TRANSFORMASI LINEAR DAN PENERAPANNYA PADA PENYELESAIAN PERSAMAAN DIFERENSIAL LINEAR HOMOGEN TINGKAT-n DENGAN KOEFISIEN KONSTAN

SKRIPSI

Diajukan Untuk Memenuhi Salah Satu Syarat
Memperoleh Gelar Sarjana Pendidikan
Program Studi Pendidikan Matematika

Oleh :

Maria Goretti Fitri Ana Mintarsih

NIM : 931414013
NIRM : 930055201050120012

PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA
JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
UNIVERSITAS SANATA DHARMA
YOGYAKARTA

1999

SKRIPSI

TRANSFORMASI LINEAR DAN PENERAPANNYA PADA PENYELESAIAN PERSAMAAN DIFERENSIAL LINEAR HOMOGEN TINGKAT - n DENGAN KOEFISIEN KONSTAN

Oleh :

Maria Goretti Fitri Ana Mintarsih
NIM : 931414013
NIRM : 930055201050112012

Telah disetujui oleh :

Pembimbing

Dr. F. Susilo, S.J.

tanggal 8-4-1999

SKRIPSI

TRANSFORMASI LINIER DAN PENERAPANNYA PADA PENYELESAIAN PERSAMAAN DIFERENSIAL LINIER HOMOGEN TINGKAT - n DENGAN KOEFISIEN KONSTAN

Dipersiapkan dan ditulis oleh

Maria Goretti Fitri Ana Mintarsih
NIM : 93144013
NIRM : 9300552010501120012

Telah dipertahankan di depan Panitia Penguji
pada tanggal 22 September 1999
dan dinyatakan memenuhi syarat

Susunan Panitia Penguji

	Nama lengkap	Tanda Tangan
Ketua	Drs. F. Kartika Budi, M.Pd.	....
Sekretaris	Drs. St. Susento, M.Si.	....
Anggota	Dr. F. Susilo, S.J.	....
Anggota	Dr. St. Suwarsono	....
Anggota	Drs. St.Susento, M.Si.	....

Yogyakarta, November 1999
Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan
Universitas Sanata Dharma
Dekan,

(Dr. Paul Suparno,S.J., M.S.T.)

" Ajarlah kami menghitung hari-hari kami sedemikian, hingga kami beroleh hati yang bijaksana ".

(Mazmur 90 :12)

" Hanya pada Allah saja kiranya aku tenang sebab dari pada-Nyalah harapanku.

Hanya Dialah gunung batuku dan keselamatanku, kota bentengku, aku tidak akan goyah".

(Mazmur 62 : 6-7)

Kupersembahkan untuk

Bapak & Ibu

Mbak Heni & Mas Rudi

Krisna & Rani

Puti

ABSTRAK

TRANSFORMASI LINEAR DAN PENERAPANNYA PADA PENYELESAIAN PERSAMAAN DIFERENSIAL LINEAR HOMOGEN TINGKAT-n DENGAN KOEFISIEN KONSTAN

Maria Goretti Fitri Ana Mintarsih
Universitas Sanata Dharma
Yogyakarta

Himpunan semua penyelesaian Persamaan Diferensial Linear Homogen (PDLH) tingkat-n dengan koefisien konstan dapat ditentukan dengan menggunakan aljabar linear, khususnya yang berkaitan dengan sistem persamaan linear, ruang vektor, dan transformasi linear. Transformasi linear adalah transformasi dari suatu ruang vektor V ke dalam ruang vektor W yang mengawetkan operasi dari ruang vektor tersebut. Suatu transformasi linear dari ruang vektor V ke dalam ruang vektor V disebut operator linear pada V. Permasalahan penentuan himpunan semua penyelesaian PDLH tingkat-n dengan koefisien konstan dapat dirumuskan ke dalam permasalahan aljabar linear dengan menggunakan operator diferensial tingkat-n, yaitu menentukan suatu basis dari ruang nol dari operator diferensial yang berkaitan dengan persamaan diferensial tersebut.

ABSTRACT

LINEAR TRANSFORMATIONS AND ITS APPLICATION TO THE SOLUTION TO A HOMOGENEOUS LINEAR DIFFERENTIAL EQUATION OF ORDER-n WITH CONSTANT COEFFICIENTS

Maria Goretti Fitri Ana Mintarsih
Sanata Dharma University
Yogyakarta

The set of all solutions to a Homogeneous Linear Differential Equation (PDLH) of order-n with constant coefficients can be determined by using linear algebra, in particular the system of linear equations, vector spaces and linear transformations. A linear transformation is a transformation from one vector space V into another vector space W which preserves the operations of both vector spaces. A linear transformation from vector space V into itself is called linear operator on V. The problem of determining set of all solutions to a PDLH of order-n with constant coefficients can be formulated as a linear algebra problem by using differential operator of order-n, i.e. determining a basis of the null space of the differential operator associated with the differential equation.

KATA PENGANTAR

Puji dan syukur penulis panjatkan kepada Tuhan Yang Maha Pengasih, karena atas kebaikanNya skripsi ini dapat penulis selesaikan. Skripsi ini disusun untuk memenuhi salah satu persyaratan memperoleh gelar Sarjana Pendidikan pada Program Studi Pendidikan Matematika di Universitas Sanata Dharma Yogyakarta.

Kesulitan-kesulitan yang penulis alami selama proses penyusunan skripsi adalah pengalaman yang berharga bagi penulis. Hanya karena dorongan, perhatian, serta dukungan dari berbagai pihak, maka penulis dapat menyelesaikan skripsi ini. Oleh karena itu, pada kesempatan ini penulis ingin mengucapkan terima kasih kepada

1. Drs. St. Susento, M.Si selaku Ketua Program Studi Pendidikan Matematika .
2. Dr. F. Susilo, S.J selaku dosen pembimbing yang telah membimbing dan mengoreksi skripsi ini.
3. Bapak dan ibu dosen JPMIPA USD atas segala bimbingannya selama penulis menempuh perkuliahan di JPMIPA USD.
4. Teman-teman yang telah banyak memberi bantuan berupa sumbangan pikiran maupun dorongan semangat yang sangat berharga bagi penulis.
5. Semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu atas bantuannya sehingga skripsi ini dapat diselesaikan.

Penulis menyadari skripsi ini masih jauh dari sempurna. Oleh karena itu, penulis sangat mengharapkan saran dan kritik yang membangun dari pembaca demi perbaikan skripsi ini.

Yogyakarta, Juli 1999

Penulis

DAFTAR ISI

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Dalam matematika, cabang matematika yang satu dengan cabang matematika yang lain saling berkaitan erat sebab pemahaman cabang matematika yang satu dapat merupakan syarat untuk memahami cabang matematika yang lain. Dalam skripsi ini penulis ingin menunjukkan keterkaitan yang erat antara dua cabang matematika yang telah di dapat dalam perkuliahan.

Dalam matakuliah aljabar linear dibahas mengenai hubungan antara aljabar linear dengan matriks dan geometri. Sehingga timbul kesan seolah-olah aljabar linear hanyalah berkaitan dengan matriks dan geometri. Namun sebenarnya aljabar linear juga berkaitan dengan cabang-cabang matematika yang lain seperti persamaan diferensial, program linear, statistika, dan lain-lain.

Penulis tertarik untuk membahas mengenai keterkaitan antara aljabar linear dengan persamaan diferensial. Akan ditentukan himpunan semua penyelesaian dari Persamaan Diferensial Linear Homogen (PDLH) tingkat-n dengan koefisien konstan dengan menggunakan aljabar linear, khususnya yang berkaitan dengan sistem persamaan linear, ruang vektor, dan transformasi linear.

1.2 Perumusan Masalah

Pokok permasalahan yang akan di bahas dalam skripsi ini dapat dirumuskan sebagai berikut :

a) Apakah yang dimaksud dengan transformasi linear ?

b) Apakah yang dimaksud dengan operator diferensial tingkat-n ?

c) Bagaimanakah operator diferensial dapat digunakan untuk menyelesaikan PDLH tingkat-n dengan koefisien konstan ?

d) Bagaimanakah mencari suatu basis dari ruang penyelesaian PDLH tingkat-n dengan koefisien konstan ?

1.3 Tujuan Penulisan

Tujuan dari penulisan ini adalah untuk memahami pengertian transformasi linear, yang kemudian digunakan untuk mengembangkan pengertian operator diferensial, yang dapat digunakan untuk menentukan himpunan semua penyelesaian dari PDLH tingkat-n dengan koefisien konstan.

1.4 Pembatasan Masalah

a) Ruang vektor yang dibahas adalah ruang vektor atas bilangan kompleks.

b) Persamaan diferensial yang dibahas adalah persamaan diferensial linear homogen tingkat-n dengan koefisien konstan.

c) Sifat-sifat transformasi linear yang di bahas adalah sifat-sifat yang akan digunakan untuk menentukan himpunan semua penyelesaian PDLH tingkat-n dengan koefisien konstan.

1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat yang diharapkan dari penelitian ini adalah :

a) Pembaca dapat dengan jelas mengetahui keterkaitan antara transformasi linear dengan penentuan himpunan semua penyelesaian PDLH tingkat-n dengan koefisien konstan.

b) Memberi motivasi kepada pembaca untuk melakukan penelitian lebih lanjut , mengenai penerapan aljabar linear pada cabang matematika yang lain.

1.6 Metode Penelitian

Metode penelitian yang digunakan adalah metode penelitian kepustakaan.

BAB II

SISTEM PERSAMAAN LINEAR

Dalam Bab II ini kita akan mengingat kembali beberapa sifat dari sistem persamaan linear yang akan kita gunakan untuk memahami sifat-sifat dari ruang vektor yang dibahas dalam Bab III.

<u>Definisi 2.1</u>

Persamaan Linear dengan *n* variabel adalah persamaan yang berbentuk

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b \tag{1}$$

di mana $a_1, a_2, \ldots, a_n$ dan b adalah konstanta-konstanta kompleks dan $x_1, x_2, \ldots, x_n$ adalah variabel-variabel. Bentuk umum Sistem Persamaan Linear (SPL) *mxn* yang terdiri dari *m* persamaan dan *n* variabel adalah sebagai berikut :

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \tag{2}$$

di mana $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}$ dan b_i adalah konstanta-konstanta kompleks, dengan $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}$ tidak bersama-sama sama dengan nol untuk $i = 1, 2, \ldots, m$.

Definisi 2.2

Penyelesaian SPL *mxn* adalah pasangan terurut bilangan-bilangan $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ yang memenuhi semua persamaan linear dalam SPL. Himpunan semua penyelesaian dari SPL disebut **himpunan penyelesaian** dari SPL. SPL yang mempunyai penyelesaian disebut **konsisten**, sedangkan SPL yang tidak mempunyai penyelesaian disebut **inkonsisten**. SPL yang inkonsisten mempunyai himpunan penyelesaian yang kosong. SPL yang konsisten mempunyai himpunan penyelesaian tak kosong, dengan tepat satu anggota atau tak hingga banyak anggota.

SPL (2) di depan dapat ditulis dengan notasi matriks sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

atau lebih singkat di tulis $Ax = b$, di mana $A = (a_{ij})$ untuk $i = 1,2,\ldots,m$; $j = 1,2,\ldots,n$; $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ dan $b = (b_1, b_2, \ldots, b_m)^T$. Matriks A disebut **matriks koefisien**. Sedangkan matriks yang terdiri dari matriks A dan matriks $b = (b_1, b_2, \ldots, b_m)^T$ yang ditulis pada kolom terakhir disebut **matriks yang diperbesar**. Jadi matriks yang diperbesar dari SPL (2) adalah

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

<u>Definisi 2.3</u>

Dua SPL yang memuat variabel yang sama dikatakan ekuivalen jika kedua SPL tersebut mempunyai himpunan penyelesaian yang sama.

<u>Teorema 2.1</u>

Tiga operasi berikut yang dikerjakan pada suatu SPL akan menghasilkan SPL lain yang ekuivalen :

1. Menukar tempat dua persamaan dalam SPL tersebut.
2. Mengalikan suatu persamaan dengan konstanta kompleks yang tidak sama dengan nol.
3. Menambahkan kelipatan dari satu persamaan pada persamaan yang lain.

Bukti :

1. Jelas bahwa menukar tempat dua persamaan dalam suatu SPL tidak berpengaruh apapun terhadap himpunan penyelesaian SPL tersebut.
2. Akan dibuktikan bahwa $x = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ adalah penyelesaian dari persamaan

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i$$

bila hanya bila $x = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ penyelesaian dari persamaan

$$\alpha(a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n) = \alpha b_i$$

di mana $\alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha \neq 0$. $x = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ penyelesaian dari persamaan $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i$

bila hanya bila

$a_{i1}c_1 + a_{i2}c_2 + \ldots + a_{in}c_n = b_i$

bila hanya bila

$\alpha(a_{i1}c_1 + a_{i2}c_2 + \ldots + a_{in}c_n) = \alpha b_i$

bila hanya bila

$x = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ adalah penyelesaian dari persamaan

$\alpha(a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n) = \alpha b_i$.

3. Akan dibuktikan bahwa SPL (1) yang memuat

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i$$
$$a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \ldots + a_{jn}x_n = b_j$$

ekuivalen dengan SPL (2) yang memuat

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i$$
$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n +$$
$$\alpha(a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \ldots + a_{jn}x_n) = b_i + \alpha b_j$$

di mana $\alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha \neq 0$.

Andaikan himpunan penyelesaian SPL (1) adalah S dan himpunan penyelesaian SPL (2) adalah T.

($\Rightarrow$) Ambil sebarang $x = (c_1, c_2, \ldots, c_n) \in S$. Maka

$$a_{i1}c_1 + a_{i2}c_2 + \ldots + a_{in}c_n = b_i$$

dan $a_{j1}c_1 + a_{j2}c_2 + \ldots + a_{jn}c_n = b_j$.

Sehingga

$$\alpha(a_{j1}c_1 + a_{j2}c_2 + \ldots + a_{jn}c_n) = \alpha b_j \text{ .}$$

Jadi

$$a_{i1}c_1 + a_{i2}c_2 + \ldots + a_{in}c_n +$$
$$\alpha(a_{j1}c_1 + a_{j2}c_2 + \ldots + a_{jn}c_n) = b_i + \alpha b_j \text{ .}$$

Berarti $x = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ memenuhi SPL (2), sehingga $x \in T$. Jadi $S \subset T$.

($\Leftarrow$) Ambil sebarang $y = (d_1, d_2, \ldots, d_n) \in T$. Maka

$$a_{i1}d_1 + a_{i2}d_2 + \ldots + a_{in}d_n = b_i$$

dan

$$a_{i1}d_1 + a_{i2}d_2 + \ldots + a_{in}d_n +$$
$$\alpha(a_{j1}d_1 + a_{j2}d_2 + \ldots + a_{jn}d_n) = b_i + \alpha b_j \text{ .}$$

Sehingga

$$b_i + \alpha(a_{j1}d_1 + a_{j2}d_2 + \ldots + a_{jn}d_n) = b_i + \alpha b_j$$

$$\Leftrightarrow \alpha(a_{j1}d_1 + a_{j2}d_2 + \ldots + a_{jn}d_n) = \alpha b_j$$

$$\Leftrightarrow a_{j1}d_1 + a_{j2}d_2 + \ldots + a_{jn}d_n = b_j \text{ .}$$

Berarti y adalah penyelesaian dari SPL (1), sehingga $y \in S$. Jadi $T \subset S$.

Karena $S \subset T$ dan $T \subset S$, maka $S = T$. Jadi SPL (1) ekuivalen dengan SPL (2).∎

Karena baris dalam matriks yang diperbesar bersesuaian dengan persamaan dalam suatu SPL, maka ke tiga operasi tersebut di atas dapat diterapkan pada matriks yang diperbesar, yaitu :

1. Menukar tempat dua baris dalam matriks.
2. Mengalikan suatu baris dengan konstanta kompleks yang tidak sama dengan nol.
3. Menambahkan kelipatan dari satu baris pada baris lain.

Operasi-operasi pada matriks tersebut dinamakan operasi-operasi baris elementer.

Definisi 2.4

Suatu matriks dikatakan berbentuk eselon baris jika

1. Elemen tak nol yang pertama dalam tiap baris adalah 1 (disebut elemen 1 terdepan).
2. Jika baris ke-k tidak semuanya nol, maka banyaknya elemen nol di depan baris ke-k+1 lebih besar daripada banyaknya elemen nol di depan dalam baris ke-k.
3. Baris-baris yang semua elemennya nol diletakkan di bawah baris-baris yang tidak semua elemennya nol.

Proses untuk mengubah suatu matriks ke bentuk eselon baris dengan menggunakan operasi baris elementer disebut Eliminasi Gauss.

Definisi 2.5

Suatu matriks dikatakan berbentuk eselon baris tereduksi jika

1. Matriks itu dalam bentuk eselon baris.
2. Elemen tak nol pertama (elemen 1 terdepan) pada setiap baris adalah satu-satunya elemen tak nol dalam kolomnya.

Proses untuk mengubah suatu matriks ke bentuk eselon baris tereduksi dengan menggunakan operasi baris elementer disebut Reduksi Gauss-Jordan. Variabel-variabel dalam SPL yang bersesuaian dengan elemen 1 terdepan dalam matriks koefisiennya yang diperbesar, yang sudah diubah ke bentuk eselon baris, disebut variabel tak bebas, sedangkan variabel lainnya disebut variabel bebas.

Suatu SPL dikatakan homogen jika semua konstanta b_i di ruas kanan sama dengan nol. SPL yang homogen selalu konsisten, sebab (0,0,...,0) merupakan penyelesaian dari SPL tersebut. Penyelesaian (0,0,...,0) tersebut dinamakan penyelesaian trivial; jika ada penyelesaian lain maka penyelesaian tersebut dinamakan penyelesaian tak trivial.

Contoh 2.1

Gunakan reduksi Gauss-Jordan untuk menyelesaikan SPL homogen

$$\begin{aligned}
-2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 &= 0\\
2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 &= 0\\
4x_1 - x_2 - 3x_3 + 2x_4 &= 0
\end{aligned}$$

Penyelesaian :

Matriks koefisien diperbesar dari SPL tersebut dan reduksi Gauss-Jordannya adalah sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & -3 & 2 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 8 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 7 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -0.5 & 0.5 & -1.5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1.4 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -0.5 & 0 & -0.8 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1.4 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -0.3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1.4 & 0 \end{bmatrix}.$$

Variabel x_4 adalah variabel bebas. Dengan mengambil $x_4 = \alpha$, diperoleh $x_1 = 0.3\alpha$, $x_2 = -\alpha$, dan $x_3 = 1.4\alpha$. Jadi semua pasangan terurut $(0.3\alpha, -\alpha, 1.4\alpha, \alpha)$ adalah penyelesaian dari SPL tersebut.

<u>Teorema 2.2</u>

Suatu SPL homogen mxn dengan $m < n$, pasti mempunyai penyelesaian tak trivial.

Bukti :

Suatu SPL homogen selalu konsisten. Misalkan bentuk eselon baris dari matriks koefisien SPL tersebut memuat r elemen 1 terdepan, di mana $r \leq m$. Maka ada r variabel tak bebas, sehingga ada $(n-r)$ variabel bebas. Karena $r \leq m$, maka $-r \geq -m$, sehingga $n-r \geq n-m$. Karena $m < n$, maka $n-m > 0$, sehingga $n-r > 0$, yang berarti SPL tersebut memuat variabel bebas. Jadi SPL tersebut mempunyai tak hingga banyak penyelesaian, yang berarti mempunyai penyelesaian tak trivial. ∎

BAB III
RUANG VEKTOR

Dalam Bab III ini kita akan membahas pengertian ruang vektor beserta sifat-sifatnya. Di antaranya kita membahas beberapa sifat yang berkaitan dengan subruang, kebebasan linear, basis dan dimensi.

3.1 Ruang Vektor

Definisi 3.1.1

Andaikan V adalah suatu himpunan tidak kosong dan pada V didefinisikan operasi penjumlahan dan perkalian dengan skalar, yaitu setiap pasang elemen x dan y dalam V dikawankan dengan tepat satu elemen $x + y$ yang juga dalam V, kemudian setiap x dalam V dan setiap bilangan kompleks α dikawankan dengan tepat satu elemen αx dalam V. Himpunan V bersama-sama dengan operasi penjumlahan dan perkalian dengan skalar disebut **ruang vektor** jika hanya jika memenuhi aksioma-aksioma berikut :

A_1. $x + y = y + x$ untuk semua $x, y \in V$.

A_2. $(x + y) + z = x + (y + z)$ untuk semua $x, y, z \in V$.

A_3. Ada elemen 0 dalam V sedemikian sehingga $x + 0 = x$ untuk semua $x \in V$.

A4. Untuk setiap $x \in V$, ada elemen $-x \in V$ sedemikian sehingga $x + -x = 0$.

A5. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ untuk sebarang bilangan kompleks α dan untuk semua $x,y \in V$.

A6. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ untuk sebarang bilangan kompleks α dan β dan untuk semua $x \in V$.

A7. $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$ untuk sebarang bilangan kompleks α dan β dan untuk semua $x \in V$.

A8. $1.\ x = x$ untuk semua $x \in V$.

Elemen-elemen dalam V disebut **vektor** dan bilangan-bilangan kompleks α, β dan seterusnya disebut **skalar.** Ruang vektor yang didefinisikan di atas sering disebut **ruang vektor atas bilangan kompleks** atau **ruang vektor kompleks** sebab skalar yang digunakan adalah bilangan-bilangan kompleks. Untuk selanjutnya ruang vektor kompleks kita sebut **ruang vektor** saja. Vektor 0 dalam A3 disebut **vektor nol** dan vektor $-x$ dalam A4 disebut **invers aditif** dari x.

Sebelum kita membahas mengenai contoh ruang vektor yang mempunyai vektor-vektor berupa fungsi bernilai kompleks dari variabel real, kita perlu mengingat kembali definisi fungsi tersebut. Diberikan suatu fungsi f bernilai kompleks dari variabel real t, maka ada secara tunggal fungsi bernilai real f_1 dan f_2 dari variabel real t, sedemikian sehingga $f(t) = f_1(t) + if_2(t)$ untuk semua $t \in \mathbb{R}$, di mana i adalah bilangan imajiner sedemikian sehingga $i^2 = -1$. Kita menyebut f_1 bagian real dan f_2 bagian imajiner dari f.

Contoh 3.1.1

Andaikan $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ adalah himpunan semua fungsi bernilai kompleks dari variabel real. Jika $f(t) = f_1(t) + if_2(t)$ dan $g(t) = g_1(t) + ig_2(t)$ sebarang anggota $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ dan k sebarang bilangan kompleks, maka kita definisikan jumlahan $f + g$ dan perkalian dengan skalar kf sebagai berikut

$$(f + g)(t) = (f_1(t) + g_1(t)) + i(f_2(t) + g_2(t))$$

dan

$$(kf)(t) = kf_1(t) + ikf_2(t) \text{ untuk semua } t \in \mathbb{R} .$$

Andaikan $k = a + ib$, di mana $a,b \in \mathbb{R}$ dan $i^2 = -1$, maka

$(kf)(t) = (a + ib)f_1(t) + i(a + ib)f_2(t)$

$= (af_1(t) - bf_2(t)) + i\,(bf_1(t) + af_2(t))$ untuk semua $t \in \mathbb{R}$. Jadi $kf \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{C})$.

Dari definisi jumlahan $f + g$ di atas, jelas bahwa $f + g \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{C})$. Jadi operasi penjumlahan dan perkalian dengan skalar yang didefinisikan di atas bersifat tertutup dalam $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{C})$. Andaikan $f(t) = f_1(t) + if_2(t)$, $g(t) = g_1(t) + i\,g_2(t)$ dan $h(t) = h_1(t) + ih_2(t)$ sebarang fungsi anggota $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{C})$.

A1. Ambil dua fungsi sebarang $f,g \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{C})$. Maka

$$\begin{aligned}(f + g)(t) &= (f_1(t) + g_1(t)) + i(f_2(t) + g_2(t))\\ &= (g_1(t) + f_1(t)) + i(g_2(t) + f_2(t))\\ &= (g + f)(t) \text{ untuk semua } t \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Jadi $f + g = g + f$ untuk semua $f,g \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{C})$.

A2. Ambil tiga fungsi sebarang $f,g,h \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{C})$. Maka

$((f + g) + h)(t)$

$=((f_1(t) + g_1(t)) + h_1(t)) + i((f_2(t) + g_2(t)) + h_2(t))$

$=(f_1(t) + (g_1(t) + h_1(t))) + i(f_2(t) + (g_2(t) + h_2(t)))$

$= (f + (g + h))(t)$ untuk semua $t \in \mathbb{R}$.

Jadi $(f + g) + h = f + (g + h)$ untuk semua $f,g,h \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{C})$.

A3. Perhatikan fungsi $f_o : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ dengan aturan

$f_o(t) = 0 + i.0$

$= 0$ untuk semua $t \in \mathbb{R}$. Jadi $f_o \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, dan

$(f + f_o)(t) = (f_1(t) + 0) + i(f_2(t) + 0)$

$= f_1(t) + if_2(t)$

$= f(t)$ untuk semua $t \in \mathbb{R}$.

Jadi $f + f_o = f$ untuk semua $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{C})$.

A4. Ambil sebarang fungsi $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, dan perhatikan fungsi $-f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ dengan aturan

$(-f)(t) = -f_1(t) - if_2(t)$

$= -(f_1(t) + if_2(t))$ untuk semua $t \in \mathbb{R}$.

Tampak bahwa $-f$ juga fungsi bernilai kompleks dari variabel real. Jadi $-f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, dan

$(f + (-f))(t) = (f_1(t) - f_1(t)) + i\,(f_2(t) - f_2(t))$

$= 0 + i.0$

$= 0$

$= f_o(t)$ untuk semua $t \in \mathbb{R}$.

Jadi $f + (-f) = f_o$ untuk semua $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{C})$.

A5. Ambil sebarang fungsi $f,g \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ dan sebarang skalar kompleks k. Maka

$$
\begin{aligned}
(k(f + g))(t) &= k(f_1(t) + g_1(t)) + ik(f_2(t) + g_2(t)) \\
&= (kf_1(t) + kg_1(t)) + i(kf_2(t) + kg_2(t)) \\
&= (kf + kg)(t) \text{ untuk semua } t \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

Jadi $k(f + g) = kf + kg$ untuk sebarang skalar $k \in \mathbb{C}$ dan untuk semua $f,g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}.\mathbb{C})$.

A6. Ambil sebarang skalar kompleks k dan m dan sebarang fungsi $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{C})$. Maka

$$
\begin{aligned}
((k + m)f)(t) &= ((k + m)f_1(t)) + i((k + m)f_2(t)) \\
&= (kf_1(t) + mf_1(t)) + i(kf_2(t) + mf_2(t)) \\
&= (kf + mf)(t) \text{ untuk semua } t \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

Jadi $(k + m)f = kf + mf$ untuk sebarang skalar $k,m \in \mathbb{C}$ dan untuk semua $f,g \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{C})$.

A7. Ambil sebarang skalar $k,m \in \mathbb{C}$ dan sebarang fungsi $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{C})$. Maka

$$
\begin{aligned}
((km)f)(t) &= (km)f_1(t) + i(km)f_2(t) \\
&= k(mf_1(t)) + ik(mf_2(t)) \\
&= (k(mf))(t) \text{ untuk semua } t \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

Jadi $(km)f = k(mf)$ untuk sebarang skalar $k,m \in \mathbb{C}$ dan untuk semua fungsi $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{C})$.

A8. Ambil sebarang fungsi $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{C})$. Maka

$$
\begin{aligned}
(1.f)(t) &= 1(f_1(t)) + i.1.f_2(t) \\
&= f_1(t) + if_2(t) \\
&= f(t) \text{ untuk semua } t \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

Jadi $1.f = f$ untuk semua fungsi $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{C})$.

Dapat kita simpulkan bahwa $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ bersama dengan operasi penjumlahan dan perkalian dengan skalar tersebut di atas merupakan ruang vektor.█

Teorema 3.1.1

Jika V adalah suatu ruang vektor dan x,y sebarang vektor dalam V, maka

i) $0x = 0$

ii) Jika $x + y = 0$, maka $y = -x$ (yaitu, invers aditif dari x adalah tunggal)

iii) $(-1)x = -x$

Bukti :

i)
$$\begin{aligned} 0x &= 0x + 0 && (A_3)\\ &= 0x + (x + (-x)) && (A_4)\\ &= (0x + x) + (-x) && (A_2)\\ &= (0x + 1.x\ ) + (-x) && (A_8)\\ &= (0 + 1)x + (-x) && (A_6)\\ &= 1.x + (-x) && \\ &= x + -x && (A_8)\\ &= 0 && (A_4) \end{aligned}$$

Jadi $0x = 0$ untuk semua $x \in V$.

ii) Andaikan $x + y = 0$

$$\begin{aligned} y &= y + 0 && (A_3)\\ &= y + (x + (-x)) && (A_4)\\ &= (y + x) + (-x) && (A_2)\\ &= (x + y) + (-x) && (A_1)\\ &= 0 + (-x) && \text{(pengandaian)} \end{aligned}$$

$= -x$ (A_3)

Jadi $x + y = 0 \Rightarrow y = -x$ untuk semua x, $y \in$ V.

iii) $x + (-1)x = 1.x + (-1)x$ (A_8)

$= (1 + (-1))x$ (A_6)

$= 0x$

$= 0$ (Teorema 3.1.1 (i))

Jadi $x + (-1)x = 0$ untuk semua $x \in$ V.

Menurut bagian ii) di atas haruslah $(-1)x = -x$.∎

<u>Definisi 3.1.2</u>

Operasi pengurangan pada ruang vektor V kita definisikan sebagai berikut :

$$x - y = x + (-y)$$

untuk semua x dan $y \in$ V.

3.2 Subruang

Pada sub bab ini kita akan membahas suatu himpunan bagian dari ruang vektor yang juga merupakan ruang vektor dengan operasi-operasi yang sama.

<u>Definisi 3.2.1</u>

Andaikan V adalah ruang vektor. Himpunan bagian S $\neq \emptyset$ dari V disebut subruang dari V jika S juga merupakan ruang vektor terhadap operasi penjumlahan dan perkalian dengan skalar dari V.

Syarat yang lebih ringkas untuk menunjukkan bahwa himpunan bagian S adalah subruang dari V diberikan dalam Teorema 3.2.1 berikut ini.

Teorema 3.2.1

Andaikan V adalah ruang vektor, $S \subset V$, dan $S \neq \emptyset$. S merupakan **subruang** dari V bila hanya bila

i) $\alpha x \in S$ untuk semua $x \in S$ dan untuk sebarang $\alpha \in \mathbb{C}$.

ii) $x + y \in S$ untuk semua $x,y \in S$.

Bukti :

($\Rightarrow$) Diketahui S subruang dari V, berarti S merupakan ruang vektor terhadap operasi penjumlahan dan perkalian dengan skalar dari V. Jadi kedua operasi tersebut tertutup pada S. Sehingga kedua syarat pada teorema di atas dipenuhi.

($\Leftarrow$) Diketahui i) dan ii). Akan dibuktikan S merupakan ruang vektor. Sifat tertutup operasi penjumlahan dan perkalian dengan skalar pada S dipenuhi oleh i) dan ii). Kemudian akan dibuktikan bahwa S bersama dengan kedua operasi dari V memenuhi A_1 sampai A_8 pada Definisi 3.1.1. Dengan sendirinya A_1, A_2, A_5, A_6, A_7 dan A_8 dipenuhi oleh setiap himpunan bagian dari V, termasuk S. Sekarang akan dibuktikan bahwa A_4 dipenuhi. Ambil sebarang vektor $x \in S$. Menurut i) dengan mengambil $\alpha = -1$, kita memperoleh $(-1)x \in S$. Kemudian menurut Teorema 3.1.1 (iii) $(-1)x = -x$. Jadi $-x \in S$. Terbukti ada $-x \in S$ sedemikian sehingga $x + (-x) = 0$ untuk semua $x \in S$. Jadi A_4 dipenuhi. Selanjutnya akan dibuktikan bahwa A_3 dipenuhi. Ambil sebarang vektor $x \in S$. Di atas telah dibuktikan bahwa $-x \in S$. Sehingga menurut ii) $x + (-x) \in S$. Karena $x + (-x) = 0$, maka $0 \in S$. Jadi ada $0 \in S$ sedemikian sehingga $0 + x = x$ untuk semua $x \in S$. Jadi A_3 dipenuhi. Jadi S merupakan ruang vektor terhadap operasi penjumlahan dan perkalian dengan skalar dari V.∎

Definisi 3.2.2

Diberikan suatu fungsi $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ dengan bagian real f_1 dan bagian imajiner f_2. Kita katakan bahwa f **diferensiabel** jika f_1 dan f_2 diferensiabel. Jika f diferensiabel, kita mendefinisikan derivatif f' dari f dengan

$$f' = f_1' + if_2'.$$

Contoh 3.2.1

Andaikan C^∞ adalah himpunan semua fungsi dalam $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ yang mempunyai derivatif pada semua tingkat. Akan kita tunjukkan bahwa C^∞ subruang dari $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{C})$.

i) Jelas $C^\infty \subset \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{C})$.

ii) Perhatikan fungsi $f_o : \mathbb{R} \dashrightarrow \mathbb{C}$ dengan aturan $f_o(x) = 0$ untuk semua $x \in \mathbb{R}$. Karena fungsi f_o mempunyai derivatif pada semua tingkat maka f_o merupakan anggota dari C^∞. Jadi $C^\infty \neq \emptyset$.

iii) Ambil sebarang fungsi $f \in C^{\infty}$ dan sebarang $\alpha \in \mathbb{C}$, maka αf merupakan fungsi yang mempunyai derivatif pada semua tingkat. Jadi $\alpha f \in C^{\infty}$ untuk semua $f \in C^{\infty}$ dan untuk sebarang $\alpha \in \mathbb{C}$.

iv) Ambil dua vektor sebarang dalam C^{∞}, misalkan f dan g. Maka $f + g$ merupakan fungsi yang mempunyai derivatif pada semua tingkat. Jadi $f + g \in C^{\infty}$ untuk sebarang f dan $g \in C^{\infty}$.

<u>Definisi 3.2.3</u>

Andaikan $v_1, v_2, \ldots, v_n$ adalah vektor-vektor dalam ruang vektor V. Jumlahan berbentuk $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n$, di mana $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ adalah skalar-skalar, disebut kombinasi linear dari $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Himpunan semua kombinasi linear dari $v_1, v_2, \ldots, v_n$ disebut rentang dari $v_1, v_2, \ldots, v_n$ dan dilambangkan dengan $\mathbb{S}(v_1, v_2, \ldots, v_n)$. Jika B adalah himpunan bagian tak kosong dari ruang vektor V, maka Rentang dari B dilambangkan dengan $\mathbb{S}(B)$.

<u>Teorema 3.2.2</u>

Jika $v_1, v_2, \ldots, v_n$ adalah vektor-vektor dalam ruang vektor V, maka $\mathbb{S}(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ adalah subruang dari V.

Bukti :

i) Vektor $0 \in \mathbb{S}(v_1, v_2, \ldots, v_n)$, sebab $0 = 0.v_1 + 0.v_2 + \ldots + 0.v_n$.

Jadi $\mathbb{S}(v_1, v_2, \ldots, v_n) \neq \emptyset$.

ii) Ambil sebarang vektor $v \in \mathbb{S}(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ dan $\beta \in \mathbb{C}$.

Maka $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n$ di mana $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$, sehingga

$$\begin{aligned} \beta v &= \beta(\alpha_1 v_1) + \beta(\alpha_2 v_2) + \ldots + \beta(\alpha_n v_n) \\ &= (\beta\alpha_1) v_1 + (\beta\alpha_2) v_2 + \ldots + (\beta\alpha_n) v_n \\ &= \gamma_1 v_1 + \gamma_2 v_2 + \ldots + \gamma_n v_n \end{aligned}$$

di mana $\gamma_1 = \beta\alpha_1 \in \mathbb{C}$

$\gamma_2 = \beta\alpha_2 \in \mathbb{C}$

$\vdots$

$\gamma_n = \beta\alpha_n \in \mathbb{C}$.

Jadi $\beta v \in \mathbb{S}(v_1, v_2, \ldots, v_n)$.

iii) Ambil sebarang vektor v dan w dalam rentang $\mathbb{S}(v_1, v_2, \ldots, v_n)$. Maka

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n$$

$$w = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \ldots + \beta_n v_n$$

di mana $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n \in \mathbb{C}$, sehingga

$$\begin{aligned} v + w &= (\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n) + \\ &\quad (\beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \ldots + \beta_n v_n) \\ &= (\alpha_1 + \beta_1) v_1 + (\alpha_2 + \beta_2) v_2 + \ldots + (\alpha_n + \beta_n) v_n \\ &= \gamma_1 v_1 + \gamma_2 v_2 + \ldots + \gamma_n v_n \end{aligned}$$

di mana $\gamma_i = \alpha_i + \beta_i \in \mathbb{C}$ untuk $i = 1, 2, \ldots, n$.

Jadi $v + w \in \mathbb{S}(v_1, v_2, \ldots, v_n)$.

Jadi $\mathbb{S}(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ adalah subruang dari ruang vektor V.∎

Definisi 3.2.4

Himpunan vektor-vektor $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ disebut **himpunan perentang** untuk ruang vektor V bila hanya bila setiap vektor dalam V dapat ditulis sebagai kombinasi linear dari $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Jadi himpunan $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ merupakan himpunan perentang untuk ruang vektor V bila hanya bila $S(v_1, v_2, \ldots, v_n) = V$. Dalam hal ini dikatakan bahwa vektor-vektor $v_1, v_2, \ldots, v_n$ merentang ruang vektor V.

3.3 Kebebasan Linear

Definisi 3.3.1

Himpunan vektor-vektor $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ dalam ruang vektor V dikatakan bebas linear bila hanya bila

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n = 0$$

hanya bila semua skalar $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sama dengan nol.

Definisi 3.3.2

Himpunan vektor-vektor $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ dalam ruang vektor V dikatakan tak bebas linear bila hanya bila ada skalar-skalar $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ yang tidak semuanya nol sedemikian sehingga

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n = 0.$$

Teorema 3.3.1

i) Bila vektor-vektor $v_1, v_2, \ldots, v_n$ merentang ruang vektor V dan salah satu dari n vektor dalam himpunan perentang tersebut dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari (n-1) vektor lainnya, maka (n-1) vektor tersebut juga merentang V.

ii) Diberikan n vektor $v_1, v_2, \ldots, v_n$ anggota ruang vektor V. Jika vektor-vektor $v_1, v_2, \ldots, v_n$ merupakan vektor-vektor tak bebas linear, maka salah satu dari n vektor tersebut dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari (n-1) vektor lainnya.

Bukti :

i) Karena $v_1, v_2, \ldots, v_n$ merentang ruang vektor V, maka $S(v_1, v_2, \ldots, v_n) = V$. Andaikan v_n dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}$, yaitu $v_n = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_{n-1} v_{n-1}$, dengan $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{C}$.

Akan kita buktikan bahwa $S(v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}) = V$. Jelas bahwa $S(v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}) \subset V$. Ambil sebarang vektor $v \in V$. Karena $V = S(v_1, v_2, \ldots, v_n)$, maka

$$
\begin{aligned}
v &= \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \ldots + \beta_{n-1} v_{n-1} + \beta_n v_n \\
&= \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \ldots + \beta_{n-1} v_{n-1} + \\
&\quad \beta_n (\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_{n-1} v_{n-1}) \\
&= (\beta_1 + \beta_n \alpha_1) v_1 + (\beta_2 + \beta_n \alpha_2) v_2 + \ldots + \\
&\quad (\beta_{n-1} + \beta_n \alpha_{n-1}) v_{n-1} \quad \text{di mana}
\end{aligned}
$$

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n \in \mathbb{C}$.

Jadi $v \in S(v_1, v_2, \ldots, v_{n-1})$. Jadi $V \subset S(v_1, v_2, \ldots, v_{n-1})$.

Terbukti bahwa $S(v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}) = V$.

ii) Vektor-vektor $v_1, v_2, \ldots, v_n$ merupakan vektor-vektor tak bebas linear. Maka terdapat skalar-skalar $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ yang tidak semuanya sama dengan nol sedemikian sehingga $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n = 0$. Misalkan $\alpha_n \neq 0$, maka

$$\alpha_n v_n = (-\alpha_1 v_1) + (-\alpha_2 v_2) + \ldots + -(\alpha_{n-1} \; v_{n-1})$$

$$v_n = (-\alpha_1/\alpha_n) v_1 + (-\alpha_2/\alpha_n) \; v_2 + \ldots + (-\alpha_{n-1}/\alpha_n) v_{n-1}$$

Jadi V_n dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari (n-1) vektor lainnya.∎

3.4 Basis dan Dimensi

Dari Definisi 3.2.4 kita mengetahui bahwa ruang vektor V direntang oleh himpunan vektor-vektor $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ bila hanya bila setiap vektor dalam V dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Sifat tersebut akan lebih menarik jika setiap vektor dalam V dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari $v_1, v_2, \ldots, v_n$ secara tunggal. Sehingga sifat dari ruang vektor V cukup dilihat dari himpunan vektor ini. Himpunan vektor-vektor dengan sifat tersebut kita namakan basis. Pada sub bab ini kita akan membahas mengenai basis beserta sifat-sifat pentingnya.

<u>Definisi 3.4.1</u>

Vektor-vektor $v_1, v_2, \ldots, v_n$ disebut basis untuk ruang vektor V bila hanya bila

i) $v_1, v_2, \ldots, v_n$ bebas linear

ii) $v_1, v_2, \ldots, v_n$ merentang V.

Berikut ini merupakan sifat yang sangat penting dari basis.

<u>Teorema 3.4.1</u>

Himpunan vektor-vektor $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ membentuk basis untuk V bila hanya bila setiap vektor dalam V dapat dinyatakan secara tunggal sebagai kombinasi linear dari $v_1, v_2, \ldots, v_n$.

Bukti :

($\Rightarrow$) Karena himpunan vektor-vektor $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ membentuk basis untuk V, maka untuk sebarang vektor $x \in V$ dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear

$$x = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n \qquad (1)$$

di mana $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$. Andaikan x juga dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear

$$x = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \ldots + \beta_n v_n \qquad (2)$$

di mana $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n \in \mathbb{C}$.

Dari (1) dan (2) diperoleh

$$(\alpha_1 - \beta_1)v_1 + (\alpha_2 - \beta_2)v_2 + \ldots + (\alpha_n - \beta_n)v_n = 0 \qquad (3)$$

Karena himpunan vektor-vektor $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ bebas linear, maka semua koefisien dari (3) sama dengan nol. Berarti $\alpha_i = \beta_i$ untuk $i = 1, \ldots, n$. Jadi setiap vektor dalam V dapat dinyatakan secara tunggal sebagai kombinasi linear dari $v_1, v_2, \ldots, v_n$.

($\Leftarrow$) Karena setiap vektor dalam V dapat dinyatakan secara tunggal sebagai kombinasi linear dari $v_1, v_2, \ldots, v_n$, maka vektor nol juga dapat dinyatakan secara tunggal sebagai kombinasi linear dari $v_1, v_2, \ldots, v_n$ yaitu

$$0 = 0.v_1 + 0.v_2 + \ldots + 0.v_n \ .$$

Sehingga $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ bebas linear. Jadi $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ merupakan basis untuk ruang vektor V.∎

Teorema 3.4.2

Bila ruang vektor V mempunyai basis $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, maka setiap himpunan vektor dalam V dengan m elemen, di mana $m > n$, pasti tak bebas linear.

Bukti :

Andaikan $u_1, u_2, \ldots, u_m$ adalah m vektor dalam V di mana $m > n$. Karena $v_1, v_2, \ldots, v_n$ merentang V, maka kita memperoleh $u_i = a_{i1}v_1 + a_{i2}v_2 + \ldots + a_{in}v_n$, di mana $i = 1, \ldots, m$. Kombinasi linear $c_1u_1 + c_2u_2 + \ldots + c_mu_m$ dapat ditulis dalam bentuk

$$c_1\sum_{j=1}^{n} a_{1j}v_j + c_2\sum_{j=1}^{n} a_{2j}v_j + \ldots + c_m\sum_{j=1}^{n} a_{mj}v_j$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}c_i\right)v_j \ .$$

Sekarang perhatikan SPL

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}c_i = 0 \text{ untuk } j = 1, 2, \ldots, n.$$

SPL tersebut adalah SPL homogen dengan lebih banyak variabel daripada persamaan-persamaan. Sehingga, menurut Teorema 2.2, SPL tersebut mempunyai penyelesaian tak trivial, misalkan $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m)$, di mana tidak semua γ_i sama dengan nol untuk $i = 1,2,\ldots,m$. Jadi

$$\gamma_1 u_1 + \gamma_2 u_2 + \ldots + \gamma_m u_m = \sum_{j=1}^{n} 0.v_j = 0.$$

Sehingga terbukti bahwa $u_1, u_2, \ldots, u_m$ tak bebas linear.■

<u>Akibat 3.4.3</u>

Bila $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ dan $\{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ keduanya adalah basis untuk ruang vektor V, maka n = m.

Bukti :

Karena $v_1, v_2, \ldots, v_n$ adalah basis untuk V dan vektor-vektor $u_1, u_2, \ldots, u_m$ bebas linear (karena merupakan basis), maka menurut Teorema 3.4.2 (kontraposisinya) haruslah $m \leq n$. Demikian pula karena $u_1, u_2, \ldots, u_m$ adalah basis untuk V dan $v_1, v_2, \ldots, v_n$ bebas linear (karena merupakan basis), maka haruslah $n \leq m$. Jadi n = m.■

<u>Definisi 3.4.2</u>

Andaikan V adalah suatu ruang vektor. Bila V mempunyai basis yang terdiri dari n vektor, kita katakan V **berdimensi n**. Subruang $\{0\}$ dari V dikatakan **berdimensi 0**. V dikatakan **berdimensi berhingga** jika ada himpunan berhingga vektor-vektor yang merentang V; jika tidak, kita katakan bahwa V **berdimensi takhingga**. Jika ruang vektor V berdimensi n, maka kita tulis dim(V) = n.

<u>Teorema 3.4.4</u>

Andaikan ruang vektor V berdimensi $n > 0$, maka

i) Setiap himpunan n vektor bebas linear pasti merentang V.

ii) Setiap n vektor yang merentang V pasti bebas linear.

Bukti :

i) Andaikan $v_1, v_2, \ldots, v_n$ bebas linear dan v sebarang vektor $\in$ V. Menurut Teorema 3.4.2 $v_1, v_2, \ldots, v_n, v$ tak bebas linear. Jadi ada skalar-skalar $c_1, c_2, \ldots, c_n, c_{n+1}$ yang tidak semuanya sama dengan nol sedemikian sehingga $c_1 v_1 + c_2 v_2 + \ldots + c_n v_n + c_{n+1} v = 0$. Skalar $c_{n+1} \neq 0$, sebab jika $c_{n+1} = 0$ maka akibatnya $v_1, v_2, \ldots, v_n$ tak bebas linear. Jadi

$$c_{n+1} v = -c_1 v_1 - c_2 v_2 - \ldots - c_n v_n$$

$$v = -(c_1/c_{n+1}) v_1 - (c_2/c_{n+1}) v_2 - \ldots - (c_n/c_{n+1}) v_n$$

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n$$

di mana $\alpha_i = -(c_i/c_{n+1})$ untuk $i = 1, 2, \ldots, n$.

Karena v sebarang vektor dalam V, maka terbukti $v_1, v_2, \ldots, v_n$ merentang V.

ii) Andaikan $v_1, v_2, \ldots, v_n$ merentang V. Andaikan $v_1, v_2, \ldots, v_n$ tak bebas linear. Maka menurut Teorema 3.3.1 (ii) salah satu dari n vektor tersebut dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari (n-1) vektor lainnya. Menurut Teorema 3.3.1 (i), (n-1) vektor yang lain itu juga merentang V.

1) Bila (n−1) vektor tersebut bebas linear, maka (n−1) vektor tersebut merupakan basis dari V.

   Jadi dimensi V = (n−1).

   Kontradiksi sebab dimensi V = n ($\neq$ (n−1)).

   Jadi $v_1, v_2, \ldots, v_n$ bebas linear.

2) Bila (n−1) vektor tersebut tak bebas linear, proses di atas kita ulangi :

   1) Bila (n−2) vektor tersebut bebas linear, maka (n−2) vektor tersebut merupakan basis dari V. Jadi dimensi V = (n−2). Kontradiksi sebab dimensi V = n ($\neq$ (n−2)).

   2) Bila (n−2) vektor tersebut tak bebas linear, proses di atas kita ulangi lagi sampai akhirnya diperoleh k (< n) vektor yang bebas linear dan merentang V. Sehingga dimensi V = k < n . Kontradiksi. Terbukti $v_1, v_2, \ldots, v_n$ bebas linear.∎

BAB IV
TRANSFORMASI LINEAR

Setelah kita membahas ruang vektor beserta sifat-sifatnya dalam Bab III, maka dalam bab ini kita akan membahas mengenai transformasi dari ruang vektor V ke dalam ruang vektor W yang mengawetkan operasi pada ruang vektor tersebut. Transformasi yang mempunyai sifat demikian kita sebut transformasi linear.

4.1 Transformasi Linear

Andaikan diketahui himpunan V dan W. Transformasi atau **pemetaan** atau **fungsi** T dari V ke dalam W adalah aturan yang mengawankan setiap elemen x di V dengan satu dan hanya satu elemen di W. Untuk selanjutnya, transformasi ini ditulis

$$T : V \longrightarrow W.$$

Himpunan V disebut daerah definisi dari T. Transformasi T mengawankan elemen $x \in V$ dengan elemen $T(x)$ di W, yang disebut disebut **bayangan** atau **peta** dari x. Himpunan

$$T(V) = \{y \in W \mid y = T(x),\ x \in V\}$$

disebut **daerah nilai** dari T. Pada umumnya $T(V) \neq W$. Dalam hal $T(V) = W$, transformasi tersebut disebut transformasi dari V **pada** W.

Setelah kita mengingat kembali mengenai pengertian transformasi, berikut ini kita definisikan mengenai transformasi linear.

Definisi 4.1.1

Andaikan V dan W adalah ruang vektor. Transformasi $T : V \longrightarrow W$ disebut **Transformasi Linear** jika

i) Untuk sebarang vektor x dan y di V berlaku

$$T(x + y) = T(x) + T(y)$$

ii) Untuk sebarang bilangan kompleks α dan vektor x di V berlaku

$$T(\alpha x) = \alpha T(x).$$

Kedua syarat dalam Definisi 4.1.1 dapat disederhanakan menjadi satu syarat. Hal ini dinyatakan dalam teorema berikut.

Teorema 4.1.1

Andaikan V dan W adalah ruang vektor. Transformasi $T : V \longrightarrow W$ merupakan transformasi linear bila hanya bila untuk setiap x, y di V dan bilangan kompleks α, β berlaku

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$$

Bukti :

($\Rightarrow$) Diketahui T merupakan transformasi linear, maka dengan menggunakan syarat i) dan kemudian ii) diperoleh

$$T(\alpha x + \beta y) = T(\alpha x) + T(\beta y)$$
$$= \alpha T(x) + \beta T(y).$$

($\Leftarrow$) Diketahui $T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$.

Untuk $\alpha = \beta = 1$ didapat $T(x + y) = T(x) + T(y)$.

Jadi syarat i) dipenuhi.

Untuk $\beta = 0$ didapat $T(\alpha x) = \alpha T(x)$.

Jadi syarat ii) dipenuhi. ∎

Suatu transformasi linear dari V ke V kita sebut **operator linear** dalam V.

Contoh 4.1.1

Andaikan V adalah ruang vektor. Transformasi I : V -----> V dengan aturan $I(v) = v$ untuk semua $v \in V$ merupakan transformasi linear sebab

$$I(\alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha v_1 + \beta v_2$$
$$= \alpha I(v_1) + \beta I(v_2)$$

untuk semua $v_1, v_2 \in V$ dan sebarang skalar $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

Transformasi linear I di atas kita sebut **transformasi identitas.**

Teorema 4.1.2

Andaikan V dan W dua ruang vektor. Jika T : V -----> W merupakan transformasi linear, maka untuk $x_1, x_2, \ldots, x_n \in V$

dan $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n \in \mathbb{C}$ berlaku

$$T\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i T(x_i).$$

Bukti :

Diketahui T merupakan transformasi linear. Akan dibuktikan menggunakan induksi matematika.

i) Untuk n = 1, maka

$T(\alpha_1 x_1) = \alpha_1 T(x_1)$ benar sebab T merupakan transformasi linear.

ii) Andaikan teorema benar untuk n = k, yaitu

$$T\left(\sum_{i=1}^{k}\alpha_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{k}\alpha_i T(x_i).$$

Untuk n = k + 1, maka

$$\begin{aligned}
T\left(\sum_{i=1}^{k+1}\alpha_i x_i\right) &= T\left(\sum_{i=1}^{k}\alpha_i x_i + \alpha_{k+1} x_{k+1}\right) \\
&= T\left(\sum_{i=1}^{k}\alpha_i x_i\right) + T(\alpha_{k+1} x_{k+1}) \\
&= \sum_{i=1}^{k}\alpha_i T(x_i) + \alpha_{k+1} T(x_{k+1}) \\
&= \sum_{i=1}^{k+1}\alpha_i T(x_i) . \blacksquare
\end{aligned}$$

<u>Teorema 4.1.3</u>

Andaikan V dan W dua ruang vektor. Jika T : V -----> W merupakan transformasi linear, maka $T(\mathit{0}) = \mathit{0}$.

Bukti :

Karena T merupakan transformasi linear, maka

$T(\mathit{0}) = T(0.x)$

$= 0T(x)$

$= \mathit{0}$ untuk semua $x \in V$.∎

Definisi 4.1.2

Andaikan V dan W dua ruang vektor dan $T : V \longrightarrow W$ merupakan transformasi linear. **Ruang Nol atau Kernel** dari T adalah

$$N(T) = \{x \in V \mid T(x) = \mathit{0}\},$$

yaitu himpunan dari semua vektor di V yang dipetakan ke vektor nol di W.

Teorema 4.1.4

Andaikan V dan W dua ruang vektor dan $T : V \longrightarrow W$ merupakan transformasi linear. Ruang nol dan daerah nilai dari T masing-masing merupakan subruang dari V dan W.

Bukti :

Akan diperlihatkan bahwa N(T) merupakan subruang dari V.

i) Jelas bahwa $N(T) \subset V$.

ii) Vektor $\mathit{0} \in N(T)$ sebab $T(\mathit{0}) = \mathit{0}$.

Jadi $N(T) \neq \emptyset$.

iii) Ambil sebarang dua vektor $x, y \in N(T)$ dan sebarang skalar $\alpha \in \mathbb{C}$. Maka $T(x) = \mathit{0}$ dan $T(y) = \mathit{0}$.

Sehingga $T(\alpha x) = \alpha T(x)$

$= \alpha.0$

$= 0.$

Jadi $\alpha x \in N(T)$

Kemudian, $T(x + y) = T(x) + T(y)$

$= T(x) + T(y)$

$= 0 + 0$

$= 0.$

Jadi $x + y \in N(T)$.

Jadi N(T) merupakan subruang dari V.

Sekarang akan diperlihatkan bahwa T(V) merupakan subruang dari W.

i) Jelas bahwa $T(V) \subset W$

ii) Vektor $0 \in T(V)$ sebab $0 = T(0)$.

Jadi $T(V) \neq \emptyset$.

iii) Ambil sebarang dua vektor $x, y \in T(V)$ dan sebarang skalar $\alpha \in \mathbb{C}$. Maka ada $x_1, y_1 \in V$ sedemikian sehingga $x = T(x_1)$ dan $y = T(y_1)$. Sehingga

$\alpha x = \alpha T(x_1) = T(\alpha x_1)$ di mana $\alpha x_1 \in V$. Jadi $\alpha x \in T(V)$.

Kemudian $x + y = T(x_1) + T(y_1)$

$= T(x_1 + y_1)$ di mana $x_1 + y_1 \in V$.

Jadi $x + y \in T(V)$.

Jadi T(V) merupakan subruang dari W.∎

4.2 Aljabar Transformasi Linear

Transformasi Linear dari ruang Vektor V ke ruang vektor W dapat dijumlahkan dan dikalikan dengan skalar seperti penjumlahan dan perkalian dengan skalar pada fungsi dari $\mathbb{R}$ ke

$\mathbb{R}$. Ternyata fungsi yang dihasilkan juga merupakan transformasi linear. Dalam bab ini kita juga akan mendefinisikan perkalian dari transformasi linear dengan transformasi linear.

Definisi 4.2.1

Andaikan T_1 dan T_2 adalah transformasi linear dari ruang vektor V ke ruang vektor W. Jumlahan dari T_1 dan T_2, yaitu $T_1 + T_2$, adalah pemetaan dari V ke W yang didefinisikan sebagai berikut :

$$(T_1 + T_2)(x) = T_1(x) + T_2(x)$$

untuk setiap $x \in V$.

Untuk sebarang skalar α, perkalian dengan skalar αT_1 adalah pemetaan dari V ke W yang didefinisikan sebagai berikut :

$$(\alpha T_1)(x) = \alpha(T_1(x))$$

untuk setiap $x \in V$.

Akan kita perlihatkan bahwa $T_1 + T_2$ merupakan transformasi linear. Ambil sebarang vektor x dan y di V dan sebarang skalar β dan $\gamma \in \mathbb{C}$. Maka

$$\begin{aligned}(T_1 + T_2)(\beta x + \gamma y) &= T_1(\beta x + \gamma y) + T_2(\beta x + \gamma y)\\ &= \beta T_1(x) + \gamma T_1(y) + \beta T_2(x) + \gamma T_2(y)\\ &= \beta\big(T_1(x) + T_2(x)\big) + \gamma\big(T_1(y) + T_2(y)\big)\\ &= \beta\big((T_1 + T_2)(x)\big) + \gamma\big((T_1 + T_2)(y)\big).\end{aligned}$$

Kemudian akan kita perlihatkan bahwa αT_1 juga merupakan transformasi linear. Ambil sebarang vektor x, y di V dan sebarang skalar β dan $\gamma \in \mathbb{C}$. Maka

$$
\begin{aligned}
(\alpha T_1)(\beta x + \gamma y) &= \alpha T_1(\beta x + \gamma y) \\
&= T_1(\alpha\beta x + \alpha\gamma y) \\
&= T_1(\alpha\beta x) + T_1(\alpha\gamma y) \\
&= \beta\big(\alpha(T_1(x))\big) + \gamma\big(\alpha(T_1(y))\big).
\end{aligned}
$$

Definisi 4.2.2

Himpunan semua transformasi linear T : V ------> W dinyatakan dengan $\mathcal{L}(V,W)$.

Teorema 4.2.1

Jika V dan W adalah ruang vektor, maka $\mathcal{L}(V,W)$, dengan penjumlahan dan perkalian dengan skalar seperti pada Definisi 4.2.1 juga merupakan ruang vektor.

Bukti :

Telah dibuktikan bahwa untuk sebarang transformasi linear T_1 dan T_2 dari V ke W dan sebarang skalar $\alpha \in \mathbb{C}$, $T_1 + T_2$ dan αT_1 juga merupakan transformasi linear dari V ke W. Jadi operasi penjumlahan dan perkalian dengan skalar pada Definisi 4.2.1 bersifat tertutup dalam $\mathcal{L}(V,W)$.

A1. Ambil sebarang T_1 dan T_2 anggota $\mathcal{L}(V,W)$. Maka

$$
\begin{aligned}
(T_1 + T_2)(x) &= T_1(x) + T_2(x) \\
&= T_2(x) + T_1(x)
\end{aligned}
$$

$= (T_2 + T_1)(x)$ untuk semua $x \in V$.

Jadi $T_1 + T_2 = T_2 + T_1$ untuk semua $T_1, T_2 \in \mathscr{L}(V,W)$.

A2. Ambil sebarang $T_1, T_2, T_3 \in \mathscr{L}(V,W)$. Maka

$$\begin{aligned}((T_1 + T_2) + T_3)(x) &= (T_1 + T_2)(x) + T_3(x)\\ &= (T_1(x) + T_2(x)) + T_3(x)\\ &= T_1(x) + (T_2(x) + T_3(x))\\ &= T_1(x) + (T_2 + T_3)(x)\\ &= (T_1 + (T_2 + T_3))(x)\end{aligned}$$

untuk semua $x \in V$. Jadi $(T_1 + T_2) + T_3 = T_1 + (T_2 + T_3)$ untuk semua $T_1, T_2, T_3 \in \mathscr{L}(V,W)$.

A3. Perhatikan transformasi linear $T_o : V \text{------>} W$ dengan aturan $T_o(x) = 0$ untuk semua $x \in V$. Akan kita perlihatkan bahwa T_o merupakan transformasi linear. Ambil sebarang $x,y \in V$ dan sebarang skalar $\alpha,\beta \in \mathbb{C}$. Maka

$$\begin{aligned}T_o(\alpha x + \beta y) &= 0\\ &= 0 + 0\\ &= \alpha T_o(x) + \beta T_o(y).\end{aligned}$$

Jadi $T_o \in \mathscr{L}(V,W)$, dan

$$\begin{aligned}(T + T_o)(x) &= T(x) + T_o(x)\\ &= T(x) + 0\\ &= T(x)\end{aligned}$$

untuk semua $x \in V$.

Jadi $T + T_o = T$ untuk semua $T \in \mathscr{L}(V,W)$.

A4. Ambil sebarang fungsi $T \in \mathscr{L}(V,W)$ dan perhatikan fungsi $-T : V \text{----->} W$ dengan aturan $(-T)(x) = -(T(x))$ untuk semua $x \in V$. Menurut Teorema 3.1.1 (iii), $-(T(x)) = (-1)T(x)$. Karena T merupakan transformasi linear dan

-1 merupakan skalar maka $-T = (-1)T$ merupakan transformasi linear. Jadi $-T \in \mathscr{L}(V,W)$, dan

$$
\begin{aligned}
(T + (-T))(x) &= T(x) + (-T)(x) \\
&= T(x) + (-(T(x)) \\
&= 0 \qquad (-T(x) \text{ invers aditif dari } T(x)) \\
&= T_o(x) \text{ untuk semua } x \in V.
\end{aligned}
$$

Jadi $T + (-T) = T_o$ untuk semua $T \in \mathscr{L}(V,W)$.

A5. Ambil sebarang $T_1, T_2 \in \mathscr{L}(V,W)$ dan sebarang skalar kompleks α. Maka

$$
\begin{aligned}
(\alpha(T_1 + T_2))(x) &= \alpha\big((T_1 + T_2)(x)\big) \\
&= \alpha(T_1(x) + T_2(x)) \\
&= \alpha T_1(x) + \alpha T_2(x)) \\
&= (\alpha T_1)(x) + (\alpha T_2)(x)) \\
&= (\alpha T_1 + \alpha T_2)(x) \text{ untuk semua } x \in V.
\end{aligned}
$$

Jadi $\alpha(T_1 + T_2) = \alpha T_1 + \alpha T_2$ untuk sebarang skalar $\alpha \in \mathbb{C}$ dan untuk semua $T_1, T_2 \in \mathscr{L}(V,W)$.

A6. Ambil sebarang skalar kompleks α dan β dan sebarang fungsi linear $T \in \mathscr{L}(V,W)$. Maka

$$
\begin{aligned}
((\alpha + \beta)T)(x) &= (\alpha + \beta)\big(T(x)\big) \\
&= \alpha T(x) + \beta T(x) \\
&= (\alpha T)(x) + (\beta T)(x) \\
&= (\alpha T + \beta T)(x) \text{ untuk semua } x \in V.
\end{aligned}
$$

Jadi $(\alpha + \beta)T = \alpha T + \beta T$ untuk sebarang skalar $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ dan semua $T \in \mathscr{L}(V,W)$.

7. Ambil sebarang skalar kompleks α dan β dan sebarang fungsi linear $T \in \mathcal{L}(V,W)$. Maka

$$((\alpha\beta)T)(x) = (\alpha\beta)\big(T(x)\big)$$
$$= \alpha\big(\beta T(x)\big)$$
$$= \alpha((\beta T)(x))$$
$$= (\alpha(\beta T))(x) \text{ untuk semua } x \in V.$$

Jadi $(\alpha\beta)T = \alpha(\beta T)$ untuk sebarang skalar $\alpha,\beta \in \mathbb{C}$ dan untuk semua $T \in \mathcal{L}(V,W)$.

8. Ambil sebarang fungsi $T \in \mathcal{L}(V,W)$. Maka

$$(1.T)(x) = 1\big(T(x)\big)$$
$$= T(x) \text{ untuk semua } x \in V.$$

Jadi $1.T = T$ untuk semua $T \in \mathcal{L}(V,W)$.∎

Definisi 4.2.3

Untuk $T_1 \in \mathcal{L}(V,W)$ dan $T_2 \in \mathcal{L}(W,Z)$. Pemetaan $R : V \longrightarrow Z$ yang didefinisikan dengan $R(x) = T_2(T_1(x))$ untuk semua $x \in V$ disebut hasilkali dari T_2 dan T_1, dan ditulis $R = T_2T_1$.

Akan kita perlihatkan bahwa T_2T_1 merupakan transformasi linear. Ambil sebarang $x,y \in V$ dan sebarang skalar $\alpha,\beta \in \mathbb{C}$. Maka

$$T_2T_1(\alpha x + \beta y) = T_2(T_1(\alpha x + \beta y))$$
$$= T_2(T_1(\alpha x) + T_1(\beta y))$$
$$= T_2(T_1(\alpha x)) + T_2(T_1(\beta y))$$
$$= T_2(\alpha T_1(x)) + T_2(\beta T_1(y))$$

$$= \alpha\big(T_2(T_1(x))\big) + \beta\big(T_2(T_1(y))\big)$$
$$= \alpha(T_2T_1)(x) + \beta(T_2T_1)(y)$$

untuk semua $x, y \in V$. Jadi T_2T_1 merupakan transformasi linear.

Perhatikan bahwa biasanya T_1T_2 tidak didefinisikan karena $T_2(x)$ di Z dan $T_1T_2(x)$ tidak didefinisikan kecuali $Z \subseteq V$. Jika $V = W = Z$, maka T_1T_2 dan T_2T_1, keduanya didefinisikan. Namun biasanya V, W, Z tidak sama.

Teorema 4.2.2

Jika $T \in \mathcal{L}(V_1,V_2)$, $U \in \mathcal{L}(V_2,V_3)$ dan $V \in \mathcal{L}(V_3,V_4)$, maka

$$(VU)T = V(UT).$$

Bukti :

Ambil sebarang vektor x di V_1, dari Definisi 4.2.3,
$(V(UT))(x) = V((UT)(x)) = V(U(T(x))) = (VU)(T(x)) = ((VU)T)(x)$. Jadi $V(UT) = (VU)T$. ▮

Teorema 4.2.3

Jika $T \in \mathcal{L}(V_1,V_2)$, U, $V \in \mathcal{L}(V_2,V_3)$ dan $W \in \mathcal{L}(V_3,V_4)$, maka

$$(U + V)T = UT + VT \quad \text{dan} \quad W(U + V) = WU + WV .$$

Bukti :

Ambil sebarang $x \in V_1$, maka

$$((U + V)T)(x) = (U + V)(T(x)) = U(T(x)) + V(T(x))$$
$$= (UT)(x) + (VT)(x) = (UT + VT)(x).$$

Jadi $(U + V)T = UT + VT$.

Dengan cara yang serupa, ambil sebarang $y \in V_2$, maka

$(W(U + V))(y) = W((U + V)(y)) = W(U(y) + V(y))$.

Karena W merupakan transformasi linear, maka

$(W(U + V))(y) = W(U(y)) + W(V(y)) = (WU + WV)(y)$.

Jadi $W(U + V) = WU + WV$. ■

<u>Teorema</u> <u>4.2.4</u>

Jika $T, U \in \mathscr{L}(V,V)$, maka $T(\alpha U) = \alpha(TU)$ untuk sebarang skalar $\alpha \in \mathbb{C}$.

Bukti :

Ambil sebarang $z \in V$, maka

$$(T(\alpha U))(z) = T((\alpha U)(z)) = T(\alpha(U(z))) = \alpha T(U(z))$$
$$= \alpha(TU)(z).$$

Jadi $T(\alpha U) = \alpha(TU)$. ■

<u>Teorema</u> <u>4.2.5</u>

Andaikan $\{U_1, U_2, \ldots, U_n\}$ adalah himpunan dari operator-operator linear yang mempunyai sifat komutatif dalam ruang vektor V (yaitu operator-operator yang mempunyai sifat $U_iU_j = U_jU_i$ untuk semua i,j). Maka untuk sebarang i ($1 \le i \le n$) berlaku

$$N(U_i) \subseteq N(U_1U_2 \ldots U_n).$$

Bukti :

Ambil sebarang $y \in N(U_i)$, maka $U_i(y) = 0$, dan

$$(U_1 \ldots U_i \ldots U_n)(y)$$
$$= (U_1U_2 \ldots U_n)U_i(y)$$

$$= (U_1 U_2 \ldots U_n)\ \mathit{0}$$

$$= \mathit{0}$$

sebab transformasi linear selalu memetakan vektor nol ke vektor nol. Karena $(U_1 U_2 \ldots U_n)(y) = \mathit{0}$, maka $y \in N(U_1 U_2 \ldots U_n)$. Jadi $N(U_i) \subseteq N(U_1 U_2 \ldots U_n)$.∎

BAB V

PERSAMAAN DIFERENSIAL LINEAR HOMOGEN TINGKAT - n DENGAN KOEFISIEN KONSTAN

Suatu **Persamaan Diferensial** (PD) dengan fungsi $y = y(x)$ adalah suatu persamaan yang memuat variabel y, x dan derivatif-derivatif dari y. Suatu **Persamaan Diferensial Linear** adalah persamaan yang berbentuk

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y^{(1)} + a_0 y = f \qquad (1)$$

di mana $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0, f$ adalah fungsi-fungsi dari x dan $y^{(k)}$ adalah derivatif ke-k dari y. Fungsi-fungsi a_i disebut koefisien dari persamaan diferensial. Jika $f = 0$, persamaan diferensial linear (1) disebut **Persamaan Diferensial Linear Homogen** (PDLH).

Tingkat (orde) dari suatu PD adalah tingkat derivatif tertinggi yang terdapat pada PD tersebut. Jika $a_n \neq 0$, PD (1) kita sebut sebagai PD tingkat-n. Jika kita membagi kedua ruas PDLH (1) dengan a_n, kita mendapat PDLH baru yang ekuivalen dengan PD (1), yaitu

$$y^{(n)} + b_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + b_1 y^{(1)} + b_0 y = 0$$

di mana $b_i = a_i / a_n$ untuk $i = 0, 1, \dots, n-1$.

Penyelesaian PD (1) adalah fungsi-fungsi yang jika disubstitusikan pada y menjadikan PD (1) suatu identitas.

Pada Bab V ini kita akan menggunakan aljabar linear yang telah kita bahas pada bab-bab sebelumnya untuk menyelesaikan PDLH tingkat-n dengan koefisien konstan.

Dalam mempelajari PD sangat perlu untuk memperhatikan penyelesaian-penyelesaian PD yang berupa fungsi bernilai kompleks dari variabel real, walaupun dalam fisika penyelesaian-penyelesaian yang mempunyai arti adalah penyelesaian bernilai real. Pernyataan tersebut akan kita jelaskan kemudian. Jadi kita akan bekerja dengan ruang vektor $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ (telah dibahas dalam Contoh 3.1.1). Teorema berikut menunjukkan bahwa kita dapat membatasi pembahasan kita pada ruang vektor yang jauh lebih kecil daripada $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{C})$.

Teorema 5.1

Setiap penyelesaian PDLH tingkat-n dengan koefisien konstan mempunyai derivatif dari semua tingkat. Jadi, jika y adalah suatu penyelesaian dari PDLH tingkat-n dengan koefisien konstan, maka $y^{(k)}$ ada untuk setiap bilangan bulat positif k.

Bukti :

Akan kita buktikan dengan induksi matematika.

i) Untuk $k = 1$ maka $y^{(1)}$ ada sebab y mempunyai derivatif ke-1.

ii) Untuk sebarang bilangan bulat $k > 1$, andaikan Teorema 5.1 berlaku untuk sebarang derivatif yang lebih kecil atau sama dengan k.

iii) $y^{(k+1)} = (y^{(k)})^{(1)}$ ada, sebab $y^{(k)}$ ada .

Jadi $y^{(k+1)}$ ada untuk sebarang bilangan bulat $k \geq 1$.

Jadi $y^{(k)}$ ada untuk sebarang bilangan bulat positif k.∎

Dalam Contoh 3.2.1 telah kita tunjukkan bahwa C^{∞} merupakan subruang dari $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ sehingga merupakan ruang vektor atas bilangan kompleks. Berdasarkan Teorema 5.1 di atas, C^{∞} merupakan ruang vektor yang penting dalam pembahasan Bab V ini, sebab untuk $y \in C^{\infty}$, derivatif ke-k, yaitu $y^{(k)}$, juga terletak di dalam C^{∞}. Dengan Teorema 5.1 tersebut memungkinkan kita untuk mendefinisikan suatu transformasi pada contoh berikut ini.

<u>Contoh 5.1</u>

Diketahui transformasi $D : C^{\infty} \longrightarrow C^{\infty}$ dengan aturan

$$D(f(x)) = f\,'(x)$$

di mana $f\,'$ merupakan turunan dari f dan $x \in \mathbb{R}$. D merupakan operator linear, sebab

$$\begin{aligned} D(\alpha f(x) + \beta g(x)) &= (\alpha f(x) + \beta g(x))' \\ &= \alpha f\,'(x) + \beta g\,'(x) \\ &= \alpha D\big(f(x)\big) + \beta D\big(g(x)\big) \text{ untuk semua } \alpha, \beta \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

dan untuk semua $f, g \in C^{\infty}$.

<u>Contoh 5.2</u>

Dikeahui transformasi $D^{n} : C^{\infty} \longrightarrow C^{\infty}$ dengan aturan

$$D^{n}(f(x)) = f^{(n)}(x)$$

di mana $f^{(n)}$ merupakan turunan ke-n dari f dan $x \in \mathbb{R}$.

D^n merupakan operator linear, sebab

$$\begin{aligned} D^n\big((\alpha f + \beta g)(x)\big) &= (\alpha f + \beta g)^{(n)}(x) \\ &= \alpha f^{(n)}(x) + \beta g^{(n)}(x) \\ &= \alpha D^n\big(f(x)\big) + \beta D^n\big(g(x)\big) \quad \text{untuk semua} \end{aligned}$$

$\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ dan untuk semua $f, g \in C^\infty$.

Jika D dan D^2 masing-masing adalah operator linear yang didefinisikan pada Contoh 5.1 dan Contoh 5.2, maka

$$\begin{aligned} D^2(f(x)) &= f^{(2)}(x) \\ &= f'\big(f'(x)\big) \\ &= D\big(D(f(x)\big) \quad \text{untuk semua } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Tampak bahwa D^2 adalah hasilkali DD. Demikian juga, $D^3 = DD^2 = D^2D$, $D^4 = DD^3 = D^3D$, dan seterusnya. Kita mendefinisikan $D^0 = I$ dan $D^1 = D$.

<u>Definisi 5.1</u>

Andaikan $p(\lambda) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0$ suatu polinomial dengan koefisien kompleks. Jika T adalah suatu operator linear pada ruang vektor V, kita mendefinisikan

$$p(T) = a_nT^n + a_{n-1}T^{n-1} + \ldots + a_1T + a_0I.$$

Perhatikan suatu polinomial dengan koefisien kompleks yang berbentuk $p(\lambda) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0$ dan operator linear D yang kita definisikan pada Contoh 5.1. Menurut Definisi 5.1, $p(D) = a_nD^n + a_{n-1}D^{n-1} + \ldots + a_1D +$

$a_0 I$. Akan kita tunjukkan bahwa $p(D)$ merupakan operator linear pada C^∞. Ambil sebarang f dan g anggota C^∞ dan sebarang skalar kompleks α, β. Maka

$$p(D)(\alpha f(x) + \beta g(x))$$

$$= (a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \ldots + a_1 D + a_0 I)(\alpha f(x) + \beta g(x))$$

$$= a_n D^n(\alpha f(x) + \beta g(x)) + a_{n-1} D^{n-1}(\alpha f(x) + \beta g(x)) + \ldots +$$
$$a_1 D(\alpha f(x) + \beta g(x)) + a_0 I(\alpha f(x) + \beta g(x))$$

$$= a_n D^n(\alpha f(x)) + a_n D^n(\beta g(x)) + a_{n-1} D^{n-1}(\alpha f(x)) +$$
$$a_{n-1} D^{n-1}(\beta g(x)) + \ldots + a_1 D(\alpha f(x)) + a_1 D(\beta g(x)) +$$
$$a_0 I(\alpha f(x)) + a_0 I(\beta g(x))$$

$$= \alpha(a_n D^n(f(x)) + a_{n-1} D^{n-1}(f(x)) + \ldots + a_1 D(f(x)) +$$
$$a_0 I(f(x))) + \ldots + \beta(a_n D^n(g(x)) + a_{n-1} D^{n-1}(g(x)) + \ldots +$$
$$a_1 D(g(x)) + a_0 I(g(x)))$$

$$= \alpha(a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \ldots + a_1 D + a_0 I)(f(x)) +$$
$$\beta(a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \ldots + a_1 D + a_0 I)(g(x))$$

$$= \alpha p(D)(f(x)) + \beta p(D)(g(x)) \text{ untuk semua } x \in \mathbb{R}.$$

Jadi $p(D)$ merupakan operator linear pada C^∞.

Definisi 5.2

Untuk sebarang polinomial $p(\lambda)$ atas $\mathbb{C}$ yang berderajat positif, $p(D)$ disebut **operator diferensial** yang berkaitan dengan polinomial $p(\lambda)$. Tingkat dari operator diferensial $p(D)$ adalah derajat dari polinomial $p(\lambda)$.

Contoh 5.3

Jika $p(D) = 3D^2 + 6D + 1$ dan $q(D) = D^2 + D$ merupakan operator diferensial tingkat-2, maka

$$
\begin{aligned}
& q(D)p(D)(f(x)) \\
&= q(D)(p(D)(f(x))) \\
&= q(D)((3D^2 + 6D + 1)(f(x))) \\
&= q(D)(3D^2(f(x)) + 6D(f(x)) + f(x)) \\
&= (D^2 + D)(3D^2(f(x)) + 6D(f(x)) + f(x)) \\
&= D^2(3D^2(f(x)) + 6D(f(x)) + f(x)) + D(3D^2(f(x)) + 6D(f(x)) \\
&\quad + f(x)) \\
&= 3D^4(f(x)) + 6D^3(f(x)) + D^2(f(x)) + 3D^3(f(x)) + 6D^2(f(x)) \\
&\quad + D(f(x)) \\
&= 3D^4(f(x)) + 9D^3(f(x)) + 7D^2(f(x)) + D(f(x)) \\
&= (3D^4 + 9D^3 + 7D^2 + D)(f(x))
\end{aligned}
$$

Dengan menggunakan Teorema 4.2.2, Teorema 4.2.3, dan Teorema 4.2.4 kita dapat mengalikan operator diferensial seperti pada perkalian polinomial. Sebagai contoh kita gabungkan operator-operator diferensial pada Contoh 5.3 dengan menggunakan teorema-teorema tersebut.

$$
\begin{aligned}
q(D)p(D) &= (D^2 + D)(3D^2 + 6D + 1) \\
&= D^2(3D^2 + 6D + 1) + D(3D^2 + 6D + 1) \\
&= 3D^4 + 6D^3 + D^2 + 3D^3 + 6D^2 + D \\
&= 3D^4 + 9D^3 + 7D^2 + D
\end{aligned}
$$

Teorema 5.2

Andaikan $p(\lambda)$ dan $q(\lambda)$ adalah sebarang polinomial dan $p(\lambda)q(\lambda)$ adalah hasilkali kedua polinomial tersebut. Maka operator diferensial yang berkaitan dengan polinomial-polinomial tersebut adalah $p(D)$ dan $q(D)$ yang memenuhi $p(D)q(D) = q(D)p(D)$.

Bukti :

Operator diferensial yang berkaitan dengan polinomial $p(\lambda)q(\lambda)$ adalah $p(D)q(D)$. Karena perkalian polinomial bersifat komutatif, maka $p(\lambda)q(\lambda) = q(\lambda)p(\lambda)$ untuk semua λ. Hal ini berarti operator $p(D)q(D)$ dan $q(D)p(D)$ berkaitan dengan polinomial yang sama dan berarti operator-operator tersebut harus sama. Jadi $p(D)q(D) = q(D)p(D)$.■

Operator diferensial sangat berguna karena dapat merumuskan permasalahan persamaan diferensial ke dalam permasalahan aljabar linear. Sebarang PDLH tingkat-n dengan koefisien konstan

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1y^{(1)} + a_0y = 0 \qquad (2)$$

dapat ditulis dengan menggunakan operator diferensial sebagai

$$(D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \ldots + a_1D^1 + a_0I)\ y = 0.$$

Definisi 5.3

Diberikan PD (2), polinomial kompleks

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0$$

disebut polinomial pembantu yang berkaitan dengan PD tersebut.

Jadi sebarang PDLH dengan koefisien konstan dapat ditulis kembali sebagai

$$p(D)(y) = 0 \qquad (3)$$

di mana $p(\lambda)$ adalah polinomial pembantu yang berkaitan dengan PD tersebut.

Teorema 5.3

Himpunan semua penyelesaian PDLH tingkat-n dengan koefisien konstan sama dengan ruang nol dari $p(D)$, di mana $p(\lambda)$ adalah polinomial pembantu yang berkaitan dengan PD tersebut.

Bukti :

Sebarang PDLH dengan koefisien konstan dapat di tulis sebagai PD (3). Maka himpunan penyelesaian PD tersebut adalah himpunan $\{ y \in C^{\infty} | \ p(D)(y) = 0 \}$. Jadi himpunan penyelesaian PDLH tingkat-n dengan koefisien konstan tidak lain adalah ruang nol dari $p(D)$.■

Akibat 5.4

Himpunan semua penyelesaian PDLH tingkat-n dengan koefisien konstan adalah subruang dari C^{∞}.

Bukti :

Menurut Teorema 5.3 himpunan penyelesaian PDLH tingkat-n dengan koefisien konstan sama dengan ruang nol dari $p(D)$, di mana $p(\lambda)$ merupakan polinomial pembantu yang berkaitan dengan PD. Kemudian menurut Teorema 4.1.4 ruang nol dari $p(D)$ merupakan subruang dari C^{∞}. ∎

Himpunan semua penyelesaian PDLH tingkat-n dengan koefisien konstan kita sebut **ruang penyelesaian** dari PDLH tersebut. Cara yang praktis untuk menyatakan ruang penyelesaian tersebut adalah dengan menggunakan konsep basis. Nanti kita akan menyelidiki fungsi-fungsi tertentu yang berguna dalam menentukan basis untuk ruang penyelesaian dari PDLH tingkat-n dengan koefisien konstan.

Untuk suatu bilangan real k dapat ditentukan bilangan real e^k, di mana e adalah bilangan tunggal yang nilai logaritma naturalnya adalah 1 (yaitu, $\ln e = 1$). Sifat-sifat eksponen berikut ini telah kita kenal :

$$e^{k+m} = e^k e^m \text{ dan } e^{-k} = \frac{1}{e^k}$$

untuk sebarang bilangan real k dan m. Kita sekarang akan memperluas definisi pangkat dari e dengan bilangan kompleks sedemikian sehingga sifat-sifat tersebut diawetkan.

Definisi 5.4

Andaikan $c = a + ib$ bilangan kompleks dengan bagian real a dan bagian imajiner b. Didefinisikan

$$e^c = e^a(\cos b + i \sin b).$$

Untuk $a = 0$ diperoleh

$$e^{ib} = \cos b + i \sin b$$

yang disebut rumus Euler.

Jika c adalah bilangan real (yaitu $b = 0$), maka $e^c = e^a$. Dengan menggunakan identitas trigonometri dapat ditunjukkan bahwa

$$e^{c+d} = e^c e^d \quad \text{dan} \quad e^{-c} = \frac{1}{e^c}$$

untuk sebarang bilangan kompleks c dan d.

Andaikan $c = a_1 + ib_1$ dan $d = a_2 + ib_2$, di mana $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ untuk $i = 1,2$. Maka

$$\begin{aligned}
e^{c+d} &= e^{(a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2)} \\
&= e^{(a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)} \\
&= e^{(a_1 + a_2)}\big(\cos(b_1 + b_2) + i \sin(b_1 + b_2)\big) \\
&= e^{a_1}e^{a_2}\big(\cos(b_1)\cos(b_2) - \sin(b_1)\sin(b_2) + \\
&\qquad i\,(\sin(b_1)\cos(b_2) + \cos(b_1)\sin(b_2))\big) \\
&= e^{a_1}e^{a_2}\big(\cos(b_1) + i \sin(b_1)\big)\big(\cos(b_2) + i \sin(b_2)\big)
\end{aligned}$$

$$= e^{a_1}\left(\cos(b_1) + i\sin(b_1)\right)e^{a_2}\left(\cos(b_2) + i\sin(b_2)\right)$$

$$= e^c e^d$$

Jadi $e^{c+d} = e^c e^d$ untuk semua $c, d \in \mathbb{C}$.

Andaikan $c = a_1 + ib_1$ di mana $a_1, b_1 \in \mathbb{R}$. Maka

$$e^{-c} = e^{-(a_1 + ib_1)}$$

$$= e^{-a_1 + i(-b_1)}$$

$$= e^{-a_1}\left(\cos(-b_1) + i\sin(-b_1)\right)$$

$$= e^{-a_1}\left(\cos(b_1) - i\sin(b_1)\right)$$

$$= \frac{\cos(b_1) - i\sin(b_1)}{e^{a_1}} \times \frac{\cos(b_1) + i\sin(b_1)}{\cos(b_1) + i\sin(b_1)}$$

$$= \frac{1}{e^{a_1}\left(\cos(b_1) + i\sin(b_1)\right)}$$

$$= \frac{1}{e^c}$$

Jadi $e^{-c} = \dfrac{1}{e^c}$ untuk semua $c \in \mathbb{C}$.

<u>Definisi 5.5</u>

Suatu fungsi $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ yang didefinisikan dengan $f(x) = e^{cx}$ untuk bilangan kompleks c yang tertentu disebut fungsi eksponensial.

Teorema 5.5

Untuk sebarang fungsi eksponensial $f(x) = e^{cx}$, $f\,'(x) = ce^{cx}$.

Bukti :

Andaikan $c = a + ib$ di mana $a,b \in \mathbb{R}$. Maka

$$f(x) = e^{cx}$$

$$= e^{ax}\cos(bx) + i\,e^{ax}\sin(bx).$$

Dengan menggunakan Definisi 3.2.2 kita dapatkan

$$f\,'(x) = ae^{ax}\big(\cos(bx) + i\sin(bx)\big) + be^{ax}\big(-\sin(bx) + i\cos(bx)\big)$$

$$= ae^{ax}\big(\cos(bx) + i\sin(bx)\big) + be^{ax}\big(i^2\sin(bx) + i\cos(bx)\big)$$

$$= (a + ib)e^{ax}\big(\cos(bx) + i\sin(bx)\big)$$

$$= ce^{cx}. \blacksquare$$

Jadi derivatif suatu fungsi eksponensial merupakan kelipatan konstanta yang tertentu itu dengan dirinya sendiri, yaitu untuk sebarang fungsi eksponensial $f(x) = e^{cx}$, maka $f\,'(x) = ce^{cx}$.

Kita dapat menggunakan fungsi eksponensial untuk menyatakan semua penyelesaian PDLH tingkat-1 dengan koefisien konstan. Perlu kita ingat kembali bahwa tingkat dari PDLH adalah derajat dari polinomial pembantunya. Jadi suatu PDLH tingkat-1 dengan koefisien konstan berbentuk

$$y' + a_o y = 0 \qquad (4)$$

<u>Teorema 5.6</u>

Ruang penyelesaian dari PD (4) mempunyai basis $\{e^{a_o x}\}$

Bukti :

Jelas PD (4) mempunyai suatu penyelesaian $e^{a_o x}$. Andaikan $f(x)$ adalah sebarang penyelesaian dari PD (4), maka

$$f'(x) = -a_o f(x) \text{ untuk semua } x \in \mathbb{R}.$$

Didefinisikan

$$z(x) = e^{a_o x} f(x).$$

Derivatif dari z menghasilkan

$$z'(x) = \left(e^{a_o x}\right)' f(x) + e^{a_o x} f'(x)$$

$$= a_o e^{a_o x} f(x) - a_o e^{a_o x} f(x)$$

$$= 0.$$

Karena $z' = 0$, z adalah fungsi konstan. Jadi ada bilangan kompleks c sedemikian sehingga $z(x) = e^{a_o x} f(x) = c$ untuk semua $x \in \mathbb{R}$. Sehingga

$$f(x) = c\, e^{-a_o x}.$$

Jadi kita simpulkan bahwa sebarang penyelesaian dari PD (4) adalah kombinasi linear dari $e^{-a_o x}$. Karena $\{ e^{-a_o x} \}$ bebas linear, maka $\{e^{-a_o x}\}$ adalah basis dari ruang penyelesaian PD(4).∎

Akibat 5.7

Untuk setiap bilangan kompleks c, ruang nol dari operator diferensial $D - cI$ mempunyai $\{ e^{cx} \}$ sebagai basis.

Bukti :

Ruang nol dari operator diferensial $D - cI$ untuk sebarang bilangan kompleks c adalah $\{ y \in C^{\infty} \mid (D - cI)(y) = 0 \}$. Menurut Teorema 5.3, ruang nol tersebut merupakan ruang penyelesaian PDLH tingkat-1 dengan koefisien konstan. Sehingga menurut Teorema 5.6, ruang nol tersebut mempunyai basis $\{ e^{cx} \}$.∎

Dari Teorema Fundamental Aljabar kita ketahui bahwa

$$a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_o$$

di mana $a_o, a_1, \ldots, a_n$ ($n \geq 1$) adalah bilangan-bilangan kompleks sedemikian sehingga $a_o \neq 0$, mempunyai paling sedikit satu akar bilangan kompleks.

Kemudian menurut Teorema Faktor, suatu polinomial $p(\lambda)$ mempunyai faktor $\lambda - r$ jika hanya jika $p(r) = 0$.

Ke dua teorema tersebut di atas akan kita gunakan untuk membuktikan Teorema 5.8 berikut ini.

Teorema 5.8

Setiap polinomial dengan koefisien konstan berderajat n, di mana n > 0, dapat difaktorkan menjadi n faktor linear.

Bukti :

Ambil sebarang polinomial berderajat n, misalkan $p(\lambda)$. Dengan Teorema Fundamental Aljabar kita mengetahui bahwa $p(\lambda)$ mempunyai satu akar r_1. Dengan Teorema Faktor, $\lambda - r_1$ adalah faktor dari $p(\lambda)$. Jadi

$$p(\lambda) = (\lambda - r_1)\, Q_1(\lambda),$$

di mana $Q_1(\lambda)$ adalah hasil bagi yang didapat dengan membagi $p(\lambda)$ dengan $\lambda - r_1$. Andaikan koefisien terdepan $p(\lambda)$ adalah a_n. Dengan memperhatikan proses pembagian, dapat diketahui bahwa koefisien terdepan dari $Q_1(\lambda)$ juga a_n dan derajat $Q_1(\lambda)$ adalah n-1. Sekarang jika derajat dari $Q_1(\lambda)$ lebih besar daripada nol, maka $Q_1(\lambda)$ mempunyai akar r_2, dan diperoleh

$$Q_1(\lambda) = (\lambda - r_2)\, Q_2(\lambda),$$

di mana derajat dari $Q_2(\lambda)$ adalah n-2 dan koefisien terdepannya adalah a_n. Jadi didapat

$$p(\lambda) = (\lambda - r_1)(\lambda - r_2)Q_2(\lambda).$$

Proses ini dapat dilanjutkan sampai hasil bagi $Q_n(\lambda)$ yang diperoleh berderajat nol dan koefisien terdepannya adalah a_n, sehingga $Q_n(\lambda)$ adalah a_n. Sekarang dipunyai

$$p(\lambda) = a_n(\lambda - r_1)(\lambda - r_2)\ldots(\lambda - r_n).$$

Tampak bahwa $p(\lambda)$ dapat difaktorkan menjadi satu faktor konstan a_n dan n faktor linear yang mempunyai koefisien terdepan 1. ∎

Teorema 5.9

Andaikan $p(\lambda)$ adalah polinomial pembantu untuk PDLH tingkat-n dengan koefisien konstan. Jika bilangan kompleks c adalah pembuat nol $p(\lambda)$, maka e^{cx} adalah penyelesaian dari PD.

Bukti :

Diberikan PDLH tingkat-n dengan koefisien konstan

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1y^{(1)} + a_0y = 0$$

dengan polinomial pembantu

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0$$

difaktorkan menjadi hasilkali polinomial-polinomial berderajat 1

$$p(\lambda) = (\lambda - c_1)(\lambda - c_2)\ldots(\lambda - c_n)$$

di mana $c_1, c_2, \ldots, c_n$ (tidak harus berbeda) merupakan bilangan-bilangan kompleks (menurut Teorema 5.8 di atas). Jadi

$$p(D) = (D - c_1I)(D - c_2I)\ldots(D - c_nI).$$

Menurut Teorema 4.2.5 didapat bahwa

$$N(D - c_i I) \subseteq N(p(D))$$

untuk $i = 1,2,\ldots,n$

Menurut Akibat 5.7, $N(D - C_i I)$ mempunyai basis $\{e^{c_i x}\}$ untuk $i = 1,2,\ldots,n$. Karena $N(p(D))$ merupakan ruang penyelesaian untuk PD yang diberikan, dapat disimpulkan bahwa jika c pembuat nol dari $p(\lambda)$, maka e^{cx} adalah penyelesaian dari PD.∎

Contoh 5.4

Diberikan PD

$$y'' - 3y' + 2y = 0$$

dengan polinomial pembantu

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda - 2).$$

Menurut Teorema 5.9, e^x dan e^{2x} adalah penyelesaian-penyelesaian dari PD di atas, sebab $\lambda = 1$ dan $\lambda = 2$ merupakan pembuat nol dari $p(\lambda)$. Karena ruang penyelesaian dari PD di atas adalah subruang dari C^∞, $S(e^x, e^{2x})$ terletak dalam ruang penyelesaian. Mudah untuk dibuktikan bahwa $\{e^x, e^{2x}\}$ bebas linear. Jadi $\{e^x, e^{2x}\}$ merupakan basis dari ruang penyelesaian, sehingga kita simpulkan bahwa ruang penyelesaian PD di atas berdimensi dua.

Bentuk umum dari Contoh 5.4 akan dibahas dalam Teorema 5.12. Dua lemma berikut ini merupakan persiapan untuk membuktikan Teorema 5.12.

Lemma 5.10

Operator diferensial linear $D - cI : C^{\infty} \longrightarrow C^{\infty}$ bersifat suryektif untuk setiap bilangan kompleks c.

Bukti :

Ambil sebarang $y \in C^{\infty}$. Akan ditentukan $z \in C^{\infty}$ sedemikian sehingga $(D - cI)(z) = y$. Andaikan $w(x) = y(x)e^{-cx}$ untuk $x \in \mathbb{R}$. Jelas bahwa, $w \in C^{\infty}$ sebab y dan e^{-cx} terletak dalam C^{∞}. Andaikan w_1 dan w_2 bagian real dan bagian imajiner dari w. Maka w_1 dan w_2 kontinu sebab mereka diferensiabel. Sehingga mereka mempunyai antiderivatif, misalkan masing - masing adalah W_1 dan W_2.

Andaikan $W : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ didefinisikan dengan

$$W(x) = W_1(x) + i\, W_2(x) \text{ untuk } x \in \mathbb{R}.$$

Maka $W \in C^{\infty}$ dan $W' = w$.

Akhirnya, andaikan $z : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ didefinisikan dengan $z(x) = W(x)e^{cx}$ untuk $x \in \mathbb{R}$. Jelas $z \in C^{\infty}$, dan

$$\begin{aligned}(D - cI)(z(x)) &= z'(x) + cz(x) \\ &= W'(x)e^{cx} + cW(x)e^{cx} - cW(x)e^{cx} \\ &= w(x)e^{cx} \\ &= y(x)e^{-cx}e^{cx} \\ &= y(x).\end{aligned}$$

Jadi diperoleh $(D - cI)(z) = y$. ∎

Lemma 5.11

Andaikan V suatu ruang vektor, dan andaikan T dan U adalah operator linear dalam V sedemikian sehingga U bersifat suryektif dan ruang nol dari T dan U berdimensi hingga. Maka ruang nol dari TU berdimensi hingga dan

$$\dim(N(TU)) = \dim(N(T)) + \dim(N(U)).$$

Bukti :

Andaikan $p = \dim(N(T))$, $q = \dim(N(U))$, dan $\{u_1, u_2, \ldots, u_p\}$ dan $\{v_1, v_2, \ldots, v_q\}$ masing-masing merupakan basis untuk N(T) dan N(U). Karena U suryektif maka untuk setiap i ($1 \leq i \leq p$) dapat dipilih suatu elemen $w_i \in V$ sedemikian sehingga $U(w_i) = u_i$. Jadi diperoleh suatu himpunan p elemen $\{w_1, w_2, \ldots, w_p\}$. Perhatikan bahwa untuk semua i dan j, $w_i \neq v_j$, karena kalau tidak maka $u_i = U(w_i) = U(v_j) = 0$ yaitu suatu kontradiksi. Oleh karena itu

$$\beta = \{w_1, w_2, \ldots, w_p, v_1, v_2, \ldots, v_q\}$$

memuat p + q elemen-elemen yang berbeda. Untuk membuktikan lemma ini, cukup ditunjukkan bahwa β merupakan suatu basis untuk N(TU).

Pertama-tama akan ditunjukkan bahwa β merentang N(TU). Ambil sebarang w_i dan v_j anggota β, maka

$$TU(w_i) = T(u_i) = 0 \text{ dan } TU(v_j) = T(0) = 0.$$

$$\text{Jadi } \beta \in N(TU).$$

Sekarang andaikan $v \in N(TU)$. Maka

$$0 = TU(v) = T(U(v)).$$

Jadi $U(v) \in N(T)$. Jadi ada skalar-skalar $a_1, a_2, \ldots, a_p$ sedemikian sehingga

$$U(v) = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \ldots + a_p u_p$$

$$= U(a_1 w_1 + a_2 w_2 + \ldots + a_p w_p).$$

Sehingga

$$U(v - (a_1 w_1 + a_2 w_2 + \ldots + a_p w_p)) = 0.$$

Akibatnya $v - (a_1 w_1 + a_2 w_2 + \ldots + a_p w_p)$ berada dalam $N(U)$. Jadi ada skalar-skalar $b_1, b_2, \ldots, b_q$ sedemikian sehingga

$$v - (a_1 w_1 + a_2 w_2 + \ldots + a_p w_p) = b_1 v_1 + b_2 v_2 + \ldots + b_q v_q$$

yang berarti bahwa

$$v = a_1 w_1 + a_2 w_2 + \ldots + a_p w_p + b_1 v_1 + b_2 v_2 + \ldots + b_q v_q.$$

Terbukti β merentang $N(TU)$.

Untuk membuktikan bahwa β bebas linear, andaikan $a_1, a_2, \ldots, a_p, b_1, b_2, \ldots, b_q$ sebarang skalar-skalar sedemikian sehingga

$$a_1 w_1 + a_2 w_2 + \ldots + a_p w_p + b_1 v_1 + b_2 v_2 + \ldots + b_q v_q = 0 \quad (5)$$

Dengan mengoperasikan U pada ke dua ruas persamaan (5), kita dapatkan

$$a_1 u_1 + a_2 u_2 + \ldots + a_p u_p = 0.$$

Karena $\{u_1, u_2, \ldots, u_p\}$ bebas linear, maka $a_i = 0$ untuk $i = 1, \ldots, p$. Sehingga persamaan (5) menjadi

$$b_1 v_1 + b_2 v_2 + \ldots + b_q v_q = 0$$

Kemudian, kebebasan linear dari $\{v_1, v_2, \ldots, v_q\}$ mengakibatkan $b_i = 0$ untuk $i = 1,2,\ldots,q$. Jadi dapat disimpulkan bahwa β merupakan basis untuk N(TU), sehingga N(TU) berdimensi hingga dan

$$\begin{aligned} \dim(N(TU)) &= p + q \\ &= \dim(\ N(T)\ ) + \dim(\ N(U)\ ). \blacksquare \end{aligned}$$

<u>Teorema 5.12</u>

Untuk sebarang operator diferensial p(D) tingkat-n, ruang nol dari p(D) adalah suatu subruang dari C^{∞} yang berdimensi n.

Bukti :

Akan dibuktikan dengan menggunakan induksi matematika pada n, yaitu tingkat dari operator diferensial p(D). Menurut Akibat 5.7 teorema benar untuk operator diferensial p(D) tingkat-1. Untuk suatu bilangan bulat $n > 1$, andaikan teorema benar untuk sebarang operator diferensial dengan tingkat $n - 1$. Pandang suatu operator diferensial P(D) dengan tingkat-n. Polinomial $p(\lambda)$ dapat difaktorkan menjadi hasil kali dua polinomial

$$p(\lambda) = q(\lambda)(\lambda - c)$$

di mana $q(\lambda)$ adalah polinomial dengan derajat n-1 dan c adalah bilangan kompleks. Jadi operator diferensial p(D) dapat ditulis sebagai

$$p(D) = q(D)(D - cI).$$

Menurut Lemma 5.10 operator $(D - cI)$ bersifat suryektif dan $\dim(N(D - cI)) = 1$ (menurut Akibat 5.7). Menurut pengandaian, $\dim(N(q(D))) = n - 1$. Jadi dengan Lemma 5.11 dapat disimpulkan bahwa

$$\begin{aligned}\dim(N(p(D))) &= \dim(N(q(D))) + \dim(N(D - cI))\\ &= (n - 1) + 1\\ &= n.\blacksquare\end{aligned}$$

<u>Akibat 5.13</u>

Ruang penyelesaian untuk sebarang PDLH tingkat-n adalah suatu subruang dari C^{∞} yang berdimensi n.

Bukti :

Karena ruang penyelesaian dari PDLH tingkat-n dengan koefisien konstan sama dengan ruang nol dari $p(D)$, di mana $p(D)$ adalah operator diferensial tingkat-n, maka menurut Teorema 5.12 ruang penyelesaian untuk sebarang PDLH tingkat-n adalah suatu subruang dari C^{∞} yang berdimensi n. ■

Akibat 5.13 mengubah masalah penentuan semua penyelesaian suatu PDLH tingkat-n dengan koefisien konstan menjadi masalah penentuan suatu himpunan n penyelesaian bebas linear dari PDLH tersebut. Menurut Teorema 3.4.4 himpunan demikian adalah basis untuk ruang penyelesaian dari PDLH. Teorema berikut memungkinkan kita untuk menentukan basis dengan lebih cepat untuk PDLH tingkat-n dengan koefisien konstan.

Teorema 5.14

Jika $c_1, c_2, \ldots, c_n$ adalah n buah bilangan kompleks yang berbeda, maka himpunan fungsi-fungsi eksponensial $\{e^{c_1 x}, e^{c_2 x}, \ldots, e^{c_n x}\}$ bebas linear.

Bukti :

Akan dibuktikan menggunakan induksi matematika.

i) Untuk $n = 1$ diperoleh $\{e^{c_1 x}\}$. Andaikan $b_1 e^{c_1 x} = 0$ untuk sebarang skalar b_1. Dengan membagi persamaan tersebut dengan $e^{c_1 x}$ didapat $b_1 = 0$. Sehingga $\{e^{c_1 x}\}$ bebas linear. Jadi teorema benar untuk $n = 1$.

ii) Untuk $n > 1$, andaikan teorema benar untuk $n - 1$ buah bilangan kompleks yang berbeda, yaitu himpunan fungsi-fungsi eksponensial $\{e^{c_1 x}, e^{c_2 x}, \ldots, e^{c_{n-1} x}\}$ bebas linear.

iii) Akan dibuktikan teorema benar untuk n buah bilangan kompleks yang berbeda. Andaikan $b_1 e^{c_1 x} + b_2 e^{c_2 x} + \ldots + b_n e^{c_n x} = 0$ untuk sebarang skalar-skalar $b_1, b_2, \ldots, b_n$. Kenakan operator $(D - c_n I)$ pada ke dua ruas pada persamaan di atas, maka diperoleh

$$(D - c_n I)\,(b_1 e^{c_1 x} + b_2 e^{c_2 x} + \ldots + b_n e^{c_n x}) = (D - cI)(0)$$

$$\Leftrightarrow \ (D - c_n I)\,(b_1 e^{c_1 x} + b_2 e^{c_2 x} + \ldots + b_{n-1} e^{c_{n-1} x}) +$$

$$(D - c_n I)(b_n e^{c_n x}) = 0$$

$$\Leftrightarrow (D - c_nI)(b_1e^{c_1x} + b_2e^{c_2x} + \ldots + b_{n-1}e^{c_{n-1}x}) + 0 = 0$$

$$\Leftrightarrow (D - c_nI)(b_1e^{c_1x} + b_2e^{c_2x} + \ldots + b_{n-1}e^{c_{n-1}x}) = 0$$

$$\Leftrightarrow b_1c_1e^{c_1x} - b_1c_ne^{c_1x} + b_2c_2e^{c_2x} - b_2c_ne^{c_2x} + \ldots\ldots +$$

$$b_{n-1}c_{n-1}e^{c_{n-1}x} - b_{n-1}c_ne^{c_{n-1}x} = 0$$

$$\Leftrightarrow b_1(c_1 - c_n)e^{c_1x} + b_2(c_2 - c_n)e^{c_2x} + \ldots +$$

$$b_{n-1}(c_{n-1} - c_n)e^{c_{n-1}x} = 0.$$

Karena $\{e^{c_1x}, e^{c_2x}, \ldots, e^{c_{n-1}x}\}$ diandaikan bebas linear,

maka $(c_i - c_n)b_i = 0$, yang berarti

$(c_i - c_n) = 0$ atau $b_i = 0$ untuk $i = 1,2,\ldots,n-1$.

Karena $c_1, c_2, \ldots, c_n$ adalah n buah bilangan kompleks

yang berbeda maka $(c_i - c_n) \neq 0$ untuk $i = 1,2,\ldots,n-1$.

Sehingga diperoleh $b_i = 0$ untuk $i = 1,2,\ldots,n-1$.

Jadi persamaan $b_1e^{c_1x} + b_2e^{c_2x} + \ldots + b_ne^{c_nx} = 0$

ekuivalen dengan

$$0 + b_n e^{c_n x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad b_n e^{c_n x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad b_n = 0$$

Sehingga didapat $b_1 = b_2 = \ldots = b_n = 0$.

Jadi terbukti $\{e^{c_1 x}, e^{c_2 x}, \ldots, e^{c_n x}\}$ bebas linear.■

Akibat 5.15

Untuk sebarang PDLH tingkat-n dengan koefisien konstan, jika polinomial pembantunya mempunyai n pembuat nol c_1, c_2, ...,c_n, maka $\{e^{c_1 x}, e^{c_2 x}, \ldots, e^{c_n x}\}$ adalah suatu basis untuk ruang penyelesaian dari PD tersebut.

Bukti :

Menurut Teorema 5.9, $e^{c_1 x}, e^{c_2 x}, \ldots, e^{c_n x}$ merupakan penyelesaian dari PD yang diberikan. Kemudian menurut Akibat 5.13, ruang penyelesaian dari PD ini berdimensi n. Karena $\{e^{c_1 x}, e^{c_2 x}, \ldots, e^{c_n x}\}$ bebas linear, maka menurut Teorema 3.4.4 $\{e^{c_1 x}, e^{c_2 x}, \ldots, e^{c_n x}\}$ merupakan basis untuk ruang penyelesaian dari PD yang diberikan. ■

Contoh 5.5

Akan ditentukan semua penyelesaian dari PD

$$y'' + 5y' + 4y = 0.$$

Polinomial pembantunya adalah

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 5\lambda + 4$$
$$= (\lambda + 4)(\lambda + 1),$$

yang mempunyai dua pembuat nol, yaitu -1 dan -4. Jadi $\{e^{-x}, e^{-4x}\}$ adalah basis dari ruang penyelesaian. Penyelesaian dari PD yang diberikan berbentuk

$$y(x) = b_1 e^{-x} + b_2 e^{-4x}$$

di mana b_1 dan b_2 merupakan skalar-skalar tunggal.

<u>Lemma 5.16</u>

Jika D adalah operator diferensial yang didefinisikan pada Contoh 5.1, maka

$$(D + aI)^n (e^{cx} y(x)) = e^{cx} (D + (a+c)I)^n (y(x))$$

untuk sebarang $a, c \in \mathbb{C}$ dan setiap bilangan bulat positif n.

Bukti :

Akan dibuktikan menggunakan induksi matematika.

i) Untuk $n = 1$, diperoleh

$$(D + aI)^1 (e^{cx} y(x))$$
$$= (D + aI)(e^{cx} y(x))$$
$$= D(e^{cx} y(x)) + aI(e^{cx} y(x))$$
$$= e^{cx} D(y(x)) + ce^{cx} y(x) + ae^{cx} y(x)$$
$$= e^{cx} D(y(x)) + e^{cx}((c + a)I)(y(x))$$
$$= e^{cx}(D + (a + c)I)(y(x))$$
$$= e^{cx}(D + (a + c)I)^1(y(x))$$

Jadi lemma benar untuk $n = 1$.

ii) Andaikan lemma benar untuk $n = k$, yaitu

$$(D + aI)^k(e^{cx}y(x)) = e^{cx}(D + (a+c)I)^k(y(x))$$

iii) Untuk $n = k + 1$, diperoleh

$$(D + aI)^{k+1}(e^{cx}y(x))$$
$$= (D + aI)^k(D + aI)^1(e^{cx}y(x))$$
$$= (D + aI)^k((D + aI)^1(e^{cx}y(x)))$$
$$= (D + aI)^k(e^{cx}(D + (a + c)I)^1(y(x)))$$
$$= e^{cx}((D + (a+c)I)^k((D + (a + c)I)^1(y(x)) \text{ (pengandaian)}$$
$$= e^{cx}(D + (a+c)I)^{k+1}(y(x))$$

Jadi lemma benar untuk $n = k + 1$.

Dapat disimpulkan bahwa lemma benar untuk setiap bilangan bulat positif n. ∎

<u>Lemma 5.17</u>

Jika $f(x) = x^n$ untuk suatu bilangan bulat positif n yang tertentu, maka $D^m(x^n) = \frac{n!}{(n-m)!}x^{n-m}$ untuk sebarang bilangan bulat positif m dengan $m \leq n$ dan $n!$ (baca "n faktorial") $= n.(n - 1).(n - 2) \ldots 3.2.1$.

Bukti:

Akan dibuktikan menggunakan induksi matematika.

i) Untuk $m = 1$, diperoleh

$$D^1(x^n) = D(x^n) = n\, x^{n-1} = \frac{n!}{(n-1)!}x^{n-1}.$$

Jadi lemma benar untuk $m = 1$.

ii) Andaikan lemma benar untuk $m = k$, yaitu

$$D^k(x^n) = \frac{n!}{(n-k)!}x^{n-k} \text{ untuk } k \leq n.$$

iii) Untuk $m = k + 1$ dengan $k + 1 \leq n$, diperoleh

$$D^{k+1}(x^n) = D^k D^1 (x^n)$$

$$= D^k \left[\frac{n!}{(n-1)!} x^{n-1} \right]$$

$$= \frac{n!}{(n-1)!} D^k (x^{n-1})$$

$$= \frac{n!}{(n-1)!} \cdot \frac{(n-1)!}{((n-1)-k)!} x^{(n-1)-k}$$

$$= \frac{n!}{(n-(k+1))!} x^{n-(k+1)}$$

Jadi lemma benar untuk $m = k + 1$ dengan $k + 1 \leq n$. Dapat disimpulkan bahwa lemma benar untuk setiap bilangan bulat positif m. ∎

Contoh 5.6

Tentukan nilai dari $D^n(x^k)$ untuk $k < n$, di mana k dan n adalah bilangan bulat positif.

Jawab :

Karena $k < n$, maka ada bilangan bulat positif m sedemikian sehingga $k + m = n$. Maka

$$D^n(x^k) = D^{k+m}(x^k)$$

$$= D^{m+k}(x^k)$$

$$= D^m D^k (x^k)$$

$$= D^m \left[\frac{k!}{(k-k)!} x^{k-k} \right] \quad \text{(Lemma 5.17)}$$

$$= D^m (k!) \quad (0! = 1)$$

$$= 0.$$

Contoh 5.7

Untuk $k < n$,

$$(D - cI)^n(x^k e^{cx}) = (D + (-cI))^n(x^k e^{cx})$$
$$= e^{cx}(D + (-c + c)I)^n(x^k)$$
$$= e^{cx}D^n(x^k)$$
$$= e^{cx}.0 \text{ (Contoh 5.6)}$$
$$= 0.$$

Karena operator-operator diferensial dapat dikalikan seperti pada perkalian polinomial, maka operator diferensial $(D + cI)^n$ dapat dijabarkan menggunakan rumus penjabaran binomial yang telah dikenal, yaitu

$$(D + cI)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} D^{n-r}(cI)^r$$
$$= \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} c^r D^{n-r}$$

di mana $\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$ menyatakan kombinasi r unsur yang diambil dari n unsur yang tersedia.

Contoh 5.8

Pandang PD

$$y'' + 2y' + y = 0,$$

di mana polinomial pembantunya adalah $(\lambda + 1)^2$. Dengan Teorema 5.9, e^{-x} adalah suatu penyelesaian dari PD tersebut. Menurut Akibat 5.13 ruang penyelesaian PD ini berdimensi dua. Untuk menentukan basis dari ruang penyelesaian

PD ini dibutuhkan penyelesaian yang bebas linear dengan e^{-x}. Dapat ditunjukkan bahwa xe^{-x} juga penyelesaian dari PD yang diberikan. Teorema berikut merupakan perumuman dari hasil tersebut.

Teorema 5.18

Jika c adalah suatu bilangan kompleks, n adalah suatu bilangan bulat positif n, dan $(\lambda - c)^n$ adalah polinomial pembantu dari PDLH tingkat-n dengan koefisien konstan, maka himpunan

$$\beta = \{e^{cx}, xe^{cx}, \ldots, x^{n-1}e^{cx}\}$$

adalah suatu basis untuk ruang penyelesaian dari PD tersebut.

Bukti :

Karena ruang penyelesaian dari PD yang diberikan berdimensi n, kita cukup menunjukkan bahwa β adalah himpunan bagian dari ruang penyelesaian bebas linear. Menurut Contoh 5.7

$$(D - cI)^n(x^k e^{cx}) = 0$$

untuk sebarang bilangan bulat positif $k < n$.

Jadi β adalah himpunan bagian dari ruang penyelesaian.

Berikutnya akan kita tunjukkan bahwa β bebas linear. Pandang sebarang kombinasi linear dari β sedemikian sehingga

$$b_o e^{cx} + b_1 xe^{cx} + \ldots + b_{n-1} x^{n-1} e^{cx} = 0 \qquad (6)$$

untuk skalar-skalar $b_o, b_1, \ldots, b_{n-1}$. Dengan membagi (6) dengan e^{cx}, didapat

$$b_o + b_1 x + \ldots + b_{n-1} x^{n-1} = 0 . \qquad (7)$$

Ruas kiri dari (7) harus sama dengan polinomial nol. Kita simpulkan bahwa $b_o, b_1, \ldots, b_{n-1}$ semuanya nol. Jadi β bebas linear . Sehingga β merupakan basis dari ruang penyelesaian. ∎

Contoh 5.9

Kita tentukan semua penyelesaian PD

$$y^{(4)} - 4y^{(3)} + 6y^{(2)} - 4y^{(1)} + y = 0$$

Karena polinomial pembantunya adalah

$$\lambda^4 - 4\lambda^3 + 6\lambda^2 - 4\lambda + 1 = (\lambda - 1)^4$$

menurut Teorema 5.18 dapat disimpulkan bahwa $\{e^x, xe^x, x^2e^x, x^3e^x\}$ adalah suatu basis dari ruang penyelesaian PD yang diberikan. Jadi suatu penyelesaian dari PD tersebut berbentuk

$$y(x) = b_1 e^x + b_2 xe^x + b_3 x^2 e^x + b_4 x^3 e^x$$

untuk skalar-skalar tunggal b_1, b_2, b_3, b_4.

Teorema yang lebih umum dari teorema-teorema sebelumnya tentang ruang penyelesaian PDLH tingkat-n dengan koefisien konstan adalah sebagai berikut.

Teorema 5.19

Jika PDLH tingkat-n dengan koefisien konstan mempunyai polinomial pembantu

$$(\lambda - c_1)^{n_1}(\lambda - c_2)^{n_2} \dots (\lambda - c_k)^{n_k}$$

di mana $n_1, n_2, \dots, n_k$ adalah bilangan-bilangan bulat positif dengan $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$ dan $c_1, c_2, \dots, c_k$ adalah bilangan-bilangan kompleks yang berbeda, maka himpunan $\beta = \{e^{c_1 x}, xe^{c_1 x}, \dots, x^{n_1 - 1} e^{c_1 x}, \dots, e^{c_k x}, xe^{c_k x}, \dots, x^{n_k - 1} e^{c_k x}\}$ adalah suatu basis dari ruang penyelesaian PD tersebut.

Bukti :

Karena ruang penyelesaian dari PD yang diberikan berdimensi n, kita cukup membuktikan bahwa β merupakan himpunan bagian dari ruang penyelesaian yang bebas linear. Pertama-tama akan kita buktikan bahwa β merupakan himpunan bagian dari ruang penyelesaian PD yang diberikan. Pandang operator diferensial $(D - c_i I)^{n_i}$ untuk $1 \leq i \leq k$. Menurut Teorema 5.18 ruang nol dari operator diferensial tersebut mempunyai basis $\{e^{c_i x}, xe^{c_i x}, \dots, x^{n_i - 1} e^{c_i x}\}$. Menurut Teorema 4.2.5, $N((D-c_i I)^{n_i}) \subseteq N((D-c_1 I)^{n_1} \dots (D-c_k I)^{n_k})$ sehingga $\{e^{c_i x}, xe^{c_i x}, \dots, x^{n_i - 1} e^{c_i x}\}$ untuk $1 \leq i \leq k$ merupakan himpunan bagian dari ruang penyelesaian PD yang diberikan. Jadi β merupakan merupakan himpunan bagian dari ruang penyelesaian PD yang diberikan.

Kemudian akan kita tunjukkan bahwa β bebas linear dengan menggunakan induksi matematika.

i) Untuk k = 1, diperoleh $\beta = \{e^{c_1x}, xe^{c_1x}, \ldots, x^{n_1-1}e^{c_1x}\}$. Menurut Teorema 5.18 $\{e^{c_1x}, xe^{c_1x}, \ldots, x^{n_1-1}e^{c_1x}\}$ bebas linear. Jadi teorema benar untuk $k = 1$.

ii) Andaikan teorema benar untuk k-1 bilangan kompleks yang berbeda, yaitu $\{e^{c_1x}, xe^{c_1x}, \ldots, x^{n_1-1}e^{c_1x}, \ldots, e^{c_{k-1}x}, xe^{c_{k-1}x}, \ldots, x^{n_{k-1}-1}e^{c_{k-1}x}\}$ bebas linear.

iii) Andaikan $b_{11}, b_{12}, \ldots, b_{1(n_1)}, \ldots, b_{(k-1)1}, b_{(k-1)2}, \ldots, b_{(k-1)(n_k-1)}, b_{k1}, b_{k2}, \ldots, b_{k(n_k)}$ adalah sebarang skalar-skalar kompleks sedemikian sehingga

$$b_{11}e^{c_1x} + b_{12}xe^{c_1x} + \ldots + b_{1(n_1)}x^{(n_1-1)}e^{c_1x} + \ldots + b_{(k-1)1}e^{c_{k-1}x} + b_{(k-1)2}xe^{c_{k-1}x} + \ldots + b_{(k-1)(n_{k-1})}x^{(n_{k-1}-1)}e^{c_{k-1}x} + b_{k1}e^{c_kx} + b_{k2}xe^{c_kx} + \ldots + b_{k(n_k)}x^{(n_k-1)}e^{c_kx} = 0 \qquad (8)$$

Kenakan operator $(D - c_kI)^{n_k}$ pada ke dua ruas dari persamaan (8).

$$(D - c_k I)^{n_k}(b_{11}e^{c_1 x} + b_{12}xe^{c_1 x} + \ldots + b_{1(n_1)}x^{(n_1-1)}e^{c_1 x}$$

$$+ \ldots + b_{(k-1)1}e^{c_{k-1}x} + b_{(k-1)2}xe^{c_{k-1}x} + \ldots +$$

$$b_{(k-1)(n_{k-1})}x^{(n_{k-1}-1)}e^{c_{k-1}x} + b_{k1}e^{c_k x} + b_{k2}xe^{c_k x} + \ldots +$$

$$b_{k(n_k)}x^{(n_k-1)}e^{c_k x}) = (D - c_k I)^{n_k}(0).$$

$$\Leftrightarrow (D - c_k I)^{n_k}(b_{11}e^{c_1 x} + b_{12}xe^{c_1 x} + \ldots + b_{1(n_1)}x^{(n_1-1)}e^{c_1 x}$$

$$+ \ldots + b_{(k-1)1}e^{c_{k-1}x} + b_{(k-1)2}xe^{c_{k-1}x} + \ldots +$$

$$b_{(k-1)(n_{k-1})}x^{(n_{k-1}-1)}e^{c_{k-1}x}) + (D - c_k I)^{n_k}(b_{k1}e^{c_k x}$$

$$+ b_{k2}xe^{c_k x} + \ldots + b_{k(n_k)}x^{(n_k-1)}e^{c_k x}) = 0.$$

$$\Leftrightarrow (D - c_k I)^{n_k}(b_{11}e^{c_1 x} + b_{12}xe^{c_1 x} + \ldots + b_{1(n_1)}x^{(n_1-1)}e^{c_1 x}$$

$$+ \ldots + b_{(k-1)1}e^{c_{k-1}x} + b_{(k-1)2}xe^{c_{k-1}x} + \ldots +$$

$$b_{(k-1)(n_{k-1})}x^{(n_{k-1}-1)}e^{c_{k-1}x}) + 0 = 0$$

$$\Leftrightarrow (D - c_k I)^{n_k}(b_{11}e^{c_1 x}) + (D - c_k I)^{n_k}(b_{12}xe^{c_1 x}) + \ldots +$$

$$(D - c_k I)^{n_k}(b_{1(n_1)}x^{(n_1-1)}e^{c_1 x}) + \ldots +$$

$$(D - c_k I)^{n_k} \left(b_{(k-1)1} e^{c_{k-1}x}\right) +$$

$$(D - c_k I)^{n_k} \left(b_{(k-1)2} x e^{c_{k-1}x}\right) + \dots +$$

$$(D - c_k I)^{n_k} \left(b_{(k-1)(n_{k-1})} x^{(n_{k-1}-1)} e^{c_{k-1}x}\right) = 0.$$

Dengan menggunakan Lemma 5.16 didapat

$$b_{11} e^{c_1 x} (D+(c_1-c_k))^{n_k}(1) + b_{12} e^{c_1 x} (D+(c_1-c_k))^{n_k}(x)$$

$$+ \dots + b_{1(n_1)} e^{c_1 x} (D+(c_1-c_k))^{n_k}\left(x^{(n_1-1)}\right) + \dots +$$

$$b_{(k-1)1} e^{c_{k-1}x} (D+(c_{k-1}-c_k))^{n_k}(1) +$$

$$b_{(k-1)2} e^{c_{k-1}x} (D+(c_{k-1}-c_k))^{n_k}(x) + \dots +$$

$$b_{(k-1)(n_{k-1})} e^{c_{k-1}x} (D+(c_{k-1}-c_k))^{n_k}\left(x^{n_{k-1}-1}\right) = 0$$

Dengan menggunakan rumus penjabaran binomial didapat

$$b_{11} e^{c_1 x} \sum_{r=0}^{n_k} \binom{n_k}{r} (c_1-c_k)^r D^{n_k-r}(1) +$$

$$b_{12} e^{c_1 x} \sum_{r=0}^{n_k} \binom{n_k}{r} (c_1-c_k)^r D^{n_k-r}(x) +$$

$$b_{13} e^{c_1 x} \sum_{r=0}^{n_k} \binom{n_k}{r} (c_1-c_k)^r D^{n_k-r}(x^2) + \dots +$$

$$b_{1(n_1-2)} e^{c_1 x} \sum_{r=0}^{n_k} \binom{n_k}{r} (c_1-c_k)^r D^{n_k-r} \left(x^{n_1-3}\right) +$$

$$b_{1(n_1-1)} e^{c_1 x} \sum_{r=0}^{n_k} \binom{n_k}{r} (c_1-c_k)^r D^{n_k-r} \left(x^{n_1-2}\right) +$$

$$b_{1(n_1)} e^{c_1 x} \sum_{r=0}^{n_k} \binom{n_k}{r} (c_1-c_k)^r D^{n_k-r} \left(x^{n_1-1}\right) + \ldots +$$

$$b_{(k-1)1} e^{c_{k-1} x} \sum_{r=0}^{n_k} \binom{n_k}{r} (c_{k-1}-c_k)^r D^{n_k-r} (1) +$$

$$b_{(k-1)2} e^{c_{k-1} x} \sum_{r=0}^{n_k} \binom{n_k}{r} (c_{k-1}-c_k)^r D^{n_k-r} (x) +$$

$$b_{(k-1)3} e^{c_{k-1} x} \sum_{r=0}^{n_k} \binom{n_k}{r} (c_{k-1}-c_k)^r D^{n_k-r} (x^2) + \ldots +$$

$$b_{(k-1)(n_{k-1}-2)} e^{c_{k-1} x} \sum_{r=0}^{n_k} \binom{n_k}{r} (c_{k-1}-c_k)^r D^{n_k-r} \left(x^{n_{k-1}-3}\right) +$$

$$b_{(k-1)(n_{k-1}-1)} e^{c_{k-1} x} \sum_{r=0}^{n_k} \binom{n_k}{r} (c_{k-1}-c_k)^r D^{n_k-r} \left(x^{n_{k-1}-2}\right) +$$

$$b_{(k-1)(n_{k-1})} e^{c_{k-1} x} \sum_{r=0}^{n_k} \binom{n_k}{r} (c_{k-1}-c_k)^r D^{n_k-r} \left(x^{n_{k-1}-1}\right) = 0.$$

$$\Leftrightarrow b_{11} e^{c_1 x} \left[\binom{n_k}{0} (c_1-c_k)^0 D^{n_k} (1) +\right.$$

$$\binom{n_k}{1} (c_1-c_k)^1 D^{n_k-1} (1) + \ldots +$$

$$\begin{bmatrix} n_k \\ n_k-2 \end{bmatrix}(c_1-c_k)^{n_k-2} D^2(1) +$$

$$\begin{bmatrix} n_k \\ n_k-1 \end{bmatrix}(c_1-c_k)^{n_k-1} D^1(1)+\begin{bmatrix} n_k \\ n_k \end{bmatrix}(c_1-c_k)^{n_k} D^0(1)\Bigg]$$

$$+\ldots+b_{1(n_1-1)}e^{c_1x}\left[\left[\begin{bmatrix} n_k \\ o \end{bmatrix}(c_1-c_k)^o D^{n_k}\left(x^{n_1-2}\right) +\right.\right.$$

$$\begin{bmatrix} n_k \\ 1 \end{bmatrix}(c_1-c_k)^1 D^{n_k-1}\left(x^{n_1-2}\right) +\ldots+$$

$$\begin{bmatrix} n_k \\ n_k-2 \end{bmatrix}(c_1-c_k)^{n_k-2} D^2\left(x^{n_1-2}\right)+$$

$$\begin{bmatrix} n_k \\ n_k-1 \end{bmatrix}(c_1-c_k)^{n_k-1} D^1\left(x^{n_1-2}\right)+\begin{bmatrix} n_k \\ n_k \end{bmatrix}(c_1-c_k)^{n_k} D^0\left(x^{n_1-2}\right)\Bigg]+$$

$$b_{1(n_1)}e^{c_1x}\left[\left[\begin{bmatrix} n_k \\ o \end{bmatrix}(c_1-c_k)^o D^{n_k}\left(x^{n_1-1}\right) +\right.\right.$$

$$\begin{bmatrix} n_k \\ 1 \end{bmatrix}(c_1-c_k)^1 D^{n_k-1}\left(x^{n_1-1}\right) +\ldots+$$

$$\begin{bmatrix} n_k \\ n_k-2 \end{bmatrix}(c_1-c_k)^{n_k-2} D^2\left(x^{n_1-1}\right)+$$

$$\begin{bmatrix} n_k \\ n_k-1 \end{bmatrix}(c_1-c_k)^{n_k-1} D^1\left(x^{n_1-1}\right)+$$

$$\left.\left.\binom{n_k}{n_k}(c_1-c_k)^{n_k} D^{0}\left(x^{n_1-1}\right)\right]\right] + \dots +$$

$$b_{(k-1)(n_{k-1})}\, e^{c_{k-1}x}\Big[\dots +$$

$$\left.\binom{n_k}{n_k}(c_{k-1}-c_k)^{n_k} D^{0}\left(x^{n_{k-1}-1}\right)\right]\Big] = 0.$$

$$\Leftrightarrow\ b_{11}\, e^{c_1 x}\left[\left[\binom{n_k}{0}(c_1-c_k)^{0}.0 + \binom{n_k}{1}(c_1-c_k)^{1}.0 + \dots +\right.\right.$$

$$\binom{n_k}{n_k-2}(c_1-c_k)^{n_k-2}.0 + \binom{n_k}{n_k-1}(c_1-c_k)^{n_k-1}.0 +$$

$$\left.\binom{n_k}{n_k}(c_1-c_k)^{n_k}.1\right] + \dots +$$

$$b_{1(n_1-1)}\, e^{c_1 x}\left[\left[\binom{n_k}{0}(c_1-c_k)^{0}\frac{(n_1-2)!}{(n_1-2-n_k)!}\, x^{(n_1-2-n_k)} +\right.\right.$$

$$\binom{n_k}{1}(c_1-c_k)^{1}\frac{(n_1-2)!}{(n_1-1-n_k)!}\, x^{(n_1-1-n_k)} + \dots +$$

$$\binom{n_k}{n_k-2}(c_1-c_k)^{n_k-2}\frac{(n_1-2)!}{(n_1-4)!}\, x^{(n_1-4)} +$$

$$\binom{n_k}{n_k-1}(c_1-c_k)^{n_k-1}(n_1-2)\, x^{(n_1-3)} +$$

$$\binom{n_k}{n_k}(c_1-c_k)^{n_k}\, x^{(n_1-2)} \quad +$$

$$b_{1(n_1)}\, e^{c_1 x}\left[\left(\binom{n_k}{0}(c_1-c_k)^{0}\, \frac{(n_1-1)!}{(n_1-1-n_k)!}\, x^{(n_1-1-n_k)} \quad + \right.\right.$$

$$\binom{n_k}{1}(c_1-c_k)^{1}\, \frac{(n_1-1)!}{(n_1-n_k)!}\, x^{(n_1-n_k)} \quad + \;\ldots\; +$$

$$\binom{n_k}{n_k-2}(c_1-c_k)^{n_k-2}\, \frac{(n_1-1)!}{(n_1-3)!}\, x^{(n_1-3)} \quad +$$

$$\binom{n_k}{n_k-1}(c_1-c_k)^{n_k-1}\, (n_1-1)\, x^{(n_1-2)} \quad +$$

$$\left.\binom{n_k}{n_k}(c_1-c_k)^{n_k}\, x^{(n_1-1)}\right) + \;\ldots\; +$$

$$b_{(k-1)(n_{k-1})}\, e^{c_{k-1} x}\left(\ldots + \right.$$

$$\left.\left.\binom{n_k}{n_k}(c_{k-1}-c_k)^{n_k}\, x^{(n_{k-1}-1)}\right)\right] = 0.$$

$$\Leftrightarrow\; b_{1(n_1)}\binom{n_k}{n_k}(c_1-c_k)^{n_k}\, e^{c_1 x}\, x^{(n_1-1)} \quad +$$

$$\left(b_{1(n_1)}\binom{n_k}{n_k-1}(c_1-c_k)^{n_k-1}(n_1-1) \quad + \right.$$

$$b_{1(n_1-1)}\left[\binom{n_k}{n_k}(c_1-c_k)^{n_k}\right]e^{c_1 x}\; x^{(n_1-2)} \quad +$$

$$\left[b_{1(n_1)}\binom{n_k}{n_k-2}(c_1-c_k)^{n_k-2}\,\frac{(n_1-1)!}{(n_1-3)!} \quad +\right.$$

$$b_{1(n_1-1)}\binom{n_k}{n_k-1}(c_1-c_k)^{n_k-1}\,(n_1-2) \quad +$$

$$b_{1(n_1-2)}\left[\binom{n_k}{n_k}(c_1-c_k)^{n_k}\right]e^{c_1 x}\; x^{(n_1-3)} \quad + \dots +$$

$$\left[\dots + b_{11}\binom{n_k}{n_k}(c_1-c_k)^{n_k}\right]e^{c_1 x} \quad +\dots+$$

$$b_{(k-1)(n_{k-1})}\binom{n_k}{n_k}(c_{k-1}-c_k)^{n_k}\, e^{c_{k-1}x}\; x^{(n_{k-1}-1)} \quad +$$

$$\dots + \left[\dots + b_{(k-1)1}\binom{n_k}{n_k}(c_{k-1}-c_k)^{n_k}\right]e^{c_{k-1}x} = 0$$

Karena $\{e^{c_1x}, xe^{c_1x}, \dots, x^{n_1-1}e^{c_1x}, \dots, e^{c_{k-1}x}, xe^{c_{k-1}x}, \dots, x^{n_{k-1}-1}e^{c_{k-1}x}\}$ diandaikan bebas linear dan $\binom{n_k}{r} \neq 0$ di mana $n_k \in$ bilangan bulat positif dan $r = 0, 1, \dots, n_k$ dan juga $(c_i - c_k) \neq 0$ sebab c_i berbeda untuk $i = 1, 2, \dots, k$, maka dari suku pertama pada persamaan terakhir di atas di dapat

$$b_{1(n_1)} \begin{pmatrix} n_k \\ n_k \end{pmatrix} (c_1 - c_k)^{n_k} = 0$$

$$\Leftrightarrow b_{1(n_1)} = 0.$$

Dari suku ke dua didapat

$$b_{1(n_1)} \begin{pmatrix} n_k \\ n_k - 1 \end{pmatrix} (c_1 - c_k)^{n_k - 1} (n_1 - 1) +$$

$$b_{1(n_1-1)} \begin{pmatrix} n_k \\ n_k \end{pmatrix} (c_1 - c_k)^{n_k} = 0$$

$$\Leftrightarrow 0 + b_{1(n_1-1)} \begin{pmatrix} n_k \\ n_k \end{pmatrix} (c_1 - c_k)^{n_k} = 0$$

$$\Leftrightarrow b_{1(n_1-1)} = 0$$

Cara tersebut diulang pada suku ke tiga dan seterus-nya sehingga didapat hasil bahwa $b_{1(n_1)} = b_{1(n_1-1)} = b_{1(n_1-2)} = \dots = b_{12} = b_{11} = \dots = b_{(k-1)n_{k-1}} = b_{(k-1)(n_{k-1}-1)} = \dots = b_{(k-1)1} = 0.$

Sehingga persamaan (8) dapat disederhanakan menjadi

$$0 + b_{k1} e^{c_k x} + b_{k2} x e^{c_k x} + \dots + b_{k(n_k)} x^{(n_k - 1)} e^{c_k x} = 0. \qquad (9)$$

Ruas kiri dari persamaan (9) harus sama dengan polinomial nol, sehingga di dapat $b_{k1} = b_{k2} = \dots =$

$b_{k(n_k)}=0$. Jadi $b_{11}=b_{12}=\ldots=b_{1(n_1)}=\ldots=b_{k1}=b_{k2}=$ $\ldots=b_{k(n_k)}=0$. Jadi $\{e^{c_1x}, xe^{c_1x}, \ldots, x^{n_1-1}e^{c_1x}, \ldots,$ $e^{c_{k-1}x}, xe^{c_{k-1}x}, \ldots, x^{n_{k-1}-1}e^{c_{k-1}x}, e^{c_kx}, xe^{c_kx},$ $\ldots, x^{(n_k-1)}e^{c_kx}\}$ bebas linear. ∎

Contoh 5.10

Persamaan diferensial

$$y^{(3)} - 4y^{(2)} + 5y^{(1)} - 2y = 0$$

mempunyai polinomial pembantu

$$\lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2 = (\lambda - 1)^2(\lambda - 2).$$

Menurut Teorema 5.19, $\{e^x, xe^x, e^{2x}\}$ adalah suatu basis dari ruang penyelesaian PD yang diberikan. Suatu penyelesaian y mempunyai bentuk

$$y(x) = b_1e^x + b_2xe^x + b_3e^{2x}$$

untuk skalar-skalar tunggal b_1, b_2, b_3 .

Teorema 5.20

Jika $\{x, y\}$ adalah suatu basis dari ruang vektor V, maka

$\left\{\frac{1}{2}(x + y)\ ,\ \frac{1}{2i}(x - y)\right\}$ juga merupakan basis dari V.

Bukti :

Karena $\{x,y\}$ adalah suatu basis dari V, maka V berdimensi dua. Menurut Teorema 3.4.4 untuk menunjukkan bahwa $\left\{\frac{1}{2}(x+y), \frac{1}{2i}(x-y)\right\}$ juga merupakan basis dari V cukup ditunjukkan bahwa $\left\{\frac{1}{2}(x+y), \frac{1}{2i}(x-y)\right\}$ bebas linear. Ambil sebarang $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Andaikan

$$\alpha\left(\frac{1}{2}(x+y)\right) + \beta\left(\frac{1}{2i}(x-y)\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\alpha\right)(x+y) + \left(\frac{1}{2i}\beta\right)(x-y) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\alpha x + \frac{1}{2}\alpha y\right) + \left(\frac{1}{2i}\beta x - \frac{1}{2i}\beta y\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2i}\beta\right)x + \left(\frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2i}\beta\right)y = 0$$

Karena $\{x,y\}$ bebas linear, maka $\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2i}\beta = 0$ dan $\frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2i}\beta = 0$. Dari ke dua persamaan terakhir ini kita dapatkan $\alpha = 0$ dan $\beta = 0$. Sehingga $\left\{\frac{1}{2}(x+y), \frac{1}{2i}(x-y)\right\}$ bebas linear. Jadi $\left\{\frac{1}{2}(x+y), \frac{1}{2i}(x-y)\right\}$ juga merupakan suatu basis dari ruang vektor V. ∎

Teorema 5.21 berikut ini perlu kita bahas untuk memahami Contoh 5.11.

Teorema 5.21

Jika polinomial pembantu dari PDLH tingkat-2 dengan koefisien konstan mempunyai akar-akar kompleks $a+ib$ dan $a-ib$ di mana $a, b \in \mathbb{R}$, maka $\left\{ e^{ax}\cos(bx), e^{ax}\sin(bx) \right\}$ adalah suatu basis dari ruang penyelesaian persamaan diferensial tersebut.

Bukti :

Menurut Akibat 5.15 $\left\{ e^{(a+ib)x}, e^{(a-ib)x} \right\}$ merupakan basis dari ruang penyelesaian PD yang diberikan. Kemudian karena $\frac{1}{2}\left(e^{(a+ib)x} + e^{(a-ib)x} \right)$

$$= \frac{1}{2}\left[e^{ax}\left(\cos(bx) + i\sin(bx)\right) + e^{ax}\left(\cos(bx) + i\sin(-bx)\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[e^{ax}\cos(bx) + e^{ax}\, i\sin(bx) + e^{ax}\cos(bx) - e^{ax}\, i\sin(bx)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[2e^{ax}\cos(bx)\right]$$

$$= e^{ax}\cos(bx)$$

dan

$$\frac{1}{2i}\left(e^{(a+ib)x} - e^{(a-ib)x} \right)$$

$$= \frac{1}{2i}\left[e^{ax}\left(\cos(bx) + i\sin(bx)\right) - e^{ax}\left(\cos(bx) + i\sin(-bx)\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2i}\left[e^{ax}\cos(bx) + e^{ax}\, i\sin(bx) - e^{ax}\cos(bx) + e^{ax}\, i\sin(bx)\right]$$

$$= \frac{1}{2i}\left[2i\left(e^{ax}\sin(bx)\right)\right]$$

$$= e^{ax}\sin(bx) ,$$

maka menurut Teorema 5.20 $\left\{ e^{ax}\cos(bx), e^{ax}\sin(bx) \right\}$ juga merupakan suatu basis dari ruang penyelesaian PDLH yang diberikan. ▮

Berikut ini adalah contoh sederhana dalam menentukan penyelesaian persamaan diferensial pada permasalahan fisika.

<u>Contoh 5.11</u>

Sebuah bandul sederhana didefinisikan sebagai sebuah partikel yang digantungkan pada tali ringan yang tidak dapat mulur. Gambar 5.1 memperlihatkan sebuah bandul dengan panjang p, massa partikel m dan membentuk sudut θ dengan garis vertikal. Bila sudut θ kecil maka persamaan gerak bandul dapat dinyatakan dengan persamaan diferensial berikut

$$\theta''(t) + \frac{g}{p}\theta(t) = 0 \qquad (10)$$

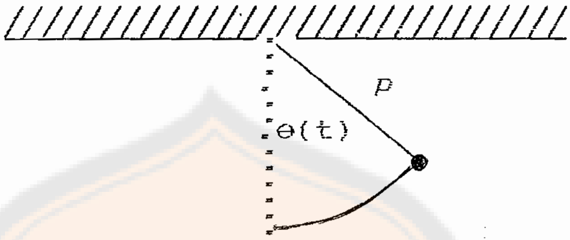
dengan $\theta(t)$ = sudut dalam radian yang dibuat oleh bandul dengan garis vertikal pada waktu t.

p = panjang bandul

g = percepatan gravitasi.

Variabel t dan konstanta g dan p harus menggunakan satuan yang sesuai (misalnya t dalam detik, p dalam meter dan g

dalam meter per detik kuadrat).



Gambar 5.1

Akan ditentukan penyelesaian dari PD (10) sebagai kombinasi linear dari dua penyelesaian bernilai real. Polinomial pembantu dari PD (10) adalah

$$\lambda^2 + \frac{g}{p} = \left(\lambda - \sqrt{g/p}\ i\right)\left(\lambda + \sqrt{g/p}\ i\right).$$

Menurut Teorema 5.21 $\left\{\cos(\sqrt{g/p}\ t), \sin(\sqrt{g/p}\ t)\right\}$ merupakan suatu basis dari ruang penyelesaian PD (10). Jadi suatu penyelesaian dari PD (10) adalah

$$\theta(t) = \alpha \cos(\sqrt{g/p}\ t) + \beta \sin(\sqrt{g/p}\ t)$$

untuk skalar-skalar tunggal α, β.

Tidak semua polinomial pembantu dari suatu persamaan diferensial mempunyai akar-akar bilangan real. Sehingga dalam mempelajari persamaan diferensial perlu dibahas mengenai penyelesaian-penyelesaian persamaan diferensial yang berupa fungsi bernilai kompleks dari variabel real. Polinomial pembantu pada persamaan diferensial pada Contoh 5.11 mempunyai akar-akar bilangan kompleks. Namun penyelesaian dari persamaan diferensial pada Contoh 5.11 cukup dinyatakan sebagai penyelesaian berupa fungsi bernilai real dari variabel real sebab fungsi $\theta(t)$ yang menyatakan besar sudut dalam radian yang dibentuk oleh bandul dengan garis vertikal pada waktu t hanya mempunyai arti bila $\theta(t)$ merupakan fungsi bernilai real dari variabel real.

BAB VI

PENUTUP

Transformasi linear adalah transformasi dari ruang vektor V ke dalam ruang vektor W yang mengawetkan operasi dari ruang vektor tersebut. Suatu transformasi linear dari ruang vektor V ke ruang vektor V disebut operator linear dalam V.

Transformasi $D : C^{\infty} \longrightarrow C^{\infty}$ dengan aturan $D(f(x)) = f'(x)$ di mana f' merupakan turunan dari f dan $x \in \mathbb{R}$, merupakan operator linear. Andaikan

$$p(\lambda) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_o$$

suatu polinomial dengan koefisien kompleks, maka

$$p(D) = a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \ldots + a_1 D + a_o I$$

merupakan operator linear pada C^{∞}. Operator $p(D)$ disebut operator diferensial tingkat-n yang berkaitan dengan polinomial $p(\lambda)$.

Operator diferensial sangat berguna karena dapat merumuskan permasalahan persamaan diferensial ke dalam permasalahan aljabar linear. Suatu Persamaan Diferensial Linear Homogen (PDLH) dengan koefisien konstan

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y^{(1)} + a_o y = 0 \qquad (1)$$

dapat ditulis dengan menggunakan operator diferensial, yaitu

$$(D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \ldots + a_1D + a_0I)y = 0.$$

Jika diberikan PDLH (1), polinomial kompleks

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0$$

disebut polinomial pembantu yang berkaitan dengan persamaan diferensial yang diberikan. Jadi sebarang PDLH tingkat-n dengan koefisien konstan dapat ditulis kembali sebagai

$$p(D)y = 0 \qquad (2)$$

di mana $p(\lambda)$ adalah polinomial pembantu yang berkaitan dengan persamaan diferensial yang diberikan.

Dari PDLH (2) tampak bahwa himpunan penyelesaian PDLH tersebut adalah himpunan $\left\{y \in C^{\infty} \mid p(D)y = 0\right\}$. Jadi himpunan semua penyelesaian dari PDLH tingkat-n dengan koefisien konstan adalah ruang nol dari $p(D)$, di mana $p(\lambda)$ adalah polinomial pembantu yang berkaitan dengan persamaan diferensial yang diberikan. Himpunan semua penyelesaian PDLH tingkat-n dengan koefisien konstan disebut ruang penyelesaian dari PDLH tersebut. Ruang penyelesaian untuk sebarang PDLH tingkat-n adalah suatu subruang dari C^{∞} yang berdimensi n.

Untuk setiap bilangan kompleks c, ruang nol dari operator diferensial $D - cI$ mempunyai basis $\{e^{cx}\}$.

Untuk sebarang PDLH tingkat-n dengan koefisien konstan, jika polinomial pembantunya mempunyai n pembuat nol yang berupa bilangan kompleks yang berbeda $c_1, c_2, \ldots, c_n$, maka suatu basis dari ruang penyelesaian PDLH tersebut adalah $\{e^{c_1x}, e^{c_2x}, \ldots, e^{c_nx}\}$.

Jika c adalah suatu bilangan kompleks, n suatu bilangan bulat positif, dan polinomial pembantu dari PDLH tingkat-n dengan koefisien konstan adalah $(\lambda - c)^n$, maka suatu basis dari ruang penyelesaian persamaan diferensial tersebut adalah $\{e^{cx}, xe^{cx}, \ldots, x^{n-1}e^{cx}\}$.

Jika PDLH tingkat-n dengan koefisien konstan mempunyai polinomial pembantu

$$(\lambda - c_1)^{n_1}(\lambda - c_2)^{n_2}\ldots(\lambda - c_n)^{n_k}$$

di mana $n_1, n_2, \ldots, n_k$ adalah bilangan-bilangan bulat positif dengan $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$ dan $c_1, c_2, \ldots, c_k$ adalah bilangan-bilangan kompleks yang berbeda, maka himpunan $\beta = \{e^{c_1x}, xe^{c_1x}, \ldots, x^{n_1-1}e^{c_1x}, \ldots, e^{c_kx}, xe^{c_kx}, \ldots, x^{n_k-1}e^{c_kx}\}$ adalah suatu basis dari ruang penyelesaian persamaan diferensial tersebut.

DAFTAR PUSTAKA

Anton, Howard. (1988). *Aljabar Linear Elementer* (edisi kelima). Jakarta : Erlangga.

Bittinger, Marvin L. (1989). *College Algebra*. California : Addison-Wesley Publisihing Co.

Cullen, Charles G. (1990). *Linear Algebra and Differential Equations* (second editions). Boston : PWS-Kent Publ Co.

Friedberg, Stephen H., Insel, Arnold J., & Spence, Lawrence E. (1997). *Linear Algebra* (third editions). New York: Macmillan Inc.

Leon, S.J. (1990). *Linear Algera With Application* (second editions). New York :Macmillan Inc.

Rabenstein, Albert L. (1992). *Elementary Differential Equations with Linear Algebra* (fourth editions). Fort Worth : Sounders College Publ.