

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

GEOMETRI FRAKTAL

SKRIPSI



Disusun Oleh :

YAKOBUS DWI WAHYUONO

NIM : 93 1414 015

NIRM : 930052010501120014

PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA
JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
UNIVERSITAS SANATA DHARMA
YOGYAKARTA
1998

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

GEOMETRI FRAKTAL

SKRIPSI

**Diajukan untuk memenuhi salah satu syarat
memperoleh gelar Sarjana Pendidikan
Program Studi Pendidikan Matematika**

Disusun Oleh :

YAKOBUS DWI WAHYUONO

NIM : 93 1414 015

NIRM : 930052010501120014

**PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA
JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
UNIVERSITAS SANATA DHARMA
YOGYAKARTA
1998**

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

SKRIPSI

GEOMETRI FRAKTAL

Disusun Oleh :

YAKOBUS DWI WAHYUONO

NIM : 93 1414 015

NIRM : 930052010501120014

Telah disetujui oleh :

Pembimbing



Drs. B. Susanta

Tanggal, 15 - OKT - 1998

SKRIPSI

GEOMETRI FRAKTAL

Yang dipersiapkan dan disusun oleh

Yakobus Dwi Wahyuono

NIM : 93 1414 015

NIRM : 930052010501120014

Telah dipertahankan di depan panitia penguji
pada tanggal 30 Juli 1998
dan dinyatakan telah memenuhi syarat

SUSUNAN PANITIA

Nama lengkap

Tanda tangan

Ketua : Drs. F. Kartika Budi, M.Pd

.....

Sekretaris : Dr. St. Suwarsono

.....

Anggota : Drs. B. Susanta

.....

Dr. St. Suwarsono

.....

Dr. F. Susilo, S.J.

.....

Yogyakarta, Oktober 1998

Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan

Universitas Sanata Dharma

Jember FKIP



Suparno, S.J., MST

KATA PENGANTAR

Segala puji dan syukur kepada Allah Bapa melalui PutraNya Yesus Kristus, karena atas rencanaNya, skripsi dengan judul “Geometri Fraktal” dapat penulis selesaikan. Skripsi ini disusun untuk memenuhi salah satu persyaratan pencapaian gelar Sarjana Pendidikan pada Program Studi Pendidikan Matematika di Universitas Sanata Dharma Yogyakarta.

Hambatan dan rintangan banyak penulis alami selama proses penyusunan skripsi ini. Akan tetapi dengan keterlibatan berbagai pihak penulis dapat melalui semua dengan baik. Untuk itu dalam kesempatan ini, dengan penuh rasa syukur penulis mengucapkan terima kasih atas segala dorongan, perhatian, kasih, serta dukungan baik secara moril, materiil, maupun spirituil, kepada semua pihak antara lain :

1. Drs. B. Susanta selaku dosen pembimbing yang dengan tekun dan penuh perhatian memberikan dorongan dan bimbingan selama proses penyusunan skripsi ini.
2. Dr. St. Suwarsono selaku dosen wali yang telah memberikan banyak saran dan bimbingan selama studi.
3. Kedua orang tua dan saudara-saudaraku terkasih yang telah memberikan kesempatan dan dukungan untuk menyelesaikan studi.
4. Rekan-rekan angkatan '93 rumpun MIPA, yang telah memberi dukungan, dorongan, bantuan, dan cinta selama penulisan skripsi ini.

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

5. Pihak staf Perpustakaan Universitas Sanata Dharma atas bantuan dalam proses peminjaman buku, serta pihak work station atas pelayanan dalam persewaan komputer.
6. Dan semua pihak yang terlibat langsung maupun tidak langsung dalam proses pembuatan skripsi ini yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu.

Penulis percaya bahwa segala kebaikan, bantuan, kasih, serta pengorbanan yang diberikan untuk menyelesaikan skripsi ini tidaklah sia-sia, dan akan mendapat penghargaan yang sepadan dari Tuhan.

Pada akhirnya, tanggungjawab seluruh isi skripsi ini ada pada penulis. Oleh karena itu saran dan kritik yang membangun sangat penulis harapkan.

Yogyakarta, Juni 1998

Penulis

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

DAFTAR ISI

	halaman
HALAMAN SAMPUL	
HALAMAN JUDUL	i
HALAMAN PERSETUJUAN	ii
HALAMAN PENGESAHAN	iii
KATA PENGANTAR	iv
DAFTAR ISI	vi
ABSTRAK	ix
ABSTRACT	x
BAB I : PENDAHULUAN	1
Alasan Pemilihan Judul	1
Latar Belakang	1
Ruang Lingkup	2
Materi Prasyarat	3
Metode Penelitian	3
BAB II : LATAR BELAKANG FRAKTAL	4
2.1. Peranan Geometri Euclides dalam Menyajikan Objek Alam	4
2.2. Pengenalan Geometri Baru	6

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

BAB III : FRAKTAL	12
3.1. Beberapa Konsep Topologi	12
3.1.1. Ruang Metrik	12
3.1.2. Ruang Fraktal	24
3.2. Transformasi	32
3.2.1. Isometri	34
3.2.2. Similaritas	39
3.2.3. Afinitas	41
3.2.4. Pemetaan pada Bidang Kompleks.....	44
3.2.5. Pemetaan Kontraksi	52
3.3. Sistem Fungsi Iterasi	60
3.4. Konstruksi Geometri Fraktal	63
3.4.1. Konstruksi Geometri Fraktal pada Bidang Real \mathbb{R}^2	63
3.4.2. Konstruksi Geometri Fraktal pada Bidang Kompleks ..	74
BAB IV : BEBERAPA TERAPAN GEOMETRI FRAKTAL.....	79
4.1. Terapan Geometri Fraktal yang Disajikan pada Bidang Real	79
4.1.1. Terapan Fraktal untuk Gambar	80
4.1.2. Interpolasi Fraktal	84

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

4.2. Terapan Geometri Fraktal yang Disajikan pada	
Bidang Kompleks	90
BAB V : KESIMPULAN	95
DAFTAR PUSTAKA	97



PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

ABSTRAK

Fraktal digunakan untuk memberi nama suatu struktur bangun atau himpunan yang mempunyai dimensi tidak utuh. Pendekatan untuk mendefinisikan fraktal ada beberapa macam menurut segi yang paling diutamakan, yaitu segi dimensi, segi topologi dan segi transformasi. Pada tulisan ini akan dibahas fraktal dari segi topologi dan segi transformasi.

Suatu ruang metrik $(H(X), h)$ yang anggota-anggotanya merupakan keluarga himpunan bagian tak kosong yang kompak dari ruang metrik lengkap (X, d) adalah ruang fraktal dengan h metrik Hausdorff yang ditimbulkan dari metrik d .

Konstruksi fraktal didasarkan pada Sistem Fungsi Iterasi (SFI). SFI yaitu himpunan berhingga pemetaan kontraksi yang bekerja pada ruang fraktal. Himpunan berhingga pemetaan ini dapat berupa transformasi similar, transformasi afin, atau pemetaan konformal.

Sifat bangun fraktal antara lain : afin diri atau hampir afin atau similar diri, bentuk umum gambar tidak berubah pada tiap tingkat pembesaran, kekasaran gambar terlihat jelas pada setiap tingkat pembesaran

Pola fraktal lebih mudah dilihat pendekatan gambarnya dengan bantuan program komputer. Dengan adanya program komputer inilah terapan fraktal makin berkembang

ABSTRACT

Fractal is used to name the structure of a figure or set that has fractional dimension. There are several ways to define fractal based on the aspect that is considered most important. The aspects are dimensional aspect, topological aspect, and transformational aspect. In this thesis the fractal discussed is the one based on the topological aspect and transformational aspect.

A metric space $(H(X), h)$ whose members are the family of an unempty and compact subset of a complete metric space (X, d) is a fractal space, with h is Hausdorff metric which is constructed from metric d .

Construction of fractals is based on Iterated Function System (IFS). IFS is a finite set of contraction mappings which acts in a fractal space. These mappings can be similarity transformations, affine transformations, or conformal mappings.

Fractal's characters are : self affine or almost affine or self similar, general form of the picture does not change in every enlargement level, and the coarse of the picture is clearly seen in every enlargement level.

The fractal's pattern is easier to be seen with the help of a computer program. The computer program causes fractal application develops more rapidly

PLAGIAT MERUPAKAN TINDAKAN TIDAK TERPUJI

BAB I

PENDAHULUAN

Alasan Pemilihan Judul

Geometri fraktal merupakan salah satu bidang matematika yang merupakan hal baru dan selama kurang lebih dua puluh tahun terakhir telah berkembang menjadi salah satu cabang yang penting untuk penelitian ilmiah. Geometri fraktal mempunyai banyak kelebihan dibandingkan geometri Euclides, salah satu kelebihannya adalah kemampuan dalam menyajikan fenomena alam. Keterkaitan geometri fraktal dengan objek alam yang sering dijumpai dalam kehidupan sehari-hari inilah yang menarik perhatian penulis. Selain itu penulis ingin mempelajari lebih jauh keterkaitan materi yang pernah didapat dalam kuliah dengan konsep-konsep yang melandasi fraktal.

Latar Belakang

Istilah fraktal pertama kali digunakan oleh seorang matematikawan yang bernama Benoit Mandelbrot pada tahun 1975 untuk memberi nama pada temuan-temuan dari ahli-ahli matematika sebelumnya juga hasil penemuannya, seperti Waclaw Sierpinski yang terkenal dengan gasket Sierpinski, George Cantor dengan himpunan Cantor, Helge Von Koch dengan kurva Koch, Gaston Julia dengan himpunan Julia, dan lainnya, yang mempunyai kesamaan struktur dan lepas dari geometri Euclides.



Fraktal ini digunakan untuk memberi nama suatu struktur bangun yang mempunyai dimensi tidak utuh. Sifat fraktal secara umum yaitu similar diri atau afin diri atau hampir afin, yang bangunnya mempunyai segi topologi tertentu.

Di dalam mendefinisikan fraktal ada beberapa cara pandangan berdasarkan hal yang paling diutamakan yaitu : dari segi topologi , dari segi dimensi bangun fraktal dan dari segi transformasi yang digunakan untuk membentuk bangun fraktal. Dalam tulisan ini, pembahasan yang digunakan adalah segi topologi dan segi transformasi .

Ruang Lingkup

Seperti diungkapkan di atas, segi yang digunakan dalam mendefinisikan fraktal dalam tulisan ini adalah segi topologi dan segi transformasi. Hal ini dimaksudkan untuk melihat keterkaitan antara materi yang sudah diperoleh di bangku kuliah dengan konsep fraktal. Selanjutnya di bawah ini akan dijelaskan sedikit mengenai isi dari bab-bab yang akan dibicarakan.

Bab II akan memuat sedikit tentang perbandingan geometri fraktal sebagai geometri yang baru dengan geometri Euclides dalam menyajikan objek alam. Bab ini memperlihatkan hasil dari geometri fraktal.

Bab III yang merupakan isi utama dari karya tulis ini akan membahas segi topologi yang mendasari dan yang ada pada fraktal, dimulai konstruksinya dari ruang vektor real yang kemudian dibawa ke ruang metrik yang selanjutnya untuk menjelaskan ruang fraktal. Selain itu dibahas pula transformasi yang digunakan untuk membangun fraktal. Di akhir bab ini akan diberikan beberapa contoh

mengenai konstruksi bangun fraktal, baik pada bidang real maupun pada bidang kompleks.

Untuk melihat kegunaan fraktal, pada bab IV akan dibahas beberapa terapan fraktal secara teoretis.

Materi Prasyarat

Materi-materi yang perlu dikuasai dalam membicarakan geometri fraktal di sini adalah :

- aljabar linear : ruang vektor, ruang vektor perkalian dalam , ruang vektor bernorma, ruang vektor bernorma Euclides , ruang metrik.
- fungsi variabel kompleks : bilangan kompleks, fungsi kompleks, fungsi analitik, pemetaan elementer, pemetaan konformal
- beberapa konsep topologi dari bilangan real : himpunan tertutup, himpunan terbuka, titik limit, titik dalam, himpunan lengkap, himpunan kompak.
- transformasi geometri : isometri, similaritas, afinitas

Sedangkan program komputer tidak dijadikan syarat karena dalam tulisan ini fraktal hanya dilihat dari segi matematikanya.

Metode Penelitian

Tulisan ini didasarkan pada metode penelitian studi pustaka.

BAB II

LATAR BELAKANG FRAKTAL

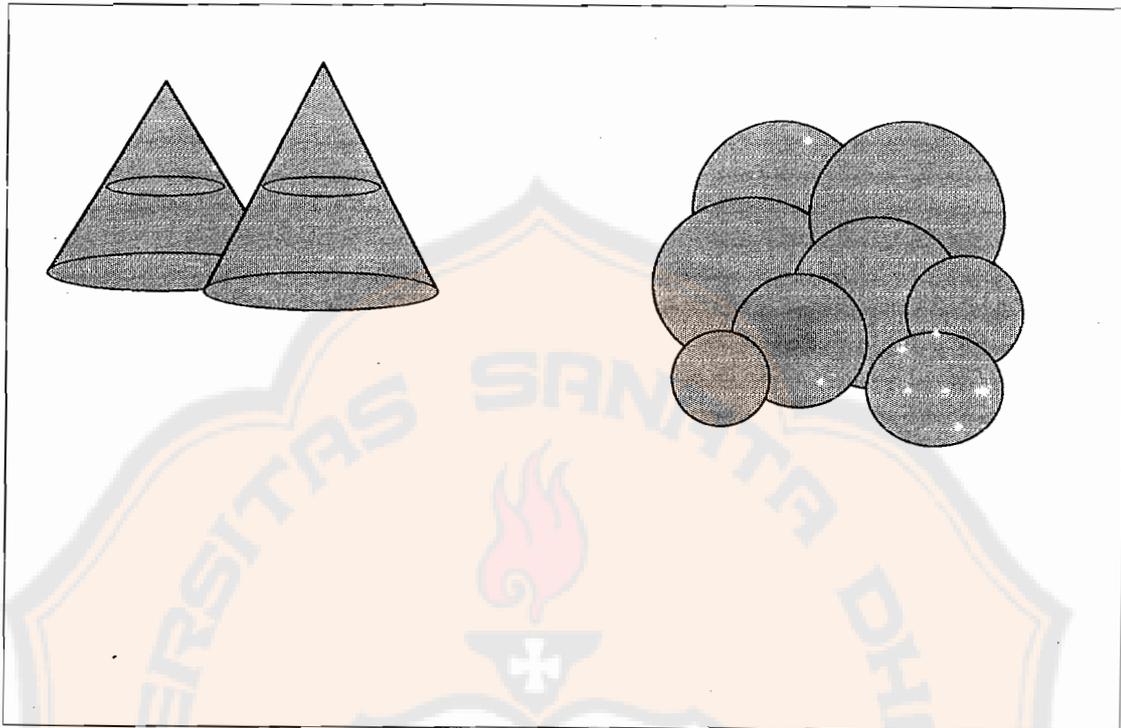
Pada bab ini ada dua bagian yang akan dikemukakan, yaitu geometri klasik atau geometri Euclides dalam peranannya menyajikan objek alam serta adanya sebuah geometri baru yang dalam menyajikan objek alam lebih luwes.

2.1. Peranan Geometri Euclides dalam Menyajikan Objek Alam

Geometri Euclides atau juga sering dikenal sebagai geometri klasik, masih saja dipelajari orang sampai sekarang. Di pelbagai bidang, geometri ini masih tetap digunakan sebagai dasar yang penting, misalnya di bidang rancang bangun seperti mesin, meja kursi, gedung-gedung dan lain sebagainya.

Geometri ini didasari oleh anggapan tentang keteraturan garis-garis geometris. Mungkin hal inilah yang mengakibatkan munculnya tanggapan dari orang-orang yang menyatakan bahwa geometri adalah sesuatu yang kaku, bahkan geometri dianggap sebagai sesuatu yang kering, kurang berandil besar dalam menciptakan seni yang indah. Selain itu, karena adanya keteraturan garis maka jelaslah bahwa geometri klasik menunjukkan ketidakmampuannya dalam menggambarkan objek alam secara baik.

Dalam geometri ini kita mengenal garis, segitiga, segi empat, lingkaran, ellips, bola, kerucut, silinder, prisma, limas, dan lain sebagainya. Maka akan ada sebuah pertanyaan yang muncul "Sejauh manakah benda-benda alam dapat digambarkan oleh bangun-bangun geometri di atas?". Kita perhatikan gambar berikut ini.



Gambar 2.1

Alangkah baiknya jika untuk menjawab pertanyaan di atas kita mendasarkan diri pada pengamatan langsung ke alam sekitar kita. Tentu kita akan dapat langsung menjawab, gunung tentu saja tidak dapat di gambarkan begitu saja dengan sebuah kerucut, garis pantai tentu tidak sekedar sebuah garis lurus, awan pun tidak dapat kita gambarkan sebagai garis lengkung, dan lain sebagainya.

Dari kenyataan tersebut di atas kita dapat melihat keterbatasan geometri klasik dalam menyajikan objek alam, namun kita tidak dapat memungkiri kenyataan bahwa geometri inipun mempunyai peranan dalam menyajikan objek alam meskipun boleh dikatakan tidak baik.

Alam sangatlah jauh dari garis-garis geometris yang teratur. Kita menjadi terjebak dalam mempelajari alam justru karena sering menjauhi alam dengan jalan hanya merumuskan teori-teori yang sebenarnya tidak berkaitan langsung dengan alam. Tidakkah kita sekarang menginginkan sebuah geometri yang benar-benar lebih dapat mendekati alam ?

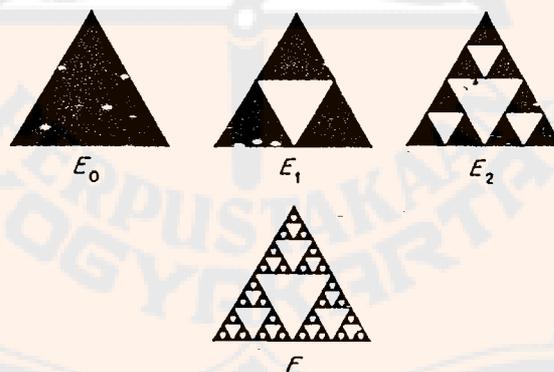
2. 2. Pengenalan Geometri Baru

Pada tahun 1975 seorang matematikawan kelahiran Perancis Benoit Mandelbrot mencetuskan istilah fraktal. Kata itu ada dalam makalahnya yang berjudul "*A Theory of Fractal Sets*" Istilah fraktal di sini dimaksudkan untuk menyatukan karya-karya ilmuwan-ilmuwan sebelumnya, seperti Gasket Sierpinski, Garis Pantai Koch (Kurva Von Koch), Debu Cantor, dan lainnya. Asal kata fraktal berasal dari kata latin *frangere* yang berarti terbelah menjadi fragmen-fragmen yang tidak teratur. Mandelbrot di sini memberikan catatan bertanda kurung " karena aljabar yang berasal dari kata Arab *jabara* yang berarti terikat menjadi satu, maka dilihat dari sudut etimologi, fraktal dan aljabar adalah dua hal yang saling bertentangan".

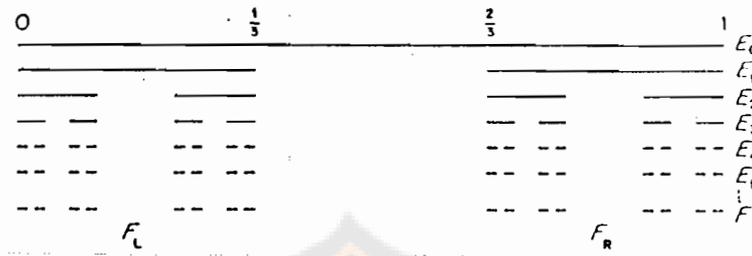
Pada awalnya Sierpinski, Koch, dan matematikawan yang lain tidak mengira bahwa temuan mereka yang seakan jauh dari bentuk-bentuk yang tidak alamiah, akan kembali ke geometri alam yang sejati. Mandelbrot dengan gigihnya mempublikasikan penemuan-penemuan tersebut, yang telah membuat era baru dalam bidang geometri. Dalam bukunya yang berjudul "*The Fractal Geometry of Nature* " ia mengungkapkan

"...Clouds are not spheres, mountains are not cones, coastlines are not circles, and bark is not smooth, nor does lightning travel in a straight line. More generally, I claim that many patterns of nature are so irregular and fragmented, that, compared with....standard geometry, Nature exhibits not simply a higher degree but an altogether different level of complexity." Di sini Mandelbrot bermaksud mengatakan bahwa dengan hanya mengandalkan pengetahuan geometri klasik kita tidak akan dapat menyajikan alam dengan baik.

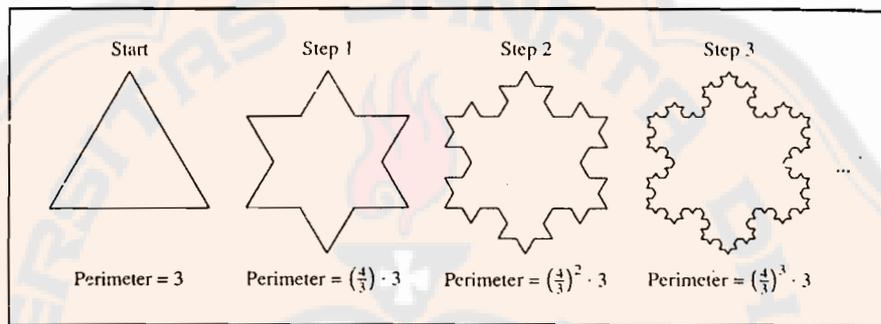
Berikut ini disajikan contoh-contoh dari proses konstruksi dari gambar-gambar yang bersifat fraktal (gambar 2.2 sampai dengan gambar 2.5) dan contoh-contoh kemampuan geometri fraktal dalam menyajikan benda-benda alam (gambar 2.6 sampai dengan gambar 2.8).



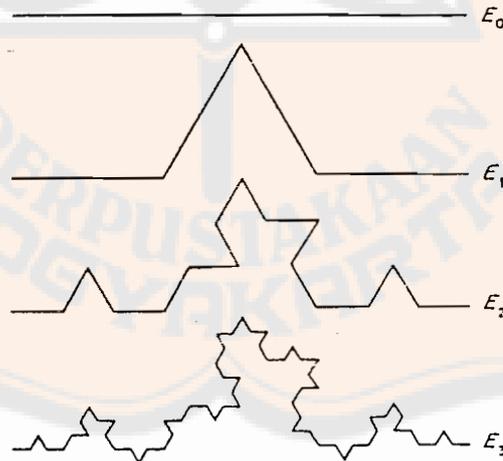
Gambar 2.2
Proses konstruksi Gasket Sierpinski



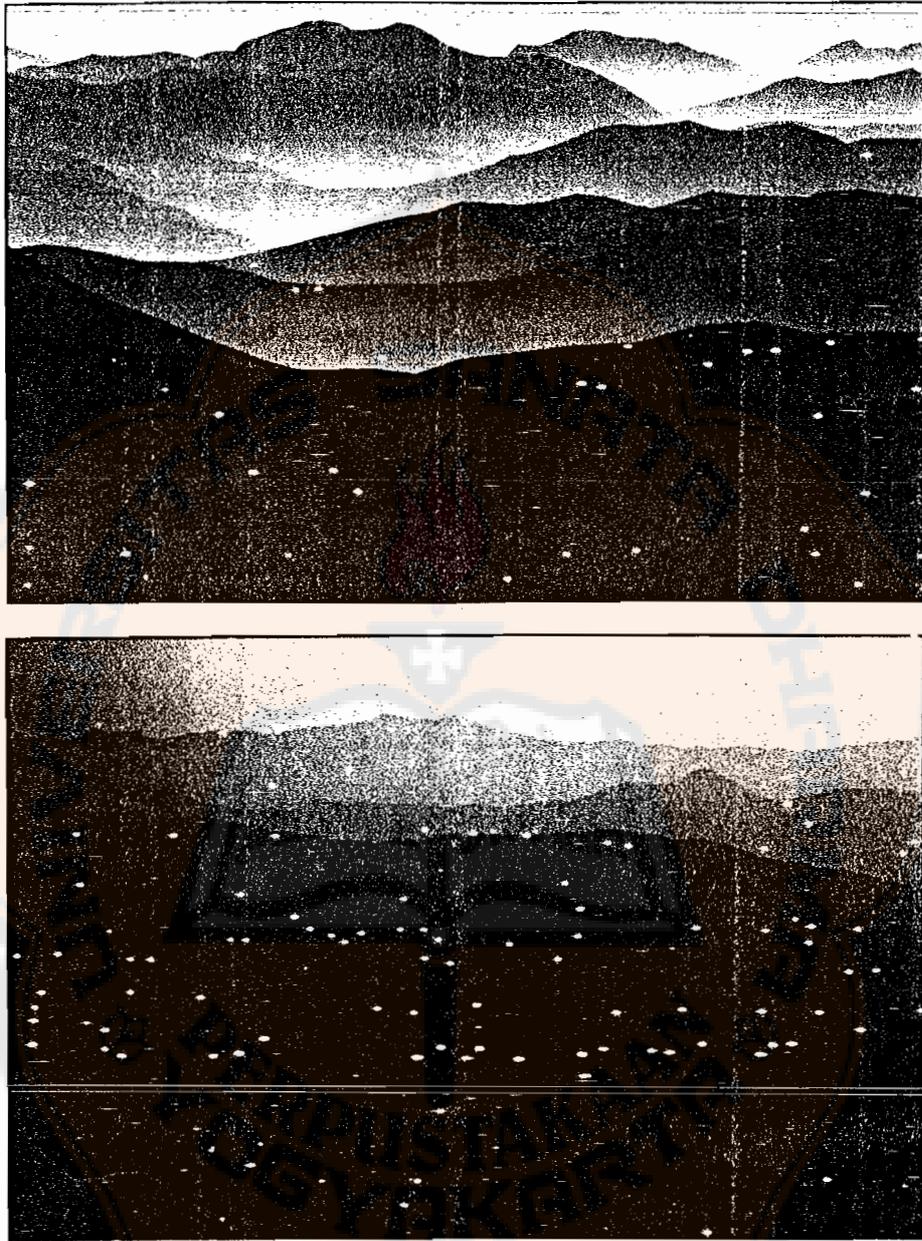
Gambar 2.3
Proses konstruksi himpunan Cantor



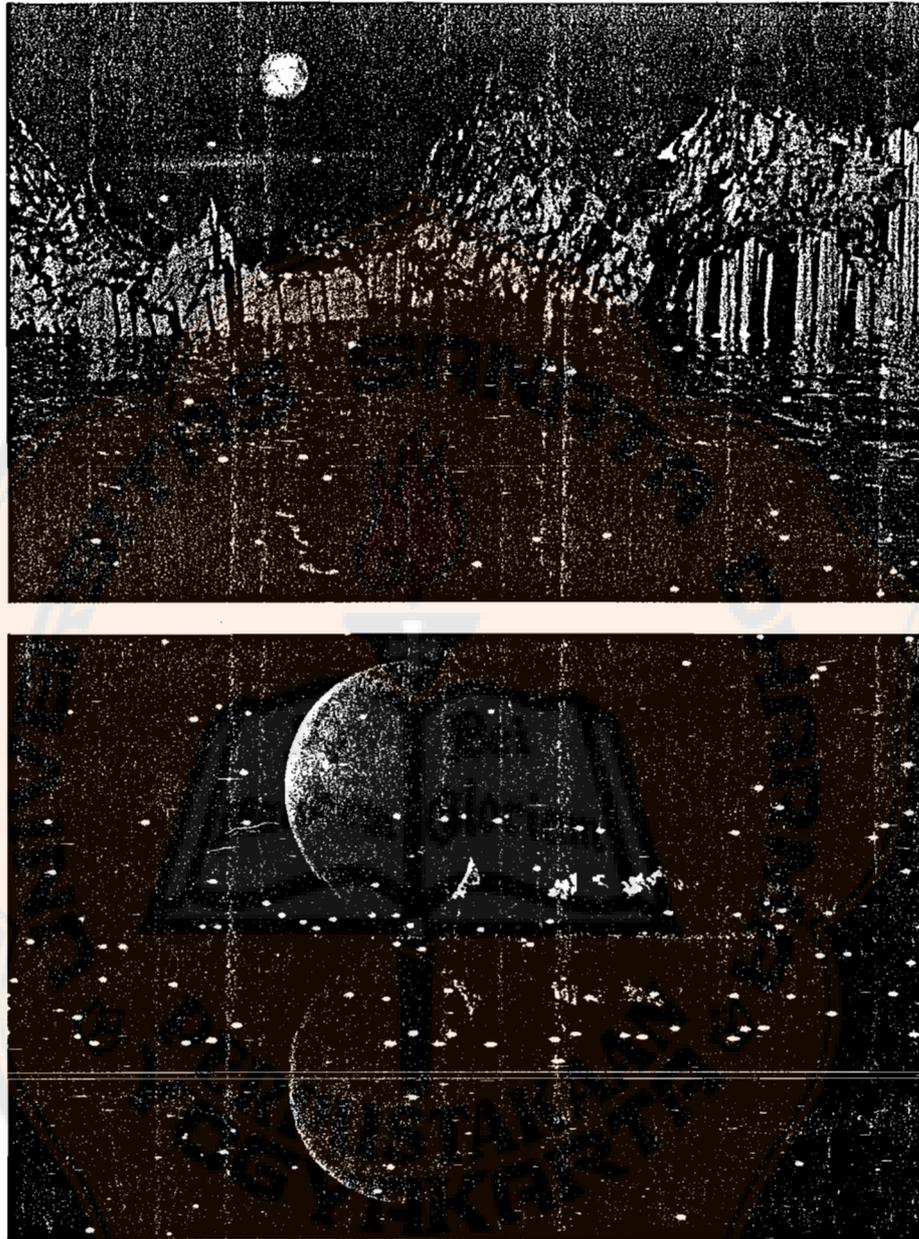
Gambar 2.4
Proses konstruksi kurva Koch



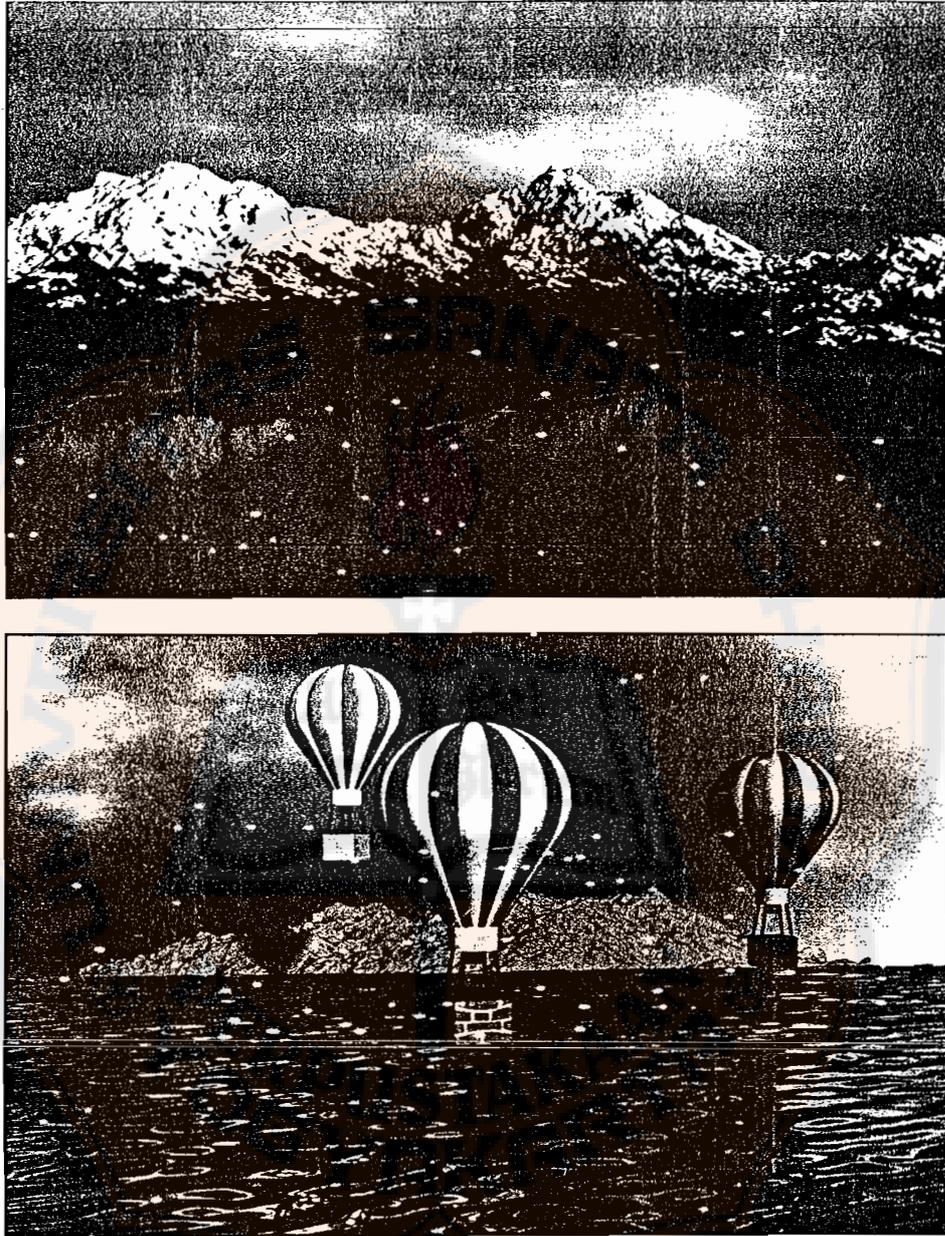
Gambar 2.5
Proses konstruksi kurva Koch acak



Gambar 2.6
Contoh pendekatan geometri fraktal untuk menyajikan alam pegunungan



Gambar 2.7
Contoh pendekatan geometri fraktal untuk menyajikan alam.



Gambar 2.8
Contoh pendekatan geometri fraktal untuk menyajikan alam

BAB III
FRAKTAL

Pada bab ini, akan dibahas hal-hal yang berkaitan dengan teori-teori yang mendasari geometri fraktal, seperti ruang metrik dan ruang fraktal, transformasi similar dan transformasi afin, sistem fungsi iterasi, dan kemudian proses konstruksi geometri fraktal sendiri. Akan dikemukakan pula pentingnya bantuan program komputer untuk membantu menampilkan gambar geometri fraktal.

3.1. Beberapa Konsep Topologi

Topologi merupakan salah satu dari tiga hal yang penting dalam membicarakan geometri fraktal, di samping transformasi dan program komputer. Segi topologi yang akan dibahas hanya yang berkaitan dengan ruang metrik yang nantinya berkaitan dengan ruang fraktal.

3.1.1. Ruang Metrik

Untuk membahas ruang metrik dalam proses membahas ruang fraktal maka diperlukan teori-teori yang mendasarinya. Teori-teori tersebut ditampilkan dalam bentuk definisi-definisi dan beberapa teorema. Dalam membahas ruang metrik tersendiri diperlukan pengertian-pengertian awal di bawah ini.

Definisi 3.1.1 : Diberikan V suatu himpunan tak kosong, dan pada V didefinisikan operasi penjumlahan dan perkalian dengan skalar bilangan real, yaitu aturan yang mengawankan setiap pasang elemen \underline{x} dan \underline{y} anggota V dan setiap skalar $\alpha \in \mathbb{R}$ dengan tepat satu elemen $\underline{x} + \underline{y} \in V$ dan tepat satu elemen $\alpha \underline{x} \in V$. Himpunan V bersama dengan operasi penjumlahan dan perkalian dengan skalar bilangan real itu disebut **ruang vektor** atas field \mathbb{R} dan diberi lambang $V(\mathbb{R})$ jika memenuhi aksioma-aksioma berikut :

A.1. $\underline{x} + \underline{y} = \underline{y} + \underline{x}$, untuk $\forall \underline{x}, \underline{y} \in V$

A.2. $(\underline{x} + \underline{y}) + \underline{z} = \underline{x} + (\underline{y} + \underline{z})$, untuk $\forall \underline{x}, \underline{y}, \underline{z} \in V$

A.3. Ada elemen $\underline{0} \in V$ sedemikian hingga $\underline{x} + \underline{0} = \underline{x}$, untuk $\forall \underline{x} \in V$

A.4. Untuk $\forall \underline{x} \in V$, ada elemen $-\underline{x} \in V$ sedemikian hingga $\underline{x} + (-\underline{x}) = \underline{0}$

A.5. $\alpha(\underline{x} + \underline{y}) = \alpha\underline{x} + \alpha\underline{y}$, untuk sebarang skalar $\alpha \in \mathbb{R}$ dan untuk

$$\forall \underline{x}, \underline{y} \in V$$

A.6. $(\alpha + \beta)\underline{x} = \alpha\underline{x} + \beta\underline{x}$, untuk sebarang skalar $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ dan untuk

$$\forall \underline{x} \in V$$

A.7. $(\alpha\beta)\underline{x} = \alpha(\beta\underline{x})$, untuk sebarang skalar $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ dan untuk $\forall \underline{x} \in V$

A.8. $1\underline{x} = \underline{x}$, untuk $\forall \underline{x} \in V$

Elemen-elemen dalam V disebut **vektor**.

Definisi 3.1.2 : Suatu perkalian-dalam pada ruang vektor V adalah suatu operasi yang mengawankan setiap pasang vektor \underline{x} dan \underline{y} dalam V dengan suatu bilangan real $\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle$ sedemikian hingga syarat-syarat berikut dipenuhi :

1. $\langle \underline{x}, \underline{x} \rangle \geq 0$ dan $\langle \underline{x}, \underline{x} \rangle = 0$ bila hanya bila $\underline{x} = \underline{0}$
2. $\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle = \langle \underline{y}, \underline{x} \rangle$, untuk $\forall \underline{x}, \underline{y} \in V$
3. $\langle \underline{x} + \underline{z}, \underline{y} \rangle = \langle \underline{x}, \underline{y} \rangle + \langle \underline{z}, \underline{y} \rangle$ untuk $\forall \underline{x}, \underline{y}, \underline{z} \in V$
4. $\langle \alpha \underline{x} + \beta \underline{y}, \underline{z} \rangle = \alpha \langle \underline{x}, \underline{z} \rangle + \beta \langle \underline{y}, \underline{z} \rangle$, untuk $\forall \underline{x}, \underline{y}, \underline{z} \in V$ dan sebarang skalar α dan β .

Ruang vektor yang dilengkapi dengan suatu perkalian-dalam disebut **ruang vektor perkalian-dalam**, sering disingkat ruang perkalian-dalam.

Definisi 3.1.3 : Jika V adalah suatu ruang perkalian-dalam, maka **norma Euclides** dari suatu vektor $\underline{x} \in V$ adalah $\|\underline{x}\| = (\langle \underline{x}, \underline{x} \rangle)^{1/2}$.

Ruang perkalian-dalam yang dilengkapi dengan norma Euclides disebut **ruang bernorma Euclides** atau sering juga disebut **ruang Euclides**.

Beberapa sifat yang diperlukan dalam ruang Euclides :

1. Jika \underline{x} dan \underline{y} elemen ruang vektor bernorma Euclides V , $a \in \mathbb{R}$ (skalar) maka

dipenuhi sifat-sifat dibawah ini :

- a. $\|\underline{x}\| \geq 0$
- b. $\|\underline{x}\| = 0$ bila hanya bila $\underline{x} = \underline{0}$
- c. $\|a\underline{x}\| = |a| \|\underline{x}\|$
- d. $|\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle| \leq \|\underline{x}\| \|\underline{y}\|$
- e. $\|\underline{x} + \underline{y}\| \leq \|\underline{x}\| + \|\underline{y}\|$

2. Sifat ketaksamaan segitiga

Jika \underline{x} , \underline{y} dan \underline{z} elemen ruang vektor bernorma Euclides maka

$$\|\underline{x} - \underline{y}\| \leq \|\underline{x} - \underline{z}\| + \|\underline{z} - \underline{y}\|$$

Definisi 3.1.4 : Diberikan \underline{x} dan \underline{y} sebarang dua vektor dalam suatu ruang bernorma Euclides, **jarak Euclides** antara vektor \underline{x} dan \underline{y} didefinisikan sebagai

$$d(\underline{x}, \underline{y}) = \|\underline{y} - \underline{x}\| = (\langle \underline{y} - \underline{x}, \underline{y} - \underline{x} \rangle)^{1/2}, \text{ merupakan bilangan real non negatif.}$$

Definisi 3.1.5 : Diberikan sebarang himpunan tak kosong X . Didefinisikan $d :$

$X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ sebagai suatu fungsi bernilai real dari $X \times X$, jika d memenuhi :

- a) $d(x,y) = d(y,x), \forall x, y \in X$
- b) $0 < d(x,y) < \infty, \forall x, y \in X, x \neq y$
- c) $d(x,x) = 0, \forall x \in X$

$$d) d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y), \forall x, y, z \in X$$

maka d disebut metrik atau fungsi jarak di dalam X , dan X yang dilengkapi dengan fungsi jarak d tersebut disebut ruang metrik yang ditulis (X,d)

Ruang Euclides yang dilengkapi dengan jarak Euclides di atas memenuhi syarat-syarat sebagai ruang metrik dan disebut **ruang metrik Euclides**. Setelah dikenal definisi-definisi secara umum untuk ruang Euclides di atas, pembahasan dilanjutkan pada penafsiran ruang Euclides dalam himpunan khusus yaitu himpunan \mathbb{R}^k .

Penafsiran ruang Euclides untuk himpunan \mathbb{R}^k .

Definisi 3.1.6 : Untuk suatu bilangan bulat positif k , himpunan \mathbb{R}^k adalah himpunan semua kelompok k buah bilangan real berurutan, $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_k)$, dengan x_1, x_2, \dots, x_k anggota himpunan bilangan real yang dinamakan koordinat \underline{x} . Untuk membedakan dengan bilangan real, elemen-elemen \mathbb{R}^k dinyatakan dengan huruf bergaris bawah.

Definisi 3.1.7 : Dua buah elemen \mathbb{R}^k , \underline{x} dan \underline{y} dikatakan sama bila hanya bila koordinat-koordinat yang bersesuaian sama, artinya jika $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_k)$ dan $\underline{y} = (y_1, y_2, \dots, y_k)$ maka $\underline{x} = \underline{y}$ bila hanya bila $x_i = y_i$, untuk $i = 1, 2, \dots, k$.

Definisi 3.1.8 : Di dalam \mathbb{R}^k didefinisikan operasi-operasi sebagai berikut :

1. Penjumlahan

jika $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_k)$ dan $\underline{y} = (y_1, y_2, \dots, y_k)$ elemen \mathbb{R}^k maka $\underline{x} + \underline{y}$ didefinisikan

$$\underline{x} + \underline{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_k + y_k)$$

2. Perkalian dengan skalar

Jika $a \in \mathbb{R}$ maka untuk $\forall \underline{x} \in \mathbb{R}^k$, $a\underline{x}$ didefinisikan :

$$a\underline{x} = (ax_1, ax_2, \dots, ax_k)$$

$\underline{x} + \underline{y}$ dan $a\underline{x}$ keduanya merupakan kelompok k bilangan real jadi keduanya merupakan anggota \mathbb{R}^k .

Dengan memperhatikan sifat-sifat komutatif, asosiatif dan distributif bilangan real koordinat anggota \mathbb{R}^k , maka operasi-operasi di atas memenuhi sifat-sifat sebagai berikut :

1. $\underline{x} + \underline{y} = \underline{y} + \underline{x}$, untuk $\forall \underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^k$
2. $(\underline{x} + \underline{y}) + \underline{z} = \underline{x} + (\underline{y} + \underline{z})$, untuk $\forall \underline{x}, \underline{y}, \underline{z} \in \mathbb{R}^k$
3. $a(\underline{x} + \underline{y}) = a\underline{x} + a\underline{y}$, untuk $\forall \underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^k$

$$(a + b)\underline{x} = a\underline{x} + b\underline{x}, \text{ untuk } \forall \underline{x} \in \mathbb{R}^k, \text{ dan untuk } \forall a, b \in \mathbb{R}$$

Definisi 3.1.9 : Elemen \mathbb{R}^k yang semua koordinatnya nol dinamakan **elemen nol** dan dilambangkan dengan $\underline{0}$, jadi $\underline{0} = (0, 0, \dots, 0)$.

Untuk setiap \underline{x} jika $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_k)$ elemen \mathbb{R}^k terdapat dengan tunggal $-\underline{x} = (-x_1, -x_2, \dots, -x_k)$ elemen \mathbb{R}^k sedemikian sehingga $\underline{x} + (-\underline{x}) = \underline{0}$.

Penjumlahan $\underline{x} + (-y)$ ditulis $\underline{x} - y$, untuk setiap \underline{x}, y elemen \mathbb{R}^k .

Untuk setiap \underline{x} elemen \mathbb{R}^k dan a, b elemen \mathbb{R} (skalar) berlaku $(ab)\underline{x} = a(b\underline{x})$.

Untuk setiap \underline{x} elemen \mathbb{R}^k , berlaku $1 \underline{x} = \underline{x}$, dengan 1 elemen \mathbb{R} .

Karena himpunan \mathbb{R}^k dengan operasi penjumlahan dan perkalian dengan skalar memenuhi syarat ruang vektor atas field \mathbb{R} , maka himpunan \mathbb{R}^k juga merupakan suatu ruang vektor atas field \mathbb{R} .

Definisi 3.1.10 : Untuk setiap $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^k$ didefinisikan hasil kali skalar (hasil kali titik) $\underline{x} \bullet \underline{y}$ yang merupakan suatu bilangan real, jadi suatu skalar, yaitu

$$\underline{x} \bullet \underline{y} = \sum_{i=1}^k x_i y_i$$

$$\underline{x} \bullet \underline{x} = \sum_{i=1}^k x_i^2, \text{ suatu bilangan real non negatif.}$$

Ternyata ruang vektor \mathbb{R}^k yang dilengkapi hasil kali skalar seperti yang didefinisikan di atas memenuhi sifat-sifat ruang vektor perkalian-dalam.

Karena memenuhi syarat ruang perkalian-dalam maka ruang vektor \mathbb{R}^k yang dilengkapi perkalian-skalar yang didefinisikan di atas juga merupakan ruang perkalian-dalam.

Definisi 3.1.11 : Norma suatu vektor \underline{x} elemen \mathbb{R}^k yang dilambangkan $\|\underline{x}\|$ dide-

finisikan sebagai $\|\underline{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^k x_i^2}$

Ternyata ruang vektor \mathbb{R}^k yang dilengkapi norma seperti di atas memenuhi syarat-syarat ruang vektor bernorma Euclides, maka ruang vektor tersebut juga disebut ruang Euclides \mathbb{R}^k , juga sering disebut **ruang Euclides berdimensi k**.

Definisi 3.1.12 : Untuk setiap $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^k$, didefinisikan jarak antara kedua vek-

tor tersebut, yang dilambangkan $d(\underline{x}, \underline{y})$, sebagai :

$$d(\underline{x}, \underline{y}) = \|\underline{y} - \underline{x}\| = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \dots + (y_k - x_k)^2}$$

Ternyata ruang vektor Euclides \mathbb{R}^k yang dilengkapi dengan jarak seperti yang didefinisikan di atas memenuhi syarat ruang metrik, karena fungsi jaraknya adalah fungsi jarak Euclides maka ruangnya disebut ruang metrik Euclides.

Hubungan Ruang Vektor Euclides \mathbb{R}^k dengan Ruang Titik

Setelah didapatkan pengertian tentang ruang Euclides berdimensi k (\mathbb{R}^k), sekarang akan disusun korespondensi satu-satu antara ruang Euclides dengan ruang titik berdimensi k (E^k), yang diberi koordinat. Ruang vektor Euclides anggota-anggotanya adalah vektor, sedangkan ruang titik Euclides anggota-anggotanya titik.

Ruang Vektor Euclides \mathbb{R}^k

$$\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^k$$

$$\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_k)$$

$$\underline{x} + \underline{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_k + y_k)$$

Ruang Titik E^k

$$X \text{ dan } Y \in \text{ruang titik } E^k$$

$$X(x_1, x_2, \dots, x_k), \quad x_1, x_2, \dots, x_k$$

koordinat-koordinat titik X .

$X \oplus Y$ merupakan titik yang koordinat-koordinatnya adalah

$$x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_k + y_k$$

$$c \in \mathbb{R}$$

$$c\underline{x} = (cx_1, cx_2, \dots, cx_k)$$

cX merupakan titik yang koor-

dinat-koordinatnya adalah

$$cx_1, cx_2, \dots, cx_k$$

$$\underline{0} \in \mathbb{R}^k.$$

O , merupakan titik asal.

$$\|\underline{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_k^2}$$

OX panjang ruas garis dari titik

asal ke titik $X(x_1, x_2, \dots, x_k)$

Berdasarkan korespondensi yang disusun di atas maka dapat disimpulkan bahwa ruang vektor Euclides berdimensi k isomorfis dengan ruang titik berdimensi k (E^k).

Topologi dalam Ruang Metrik

Setelah di atas dijelaskan bahwa setiap elemen ruang vektor mempunyai kawan tepat satu dengan ruang titik, maka untuk pembahasan seterusnya istilah titik dengan istilah vektor dapat saling dipertukarkan.

Definisi 3.1.13 : Diberikan ruang X yang merupakan himpunan, dengan titik-titik sebagai anggota-anggotanya, jika p titik sebarang di dalam ruang metrik (X, d) , dan $r > 0$, maka himpunan $N_r(p) = \{x \in X : d(p, x) < r\}$, dinamakan daerah sekitar titik p dengan radius r .

Definisi 3.1.14 : Titik $p \in (X, d)$ disebut **titik limit** himpunan E subhimpunan X , bila setiap sekitar titik p memuat paling sedikit satu titik $q \in E$ dan $q \neq p$.

Titik anggota E yang bukan titik limit E disebut **titik terasing**.

Definisi 3.1.15 : Diberikan ruang metrik (X, d) Titik $p \in (X, d)$ disebut suatu **titik dalam** himpunan E subset (X, d) jika terdapat suatu sekitar dari p yang merupakan subset dari E .

Definisi 3.1.16 : Diberikan ruang metrik (X, d) . Himpunan E subset (X, d) disebut **himpunan terbuka** jika setiap anggotanya merupakan titik interior himpunan E .

Definisi 3.1.17 : Diberikan ruang metrik (X, d) . Himpunan E subset (X, d) disebut **himpunan tertutup** jika semua titik limitnya termuat dalam E .

Himpunan E terbuka bila hanya bila E^c (E komplemen) tertutup.

Definisi 3.1.18 : Himpunan E subset ruang metrik (X, d) disebut **terbatas** jika terdapat titik $p \in X$ dan bilangan real $M > 0$ sehingga untuk setiap $x \in E$ maka $d(p, x) \leq M$.

Definisi 3.1.19 : Himpunan E subset ruang metrik (X, d) disebut **himpunan sempurna** (*perfect set*) jika E tertutup dan setiap anggota E merupakan titik limit E .

Definisi 3.1.20 : Barisan $\{X_n\}$, $X_n \in (X,d)$ disebut **barisan Cauchy** jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ yang diberikan, terdapat sebuah bilangan bulat $N > 0$, sehingga $d(X_n, X_m) < \varepsilon$, untuk $\forall m,n > N$

Definisi 3.1.21 : Barisan $\{X_n\}$, $X_n \in (X,d)$, **konvergen** ke $x \in X$, jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ yang diberikan, terdapat bilangan bulat $N > 0$ sehingga, $d(X_n, x) < \varepsilon$, untuk $\forall n > N$.

Definisi 3.1.22 : Ruang metrik (X,d) disebut **lengkap** jika mempunyai sifat setiap barisan Cauchy $\{X_n\}$ dalam X mempunyai sebuah limit $x \in X$.

Dapat dibuktikan bahwa jika $S \subset X$, merupakan himpunan bagian ruang metrik (X,d) , $x \in X$ disebut **titik limit** dari S jika terdapat sebuah barisan $\{X_n\}$, $X_n \in S$ sedemikian sehingga $\lim X_n = x$, untuk n mendekati tak berhingga.

Definisi 3.1.23 : $S \subset X$, merupakan himpunan bagian dari ruang metrik (X,d) , **penutup (closure)** dari S (\tilde{S}), didefinisikan $\tilde{S} = S \cup T$, dengan T merupakan himpunan semua titik limit dari S .

S tertutup jika S memuat semua titik limitnya, berarti $S = \tilde{S}$. S lengkap jika sama dengan himpunan semua titik limitnya.

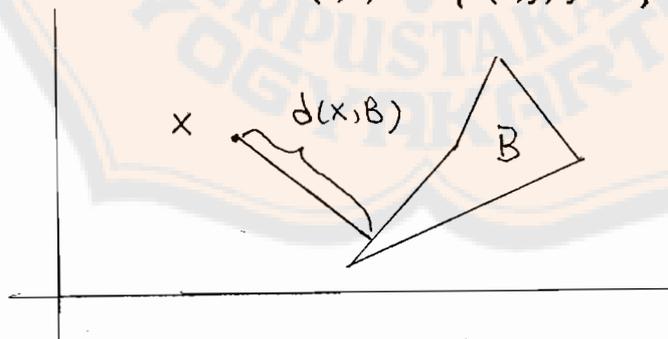
Definisi 3.1.24 : $S \subset X$, merupakan himpunan bagian dari ruang metrik (X,d) . S dikatakan **kompak** jika setiap barisan tak berhingga $\{X_n\}$, dalam S , memuat sebuah barisan bagian yang mempunyai titik limit dalam S .

3.1.2. Ruang Fraktal

Definisi 3.1.25 : Diberikan (X,d) sebuah ruang metrik lengkap. Ruang yang anggotanya merupakan keluarga semua himpunan bagian kompak yang tak kosong dari X ditulis dengan $H(X)$. Anggota $H(X)$ dinamakan **himpunan fraktal**, dan $H(X)$ dinamakan **keluarga fraktal**.

Definisi 3.1.26 : Diberikan (X,d) ruang metrik lengkap, elemen-elemen $H(X)$ merupakan himpunan bagian kompak yang tak kosong X , maka jarak titik $x \in X$ ke himpunan $B \subseteq H(X)$ didefinisikan sebagai

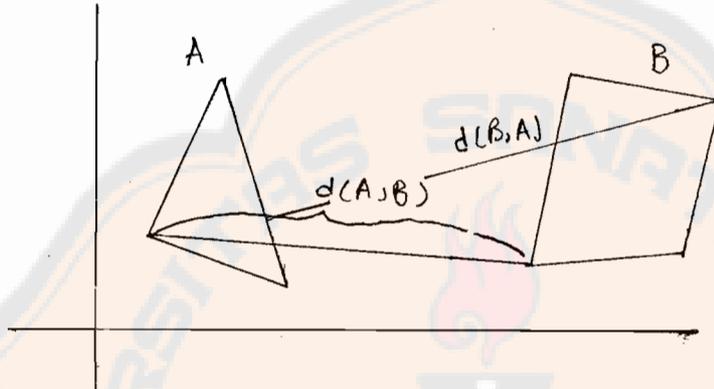
$$d(x,B) = \inf\{d(x,y):y \in B\}.$$



Gambar 3.1

Definisi 3.1.27 : Diberikan (X,d) ruang metrik lengkap, elemen-elemen $H(X)$ merupakan himpunan bagian kompak yang tak kosong X , maka jarak himpunan $A \subseteq H(X)$ ke himpunan $B \subseteq H(X)$ didefinisikan sebagai

$$d(A,B) = \sup\{d(x,B):x \in A\}.$$



Gambar 3.2

Definisi 3.1.28 : Diberikan (X,d) ruang metrik lengkap, elemen-elemen $H(X)$ merupakan himpunan bagian kompak yang tak kosong X , didefinisikan jarak Hausdorff sebagai :

$$h(A,B) = \max\{d(A,B), d(B,A)\} = d(A,B) \vee d(B,A),$$

untuk $A \in H(X)$ dan $B \in H(X)$.

Teorema 3.1.1 : Keluarga fraktal $H(X)$ yang didefinisikan di atas merupakan ruang metrik jika dilengkapi dengan metrik Hausdroff h

bukti :

Dibuktikan bahwa h merupakan metrik pada $H(X)$.

Diberikan A, B , dan C di dalam $H(X)$

a. $h(A,B) = \max\{d(A,B), d(B,A)\} = \max\{d(B,A), d(A,B)\} = h(B,A).$

b. Untuk $A \neq B$, maka $\exists a \in A$ dan $a \notin B$.

Jadi $d(a,B) > 0$. Karena $d(A,B) = \sup\{d(x,B) : x \in A\}$, maka $d(A,B) > 0$ sehingga $h(A,B) > 0$ untuk $A \neq B$.

c. $h(A,A) = \max\{d(A,A), d(A,A)\}$, $d(A,A) = \sup\{d(x,A) : x \in A\} = 0$.

d. Untuk membuktikan bahwa $h(A,B) \leq h(A,C) + h(C,B)$, terlebih dahulu perlu dibuktikan bahwa $d(A,B) \leq d(A,C) + d(C,B)$,

Bukti : Untuk sebarang $a \in A$ diperoleh :

$$\begin{aligned} d(a,B) &= \inf\{d(a,b) : b \in B\} \\ &\leq \inf\{d(a,c) + d(c,b) : b \in B\} \text{ untuk } \forall c \in C \\ &= d(a,c) + \inf\{d(c,b) : b \in B\} \text{ untuk } \forall c \in C. \end{aligned}$$

Jadi $d(a,B) \leq d(a,c) + d(c,B), \forall c \in C$

$$\begin{aligned} &\leq \inf\{d(a,c) : c \in C\} + \sup\{d(c,B) : c \in C\} \\ &\leq d(a,C) + d(C,B) \\ &\leq \sup\{d(a,C) : a \in A\} + d(C,B) = d(A,C) + d(C,B). \end{aligned}$$

Jadi $d(A,B) \leq d(A,C) + d(C,B)$

Dengan cara yang sama diperoleh $d(B,A) \leq d(B,C) + d(C,A)$

Jadi $h(A,B) = d(A,B) \vee d(B,A)$

$$\leq d(B,C) \vee d(C,B) + d(A,C) \vee d(C,A) = h(B,C) + h(A,C)$$

Jadi terbukti bahwa $(H(X),h)$ suatu ruang metrik. ■

Ruang metrik $(H(X),h)$ di atas dinamakan **ruang fraktal**, dengan metrik Hausdorff h yang ditimbulkan oleh metrik d .

Teorema 3.1.2 : $(H(X),h)$ adalah ruang metrik lengkap.

bukti : Dibuktikan bahwa jika $\{A_n \in H(X)\}$ adalah barisan Cauchy maka

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n, A \in H(X).$$

Untuk membuktikan hal tersebut maka bukti dibagi dalam bagian-bagian berikut ini

- :
- $A \neq \emptyset$
 - A tertutup dan lengkap karena X lengkap.
 - Untuk setiap $\varepsilon > 0$ yang diberikan, terdapat N sedemikian sehingga untuk

$$n \geq N, A \subset A_n + \varepsilon$$

d. A terbatas.

$$e. A = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$$

bukti a) $A \neq \emptyset$

Dibuktikan dengan memperlihatkan bahwa terdapat barisan Cauchy $\{a_i \in A_j\}$ di dalam X .

Untuk itu dicari sebuah urutan dari bilangan bulat positif $N_1 < N_2 < \dots < N_n < \dots$

sehingga $h(A_m, A_n) \leq \frac{1}{2^i}$ untuk $m, n \geq N_i$. Sekarang pilih $x_{N_1} \in A_{N_1}$, karena

$h(A_{N_1}, A_{N_2}) \leq \frac{1}{2}$, maka dapat ditemukan $x_{N_2} \in A_{N_2}$ sehingga $d(x_{N_1}, x_{N_2}) \leq \frac{1}{2}$.

Kita klaim bahwa untuk $x_{N_i} \in A_{N_i}$, $i = 1, 2, \dots, k$ maka $d(x_{N_{i-1}}, x_{N_i}) \leq \frac{1}{2^{i-1}}$, ke-

mudian karena $h(A_{N_i}, A_{N_{i+1}}) \leq \frac{1}{2^k}$ dan $x_{N_i} \in A_{N_i}$ maka dapat ditemukan

$x_{N_{i+1}} \in A_{N_{i+1}}$ sehingga $d(x_{N_i}, x_{N_{i+1}}) \leq \frac{1}{2^k}$. Jika diambil $x_{N_{i+1}} \in A_{N_{i+1}}$ meru-

pakan titik paling dekat dengan x_{N_i} , maka dapat ditemukan barisan $\{x_{N_i} \in A_{N_i}\}$

sehingga $d(x_{N_i}, x_{N_{i+1}}) \leq \frac{1}{2^i}$. Untuk memperlihatkan bahwa $\{x_{N_i}\}$ adalah barisan

Cauchy, maka diberikan $\varepsilon > 0$ dan pilih N_ε sehingga $\sum_{i=N_\varepsilon}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \varepsilon$. Kemudian untuk

$m > n \geq N_\varepsilon$ kita peroleh

$$d(x_{N_m}, x_{N_n}) \leq d(x_{N_m}, x_{N_{m+1}}) + d(x_{N_{m+1}}, x_{N_{m+2}}) + \dots + d(x_{N_{n-1}}, x_{N_n}) < \sum_{i=N_\varepsilon}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \varepsilon.$$

Jadi terdapat barisan Cauchy $\{a_i \in A_j\}$, dengan $a_{N_i} = x_{N_i}$, yang konvergen di A .

Jadi $A \neq \emptyset$.

bukti b) A tertutup

untuk membuktikan A tertutup, akan ditunjukkan bahwa jika $\{a_i \in A_i\}$ adalah barisan yang konvergen ke a maka $a \in A$.

Untuk setiap bilangan bulat positif i , ada barisan $\{x_{i,n} \in A_i\}$ sehingga $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{i,n} = a_i$. Terlihat bahwa terdapat barisan naik dari bilangan bulat positif $\{N_i\}$

, sehingga $d(a_{N_i}, a) \leq \frac{1}{i}$. Selanjutnya untuk setiap N_i , ada bilangan bulat m_i se-

hingga $d(x_{N_i, m_i}, a_{N_i}) \leq \frac{1}{i}$, akibatnya $d(x_{N_i, m_i}, a) \leq \frac{2}{i}$

Jika $y_{N_i} = x_{N_i, m_i}$, kita dapat simpulkan $y_{N_i} \in A_{N_i}$ dan $\lim_{n \rightarrow \infty} y_{N_i} = a$. Barisan

$\{y_{N_i}\}$ dapat diperluas menjadi barisan konvergen $\{z_i \in A_i\}$, dan $a \in A$.

Jadi, A tertutup.

bukti c) untuk $\varepsilon > 0$ terdapat N sedemikian sehingga untuk $n \geq N$, $A \subset A + \varepsilon$.

Diberikan $\varepsilon > 0$, terdapat N sedemikian hingga untuk $m, n \geq N$, $h(A_m, A_n) \leq \varepsilon$.

Sekarang diberikan $n \geq N$. maka untuk $m \geq n$, $A_m \subset A_n + \varepsilon$. Untuk $a \in A$, terdapat

barisan $\{a_i \in A_i\}$ yang konvergen ke a . Kita asumsikan N cukup besar sedemikian

hingga untuk $m \geq N$ berlaku $d(a_m, a) < \varepsilon$, maka $a_m \in A_n + \varepsilon$ karena $A_m \subset A_n + \varepsilon$.

Karena A_n kompak maka dapat ditunjukkan bahwa $A_n + \varepsilon$ adalah tertutup. Maka

karena $a_m \in A_n + \varepsilon$ untuk setiap $m \geq N$, maka a harus berada dalam $A_n + \varepsilon$.

Jadi $A \subset A + \varepsilon$, untuk n cukup besar.

bukti d) A terbatas

Andaikan A tidak terbatas, maka untuk beberapa $\varepsilon > 0$ tidak terdapat sejumlah yang berhingga. Kemudian kita akan menemukan barisan $\{x_i\}$ di dalam A sedemikian hingga $d(x_i, x_j) > \varepsilon$ untuk $i \neq j$. Berdasarkan bagian (c) terdapat n yang cukup besar sedemikian hingga $A \subset A + \varepsilon/3$. Untuk setiap x_i terdapat korespondensi dengan $y_i \in A_n$ dengan $d(x_i, y_i) \leq \varepsilon/3$. Karena A_n kompak maka sub barisan $\{y_{n_i}\}$ dari $\{y_i\}$ konvergen, maka kita dapat menemukan titik dalam barisan $\{y_{n_i}\}$ yang berdekatan, yaitu y_{n_i} dan y_{n_j} sedemikian hingga $d(y_{n_i}, y_{n_j}) < \varepsilon/3$.

$$\text{Tetapi } d(x_{n_i}, x_{n_j}) \leq d(x_{n_i}, y_{n_i}) + d(y_{n_i}, y_{n_j}) + d(y_{n_j}, x_{n_j}) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

Terdapat kontradiksi

Jadi, A terbatas.

Dengan menggunakan b dan c maka A adalah kompak.

bukti e) $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$

Karena A kompak maka $A \in \mathcal{H}(X)$. Untuk $\varepsilon > 0$, terdapat N sedemikian hingga untuk $n \geq N$ berlaku $h(A_n, A) \leq \varepsilon$, sedangkan $h(A_n, A) \leq \varepsilon \Leftrightarrow A_n \subset A + \varepsilon$ dan $A \subset A_n + \varepsilon$. Untuk $A \subset A_n + \varepsilon$ pada bagian (c) sudah dibuktikan, jadi tinggal membuktikan $A_n \subset A + \varepsilon$. Untuk memperlihatkan ini, maka jika diberikan $\varepsilon > 0$ dan ditentukan N sedemikian hingga untuk $m, n \geq N$, $h(A_m, A_n) \leq \varepsilon/2$ maka untuk $m, n \geq N$, $A_m \subset A_n + \varepsilon/2$. Sekarang ambil $n \geq N$, akan diperlihatkan bahwa $A_n \subset A + \varepsilon$.

Ambil $y \in A_n$, maka terdapat barisan naik $\{N_i\}$ dari bilangan bulat sedemikian hingga $n < N_1 < N_2 < \dots < N_k < \dots$ dan untuk setiap $m, k \geq N_j$, $A_m \subset A_k + \frac{\varepsilon}{2^{j+1}}$.

Catatan bahwa $A_n \subset A_{N_1} + \frac{\varepsilon}{2}$. Karena $y \in A_n$, maka terdapat $x_{N_1} \in A_{N_1}$,

sedemikian hingga $d(y, x_{N_1}) \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Karena $x_{N_1} \in A_{N_1}$, maka terdapat

$x_{N_2} \in A_{N_2}$ sedemikian hingga $d(x_{N_1}, x_{N_2}) \leq \frac{\varepsilon}{2^2}$. Dan seterusnya sehingga didapat

barisan $\{x_{N_1}, x_{N_2}, \dots\}$ sedemikian hingga $x_{N_j} \in A_{N_j}$ dan $d(x_{N_j}, x_{N_{j+1}}) \leq \frac{\varepsilon}{2^{j+1}}$

menggunakan ketaksamaan segitiga diperoleh $d(y, x_{N_j}) \leq \varepsilon$ untuk setiap j dan juga

$\{x_{N_j}\}$ adalah barisan Cauchy. $\{x_{N_j}\}$ konvergen ke $x \in A$, akibatnya juga karena

$d(y, x_{N_j}) \leq \varepsilon$ maka $d(y, x) \leq \varepsilon$ akibatnya $A_n \subset A + \varepsilon$ untuk $n \geq N$.

Dari a, b, c, d, e maka $(H(X), h)$ adalah ruang metrik lengkap. ■

3.2. Transformasi

Hal kedua yang terpenting dalam membahas fraktal adalah transformasi dan transformasi yang dibahas di sini dibatasi pada transformasi yang berlaku pada bidang. Dalam bagian ini akan ditampilkan beberapa konsep transformasi yang penting dan nantinya digunakan dalam pembahasan mengenai fraktal. **Transformasi geometri** adalah suatu fungsi bijektif dari himpunan semua titik pada suatu bidang ke himpunan semua titik pada bidang itu sendiri, dengan kata lain, jika diberikan suatu transformasi α , berlaku bahwa untuk setiap titik P terdapat dengan tunggal titik Q sedemikian hingga $\alpha(P) = Q$, dan sebaliknya untuk setiap titik R terdapat dengan tunggal titik S sedemikian hingga $\alpha(S) = R$. Dalam hal ini yang dimaksud adalah bidang Euclides, dengan demikian semua definisi, teorema dan aturan-aturan yang ada pada geometri Euclides juga berlaku.

Dalam membahas transformasi perlu diketahui dahulu unsur-unsur yang **invarian** (bertahan/ tetap) terhadap transformasi tersebut. Suatu titik P yang terhadap transformasi α memenuhi $P = \alpha(P)$ disebut titik invarian terhadap α , suatu garis g yang terhadap transformasi α memenuhi $g = \alpha(g)$ disebut garis invarian terhadap g . Sebaliknya α dikatakan mempertahankan titik P bila hanya bila $\alpha(P) = P$. Transformasi α mempertahankan garis g bila hanya bila $\alpha(g) = g$, dan transformasi α mempertahankan himpunan titik S bila hanya bila $\alpha(S) = S$.

Transformasi yang berkaitan erat dengan fraktal adalah similaritas dan afinitas. Sebagai alat untuk bagian terapan maka di sini akan dibahas juga pemetaan konformal, yaitu pemetaan pada bidang kompleks

Untuk membahas transformasi - transformasi tersebut, diperlukan konsep-konsep awal yang mendasarinya. Konsep-konsep yang dibicarakan di sini dilandaskan pada transformasi yang terjadi pada bidang Euclides.

Sebelum membahas konsep-konsep tersebut, di bawah ini disajikan daftar lambang yang digunakan yaitu :

\overleftrightarrow{AB} = garis

\overrightarrow{AB} = sinar garis dengan pangkal A

\overline{AB} = ruas garis

AB = panjang ruas garis

\underline{AB} = vektor geometris atau ruas garis berarah dengan pangkal A

Definisi 3.2.1 : Transformasi identitas I adalah transformasi yang memenuhi $I(P) = P$ untuk setiap titik P pada bidang.

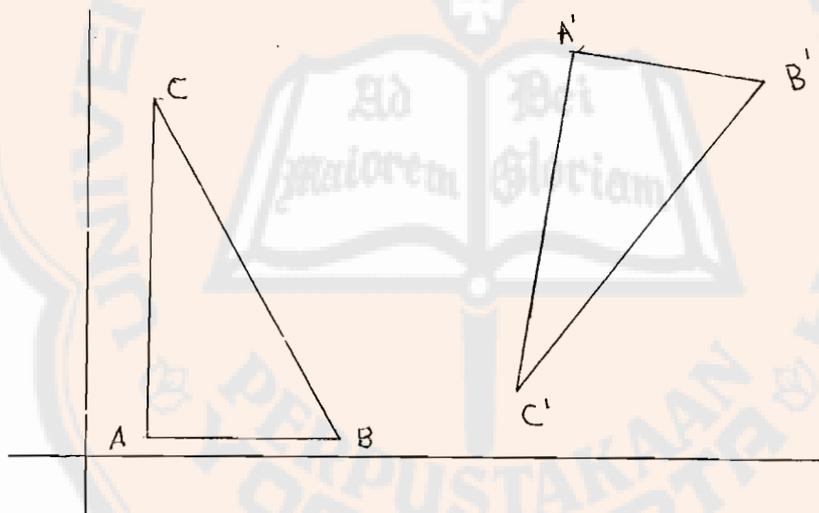
Definisi 3.2.2 : Suatu transformasi γ merupakan involusi bila $\gamma \neq I$ dan $\gamma^2 = I$. Ini berarti $\gamma = \gamma^{-1}$.

Definisi 3.2.3 : Suatu transformasi disebut kolineasi bila bayangan sebuah garis (lurus) oleh transformasi itu akan berupa garis lagi. Jadi jika g garis lurus, maka α adalah suatu kolineasi bila hanya bila $\alpha(g) = g'$, dengan g' garis lurus.

3.2.1. Isometri

Definisi 3.2.4 : Transformasi α merupakan suatu **isometri** bila untuk setiap pasang titik P dan Q dipenuhi $P'Q' = PQ$ dengan $P' = \alpha(P)$ dan $Q' = \alpha(Q)$.

Hasil kali (komposisi) dua isometri merupakan isometri lagi, jadi bila α_1 dan α_2 merupakan isometri maka $\alpha_1\alpha_2$ merupakan isometri lagi. Isometri mempunyai sifat mempertahankan keantaraan, ruas garis, sinar garis, sudut, besar sudut, ketegaklurusan, dan kesejajaran.



Gambar 3.3

Beberapa contoh isometri :

a. Translasi (geseran)

Definisi 3.2.5 : Suatu transformasi τ merupakan **translasi** bila terdapat ruas garis berarah \underline{AB} sedemikian sehingga untuk setiap titik P pada bidang dengan $\tau(P) = P'$ dipenuhi $\underline{PP'} = \underline{AB}$. Translasi ini ditulis $\tau_{\underline{AB}}$.

Hasil kali dua buah translasi adalah suatu translasi. Pada translasi (geseran) $\tau_{AB} \neq I$ tidak terdapat titik invarian sedangkan semua garis yang sejajar garis \overleftrightarrow{AB} adalah garis invarian.

b. Rotasi (putaran)

Definisi 3.2.6 : Rotasi terhadap titik C dengan sudut θ ialah transformasi $\rho_{c,\theta}$ yang memenuhi :

1. $\rho_{c,\theta}(C) = C$.
2. $\rho_{c,\theta}(A) = A'$, dengan $CA' = CA$ dan $m\angle ACA' = \theta$.

Satu-satunya titik invarian pada putaran $\rho_{c,\theta} \neq I$ adalah titik C . Juga terdapat kejadian khusus dari rotasi yaitu rotasi setengah putaran atau $\theta = 180^\circ$. Rotasi setengah putaran ini memiliki garis yang invarian

c. Refleksi (pencerminan)

Definisi 3.2.7 : Refleksi σ_s pada garis s adalah suatu transformasi yang memenuhi :

$$\sigma_s(P) = \begin{cases} P, & \text{jika } P \text{ pada } s \\ Q, & \text{jika } P \text{ diluar } s \text{ dengan } s \text{ adalah sumbu } \overline{PQ} \end{cases}$$

Hasil kali dua pencerminan dengan sumbu yang sama adalah identitas. Hasil kali dua pencerminan dengan sumbu saling tegak lurus adalah setengah

putaran . Hasil kali dua pencerminan dengan sumbu saling berpotongan merupakan rotasi dengan pusat titik potong kedua sumbu tersebut. Hasil kali dua pencerminan dengan sumbu saling sejajar merupakan geseran pada arah tegak lurus garis-garis tadi dengan jarak dua kali jarak kedua garis tersebut. Pada pencerminan, titik invarian adalah titik-titik pada sumbu, dan garis tetap adalah sumbu itu sendiri serta semua garis yang tegak lurus pada sumbu.

d. Refleksi Geser

Definisi 3.2.7 : Transformasi ν disebut **refleksi geser** bila terdapat garis s dan \overline{AB} dengan s sejajar \overleftrightarrow{AB} sehingga $\nu = \sigma_s \tau_{AB}$ dengan kata lain refleksi geser adalah geseran yang bukan I disusul oleh pencerminan terhadap sumbu yang sejajar dengan arah geseran.

Refleksi geser tidak mempunyai titik invarian, sedangkan satu-satunya garis invarian adalah sumbunya sendiri.

Translasi τ dan rotasi ρ dapat dinyatakan sebagai hasil kali dua refleksi.

Dengan demikian refleksi geser ν merupakan hasil kali translasi dan refleksi yang berarti hasil kali tiga refleksi. Jadi semua isometri yang telah dibahas di atas dapat dinyatakan sebagai hasil kali beberapa refleksi. Isometri yang tidak mengubah arah sudut disebut **isometri searah** dan yang termasuk di dalamnya adalah translasi, rotasi dan hasil kali keduanya, sedangkan isometri yang

mengubah arah sudut disebut **isometri berlawanan arah** dan yang termasuk di dalamnya adalah refleksi dan juga refleksi geser.

Rumus-rumus Isometri

Sekarang setelah konsep-konsep transformasi khususnya isometri dibahas, perlu pula jika rumus-rumus dari transformasi-transformasi di atas ditampilkan.

a. Persamaan Translasi

Andaikan diketahui vektor posisi $\underline{AB} = \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$. Andaikan $P(x,y)$ sebarang titik

pada bidang, $\tau_{AB}(P) = P'(x',y')$ dengan $PP' = AB$,

maka rumus translasi yaitu $\begin{cases} x' = x + m \\ y' = y + n \end{cases}$

b. Persamaan Rotasi

Jika $P(x,y)$ dan $P'(x',y')$ maka rumus rotasi dengan titik pusat $O(0,0)$ dan sudut

rotasi α yaitu $\begin{cases} x' = x \cos \alpha - y \sin \alpha \\ y' = x \sin \alpha + y \cos \alpha \end{cases}$

Jika pusat rotasi $O'(h,k)$ sebarang titik dan α sudut rotasi, $P'(x',y')$ bayangan

$P(x,y)$, maka rumus rotasinya yaitu $\begin{cases} x'-h = (x-h) \cos \alpha - (y-k) \sin \alpha \\ y'-k = (x-h) \sin \alpha + (y-k) \cos \alpha \end{cases}$

c. Persamaan Refleksi

Andaikan persamaan sumbu s adalah $s : px + gy + r = 0$, $P(x,y)$, P di luar s

dan $\sigma_M(P) = Q(x',y')$ maka rumus refleksinya yaitu

$$\begin{cases} x' = x - \frac{2p(px + qy + r)}{p^2 + q^2} \\ y' = y - \frac{2q(px + qy + r)}{p^2 + q^2} \end{cases} \dots\dots\dots 1)$$

Jika s dinyatakan dengan bentuk persamaan normal yaitu $s : x \cos \theta + y \sin \theta - n = 0$, maka diperoleh bentuk lain persamaan refleksi

yaitu $\begin{cases} x' = -x \cos 2\theta - y \sin 2\theta + 2n \cos \theta \\ y' = -x \sin 2\theta + y \cos 2\theta + 2n \sin \theta \end{cases}$

Rumus refleksi 1) di atas dapat pula diubah bentuknya menjadi

$$\begin{cases} x' = ax - by + m \\ y' = -bx - ay + n \end{cases}, \text{ dengan } a^2 + b^2 = 1 \text{ dan } am + bn + m = 0$$

d. Persamaan Refleksi Geser

Persamaan transformasi untuk refleksi geser adalah

$$\begin{cases} x' = ax - by + m \\ y' = -bx - ay + n \end{cases}, \text{ dengan } a^2 + b^2 = 1 \text{ dan } am + bn + m \neq 0$$

Dari pembahasan mengenai rumus-rumus isometri di atas maka dapat ditarik kesimpulan bahwa semua isometri mempunyai bentuk persamaan sebagai berikut

$$\begin{cases} x' = ax + by + m \\ y' = \pm(-bx + ay) + n \end{cases}, \text{ dengan } a^2 + b^2 = 1.$$

Catatan : tanda + untuk isometri searah, tanda - untuk isometri berlawanan arah.

Dilatasi Sentral

Definisi 3.2.8 : Untuk suatu titik P dan bilangan positif k, transformasi $\delta_{p,k}$ disebut **dilatasi sentral** terhadap P dengan faktor k bila :

1. $\delta_{p,k}(P) = P$.
2. Untuk $Q \neq P$, $\delta_{p,k}(Q) = Q'$ dengan $PQ' = k.PQ$

Bilangan k disebut faktor dilatasi sentral, dan P disebut pusat dilatasi sentral.

Dilatasi sentral dengan pusat titik O mempunyai rumus $\begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \end{cases}, k > 0$

III.2.2. Similaritas

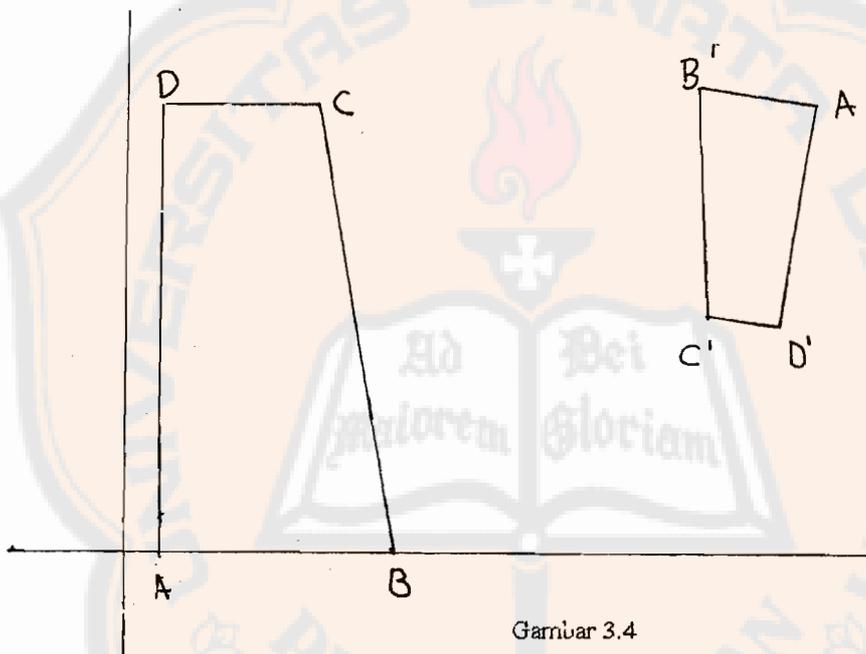
Definisi 3.2.9 : Transformasi $\alpha : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ merupakan suatu **similaritas** bila hanya bila terdapat bilangan positif k ($k > 0$) sehingga untuk setiap pasangan titik P dan Q di dalam \mathbb{R}^2 dipenuhi :

$$P'Q' = k PQ \text{ dengan } P' = \alpha (P) \text{ dan } Q' = \alpha (Q)$$

k disebut **faktor similaritas**.

Untuk kejadian khusus $k = 1$, similaritas tersebut akan berupa isometri.

Similaritas juga merupakan suatu kolineasi.



Gambar 3.4

Hasil kali isometri dan dilatasi sentral dengan urutan sebarang adalah suatu similaritas.

Rumus Similaritas

Di atas telah dikatakan bahwa hasil kali isometri dengan dilatasi sentral dengan urutan sebarang adalah suatu similaritas, maka dari pengertian tersebut kita mendapatkan rumus persamaan untuk similaritas.

Rumus isometri $\begin{cases} x' = ax + by + m \\ y' = \pm(-bx + ay) + n \end{cases}$, dengan $a^2 + b^2 = 1$,

rumus dilatasi sentral dengan pusat titik O $\begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \end{cases}$, $k > 0$, maka hasil kalinya

didapat $\begin{cases} x' = k(ax + by + m) \\ y' = k(\pm(-bx + ay) + n) \end{cases}$, $a^2 + b^2 = 1$ dan $k > 0$, k merupakan faktor

similaritas, rumus ini sudah mewakili pula untuk dilatasi sentral dengan pusat sebarang.

Sekarang misalkan $ka = A$, $kb = B$, $km = M$, $kn = N$, maka setiap similaritas

mempunyai persamaan sebagai berikut: $\begin{cases} x' = Ax + By + M \\ y' = \pm(-Bx + Ay) + N \end{cases}$

dengan $A^2 + B^2 = k^2$ dan k faktor similaritas

3.2.3. Afinitas

Sebelum memasuki pembahasan transformasi afin, terlebih dulu akan dibahas konsep-konsep yang mendahului selain yang telah dibahas dalam bagian sebelumnya.

Definisi 3.2.10 : Dipilih sebarang garis s dalam bidang dan sebuah arah yang ditunjukkan oleh sudut α , yang diapitnya dengan s . Dipilih pula suatu bilangan real $\mu \neq 0$. Didefinisikan suatu pemetaan dengan hukum korespondensi sebagai berikut :

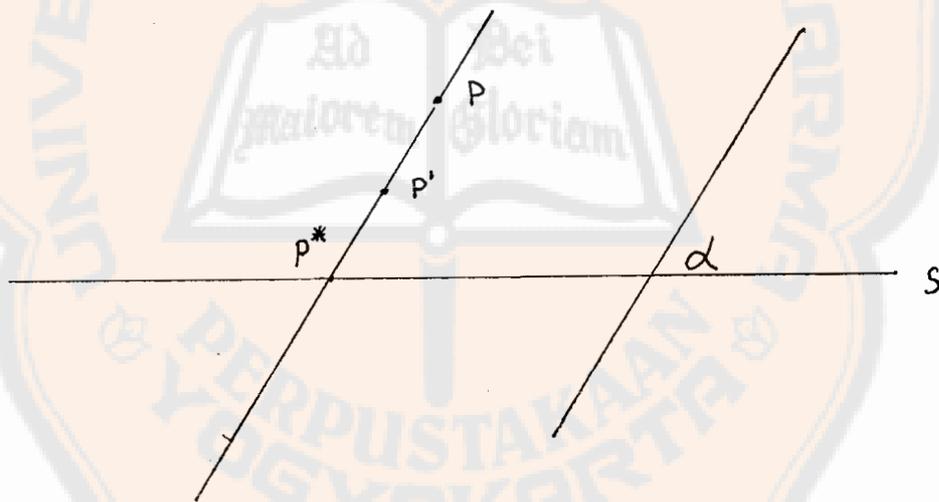
a. Garis-garis yang menghubungkan pasangan dua titik P dan P' yang berkorespondensi, sejajar dengan arah yang diketahui.

b. Untuk setiap pasangan titik P dan P' diperoleh :

$$\frac{P'P^*}{PP^*} = \mu, \text{ dengan } P^* \text{ titik potong } \overleftrightarrow{PP'}$$

c. Untuk titik P pada s maka $P = P' = P^*$

Transformasi ini disebut **afinitas perspektif**, s sebagai sumbu afinitas, μ faktor skala, dan α sudut afinitas. Transformasi ini dilambangkan : $\phi(s, \alpha, \mu)$.



Gambar 3.5

Definisi 3.2.11: Pelingsiran (*shear*) adalah afinitas perspektif yang tidak sebenarnya, dengan $\alpha = 0$ dan $\mu = 1$.

Definisi 3.2.12 : Setiap hasil kali beberapa afinitas perspektif yang berhingga menyusun transformasi afin atau disebut juga **afinitas**.

Rumus Afinitas

Rumus afinitas perspektif $\phi(s, \alpha, \mu)$ yaitu :

$$\phi : \begin{cases} x' = x + (\mu - 1)y \cot \alpha \\ y' = \mu y \end{cases}$$

Pelingsiran belum dapat dinyatakan dengan rumus ini, sebab $\mu = 1$ dan $\alpha = 0^\circ$ jadi letak $A'(x', y')$ belum dapat ditentukan karena $\cot \alpha$ tidak terdefiniskan.

Rumus afinitas perspektif yang dapat juga untuk pelingsiran adalah

$$\phi : \begin{cases} x' = x - (\mu y) \operatorname{tg} \beta \\ y' = \mu y \end{cases}$$

Rumus afinitas dapat diperoleh dari hasil kali beberapa afinitas perspektif.

Rumus afinitas yang didapat adalah

$$\phi : \begin{cases} x' = x - \mu y \operatorname{tg} \beta \\ y' = \mu y \end{cases}$$

Definisi 3.2.13 : Jika untuk sebarang bilangan $k \neq 0$, transformasi α dan β

dengan rumus $\alpha : \begin{cases} x' = x \\ y' = ky \end{cases}$ dan $\beta : \begin{cases} x' = kx \\ y' = y \end{cases}$, maka α disebut peregangan

dengan rasio k terhadap sumbu- x dan β disebut peregangan dengan rasio k terhadap sumbu- y .

Pelingsiran terhadap sumbu-x mempunyai rumus $\begin{cases} x' = x + ky \\ y' = y \end{cases}$, pada pelingsiran

ini sumbu-x dipertahankan, titik demi titik dikawankan dengan titik-titik pada sumbu-x.

Rumus afinitas dapat juga didapat dari hasil kali pelingsiran, peregangan, dan similaritas.

Rumus afinitas tersebut adalah : $\begin{cases} x' = ax + by + m \\ y' = cx + dy + n \end{cases}$, dengan $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$,

merupakan hasil kali similaritas : $\begin{cases} x' = ax - cy + m \\ y' = cx + ay + n \end{cases}$, dengan $a^2 + c^2 \neq 0$, diikuti

peregangan dengan rumus $\begin{cases} x' = x \\ y' = \frac{ad - bc}{a^2 + c^2} y \end{cases}$, dilanjutkan dengan pelingsiran yang

mempunyai rumus $\begin{cases} x' = x + \frac{ab + cd}{a^2 + c^2} y \\ y' = y \end{cases}$

Rumus afinitas dalam \mathbb{R}^2 dapat ditulis secara lain yaitu sebagai berikut

$\omega(x,y) = (ax + by + e, cx + dy + f)$, dengan $a,b,c,d,e,f \in \mathbb{R}$

3.2.4 Pemetaan Pada Bidang Kompleks

Bagian ini merupakan alat dalam membahas fraktal yang terbentuk dari iterasi pada bidang kompleks.

Bilangan Kompleks dan Fungsi Kompleks

Dalam sistem bilangan kompleks didefinisikan nilai mutlak atau modulus suatu bilangan kompleks sebagai berikut : untuk $z = a + bi$, $|z| = a + bi = \sqrt{a^2 + b^2}$, sering dilambangkan sebagai r , $r = \sqrt{a^2 + b^2}$. Jarak antara dua bilangan kompleks didefinisikan sebagai :

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}, \text{ dengan } \begin{matrix} z_1 = x_1 + y_1 i \\ z_2 = x_2 + y_2 i \end{matrix}$$

yang bersesuaian dengan jarak antara dua titik pada bidang Euclides, antara titik (x_1, y_1) dengan (x_2, y_2) . Cara lain menulis bilangan kompleks yaitu :

$$\text{jika } x = r \cos \theta \text{ dan } y = r \sin \theta, \text{ dengan } r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

maka $z = x + yi = (r \cos \theta) + i(r \sin \theta)$, $\theta = \arg z$. Jika dihubungkan dengan fungsi elementer kita mendapatkan $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$. Atau secara umum untuk $z = x + yi$ didapatkan hasil :

$$e^z = e^{x+yi} = e^x e^{yi} = e^x (\cos y + i \sin y).$$

Definisi 3.2.14 : Jika diberikan sembarang 2 himpunan bilangan kompleks yang tidak kosong A dan B. Maka fungsi f dari himpunan A ke himpunan B didefinisikan sebagai suatu aturan yang mengawankan secara tunggal setiap elemen z dalam himpunan A dengan tepat satu elemen w di dalam himpunan B. Elemen $w \in B$ yang berkawankan elemen $z \in A$ dinyatakan dengan $w = f(z)$, sehingga sering ditulis $w = f(z)$, $z \in A$.

Elemen w disebut dengan nilai fungsi f di z atau bayangan z oleh fungsi f . Himpunan A disebut daerah asal yang merupakan domain sedangkan semua nilai fungsi f dinamakan daerah hasil (range) fungsi f . Fungsi f ini sering juga disebut pemetaan.

Menurut definisi di atas, fungsi selalu dimaksudkan mempunyai nilai tunggal, tapi dalam teori fungsi kompleks dikenal juga fungsi bernilai banyak. Fungsi bernilai banyak ini memiliki cabang-cabang yang masing-masing bernilai tunggal. Akibatnya jika ditemui suatu fungsi bernilai banyak kita hanya bekerja pada cabangnya saja. Oleh sebab itu definisi fungsi di atas tetap digunakan.

Definisi 3.2.15 : Diberikan fungsi f yang didefinisikan pada suatu domain D . Fungsi f dikatakan **analitik** di titik $z_0 \in D$ jika terdapat $h > 0$ sedemikian hingga $f'(z)$ ada di setiap titik z yang ada dalam kitar $N(z_0, h)$, dengan $N(z_0, h) = \{z \in D \mid |z - z_0| < h\}$

Definisi 3.2.16 : Cabang F suatu fungsi bernilai banyak f adalah fungsi bernilai tunggal yang analitik dalam suatu domain D dan di setiap titik di dalam domain D , $F(z)$ adalah salah satu dari nilai $f(z)$.

Fungsi f dikatakan analitik pada domain D jika fungsi f analitik di setiap titik di dalam D . Jika f terdiferensial pada suatu titik maka f analitik pada titik tersebut.

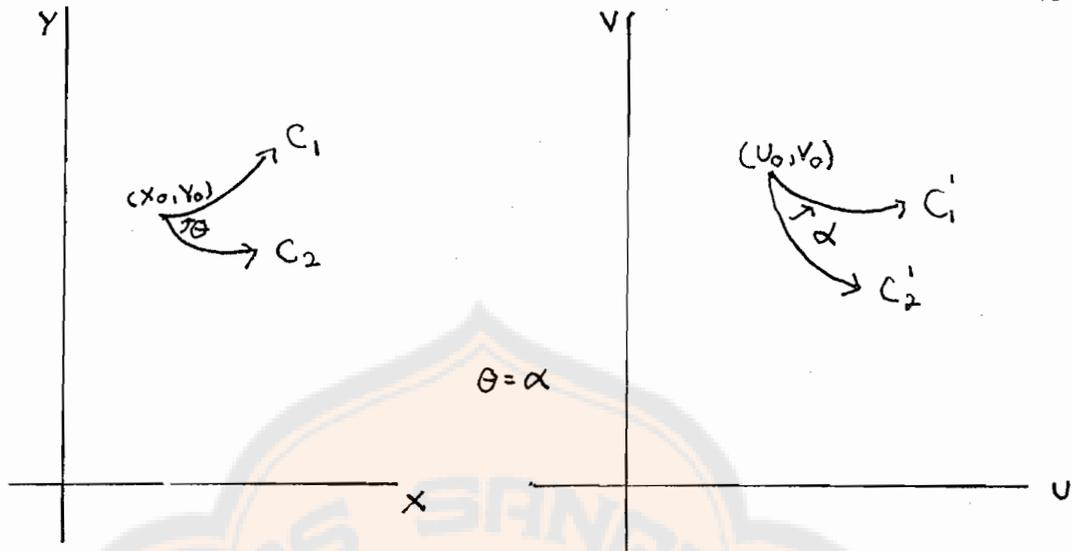
Definisi 3.2.17 : f^{-1} dinamakan **fungsi invers** yang berkaitan dengan f jika untuk $w = f(z)$ maka $z = f^{-1}(w)$

Pemetaan Konformal

Jika $w = u + iv$ (u, v real) adalah suatu fungsi bernilai tunggal dari $z = x + iy$, maka $u + iv = f(x + iy)$ dengan u dan v merupakan fungsi dari x dan y inilah yang disebut pemetaan pada bidang kompleks.

Jadi untuk suatu titik (x,y) yang diberikan pada bidang z terdapat kaitan dengan suatu titik pada bidang w . Demikian juga untuk suatu kurva di bidang z akan dipetakan titik demi titik ke bidang w sehingga menghasilkan suatu kurva dalam bidang w .

Definisi 3.2.18 : Jika diketahui di bawah pemetaan pada bidang kompleks, titik (x_0,y_0) , di bidang z , dipetakan ke dalam titik (u_0,v_0) di bidang w (lihat gambar 3.6), sedangkan kurva C_1 dan C_2 (berpotongan di (x_0,y_0)) dipetakan berturut-turut titik demi titik ke dalam kurva C'_1 dan C'_2 (berpotongan di (u_0,v_0)). Kemudian jika pemetaan tersebut bersifat bahwa sudut di (x_0,y_0) antara C_1 dan C_2 sama dengan sudut di (u_0,v_0) antara C'_1 dan C'_2 dalam besar dan arahnya, maka pemetaan tersebut disebut **pemetaan konformal** di (x_0,y_0) .



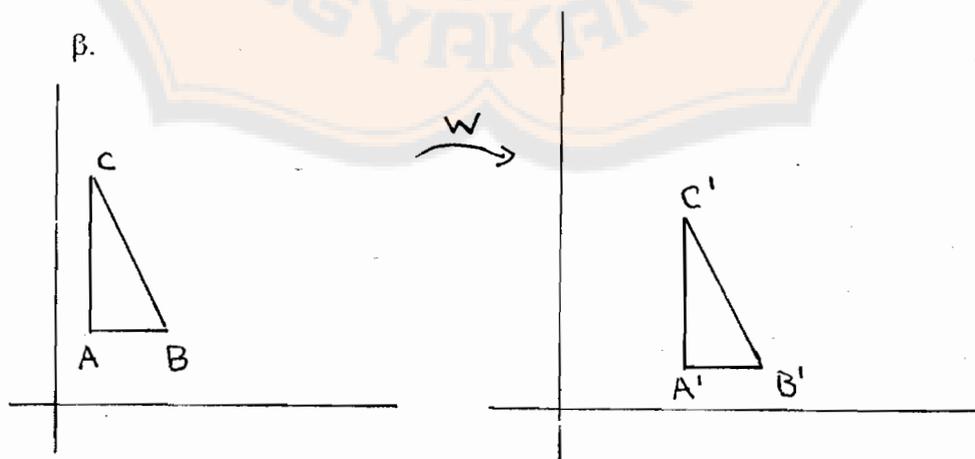
Gambar 3.6

Pemetaan yang didefinisikan oleh fungsi analitik $f(z)$ bersifat konformal kecuali di titik kritis yang menyebabkan $f'(z) = 0$. Satu-satunya pemetaan konformal dari suatu domain di bidang z ke dalam domain di bidang w adalah berbentuk $w = f(z)$ dengan f suatu fungsi analitik.

Beberapa Pemetaan Khusus pada Bidang Kompleks

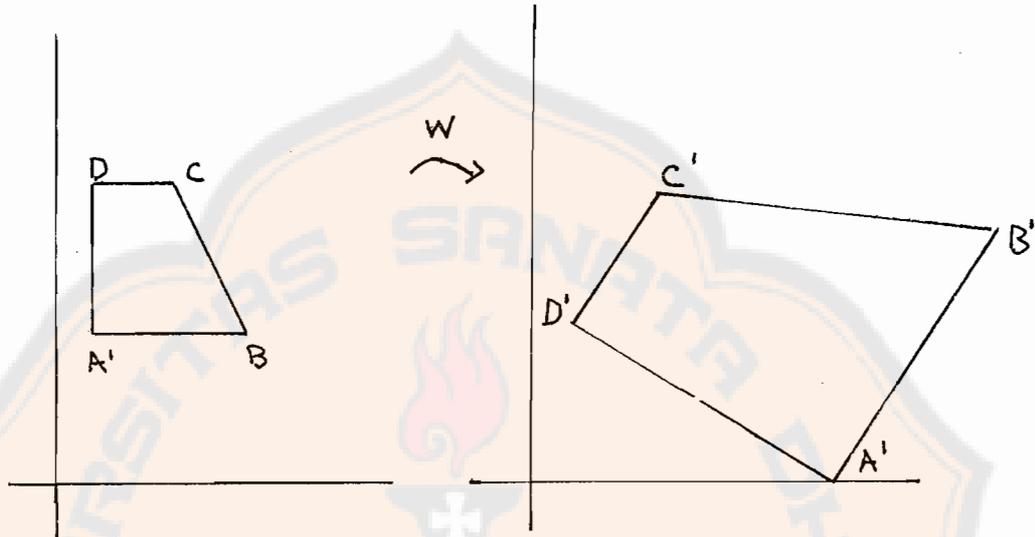
Di dalam pemetaan pada bidang kompleks terdapat pemetaan khusus seperti di bawah ini:

1. $w = z + \beta$, β konstanta kompleks, yang merupakan translasi terhadap vektor



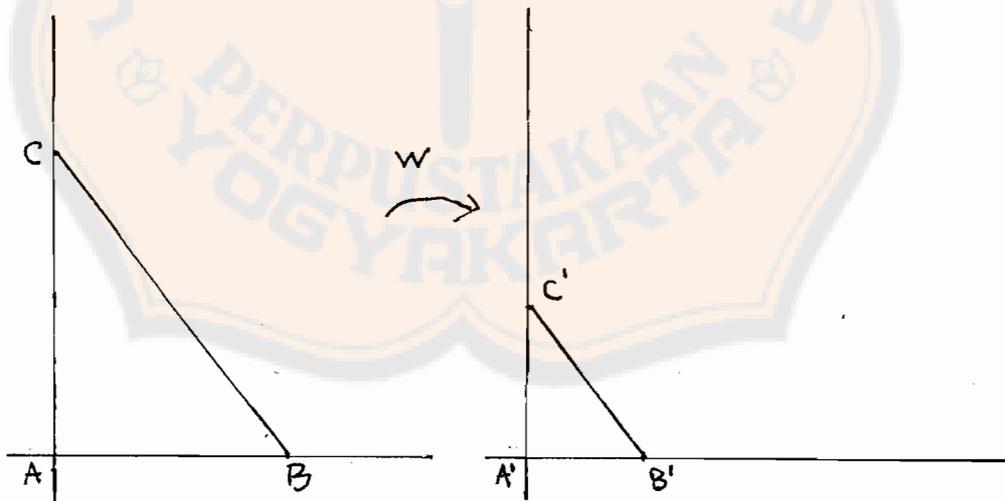
Gambar 3.7

2. $w = \delta z$, δ konstanta kompleks, yang merupakan rotasi dengan sudut rotasi sebesar $\arg \delta$ dan regangan dengan faktor regangan sebesar $|\delta|$.



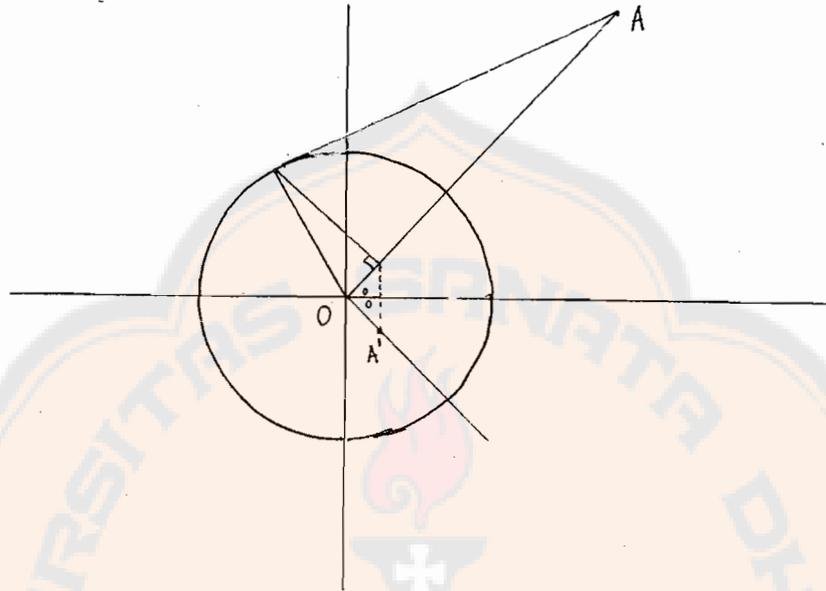
Gambar 3.8

3. $w = az$, a konstanta real dengan $a > 0$, yang merupakan dilatasi dengan faktor dilatasi sebesar a .



Gambar 3.9

4. $w = 1/z$, yang merupakan inversi terhadap lingkaran satuan dan konjugat.



Gambar 3.10

Pemetaan pada bidang kompleks ada yang bersifat afin ada yang tidak.

Selain pemetaan di atas itu terdapat juga pemetaan lain yaitu.

Definisi 3.2.19 : Pemetaan yang berbentuk

$$w = w(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc \neq 0, \quad a, b, c \text{ dan } d \text{ konstanta}$$

kompleks disebut transformasi pecahan linear.

Teorema 3.2.1 : Transformasi yang didefinisikan sebagai $w = w(z) = \frac{az + b}{cz + d}$,

$ad - bc \neq 0$, a, b, c dan d konstanta kompleks, dapat dipandang sebagai kombinasi

dari translasi, rotasi, regangan, dan inversi.

bukti :

$$w = w(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc \neq 0$$

Diandaikan $c = 0$,

$$\text{maka } w(z) = \left(\frac{a}{d}\right)z + \left(\frac{b}{d}\right), \text{ jadi bila } w_1(z) = \left(\frac{a}{d}\right)z \text{ dan } w_2(z) = \left(\frac{a}{d}\right)z + \left(\frac{b}{d}\right),$$

akan diperoleh $w(z) = w_2 \circ w_1$.

Sedangkan untuk $c \neq 0$, bila

$$w_1(z) = z + \frac{d}{c}, \quad w_2(z) = \frac{1}{z}, \quad w_3(z) = \frac{bc - ad}{c^2}, \quad w_4(z) = z + \frac{a}{c}$$

maka diperoleh $w(z) = w_1 \circ w_2 \circ w_3 \circ w_4$. ■



3.2.5. Pemetaan Kontraksi

Pemetaan Kontraksi pada Ruang Metrik

Pada bagian ini akan dibahas pemetaan pada ruang metrik (X, d) yang nantinya akan mendasari pemetaan kontraksi pada ruang fraktal. Pemetaan ini diperlukan sebagai fungsi untuk membangun fraktal.

Definisi 3.2.20 : Misalkan $f : X \rightarrow X$ merupakan pemetaan pada ruang metrik.

$f^n(\underline{x})$ didefinisikan sebagai :

$$f^0(\underline{x}) = \underline{x}$$

$$f^1(\underline{x}) = f(\underline{x})$$

$$\dots\dots\dots$$

$$f^{(n)}(\underline{x}) = f \circ f^{(n-1)}(\underline{x})$$

Definisi 3.2.21 : Misalkan $f : X \rightarrow X$ merupakan pemetaan pada ruang metrik.

Titik $\underline{x}_f \in X$ yang memenuhi $f(\underline{x}_f) = \underline{x}_f$ disebut **titik tetap** terhadap f .

Definisi 3.2.22 : Pemetaan $f : X \rightarrow X$ pada ruang metrik (X, d) disebut **pemetaan kontraksi** (*contraction mapping*), jika terdapat konstanta $0 \leq s < 1$ sedemikian sehingga :

$$d(f(\underline{x}), f(\underline{y})) \leq s d(\underline{x}, \underline{y})$$

Selanjutnya s disebut dengan **faktor kontraksi** untuk f .

Teorema 3.2.2 : Misalkan $f: X \rightarrow X$ merupakan pemetaan kontraksi pada ruang metrik lengkap (X, d) , maka f mempunyai titik tetap tunggal $\underline{x}_f \in X$ dan untuk setiap $\underline{x} \in X$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(\underline{x}) = \underline{x}_f$$

Bukti : Diberikan sebarang $\underline{x} \in X$ dan $0 \leq s < 1$ yang merupakan faktor kontraksi untuk f maka $d(f^n(\underline{x}), f^m(\underline{x})) \leq s^{\min(m, n)} d(\underline{x}, f^{|\ln-m|}(\underline{x}))$

untuk $n, m = 0, 1, 2, \dots$

Untuk $k = 0, 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} d(\underline{x}, f^k(\underline{x})) &\leq d(\underline{x}, f(\underline{x})) + d(f(\underline{x}), f^2(\underline{x})) + \dots + \\ &\quad d(f^{(k-1)}(\underline{x}), f^k(\underline{x})) \\ &\leq (1 + s + s^2 + \dots + s^{(k-1)}) d(\underline{x}, f(\underline{x})) \\ &\leq (1-s)^{-1} d(\underline{x}, f(\underline{x})) \end{aligned}$$

$$d(f^n(\underline{x}), f^m(\underline{x})) \leq s^{\min(m, n)} d(\underline{x}, f(\underline{x}))$$

Dengan demikian $\{f^n(\underline{x})\}$ merupakan barisan Cauchy.

Karena (X, d) merupakan ruang metrik lengkap maka barisan ini mempunyai sebuah limit $\underline{x}_f \in X$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(\underline{x}) = \underline{x}_f$$

Akan diperlihatkan bahwa \underline{x}_f adalah titik tetap

$$f(\underline{x}_f) = f[\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(\underline{x})]$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} f^{(n+1)}(\underline{x})$$

$$= \underline{x}_f$$

$$f(\underline{x}_f) = \underline{x}_f$$

Jadi terbukti bahwa \underline{x}_f adalah titik tetap terhadap f pada ruang metrik lengkap (X, d) . Sekarang dibuktikan ketunggalan titik tetap tersebut.

Andaikan \underline{z}_f dan \underline{y}_f adalah dua titik tetap

$$d(f(\underline{z}_f), f(\underline{y}_f)) \leq s d(\underline{z}_f, \underline{y}_f) \dots\dots\dots (1)$$

karena $f(\underline{x}_f) = \underline{x}_f$ maka

$$d(f(\underline{z}_f), f(\underline{y}_f)) = d(\underline{z}_f, \underline{y}_f) \dots\dots\dots (2)$$

Dari (1) dan (2) diperoleh

$$d(\underline{z}_f, \underline{y}_f) \leq s d(\underline{z}_f, \underline{y}_f)$$

$$d(\underline{z}_f, \underline{y}_f) - s d(\underline{z}_f, \underline{y}_f) \leq 0$$

$$(1 - s) d(\underline{z}_f, \underline{y}_f) \leq 0$$

Padahal $0 \leq s < 1$, berarti $d(\underline{z}_f, \underline{y}_f) = 0$, atau $\underline{z}_f = \underline{y}_f$. ■

Lema 3.2.1 : Andaikan $w : X \rightarrow X$ adalah pemetaan kontraksi pada ruang metrik (X, d) , maka w kontinu.

bukti : Diberikan $\varepsilon > 0$, andaikan $s > 0$ adalah faktor kontraksi untuk w .

dengan mengambil $\delta = \varepsilon / s$, maka karena $d(x, y) < \delta$, x dan $y \in X$ akibatnya

$d(w(x), w(y)) \leq s d(x, y) < \varepsilon$. Jadi w kontinu. ■

Pemetaan Kontraksi pada Ruang Fraktal

Setelah pembahasan pemetaan kontraksi pada ruang metrik maka selanjutnya secara khusus dibahas pemetaan kontraksi pada ruang fraktal $H(X)$ dengan metrik h .

Lema 3.2.2 : Jika diketahui $w : X \rightarrow X$ adalah pemetaan kontraksi pada ruang metrik (X, d) maka w memetakan $H(X)$ ke dirinya sendiri.

bukti : Jika diberikan S subset tak kosong dari X yang kompak, maka $w(S) = \{w(x) : x \in S\}$ bukan himpunan kosong. Selanjutnya diperlihatkan bahwa $w(S)$ kompak.

Andaikan $\{Y_n = w(X_n)\}$ adalah barisan tak hingga dari titik-titik di dalam S , karena S kompak maka terdapat subbarisan $\{X_{N_n}\}$ yang konvergen ke titik $x' \in S$.

Karena w kontinu maka $\{Y_{N_n} = w(X_{N_n})\}$ adalah subbarisan dari $\{Y_n\}$, yang

konvergen ke $y' \in w(S)$, jadi $w(S)$ kompak. Ini berarti $w(S)$ anggota $H(X)$.

Jadi w memetakan $H(X)$ ke $H(X)$. ■

Definisi 3.2.23 : Pemetaan $w : H(X) \rightarrow H(X)$ didefinisikan sebagai

$$w(B) = \{w(x) : x \in B\}, \text{ untuk setiap } B \text{ anggota } H(X)$$

Lema 3.2.3 : Jika diketahui $w : X \rightarrow X$ adalah pemetaan kontraksi pada ruang metrik (X, d) dengan faktor kontraksi s , maka w merupakan pemetaan kontraksi pada $(H(X), h)$ dengan faktor kontraksi s .

bukti : Dari lema 3.2.1 diketahui bahwa w kontinu, dan dari lema 3.2.2 diketahui w memetakan $H(X)$ ke dirinya sendiri.

Diambil sebarang $B, C \in H(X)$ maka

$$\begin{aligned} d(w(B), w(C)) &= \max\{\min\{d(w(x), w(y)) : y \in C\} : x \in B\} \\ &\leq \max\{\min\{s d(x, y) : y \in C\} : x \in B\} = s d(B, C). \end{aligned}$$

Demikian pula untuk $d(w(C), w(B))$ dengan cara yang sama didapat

$$d(w(C), w(B)) \leq s d(C, B).$$

$$\text{Akibatnya } h(w(B), w(C)) = d(w(B), w(C)) \vee d(w(C), w(B))$$

$$\leq s d(B, C) \vee s d(C, B) \leq s h(B, C) \quad \blacksquare$$

Lema 3.2.4 : Untuk setiap B, C, D , dan E di dalam $H(X)$, berlaku sifat berikut ini yaitu :

$$h(B \cup C, D \cup E) \leq h(B, D) \vee h(C, E)$$

bukti :

$$\begin{aligned} d(B \cup C, D) &= \sup\{d(x, D) : x \in B \cup C\} = \sup\{d(x, D) : x \in B \vee x \in C\} \\ &= \max\{\sup\{d(x, D) : x \in B\}, \sup\{d(x, D) : x \in C\}\} \\ &= \max\{d(B, D), d(C, D)\} \end{aligned}$$

Maka $d(B \cup C, D) = d(B, D) \vee d(C, D) \leq h(B, D) \vee h(C, D)$.

Jika $d(B \cup C, D) \geq d(D, B \cup C)$ maka

$$d(B \cup C, D) = h(B \cup C, D) \leq h(B, D) \vee h(C, D).$$

Karena $h(B \cup C, D) = h(D, B \cup C)$, maka $h(D, B \cup C) \leq h(B, D) \vee h(C, D)$.

$$\begin{aligned} h(B \cup C, D \cup E) &\leq h(B, D \cup E) \vee h(C, D \cup E) \\ &\leq h(B, D) \vee h(B, E) \vee h(C, D) \vee h(C, E) \end{aligned}$$

Jadi $h(B \cup C, D \cup E) \leq h(B, D) \vee h(C, D)$. sebab jika tidak seperti ini maka

$$h(B \cup C, D \cup E) > h(B, D) \vee h(C, D). \text{ yang berarti}$$

$$h(B \cup C, D \cup E) > h(B, D) \vee h(B, E) \vee h(C, D) \vee h(C, E)$$

Terdapat kontradiksi.

Jadi $h(B \cup C, D \cup E) \leq h(B, D) \vee h(C, E)$ ■

Definisi 3.2.24 : Didefinisikan $W : H(X) \rightarrow H(X)$ sebagai

$$\begin{aligned} W(B) &= w_1(B) \cup w_2(B) \cup \dots \cup w_N(B) \\ &= \bigcup_{n=1}^N w_n(B), \text{ untuk setiap } B \in H(X), \end{aligned}$$

Lema 3.2.5 : Jika diberikan ruang metrik (X, d) , dan diketahui $\{w_n : n = 1, 2, \dots, N\}$ adalah pemetaan kontraksi pada $(H(X), h)$, dengan faktor kontraksi untuk w_n adalah s_n , maka W adalah pemetaan kontraksi dengan faktor kontraksi

$$s = \max\{s_n : n = 1, 2, \dots, N\}$$

bukti : bukti dengan induksi

untuk $n = 1$

maka
$$h(W(B), W(C)) = h(w_1(B), w_1(C)) \leq s h(B, C)$$

untuk $n = 1$, memenuhi.

Sekarang diandaikan benar untuk $n = k$,

jadi
$$\begin{aligned} &h(W(B), W(C)) = \\ &h(w_1(B) \cup w_2(B) \cup \dots \cup w_k(B), w_1(C) \cup w_2(C) \cup \dots \cup w_k(C)) \\ &\leq s' h(B, C) \end{aligned}$$

$$s' = \max\{s_n ; n = 1, 2, \dots, k\}$$

Dibuktikan benar untuk $n = k + 1$

$$h(W(B), W(C)) = h(w_1(B) \cup \dots \cup w_{k+1}(B), w_1(C) \cup \dots \cup w_{k+1}(C))$$

$$\leq s' h(B,C) \vee s_{k+1} h(B,C) \leq s h(B,C) \quad \blacksquare$$

Akibat 3.2.1 : Jika f suatu pemetaan kontraksi pada ruang fraktal $(H(X),h)$ maka terdapat suatu elemen $A \in H(X)$ yang memenuhi $f(A) = A$, dan untuk sembarang $E \in H(X)$ berlaku

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(E) = A$$

Bukti : $(H(X),h)$ ruang metrik lengkap.

Karena $(H(X),h)$ ruang metrik lengkap maka terdapat $A \in H(X)$ yang memenuhi $f(A) = A$, sedemikian sehingga untuk sembarang $E \in H(X)$ berlaku

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(E) = A \quad (\text{Teorema 3.2.2}) \quad \blacksquare$$

3.3. Sistem Fungsi Iterasi

Pada pembahasan bagian terdahulu sudah dikenalkan tentang pemetaan kontraksi baik yang ada pada ruang metrik lengkap (X,d) maupun yang ada dalam ruang fraktal $(H(X),h)$. Pada bagian ini akan dibahas Sistem Fungsi Iterasi yang merupakan kelanjutan dari bagian pemetaan kontraksi tersebut. Bagian inilah yang nantinya digunakan untuk membentuk fraktal.

Definisi 3.3.1 : Sistem Fungsi Iterasi adalah sistem yang terdiri atas sebuah ruang metrik yang lengkap (X,d) dengan himpunan berhingga pemetaan kontraksi

$$w_n : X \rightarrow X, \text{ dengan faktor kontraksi } s_n, n = 1, 2, \dots, N.$$

Atau : Sistem Fungsi Iterasi adalah himpunan berhingga pemetaan kontraksi yang bekerja pada ruang metrik yang lengkap.

Sistem Fungsi Iterasi disingkat SFI, dinotasikan sebagai

$$\{X; w_n, n = 1, 2, \dots, N\}.$$

Faktor kontraksi dari SFI ini adalah $s = \max\{s_n : n = 1, 2, \dots, N\}$.

Definisi 3.3.2 : Jika diberikan ruang metrik (X,d) dan $C \in H(X)$. Didefinisikan sebuah pemetaan $w_0 : H(X) \rightarrow H(X)$ dengan $w_0(B) = C$ untuk setiap $B \in H(X)$.

w_0 disebut **pemetaan kondensasi** (*condensation transformation*) dan C disebut **himpunan kondensasi** (*condensation set*) dari kelompok.

Pemetaan kondensasi ini juga merupakan pemetaan kontraksi yang mempunyai faktor kontraksi sama dengan 0 sehingga menyebabkan $w_0(B) = C$ untuk setiap $B \in H(X)$.

Definisi 3.3.3 : Jika diberikan $\{X, w_1, w_2, \dots, w_N\}$ yang merupakan SFI dengan faktor kontraksi $0 \leq s < 1$, dan $w_0 : H(X) \rightarrow H(X)$ yang merupakan pemetaan kondensasi, maka **SFI dengan kondensasi** yang mempunyai faktor kontraksi s didefinisikan sebagai $\{X, w_0, w_1, w_2, \dots, w_N\}$.

Definisi 3.3.4 : Pemetaan $W : H(X) \rightarrow H(X)$ didefinisikan sebagai

$$W(B) = \bigcup_{n=1}^N w_n(B), \text{ untuk setiap } B \in H(X),$$

Teorema 3.3.1 : Jika diketahui $\{X, w_1, w_2, \dots, w_N\}$ adalah SFI dengan faktor kontraksi s , maka W merupakan pemetaan kontraksi dengan faktor kontraksi s . Sehingga untuk setiap $B, C \in H(X)$ berlaku

$$h(W(B), W(C)) \leq s h(B, C).$$

Dan karena W merupakan pemetaan kontraksi maka terdapat titik tetap tunggal $A \in H(X)$

dengan sifat $A = W(A) = \bigcup_{n=1}^N w_n(A)$ dan $A = \lim_{n \rightarrow \infty} w^n(B)$ untuk setiap $B \in H(X)$

bukti : berdasarkan pada lema 3.2.4 dan akibat 3.2.1.

Titik tetap $A \in H(X)$ yang dimaksud dalam teorema 3.3.1 dinamakan **atraktor** dari SFI.

Teorema 3.3.2 : Jika diberikan ruang metrik lengkap (X, d) . Lalu diberikan $L \in H(X)$

dan $\varepsilon \geq 0$. Pilih SFI (atau SFI dengan penyingkat) $\{X; (w_0), w_1, w_2, \dots, w_N\}$ dengan faktor kontraksi $0 \leq s < 1$ semikian sehingga

$$h \left(L, \bigcup_{\substack{n=1 \\ (n=0)}}^N w_n(L) \right) \leq \varepsilon, \text{ dengan } h \text{ adalah metrik Hausdorff, diberikan juga } A \text{ yang}$$

merupakan atraktor dari SFI

$$\text{maka untuk setiap } L \text{ berlaku } h(L, A) \leq \frac{\varepsilon}{(1-s)}$$

Dengan kata lain

$$h(L, A) \leq (1-s)^{-1} h \left(L, \bigcup_{\substack{n=1 \\ (n=0)}}^N w_n(L) \right)$$

Untuk membuktikan teorema di atas, cukup dengan membuktikan pernyataan berikut ini.

Andaikan (X, d) adalah ruang metrik yang lengkap. Andaikan $f : X \rightarrow X$ adalah pemetaan kontraksi dengan faktor kontraksi $0 \leq s < 1$, dan andaikan $x_f \in X$ adalah titik tetap maka

$$d(x, x_f) \leq (1-s)^{-1} d(x, f(x)) \text{ untuk setiap } x \in X.$$

bukti : Fungsi jarak $d(a, b)$ untuk titik tetap $a \in X$ adalah kontinu di dalam X .

Akibatnya :

$$d(x, x_f) = d(x, \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x)) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x, f^n(x))$$

$$\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^n d(f^{(m-1)}(x), f^{(m)}(x))$$

$$\leq \lim_{n \rightarrow \infty} d(x, f(x))(1 + s + \dots + s^{(n-1)})$$

$$\leq (1-s)^{-1} d(x, f(x)) \quad \blacksquare$$

3.4. Konstruksi Geometri Fraktal

3.4.1. Konstruksi Geometri Fraktal Pada Bidang Real \mathbb{R}^2

Pada bagian ini akan dibahas mengenai penggunaan teori-teori yang telah dibahas sebelumnya untuk mengkonstruksi suatu bangun fraktal. Konstruksi fraktal yang disajikan dibatasi pada bidang.

Ruang metrik (\mathbb{R}^2, d) , dengan d metrik Euclides, merupakan ruang metrik yang lengkap. Setiap himpunan yang tertutup dan terbatas dalam \mathbb{R}^2 adalah himpunan yang kompak.

Untuk E yang tertutup dan terbatas dalam \mathbb{R}^2 , jika $S : E \rightarrow E$ merupakan similaritas yang memiliki faktor similaritas s , $0 < s < 1$, maka S tersebut merupakan pemetaan kontraksi dengan faktor kontraksi sebesar s . Sedangkan untuk afinitas $A : E \rightarrow E$ yang memiliki faktor pengganda s , $0 < s < 1$, juga merupakan pemetaan kontraksi dengan faktor kontraksi sebesar s . Faktor pengganda dalam afinitas ini diperoleh dari akar positif perbandingan luas bangun hasil transformasi dengan luas bangun yang ditransformasikan. Perbandingan tersebut dapat diperoleh nilainya dari harga mutlak determinan koefisien persamaan transformasi, yaitu :

$|ad - bc|$ untuk persamaan yang berbentuk

$$x' = ax + by + e$$

$$y' = cx + dy + f$$

Jadi luas bangun hasil transformasi sama dengan s^2 dikalikan luas bangun yang ditransformasikan.

Selanjutnya untuk membahas bagian ini, akan diperkenalkan algoritma SFI untuk menggambarkan fraktal. Algoritma yang dikenalkan ada dua yaitu **Algoritma Deterministik** dan **Algoritma Random Iterasi** meskipun dalam tulisan ini algoritma yang digunakan hanya yang deterministik.

1. Algoritma Deterministik :

- Tentukan $\{X; w_1, w_2, \dots, w_N\}$ sebagai SFI
- Pilih himpunan kompak $A_0 \subset \mathbb{R}^2$.
- Hitung berturut-turut $A_n = w^n(A)$ menurut $A_{n+1} = \bigcup_{j=1}^N w_j(A_n)$, $n = 1, 2, \dots$
- Konstruksikan barisan $\{A_n; n = 0, 1, 2, \dots\} \subset H(X)$

Berdasarkan teorema 3.3.1 maka barisan $\{A_n\}$ konvergen ke atraktor dari SFI dalam metrik Hausdorff.

2. Algoritma Random Iterasi

- Tentukan $\{X; w_1, w_2, \dots, w_N\}$ sebagai SFI

probabilitas $p_i > 0$ telah diberikan untuk w_i , dengan $\sum_{i=1}^N p_i = 1$

- Tentukan $x_0 \in X$ dan pilih secara acak w_i berdasarkan probabilitas yang diberikan untuk memperoleh x_n , $n = 1, 2, 3, \dots$

$$x_n = w_i(x_{n-1}), i = 1, 2, \dots, N \text{ dan } n = 1, 2, 3, \dots$$

dengan probabilitas untuk $x_n = w_i(x_{n-1})$ adalah p_i

Kerjakan proses di atas secara berulang-ulang.

- Konstruksikan barisan $\{x_n : n = 0, 1, 2, \dots\} \subset X$.

$$w_i(x) = w_i \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_i \\ f_i \end{bmatrix} = A_i x + t_i$$

$$p_j \approx \frac{|a_j d_j - b_j c_j|}{\sum_{i=1}^N |a_i d_i - b_i c_i|}, j = 1, 2, \dots, N$$

Contoh Similaritas Untuk Membangun Fraktal

Contoh SFI yang terbentuk dari similaritas beserta proses penggambarannya.

Contoh 1

Untuk pembentukan Gasket Sierpinski yang dimulai dengan bentuk awal sebagai

modal $\{(x, y) : (x\sqrt{3} + y \leq a\sqrt{3}) \wedge (x\sqrt{3} - y \geq 0) \wedge (y \geq 0)\}$, kita gunakan transfor-

masi berikut :

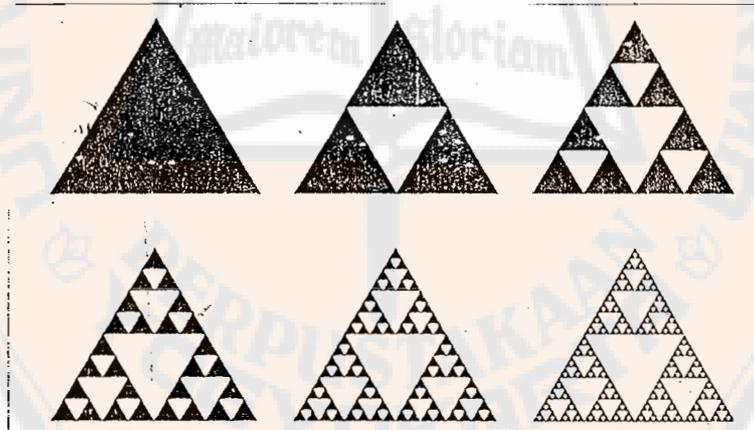
$$w_1: \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad s_1 = 0,5$$

$$w_2: \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a/2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad s_2 = 0,5$$

$$w_3: \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a/4 \\ \frac{a}{4}\sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad s_3 = 0,5$$

Jadi $W = w_1 \cup w_2 \cup w_3$ dan faktor kontraksinya adalah $s = 0,5$.

Atraktornya adalah hasil akhir dari konstruksi tersebut yaitu gasket Sierpinski



Gambar 3.11

Contoh 2

Untuk pembentukan Karpets Sierpinski yang dimulai dengan bentuk awal sebagai modal $\{(x,y): (x \leq a) \wedge (y \leq a) \wedge (x \geq 0) \wedge (y \geq 0)\}$, kita gunakan transformasi berikut

$$w_1 : \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, s_1 = 1/3$$

$$w_2 : \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a/3 \\ 0 \end{pmatrix}, s_2 = 1/3$$

$$w_3 : \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2a/3 \\ 0 \end{pmatrix}, s_3 = 1/3$$

$$w_4 : \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ a/3 \end{pmatrix}, s_4 = 1/3$$

$$w_5 : \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2a/3 \end{pmatrix}, s_5 = 1/3$$

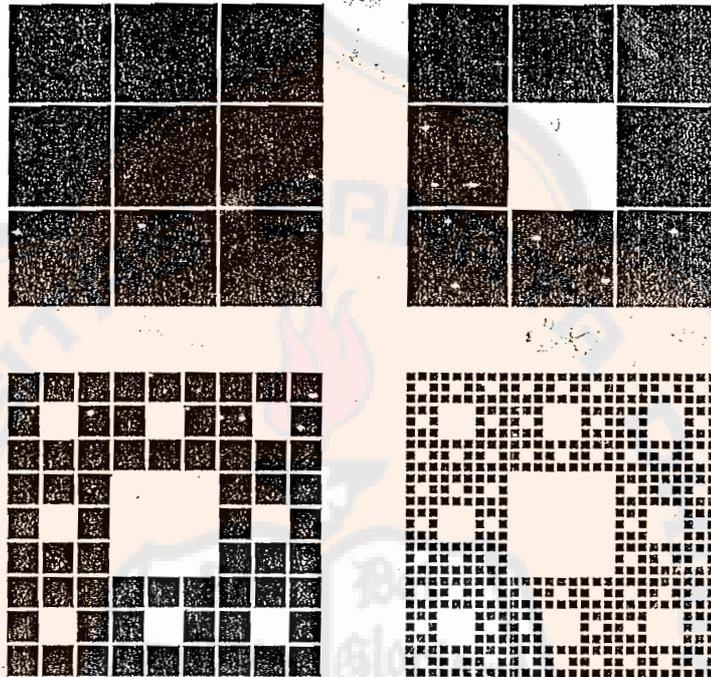
$$w_6 : \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a/3 \\ 2a/3 \end{pmatrix}, s_6 = 1/3$$

$$w_7 : \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2a/3 \\ a/3 \end{pmatrix}, s_7 = 1/3$$

$$w_8 : \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2a/3 \\ 2a/3 \end{pmatrix}, s_8 = 1/3$$

Jadi $W = w_1 \cup w_2 \cup w_3 \cup w_4 \cup w_5 \cup w_6 \cup w_7 \cup w_8$ dan faktor kontraksinya adalah $s = 1/3$. Atraktornya adalah hasil akhir dari proses tersebut yaitu karpet Sierpinski.

Sierpinski.



Gambar 3.12

Contoh 3

Untuk pembentukan kurva Von Koch yang dimulai dengan bentuk awal sebagai modal $E_0 = [0,1]$, kita gunakan transformasi yang membawa $[0,1]$ ke \mathbb{R}^2 sebagai berikut :

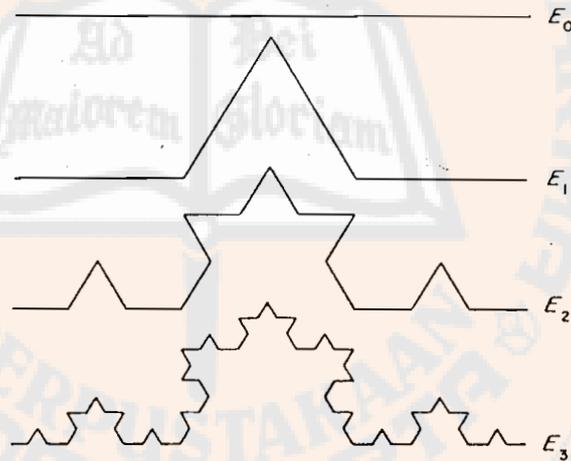
$$w_1 : \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad s_1 = 1/3$$

$$w_2: \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/3 \\ 0 \end{pmatrix}, s_2 = 1/3$$

$$w_3: \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/6 \end{pmatrix}, s_3 = 1/3$$

$$w_4: \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2/3 \\ 0 \end{pmatrix}, s_4 = 1/3$$

Jadi $W = w_1 \cup w_2 \cup w_3 \cup w_4$ dan faktor kontraksinya adalah $s = 1/3$. Atraktornya adalah hasil lengkap kurva Von Koch.



Gambar 3.13

Contoh Afinitas Untuk Membangun Fraktal

Contoh SFI yang terbentuk dari afinitas beserta proses penggambarannya.

Contoh 1 :

Untuk membuat bangun fraktal seperti karpet Sierpinski dengan modal

$\{(x,y):(y \geq 0) \wedge (x \geq 0) \wedge (x \leq a) \wedge (y \leq a)\}$ kita gunakan transformasi afin sebagai berikut

$$w_1: \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, s_1 = \sqrt{\frac{1}{18}}$$

$$w_2: \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2}{3}a \\ 0 \end{pmatrix}, s_2 = \sqrt{\frac{1}{18}}$$

$$w_3: \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{3}a \end{pmatrix}, s_3 = \sqrt{\frac{1}{18}}$$

$$w_4: \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{3}a \\ \frac{3}{6}a \end{pmatrix}, s_4 = \sqrt{\frac{1}{18}}$$

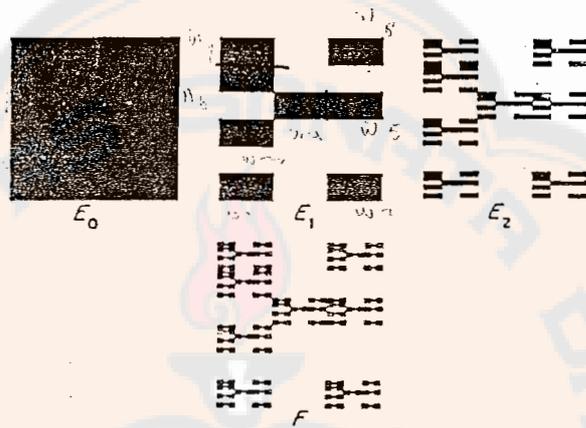
$$w_5: \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2}{3}a \\ \frac{3}{6}a \end{pmatrix}, s_5 = \sqrt{\frac{1}{18}}$$

$$w_6: \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{4}{6}a \end{pmatrix}, s_6 = \sqrt{\frac{1}{18}}$$

$$w_7: \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{5}{6}a \end{pmatrix}, s_7 = \sqrt{\frac{1}{18}}$$

$$w_8: \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2}{3}a \\ \frac{5}{6}a \end{pmatrix}, s_8 = \sqrt{\frac{1}{18}}$$

Jadi $W = w_1 \cup w_2 \cup w_3 \cup w_4 \cup w_5 \cup w_6 \cup w_7 \cup w_8$ dan faktor kontraksinya adalah $s = \sqrt{\frac{1}{18}}$. Atraktornya adalah hasil akhir dari proses tersebut.



Gambar 3.14

Contoh 2 :

Untuk membuat bangun fraktal seperti karpet Sierpinski yang lain dengan modal

$\{(x, y) : (y \geq 0) \wedge (x \geq 0) \wedge (x \leq a) \wedge (y \leq a)\}$ kita gunakan transformasi afin seba-

gai berikut

$$w_1 : \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{3}a \\ 0 \end{pmatrix}, \quad s_1 = \sqrt{\frac{1}{12}}$$

$$w_2 : \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{4}a \end{pmatrix}, \quad s_2 = \sqrt{\frac{1}{12}}$$

$$w_3: \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2}{3}a \\ \frac{1}{4}a \end{pmatrix}, s_3 = \sqrt{\frac{1}{12}}$$

$$w_4: \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{3}a \\ \frac{2}{4}a \end{pmatrix}, s_4 = \sqrt{\frac{1}{12}}$$

$$w_5: \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{4}a \end{pmatrix}, s_5 = \sqrt{\frac{1}{12}}$$

$$w_6: \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2}{3}a \\ \frac{3}{4}a \end{pmatrix}, s_6 = \sqrt{\frac{1}{12}}$$

Jadi $W = w_1 \cup w_2 \cup w_3 \cup w_4 \cup w_5 \cup w_6$ dan faktor kontraksinya adalah

$s = \sqrt{\frac{1}{12}}$. Atraktornya adalah hasil akhir dari proses tersebut.



Gambar 3.15

Contoh 3 :

Untuk membuat fungsi yang bersifat fraktal dengan modal

$\{(x,y):(y \geq 0) \wedge (x \geq 0) \wedge (x \leq a) \wedge (y \leq a)\}$ kita gunakan transformasi afin sebagai berikut

gani berikut

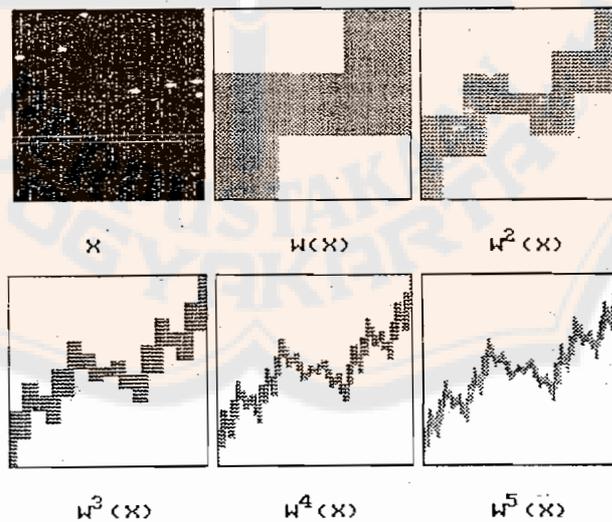
$$w_1: \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, s_1 = \frac{1}{3}\sqrt{2}$$

$$w_2: \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{3}a \\ \frac{1}{3}a \end{pmatrix}, s_2 = \frac{1}{3}$$

$$w_3: \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2}{3}a \\ \frac{1}{3}a \end{pmatrix}, s_3 = \frac{1}{3}\sqrt{2}$$

Jadi $W = w_1 \cup w_2 \cup w_3$ dan faktor kontraksinya adalah $s = \frac{1}{3}\sqrt{2}$

Atraktornya adalah hasil akhir dari proses tersebut.



Gambar 3.16

3.4.2. Konstruksi Geometri Fraktal pada Bidang Kompleks

Sebelum membahas contoh konstruksi tersebut, masih diperlukan pembahasan hal-hal yang berkaitan yang belum dibahas pada bagian sebelumnya.

Diberikan keluarga persamaan dari fungsi kompleks $Q(z)$, dan nilai awal z_0 yang merupakan bilangan kompleks, maka yang didefinisikan sebagai orbit adalah barisan dari titik-titik :

$z_0, z_1 = Q(z_0), z_2 = Q^2(z_0), \dots, z_n = Q^n(z_0), \dots$. Orbit tersebut merupakan hasil dari proses yang iteratif yang disebut **sistem dinamik**.

Fungsi Q^n merupakan komposisi fungsi dari fungsi Q , jadi $Q^n(z_0)$ adalah iterasi dari fungsi Q terhadap z_0 . Jika $Q(z) = z$, maka z disebut titik tetap dari Q . Jika untuk $Q^p(z) = z$, untuk bilangan bulat $p \geq 1$, maka z disebut **titik periodik** dari Q , dan p terkecil yang mengakibatkan $Q^p(z) = z$ disebut sebagai **periode** dari z .

Jika diberikan w suatu titik periodik dari Q^p dengan $(Q^p)'(z) = \lambda$, Q' turunan kompleks, maka titik w disebut :

superattractive jika $\lambda = 0$

attractive jika $0 < |\lambda| < 1$

indifferent jika $|\lambda| = 1$

repelling jika $|\lambda| > 1$

Untuk suatu keluarga fungsi kompleks $Q_c(z) = z^2 + c$, dengan c suatu konstanta kompleks, maka untuk setiap c yang berbeda akan menghasilkan sistem dinamik yang berbeda.

Sekarang kita melihat contoh proses konstruksi fraktal yang dibangun pada bidang kompleks. Sebagai contoh diambil fungsi kompleks $Q_c(z) = z^2 + c$.

Langkah-langkahnya yaitu :

1. Diberikan nilai awal z
2. Ganti z dengan $z^2 + c$
3. Ulangi langkah ke 2 demikian seterusnya.



Sekarang misalkan diberikan suatu nilai $c = 0,5i$ dan nilai awalnya $z_0 = 0,5i$.

$$\begin{aligned} \text{langkah 1 : } z_1 &= z_0^2 + c \\ &= -0,25 + 0,5i. \end{aligned}$$

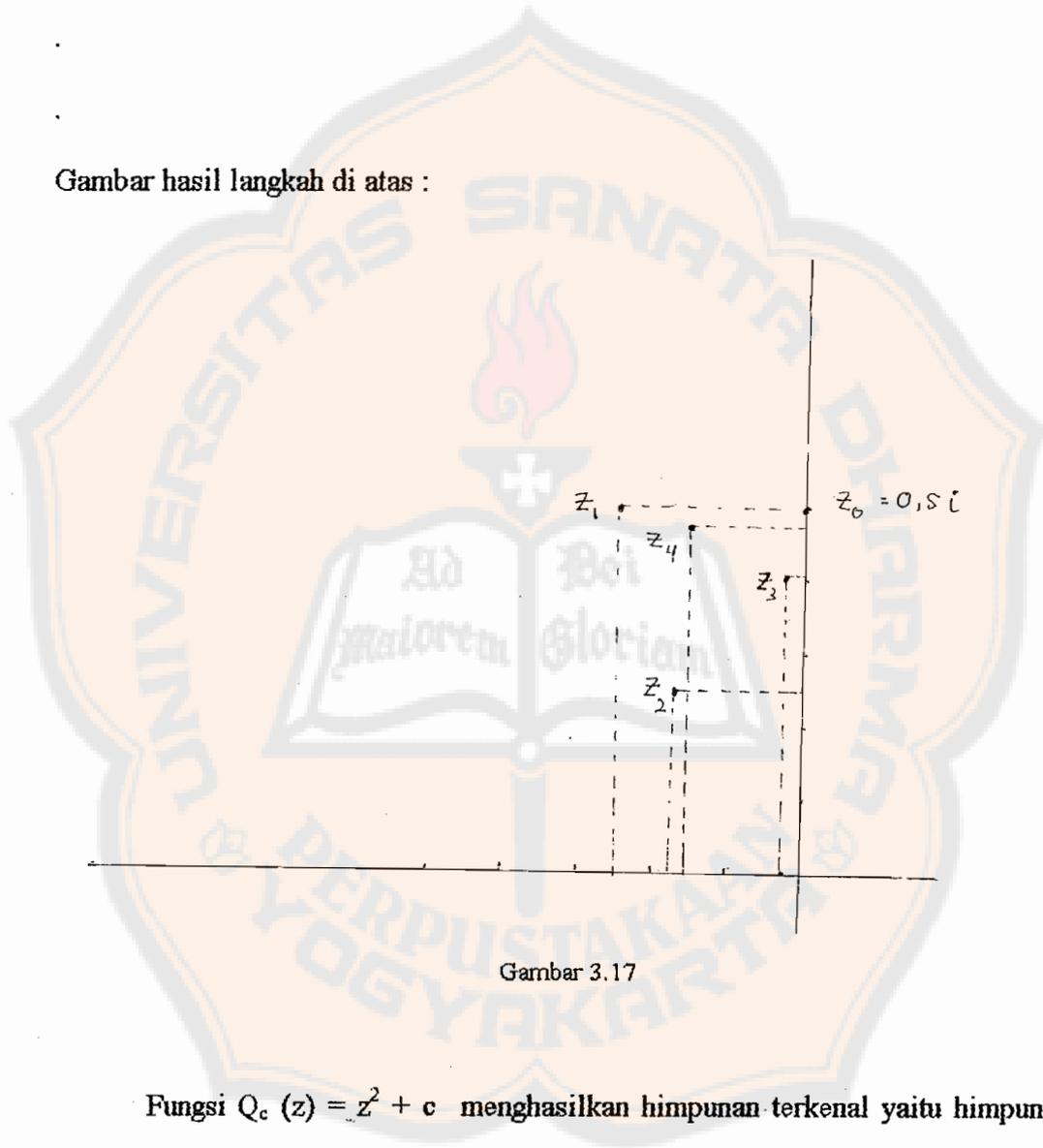
$$\begin{aligned} \text{langkah 2 : } z_2 &= z_1^2 + c \\ &= -0,1875 + 0,25i. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{langkah 3 : } z_3 &= z_2^2 + c \\ &= -0,02734375 + 0,40625i. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{langkah 4 : } z_4 &= z_3^2 + c \\ &= -0,16429138... + (0,47783203...)i. \end{aligned}$$

dst

Gambar hasil langkah di atas :



Gambar 3.17

Fungsi $Q_c(z) = z^2 + c$ menghasilkan himpunan terkenal yaitu himpunan Julia dan himpunan Mandelbrot.

Pada pemetaan di bidang kompleks ini, ada pemetaan tidak dapat mempertahankan bentuk, jadi sebetulnya sudah lepas dari sifat afin, akan tetapi hanya mendekati sifat afin atau dalam tulisan ini disebut hampir afin.

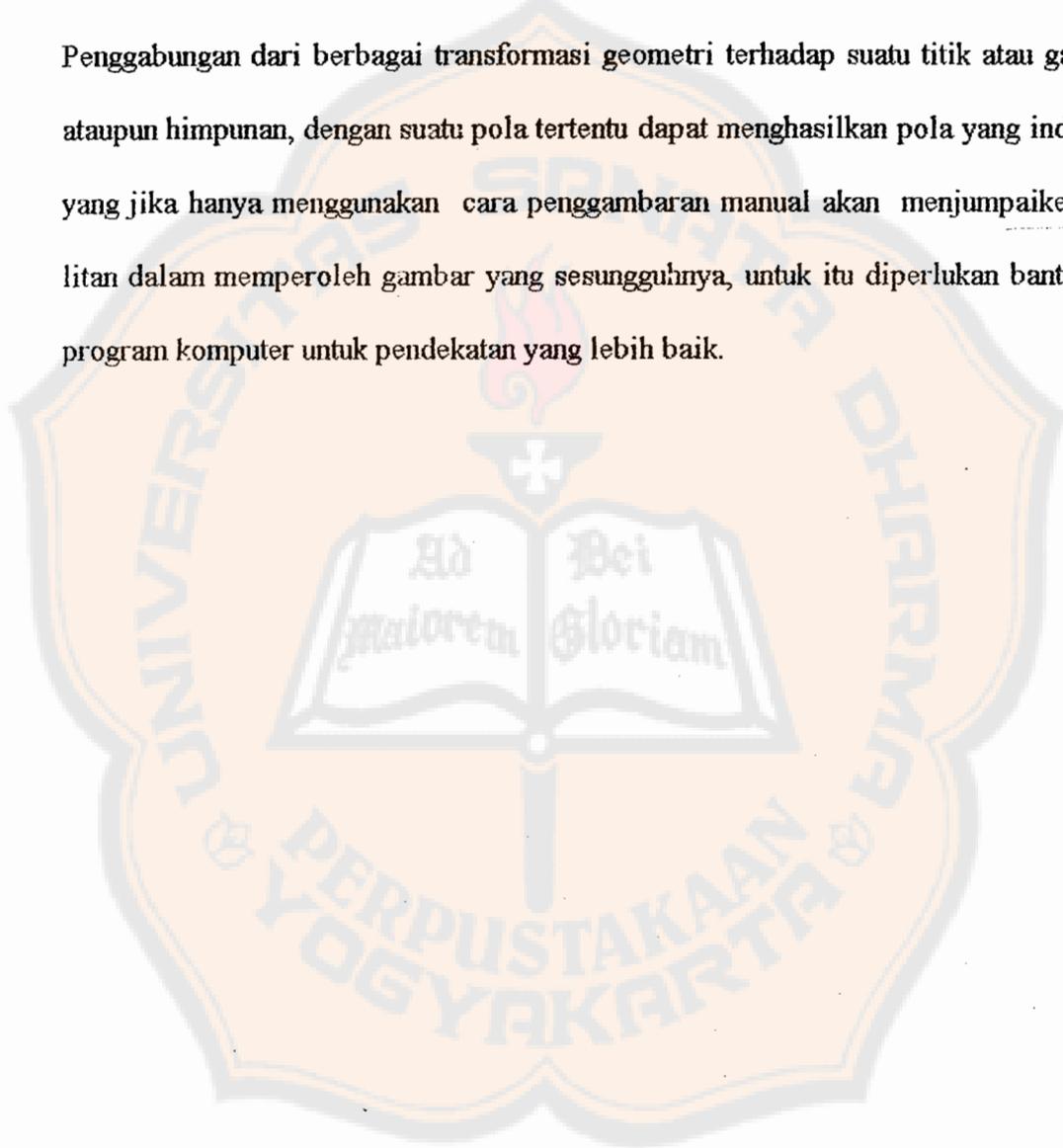
Hasil dari proses di atas belumlah cukup untuk disebut sebagai fraktal karena untuk membentuk suatu fraktal, proses tersebut dilakukan sampai tak berhingga kali. Dari proses-proses pembentukan fraktal di atas kita dapat mengambil kesimpulan tentang pola-pola fraktal sebagai berikut : Pola fraktal adalah himpunan bagian tak kosong yang kompak dari suatu ruang metrik yang lengkap, dan yang mempunyai ciri-ciri :

- afin diri atau hampir afin atau similar diri
- bentuk umum gambar tidak berubah pada tiap tingkat pembesaran
- kekasaran gambar terlihat jelas, pada setiap tingkat pembesaran.

Pola-pola yang bersifat fraktal inilah yang dikenal sebagai bangun-bangun dari geometri fraktal.

Pola fraktal banyak ditemukan dalam alam dan juga pada ekspresi fenomena matematis. Pola fraktal yang terdapat di alam contohnya yaitu struktur-struktur yang mikroskopis, pola daerah hujan, distribusi bintang, sungai, pulau, kepundan bulan, pohon-pohon (hutan) dan lain-lain. Sedangkan pola fraktal yang ditemukan dalam fenomena matematis contohnya antara lain : atraktor dari SFI, himpunan Julia, himpunan Mandelbrot, himpunan Cantor, dan lain-lain.

Geometri fraktal bukan lagi geometri yang merupakan hasil dari keteraturan pola garis-garis geometris yang teratur, namun meskipun tampak tidak teratur, untuk memperoleh polanya melalui proses yang ada aturannya, yaitu SFL. Penggabungan dari berbagai transformasi geometri terhadap suatu titik atau garis ataupun himpunan, dengan suatu pola tertentu dapat menghasilkan pola yang indah, yang jika hanya menggunakan cara penggambaran manual akan menjumpai kesulitan dalam memperoleh gambar yang sesungguhnya, untuk itu diperlukan bantuan program komputer untuk pendekatan yang lebih baik.



BAB IV

BEBERAPA TERAPAN GEOMETRI FRAKTAL

Dengan adanya bantuan program komputer, khususnya komputer grafik, geometri fraktal menjadi bukan hanya sekedar teori abstrak matematika, tetapi juga dapat dilihat, meskipun juga pendekatan, dan dinikmati keindahannya. Fraktal dalam perkembangannya menjadi cabang ilmu matematika yang memiliki bidang terapan sangat luas.

Dalam bagian ini akan dibahas beberapa terapan dari geometri fraktal yang dalam pembahasan dibagi dalam dua kelompok, yaitu yang disajikan pada bidang real dan yang disajikan pada bidang kompleks

4.1. Terapan Geometri Fraktal yang Disajikan pada Bidang Real

Terapan fraktal yang disajikan pada bidang real telah banyak ditemukan. Terapan-terapan itu seperti : terapan untuk gambar (pendekatan untuk gambar alam), interpolasi, kompresi citra, sistem penyandian, dan lain sebagainya. Dalam bagian ini akan dibahas secara teoretis dua dari terapan yang ada juga sedikit contoh untuk terapan yang sederhana.

4.1.1. Terapan Fraktal untuk Gambar

Terapan fraktal untuk gambar di sini yang dimaksudkan adalah gambar-gambar dari bentuk-bentuk alam. Alam merupakan bentuk tidak teratur, akan tetapi akan dapat dilihat bahwa dalam ketidakteraturannya, yang tampak oleh mata, alam mempunyai suatu keteraturan. Keteraturan yang dimaksudkan di sini merupakan keteraturan dalam pembeniukan objek alam tersebut yang dapat didekati oleh fraktal (secara matematis).

Prinsip dasar alam yang dapat didekati oleh fraktal adalah sifat similar diri dan afin diri atau hampir afin, yang tampak pada setiap bagiannya. Berdasarkan prinsip ini maka dapat disusun suatu SFI yang terdiri dari transformasi afin atau transformasi similar.

Untuk bagian ini diberikan beberapa contoh untuk pemahaman.

Contoh fraktal pohon

Untuk mendekati sebuah gambar pohon, ambil sebagai modal sebuah garis dari titik (0,0) sampai (0,r).

SFI nya terdiri dari transformasi-transformasi berikut ini :

$$w_1 = 0,8 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad s_1 = 0,8$$

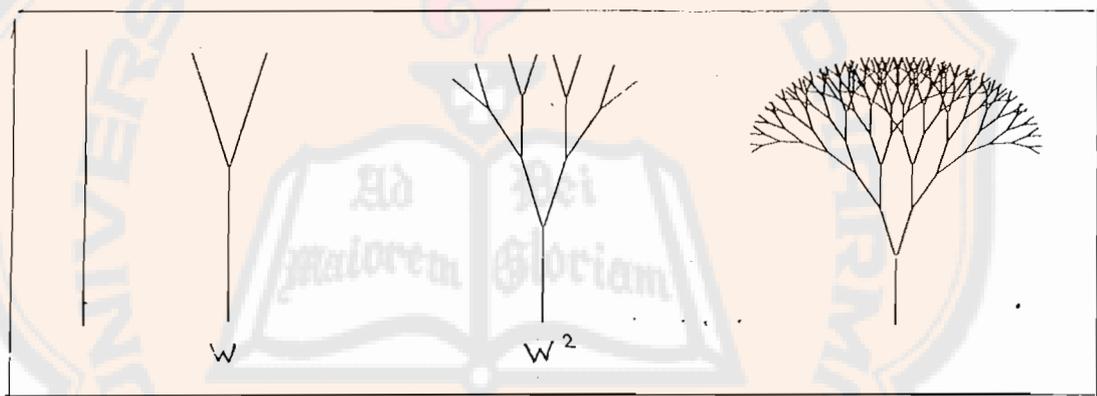
$$w_2 = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ -1 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0,8r \end{bmatrix} \quad s_2 = 0,5$$

$$w_3 = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0,8r \end{bmatrix} \quad s_3 = 0,5$$

Ketiga transformasi di atas merupakan transformasi similaritas.

$W = w_1 \cup w_2 \cup w_3$ dan $s = 0.8$.

Atraktornya adalah gambar pohon (gambar 4.1).



Gambar 4.1

Contoh fraktal daun

Untuk mendekati sebuah gambar daun, ambil sebagai modal suatu bangun yang mempunyai titik-titik sudut sebagai berikut :

$$(0,0), (45,30), (50,60), (22,40), (0,100), (-22,40), (-50,60), (-45,30)$$

SFI nya terdiri dari transformasi-transformasi berikut ini :

$$w_1 = 0,65 \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 15 \end{bmatrix} \quad s_1 = 0,65$$

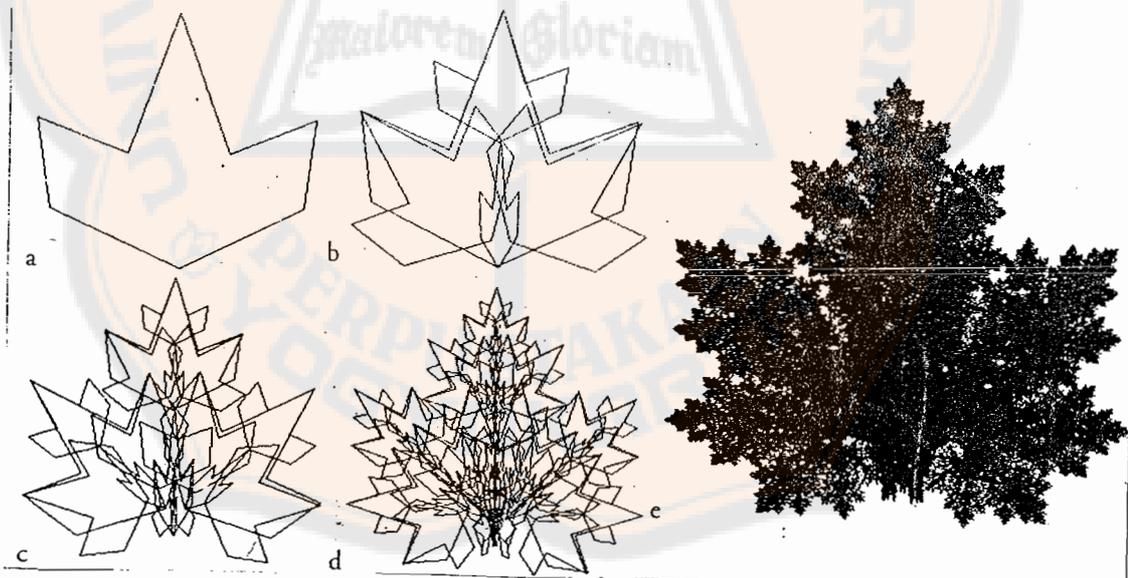
$$w_2 = 0,65 \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 15 \end{bmatrix} \quad s_2 = 0,65$$

$$w_3 = 0,55 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 45 \end{bmatrix} \quad s_3 = 0,55$$

$$w_4 = 0,55 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad s_4 = 0,55$$

$W = w_1 \cup w_2 \cup w_3 \cup w_4$ dan $s = 0,65$

Atraktornya adalah gambar daun (gambar 4.2).



Gambar 4.2

Contoh fraktal gunung

Untuk mendekati gambar gunung, ambil sebagai modal suatu persegi panjang dengan titik-titik sudutnya sebagai berikut ;

$$(0,0) , (t,0) , (t,h) , (0,h)$$

SFI nya terdiri atas transformasi-transformasi berikut ini :

$$w_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & 0 \\ -\frac{3h}{8t} & \frac{2}{8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{3}{8}h \end{bmatrix} \quad s_1 = \frac{1}{12}\sqrt{6}$$

$$w_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & \frac{2}{8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{6}t \\ 0 \end{bmatrix} \quad s_2 = \frac{1}{12}\sqrt{6}$$

$$w_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{3h}{8t} & \frac{2}{8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{2}{6}t \\ 0 \end{bmatrix} \quad s_3 = \frac{1}{12}\sqrt{6}$$

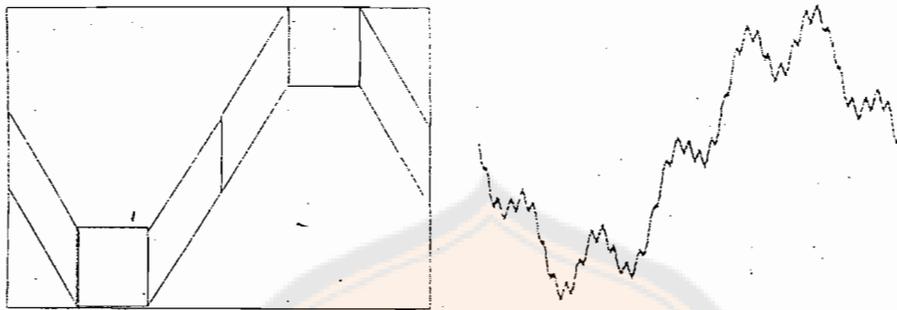
$$w_4 = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{3h}{8t} & \frac{2}{8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{3}{6}t \\ \frac{3}{8}h \end{bmatrix} \quad s_4 = \frac{1}{12}\sqrt{6}$$

$$w_5 = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & \frac{2}{8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{4}{6}t \\ \frac{6}{8}h \end{bmatrix} \quad s_5 = \frac{1}{12}\sqrt{6}$$

$$w_6 = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & 0 \\ -\frac{3h}{8t} & \frac{2}{8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{5}{6}t \\ \frac{6}{8}h \end{bmatrix} \quad s_6 = \frac{1}{12}\sqrt{6}$$

$$W = w_1 \cup w_2 \cup w_3 \cup w_4 \cup w_5 \cup w_6 \quad \text{dan} \quad s = \frac{1}{12}\sqrt{6}$$

Atraktornya adalah gambar gunung (gambar 4.3)



Gambar 4.3

4.1.2. Interpolasi Fraktal

Di dalam suatu percobaan ataupun pengamatan, biasanya kita mengukur dan mencatat nilai-nilai atau data dari suatu fungsi real $f(x)$ sebagai fungsi dari variabel real x . Untuk memperoleh gambaran yang lebih jelas dari percobaan tersebut biasanya pula kita terlebih dahulu memplot titik tersebut pada suatu kertas grafik, lalu titik-titik tersebut dianalisis secara geometris yaitu didekati dengan suatu kurva ataupun garis. Kurva yang sering kita gunakan merupakan suatu fungsi polinomial, transendental, elementer, atau gabungan dari fungsi-fungsi tersebut. Masalah yang dikemukakan di atas dikenal sebagai masalah interpolasi.

Secara singkat masalah interpolasi tersebut dapat dirumuskan sebagai berikut : masalah interpolasi adalah masalah untuk menentukan sebuah titik di antara dua buah titik yang diketahui.

Dalam bagian ini akan diperkenalkan suatu interpolasi yang disebut interpolasi fraktal sebagai salah satu metode interpolasi.

Telah diketahui bahwa setiap himpunan tertutup dan terbatas dalam \mathbb{R}^2 adalah kompak. Atraktor dapat diperoleh dengan memetakan sebarang himpunan kompak dalam \mathbb{R}^2 menggunakan SFI. Sekarang permasalahannya adalah akan dibangun suatu SFI pada \mathbb{R}^2 yang atraktornya merupakan kurva yang melalui himpunan data $\{(x_i, F_i), i = 0, 1, 2, \dots, N\}$. Himpunan data tersebut kita namakan **titik kontrol** dari interpolasi. SFI dari interpolasi fraktal adalah suatu himpunan transformasi afin yang khusus yaitu transformasi afin yang mentransformasikan garis sejajar sumbu-y ke garis sejajar sumbu-y juga atau merupakan pelingsiran, jadi transformasi-transformasi tersebut berbentuk :

$$w_n \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a_n & 0 \\ c_n & d_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_n \\ f_n \end{bmatrix},$$

dengan $n = 1, 2, \dots, N$ dan N sama dengan jumlah data dikurang satu. Jadi jika diberikan tiga titik kontrol maka hanya diperlukan dua buah transformasi.

Sifat objek fraktal adalah afin diri atau similar diri sifat ini mengakibatkan kurva yang menghubungkan (x_0, F_0) hingga (x_N, F_N) mempunyai pola yang sama dengan kurva yang menghubungkan dua titik kontrol, dengan demikian setiap kurva yang menghubungkan dua titik kontrol dapat dianggap sebagai hasil pemetaan dari kurva yang menghubungkan (x_0, F_0) hingga (x_N, F_N) .

Elemen-elemen transformasi, a_n , c_n , d_n , e_n , dan f_n dapat diperoleh menggunakan titik-titik data yang diberikan. Kita lihat pembahasan berikut ini. Karena w_n digunakan untuk membuat kurva yang menghubungkan (x_{n-1}, F_{n-1}) hingga (x_n, F_n) maka w_n dapat dinyatakan dengan :

$$w_n \begin{pmatrix} x_0 \\ F_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ F_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$w_n \begin{pmatrix} x_N \\ F_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ F_n \end{pmatrix}$$

maka diperoleh :

$$a_n x_0 + e_n = x_{n-1}$$

$$a_n x_N + e_n = x_n$$

$$c_n x_0 + d_n F_0 + f_n = F_{n-1}$$

$$c_n x_N + d_n F_N + f_n = F_n$$

Jadi elemen-elemen a_n , c_n , e_n , dan f_n dapat dinyatakan dalam x_0 , x_n , x_{n-1} , F_0 , F_n , F_{n-1} dan d_n yaitu :

$$a_n = \frac{(x_n - x_{n-1})}{(x_N - x_0)}$$

$$e_n = \frac{(x_N x_{n-1} - x_0 x_n)}{(x_N - x_0)}$$

$$c_n = \frac{(F_n - F_{n-1} - d_n(F_N - F_0))}{(x_N - x_0)}$$

$$f_n = \frac{((x_n F_{n-1} - x_0 F_n) - d_n(x_N F_0 - x_0 F_N))}{(x_N - x_0)}$$

Transformasi w_n memetakan garis yang sejajar sumbu-y ke garis yang sejajar sumbu-y, namun dengan panjang yang berbeda. Besar $|d_n|$ menunjukkan perbandingan antara panjang garis sesudah dipetakan dengan panjang garis sebelum dipetakan, itulah yang menyebabkan mengapa d_n digunakan sebagai parameter.

Contoh :

Misalkan diketahui 3 titik data sebagai titik kontrol A(0,0), B(6,5), dan C(12,0). Untuk menyusun SFI yang digunakan untuk mengkonstruksi grafik yang melalui ketiga titik tersebut diperlukan dua buah transformasi. Dimisalkan pula kita ambil besar d sebagai parameter adalah 0,5.

Maka berdasarkan persamaan di atas didapat :

$$a_1 = 0,5 \quad , \quad e_1 = 0 \quad , \quad c_1 = 5/12 \quad , \quad f_1 = 0$$

$$a_2 = 0,5 \quad , \quad e_2 = 0 \quad , \quad c_2 = -5/12 \quad , \quad f_2 = 0$$

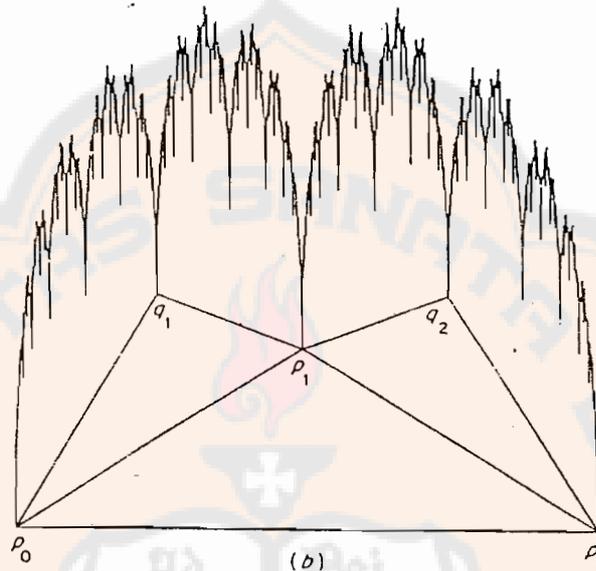
Jadi transformasi yang digunakan untuk menyusun SFI tersebut adalah :

$$w_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{5}{12} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad s_1 = 1/2$$

$$w_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{5}{12} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \end{bmatrix} \quad s_2 = 1/2$$

$W = w_1 \cup w_2$ dan faktor kontraksinya adalah $s = 1/2$.

Atraktornya adalah fungsi fraktal yang melalui ketiga titik kontrol tersebut (gambar 4.4)



Gambar 4.4

Untuk dua terapan lain yang disebutkan di atas yaitu kompresi citra dan sistem penyandian tidak dibahas secara teoritis. Berikut ini hanya diberi sedikit penjelasan tentang kedua hal tersebut yang termasuk di dalam terapan pada bidang real.

Fraktal untuk Penyimpanan Gambar pada Storage Komputer

Untuk penyimpanan suatu gambar pada storage komputer diperlukan alokasi (memori) yang cukup besar. Teknik untuk mengurangi penggunaan alokasi tempat penyimpanan dikenal sebagai teknik *kompresi* (compression). Pada bagian ini akan dibahas teori dari kompresi tersebut menggunakan fraktal.

Dalam pembahasan sebelumnya telah diketahui tentang penggunaan SFI untuk menggambarkan struktur fraktal ataupun gambar-gambar yang rumit berdasarkan suatu modal awal yang sederhana. Dengan menggunakan kebalikan dari metode ini, maka metode penggambaran fraktal dapat diterapkan untuk kompresi. Atau dapat pula dikatakan bahwa untuk permasalahan kompresi, kita mencari suatu SFI dan modal awal berdasarkan gambar ataupun data yang diketahui, sehingga jika nanti dikembalikan akan diperoleh suatu atraktor berupa gambar ataupun data yang semula diketahui. Modal awal inilah yang disimpan dalam storage komputer.

Berikut ini akan disajikan langkah-langkah untuk teknik kompresi fraktal berdasarkan teori yang diketahui :

1. Andaikankan diberikan suatu gambar yang akan disimpan dalam storage komputer.
2. Bagilah gambar tersebut menjadi beberapa bagian, jika gambar yang diberikan terdiri atas berbagai struktur yang rumit.
3. Dari masing-masing bagian tersebut dicari SFI dan modal awal
4. Simpan masing-masing modal awal dari tiap bagian tersebut pada storage komputer beserta SFI nya

Fraktal untuk Sistem Penyandian

Seseorang yang ingin mengirim suatu pesan tanpa diketahui ataupun terbaca pihak lain (bukan pihak yang dituju), biasanya menggunakan suatu simbol-simbol untuk

menuliskan pesan tersebut. Simbol-simbol ini dikenal sebagai sandi. Sandi yang paling dikenal oleh banyak orang adalah sandi morse, sandi semapore, sandi rumput dan sandi angka. Karena mempunyai tujuan tertentulah orang menggunakan sandi sehingga banyak sekali muncul sistem penyandian, berdasarkan kesepakatan dua belah pihak yang ingin berhubungan menggunakan sandi.

Pada bagian ini akan dilihat penggunaan fraktal untuk sistem penyandian, yang mempunyai kemungkinan pemecahan kode sandi oleh pihak lain termasuk paling sukar. Prinsip dasar sistem penyandian fraktal mirip dengan yang digunakan untuk kompresi, yaitu pesan yang akan disandikan dicari suatu SFI nya serta modal awal yang nantinya jika dioperasikan akan diperoleh suatu atraktor berupa pesan yang kita inginkan. Modal awal dan kode-kode SFI ini yang kita kirimkan pada yang dituju.

4.2. Terapan Geometri Fraktal yang Disajikan pada Bidang Kompleks

Terapan fraktal yang disajikan pada bidang kompleks lebih banyak pada seni, karena gambar yang dihasilkan adalah gambar-gambar yang indah. Gambar-gambar yang lebih banyak dikenal adalah gambar-gambar dari pemetaan dengan fungsi kompleks $Q_c(z) = z^2 + c$, dengan variasi gambar sesuai nilai c , yang merupakan konstanta kompleks, serta daerah penggambaran. Gambar-gambar ini dikenal sebagai himpunan Julia dan himpunan Mandelbrot.

Berikut ini akan ditampilkan kedua himpunan tersebut sebatas sebagai perkenalan beserta algoritma penggambarannya pada komputer dan juga contoh beberapa gambar hasil penggambaran komputer.

Himpunan Julia

Diberikan $Q_c(z) = z^2 + c$, c konstanta kompleks. Orbit dari z dikatakan terbatas jika terdapat bilangan positif M sedemikian sehingga $|Q_c^n(z)| < M$ untuk semua n . Himpunan semua titik z yang orbitnya terhadap pemetaan Q_c terbatas disebut **himpunan Julia penuh** (*filled Julia set*) dari pemetaan Q_c , dan batas dari himpunan Julia penuh tersebut disebut himpunan Julia dari pemetaan Q_c .

Contoh Algoritma untuk menggambar himpunan Julia pada komputer :

1. Tentukan banyaknya maksimum iterasi yang akan dikerjakan oleh komputer, misalkan sebesar N .
2. Untuk setiap z dalam suatu daerah pada bidang kompleks yang ditentukan, komputasikan N titik yang pertama dari orbitnya.
3. Bila untuk suatu titik z diperoleh $|Q_c^n(z)| > \max\{|c|, 2\}$ untuk $n \leq N$, iterasi dihentikan dan titik z diberi warna putih.
4. Bila untuk suatu z diperoleh $|Q_c^n(z)| \leq \max\{|c|, 2\}$, untuk semua $n \leq N$, maka z diberi warna hitam.

5. Dapat dibuktikan bahwa titik-titik yang berwarna hitam tersebut merupakan gambar pendekatan untuk himpunan Julia penuh dari Q_c .

Untuk memperoleh gambar yang lebih indah dapat digunakan cara mengganti warna-warna tersebut dengan warna lain, yang dapat diambil secara acak dari komputer. Berikut disajikan contoh gambar dari himpunan Julia yang penggambarannya didekati dengan proses menggunakan komputer



Gambar 4.5

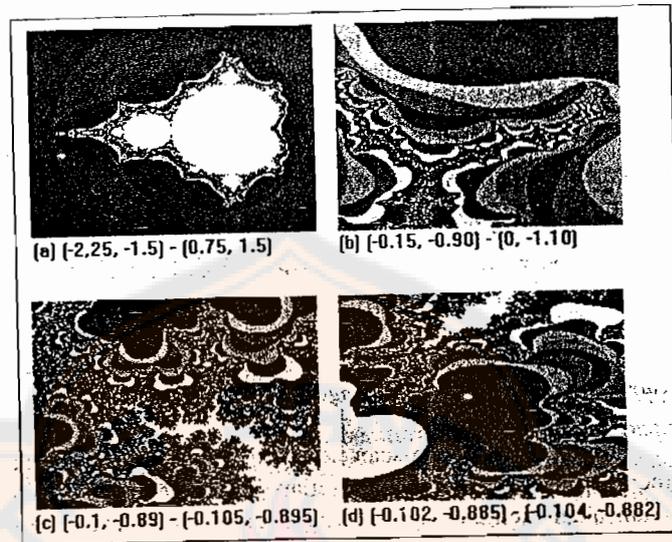
Himpunan Mandelbrot

Himpunan Mandelbrot merupakan himpunan semua titik c dalam bidang kompleks yang mempunyai sifat bahwa orbit dari titik kritis $z = 0$, terhadap pemetaan Q_c adalah terbatas. Karena jika $|c| > 2$ orbit titik $z = 0$ menuju tak berhingga, maka hal ini menyebabkan himpunan Mandelbrot hanya terletak dalam lingkaran dengan pusat 0 dan jari-jari 2.

Contoh algoritma untuk menggambar himpunan Mandelbrot pada komputer :

1. Tentukan jumlah maksimal iterasi yang akan dilakukan komputer, misalnya sebesar N .
2. Untuk setiap titik c dalam suatu daerah pada bidang kompleks yang ditentukan, komputasikan N titik-titik yang pertama dari orbit titik kritis $z = 0$, terhadap pemetaan Q_c .
3. Jika $|Q_c^n(0)| > 2$, untuk suatu $n \leq N$, iterasi dihentikan dan diberi warna putih.
4. Jika $|Q_c^n(0)| \leq 2$, untuk semua $n \leq N$, maka c diberi warna hitam.
5. Titik-titik berwarna hitam ini merupakan gambar pendekatan untuk himpunan Mandelbrot.

Berikut ini contoh gambar himpunan Mandelbrot beserta contoh pembesaran-pembesaran pada beberapa bagian



Gambar 4.6

Dua himpunan yang dibicarakan di atas beserta contoh gambarnya merupakan contoh untuk fungsi kompleks yang berbentuk $Q_c(z) = z^2 + c$, dengan c konstanta kompleks. Untuk memperoleh hasil-hasil lain yang lebih bervariasi dapat digunakan fungsi-fungsi yang melibatkan fungsi trigonometri, fungsi elementer, polinom berderajat lebih dari dua, ataupun gabungannya.

BAB V

KESIMPULAN

Ruang metrik $H(X)$ yang dilengkapi dengan Hausdorff h yang ditimbulkan oleh metrik d dalam ruang metrik lengkap X , disebut sebagai ruang fraktal dan ditulis $(H(X), h)$. $(H(X), h)$ adalah lengkap. Anggota-anggota dari $(H(X), h)$ adalah subhimpunan tak kosong yang kompak dari ruang metrik lengkap (X, d) .

Himpunan berhingga pemetaan kontraksi disebut sebagai SFI, menggunakan SFI inilah suatu himpunan tak kosong yang kompak subhimpunan dari ruang metrik lengkap, dibawa kesuatu atraktor yang merupakan fraktal. Pemetaan yang digunakan dalam membentuk SFI untuk mengkonstruksi bangun fraktal dapat merupakan transformasi similaritas atau transformasi afin atau gabungan keduanya, atau pemetaan pada bidang kompleks.

Bidang real \mathbb{R}^2 merupakan ruang metrik yang lengkap jika dilengkapi dengan metrik Euclides. Karena tiap subhimpunan yang tertutup dan terbatas dalam bidang real adalah kompak, maka jika terhadap sebarang subhimpunan tersebut dikenakan suatu SFI maka akan menghasilkan suatu atraktor yang merupakan fraktal.

Sifat bangun fraktal yang paling umum adalah self similaritas dan self afin atau mendekati afin, struktur bangun cenderung sama dalam tiap tingkat pembesaran, dan kekasaran gambar terlihat dalam tiap tingkat pembesaran

Dengan bantuan program komputer, gambar fraktal lebih dapat didekati daripada menggunakan penggambaran manual, menggunakan bantuan komputer pula fraktal semakin dapat dirasakan kegunaannya.



DAFTAR PUSTAKA

1. Anton, H. , Aljabar Linear Elementer , Jakarta, Penerbit Erlangga, 1988.
2. Barnsley, M. , Fractals Everywhere , Boston , Academic Press, 1988.
3. Devaney, Robert L. , An Introduction to Chaotic Dynamical Systems, California, They Benjamin/Cummings , 1986.
4. Devaney, Robert L. , Chaos, Fractals, and Dynamics, Computer Experiments in Mathematics, New York, Addison-Wesley , 1990.
5. Falconer, K., Fractal Geometry, Mathematical Foundations and Applications, New York, John Wiley , 1989.
6. Frans Susilo, Himpunan Julia dan Klasifikasinya dalam Himpunan Mandelbrot , Yogyakarta, dalam : F.Susilo dan St Susento (Ed), "Percikan Matematika" , Universitas Sanata Dharma, 1996.
7. Janoe Hendarto dan Suprpto, Penggunaan Pola Fraktal dalam Perancangan Motif Kain , Yogyakarta, Lembaga Penelitian Universitas Gadjah Mada, 1996.
8. Mark Finlay & Keith Blanton, Real-World Fractals , New York, MIS Press Inc, 1993.
9. Nur Rokhman, Metode Interpolasi Fraktal untuk Merepresentasikan Objek Alam , Yogyakarta, FMIPA Universitas Gadjah Mada, 1993.
10. Oliver, D. Memandang Realita dengan FractalVision, Yogyakarta, Penerbit ANDI, 1997.

11. Paliouras, J. D. , Peubah Kompleks untuk Ilmuwan dan Insinyur, Jakarta , Penerbit Erlangga, 1987.
12. Patty, C. Wayne, Foundations of Topology, Boston, PWS, 1993.
13. Rawuh, Geometri Transformasi , Bandung, Departemen Pendidikan dan Kebudayaan Dirjen Dikti Proyek Pembinaan Tenaga Kependidikan Tinggi, 1992.
14. Sumantri, R. , Fungsi Kontinu yang Tak Terdiferensial di manapun, Suatu Konstruksi dengan Pemetaan Kontraksi pada Ruang Fraktal dan Peragaannya dengan Komputer , Yogyakarta, Rumpun MIPA Universitas Sanata Dharma, 1997.
15. Susanta, B. , Geometri Transformasi, Yogyakarta, F MIPA UGM, 1990.
16. Tannenbaun, P. and Arnold, R. , Excursions in Modern Mathematics, New Jersey, Prentice Hall , 1992.
17. Wibawa Utama, Geometri Fraktal Bahasa Indah Matematika, Mikrodata volume 6 seri 11, Jakarta, PT Elex Media Komputindo, 1996.
18. Wono Setyo Budhi, Aljabar Linear , Jakarta , PT Gramedia Pustaka Utama, 1995.