approach, Boulevard: Wm.C Brown Communication, Inc.,
7. Soehakso, R.M.J.T, 1980, *Aljabar Abstrak*, Yogyakarta: FMIPA UGM.,.